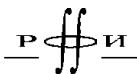


УДК 539.374
ББК 22.251+33.14
С 73



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 03-01-14140*

Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 232 с. — ISBN 5-9221-0411-X.

Монография посвящена одному из разделов механики деформируемого твердого тела: трехмерной теории устойчивости состояния равновесия окологорных выработок для сжимаемых и несжимаемых упругопластических и упруговязкопластических моделей горных пород. Представлены результаты по линеаризованным задачам теории пластичности сложных сред методом малого параметра. В рамках общей трехмерной линеаризированной теории устойчивости малых деформаций изложена теория устойчивости горных выработок, разработан общий подход к решению цилиндрических и сферических задач устойчивости механики для указанных моделей. Рассмотрены случаи горизонтальных и вертикальных выработок, а также подземных полостей, подкрепленных многослойными крепями. Дано приложение теории к деформированию и устойчивости целиков, бурящихся скважин, слоистых массивов, оболочек с заполнителем и т. д.

Предназначена для специалистов по механике неупругого деформируемого тела и горных пород, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов вузов, занимающихся вопросами устойчивости пространственных тел и конструкций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упругопластических сред	
1.1. Уравнения, определяющие процесс деформирования упрочняющихся упругопластических сред	19
1.2. Постановка задач об устойчивости деформирования упругопластических сред. Линеаризированные соотношения	23
1.3. О самосопряженности задач и условиях применимости метода Эйлера	31
1.4. Представление общих решений трехмерных уравнений устойчивости для однородных основных состояний	37
1.5. Основные соотношения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел в цилиндрической и сферической системах координат	45
1.6. Метод решения статических упругопластических задач устойчивости. Алгоритм поиска критических нагрузок	56
Глава 2. Моделирование процессов деформирования и устойчивости горных выработок в упрочняющихся упруговязкопластических массивах	
2.1. Неустойчивость полупространства со сферической полостью	60
2.2. Неустойчивость полупространства с вертикальной цилиндрической выработкой кругового поперечного сечения	70
2.3. Неустойчивость полупространства с горизонтальной выработкой	75
2.3.1. Упруговязкопластическое состояние круговой цилиндрической трубы, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления	76
2.3.2. Линеаризация по малому параметру соотношений теории течения	78
2.3.3. Линеаризированные граничные условия и условия сопротяжения на упругопластической границе	79
2.3.4. Линеаризация по малому параметру функции нагрузления упруговязкопластического тела	80

2.3.5. Линеаризованные соотношения трансляционной теории сложных сред. Плоскодеформированное состояние	81
2.3.6. Алгоритм решения упруговязкопластической задачи методом малого параметра	84
2.3.7. Устойчивость цилиндрической горизонтальной выработки с круговым поперечным сечением	85
2.3.8. Устойчивость цилиндрической горизонтальной горной выработки с эллиптическим поперечным сечением	94
2.3.9. Устойчивость горизонтальной цилиндрической горной выработки с поперечным сечением близким к правильному многоугольнику	103
2.4. Неустойчивость цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при осевом сжатии	116
2.5. Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических массивах	121
Глава 3. Моделирование процессов деформирования горных выработок с многослойными крепями	
3.1. Уравнения, определяющие процесс деформирования упругопластических сред	130
3.2. Математическая модель горного массива с выработкой и определение напряжений в многослойных крепях вертикальных и горизонтальных выработок	133
3.3. Математическая модель горного массива вне области выработки и определение напряжений в массиве возле подкрепленных вертикальных и горизонтальных выработок	138
3.4. Определение поля напряжений в горном массиве, содержащем сферическую выработку, подкрепленную многослойной крепью	140
Глава 4. Моделирование отказов горизонтальных, вертикальных и сферических горных выработок, подкрепленных многослойными разномодульными крепями при неупругой работе массива и крепи	
4.1. Моделирование отказа горизонтальной выработки с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород	146
4.2. Моделирование отказа вертикальной выработки с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород	161
4.3. Исследование устойчивости многослойной разномодульной крепи вертикальной горной выработки в массивах, обладающих упругопластическими свойствами	171

4.4. Моделирование отказа сферической выработки с многослойной крепью	177
4.5. Исследование устойчивости многослойной разномодульной крепи сферической выработки в массивах, обладающих упругопластическими свойствами	183
4.6. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов	187
Г л а в а 5. Исследование устойчивости задач горной механики при однородных докритических состояниях	
5.1. Неустойчивость свободной поверхности	192
5.2. Определение оптимальных поперечных размеров ленточных и цилиндрических целиков	195
5.2.1. Определение оптимального поперечного размера ленточного целика	197
5.2.2. Определение оптимального поперечного размера цилиндрического целика	201
5.3. Неустойчивость бесконечного упруговязкопластического пространства с круговой цилиндрической полостью	204
5.4. Неустойчивость деформирования слоистых массивов, упрочняющихся в пластических средах	206
5.5. Неустойчивость неоднородного полупространства	208
Список литературы	212

Предисловие

Монография посвящена одному из основных вопросов исследования в механике горных пород — устойчивости горных выработок.

Трактовка разрушения горного массива около выработки, как следствие достижения напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих локальной потери устойчивости, ведет свое начало от основоположника этого направления исследований в горной механике Л.В. Ершова.

Проблеме локальной неустойчивости горных выработок, проведенных в массивах с неупругой зоной, посвящен ряд статей, в том числе и авторов настоящей монографии. Эти исследования выполнены, в основном, в рамках трехмерной теории устойчивости деформируемых тел с привлечением приближенного подхода. В строгой линеаризированной трехмерной постановке практически оставались неизученными классы задач о состоянии равновесия горного массива возле выработок для сложных моделей сред.

В монографии излагаются осионы трехмерной линеаризированной теории устойчивости для сжимаемых и несжимаемых упругопластических и упруговязкопластических моделей горных пород. Разработан общий подход решения цилиндрических и сферических задач устойчивости горной механики.

Изложены результаты решения линеаризированных задач теории пластичности сложных сред методом малого параметра.

В монографии впервые приводятся результаты исследований локальной потери устойчивости горных выработок и подземных полостей подкрепленных многослойными крепями.

Введение

В механике горных пород одним из основных объектов исследования являются горные выработки. Анализ возможности разрушения массива возле них с учетом его последствий, а также разработка конструктивно-технологических мероприятий, обеспечивающих безаварийное функционирование выработок, определяют актуальность проблемы.

Разрушение горного массива возле выработки может произойти в результате следующих причин:

- достижение в массиве возле выработки напряженно-деформированным состоянием пределов прочности;
- достижение напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих локальной потере устойчивости возле выработки с последующими изменениями и переходом к разрушению.

Исследование первой ситуации является предметом внимания и активно разрабатываемой проблемой для большого числа специалистов по механике горных пород [65, 119, 120, 178 и др.]. Исследование второй ситуации посвящены статьи, часть которых выполнена с привлечением приближенного подхода в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Теорию устойчивости горных выработок, вообще говоря, следует рассматривать как одно из приложений общей трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.

Локальная потеря устойчивости сильно напряженных частей массива возле выработки может быть начальным этапом процесса разрушения, особенно при пластических деформациях.

Использовать методы механики твердых деформируемых тел для определения упругого напряженно-деформированного состояния массива в окрестности выработки впервые стали С.Г. Михлин [190], А.Н. Динник, Г.Н. Савин, А.Б. Моргаевский [110]. Однако натурные наблюдения показали [133], что вокруг выработки формируется зона неупругих деформаций, имеющая размеры в 2–9 метров. Это обстоятельство дало толчок для широкого использования в расчетах моделей неупругих тел, в частности, модели упругопластического тела.

Исследования устойчивости состояния равновесия горного массива возле выработок развиваются на протяжении послед-

них 35–40 лет. Первой работой в этом направлении была опубликованная в 1962 г. статья Л.В. Ершова [125]. В последующие годы выполнены исследования отдельных задач, результаты которых изложены в работах Л.В. Ершова, М.Т. Алимжанова и других авторов [8, 9–11, 19, 21, 23–25, 122, 126, 132]. Общим для указанных выше работ и ряда других является применение приближенного подхода в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Сущность этого подхода заключается в том, что вместо линеаризированных уравнений устойчивости применяются линейные уравнения, а параметры нагружения вводятся в граничные условия. Это обстоятельство существенно упрощает решение задач и дает возможность легко получить конкретные результаты.

Первоначально решение проблем устойчивости основывалось преимущественно на статическом критерии Эйлера. Основные результаты исследований, выполненных в такой постановке, отражены во многих монографиях: Ф. Блейха, А.С. Вольмира, Б.Г. Галёркина, А.Н. Динника, А.А. Ильюшина, А.Р. Ржаницина, С.П. Тимошенко, [47, 57, 63, 109, 147, 210, 267, 268]. Однако исследования, проведенные В.В. Болотиным, Я.Г. Пановко, Н.Н. Губановой, Г. Циглером [48, 204, 276, 277] показали, что методы, основанные на бифуркации форм равновесия, имеют ограниченную область применения. Статические методы пригодны только в случае консервативных систем, а для неконсервативных систем следует рассматривать процесс движения системы во времени, т. е. использовать динамические методы.

Ф. Эигессер, Ф.С. Ясинский и Т. Карман развили теорию устойчивости сжатых стержней за пределом упругости. В осиовую отыскания критических сил ими был положен тот же статический критерий Эйлера, который применялся в задачах устойчивости упругих систем. В настоящее время теория неупругой устойчивости [99, 100] является самостоятельным разделом механики, создавшая свои методы и подходы и имеющая приложения практически во всех отраслях промышленности и строительства. Однако большинство задач устойчивости ставилось и решалось для тонкостенных конструкций в рамках прикладных теорий пластин, оболочек и стержней с введением вспомогательных гипотез. К настоящему времени сформировалась теория устойчивости деформируемых тонкостенных конструкций, что нашло отражение в работах [51, 215, 274 и др.]. Проблемы же трехмерной теории долгое время оставались почти неизученными. Под трехмерными задачами теории устойчивости следует понимать исследования, в которых не привлекаются двумерные теории пластин и оболочек и одномерные теории стержней.

Оценки погрешностей прикладных теорий, решение задач устойчивости для толстостенных конструкций, задачи тектони-

ки и горной механики, теория поверхностных явлений, задачи полимерных и армированных материалов и ряд других областей естествознания и техники потребовали разработки трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Одной из важнейших сторон трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел является исследование отдельных классов задач с сугубо трехмерным или двумерным (для плоских и осесимметричных задач) состоянием, к решению которых нельзя привлечь теорию устойчивости тонкостенных деформируемых систем. При решении таких классов задач в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел предполагается применение критерий устойчивости, соответствующих хорошо зарекомендовавшим себя критериям теории устойчивости тонкостенных деформируемых систем.

Для построения трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел обычно используют следующие два положения.

Первое положение заключается в том, что в основном (докритическом) и возмущенном состояниях действуют одни и те же внешние нагрузки, а напряженно-деформированное состояние среды описывается соотношениями одной и той же нелинейной теорией деформируемых тел.

Второе положение состоит в том, что возмущения являются значительно меньшими величинами по сравнению с величинами докритического состояния. Таким образом, по постановке задачи возмущения являются сколь угодно малыми величинами. Следовательно, в линеаризированной механике деформируемых тел (даже при малых начальных деформациях), начальные деформации (деформации невозмущенного состояния) следует считать конечными величинами по отношению к возмущениям.

Исходя из соображений физического характера, Р.В. Саусвелл (R.V. Southwell) [305], а позднее С.В. Бицено и Г. Генки (С.В. Biezeno, Н. Hencky) [291], вывели трехмерные уравнения упругой устойчивости при малых докритических деформациях. М.А. Био (M.A. Biot) [293, 295] вывел соотношения трехмерной теории устойчивости деформируемых тел путем линеаризации уравнений нелинейной теории упругости, Е. Треффтц (E. Trefftz) [308, 309] — вариационным методом при некоторых допущениях. Р. Каппус (R. Kappus) [302], используя идеи Е. Треффтца, впервые получил строго линеаризованные уравнения движения деформируемого тела при конечных докритических деформациях, а для частного случая — при малых деформациях.

Результаты многочисленных публикаций М.А. Био (M.A. Biot) по трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых упругих тел нашли отражение в его монографии [292], которая является первой монографией по трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Позже линеаризированные соотношения трехмерной теории устойчивости деформируемых тел были получены в лагранжевых координатах В.В. Новожиловым [198, 199] и авторами работы [299] для изотропного упругого тела с произвольной формой упругого потенциала. В дальнейшем трехмерные линеаризированные задачи механики деформируемого тела при конечных докритических деформациях рассматривались также в работах А. Грина и Дж. Адкинса, А.И. Лурье, А.Н. Гузя, И.Ю. Бабича, А.Н. Спорыхина [85, 87, 88, 92, 97, 99 101, 184, 218, 219, 224, 227, 230, 231, 247–249, 306] и других авторов.

А.Н. Гузь показано, что результаты исследований явления внутренней и поверхностной неустойчивости [79, 80] для упругих и упругопластических моделей деформируемых тел, вычисленные в рамках приближенного подхода, могут качественно и количественно не согласовываться с соответствующими результатами трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (второй вариант теории малых докритических деформаций). Сделанный вывод в полной мере относится и к результатам теории устойчивости горных выработок, получаемым с позиции приближенного подхода.

Вопросам устойчивости деформирования сложных сред в трехмерной постановке посвящено сравнительно небольшое количество исследований, так как сложность уравнений движения для большинства реологических моделей приводит в задачах устойчивости к значительным математическим трудностям. В работах [145, 148, 149] были выполнены первые исследования в этой области. А.А. Ильюшин [149] впервые описал в лагранжевых координатах вязкопластическое течение. Методом близких движений исследованы задачи устойчивости течений полосы и цилиндра, нагруженных осевой силой, а также вязкопластической трубы, находящейся под действием внутреннего давления. В работе А.Ю. Ишлинского [148] для решения задачи о течении полосы и круглого прута при сжатии и растяжении использован метод Эйлера. А.Н. Спорыхиным [223–233] исследовалась устойчивость деформирования упрочняющихся упруговязкопластических тел при малых докритических деформациях, в частности, рассмотрено выпучивание толстостенной трубы под действием внутреннего давления [226] и толстых плит при сжатии [223]. С. Загорски (S. Zahorski) [311, 312], исходя из линеаризованных уравнений устойчивости [299] и пользуясь динамическим критерием устой-

чивости, исследовал устойчивость медленных установившихся движений нелинейно-вязкоупругого и упругопластического материала при конечных докритических деформациях.

При исследовании устойчивости равновесия или движения трехмерных тел с реологическими свойствами применяется [85, 88, 92] критерий устойчивости, состоящий в том, что состояние равновесия или движения считается устойчивым, если возмущения во времени затухают, и неустойчивым, если возрастают. Раиес [148, 207, 208] был предложен аналогичный критерий устойчивости в теории ползучести тонкостенных элементов конструкций. Для упрощения задач часто вводятся дополнительные предположения [84].

В монографии А.Н. Спорыхина [257], на основе построенных систем уравнений и общих идей теории возмущений, развита трехмерная линеаризированная теория устойчивости сложных сред (в том числе с учетом случайной структуры) при малых (строгая постановка) и больших (приближенная постановка) докритических деформациях и теория устойчивости нелинейно-упругих сред в «большом». Разработаны подходы и методы решения трехмерных задач устойчивости механики деформируемых тел с усложненными свойствами. Дана постановка и получено решение классов задач при однородных и неоднородных докритических состояниях для различных моделей сред. Установлены новые эффекты и явления для рассматриваемых задач.

Применение теории устойчивости деформируемых тел в механике горных пород осуществляется в двух направлениях: первое связано с исследованием задач о складкообразовании в толще земной коры (задачи об устойчивости слоистых сред); второе — с исследованием задач устойчивости горных выработок (устойчивость формы контура выработки, когда докритическое состояние определяется в результате решения задачи о концентрации напряжений).

Впервые М.А. Био (M.A. Biot) [292–295] применил к исследованию плоских задач о складкообразовании линеаризованную (инкрементальную) теорию устойчивости деформируемых тел, построенную им с привлечением некоторых соображений физического характера. В последующие годы Ж.С. Ержапов и его сотрудники [116, 117] развили теорию земной коры в случае прерывистой, куполовидной и линейной складчатости с привлечением подхода Лейбензона–Ишлинского.

К основным задачам теории устойчивости горных выработок можно отнести следующие задачи об устойчивости:

- вертикальных горных выработок (устойчивость шахтных стволов);
- горизонтальных горных выработок;

- подземных полостей;
- ленточных, цилиндрических и др. целиков;
- крепей горных выработок.

В каждом из указанных классов задачи различаются как по принятой модели для описания свойств горных пород (упругое, упругопластическое, вязкоупругое, и т. д.), так и по форме по-перечного сечения выработки, по виду граничных условий на поверхности выработки (по принятой модели крепи) и по ряду других специфических особенностей.

Задачи об определении критического значения горного давления для горизонтальных и вертикальных горных выработок рассмотрены в работах [122, 123, 126] применительно к отдельным моделям горных пород. Дальнейшее развитие эти исследования нашли в работах [12–14, 21, 233 и др.]. Решения этих задач были получены с привлечением приближенного подхода.

Применение соотношений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел к исследованию задач устойчивости в геомеханике было положено работой А.Н. Гуза [75]. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах Ж.С. Акопяна [1–6, 200], Ф.М. Асамидинова [37, 38, 169], И.Ю. Бабича [39, 40, 42, 200], Г.Н. Баклановой [39, 45], А.Н. Гуза [3, 4, 5, 38–40, 76, 80, 84, 98], Л.В. Дериглазова [106–108, 200], Г.Г. Кулиева [38, 94, 168, 169], С.Б. Лобовика [42, 179–181], А.В. Навояна [5–7, 44, 98, 192], В.М. Назаренко [194–196], А.Н. Спорыхина [218, 231, 234–238, 241, 244, 246, 251, 252, 260–262, и др.], А.И. Шашкина [66, 189, 258, 244, 250, 253, 236, 240, 248, 281, 283–285]. Значительное число публикаций, относящихся к решению задач об устойчивости горизонтальных и вертикальных шахтных стволов с круглыми, эллиптическими, квадратными поперечными сечениями и сферических полостей для хранения нефтепродуктов выполнены для упругой (с различной изотропией) модели массива горных пород, что отражено в [6, 84, 98]. В работах [39, 42, 45, 84] рассмотрена устойчивость выработок при предположении, что массив горных пород подчиняется теории малых упругопластических деформаций при степенном упрочнении. При этом не допускалось существования поверхности раздела между областью упругих и неупругих деформаций. Для сложных моделей горных пород с наличием поверхности раздела зон упругого и неупругого деформирования устойчивость выработок рассматривалась в работах [66, 194–196, 232, 233, 236, 248, 250, 253, 258].

Вариационный метод решения задач устойчивости горных выработок, для различных моделей массива горных пород, изложен в работе [84].

Устойчивость упругого, упругопластического равновесия целиков на основе различных вариантов теории малых начальных деформаций линеаризованной механики рассматривалась в работах [16, 248, 284 и др.]. Целики — это участки зализы полезного ископаемого, оставляемые в процессе разработки месторождений камерно-столбовой системой. К основным недостаткам такой системы разработки относятся значительные потери полезного ископаемого в междукамерных целиках. Именно поэтому с углублением работ возрастает актуальность проблемы определения оптимальных размеров целиков. Под оптимальным размером понимается такой размер, который является экономичным по расходу полезного ископаемого, с одной стороны, и обеспечивает устойчивое состояние равновесия целика — с другой. Проведенные до настоящего времени исследования касаются только ленточных и цилиндрических целиков. Основное предположение, принимаемое в большинстве публикаций по этому вопросу, заключается в том, что докритическое состояние целиков считается однородным. В работе [14] в рамках приближенного подхода определены оптимальные размеры ленточных целиков из упругого и упрочняющегося упругопластического материалов. В уточненной постановке [14], когда в уравнениях равновесия учитываются углы поворота и в граничных условиях сохраняются члены того же порядка малости, решена задача определения оптимального размера ленточного целика из упругого песчаникового материала. С позиций приближенного подхода в работе [121] определено критическое давление на боковые стенки ленточного целика из упрочняющегося упругопластического материала и количество необходимых штанг для крепления целика. Исследована зависимость оптимального радиуса цилиндрического целика [14] от значений упругих констант: модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Показано, что осесимметричной формы потери устойчивости цилиндрического целика в пределах упругих деформаций не происходит.

Численный анализ и практика эксплуатации горных выработок, как отмечено в работах [16, 84, 110] показывает, что применение упругого (как изотропного так и анизотропного) тела в качестве модели массива горных пород не отражает реальную картину процессов вблизи глубоких выработок. Это обусловлено тем, что напряжения, соответствующие критическому состоянию породы вокруг выработки, во много раз превышают предел прочности горной породы. В связи с этим порода вокруг выработки перейдет в состояние неупругого деформирования раньше, чем произойдет локальная потеря ее устойчивости. При этом наиболее достоверные результаты исследования устойчивости горных выработок получаются [16, 84] при привлечении более

сложных моделей, как наиболее полно отражающих поведение горных пород.

Что касается вопросов о крепях, то здесь главной задачей является определение минимальной (оптимальной) толщины монолитной крепи, обеспечивающей устойчивость подземных выработок. Проанализируем известные решения этой проблемы, основанные на использовании теории устойчивости деформируемых тел. Почти во всех выполненных до настоящего времени исследованиях [14, 18, 282] использовался приближенный подход Лейбензона–Ишлинского, а сами постановки задач являлись сугубо приближенными. В работе [14] отмечается, что «вопрос об исходных данных для расчета легких и экономичных подкрепляющих конструкций в подземных выработках нельзя считать решенным, поскольку в расчетных формулах не учтены те факторы, от которых в основном и зависят эти данные». Давление на внешнюю поверхность крепи (давление горных пород) в большинстве работ никак не определяется и считается независящим от физико-механических свойств горного массива и глубины. Таким образом, задача определения оптимальной толщины крепи выработки в существующих исследованиях полностью отождествляется с задачей устойчивости толстостенной оболочки, находящейся под действием постоянной внешней нагрузки [128, 130]. Однако, как показывают исследования [151 и др.], нагрузка на крепь в первую очередь определяется перемещениями горной породы и образованием зоны неупругого деформирования. Остановимся подробнее на задачах, выполненных в такой постановке.

В работе [14] определена оптимальная толщина цилиндрической крепи для случая, когда материал частично перешел в пластическое состояние. Докритическое напряженно-деформированное состояние считалось симметричным, а прочность материала, перешедшего в предельное состояние, оценивалась по прямолинейной огибающей кругов Мора. Решение определялось в рамках плоского и трехмерного осесимметричного подходов. Приведены значения толщин крепи, при которых на ее внутренней поверхности возникает предельное состояние. Определению оптимальных толщин сферических крепей из несжимаемого идеально-пластического материала посвящены работы [14, 18]. При этом в работе [18] в качестве условия пластичности принималось условие Треска, а в работе [14] — уравнение состояния среды с внутренним трением и сцеплением. Показано, что потеря устойчивости может произойти до того, как крепь исчерпает свою несущую способность, т. е. полностью перейдет в пластическое состояние.

В работе [282] впервые расчет крепи проводился совместно с расчетом проявления горного давления. Из решения задачи

о докритическом состоянии в ней определялось давление на крепь выработки как контактное давление на границе крепи и массива. При найденной таким образом нагрузке на внешнюю поверхность крепи, далее определялся такой внутренний радиус крепи, при котором она может потерять устойчивость.

Одной из наиболее сложных задач в разделе математической теории пластичности является пространственная упругопластическая (упруговязкопластическая) задача. Сложность уравнений для большинства реологических моделей сред приводит к значительным трудностям принципиального характера, кроме того, в таких задачах граница раздела областей упругого и пластического деформирования заранее неизвестна, и ее нужно определять в ходе решения. Одним из методов, позволяющих получить приближенное аналитическое решение подобных задач, является метод возмущений, основанный на введении величин, малых по сравнению с некоторыми данными, так или иначе «возмущающих» те или иные исходные решения. Применению этого метода в механике деформируемого твердого тела посвящена монография Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова [142]. В обзорных статьях и монографиях М.Т. Алимжанова, А.Н. Гуза, А.Н. Спорышина [14, 16, 99, 100, 257] отражено состояние исследований в теории устойчивости трехмерных деформируемых тел, проведенных с помощью метода возмущений.

Л.А. Галин [64] для случая плоской деформации в 1946 г., а Г.П. Черепанов для случая плоского напряженного состояния в 1963 г. [278] дали точное решение задачи о двухосном растяжении плоскости с круговым отверстием. Взяв в качестве малого параметра полуразность растягивающих напряжений, отнесенных к пределу пластичности Д.Д. Ивлев [142] показал, что найденные им четыре приближения методом малого параметра для задач Л.А. Галина и Г.П. Черепанова в точности совпадают с соответствующими разложениями точных решений по тому же малому параметру. Схема Д.Д. Ивлева позволяет определить и последующие приближения. Однако оказалось, что для описания точного решения Л.А. Галина достаточно двух, а для описания решения Г.П. Черепанова — четырех приближений [142]. Н.Н. Остросаблин [202] получил точное решение для перемещений в задаче Л.А. Галина.

Д.Д. Ивлев и Л.В. Ершов [142] рассмотрели случай, когда пластическая зона развивается от некоторой границы и целиком охватывает ее. В рамках такого подхода в публикациях [17, 24, 25, 59–61, 142, 185, 187, 214] и некоторых других было получено решение ряда двухмерных и трехмерных задач.

Г.И. Быковцев и Ю.Д. Цветков [53–55] применили общий подход к решению задачи нахождения упругопластической границы, когда пластическая зона носит локальный характер, т.е.

не охватывает весь контур. В рамках предложенной ими схемы в работах [55, 275] была решена задача об определении положения границы раздела упругой и пластической зон при кручении стержня эллиптического поперечного сечения.

В.Д. Клюшников в работе [162] предложил метод решения упругопластических задач, основанный на разложении по малому параметру нагружения. Метод разложения по малому параметру нагружения применялся и в работах [135–138].

В работах [35, 36, 67, 163, 165, 206, 255] авторы, основываясь на схеме Ивлева–Ершова, получили приближенные решения задач о растяжении плоскости из упрочняющегося упругопластического и упруговязкопластического материала с круговым, эллиптическим и многоугольным отверстием, подверженных действию внутреннего давления. Развитие этого подхода на упругопластические задачи с включениями дано в публикациях [164, 166] и др. Та же схема использована и в работах [260, 261] и некоторых других при решении задач упругопластического кручения стержней различной формы.

Таким образом, в первой половине прошлого столетия были получены уравнения движения в напряжениях и граничные условия трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел при малых и копечных докритических деформациях. В последующие годы второй половины прошлого столетия разрабатывались общие вопросы трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел и были решены многие задачи устойчивости (в основном для однородных докритических состояний упругих тел).

В настоящее время получено достаточно много результатов по общим вопросам и по решению отдельных классов задач при однородных и неоднородных докритических состояниях с использованием сложных моделей сред, актуальных для различных областей естествознания, в том числе и для механики горных пород. Это и вызвало необходимость написания монографии.

Монография состоит из пяти глав.

Первая глава посвящена развитию трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых сложных сред при малых докритических деформациях. Изложение трехмерной теории устойчивости дано в единой форме для следующих моделей сред: упругопластических, упруговязкопластических, скимаемых упругопластических. Построены решения уравнений динамической, квазистатической и статической устойчивости при однородных докритических состояниях. Исследованы общие вопросы трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Доказана возможность исследования устойчивости процесса деформирования по предельной системе уравнений;

установлены типы краевых условий, допускающие применение статических методов определения потери устойчивости, развита теория устойчивости сложных сред на конечном интервале времени. Существенное внимание уделено разработке методов решения конкретных классов граничных задач при однородных и неоднородных докритических состояниях.

Вторая глава посвящена моделированию процессов деформирования и устойчивости горных выработок в упрочняющихся упруговязкопластических массивах. Исследуется неустойчивость полупространства со сферической, вертикальной и горизонтальной полостями.

Получены разложения по малому параметру соотношений теории течения упрочняющегося упруговязкопластического тела, граничных условий и соотношений на упругопластической границе. Дан анализ полученных уравнений для величин любого порядка, построены уравнения, используемые для решения рассматриваемых задач в случае плоской деформации. Устанавливается тип дифференциальных уравнений для напряжений и перемещений в пластической зоне. Излагается алгоритм решения упруговязкопластической задачи методом малого параметра.

В третьей главе строится математическая модель горного массива с выработками, подкрепленными многослойными крепями. Определяется напряженно-деформированное состояние в массиве и каждом слое многослойных крепей вертикальных и горизонтальных выработок. Найдены поля напряжений около вертикальной и горизонтальной выработок с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород. Определяется поле напряжений в горном массиве, содержащем сферическую выработку, подкрепленную многослойной крепью. Исследуется напряженно-деформированное состояние пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов.

Четвертая глава посвящена исследованию устойчивости горизонтальных, вертикальных и сферических выработок, подкрепленных многослойными (N -слойными) крепями в горных массивах для упругопластической среды с трансляционным упрочнением в предположении, что слои (крепей) работают совместно без проскальзывания и отставания, а также с учетом разномодульности крепей.

Пятая глава посвящена исследованию устойчивости задач горной механики при однородных докритических состояниях с позиции трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Рассматривается неустойчивость полупространства со свободной границей из сжимаемого упруговязкопластического тела при сжатии. Определяются оптимальные поперечные размеры

ленточных и цилиндрических целиков. Исследовано явление поверхности неустойчивости бесконечного пространства с круговой цилиндрической полостью. Рассмотрена неустойчивость деформирования слоистых массивов, упрочняющихся в упруго-вязкопластических средах.

Получено решение задачи о неустойчивости неоднородного полупространства находящегося под действием гравитационного поля и горизонтального сжатия.

При написании монографии авторы придерживались обозначений и аппарата исследования, принятых в большинстве отечественных научных публикациях в данной области, отдавая предпочтение при изложении материала своим работам.

Г л а в а 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Постоянно расширяющийся интерес исследователей к задачам устойчивости механики горных пород, решаемым в рамках точных трехмерных уравнений свидетельствует об их актуальности. Явления потери устойчивости реализуются в основном при неупругих деформациях, поэтому при изучении этого процесса используются модели деформирования, учитывающие одновременно упругие, вязкие, пластические, дилатансионные и другие свойства горных пород и материалов. Наибольшее распространение получили две теории пластичности — теория малых упругопластических деформаций (деформационная теория) и теория течения. Достаточно подробно эти теории изложены в работах [56, 140, 141, 143, 144, 147, 150], а также в работе [85]. Описание трехмерной теории устойчивости для этих вариантов теорий пластичности дано в работах [84, 85, 88, 92, 99, 100, 257].

В настоящей главе в рамках простейших и в тоже время хорошо зарекомендовавших себя на практике моделей сложных сред для изотермических процессов изложена трехмерная теория устойчивости деформируемых сред при малых докритических деформациях. В основу материала этой главы легли, в основном, результаты исследований [99, 100, 223, 226, 227, 230, 231, 238, 241, 242, 243, 257].

1.1. Уравнения, определяющие процесс деформирования упрочняющихся упругопластических сред

Будем считать горную породу сплошной средой, напряженное состояние которой характеризуется симметричным тензором напряжений σ_j^β . Напряженно-деформированное состояние такой среды будет определяться соотношениями геометрических линейной теории, что вполне оправдано для достаточно эластичных сред. Приведем основные соотношения этой теории.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0, \quad (1.1.1)$$

где символ ∇_j обозначает ковариантную производную по j -ой компоненте; X_j — массовые силы.

Границные условия таковы:

а) в усилиях на части поверхности S_1 тела

$$N_j \sigma_\beta^j = P_\beta, \quad (1.1.2)$$

где N_j — орты нормали к поверхности S_1 тела, P_β — составляющие вектора поверхностных сил;

б) в перемещениях на части поверхности S_2 тела

$$u_\beta = U_\beta. \quad (1.1.3)$$

Малые деформации среды могут быть охарактеризованы симметричным тензором деформации с компонентами $\varepsilon_{\alpha\beta}$, который связан с компонентами вектора перемещений u_β соотношениями Коши

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j. \quad (1.1.4)$$

Если в теле наряду с упругой зоной (V^e) существует и пластическая зона (V^p), то на границе раздела этих областей S должны выполняться условия непрерывности перемещений:

$$[u_j]|_S = 0 \quad (1.1.5)$$

и поверхностих сил

$$\left[N_j \sigma_\beta^j \right]|_S = 0. \quad (1.1.6)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе S . По повторяющимся индексам, если особо не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Присоединяя к уравнениям линейной теории (1.1.1)–(1.1.6) уравнения состояния для зоны упругого и пластического деформирования среды, получим замкнутую математическую задачу.

Связь между напряжениями и деформациями в упругой зоне будем определять законом Гука

$$\sigma_j^\beta = \lambda \varepsilon_\varepsilon^a g_j^\beta + 2\mu \varepsilon_j^\beta, \quad (1.1.7)$$

где λ и μ — параметры Ламе, g_j^β — смешанные компоненты метрического тензора.

В зоне пластического деформирования будем использовать следующие модели упругопластической среды.

Модель несжимаемого упруговязкопластического тела [223] с поверхностью нагружения

$$F \equiv \left(s_j^\beta - c \dot{\varepsilon}_j^{p\beta} - \eta e_j^{p\beta} \right) \left(s_\beta^j - c \dot{\varepsilon}_\beta^{pj} - \eta e_\beta^{p\beta} \right) - k^2 = 0. \quad (1.1.8)$$

Здесь и далее индексы «*e*» и «*p*» вверху обозначают, что соответствующие величины относятся к упругой или пластической области тела соответственно. $e_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3} \sigma_k^k g_j^i$ — компоненты девиатора тензора напряжений.

Полная деформация в пластической зоне слагается из упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ составляющей

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (1.1.9)$$

причем, упругие деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ связаны с напряжениями законом Гука (1.1.7). Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{nn}^p = 0. \quad (1.1.10)$$

Скорости пластической деформации $\dot{e}_{ij}^p = 0$, если

$$\left(s_j^\beta - c \dot{\varepsilon}_j^{p\beta} \right) \left(s_\beta^j - c \dot{\varepsilon}_\beta^{pj} \right) < k^2.$$

Здесь \dot{e}_{ij}^p — значения пластических деформаций, достигнутых к моменту разгрузки.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций на основании ассоциированного закона течения определяются следующим образом:

$$\dot{e}_j^\beta = \psi \left(s_j^\beta - c \dot{\varepsilon}_j^{p\beta} - \eta e_j^{p\beta} \right), \quad (1.1.11)$$

если выполняется условие пластичности (1.1.8). Здесь η — коэффициент вязкости, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести материала, ψ — положительный скалярный множитель.

Очевидно, полагая в соотношениях (1.1.8)–(1.1.11) $\eta = 0$, приходим к модели [56, 141, 150] несжимаемой упругопластической среды с трансляционным упрочнением с поверхностью нагружения вида

$$F \equiv \left(s_j^\beta - c \dot{\varepsilon}_j^{p\beta} \right) \left(s_\beta^j - c \dot{\varepsilon}_\beta^{pj} \right) - k^2 = 0. \quad (1.1.12)$$

Ассоциированный закон течения в этом случае записывается следующим образом:

$$\dot{e}_j^\beta = \psi \left(s_j^\beta - c \dot{\varepsilon}_j^{p\beta} \right). \quad (1.1.13)$$

Для модели упруговязкопластического тела, которая учитывает необратимую сжимаемость, функцию нагружения выберем в виде [257]

$$F \equiv \alpha\sigma + \sqrt{\left(s_j^\beta - c\varepsilon_j^{p'\beta} - \eta e_j^{p'\beta}\right)\left(s_\beta^j - c\varepsilon_\beta^{p'j} - \eta e_\beta^{p'j}\right)} - k = 0, \quad (1.1.14)$$

где α — скорость дилатансии; $\varepsilon_j^{p'\beta}$, $e_j^{p'\beta}$ — компоненты девиатора тензора пластических деформаций и, соответственно, девиатора скоростей пластических деформаций; $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_k^k$ — среднее нормальное напряжение.

Соотношения, определяющие зависимость между компонентами тензора скоростей пластических деформаций и напряжениями, принимаются в форме [141]

$$e_j^\beta = \psi \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^\beta} + \psi_1(\sigma) \delta_j^\beta, \quad \psi_1(\sigma) = \frac{d\varphi_1}{d\sigma}, \quad (1.1.15)$$

где $\varphi_1(\sigma) = \varepsilon_1^p$ — функция объемного нагружения, которая полностью определяется из экспериментов на всестороннее равномерное «растяжение–сжатие»; ε_1^p — первый инвариант тензора пластических деформаций.

При решении отдельных задач далее будем использовать и модель упругопластического тела с изотропным линейным упрочнением с поверхностью нагружения вида

$$F \equiv \sqrt{\Sigma_2} - c\sqrt{E_2} - k = 0. \quad (1.1.16)$$

Здесь $\Sigma_2 = \frac{1}{2}s_\beta^i s_i^\beta$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений, а $E_2 = \varepsilon_\beta^j \varepsilon_j^\beta$ — второй инвариант тензора пластических деформаций.

При наличии необратимой сжимаемости в случае линейного упрочнения функция нагружения (1.1.16) примет вид

$$F \equiv a\sigma + \sqrt{\Sigma_2} - c\sqrt{E_2} - k = 0. \quad (1.1.17)$$

Для того чтобы путем интегрирования перейти от соотношений между напряжениями и скоростями деформаций для пластической среды к соотношениям между напряжениями и деформациями будем предполагать, что имеет место процесс простого нагружения или мало отличающиеся от него процессы. Это предположение базируется на соображениях как теоретического [147, 212], так и экспериментального [288] характера. Отмеченные условия применимости приведенных соотношений сужают класс решаемых задач и дают возможность получения только приближенного решения.

Приведенная система уравнений (1.1.1)–(1.1.17), относящаяся и к зоне упругого $\overset{e}{V}$ и к зоне пластического $\overset{p}{V}$ деформирования тела, при определенной форме поверхности нагружения и соответствующем ассоциированном законе течения представляет собой замкнутую математическую задачу, которая положена в основу определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемых далее задач.

1.2. Постановка задач об устойчивости деформирования упругопластических сред. Линеаризированные соотношения

Системы, испытывающие упругопластические деформации, обладают свойством внутренней неконсервативности вследствие необратимости пластических деформаций. Исследование устойчивости состояния равновесия такой системы за пределом упругости должно основываться на анализе движения системы вблизи основного состояния равновесия (при сообщении системе некоторых малых возмущений), т. е. на основе динамического подхода.

В теории упругой устойчивости при использовании динамического метода исследования основное состояние считается устойчивым, если возмущения со временем затухают, и неустойчивым, когда возмущения возрастают при $t \rightarrow \infty$.

Появление достаточно малых пластических деформаций приводит исследуемую систему к неустойчивому состоянию (в силу необратимости пластических деформаций) в смысле концепции устойчивости, изложенной выше. В этом состоит основное затруднение, которое возникает при непосредственном перенесении понятий устойчивости из механики упругого тела в механику упругопластического тела. Трудности вызваны и тем, что при пластических деформациях переход от одной равновесной формы к другой может сопровождаться появлением дополнительных зон разгрузки в момент потери устойчивости. Нагрузки, вычисленные с учетом этого явления, называются приведенно-модульными по аналогии с результатами, полученными Т. Карманом для задачи об устойчивости стержня. Появление дополнительных зон разгрузки при переходе в смежное состояние (даже в случае теории устойчивости тонкостенных элементов) вызывает значительные математические трудности, связанные с решением задачи с неизвестными границами раздела зон упругости и пластичности (они определяются в процессе решения задачи). Это обусловило упрощенную постановку задач теории устойчивости тонкостенных систем при упругопластических деформациях, заключающуюся в том,

что явление разгрузки в процессе потери устойчивости не учитывается и критические нагрузки определяются, как для физически нелинейного упругого тела, т.е. по местным касательным модулям. Критические нагрузки, полученные при таком подходе, в теории устойчивости тонкостенных систем называются касательно-модульными по аналогии с результатами, впервые полученными Ф. Энгессером, для задачи об устойчивости стержня. Обоснование концепции касательно-модульных нагрузок было положено Ф. Шенли и связано с введением концепции продолжающегося нагружения. Согласно этой концепции критической нагрузкой называется такая нагрузка, при которой наряду с невозмущенной формой равновесия возможна смежная форма равновесия, причем нагрузка для поддержания смежного состояния равновесия отличается на достаточно малую величину от критической нагрузки, и эта малая нагрузка прикладывается в процессе потери устойчивости так, чтобы компенсировать возникающую дополнительную разгрузку. Следовательно, согласно концепции продолжающегося нагружения, потеря устойчивости начинается раньше, чем внешняя нагрузка достигает критических значений. В связи с этим потеря устойчивости происходит при незначительном увеличении нагрузки до критических значений и этого малого увеличения достаточно, чтобы не возникало дополнительной разгрузки при потере устойчивости. На простейших моделях было показано [162], что наименьшая нагрузка, начиная с которой стержень может выпучиться, соответствует касательно-модульной нагрузке.

Обобщение приведенных результатов на трехмерные задачи устойчивости при упругопластических деформациях дано А.Н. Гузем [84] и заключается в следующем. *Об устойчивости основного состояния трехмерных упругопластических тел при однородных и неоднородных докритических деформациях можно судить по поведению малых возмущений соответствующей линеаризованной задачи одной из теорий пластичности при неизменяющихся зонах разгрузки, возникающих в докритическом состоянии.* При этом считается, что процесс потери устойчивости начинается несколько раньше, чем достигаются критические состояния. В связи с этим процесс потери устойчивости происходит при незначительном, но продолжающемся нагружении, и разгрузка в процессе потери устойчивости не возникает. В рамках указанной концепции приходим к задачам устойчивости для тел с кусочно-однородными свойствами, при этом положение границы раздела пластических и упругих зон известно и определяется из решения задачи о докритическом состоянии. Таким образом, применение обобщенной концепции продолжающегося нагружения в трехмерной линеаризован-

ной теории устойчивости деформированных тел для упругопластических тел открывает обозримые возможности исследования достаточно широкого класса задач.

Согласно исследованиям В.Д. Клюшникова [162] в зависимости от режимов нагружения (активное нагружение, разгрузка, нейтральное нагружение) возможны различные линеаризированные задачи (однородные и неоднородные). Причем не исключена возможность существования режимов нагружения (неоднородная линеаризированная задача), допускающих нетривиальное решение уже в начале процесса пластического деформирования. Для трехмерной упругопластической задачи этот вопрос является достаточно сложным и еще не решенным. Для режимов нагружения, сводящихся к однородным линеаризированным задачам, изучение потери устойчивости процесса деформирования связано с решение задачи об определении основного процесса [162] деформирования. Таким образом, основная трудность при исследовании бифуркаций состояния равновесия — это решение задачи устойчивости с неизвестными границами зон разгрузки, а в случае исследования бифуркации процесса деформирования она переносится на определение продолжения основного процесса деформирования. При наличии такого рода принципиальных трудностей естественны упрощения задач, которые связаны, как отмечалось выше, с осуществлением перехода к задачам с известными зонами разгрузки, решение которых значительно проще. Переход к ним может быть осуществлен следующим образом [84, 85]. В случае исследования устойчивости состояния равновесия вводится обобщенная концепция продолжающегося нагружения без выяснения вида малой дополнительной нагрузки, компенсирующей появление дополнительных зон разгрузки. В случае исследования устойчивости процесса деформирования, когда зоны разгрузки в исходном невозмущенном состоянии, в основном и побочном процессах деформирования совпадают (равноактивная деформация по терминологии работы [162]) опять приходим к той же задаче (о бифуркации состояния равновесия) с известными зонами разгрузки совпадающей по существу с соответствующими задачами для тел с кусочно-однородными свойствами.

Таким образом, при двух различных подходах (исследование бифуркации процесса деформации и бифуркации состояния равновесия), при различных допущениях для каждого из них (для первого склонность к потери устойчивости при равноактивной бифуркации, для второго — обобщенная концепция продолжающегося нагружения без выяснения вида малой дополнительной нагрузки, компенсирующей появление дополнительных зон разгрузки) приходим к одной и той же однородной линеаризи-

рованной задаче [85] с известными зонами разгрузки, которые определяются из докритического состояния.

При изучении бифуркации состояния равновесия или бифуркации процесса деформирования трехмерных тел с реологическими свойствами будем исходить из следующего основного предположения: *об устойчивости основного состояния деформируемых тел с реологическими свойствами будем судить по поведению малых возмущений во времени в рамках соответствующей линеаризованной задачи.*

В качестве критерия устойчивости принимается следующий: состояние равновесия или процесс деформирования считается устойчивым, если возмущения во времени затухают, и неустойчивым, если возрастают. Аналогичный критерий устойчивости в теории ползучести элементов конструкций рассмотрен ранее в работе [207, 208]. При этом для упрощения задачи ввиду их сложности вводится основное предположение: при исследовании устойчивости систем, для которых наблюдается явление разгрузки, применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения и исследуется соответствующая линеаризованная задача, как и в случае упругопластических тел, т.е. исследуется задача с известными зонами разгрузки, возникшими в докритическом состоянии. Указанный подход также следует из теории устойчивости процесса деформирования упругопластических систем, изложенного выше.

Другие предположения, связанные с упрощением задач трехмерной теории устойчивости для упругопластических, упруго-вязкопластических и реологических тел, будем вводить в процессе изложения материала.

Отметим, что в монографии построена трехмерная линеаризованная теория устойчивости механики горных пород для простейших моделей сложных сред и решены отдельные задачи механики горного давления с привлечением трехмерных уравнений устойчивости (без введения гипотез и алгоритмов, связанных задачи к двумерным и одномерным) и критериев устойчивости, соответствующих общепринятым критериям неупругой устойчивости тонкостенных тел. При этом не ставится вопрос о введении новых или обосновании общепринятых критерий устойчивости в механике тонкостенных тел с привлечением общей теории устойчивости движения, считая последний вопрос самостоятельным в силу его специфики и актуальности.

Рассмотрим сплошную среду произвольного объема V . Предположим, что на части поверхности S_1 упругопластического тела заданы поверхностные усилия P_i , а на части поверхности тела S_2 заданы перемещения u_i , причем, величины P_i и u_i с ростом времени t стремятся или принимают значения \dot{P}_i

и \mathring{u}_i , не зависящие от времени. И пусть $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$ есть поверхность, разделяющая области упругого и пластического состояния среды, а $\xi^\alpha (\alpha = 1, 2)$ — криволинейные координаты, определенные на этой поверхности.

При заданных граничных условиях решение системы уравнений (1.1.1)–(1.1.17) (при заданной форме поверхности нагрузки) есть

$$\mathring{\sigma}_{ij}(x_k, t), \quad \mathring{\varepsilon}_{ij}(x_k, t), \quad \mathring{\varepsilon}_{ij}(x_k, t), \quad \mathring{u}_i(x_k, t). \quad (1.2.1)$$

Будем предполагать, что с ростом времени эти решения стремятся к величинам

$$\mathring{\sigma}_{ij}(x_k), \quad \mathring{\varepsilon}_{ij}(x_k), \quad \mathring{\varepsilon}_{ij}(x_k), \quad \mathring{u}_i(x_k). \quad (1.2.2)$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям граничных условий, массовых сил, отклонений конфигурации тела от заданных геометрических размеров. Здесь и далее под состоянием понимаем как состояние равновесия, так и процесс деформирования, если при описании последнего времени входит как существенный параметр, который нельзя исключить из рассмотрения.

Решение для возмущенного движения будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_k, t) &= \mathring{\sigma}_{ij}(x_k, t) + \mathring{\sigma}_{ij}^+(x_k, t), \\ \varepsilon_{ij}(x_k, t) &= \mathring{\varepsilon}_{ij}(x_k, t) + \mathring{\varepsilon}_{ij}^+(x_k, t), \\ \mathring{\varepsilon}_{ij}^+(x_k, t) &= \mathring{\varepsilon}_{ij}^p(x_k, t) + \mathring{\varepsilon}_{ij}^{+p}(x_k, t), \\ u_i(x_k, t) &= \mathring{u}_i(x_k, t) + \mathring{u}_i^+(x_k, t), \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где верхние индексы кружочек и плюс приписаны, соответственно, компонентам невозмущенного состояния и возмущениям.

Предполагая, что об устойчивости движения можно судить по линеаризованной системе уравнений, которую получаем, считая компоненты с плюсом малыми и сохраняя только линейные члены разложения.

Рассмотрим второй вариант теории малых докритических деформаций [85], когда удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, а начальное деформированное состояние определяется по геометрически линейной теории. В этом случае трехмерные линеаризированные уравнения равновесия для областей пластического ($\overset{p}{V}$) и упругого ($\overset{e}{V}$) деформирования тела имеют вид

$$\nabla_s \left(\mathring{\sigma}_j^s + \mathring{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha \mathring{u}_j^+ \right) + \mathring{X}_j^+ - \rho \frac{\partial^2 \mathring{u}_j^+}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2.4)$$

Границные условия на внешней поверхности $\overset{p}{S}_1$ тела (соответственно $\overset{e}{S}_1$) следующие

$$N_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha u_j \right) = \overset{+}{P}_j, \quad (1.2.5)$$

при этом [85] в случае «следящей» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{\circ}{P}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \quad \overset{+}{X}_j = \overset{\circ}{X}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \quad (1.2.6)$$

а в случае «мертвой» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{+}{X}_j = 0. \quad (1.2.7)$$

Если на части поверхности тела $\overset{p}{S}_2$ (соответственно $\overset{e}{S}_2$) заданы перемещения, то граничные условия принимают вид

$$\overset{+}{u}_j = 0. \quad (1.2.8)$$

Для компонент тензора деформаций имеют место формулы Коши:

$$2\overset{+}{\varepsilon}_{j\beta} = \nabla_\beta \overset{+}{u}_j + \nabla_j \overset{+}{u}_\beta, \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{j\beta} = \nabla_\beta \overset{\circ}{u}_j + \nabla_j \overset{\circ}{u}_\beta. \quad (1.2.9)$$

Соотношения (1.1.7), (1.1.9) в этом случае запишутся таким образом:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{j\beta} = \overset{+e}{\varepsilon}_{j\beta} + \overset{+p}{\varepsilon}_{j\beta}, \quad \overset{+}{\sigma}_{j\beta} = \lambda \overset{+e}{\varepsilon}_{kk} \delta_{j\beta} + 2\mu \overset{+e}{\varepsilon}_{j\beta}. \quad (1.2.10)$$

На упругопластической границе $x^i = \overset{\circ}{x}^i + \overset{+}{x}^i$ напряжения и перемещения непрерывны, т.е. $\left[\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \overset{+}{\sigma}_{ij} \right] \nu_j = 0$, $\left[\overset{\circ}{u}_i + \overset{+}{u}_i \right] = 0$, линеаризуя эти соотношения, получим

$$\left[\overset{+}{\sigma}_{ij} + \nabla_k \overset{\circ}{\sigma}_{ij} \overset{+}{x}_k (\xi^\alpha, t) \right] \nu_j = 0, \quad \left[\overset{+}{u}_i + \nabla_k \overset{\circ}{u}_i \overset{+}{x}_k (\xi^\alpha, t) \right] = 0 \quad (1.2.11)$$

при $x^k (\xi^\alpha, t) = \overset{\circ}{x}^k (\xi^\alpha, t)$. Здесь квадратные скобки означают разность соответствующих величин, принадлежащих упругой и пластической областям тела, ν_j — нормаль к поверхности $\overset{\circ}{x}^k = x^k (\xi^\alpha, t)$.

В области $\overset{p}{V}$ несжимаемого упрочняющегося упруговязкопластического тела (1.1.8), (1.1.11) линеаризованное условие пластиичности и ассоциированный закон течения

принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} \left(\overset{\circ}{s}_j^\beta - c \overset{\circ}{\varepsilon}_j^\beta - \eta \overset{\circ}{e}_j^\beta \right) \left(\overset{+}{s}_\beta^j - c \overset{+}{\varepsilon}_\beta^j - \eta \overset{+}{e}_\beta^j \right) = 0, \\ \overset{p}{e}_j^\beta = \overset{\circ}{\psi} \left(\overset{+}{s}_j^\beta - c \overset{+}{\varepsilon}_j^\beta - \eta \overset{+}{e}_j^\beta \right) + \overset{+}{\psi} \left(\overset{\circ}{s}_j^\beta - c \overset{\circ}{\varepsilon}_j^\beta - \eta \overset{\circ}{e}_j^\beta \right). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Условие пластической несжимаемости таково

$$\overset{p}{\varepsilon}_k^k = 0. \quad (1.2.13)$$

Исключая из соотношений (1.2.12) вариации упругих $\overset{+}{\varepsilon}_\beta^j$, а также пластических $\overset{+}{\varepsilon}_\beta^j$ деформаций и величину $\overset{+}{\psi}$, получим в области тела $\overset{p}{V}$

$$\begin{aligned} \left[2\mu \overset{+}{\sigma}^{ij} - \frac{2}{3} \mu (3\lambda + 2\mu) \overset{+}{\varepsilon}_\alpha^i g^{ij} - c \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{+}{\sigma}^{ij} \right) - \right. \\ \left. - \eta \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{\bullet}{\sigma}^{+ij} \right) \right] \left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} - \eta \overset{\circ}{e}_{ij} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + 2\eta \overset{\circ}{\psi} \right) \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{\bullet}{\sigma}^{+ij} \right) + 2c \overset{\circ}{\psi} \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + \right. \\ \left. + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{+}{\sigma}_{ij} \right) = k^{-2} \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_n^n g^{kl} + 2\mu g^{jk} g^{il} \overset{+}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\bullet}{\sigma}^{+kl} \right) \times \\ \times \left(\overset{\circ}{s}_{kl} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} - \eta \overset{\circ}{e}_{kl} \right) \left(\overset{\circ}{s}^{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}^{ij} - \eta \overset{\circ}{e}^{ij} \right) + \\ + 2\overset{\circ}{\psi} \left[2\mu \overset{+}{\sigma}^{ij} - \frac{2}{3} \mu (3\lambda + 2\mu) \overset{+}{\varepsilon}_\alpha^\alpha g^{ij} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

В упругой области тела $\overset{e}{V}$ вариации деформаций связаны с вариациями напряжений законом Гука (1.2.10).

В выражениях (1.2.14), (1.2.15) деформации связаны с перемещениями по формулам (1.2.9). Для других моделей сред, приведенных в § 1, процедура получения линеаризированных уравнений аналогична. Таким образом, линеаризированные уравнения состояния (1.2.14), (1.2.15) для области тела $\overset{p}{V}$ и, соответственно, (1.2.10) для области тела $\overset{e}{V}$ совместно с соотношениями (1.2.9) и линеаризированными уравнениями второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых докритических деформациях (1.2.4) с краевыми условиями (1.2.5), (1.2.8) и условиями (1.2.11) представляют собой замкнутую краевую задачу. Согласно принятому критерию устойчивости невозмущенный равновесный процесс будет

устойчивым или неустойчивым в зависимости от поведения возмущений при неограниченном увеличении времени t . Если все решения системы уравнений (1.2.4), (1.2.14), (1.2.15), (1.2.9), (1.2.10) с краевыми условиями (1.2.5), (1.2.8) и условиями (1.2.11) затухают во времени, то основной процесс будет устойчивым. Если среди решений найдется хотя бы одно, неограниченно возрастающее во времени, то процесс деформирования является неустойчивым.

Уравнения (1.2.4)–(1.2.15), описывающие возмущенное состоянне упрочняющегося упруговязкопластического тела, представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с нестационарными коэффициентами. Точных аналитических решений для подобных систем пока не имеется. Поэтому большое практическое значение в решении проблем устойчивости неупругих сред получил приближенный подход [257], позволяющий исследование устойчивости основного (докритического) состояния производить по предельной системе уравнений.

Устремляя время t к бесконечности, и учитывая, что при этом $\overset{op}{e}_{ij} \rightarrow 0$, $\overset{\circ}{\psi} \rightarrow 0$, получим предельную систему уравнений. В области пластического ($\overset{p}{V}$) и упругого ($\overset{e}{V}$) деформирования тела уравнения равновесия таковы

$$\nabla_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha \overset{+}{u}_j \right) + \overset{+}{X}_j - \rho \overset{\cdot\cdot+}{u}_j = 0. \quad (1.2.16)$$

Уравнения состояния в области тела $\overset{p}{V}$ принимают вид

$$\left[2\mu \overset{+}{\sigma}^{ij} - \frac{2}{3} \mu (3\lambda + 2\mu) \overset{+}{\varepsilon}_\alpha^k g^{ij} - c \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{+}{\sigma}^{ij} \right) - \right. \\ \left. - \eta \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{\bullet}{\sigma}^{ij} \right) \right] \left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{op}{\varepsilon}_{ij} \right) = 0, \quad (1.2.17)$$

$$\lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \overset{+}{\sigma}^{ij} = k^{-2} \left(\lambda \overset{+}{\varepsilon}_n^n g^{kl} + \right. \\ \left. + 2\mu g^{jk} g^{il} \overset{+}{\varepsilon}_{ij} - \overset{+}{\sigma}^{kl} \right) \left(\overset{\circ}{s}_{kl} - c \overset{op}{\varepsilon}_{kl} \right) \left(\overset{\circ}{s}^{ij} - c \overset{op}{\varepsilon}^{ij} \right), \quad (1.2.18)$$

а в области тела $\overset{e}{V}$ имеют вид

$$\overset{+}{\sigma}^{ij} = \lambda \overset{+}{\varepsilon}_k^k g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \overset{+}{\varepsilon}_{\alpha\beta}. \quad (1.2.19)$$

Краевые условия на загруженной поверхности тела ($\overset{p}{S}_1$ и $\overset{e}{S}_1$) таковы

$$N_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha \overset{+}{u}_j \right) = \overset{+}{P}_j. \quad (1.2.20)$$

Условия (1.2.11) на упругопластической границе S принимают вид

$$\left[\overset{+}{\varepsilon}^{ij} \right] \nu_j \Big|_S = 0, \quad \left[\overset{+}{u}^i \right] \Big|_S = 0. \quad (1.2.21)$$

В уравнениях состояния для области пластического деформирования тела (1.2.17), (1.2.18) и в уравнениях состояния для области упругого деформирования тела (1.2.19) вариации компонент тензора деформации связаны с вариациями компонент вектора перемещений формулами Коши (1.2.9).

Очевидно, полагая в предельной краской задаче (1.2.16)–(1.2.21) коэффициент вязкости $\eta = 0$, получим краевую задачу с поверхностью нагружения вида (1.1.12) для пластической области.

Для упруговязкопластического тела, учитывающего необратимую сжимаемость, когда условие предельного состояния материала имеет вид (1.1.14), а соотношения определяющие зависимость между компонентами тензора скоростей пластических деформаций и напряжений приняты в форме (1.1.15), предельная система также состоит из уравнений (1.2.9), (1.2.16), (1.2.19) и соотношений

$$\begin{aligned} \overset{+}{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \overset{+}{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu}{E} \overset{+}{\sigma} g_{ij} + \left(\alpha - \frac{c}{a_1} \overset{\circ}{\varepsilon}_m m \right)^{-1} \times \\ &\times \left[\overset{+}{\varepsilon}_k^k + 3 \left(\frac{2\nu-1}{E} - \overset{\circ}{\psi}_1 \right) \overset{\bullet}{\sigma} \right] \left[\left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{op'} \right) a_1^{-1} + \frac{\alpha}{3} \overset{\circ}{g}_{ij} \right] + \overset{\circ}{\psi}_1 \overset{+}{\sigma} g_{ij}, \\ \alpha a_1 \overset{+}{\sigma} &= \left(\overset{\circ}{s}^{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}^{ij} \right) \left[\overset{+}{\sigma}_{ij} - \overset{+}{\sigma} g_{ij} - c \overset{+}{\varepsilon}_{ij} - \frac{c(1+\nu)}{E} \overset{+}{\sigma}_{ij} - \frac{3c\nu}{E} \overset{+}{\sigma} g_{ij} - \right. \\ &\quad \left. - \eta \overset{+}{\sigma}_{ij} + \frac{\eta(1+\nu)}{E} \overset{\bullet}{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu\eta}{E} \overset{\bullet}{\sigma} g_{ij} \right], \quad (1.2.22) \\ a_1 &= -\alpha \overset{\circ}{\sigma} + K, \quad K = \frac{k}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

которые следуют из соотношений (1.1.7), (1.1.9), (1.1.14), (1.1.15). Краевые условия и условия на упругопластической границе прежние – (1.2.20), (1.2.21). В соотношениях (1.2.22) и далее ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

1.3. О самосопряженности задач и условиях применимости метода Эйлера

Задачи об устойчивости можно классифицировать по методам исследования: динамическому методу изучения поведения малых возмущений около основного состояния и статическому методу (методу Эйлера). При динамическом методе основное

состояние называется устойчивым, если возмущения со временем затухают, а неустойчивым, когда возмущения возрастают неограниченно при $t \rightarrow \infty$. При статическом подходе (метод Эйлера) основное состояние считается неустойчивым, если наряду с исходным состоянием имеют место смежные близкие к нему другие состояния равновесия. При статическом методе исследования задача сводится к отысканию точек бифуркации состояний равновесия. Для статических задач можно применять динамический метод и метод Эйлера. Поскольку метод Эйлера значительно проще динамического, важно указать достаточные условия использования метода Эйлера к исследованию статических задач устойчивости упруговязкопластических тел при малых докритических деформациях. При этом под достаточными условиями будем понимать те условия, при которых результаты статического метода совпадают с результатами динамического метода.

Достаточные условия применимости метода Эйлера для упругопластических тел при малых докритических деформациях получены в работах [84, 85], а для упруговязкопластических тел в работе [257]. Следуя результатам работы [257], приведем условия применимости метода Эйлера для случая, когда все тело находится в упруговязкопластическом состоянии. Выкладки проведем в декартовых координатах.

Рассмотрим краевую задачу (1.2.9), (1.2.16)–(1.2.18) и (1.2.20).

Решение этих уравнений будем искать в виде

$$\dot{u}_j(x_k, t) = u_j(x_k) e^{st}; \quad \dot{\sigma}_{ij}(x_k, t) = \sigma_{ij}(x_k) e^{st}, \quad (1.3.1)$$

т.е. в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, выделим временной множитель e^{st} ($s = i\omega$ — комплексная величина), и для амплитудных величин оставим прежние обозначения, опустив значок плюс.

Подставляя решения (1.3.1) в уравнения (1.2.16), получим

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right)_{,j} + X_i + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (1.3.2)$$

Соотношения (1.2.17) и (1.2.18) в результате этой подстановки примут вид

$$\left\{ (2\mu + c + s\eta) \sigma_{ij} - \left[2 \frac{3\lambda + 2\mu}{3\mu^{-1}} + c\lambda + s\lambda\eta \right] \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \right. \\ \left. - 2\mu (c + s\eta) \varepsilon_{ij} \right\} \left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \right) = 0; \quad (1.3.3)$$

$$\lambda \varepsilon_{nn} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} = k^{-2} [\lambda \varepsilon_{nn} \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl} - \sigma_{kl}] \times \\ \times \left(\overset{\circ}{s}_{kl} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} \right) \left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \right). \quad (1.3.4)$$

Из соотношений (1.3.3), (1.3.4) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_l) = \lambda \varepsilon_{nn} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{4\mu^2 \left(\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \right)}{k^2 (2\mu + c + s\eta)} \times \\ \times \left(\varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \varepsilon_{nn} \delta_{kl} \right) \left(\overset{\circ}{s}_{kl} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl} \right); \quad s = i\omega. \quad (1.3.5) \end{aligned}$$

Соотношения (1.3.5) можно трактовать как зависимость между напряженным и деформированным состоянием в упругом теле с комплексными модулями упругости.

Связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений, а также граничные условия (1.2.20) на поверхности тела $\overset{p}{S}_1$, согласно уравнениям (1.2.9) и (1.3.1), имеют вид

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (1.3.6)$$

$$(\sigma_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} u_{i,k}) N_j = P_i. \quad (1.3.7)$$

Таким образом, статические задачи устойчивости при использовании динамического метода в случае геометрически линейной теории сводятся к однородной линейной задаче (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7). Следовательно, при использовании динамического подхода статические задачи сводятся к задачам на собственные значения относительно параметра ω . Обозначим собственные значения за ω_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \infty$). Для принятого нами критерия устойчивости основное состояние тела будет устойчивым, если для собственных значений ω_α выполняются следующие условия:

$$\operatorname{Im} \omega_\alpha \geq 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \infty). \quad (1.3.8)$$

Условия (1.3.8) определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения, характеризующих рассматриваемую конкретную задачу (собственные значения ω_α зависят не только от геометрии тела и вида соотношений (1.3.5), но также и от параметров нагружения — величин характеризующих внешние нагрузки).

Граница области устойчивости и соответствующие критические комбинации параметров нагружения для рассматриваемой задачи определяются из условия

$$\min \{ \operatorname{Im} \omega_\alpha \} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.3.9)$$

Приведем, следуя работе [257], условия самосопряженности статической задачи для упруговязкопластических тел при динамическом подходе исследования. Пусть u_i и w_i — дважды дифференцируемые комплекснозначные функции действительного переменного, удовлетворяющие граничным условиям (1.3.7). Краевая задача (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) является самосопряженной,

если выполняется равенство [197]

$$\int_V L u \bar{w} \, dV = \int_V u \bar{L} \bar{w} \, dV \quad (1.3.10)$$

при любом выборе векторов u_i и w_i , удовлетворяющих этим условиям. L —левые части уравнений (1.3.2), черта сверху обозначает комплексную сопряженность. Оператор L , как следует из уравнений (1.3.5), (1.3.6) и (1.3.2), имеет вид

$$\begin{aligned} L = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \lambda \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_m} + \mu \left(\delta_{km} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jm} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \frac{2\mu^2}{k^2(i\omega\eta + K_0)} \overset{\circ}{f}_{jk} \times \right. \\ \times \overset{\circ}{f}_{nl} \left[\left(\delta_{nm} \frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lm} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) - \frac{2}{3} \delta_{nl} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \left. \right\} \delta_{ik} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{jk} \delta_{im} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + X_i(u_m) + \rho\omega^2 \delta_{im}; \quad (1.3.11) \\ K_0 = (2\mu + c); \quad f_{kl} = \overset{\circ}{s}_{kl} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что сопряженный оператор \bar{L} имеет вид (1.3.11), лишь ω следует заменить на сопряженное число $\bar{\omega}$, и перед i в подчеркнутом снизу выражении следует поставить знак минус.

Подставляя выражение (1.3.11) в (1.3.10) и применяя формулу Гаусса–Остроградского, приходим к записи условия самосопряженности краской задачи (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7):

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \left[\lambda u_{m,m} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + B \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{f}_{nl} \left(u_{n,l} + u_{l,n} - \frac{2u_{m,m}}{3} \delta_{nl} \right) + \right. \\ \left. + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right] \bar{w}_i n_j \, dS - \iint_{S_1} \left[\lambda \bar{w}_{m,m} \delta_{ij} + \mu (\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{j,i}) + \right. \\ \left. + \bar{B} \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{f}_{nl} \left(\bar{w}_{n,l} + \bar{w}_{l,n} - \frac{2}{3} \bar{w}_{m,m} \delta_{nl} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} \bar{w}_{i,k} \right] u_i n_j \, dS + \\ + \int_V \frac{u_{i,j} \left[\lambda \bar{w}_{m,m} \delta_{ij} + \mu (\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{j,i}) + \right.}{\left. + \bar{B} \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{f}_{nl} \left(\bar{w}_{n,l} + \bar{w}_{l,n} - \frac{2}{3} \bar{w}_{m,m} \delta_{nl} \right) \right] \, dV - \\ - \int_V \frac{\bar{w}_{i,j} \left[\lambda u_{m,m} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \right.}{\left. + B \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{f}_{nl} \left(u_{n,l} + u_{l,n} - \frac{2}{3} u_{m,m} \delta_{nl} \right) \right] \, dV + \int_V \bar{w}_i X_i(u_k) \, dV - \\ - \int_V u_i X_i(\bar{w}_k) \, dV + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) \rho \int_V u_k \bar{w}_k \, dV = 0, \quad (1.3.12) \end{aligned}$$

$$B = -\frac{2\mu^2}{k^2(i\omega\eta + K_0)}; \quad \overline{B} = -\frac{2\mu^2}{k^2(-i\bar{\omega}\eta + K_0)}. \quad (1.3.13)$$

Выражения, стоящие под знаком первого и второго интеграла по $\overset{p}{S}_1$, в силу граничных условий (1.3.2) есть $\bar{w}_i P_i$ и $u_i P_i$, соответственно. Подчеркнутые слагаемые, как легко видеть, взаимно уничтожаются. Выражения при \overline{B} и B в силу того, что $\overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\circ}{s}_{ji} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ji}$ и $\overset{\circ}{s}_{kk} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk} = 0$, приводится к виду

$$2 \int_V (\overline{B} - B) u_{m,s} \overset{\circ}{f}_{ms} \overset{\circ}{f}_{ij} \bar{w}_{i,j} dV.$$

Таким образом, условие самосопряженности (1.3.12) окончательно запишется в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{\overset{p}{S}_1} \bar{w}_i P_i dS - \iint_{\overset{p}{S}_1} u_i P_i dS + \int_V \bar{w}_i X_i dV - \int_V u_i X_i dV + \\ & + 2 \int_V (\overline{B} - B) u_{m,s} \overset{\circ}{f}_{ms} \overset{\circ}{f}_{ij} \bar{w}_{i,j} dV + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) \rho \int_V u_i \bar{w}_i dV = 0. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Запишем достаточные условия самосопряженности краевой задачи (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) для случаев «мертвой» и «следящей» нагрузок. Пусть на тело действует «следящая» нагрузка, для которой X_i и P_i , определяемые соотношениями (1.2.6), отличны от нуля. Тогда, для того чтобы краевая задача (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) была самосопряженной, необходимо и достаточно, чтобы выражение, определяемое (1.3.14), обращалось в нуль.

В случае «мертвых» сил ($P_m \equiv X_m = 0$) условие (1.3.14) принимает вид

$$2(\overline{B} - B) \int_V u_{m,s} \overset{\circ}{f}_{ms} \overset{\circ}{f}_{ij} \bar{w}_{i,j} dV + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) \rho \int_V u_i \bar{w}_i dV = 0. \quad (1.3.15)$$

Откуда следует, что краевая задача (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) в случае «мертвых» сил будет самосопряженной, когда $\operatorname{Re} \omega = 0$.

Известно [48], что внешние силы, для которых выполняется условие

$$\iint_{\overset{p}{S}} \bar{w}_i P_i dS - \iint_{\overset{p}{S}} u_i P_i dS + \int_V \bar{w}_i X_i dV - \int_V u_i X_i dV = 0, \quad (1.3.16)$$

называются консервативными, в противном случае — неконсервативными. Для «мертвых» сил (1.2.7) условие (1.3.16) выполняется.

В силу того, что соотношения (1.3.5) трактуются как зависимость между напряженным и деформируемым состоянием в упругом теле, то условие (1.3.16) для консервативных внешних нагрузок будет выполняться. Следовательно, если внешние силы подчиняются условию (1.3.16), то краевая задача (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) будет самосопряженной тогда, когда $\text{Re}\omega = 0$. Если же выполняется равенство $\text{Re}\omega = 0$, то из условия (1.3.9) следует, что и $\omega = 0$.

С учетом проведенных выше рассуждений, при нахождении критических значений параметра нагрузки следует ω положить равным нулю не только в слагаемом, учитывающем силы инерции, но и в слагаемом уравнения состояния (1.3.5), учитывающем вязкие свойства среды. Формально принятие $\omega = 0$ в соотношениях (1.3.5) приводит к тому, что реологическое уравнение для упрочняющегося упруговязкопластического тела вырождается в реологическое уравнение упрочняющегося упругопластического тела, так как в этом случае (при $\omega = 0$) слагаемое, учитывающее вязкость, обращается в нуль. Следовательно, условие самосопряженности (1.3.14), записанное для упруговязкопластического тела, при таком формальном подходе вырождается в условие самосопряженности для упругопластического тела.

Таким образом, мы выяснили, что статический подход (метод Эйлера) не применим для консервативных задач устойчивости упрочняющегося упруговязкопластического тела, так как достаточное условие самосопряженности (1.3.14) в этом случае не выполняется.

Повторив вышеизложенный ход рассуждений также можно установить невыполнимость достаточных условий (1.3.10) для упруговязкопластических тел, учитывающих необратимую сжимаемость.

Как было отмечено ранее, предельная краевая задача (1.2.16)–(1.2.21) для упрочняющегося упруговязкопластического тела при $\eta = 0$ соответствует краевой задаче для упрочняющегося упругопластического тела, когда поверхность нагружения имеет вид (1.1.12). Получим достаточные условия применимости метода Эйлера. Очевидно, что при $\eta = 0$ величины B и \bar{B} , определяемые соотношениями (1.3.13), совпадают. Следовательно, условие самосопряженности этой краевой задачи, согласно (1.3.14), принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{\overset{p}{S_1}} \bar{w}_i P_i dS - \iint_{\overset{p}{S_1}} u_i P_i dS + \int_V \bar{w}_i X_i dV - \int_V u_i X_i dV + \\ + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) \rho \int_V u_i \bar{w}_i dV = 0. \quad (1.3.17) \end{aligned}$$

Пусть внешние силы являются консервативными, тогда, как было отмечено выше, выполняется условие (1.3.16). Покажем вначале, что в этом случае собственные значения задачи (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) при $\eta = 0$ действительные ($\text{Im } \omega = 0$). Так как при выводе условия самосопряженности (1.3.12) предполагалось, что существует комплексное собственное число, то из (1.3.16) и (1.3.17) получаем равенство

$$(\omega^2 - \bar{\omega}^2) \rho \int_V u_i \bar{w}_i \, dV = 0. \quad (1.3.18)$$

Из равенства (1.3.18) следует $\text{Im } \omega^2 = 0$, что противоречит предположению.

Таким образом, если имеет место соотношение (1.3.16), то рассматриваемая задача (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) при $\eta = 0$ имеет действительные собственные числа. Следовательно, собственные частоты ω могут быть или мнимыми, или действительными. Потеря устойчивости происходит, когда $\text{Im } \omega$ из положительной становится отрицательной, т. е. когда $\text{Im } \omega$ переходит через нуль. Поскольку в этом случае $\text{Re } \omega = 0$, то для определения границы области устойчивости нужно положить $\omega = 0$. Итак, при нахождении критической нагрузки в уравнениях (1.3.2), (1.3.5)–(1.3.7) нужно положить $\omega = 0$, в результате получим, статическую задачу, которую можно решать с применением метода Эйлера. Этот результат согласуется с выводами работы [84].

Таким образом, достаточными условиями использования метода Эйлера при исследовании статических задач устойчивости упрочняющихся упругопластических тел (совпадение результатов при применении метода Эйлера с результатами при применении динамического метода) являются условия (1.3.16).

В случае неконсервативных сил для выявления типа потери устойчивости для каждой задачи требуется специальное исследование. Здесь возможны оба типа неустойчивости.

1.4. Представление общих решений трехмерных уравнений устойчивости для однородных основных состояний

В настоящем параграфе, следуя результатам работ [88, 257], в явной форме записаны решения статических линеаризованных задач для однородных основных напряженных состояний в круговой цилиндрической и прямоугольной системах координат для упругопластических тел при малых деформациях. Решение представлено в единой форме для всех приведенных в § 1 моделей упругопластических сред в случае плоской и пространственных задач.

При выводе общих решений считалось, что возмущения мас-совых сил отсутствуют и начальное состояние является однородным. Под однородным состоянием понимается такой вид деформирования, при котором перемещения в начальном состоянии определяются выражениями

$$\ddot{u}_m = (\lambda_m - 1) x_m, \quad \lambda_m = \lambda_m(t),$$

где λ_m — коэффициенты удлинения, обычно $\lambda_m = \text{const}$. Для второго варианта теории малых начальных деформаций будем иметь

$$\ddot{\varepsilon}_{nm} = \delta_n^m (\lambda_m - 1). \quad (1.4.1)$$

Рассмотрим устойчивость деформирования трехмерного тела при сжатии его вдоль оси Ox_3 усилиями интенсивности p , а вдоль осей Ox_1 и Ox_2 усилиями интенсивности q . Напряженно-деформированное состояние упругопластичного тела до потери устойчивости определяется соотношениями (при $t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{11} = \ddot{\sigma}_{22} = -q, \quad \ddot{\sigma}_{33} = -p, \quad \ddot{\sigma}_{ij} = 0, \quad i \neq j; \\ \ddot{\varepsilon}_{11}^p = \ddot{\varepsilon}_{22}^p = -0,5 \ddot{\varepsilon}_{33}^p = \ddot{s}c^{-1}, \quad \ddot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \quad i \neq j; \\ \ddot{s} = \frac{1}{3} (p - q - k\sqrt{1,5}) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

для упрочняющихся упруговязкопластических тел, и соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{11} = \ddot{\sigma}_{22} = -q, \quad \ddot{\sigma}_{33} = -p, \quad \ddot{\sigma}_{ij} = 0, \quad i \neq j; \\ \ddot{\varepsilon}_{11}^p = -\ddot{\varepsilon}_{22}^p = -0,5 \ddot{\varepsilon}_{33}^p = \left[\ddot{s}_{33} + \left(k - 2\ddot{\sigma} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \right] c^{-1} \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

для упруговязкопластических тел, учитывающих необратимую сжимаемость.

Линеаризированные уравнения движения (1.3.2) в этом случае представимы в виде

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1}u_{i,1} + \delta_{j2}u_{i,2}) - p\delta_{j3}u_{i,3}]_{,j} - \rho s^2 u_i = 0. \quad (1.4.4)$$

Границные условия (1.3.7) приимают вид

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1}u_{i,1} + \delta_{j2}u_{i,2}) - p\delta_{j3}u_{i,3}] N_j = P_i. \quad (1.4.5)$$

Линеаризированная связь (1.3.5) между амплитудными величинами напряжений и деформаций для сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических сред для основного состояния, определяемого соотношениями (1.4.2), может быть представлена в форме

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}a_{jk}u_{k,k} + (1 - \delta_{ij})G_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\Sigma k), \quad (1.4.6)$$

где Σk означает, что по индексу k суммирование производится от 1 до 3,

$$a_{jk} = \lambda + 2\mu\delta_{jk} - \hat{a} \overset{\circ}{f}_{kk} \overset{\circ}{f}_{jj}, \quad G_{ij} = \mu = G, \quad (1.4.7)$$

$$\hat{a} = 4\mu^2 [k^2 (2\mu + c + s\eta)]^{-1}.$$

При $\hat{a} = 0$ получаем коэффициенты $a_{i\alpha}$ и G_α^i для сжимаемой упругой среды

$$a_{jk} = \lambda + 2\mu\delta_{jk}, \quad G_{ij} = \mu. \quad (1.4.8)$$

Для упругопластического тела с трансляционным упрочнением (1.1.12) коэффициенты a_{jk} и G_{ij} вычисляются из (1.4.7) при $\eta = 0$, и они имеют вид

$$a_{jk} = \lambda + 2\mu\delta_{jk} - \overset{\circ}{a} \overset{\circ}{f}_{kk} \overset{\circ}{f}_{jj}, \quad G_{ij} = \mu = G, \quad \overset{\circ}{a} = 4\mu^2 [k^2 (2\mu + c)]^{-1}. \quad (1.4.9)$$

При $\overset{\circ}{a} = 0$ эти соотношения переходят в соотношения для сжимаемой упругой среды.

Для упруговязкопластического тела, учитывающего необратимую сжимаемость (соотношения (1.2.9), (1.2.22)) также можно получить зависимость вида (1.4.6), для которой коэффициенты a_{jk} и G_{ij} имеют вид

$$a_{jk} = \frac{E}{1+\nu} \delta_{jk} + \overset{\circ}{f}_{kk} B_{jj} + A_{jj}, \quad G_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (\nexists k, j) \quad (1.4.10)$$

Здесь $\nexists k, j$ означает отсутствие суммирования по индексам k и j ,

$$A_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \frac{a_2 a_5}{\alpha a_1 a_3 a_6} \overset{\circ}{\lambda}_{ij} + \frac{\alpha a_1 \delta_{ij} + 3 \overset{\circ}{f}_{ij}}{3(\alpha a_1 - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk})},$$

$$B_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{a_2 a_4}{a_6} - c - \eta s \right] \frac{\overset{\circ}{\lambda}_{ij}}{\alpha a_1 a_3},$$

$$a_2 = 1 + \frac{1+\nu}{E} (c - \eta s), \quad \overset{\circ}{f}_{ij} = \overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{op'},$$

$$a_3 = 1 + \frac{c}{\alpha a_1} \left[1 + \frac{3\nu}{E} (c - \eta s) \right] \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}^{op}, \quad (1.4.11)$$

$$a_4 = 1 - \frac{(c - \eta s) \overset{\circ}{\lambda}_{kl} \overset{\circ}{f}_{kl}}{\alpha a_1 a_3},$$

$$a_5 = \frac{(\alpha a_1 \delta_{kl} + 3 \overset{\circ}{f}_{kl}) \overset{\circ}{f}_{kl}}{3(\alpha a_1 - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{nn})}, \quad a_6 = \frac{1+\nu}{E} - \frac{a_2}{\alpha a_1 a_3} \overset{\circ}{\lambda}_{kl} \overset{\circ}{f}_{kl},$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_{ij} = \left(\frac{2\nu - 1}{E} - \overset{\circ}{\psi}_1 \right) \frac{\alpha a_1 \delta_{ij} + 3 \overset{\circ}{f}_{ij}}{\alpha a_1 - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{nn}^{op}} - \frac{3\nu}{E} \delta_{ij} + \overset{\circ}{\psi}_1 \delta_{ij}.$$

Линеаризированная связь между амплитудными величинами напряжений и деформаций для несжимаемых упругопластических сред в этом случае представима в форме

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} (a_{jk} u_{k,k} + \sigma) + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\Sigma k), \quad (1.4.12)$$

где величины a_{jk} и G_{jk} в пластической области деформирования имеют вид

$$a_{jk} = 2\mu\delta_{jk} - \overset{\circ}{\hat{a}}f_{kk}\overset{\circ}{f}_{jj}, \quad G_{ij} = \mu = G \quad (1.4.13)$$

для несжимаемого упруговязкопластического тела, и

$$a_{jk} = 2\mu\delta_{jk} - \overset{\circ}{\hat{a}}f_{kk}\overset{\circ}{f}_{jj}, \quad G_{ij} = \mu = G \quad (1.4.14)$$

для несжимаемого упругопластического тела.

В упругой области деформирования тела величины a_{jk} и G_{jk} определяются следующим образом

$$a_{jk} = 2\mu\delta_{jk}, \quad G_{ij} = \mu = G. \quad (1.4.15)$$

Очевидно, что для величин a_{jk} в соотношениях (1.4.7), (1.4.9), (1.4.13)–(1.4.15) выполняются равенства

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23} = a_{31}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Такая единая форма представления линеаризированных уравнений состояния для представленных здесь моделей ((1.4.6) и (1.4.12)) позволяет построить решение уравнений трехмерной теории устойчивости (1.4.4) в общей форме. Ограничимся сжимаемыми средами. Подстановка выражений (1.4.6) в уравнение (1.4.4) приводит к системе уравнений в амплитудах перемещений

$$L_{ij}u_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.4.16)$$

Дифференциальные операторы L_{ij} , имеют вид

$$L_{ij} = \delta_{ij} \left(M_{in} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \rho s^2 \right) + (1 - \delta_{ij}) F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\Sigma n),$$

$$F_{ij} = a_{ij} + G_{ij}, \quad (1.4.17)$$

$$M_{in} = \begin{cases} a_{ii} - q(\delta_{1n} + \delta_{2n}) - p\delta_{3n} & (i = n), \\ G_{in} - q(\delta_{1n} + \delta_{2n}) - p\delta_{3n} & (i \neq n). \end{cases}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.4.16) можно представить в одиой из трех форм [183]:

$$u_i^{(j)} = \frac{\partial \det(L_{mn})}{\partial L_{ij}} \Phi^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.4.18)$$

Функции $\Phi^{(j)}$ являются решениями уравнения

$$\det(L_{mn}) \Phi^{(j)} = 0. \quad (1.4.19)$$

Проделав выкладки, аналогичные преобразованиям, выполненным в работе [88], получаем общее решение системы (1.4.16), (1.4.17) в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \psi, \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \psi, \\ u_3 &= \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \psi. \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Для цилиндрического тела с криволинейным контуром поперечного сечения общее решение представимо в виде

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3} \psi, \quad u_\tau = -\frac{\partial}{\partial n} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_3} \psi, \\ u_3 &= \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \psi, \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

где n и τ — нормаль и касательная в плоскости поперечного сечения; u_n , u_τ — перемещения в направлении нормали и касательной. Функции ψ и ψ_1 , входящие в соотношения (1.4.20) и (1.4.21), являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{G - p}{G - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{G - q} \right) \psi_1 &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ \left[\left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \left(\Delta + \frac{a_{33} - p}{G - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{G - q} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(G + a_{13})(G + a_{31})}{(a_{11} - q)(G - q)} \Delta \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \psi &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Выражения (1.4.20) и (1.4.21) являются исходными при динамическом методе исследования устойчивости упругопластических тел. Если в момент потери устойчивости деформирование происходит в плоскости x_1Ox_3 , то решение системы уравнений (1.4.16), согласно (1.4.18), можем представить в одной из форм

$$u_1^{(1)} = L_{33} \psi, \quad u_3^{(1)} = -L_{31} \psi, \quad u_1^{(2)} = -L_{13} \psi, \quad u_3^{(2)} = L_{11} \psi \quad (1.4.23)$$

или в виде их линейной комбинации. Для определения функции ψ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11} - q} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{a_{33} - p}{G - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{G - q} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(G + a_{13})(G + a_{31})}{(a_{11} - q)(G - q)} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} \right] \psi = 0. \quad (1.4.24) \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.4.24), периодическое по оси Ox_3 , запишем в следующей форме:

$$\psi = \left(C_n^1 e^{\xi_2 x_1} + C_n^2 e^{-\xi_2 x_1} + C_n^3 e^{\xi_3 x_1} + C_n^4 e^{-\xi_3 x_1} \right) \sin(\gamma_0 x_3),$$

$$N = f \gamma_0^2 + \frac{\rho s^2 (G + a_{11} - 2q)}{2(G - q)(a_{11} - q)},$$

$$M = N^2 - \frac{(G - p)(a_{33} - p)\gamma_0^4 - \rho s^2(G + a_{33} - 2p)\gamma_0^2 + \rho^2 s^4}{(G - q)(a_{11} - q)}, \quad (1.4.25)$$

$$f = \frac{1}{2} \left[\frac{a_{33} - p}{G - q} + \frac{G - p}{a_{11} - q} - \frac{(G + a_{13})(G + a_{31})}{(a_{11} - q)(G - q)} \right],$$

$$\xi_{2,3}^2 = N \pm \sqrt{M}, \quad \gamma_0 = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Здесь l — характерный размер вдоль оси Ox_3 .

В зависимости от характера деформирования в момент по-тери устойчивости приходим к краевой задаче (1.4.21), (1.4.22), (1.4.5), (1.4.6) или (1.4.23), (1.4.24), (1.4.5), (1.4.6). Из условия существования нетривиальных решений этих задач требуется определить значение s как функцию параметров нагрузки p и q . Условие устойчивости в этом случае, согласно (1.3.8), записывается в виде

$$\max \{ \operatorname{Re} s_k \} < 0. \quad (1.4.26)$$

Критические значения величин p и q определяются из условия

$$\max \{ \operatorname{Re} s_k \} = 0. \quad (1.4.27)$$

Безусловно, использование динамического метода приводит к большим трудностям вычислительного характера.

При квазистатическом подходе исследования устойчивости деформирования тел преиебрегают инерционными членами в уравнениях движения (1.4.4), что позволяет в замкнутой форме провести решение многих задач. Общее решение уравнений устойчивости как в прямоугольной, так и в круговой цилиндрической системах координат при этом подходе следует из (1.4.20) и (1.4.21) при $\rho s^2 = 0$, а для плоских задач — из (1.4.23), (1.4.24), (1.4.17).

Так, для тела с криволинейным контуром поперечного сечения находим

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3} \psi, & u_\tau &= -\frac{\partial}{\partial n} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_3} \psi, \\ u_3 &= \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G - p}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

В этом случае из (1.4.22) выводим уравнения

$$\left(\Delta + \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi_i = 0, \quad (\forall i), \quad \psi = \psi_2 + \psi_3. \quad (1.4.29)$$

Здесь величины ξ_i^2 определяются таким образом

$$\xi_1^2 = \frac{G-p}{G-q}, \quad \xi_{2,3}^2 = f \pm \left[f^2 - \frac{(a_{33}-p)(G-p)}{(a_{11}-q)(G-q)} \right]^{1/2}. \quad (1.4.30)$$

Для напряженного состояния, периодического по оси Ox_3 , решения для упругопластического тела имеют вид

а) плоская деформация:

$$\psi = (C_n^{i1} e^{\gamma_0 \xi_i x_1} + C_n^{i2} e^{-\gamma_0 \xi_i x_1}) \sin(\gamma_0 x_3) \quad (i = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots, \infty), \quad (1.4.31)$$

где C_n^{i1} и C_n^{i2} — произвольные постоянные; n — число полуволни вдоль оси Ox_3 ;

б) пространственная задача

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [C_{mn}^{11} I_m(\gamma_0 \xi_1 r) + C_{mn}^{12} K_m(\gamma_0 \xi_1 r)] \sin(\gamma_0 x_3) \sin(m\theta), \\ \psi_i &= [C_{mn}^{i1} I_m(\gamma_0 \xi_i r) + C_{mn}^{i2} K_m(\gamma_0 \xi_i r)] \cos(\gamma_0 x_3) \cos(m\theta), \end{aligned} \quad (i = 2, 3), \quad (1.4.32)$$

где C_{mn}^{i1} и C_{mn}^{i2} ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные, $I_m(\gamma_0 \xi_i r)$ и $K_m(\gamma_0 \xi_i r)$ функции Бесселя и Макдональда, m — число полных волн по окружности.

Границные условия при $x_3 = 0, l$, в случае представления решения в форме (1.4.25) будут автоматически выполняться в интегральном смысле.

После подстановки решения (1.4.28)–(1.4.32) уравнений устойчивости в граничные условия (1.4.5) получаются характеристические уравнения (как и при использовании динамического метода) относительно s . Критические значения величин p и q находятся затем из условия (1.4.27).

Наибольших упрощений при решении задач устойчивости дает статический метод исследования (метод Эйлера), который, как отмечено в § 3, применим лишь для упругопластических тел, если существует потенциал внешних сил.

Очевидно, в этом случае общие решения уравнений квазистатической устойчивости являются решениями уравнений и статической устойчивости. Характеристические уравнения при этом необходимо рассматривать как уравнения для определения критических значений нагрузок в зависимости от параметров среды и конструкции.

В ряде прикладных задач механики деформируемых сложных сред с ярко выраженным вязкими свойствами целесооб-

разно изучение основного процесса деформирования (1.2.1) на конечном интервале времени. В качестве критерия устойчивости в этом случае принимаем критерий, аналогичный предложенному в работе [208]. Будем исследовать поведение возмущений на небольшом интервале времени в окрестности точки линеаризации t_0 . Коэффициенты линеаризированных уравнений состояния будем считать не зависящими от времени и определенными в момент $t = t_0$, время t для возмущений будем отсчитывать от момента t_0 . Процесс деформирования будем считать устойчивым, если возмущения затухают во времени.

Определяющие вариационные отношения (1.2.14), (1.2.15) для сжимаемых упруго-вязко-пластических тел могут быть записаны в виде следующих зависимостей (временной множитель выделен)

$$\sigma_{ij} = B\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu A\varepsilon_{ij} - \hat{a}_t (3\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{kk}\delta_{mn}) \overset{\circ}{f}_{mn} \overset{\circ}{f}_{ij}, \quad (1.4.33)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + 4\hat{b}_t \overset{\circ}{\psi}}, \quad B = A \left[\lambda - \frac{2}{3} \mu \hat{b}_t \overset{\circ}{\psi} (3\lambda + 2\mu) \right], \\ \overset{\circ}{f}_{ij} &= \overset{\circ}{s}_{ij} - c \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} - \eta \overset{\circ}{e}_{ij}, \quad \overset{\circ}{\psi} = k^{-2} \overset{\circ}{e}_{ij} \overset{\circ}{f}_{ij}, \\ \hat{a}_t &= \frac{4\mu^2 \hat{b}_t s}{3k^2 (2\mu + c + s\eta)}, \quad \hat{b}_t = \frac{1}{2c\overset{\circ}{\psi} + (1 + 2\eta\overset{\circ}{\psi})s}. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Таким образом, исследование устойчивости процесса деформирования тела сводится к решению уравнений в вариациях (1.3.2) с краевыми условиями (1.3.7) совместно с соотношениями (1.4.33).

При переходе к предельной системе уравнений, полученной в § 2 для упруговязкопластических тел, в коэффициентах линеаризированных уравнений (1.3.2), (1.3.7) и (1.4.33) с принятой степенью точности при $t_0 \rightarrow \infty$ следует положить

$$\overset{\circ}{e}_{ij} = 0, \quad \overset{\circ}{\psi} = 0.$$

Рассмотрим случай трехосного напряженно-деформированного докритического состояния упруговязкопластического тела, которое определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{11} &= \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -q, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{33} = -p, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \\ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{11} &= 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{22} = -\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \left[1 - \exp \left(-\frac{c}{\eta} t_0 \right) \right] \overset{\circ}{s} c^{-1}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \\ 2\overset{\circ}{e}_{11} &= 2\overset{\circ}{e}_{22} = -\overset{\circ}{e}_{33} = \frac{\overset{\circ}{s}}{\eta} \exp \left(-\frac{c}{\eta} t_0 \right), \quad \overset{\circ}{e}_{ij} = 0 \quad (i \neq j) (i \neq j). \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

Линеаризованные трехмерные уравнения движения и гравитационные условия имеют прежний вид (1.4.4), (1.4.5). Линеаризованная связь (1.4.33) между амплитудными величинами напряжений и деформации для упрочняющихся упруговязкопластических сред для этого случая (1.4.35) может быть представлена в форме (1.4.6), где a_{jk} и G_{ij} , имеют вид

$$a_{jk} = 2\mu A \delta_{jk} + B \delta_{jj} - 3\overset{\circ}{\hat{a}} \overset{\circ}{f}_{kk} \overset{\circ}{f}_{jj}, \quad (1.4.36)$$

$$G_{ij} = \mu A = G, \quad \psi = k^{-1} \sqrt{6} \overset{\circ}{e}_{11}.$$

Если устойчивость основного состояния исследовать по предельной системе уравнений, то в коэффициентах a_{jk} и G_{ij} (1.4.36) при $t_0 \rightarrow \infty$ необходимо положить $A = 1$, $B = \lambda$ ($\overset{\circ}{e}_{ij} = \overset{\circ}{e} = 0$, $\psi = 0$) и тогда приходим к выражениям (1.4.7).

Система уравнений в амплитудах перемещений будет иметь тот же вид (1.4.16) с той же формой дифференциальных операторов (1.4.17). Следовательно, построенные общие решения уравнений динамической, квазистатической и статической устойчивости остаются в силе и в случае исследования устойчивости упруговязкопластических сред на конечном интервале времени, необходимо лишь иметь в виду, что величины a_{jk} и G_{ij} определяются соотношениями (1.4.36). Условие устойчивости имеет вид (1.4.26) при всех $0 < t \leq t_0$.

Заметим, что если в приведенных решениях трехмерных уравнений устойчивости для упруговязкопластических тел использовать соотношения (1.4.7), (1.4.36), в которых положено $\overset{\circ}{a} = 0$, соответственно, $\overset{\circ}{a}_t = 0$ и $\overset{\circ}{\psi} = 0$, то приходим к результатам, полученным в работах [85, 88] для упругих тел.

1.5. Основные соотношения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел в цилиндрической и сферической системах координат

Приведенная в § 4 явная форма решений статических упругопластических задач при однородном трехосном докритическом состоянии позволяет получить [257] характеристические определители для простейших задач. Представляющие интерес для практики задачи в основном являются задачами с неоднородными докритическими состояниями. Их решение связано со значительными математическими трудностями. Однако можно выделить класс сферических и цилиндрических задач, к которым, в частности, относятся и некоторые задачи горной механики, для которых докритическое состояние зависит от одной

переменной, и их решение, безусловно, значительно проще. Для таких задач линеаризованные уравнения состояния в криволинейной системе координат также представимы соотношениями вида (1.4.6) и (1.4.12):

$$\sigma_j^i = a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_j u^i + \nabla^i u_j) \quad \left(\sum_{i=1}^3 \alpha \right) \quad (1.5.1)$$

для сжимаемых тел и

$$\sigma_j^i = (a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + \sigma) g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_j u^i + \nabla^i u_j) \left(\sum_{i=1}^3 \alpha \right) \quad (1.5.2)$$

для несжимаемых тел. При этом коэффициенты a_{ij} и G_j^i в области пластического деформирования (V^p) для сжимаемой упруговязкопластической среды, согласно соотношениям (1.4.7), имеют вид

$$a_{i\alpha} = \lambda + 2\mu g_{i\alpha} - \hat{a} \overset{\circ}{f}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{f}_{ii}, \quad G_j^i = \mu = G. \quad (1.5.3)$$

В области упругого деформирования они таковы

$$a_{i\alpha} = \lambda + 2\mu \delta_{i\alpha}, \quad G_j^i = \mu. \quad (1.5.4)$$

Для сжимаемого упругопластического тела с трансляционным упрочнением коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются следующими соотношениями:

в пластической области

$$a_{i\alpha} = \lambda + 2\mu g_{i\alpha} - \hat{a} \overset{\circ}{f}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{f}_{ii}; \quad (1.5.5)$$

в упругой области

$$a_{i\alpha} = \lambda + 2\mu g_{i\alpha}. \quad (1.5.6)$$

Для несжимаемого упруговязкопластического тела коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются следующим образом:

в пластической области

$$a_{i\alpha} = 2\mu g_{i\alpha} - \hat{a} \overset{\circ}{f}_{\alpha\alpha} f_{ii}, \quad G_{ij} = \mu = G; \quad (1.5.7)$$

в упругой области

$$a_{i\alpha} = 2\mu \delta_{i\alpha}, \quad G_{ij} = \mu. \quad (1.5.8)$$

Для несжимаемого упругопластического тела коэффициенты a_{ij} и G_{ij} имеют вид

в пластической области

$$a_{i\alpha} = 2\mu g_{i\alpha} - \overset{\circ}{a} f_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{f}_{ii}, \quad G_j^i = \mu; \quad (1.5.9)$$

в упругой области

$$a_{i\alpha} = 2\mu g_{i\alpha}, \quad G_j^i = \mu. \quad (1.5.10)$$

Для модели упруговязкопластического тела, учитывающей необратимую сжимаемость, величины a_{ij} и G_{ij} определяются соотношениями (1.4.10), (1.4.11), в которых только δ_{ij} следует заменить на g_{ij} .

Уравнения равновесия в областях тела V и $\overset{p}{V}$ имеют вид

$$\nabla_s \left(\sigma_j^s + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha u_j \right) + X_j + \rho \omega^2 u_j = 0. \quad (1.5.11)$$

Границные условия на загруженной поверхности тела ($\overset{p}{S}_1$ и $\overset{e}{S}_1$) представимы в форме

$$N_s \left(\sigma_j^s + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^s \nabla^\alpha u_j \right) = P_j. \quad (1.5.12)$$

На упругопластической границе выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений

$$[\sigma_j^s] N_s|_S = 0, \quad [u_i]|_S = 0. \quad (1.5.13)$$

Для несжимаемых сред, кроме того, выполняется условие несжимаемости

$$g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.5.14)$$

Системы уравнений (1.5.1), (1.5.11)–(1.5.13) и (1.5.2), (1.5.11)–(1.5.14) при соответствующей конкретизации коэффициентов a_{ij} и G_{ij} , представляют замкнутые статические краевые задачи устойчивости для сжимаемых и, соответственно, несжимаемых сред.

Представим основные соотношения задач устойчивости в цилиндрической и сферической системах координат, считая, что $\overset{\circ}{\sigma}_j^i = 0$ при $i \neq j$.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) уравнения равновесия (1.5.11) при квазистатическом подходе и $X_j = 0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^1 + \frac{1}{r} \sigma_{1,2}^2 + \frac{1}{r} (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) + \sigma_{1,3}^3 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \left(u_{1,11} + \frac{1}{r} u_{1,1} \right) + \\ + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \frac{1}{r^2} (u_{1,22} - u_{1,1} - 2u_{2,2}) + \overset{\circ}{\sigma}_{1,1}^1 u_{1,1} + \left(\overset{\circ}{\sigma}_3^3 u_{1,3} \right)_{,3} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r\sigma_{2,1}^1 + \sigma_{2,2}^2 + r\sigma_{2,3}^3 + \sigma_2^1 + \sigma_1^2 + \sigma_1^1(u_{2,1} + ru_{2,11}) + \sigma_{1,1}^1ru_{2,1} + \\
& + \sigma_2^2 \frac{1}{r}(ru_{2,1} - u_{2,1} + u_{2,22} + 2u_{1,2} - u_2) + r\left(\sigma_3^3 u_{2,3}\right)_{,3} = 0, \\
& \sigma_{3,1}^1 + \frac{1}{r}\sigma_{3,2}^2 + \frac{1}{r}\sigma_3^1 + \sigma_{3,3}^3 + \sigma_1^1\left(u_{3,11} + \frac{1}{r}u_{3,1}\right) + \sigma_{1,1}^1u_{3,1} + \\
& + \sigma_2^2 \frac{1}{r^2}(-ru_{3,1} + u_{3,22} + ru_{3,1}) + \left(\sigma_3^3 u_{3,3}\right)_{,3} = 0.
\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Введем обозначения $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Ограничимся случаем несжимаемых сред. Тогда, используя уравнения состояния (1.5.2), получим запись уравнений равновесия (1.5.15) в перемещениях в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
& u_{,rr}(a_{11} + \dot{\sigma}_r) + \frac{1}{r}u_{,r}(a_{12} + a_{11} - a_{21} + \dot{\sigma}_r + r\dot{\sigma}_{r,r}) - \\
& - \frac{u}{r^2}\left(a_{22} + \frac{1}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + \frac{1}{r^2}u_{,\theta\theta}\left(G + \frac{1}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + u_{,zz}(G + \dot{\sigma}_z) - \\
& - \frac{1}{r^2}v_{,\theta}\left(G + a_{22} + \frac{2}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + \frac{1}{r}v_{,r\theta}(a_{12} + G) + \frac{1}{r}w_{,\theta\theta}(a_{13} - a_{23}) + \\
& + w_{,rz}(a_{13} + G) + \sigma_{,r} = 0, \\
& \frac{1}{r}u_{,\theta}\left(G + a_{22} + \frac{2}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + u_{,r\theta}(G + a_{21}) + v_{,r}(G + \dot{\sigma}_r + r\dot{\sigma}_{r,r}) - \\
& - \frac{1}{r}v\left(G + \frac{1}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + rv_{,rr}(G + \dot{\sigma}_z) + \frac{1}{r}v_{,\theta\theta}\left(a_{22} + \frac{1}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + \\
& + rv_{,zz}(G + \dot{\sigma}_r) + w_{,\theta z}(a_{23} + G) + \sigma_{,\theta} = 0, \\
& \frac{1}{r}u_{,z}(a_{32} + G) + u_{,rz}(G + a_{31}) + \frac{1}{r}v_{,\theta z}(G + a_{32}) + \\
& + \frac{1}{r}w_{,r}(G + \dot{\sigma}_r + r\dot{\sigma}_{r,r}) + w_{r,r}(G + \dot{\sigma}_r) + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\left(G + \frac{1}{r^2}\dot{\sigma}_\theta\right) + \\
& + w_{,rz}(a_{33} + \dot{\sigma}_z) + \sigma_{,z} = 0.
\end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Границные условия в напряжениях (1.5.12) примут вид

$$\begin{aligned}
& \sigma_1^i N_i + \sigma_1^1 u_{1,1} N_1 + \sigma_2^2 \frac{1}{r^2} \left(u_{1,2} - \frac{1}{r}u_2\right) N_2 + \sigma_3^3 u_{1,3} N_3 = 0, \\
& \sigma_2^i N_i + \sigma_1^1 \left(u_{2,1} - \frac{u_2}{r}\right) N_1 + \sigma_2^2 \frac{1}{r^2} (u_{2,1} + ru_1) N_2 + \sigma_3^3 u_{2,3} N_3 = 0, \\
& \sigma_3^i N_i + \sigma_1^1 u_{3,1} N_1 + \sigma_2^2 u_{3,2} N_2 + \sigma_3^3 u_{3,3} N_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

Исходя из соображений геометрического плана (форма сооружения, форма подземной выработки и т. д.) выберем компоненты

вектора нормали следующим образом $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$. Тогда граничные условия (1.5.17) для несжимаемой среды (1.5.14) запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_{,r}a_{11} + \frac{1}{r}a_{12}(v_{,\theta} + u) + a_{13}w_{,z} + \sigma + \overset{\circ}{\sigma}_r u_{,r} &= 0, \\ G(rv_{,r} + u_{,\theta} - v) + \overset{\circ}{\sigma}_r r v_{,r} &= 0, \\ G(w_{,r} + u_{,z}) + \overset{\circ}{\sigma}_r w_{,r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

При этом если в пластической зоне среда упруговязкопластическая, то коэффициенты $a_{s\alpha}$ имеют вид (1.5.7), а в упругой зоне — (1.5.8). Если в области $\overset{p}{V}$ среда упругопластическая, то коэффициенты a_{ij} и G_{ij} имеют вид (1.5.9), а в области $\overset{e}{V}$ определяются соотношениями (1.5.10).

В случае заданных перемещений на части поверхности $\overset{p}{S}_2$ (соответственно $\overset{e}{S}_2$) граничные условия, согласно (1.2.8), имеют вид

$$u_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.5.19)$$

Условие несжимаемости (1.5.14) запишется в форме

$$u_{,r} + \frac{1}{r}(v_{,\theta} + u) + w_{,z} = 0. \quad (1.5.20)$$

Условия непрерывности (1.5.13) вектора поверхностных сил и перемещений на границе раздела упругой и пластической областей записываются аналогично.

Отметим, что если все тело находится в пластическом состоянии ($V = \overset{p}{V}$), то цилиндрическая задача состоит из уравнений (1.5.16), (1.5.20) с краевыми условиями (1.5.18). При этом в случае упруговязкопластических тел коэффициенты a_{ij} и G_{ij} имеют вид (1.5.7), а в случае упругопластических тел — (1.5.8).

Решение приведенных уравнений для цилиндрических задач представим двойными тригонометрическими рядами [123]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz), \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), \\ \sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz). \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

где n, m — параметры волнообразования. Так как система уравнений (1.5.16), (1.5.17) является линейной и однородной, то ее можно записать для каждого члена с одинаковыми значениями m и n рядов (1.5.21). Для упрощения записи в дальнейшем индексы n, m будем опускать. В этом случае система уравнений (1.5.16)–(1.5.20) в терминах функций $A(r), B(r), C(r), D(r)$ запишется таким образом:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
 & -A(r) \left\{ \frac{1}{r^2} [a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta + m^2 (G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)] + n^2 G \right\} + \\
 & + \frac{1}{r} A'(r) (a_{12} - a_{21} + a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) + A''(r) (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) - \\
 & - \frac{1}{r^2} B(r)m (G + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \frac{1}{r} B'(r)m (a_{12} + G) + \\
 & + \frac{1}{r} C(r)n (a_{13} - a_{23}) + C'(r)n (G + a_{13}) + D'(r) = 0, \\
 & - \frac{1}{r} A(r) [m (G + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta)] - A'(r)m (G + a_{21}) - \\
 & - B(r) \left\{ \frac{1}{r} [G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta + m^2 (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)] + n^2 r \right\} + \quad (1.5.22) \\
 & + B'(r) (G + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + \overset{\circ}{\sigma}_r) + B''(r)r (\overset{\circ}{\sigma}_r + G) - \\
 & - C(r)mn (a_{23} + G) - mD(r) = 0, \\
 & - \frac{1}{r} A(r) [n (G + a_{32})] - A'(r)n (G + a_{31}) - \\
 & - \frac{1}{r} B(r)mn (G + a_{32}) - C(r) \left[\frac{m^2}{r^2} (G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + n^2 a_{33} \right] + \\
 & + \frac{1}{r} C'(r) (G + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + \overset{\circ}{\sigma}_r) + C''(r) (\overset{\circ}{\sigma}_r + G) - nD(r) = 0,
 \end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} a_{12} A(r) + A'(r) (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) + B(r) \frac{m}{r} a_{12} + a_{13} n C(r) + D(r) = 0, \\
 & -A(r)mG - B(r)G + rB'(r)(G + \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0, \quad (1.5.23) \\
 & -A(r)nG + C'(r)(G + \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0,
 \end{aligned}$$

условия несжимаемости

$$A'(r) + \frac{1}{r} (B(r)m + A(r)) + C(r)n = 0. \quad (1.5.24)$$

Из последнего уравнения выразим $C(r)$

$$C(r) = -\frac{1}{n} \left\{ A'(r) + \frac{1}{r} [B(r)m + A(r)] \right\}. \quad (1.5.25)$$

Здесь приведена запись основных линеаризированных уравнений. Очевидно, аналогичным образом могут быть выписаны в терминах функций $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ и условия непрерывности (1.5.13) на поверхности, разделяющей зоны упругого и пластического деформирования, а также другие соотношения, входящие в сформулированную выше краевую задачу.

Отметим, что в случае сжимаемого материала в соотношениях (1.5.22), (1.5.23) следует опустить члены, содержащие функцию D и ее производные. Коэффициенты a_{ij} и G_{ij} , в зависимости от модели, будут определяться формулами (1.5.3), (1.5.4), или (1.5.5), (1.5.6), или (1.4.10), (1.4.11).

После подстановки соотношений (1.5.25) в (1.5.22) и исключения функций $D(r)$ и $C(r)$, уравнения равновесия запишутся таким образом

$$\begin{aligned} \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 B(r) + \xi_5 B'(r) + \xi_6 B''(r) + \\ + \xi_7 B'''(r) = 0, \\ \xi_8 A(r) + \xi_9 A'(r) + \xi_{10} A''(r) + \xi_{11} A'''(r) + \xi_{12} B(r) + \xi_{13} B'(r) + \\ + \xi_{14} B''(r) = 0, \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -[-\overset{\circ}{\sigma}_\theta + m^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + 2r\overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} + G(n^2r^2 - 1)], \\ \xi_2 &= r[a_{11} - a_{22} + a_{12} - a_{21} + 2(a_{23} - a_{13}) - G + \\ &\quad + \overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta], \\ \xi_3 &= r^2(a_{11} - a_{13} + a_{23} - a_{21} - G + \overset{\circ}{\sigma}_r), \\ \xi_4 &= -\left[m(\overset{\circ}{\sigma}_\theta + G) - \frac{1}{m}(\overset{\circ}{\sigma}_\theta + G) + \frac{r}{m}\overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) + \frac{n^2r^2G}{m^3}\right], \\ \xi_5 &= r\left[m(a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} + G - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) - \frac{1}{m}(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)\right] - \\ &\quad - \frac{r^3}{m}(n^2G - \overset{\circ}{\sigma}_{r,rr}) + \frac{2r^2}{m}\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}, \\ \xi_6 &= \frac{2r^2}{m}(\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + G), \quad \xi_7 = \frac{r^3}{m}(G + \overset{\circ}{\sigma}_r), \\ \xi_8 &= nr^2(G + a_{32} - a_{33} - a_{22} - 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta + a_{23}) + \frac{m^2r}{n}(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) - \\ &\quad - \frac{r}{n}(G + \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_{r,r}), \\ \xi_9 &= nr^3(G + a_{31} - a_{33} + a_{23} - a_{21}) - \frac{m^2r}{n}(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) - \\ &\quad - \frac{r}{n}(G + \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_{r,r}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{10} &= \frac{r^2}{n} (2G + 2\overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}), \quad \xi_{11} = \frac{r^3}{n} (G + \overset{\circ}{\sigma}_r), \\
\xi_{12} &= r^2 \left[nm (a_{32} - a_{33} - a_{22} + a_{23} + 2G) - \frac{n^3 r^2 G}{m} - \frac{1}{m} (G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \right] - \\
&\quad - \frac{m^3}{n} (G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \frac{m}{n} (G + \overset{\circ}{\sigma}_r - r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}), \\
\xi_{13} &= \frac{rm}{n} (r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - G - \overset{\circ}{\sigma}_r) - \frac{r^3 n}{m} (G + \overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) \\
\xi_{14} &= (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) \left(\frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right)
\end{aligned}$$

Границные условия (1.5.23) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
A(r) \frac{1}{r} (a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} - 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \\
+ A'(r) (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r - a_{13} - a_{21} + a_{23}) + B(r) \times \\
\times \left\{ \frac{1}{r} \left[m (a_{12} - a_{13}) - \frac{G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta + m^2 (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta - a_{23} - G)}{m} \right] - \frac{n^2 r G}{m} \right\} + \\
+ B'(r) \frac{1}{m} (\overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + G) + B''(r) \frac{r}{m} (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0, \\
-m G A(r) - G B(r) + r B'(r) (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0 \quad (1.5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(r) \left(n G - \frac{G + \overset{\circ}{\sigma}_r}{nr^2} \right) + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{r} A'(r) - \frac{m}{r^2} B(r) + \frac{m}{r} B'(r) + A''(r) \right] \times \\
\times (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь приведем основные линеаризированные уравнения в сферических координатах. В сферической системе координат (r, θ, φ) уравнения равновесия при $\overset{\circ}{\sigma}_2^2 = \overset{\circ}{\sigma}_3^3$ запишутся так [240]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,1}^1 + \sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,1}^3 + \frac{2}{r} \sigma_1^1 - \frac{1}{r} (\sigma_2^2 + \sigma_3^3) + \sigma_1^1 \operatorname{ctg} \theta + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 u_{1,11} + \\
+ \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \frac{1}{r^2} \left[u_{1,22} - \frac{2}{r} u_{2,2} + r u_{1,1} - u_1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (u_{1,33} + r \sin^2 \theta u_{1,1} + \right. \\
\left. + u_{1,2} \cos \theta \sin \theta - u_1 \sin^2 \theta - \frac{2}{r} u_{3,3} - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta) \right] = 0, \\
\sigma_{2,1}^1 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{2,3}^3 + \frac{1}{r} \sigma_2^1 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^3) \operatorname{ctg} \theta + \sigma_1^2 r + \\
+ \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \left(u_{2,11} - \frac{2}{r} u_{2,1} - \frac{2}{r^2} u_2 \right) + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \left(\frac{1}{r^2} u_{2,22} + \frac{2}{r} u_{2,1} - \frac{2}{r^2} u_2 + \frac{2}{r} u_{1,2} + \right. \\
\left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} u_{2,2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{2,33} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2 \sin^2 \theta} u_{3,3} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_2 \right) = 0, \quad (1.5.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3,1}^1 + \sigma_{3,2}^2 + \sigma_{3,3}^3 + \frac{1}{r} \sigma_3^1 + \sigma_1^3 r \sin^2 \theta + \sigma_2^3 \sin \theta \cos \theta + \\ + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \left(u_{3,11} - \frac{2}{r} u_{3,1} - \frac{2}{r^2} u_3 \right) + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \left[\frac{1}{r^2} u_{3,22} + \frac{2}{r} (u_{3,1} + u_{1,3}) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} u_{3,33} - 2 \operatorname{ctg} \theta u_{2,3} - 2u_3 - \operatorname{ctg} \theta u_{3,2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае введем обозначения $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Тогда уравнения равновесия (1.5.28) в перемещениях с использованием соотношений (1.5.2) запишутся так:

$$\begin{aligned} (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) u_{,rr} + \frac{2}{r} \left[a_{11} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{13} + r a_{11,r}) \right] u_{,r} + \\ + \frac{1}{r^2} \left[r (a_{12,r} + a_{13,r}) + a_{12} + a_{13} - 2 (a_{22} + a_{23} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \right] u + \frac{k_1}{r^2} u_{,\theta\theta} + \\ + \frac{k_1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{,\varphi\varphi} + \frac{k_1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta u_{,\theta} + \frac{G + a_{12}}{r^2} v_{,r\theta} + \frac{1}{r^3} (r a_{12,r} - 2k_1 - a_{22} - \\ - a_{23}) v_{,\theta} + \frac{G + a_{13}}{r^2} \operatorname{ctg} \theta v_{,r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^3} (r a_{13,r} - 2k_1 - a_{22} - a_{23}) v + \\ + \frac{G + a_{12}}{r^2 \sin^2 \theta} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (r a_{13,r} - 2k_1 - a_{22} - a_{23}) w_{,\varphi} + \sigma_{,r} = 0, \\ (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) v_{,rr} + \frac{1}{r^2} (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) v_{,\theta\theta} - \frac{k_2}{r} v_{,r} + \frac{k_1}{r^2 \sin^2 \theta} v_{,\varphi\varphi} + \\ + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} (a_{22} + a_{23} - a_{32} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) v_{,\theta} + \frac{1}{r^2} \left(k_2 - a_{23} - a_{33} \operatorname{ctg}^2 \theta - 2G - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) v + (G + a_{21}) u_{,r\theta} + \frac{1}{r} (a_{22} + a_{23} + 2k_1) u_{,\theta} + \frac{G + a_{23}}{r^2 \sin^2 \theta} w_{,\varphi} + \\ + \operatorname{ctg} \theta (a_{21} - a_{31}) u_{,r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} (a_{22} + a_{23} - a_{32} - a_{33}) u + \sigma_{,\theta} = 0, \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

$$\begin{aligned} k_1 w_{,rr} - \frac{k_2}{r} w_{,r} + \frac{k_1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{k_2}{r^2} w + \frac{\overset{\circ}{\sigma}_\theta + a_{33}}{r^2 \sin^2 \theta} w_{,\varphi\varphi} - \frac{k_1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta w_{,\theta} + \\ + (G + a_{31}) u_{,r\varphi} + \frac{k_3}{r} u_{,\varphi} + \frac{G + a_{32}}{r^2} v_{,\theta\varphi} + \frac{G + a_{33}}{r^2} \operatorname{ctg} \theta v_{,\varphi} + \\ + \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta w_{,\varphi} \overset{\circ}{\sigma}_\theta v_{,\varphi} + \sigma_{,\varphi} = 0, \end{aligned}$$

где

$$k_1 = G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta, \quad k_2 = 2(\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta), \quad k_3 = a_{33} + a_{32} + 2k_1.$$

Здесь, как и в случае цилиндрических задач, величины a_{ij} и G_{ij} конкретизируются моделью тела.

Границные условия в напряжениях (1.5.12) в сферической системе координат принимают следующий вид:

$$\sigma_1^i N_i + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 N_1 u_{1,1} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 N_2 \frac{1}{r^2} \left(u_{1,2} - \frac{u_2}{r} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_3^3 N_3 \frac{u_{1,3} - u_3/r}{r^2 \sin^2 \theta} = P_1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^i N_i + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 N_1 \left(u_{2,1} - \frac{u_1}{r} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 N_2 \frac{1}{r^2} (u_{2,2} + r u_1) + \\ + \overset{\circ}{\sigma}_3^3 N_3 \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (u_{2,3} - \operatorname{ctg} \theta u_3) = P_2, \quad (1.5.30) \\ \sigma_3^i N_i + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 N_1 \left(u_{2,1} - \frac{u_3}{r} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 N_2 \frac{1}{r^2} (u_{3,2} - \operatorname{ctg} \theta u_3) + \\ + \overset{\circ}{\sigma}_3^3 N_3 (u_{2,3} + \sin \theta \cos \theta u_2 + r \sin^2 \theta u_1) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = P_3. \end{aligned}$$

Если внешние нагрузки «мертвые», то $P_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$).

Условие несжимаемости (1.5.14) представимо в форме

$$r^2 u_{,r} + v_{,\varphi} + 2rv + u \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin^2 \varphi} w_{,\theta} = 0. \quad (1.5.31)$$

Аналогично может быть записано и условие (1.5.13) на упруго-пластической границе.

Отметим, что если все тело находится в пластическом состоянии ($V = \overset{p}{V}$), то сферическая задача состоит из уравнений (1.5.29), (1.5.31) с краевыми условиями (1.5.30). При этом коэффициенты a_{ij} и G_{ij} конкретизируются моделью тела.

Решение линеаризированных уравнений для сферических задач представляем рядами по сферическим функциям [128, 257]

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} A_{jm} (r) Y_{jm} (\theta, \varphi), \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} B_{jm} (r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{jm} (\theta, \varphi), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} C_{jm} (r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{jm} (\theta, \varphi), \\ \sigma &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} D_{jm} (r) Y_{jm} (\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

Здесь $Y_{jm} (\theta, \varphi) = P_j^m (\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi)$ — сферические функции, $P_j^m (\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода степени j и порядка m ($P_j^m = 0$ для $m > j$). Функции Y_{jm} являются решениями уравнения $\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + j(j+1) \right] Y_{jm} (\theta, \varphi) = 0$.

Можно показать, что в случае симметричного начального состояния ($\overset{\circ}{\sigma}_2^2 = \overset{\circ}{\sigma}_3^3$, $\overset{\circ}{\sigma}_j^i = 0$ при $i \neq j$) из соотношений (1.5.2)

следуют равенства $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{33}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{21}$, $a_{22} - a_{23} = 2G$. Отсюда получаем

$$B_{jm}(r) = C_{jm}(r).$$

Так как рассматриваемая задача линейна и однородна, то ее можно записать отдельно для каждого члена из каждого ряда (1.5.32) с одинаковыми индексами m и j . В дальнейшем для краткости записи индексы m и j опустим. В терминах функций A , B , D основные уравнения (1.5.29)–(1.5.31) запишутся в следующем виде:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) A''(r) + \frac{1}{r} \{ r a_{11,r} + 2(a_{11} + a_{12} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \} A'(r) + \\ + \frac{1}{r^2} \{ 2(r a_{12,r} + a_{12} - a_{22} - a_{23} - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) - (j^2 + j)(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \} A(r) - \\ - \frac{G + a_{12}}{r^2} (j^2 + j) B'(r) - \frac{j^2 + j}{r^3} \{ r a_{12,r} - a_{22} - a_{23} - 2(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \} B(r) + \\ + D'(r) = 0, \\ (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) B''(r) + \frac{2}{r} (\overset{\circ}{\sigma}_\theta - \overset{\circ}{\sigma}_r) B'(r) + \frac{1}{r^2} \{ 2(\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) - \\ - (j^2 + j) (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \} B(r) + (G + a_{21}) A'(r) + \frac{2}{r} (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) A(r) + \\ + D(r) = 0; \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) A'(r) + 2 \frac{a_{12}}{r} A(r) - \frac{a_{12}}{r^2} (j^2 + j) B(r) + D(r) = 0, \\ (G + \overset{\circ}{\sigma}_r) B'(r) + G A(r) - (2G + \overset{\circ}{\sigma}_r) \frac{1}{r} B(r) = 0; \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

условия несжимаемости

$$A'(r) + \frac{2}{r} A(r) - \frac{1}{r^2} (j^2 + j) B(r) = 0. \quad (1.5.35)$$

Аналогично в терминах функций A , B , D записывается условие (1.5.13) на упругопластической границе. Конкретизация уравнений (1.5.33)–(1.5.35) для области пластического $(\overset{p}{V})$ и упругого деформирования $(\overset{e}{V})$, осуществляется соответствующим выбором коэффициентов a_{ij} и G_{ij} . Очевидно, когда все тело находится в пластическом состоянии $(V = \overset{p}{V})$, то краевая задача содержит только уравнения (1.5.33)–(1.5.35).

Отметим, что в случае сжимаемого материала в соотношениях (1.5.33), (1.5.34) следует опустить члены, содержащие функцию D и ее производные. Коэффициенты a_{ij} и G_{ij} в этом

случае определяются в зависимости от выбранной модели тела соотношениями (1.5.5), (1.5.6) или (1.4.10), (1.4.11).

При $a_{ij} = \text{const}_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$ из системы уравнений (1.5.33) (1.5.35) можно исключить функции B и D . Таким образом, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $A(r)$:

$$\begin{aligned} & r^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_r)A^{(4)} + r\{2(4G + 3\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}\}A''' + \\ & + [4(3G + \overset{\circ}{\sigma}_r + 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta) + 2r(2\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}) - (j^2 + j)(a_{11} + a_{22} - \\ & - a_{12} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta - 2G)]A'' + \frac{1}{r}\{6r\overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} + (j^2 + j) \times \\ & \times [2(G - a_{11} + a_{12} + a_{21} - 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta) - a_{22} - a_{23} - r\overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}\}A' + \\ & + \frac{1}{r^2}(j^2 + j)(j^2 + j - 2)(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)A = 0. \quad (1.5.36) \end{aligned}$$

Границные условия (1.5.34) при этом перепишутся в виде

$$\begin{aligned} & r^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_r)A''' + 2r(3G + 2\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)A'' + [6(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \\ & + (j^2 + j)(G - a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22} - \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta)]A' = 0, \\ & r^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_r)A'' + r(2G + 3\overset{\circ}{\sigma}_r)A' + (j^2 + j - 2)GA = 0, \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

а условия на границе раздела зон упругого и пластического деформирования S имеют вид

$$\begin{aligned} & \{r^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_r)A''' + 2r(3G + 2\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)A'' + [6(G + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \\ & + (j^2 + j)(G - a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22} - \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta)]A'\}|_S = 0, \\ & [r^2(G + \overset{\circ}{\sigma}_r)A'' + r(2G + 3\overset{\circ}{\sigma}_r)A' + (j^2 + j - 2)GA]|_S = 0, \\ & [A']|_S = 0, \quad [A]|_S = 0. \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

Приведенные краевые задачи, полученные с использованием трехмерных уравнений устойчивости, будем применять как для решения задач горной механики, так и для некоторых других.

1.6. Метод решения статических упругопластических задач устойчивости. Алгоритм поиска критических нагрузок

Найти точное аналитическое решение полученных в § 5 краевых цилиндрических и сферических задач не представляется возможным ввиду их сложности. Безусловно, трудности полу-

чения аналитических решений статических упругопластических задач горной механики при наличии границ раздела сред для неоднородного докритического состояния становятся еще значительней. Поэтому для нахождения приближенного решения задач воспользуемся методом конечных разностей. Суть этого подхода заключается в замене производных неизвестной функции разностными соотношениями, что в свою очередь приводит к замене дифференциальных уравнений разностными, решения которых в любой конечной области сводятся к решению конечной системы алгебраических уравнений. Для определенной и непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $y = y(r)$ это осуществляется следующим образом: сегмент $[a, b]$ разбивается точками $i = 0, 1, \dots, M$ на равные промежутки длины $\tau = (b - a)/M$. Производные функции на данном интервале заменяются во внутренних точках центральными разностями второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\tau}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\tau^2}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ y'''_i &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2\tau^3}, \\ y_i^{(IV)} &= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\tau^4}, \quad i = 2, 3, \dots, M-2. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

В крайних точках r_0 и r_M производные будем аппроксимировать следующими конечными разностями (верхние знаки в этих формулах соответствуют $i = 0$, нижние $i = M$):

$$\begin{aligned} y'_i &= \pm \frac{1}{2\tau} (-3y_i + 4y_{i\pm 1} - y_{i\pm 2}), \\ y''_i &= \frac{1}{\tau^2} (2y_i - 5y_{i\pm 1} + 4y_{i\pm 2} - y_{i\pm 3}), \\ y'''_i &= \pm \frac{1}{2\tau^3} (-5y_i + 18y_{i\pm 1} - 24y_{i\pm 2} + 14y_{i\pm 3} - 3y_{i\pm 4}). \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Вопрос определения критических параметров сводится к разрешимости уравнения вида

$$\det(X_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6.3)$$

при выполнении условия (1.3.8). Однако анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что элементы определителя для среды со сложными реологическими свойствами будут зависеть не только от приложенной нагрузки, геометрических размеров рассматриваемой задачи, физико-механических характеристик материала, но и от произвольного комплексного числа ω (временного множителя). Для упрощения вычислений при численном анализе можно считать, что $\omega = \beta$ — действительное число. При этом, очевидно, что случай $-\infty < \beta < 0$ будет соответствовать затуханию амплитуд возмущений с течением времени, а случай $0 \leq \beta < \infty$ будет соответствовать неограниченному

возрастанию возмущений перемещений и напряжений. В этом случае для определения критической нагрузки уравнение (1.6.3) можно представить в форме:

$$\Phi(P, \beta, \chi_i) = 0, \quad (1.6.4)$$

здесь χ_i — параметры материала и конструкции.

При фиксированных значениях параметров χ_i поиск критической нагрузки при однородных и неоднородных докритических состояниях будем проводить по следующей схеме:

- при заданном значении β численно решается уравнение $\Phi(P, \beta, \chi_i) = 0$, что позволяет определить зависимость $P = P(\beta)$;
- проводим минимизацию нагрузки P в зависимости от β в области неустойчивости $0 \leq \beta < \infty$ и в качестве критической нагрузки примем минимум функции $P = P(\beta)$ при фиксированных значениях χ_i .

В случае задач, для которых в число переменных χ_i может входить l_0 — параметр волнообразования — в качестве критической нагрузки будем принимать величину $P_{kp} = \min\{P(l_0)\}$, т. е. будем проводить дополнительную минимизацию по параметру волнообразования l_0 . При этом в число параметров по которым, наряду с β необходимо проводить минимизацию, входят: τ — шаг разностной сетки; m, n — параметры волнообразования по контуру и образующей. Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины P в зависимости от β, m, n при условии $\Phi(P, \beta, m, n, \chi_i) = 0$. Задачу определения критической нагрузки, при фиксированном значении τ и параметрах χ_i будем решать в два этапа.

На первом этапе в пространстве параметров P, β, m, n определяется область, в которой происходит смена знака функции $\Phi(P, \beta, m, n, \tau, \chi_i)$, $0 \leq \beta < \infty$, $0 < P < 1$, $m, n = 1, 2, \dots$

На втором этапе вычисляется величина $P_{kp} = \min_{\beta, m, n} P(\beta, m, n)$, при которой $\Phi(P, \beta, m, n, \tau, \chi_i) = 0$.

Для вычисления характеристического определителя применяется LU -разложение: $\det(c_{ij}) = \det LU = u_{11}u_{22} \dots u_{nn}$. Вычисление треугольных матриц L (с единицами на главной диагонали) и U связано с методом Гаусса. В процессе исключения наибольший по модулю элемент в столбце выбирается в качестве главного элемента [271]. Для выбора главного элемента используются масштабные множители. Масштабирование строк производится неявно, путем запоминания соответствующих коэффициентов, а не с помощью действительного изменения матричных элементов.

Постоянные горной породы (аргиллит, песчаник, не опасный по выбросам и другие) определялись по результатам опы-

тов [265] по трехосному нагружению цилиндрических образцов. Используя значения напряжений и деформаций, соответствующих пределу пропорциональности, из закона Гука определялся модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , а из уравнения поверхности нагружения — значение предела текучести. Для напряженно-деформированных состояний за пределом пропорциональности из уравнения поверхности нагружения находилось значение коэффициента упрочнения c , при котором выполняется постулат Драккера. Значения констант горных пород определялись для каждого приведенного в работе [265] варианта нагружения. В качестве окончательного результата брались средние значения этих постоянных.

Отметим, что поскольку системы, испытывающие упруговязкопластические деформации, обладают свойством внутренней неконсервативности вследствие необратимости вязких и пластических деформаций, то исследование устойчивости состояния равновесия за пределом упругости следует проводить на основе динамического подхода.

Г л а в а 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В УПРОЧНЯЮЩИХСЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ

Создание подземных сооружений различного назначения, в том числе глубоких подземных сооружений всевозможной конфигурации, непосредственно связано с необходимостью разработки обоснованных методов их расчета. Этого в первую очередь требуют условия безопасности труда и сохранности находящегося в сооружениях сырья, оборудования и т. д. Исследование локальной неустойчивости задач геомеханики в первую очередь связано с определением основного (докритического) напряженно-деформированного состояния. В случае нестандартных попечечных сечений горных выработок не удается построить точных аналитических решений. Поэтому в данной главе значительное внимание уделено развитию метода малого параметра [142] для определения докритического состояния цилиндрических выработок эллиптического, многогранного, квадратного и т. д. по-перечных сечений, когда горный массив в приконтурной зоне выработки считается упруговязкопластическим упрочняющимся телом [257]. Применение схемы расчета Ивлева–Ершова [142] для упругопластических задач уже описано во введении. Делается также попытка связать востине: сложную модель упругопластического поведения горного массива в приконтурной зоне; метод малого параметра определения напряженно-деформированного докритического состояния; постановку и исследование локальной неустойчивости задач геомеханики в рамках точных трехмерных уравнений. Приводится оценка точного и приближенного подходов в рассмотренном классе задач геомеханики.

Результаты этой главы излагаются в соответствии с публикациями авторов [26, 66, 67, 152, 163, 165, 206, 232, 233, 236, 239, 240, 248, 250, 253, 255, 257, 258, 263].

2.1. Неустойчивость полупространства со сферической полостью

Для хранения нефти, газа, размещения насосных станций и т. д. в настоящее время все шире используют подземные полости сферической формы. В связи с этим проведенный в этом

параграфе анализ возможности потери устойчивости состояния равновесия массива возле таких выработок имеет практическое значение. Согласно гипотезе С.Г. Михлина, напряженное состояние нетронутого массива считается гидростатическим

$$\overset{\circ}{\sigma}_1 = \overset{\circ}{\sigma}_2 = \overset{\circ}{\sigma}_3 = -gh.$$

Устойчивость сферической выработки в упругопластическом массиве, имеющем поверхность раздела зон упругого и пластического деформирования впервые рассмотрена в работе [281]. Наличие поверхности раздела зон с различными физико-механическими свойствами, безусловно, влияет на критические значения параметров нагружения. Выявление характера и степени этого влияния представляет несомненный интерес. Грубые приближения критических значений нагрузок для полостей можно получить с позиции образования свода обрушения по формуле

$$P = g(\gamma - R), \quad (2.1.1)$$

где γ — радиус поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования массива; R — радиус полости; P — давление, приложенное к внутренней поверхности полости. Исследуем устойчивость сферической полости радиуса R_0 в невесомом полупространстве. По контуру полости равномерно распределена нагрузка интенсивности P , например, давление газа, нефтепродуктов на породный контур. На бесконечности действуют усилия gh , где g — средний объемный вес вышележащих пород; h — глубина заложения полости.

Напряженно-деформированное состояние массива в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) определяется уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.1.2)$$

и законом Гука для упругой области. Решая эту систему уравнений, находим

$$u = \frac{C_1}{r^2}, \quad \sigma_r = -4\mu \frac{C_1}{r^3} + C_2, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{C_1}{r^3} + C_2. \quad (2.1.3)$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической зоне получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2}, \quad u = \frac{B_1}{r^2}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения (1.1.11) имеем

$$e_r = \psi(s_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p), \quad e_\theta = \psi(s_\theta - c\varepsilon_\theta^p - e_\theta^p),$$

$$e_\varphi = \psi(s_\varphi - c\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \eta e_\varphi^p).$$

Так как $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$, то из этих равенств следует, что $s_\theta = s_\varphi$, $s_\theta = -\frac{s_r}{2}$.

Функция нагружения (1.1.8) принимает вид

$$(s_r - c\varepsilon_r^p - \eta e_r^p)^2 = \tilde{k}^2; \quad \tilde{k}^2 = \frac{2}{3} k^2. \quad (2.1.4)$$

Учитывая, что

$$\frac{e}{r} = \varepsilon_r - \frac{p}{r}, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad s_r = 2\mu(\varepsilon_r - \frac{p}{r}),$$

из соотношения (2.1.4) выводим:

$$\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} + \frac{2\mu + c}{\eta} \frac{p}{r} \varepsilon_r = -\frac{\tilde{k}}{\eta} - \frac{4\mu}{\eta r^3} B_2, \quad \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} = \frac{p}{r}.$$

Для пропорционального нагружения интегрирование этого уравнения приводит к следующему результату:

$$\frac{p}{\varepsilon_r} = -\frac{1}{2\mu + c} \left(\tilde{k} + \frac{4\mu}{r^3} B_1 \right) + C \exp \left(-\frac{2\mu + c}{\eta} t \right).$$

Рассмотрим установившееся течение [226], переходя к предельному случаю при $t \rightarrow \infty$. Так как $\frac{2\mu + c}{\eta} > 0$, то для пластической деформации имеем

$$\frac{p}{\varepsilon_r} = -\frac{1}{2\mu + c} \left(\tilde{k} + \frac{4\mu}{r^3} B_1 \right). \quad (2.1.5)$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = s_r - s_\theta = \frac{3\mu}{2\mu + c} \left(\tilde{k} - \frac{2c}{r^3} B_1 \right),$$

из уравнения (2.1.2) найдем

$$\sigma_r = -\frac{2\mu}{2\mu + c} \left(\frac{2c}{r^3} B_1 + 3\tilde{k} \ln r \right) + B_2, \quad (2.1.6)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{2\mu}{2\mu + c} \left[-\frac{c}{r^3} B_1 + \tilde{k} (3 \ln r + 1,5) \right] + B_2.$$

Для определения коэффициентов интегрирования C_1 , C_2 , B_1 , B_2 и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического

деформирования γ имеем граничное условие $\overset{\circ}{\sigma}_r = -P$ при $r = R$; условие на «бесконечности» $\overset{\circ}{\sigma}_r = \overset{\circ}{\sigma}_\theta = -gh$ при $r \rightarrow \infty$ и условия сопряжения решений при $r = \gamma$ (1.1.5), (1.1.6).

Отсюда находим

$$C_1 = B_1 = -\frac{\tilde{k}\gamma^3}{4\mu}, \quad C_2 = -gh, \quad B_2 = \frac{2\mu}{2\mu + c} \left(\frac{2cB_1}{R^3} + 3\tilde{k} \ln R \right) - P$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ в массиве

$$\overset{\circ}{\sigma}_r \left(\frac{\gamma^3}{R^3} - 1 \right) + 6\mu \ln \left(\frac{\gamma}{R} \right) + \left(1 + \frac{P - gh}{\tilde{k}} \right) (2\mu + c) = 0.$$

Перейдя к безразмерным величинам, получим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_r &= -q + \tilde{k}\gamma^3 r^{-3}, & \overset{\circ}{\sigma}_\theta &= -q - \frac{\tilde{k}\gamma^3}{2r^3}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_r &= \frac{\tilde{k}}{2+c} \left[c\gamma^3(r^{-3} - R^{-3}) - 6 \ln \frac{r}{R} \right] - P, \\ \overset{\circ}{\sigma}_\theta &= \overset{\circ}{\sigma}_r - \frac{3\tilde{k}}{2+c} \left(1 + \frac{c\gamma}{2r^3} \right), \\ \overset{\circ}{e}_r &= -2\overset{\circ}{e}_\theta = -\frac{\tilde{k}}{2+c} (1 - \gamma^3 r^{-3}), & q &= \frac{gh}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

При этом уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ принимает вид

$$c\gamma^3 R^{-3} + 2 + 6 \ln (\gamma R^{-1}) + (2+c)(P-q) \tilde{k}^{-1} = 0. \quad (2.1.8)$$

Здесь величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к модулю сдвига μ , а имеющие размерность длины к d -значениюю радиуса r , при котором ставятся условия локальности возмущений, и им сохранены прежние обозначения.

Из уравнения (2.1.8) следует, что пластическое состояние возникает на поверхности выработки ($\gamma = R$) при $q = P + \tilde{k}$.

Для осесимметричной формы потери устойчивости из системы уравнений (1.5.28), учитывая силы инерции, получаем

$$\frac{d\overset{\circ}{\sigma}_r}{dr} + 2 \frac{\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta}{r} + \overset{\circ}{\sigma}_r \frac{d^2u}{dr^2} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \frac{2}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) + \rho\omega^2 u = 0. \quad (2.1.9)$$

Компоненты с кружочком наверху для областей V и $\overset{\circ}{V}$ определяются соотношениями (2.1.7). Из выражений (1.4.12) получаем

$$\overset{\circ}{\sigma}_r = q + 2(\mu - a_0) \frac{du}{dr} + 2a_0 \frac{u}{r}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_\theta = q + a_0 \frac{du}{dr} + (2\mu - a_0) \frac{u}{r}, \quad a_0 = \frac{1}{3} \tilde{a} \tilde{k}^2.$$

Для деформирования, происходящего без изменения объема, имеем $u = \text{const}/r^2$. Интегрируя уравнение (2.1.9), получаем

выражения для напряжений в области пластического деформирования массива $\overset{p}{V}$:

$$\begin{aligned}\overset{p}{\sigma}_r &= \frac{2}{r^3} \left(\frac{3\tilde{k}\mu}{2\mu+c} - 2\mu + 3a_0 \right) C_3 + \frac{3\tilde{k}c}{2(2\mu+c)r^6} \gamma^3 C_3 + \rho\omega^2 C_3 \frac{1}{r} + C_4, \\ \overset{p}{\sigma}_\theta &= \overset{p}{\sigma}_r + 3(2\mu + 3a_0) \frac{1}{r^3} C_3,\end{aligned}$$

и в области упругого деформирования массива $\overset{e}{V}$:

$$\overset{e}{\sigma}_r = \left(\frac{3\tilde{k}}{2r^6} \gamma^3 - \frac{4\mu}{r^3} + \rho\omega^2 \frac{1}{r} \right) B_3 + B_4, \quad \overset{e}{\sigma}_\theta = \overset{e}{\sigma}_r + 6\mu \frac{B_3}{r^3}.$$

Постоянные интегрирования C_3 , C_4 , B_3 и B_4 определяются из предположений локальности возмущений

$$\overset{e}{u} = 0, \quad \overset{e}{\sigma}_r = 0, \quad \overset{e}{\sigma}_\theta = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

сопряжения векторов перемещений и поверхностных сил

$$\overset{e}{u} = \overset{p}{u}, \quad \overset{e}{\sigma}_r = \overset{p}{\sigma}_r \quad \text{при } r = \gamma$$

и граничных условий

$$\overset{p}{\sigma}_r + \overset{op}{\sigma}_r \frac{du}{dr} = P_r \quad \text{при } r = R.$$

Из первых двух условий находим: $B_4 = 0$, $C_3 = B_3$. Для определения оставшихся двух констант получаем систему двух линейных алгебраических уравнений. Условие существования нетривиального решения этой системы запишется так:

$$\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 = 0, \quad (2.1.10)$$

где $s = i\Omega$,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -3\tilde{k} \left[\frac{c\gamma^3}{2R^3} + \mu \left(2 - \frac{R^3}{\gamma^3} \right) \right] - 8\mu^2 \left(1 - \frac{R^3}{\gamma^3} \right) - (2\mu + c)(2P\delta - 4\mu), \\ \alpha_1 &= -\eta \left\{ 2P\delta - 4\mu + \frac{3\tilde{k}}{2\mu+c} \left[\frac{c\gamma^3}{2R^3} + \mu \left(2 - \frac{aR^3}{\gamma^3} \right) \right] \right\}, \\ \alpha_2 &= \rho R^2 (2\mu + c), \quad \alpha_3 = \eta \rho R^2.\end{aligned}$$

Значение $\delta = 0$ соответствует «мертвой» поверхности нагрузке (1.2.7), (постоянной по величине и по направлению), а значение $\delta = 1$ соответствует случаю «следящей» нагрузки (1.2.6).

Стандартный полином (2.1.10) удовлетворяет условию Раянса–Гурвица, если положительны все главные миноры его матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = \alpha_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 > 0, \quad \Delta_3 = \alpha_3 \Delta_2 > 0.$$

В этом случае $\operatorname{Re} s_j < 0$, где s_j — корни полинома (2.1.10). Таким образом, условие устойчивости (1.3.8) выполняется.

Если рассматривать медленное движение, то в уравнении (2.1.9) можно пренебречь силами инерции. В этом случае величина s действительна и на основе формулы (2.1.10) получаем условие устойчивости в следующем виде:

$$s = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 0. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, при использовании квазистатического подхода, критические значения параметра нагрузки P определяются из уравнения $\alpha_0 = 0$ при $\delta = 1$.

На рис. 2.1.1 представлены результаты численного решения при $\delta = 1$, полученные из условия (2.1.11). Штриховыми линиями изображены кривые, полученные по приближенной теории Лейбензона–Ишлинского. Для этого случая имеем

$$\alpha_0 = -8\mu^2 \left(1 - \frac{R^3}{\gamma^3}\right) - (2\mu + c)(2P - 4\mu), \quad \alpha_1 = -\eta(2P - 4\mu).$$

Кривые 1 на рисунке соответствуют результатам, полученным при $c/\mu = 0$ и $k/\mu = 0,00052$, а кривые 2 — при $c/\mu = 0,01$ и $k/\mu = 0,00089$. В первом случае горная порода считается аргиллитом, во втором — алевролитом. В областях, заключенных между осью абсцисс и кривыми, выполняется условие неустойчивости $\operatorname{Im}(\omega) < 0$, на самих кривых — условие $\operatorname{Im}(\omega) = 0$.

Для исследования произвольной формы потери устойчивости равновесия горного массива воспользуемся линеаризованными уравнениями устойчивости (1.5.36) с граничными условиями (1.5.37) на поверхности выработки ($r = R$). Коэффициенты a_{ij} и G_{ij} в граничных условиях и в уравнениях устойчивости (1.5.36), когда они применяются к пластической области, определяются соотношениями (1.4.9) с индексом « p » над буквой. Компоненты тензора напряжений и функция A должны также иметь в этом случае индекс « p ». Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 - 4a_0, \quad a_{22} = 2 - a_0, \quad a_{12} = a_{21} = 2a_0, \\ a_{23} &= a_{32} = -a_0, \quad a_0 = \frac{2}{3}(2 + c_0) - 1, \quad G_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

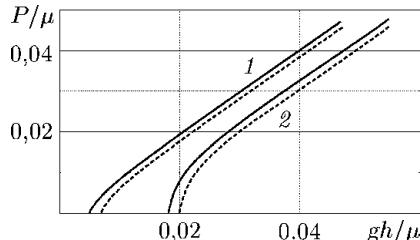


Рис. 2.1.1

Для упругой области коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются формулами (1.4.15) $a_{ij} = 2\delta_{ij}$, $G_{ij} = 1$, $i = 1, 2, 3$, а компоненты тензора напряжений и функция A должны иметь в этом случае индекс « e ». К приведенным уравнениям следует присоединить также условия непрерывности векторов перемещений и поверхностных усилий на поверхности раздела области упругого и пластического деформирования (1.5.38) при $r = \gamma$ и условия локальности возмущений упругих перемещений $A = 0$, $A' = 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Найти точное аналитическое решение полученной краевой задачи не представляется возможным. Для нахождения приближенного решения можно воспользоваться методом конечных разностей. Заменив производные функции $A(r)$ конечными разностями второго порядка аппроксимации (1.6.1)–(1.6.2), получим систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых зависят от параметров задачи, шага разностной сетки и степени j присоединенных функций Лежандра. Из условия существования истривиального решения этой системы однородных алгебраических уравнений получим характеристическое уравнение, которое надо решать совместно с уравнением (2.1.8). Значения ненулевых элементов характеристического определятеля $\Delta = \det(c_{mn})$ ($m, n = 0, 1, \dots, N + 1$), согласно результатам работы [244], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 c_{00} &= -\frac{5}{2} \overset{p}{b}_{11} + 2\tau \overset{p}{b}_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 \overset{p}{b}_{13} + \tau^3 \overset{p}{b}_{14}, \\
 c_{01} &= 9\overset{p}{b}_{11} - 5\tau \overset{p}{b}_{12} + 2\tau^2 \overset{p}{b}_{13}, \quad c_{02} = -12\overset{p}{b}_{11} + 4\tau \overset{p}{b}_{12} - 0,5\tau^2 \overset{p}{b}_{13}, \\
 c_{03} &= 7\overset{p}{b}_{11} - \tau \overset{p}{b}_{12}, \quad c_{04} = -3\tau^3 \overset{p}{b}_{11}, \quad c_{10} = 2\overset{p}{b}_{11} - \frac{3}{2} \tau \overset{p}{b}_{22} + \tau^2 \overset{p}{b}_{23}, \\
 c_{11} &= -5\overset{p}{b}_{21} + 2\tau \overset{p}{b}_{22}, \quad c_{12} = 4\overset{p}{b}_{21} - 0,5\tau \overset{p}{b}_{22}, \quad c_{13} = -\tau^2 \overset{p}{b}_{21}, \\
 \overset{p}{b}_{mn} &= \overset{p}{b}_{mn}(R), \quad n = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2; \\
 c_{ij} &= \overset{p}{b}_{31} - 0,5\tau \overset{p}{b}_{32}, \quad c_{i,j+1} = -4\overset{p}{b}_{31} + \tau \overset{p}{b}_{32} + \tau^2 \overset{p}{b}_{33} - 0,5\tau^3 \overset{p}{b}_{34}, \\
 c_{i,j+2} &= 6\overset{p}{b}_{31} - 2\tau^2 \overset{p}{b}_{33} + \tau^4 \overset{p}{b}_{35}, \\
 c_{i,j+3} &= -4\overset{p}{b}_{31} - \tau \overset{p}{b}_{32} + \tau^2 \overset{p}{b}_{33} + 0,5\tau^3 \overset{p}{b}_{34}, \\
 c_{i,j+4} &= \overset{p}{b}_{31} + 0,5\tau \overset{p}{b}_{32}, \quad i = 2, 3, \dots, N_p + 2, \quad j = i; \\
 \overset{p}{b}_{mn} &= \overset{p}{b}_{mn}(r_i), \quad r_{N_p} = \gamma.
 \end{aligned}$$

При $i = N_p + 3, N_p + 4, \dots, N - 1; j = i - 1$ в приведенных выше формулах функции $\overset{p}{b}_{mn}$ должны быть заменены на функции $\overset{e}{b}_{mn}$.

Элементы c_{ij} при $i = N_p - 1, j = N_p - 4, \dots, N_p - 1$ и при $i = N_p - 1, j = N_p + 5, \dots, N_p + 2$ также определяются приведенными соотношениями для c_{ij} при $i = 0, j = 0, 1, 2, 3$ с той лишь разницей, что функции $\overset{p}{b}_{mn}$ во втором случае должны быть заменены на функции $\overset{e}{b}_{mn}$. В обоих случаях эти функции вычисляются в точке $r_{N_p} = \gamma$, т. е. $\overset{p}{b}_{mn} = \overset{p}{b}_{mn}(\gamma)$, $\overset{e}{b}_{mn} = \overset{e}{b}_{mn}(\gamma)$, как и в следующих выражениях:

$$c_{N_p-1 N_p} = -\frac{5}{2} \overset{p}{b}_{11} + 2\tau \overset{p}{b}_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 \overset{p}{b}_{13} + \tau^3 \overset{p}{b}_{14},$$

$$c_{N_p-1 N_p+1} = -\frac{5}{2} \overset{e}{b}_{11} + 2\tau \overset{e}{b}_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 \overset{e}{b}_{13} + \tau^3 \overset{e}{b}_{14},$$

$$c_{i i-4} = c_{i i+5} = 3, \quad c_{i i-1} = c_{i i+2} = -18, \quad c_{i i} = c_{i i+1} = 2,$$

$$c_{i i-1} = c_{i i+4} = -14, \quad c_{i i-2} = c_{i i+3} = 24, \quad i = N_p;$$

$$c_{i j} = c_{i i+3} = c_{i+1 j+3} = 1, \quad c_{i j+1} = c_{i i+2} = -4, \quad c_{i+1 i} = -1,$$

$$c_{i j+2} = c_{i i+1} = 5, \quad c_{i j+3} = c_{i i} = -2, \quad i = N_p + 1, \quad j = N_p - 3;$$

$$c_{N N-1} = 0,5, \quad c_{N N} = -2, \quad c_{N N+1} = \frac{3}{2}, \quad c_{N+1 N+1} = 1.$$

В этих формулах $r_0 = R$, $r_{N_p} = \gamma$, $r_{N+1} = 1$. Для сокращения записи использованы обозначения b_{1j} и b_{2j} ($j = 1, 2, 3$) для коэффициентов при функции A и ее производных первого и второго уравнений системы (1.5.38) соответственно и b_{3j} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) для коэффициентов уравнения (1.5.36).

Для получения критических значений параметров проводится минимизация по параметру j .

Теперь рассмотрим задачу устойчивости сферической полости в несжимаемом упругопластическом массиве с изотропным линейным упрочнением с поверхностью нагружения (1.1.16). Докритическое осесимметричное состояние массива в этом случае совпадает с начальным состоянием (2.1.7), (2.1.8) предыдущей задачи, если положить $\tilde{k} = (2/\sqrt{3})k$. Значения коэффициентов a_{ij} и G_{ij} для пластической зоны (1.5.9) в этом случае определяются следующими соотношениями:

$$a_{ij} = 2\mu g_{ij} - 4\frac{\mu^2}{b} \overset{\circ}{s}_{ii} \overset{\circ}{s}_{jj}, \quad G_j^i = \mu, \quad b = 2\mu \overset{\circ}{\Sigma} + \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\overset{\circ}{\Sigma}}{E}} \overset{\circ}{e}_l^{\circ} \overset{\circ}{s}_k^{\circ} \overset{\circ}{s}_l^{\circ}. \quad (2.1.13)$$

Для упругопластических несжимаемых массивов с трансляционным и изотропным линейным упрочнением получены критические значения параметров.

В табл. 2.1.1 приведены значения осредненных величин E , ν , k , k_0 , c и c_0 для аргиллита и песчаника, не опасного по выбросам, в случае трансляционного упрочнения (вариант 1) и изотропного линейного упрочнения (вариант 2) для несжимаемого тела.

Таблица 2.1.1

Материал	$E, 10^5$ Па	ν	Вариант	c_0	10^5 Па		
					k	k_0	c
Аргиллит	199555	0,357	1	2,6814	1022,48	0,1351	197151
			2	2,5439	724,99	0,986	187049
Песчаник, не опасный по выбросам	297255	0,171	1	2,9496	2208,01	0,1740	374379
			2	2,1726	1493,26	0,1177	275752

На рис. 2.1.2 для подкрепленной сферической выработки, проведенной в несжимаемом массиве с трансляционным упрочнением, показаны зависимости критических значений $P_0 = P/\mu$ от $q = gh/\mu$ при $R = 0,1$ определенные по линеаризованной

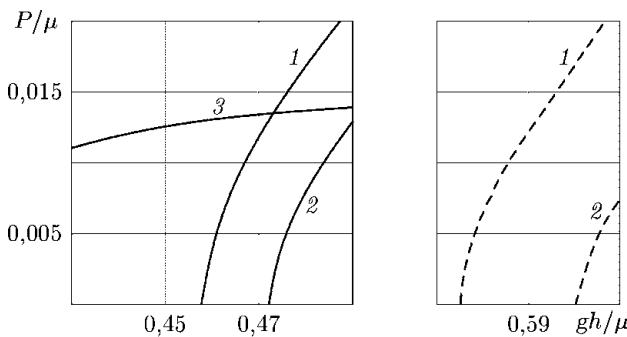


Рис. 2.1.2

теории (сплошные линии), по приближенному подходу (штриховые линии) и, с позиции образования свода обрушения (кривая 3) при $gR/\mu = 0,125 \cdot 10^{-4}$. Кривые 1, 3 относятся к выработке, проведенной в аргиллите, кривые 2 — в песчанике, не опасном по выбросам. В табл. 2.1.2 для свободной выработки ($P = 0$) в массиве с трансляционным упрочнением приведены критические значения параметра нагрузки q^* , деформации контура выработки ε^* и радиуса упругопластической границы γ_0^* . Кроме того, для сравнения приведено: q^{*e} — критическое значение безразмерной нагрузки для случая линейно-упругого массива, полученное в работе [180] и $q_{\text{деф}}^*$, $\varepsilon_{\text{деф}}^*$ — критическое значение нагрузки и деформации контура выработки в несжимаемом

упругопластическом массиве без упругопластической границы, полученное по деформационной теории при степенном законе упрочнения $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ (σ_u , ε_u — интенсивности напряжений и деформаций). Эти результаты получены в рамках приближенного подхода. Для аргиллита были найдены [196] следующие значения параметров A и n в степенном законе: $A = 112976 * 10^5$, $n = 0,751$.

Таблица 2.1.2

Материал	j	q^*	γ^*	ε^*	q^{*e}	$q_{\text{деф}}^*$	$\varepsilon_{\text{деф}}^*$	$q_{\text{пр}}^*$
Аргиллит	2	0,464	0,525	0,230	0,581	0,478	0,302	0,582
Песчаник, не опасный по выбросам	2	0,471	0,472	0,205	—	—	—	0,595

В табл. 2.1.3 приведены критические значения параметров свободной сферической выработки, вычисленные при разных шагах разностной сетки τ , для несжимаемого массива с изотропным линейным упрочнением.

Таблица 2.1.3

Материал	τ	j	q^*	γ^*	e^*
Аргиллит	0,05	2	0,461	0,532	0,248
	0,025	2	0,460	0,530	0,244
Песчаник, не опасный по выбросам	0,05	2	0,470	0,429	0,219

Анализ числовых результатов свидетельствует о том, что если порода вокруг горных выработок переходит в состояние пластического деформирования, то потеря устойчивости происходит раньше, чем в упругом массиве. Поэтому при исследовании устойчивости сферических выработок глубокого заложения должна изучаться устойчивость неупругого состояния равновесия горного массива вокруг выработок.

Полученные для свободной ($P = 0$) сферической выработки критические значения нагрузки качественно согласуются с критическими нагрузками для несжимаемого линейно-упругого массива (табл. 2.1.3). Различие по критическим нагрузкам и деформациям для рассмотренных несжимаемых горных пород с трансляционным упрочнением и линейным изотропным упрочнением незначительно (см. таблицы 2.1.2, 2.1.4) и составляет не более 3 и 5 % соответственно.

Определенные по теории течения критические деформации контура сферической выработки существенно (до 28 %) отличаются от критических деформаций в случае деформационной теории.

Результаты, полученные для сжимаемого и несжимаемого материала с изотропным линейным упрочнением, отличаются по критическим нагрузкам не более 9 %, а по деформациям — не более 4 % для сферических выработок.

Сравнение результатов, полученных для подкрепленной сферической выработки, показало (рис. 2.1.1), что отличие критических значений параметра q^* , определенных по приближенной теории типа Лейбензона Ишлинского, от соответствующих значений линеаризированной теории достигает 30 % для рассмотренных горных пород. Наиболее существенны эти отличия (рис. 2.1.1) для свободных ($P = 0$) выработок. Значения параметра P , найденные из предположения об образовании свода обрушения, являются сугубо приближенным и не отражают качественного характера явления.

2.2. Неустойчивость полупространства с вертикальной цилиндрической выработкой кругового поперечного сечения

При добыче ряда полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных стволов, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями, жизненно важными для функционирования шахты в целом. Состояние горных выработок в зависимости от их назначения должно удовлетворять различным требованиям, основным из которых является обеспечение безопасности условий для работающих людей. Под влиянием действующих усилий массив возле выработки может потерять устойчивость, что, безусловно, нежелательно. Поэтому анализ возможности потери устойчивости массива возле выработок представляет собой важную и актуальную задачу. Устойчивость вертикальных выработок в упругих массивах изучалась многими авторами [1, 2, 5, 108, 200]. В частности, в работе [200] показано, что потеря устойчивости выработки кругового поперечного сечения происходит по осесимметричной форме. Ниже рассматривается задача о пространственной форме потери устойчивости выработки в упругопластическом массиве с поверхностью раздела зон упругих и пластических деформаций.

Будем рассматривать устойчивость состояния равновесия нижнего полупространства с цилиндрической вертикальной выработкой, выходящей на дневную поверхность. Для этого класса задач можно ввести специфические упрощения за счет следующих предположений:

- при определении докритического состояния и исследовании линеаризированной задачи устойчивости можно не учитывать эффекты, связанные с тем, что выработка имеет ко-

нечную глубину. Учитывая это предположение можно ввести еще одно;

- при исследовании задач устойчивости можно не учитывать наличие дневной поверхности и рассматривать устойчивость состояния равновесия бесконечного пространства с бесконечной цилиндрической полостью под действием нагрузки на глубине h .

Задача определения докритического осесимметричного состояния решается в рамках плоской деформации. В результате получаем соотношения для безразмерных напряжений и деформаций [232]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{0e} &= -q + \frac{K\gamma^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta^{0e} = -q - \frac{K\gamma^2}{r^2}, \\ \sigma_r^o &= \frac{K}{2+c} [\gamma^2 c (r^{-2} - R^{-2}) - 4 \ln r] - P, \\ \sigma_\theta^o &= \sigma_r^o - \frac{2K}{2+c} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} + 2 \right), \quad \varepsilon_r^o = -\varepsilon_\theta^o = \frac{K}{2+c} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right), \\ q &= \frac{gh}{\mu}, \quad K = \frac{k}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы

$$\frac{2+c}{K} (q - P) - 2 - 4 \ln \frac{\gamma}{R} - \frac{c\gamma^2}{R^2} = 0. \quad (2.2.2)$$

Здесь, как и ранее, величины имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига μ , а имеющие размерность длины — к величине d , и для них сохранены прежние обозначения; r — текущая безразмерная координата вдоль оси Or , R — радиус выработки, P — давление на контуре выработки.

Рассмотрим осесимметричную ($u = u(r, z)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$) форму потери устойчивости состояния равновесия массива возле выработки. Согласно (1.5.2) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma + (2 - a_*) u_{,r} + a_* \frac{u}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma + (2 - a_*) \frac{u}{r} + a_* u_{,r}, \\ \sigma_z &= p + 2w_{,z}, \quad \sigma_{rz} = u_{,z} + w_{,r}, \quad a_* = \frac{2}{2+c}.\end{aligned}\quad (2.2.3)$$

Нетрудно заметить, что, приняв в этих соотношениях величину a_* равной нулю, получим соотношения упругого деформирования. Поэтому все необходимые выкладки будем делать для пластической области, а затем от них перейдем к соответствующим уравнениям для упругой области.

Решения линеаризованной системы уравнений устойчивости (1.5.16) в случае осесимметричной формы потери устойчивости ($v = 0$), когда имеют силу равенства (2.2.3), согласно

(1.5.21), выберем в виде

$$u = \sum_n^{\infty} A_n(r) \cos nz, \quad v = 0, \quad w = \sum_n^{\infty} C_n(r) \sin nz,$$

$$\sigma = \sum_n^{\infty} D(r) \cos nz.$$

Оставшиеся два уравнения системы (1.5.22) можно представить для краткости таким образом:

$$D'(r) = \Phi_1(r), \quad D(r) = -\frac{1}{n} \Phi_2(r). \quad (2.2.4)$$

Продифференцировав второе уравнение по r , и вычтя его из первого, получим

$$\frac{1}{n} \Phi_2' + \Phi_1 = 0. \quad (2.2.5)$$

Условие несжимаемости материала (1.5.24) дает еще одно уравнение

$$C = -\frac{1}{n} \left(A' + \frac{1}{r} A \right). \quad (2.2.6)$$

Теперь, исключив с помощью соотношения (2.2.6) функцию C , уравнение (2.2.5) при $a_{ij} = a_{ji}$ можно переписать в терминах функции A :

$$(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r) A^{IY} + \frac{1}{r} (2 + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) A''' + [n^2 (a_{11} - a_{33}) + \\ + \frac{1}{r} (\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}) - \frac{3}{r^2} (1 + \overset{\circ}{\sigma}_r)] A'' + [n^2 (a_{11,r} - a_{33,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{z,r}) + \\ + \frac{n^2}{r} (a_{11} - 2a_{13} - a_{33} + 2a_{23} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta - \overset{\circ}{\sigma}_z) - \frac{1}{r^2} (2\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}) + \\ + \frac{3}{r^3} (1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta)] A' + \left[-\frac{3}{r^4} (1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + \frac{1}{r^3} (2\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r}) + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{r^2} (a_{33} - a_{22} - \overset{\circ}{\sigma}_\theta + \overset{\circ}{\sigma}_z) + \frac{n^2}{r} (a_{12,r} + a_{32,r} - a_{33,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{z,r} - \right. \\ \left. - a_{13,r}) - n^4 (1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) \right] A = 0. \quad (2.2.7)$$

Для второго уравнения (2.2.4) получаем

$$D = \frac{1}{n^2} \left\{ -(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r) A''' - \frac{1}{r} (2 + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) A'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{r^2} (1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + n^2 (a_{33} - a_{31} - 1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) \right] A' + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r^2} (\overset{\circ}{\sigma}_\theta - 2\overset{\circ}{\sigma}_r - 1) + n^2 (a_{33} - a_{32} - 1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) \right] A \right\}. \quad (2.2.8)$$

Запишем граничные условия (1.5.23), принимая во внимание равенства (2.2.6) и (2.2.8),

$$\begin{aligned}
 & (1 + \overset{\circ}{\sigma}_r) A''' + \frac{1}{r} (2 + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) A'' - \\
 & - \left[\frac{1}{r^2} (1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_\theta) + n^2 (a_{33} + a_{11} - 1 + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_z - 2a_{13}) \right] A' - \\
 & - \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r^2} (\overset{\circ}{\sigma}_\theta - 2\overset{\circ}{\sigma}_r - 1) + n^2 (a_{33} - a_{32} - a_{13} + a_{12} - 1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) \right] A = 0, \\
 & A'' + \frac{1}{r} A' + \left(\frac{n^2}{1 + \overset{\circ}{\sigma}_r} - \frac{1}{r^2} \right) A = 0
 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

и условия локальности возмущений перемещений в упругой области $\overset{e}{A} = 0$, $\overset{e}{A}' = 0$ при $r \rightarrow \infty$.

В нашем случае коэффициенты $a_{ij} = \text{const}_{ij}$ определяются из соотношений (2.2.3). Уравнения относительно функции $\overset{e}{A}$ для упругой области можно получить из уравнения (2.2.7), положив в нем коэффициент a_* равным нулю и заменив индекс « p » на « e ».

Условия сопряжения перемещений и вектора поверхностных усилий (1.5.13) при $r = \gamma$ запишутся так:

$$\overset{p}{A} - \overset{e}{A} = 0, \quad \overset{p}{A}' - \overset{e}{A}' = 0, \quad \overset{p}{A}'' - \overset{e}{A}'' = 0, \quad \overset{p}{A}' - \frac{1}{\gamma} \overset{p}{A} = 0. \tag{2.2.10}$$

Таким образом, получим замкнутую краевую задачу, коэффициенты уравнений которой зависят от безразмерных параметров материала k , c , радиусов γ , R , интенсивности нагрузки P , величины q , параметра выпучивания n по оси Oz . Используя, как и ранее, конечные разности (1.6.1), (1.6.2), получим разностную задачу с определителем $\det(c_{mn}) = 0$ ($m, n = 0, 1, \dots, N + 1$), ненулевые элементы которого определяются следующими формулами (см. [244]):

$$\begin{aligned}
 c_{00} &= -\frac{5}{2} \overset{p}{b}_{11} + 2\tau \overset{p}{b}_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 \overset{p}{b}_{13} + \tau^3 \overset{p}{b}_{14}, \\
 c_{01} &= 9\overset{p}{b}_{11} - 5\tau \overset{p}{b}_{12} + 2\tau^2 \overset{p}{b}_{13}, \quad c_{02} = -12\overset{p}{b}_{11} + 4\tau \overset{p}{b}_{12} - 0,5\tau^2 \overset{p}{b}_{13}, \\
 c_{03} &= 7\overset{p}{b}_{11} - \tau \overset{p}{b}_{12}, \quad c_{04} = -\frac{3}{2} \overset{p}{b}_{21}, \quad c_{10} = 2\overset{p}{b}_{11} - \frac{3}{2} \tau \overset{p}{b}_{22} + \tau^2 \overset{p}{b}_{23}, \\
 c_{11} &= -5\overset{p}{b}_{21} + 2\tau \overset{p}{b}_{22}, \quad c_{12} = 4\overset{p}{b}_{21} - 0,5\tau \overset{p}{b}_{22}, \quad c_{13} = -\overset{p}{b}_{21}, \\
 \overset{p}{b}_{1n} &= \overset{p}{b}_{1n}(R) \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad \overset{p}{b}_{2n} = \overset{p}{b}_{2n}(R) \quad (n = 1, 2, 3); \\
 c_{ij} &= \overset{p}{b}_{31} - 0,5\tau \overset{p}{b}_{32}, \quad c_{i,j+1} = -4\overset{p}{b}_{31} + \tau \overset{p}{b}_{32} + \tau^2 \overset{p}{b}_{33} - 0,5\tau^3 \overset{p}{b}_{34},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{i,j+2} &= \overset{p}{6b_{31}} - 2\tau^2 \overset{p}{b_{33}} + \tau^4 \overset{p}{b_{35}}, \\
 c_{i,j+3} &= -\overset{p}{4b_{31}} - \tau \overset{p}{b_{32}} + \tau^2 \overset{p}{b_{33}} + 0,5\tau^3 \overset{p}{b_{34}}, \\
 c_{i,j+4} &= \overset{p}{b_{31}} + 0,5\tau \overset{p}{b_{32}} \quad i = 2, 3, \dots, N_p - 2, \quad j = i - 2, \\
 \overset{p}{b_{3n}} &= \overset{p}{b_{3n}}(r_i) \quad (n = 1, \dots, 5), \quad r_{N_p} = \gamma.
 \end{aligned}$$

Элементы определителя при $i = N_p + 2, N_p + 3, \dots, N - 1$ вычисляются по этим же соотношениям, в которых только индекс « p » над буквой заменяется на « e »:

$$\begin{aligned}
 c_{j,j+3} &= c_{j,j-1} = 0,5, \quad c_{j,j+2} = c_{j,j} = -2, \quad c_{j,j+1} = 3, \quad j = N_p - 1, \\
 c_{j,j-3} &= c_{j,j+3} = 1, \quad c_{j,j-2} = c_{j,j+2} = -4, \\
 c_{j,j-1} &= c_{j,j+1} = 5, \quad c_{j,j} = -4, \quad j = N_p, \\
 c_{j,j-3} &= 0,5, \quad c_{j,j-2} = -2, \quad c_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau}{\gamma}, \quad j = N_p + 1, \\
 c_{N,N-3} &= c_{N,N-2} = 0, \quad c_{N,N-1} = 0,5, \quad c_{N,N} = -2, \\
 c_{N,N+1} &= \frac{3}{2}, \quad c_{N+1,N-2} = c_{N+1,N-1} = c_{N+1,N} = 1.
 \end{aligned}$$

В этих выражениях $r_0 = R$ — безразмерный радиус выработки; $r_{N_p} = \gamma$, $r_N = 1$, τ — шаг разностной сетки, b_{3i} ($i = 1, \dots, 5$) — коэффициенты уравнения (2.2.7), b_{1i} ($i = 1, \dots, 4$) и b_{2i} ($i = 1, \dots, 3$) — коэффициенты первого и второго соответственно уравнений системы (2.2.9) при функции A и ее производных.

Применяя обычную методику, получим характеристическое уравнение вида

$$\Delta(q, k, c, P, R, \gamma, n) = 0,$$

которое необходимо решать совместно с уравнением (2.2.2).

Теперь рассмотрим случай несжимаемого массива с изотропным линейным упрочнением, уравнение поверхности нагружения для которого имеет вид (1.1.16). Докритическое осесимметричное состояние массива около вертикальной выработки при плоском деформировании совпадает с начальным состоянием массива в только что рассмотренной задаче и будет также определяться соотношениями (2.2.1), (2.2.2), в которых только следует положить $K = k$. В уравнениях (2.2.7) и (2.2.9) красной задачи коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются формулами (2.1.13).

Численная реализация проводилась для свободных выработок при $R = 0,05$. В каждом рассмотренном случае с помощью ЭВМ проводились расчеты для конкретных горных пород, постоянные которых указаны в табл. 2.1.1. При вычислениях проводилась минимизация по параметру волнообразования n .

В табл. 2.2.1 помещены критические значения параметров вертикальных свободных выработок кругового поперечного сечения для случая несжимаемого массива с трансляционным (вариант I) и изотропным линейным упрочнением (вариант II). В таблице используются следующие обозначения: n — параметр волнообразования по оси Oz , q^* , γ^* , ε^* — безразмерные критические значения нагрузки, радиуса упругопластической границы и деформации контура выработки соответственно, q_e^* — критическое значение нагрузки для случая несжимаемого изотропного линейноупругого массива, полученное в работе [200].

Таблица 2.2.1

Материал		n	q^*	γ^*	ε^*	q_e^*
Аргиллит	I	4	0,482	0,580	0,273	0,864
	II	4	0,473	0,569	0,279	
Песчаник, не опасный по выбросам	I	6	0,491	0,579	0,265	

2.3. Неустойчивость полупространства с горизонтальной выработкой

Рассмотрим устойчивость состояния равновесия нижнего полупространства возле цилиндрической горизонтальной полубесконечной выработки, пройденной на глубине h и выходящей на полубесконечный пласт полезной породы, механические свойства которой отличаются от свойств горного массива. В этом случае представляется естественным ввести следующие предположения.

При определении докритического состояния и исследовании задач устойчивости можно считать, что выработка и пласт полезной породы имеют одншаковую форму поперечного сечения.

При исследовании задач устойчивости (после определения докритического состояния) можно не учитывать наличие дневной поверхности.

В зонах, близких к границе раздела выработки и пласта полезной породы, возникает под действием внешних нагрузок повышенная концентрация напряжений. Если исследуется устойчивость не в призабойной части выработки, возможна несколько другая постановка задачи, основанная на следующем предположении.

При определении докритического состояния и исследовании задачи устойчивости можно не учитывать наличие границы раздела пласта и выработки.

2.3.1. Упруговязкопластическое состояние круговой цилиндрической трубы, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления. Исследование задач устойчивости горных выработок в первую очередь связано с определением докритического состояния. Точные аналитические решения задачи о докритическом состоянии удастся получить лишь в простейших случаях, например, для выработки кругового поперечного сечения при определенных предположениях. Очевидно, что одним из путей определения напряженно-деформируемого докритического состояния горных выработок усложненной формы поперечного сечения, является построение приближенных решений в рамках метода возмущений, а именно — метода малого параметра. Построение приближенных решений для докритического (основного) состояния рассматриваемых далее задач требует выбора нулевого приближения.

В качестве нулевого приближения выберем решение задачи типа Ламе (при $b \rightarrow \infty$), которое приводим здесь, следуя результатам работы [257]. Рассматривается бесконечная круговая труба,

радиусов a и b ($a > b$), подверженная действию равномерного внешнего и внутреннего давления (рис. 2.3.1).

Материал трубы — несжимаемый, упруговязкопластический, упрочняющийся.

В качестве определяющих соотношений принимаются соотношения теории упрочняющегося упруговязкопластического материала [223], приведенные в § 1 первой главы. Решение приводится для плоской деформации в цилиндрической системе коор-

динат. Все соотношения записываются в безразмерном виде. За масштаб напряжения выбран предел текучести при чистом сдвиге, за масштаб длины — радиус упрочняющейся границы r_s , расположенной между внутренним и внешним контуром трубы.

Границные условия на внутреннем и внешнем контуре трубы зашущутся так:

при $r = a$ ($a = a/r_s$, $r = r/r_s$)

$$\sigma_r = -q_0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (q_0 = P_0/k) \quad (2.3.1a)$$

при $r = b$ ($b = b/r_s$)

$$\sigma_r = -q, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (q = P/k). \quad (2.3.1b)$$

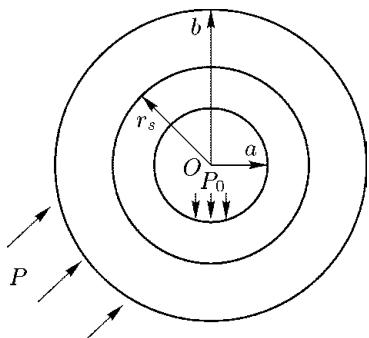


Рис. 2.3.1

На упругопластической границе r_s напряжения и перемещения считаются непрерывными.

При указанных граничных условиях и условиях сопряжения на упругопластической границе, распределение напряжений в пластической зоне имеет вид ($a \leq r \leq 1$)

$$\begin{aligned}\overset{p}{\sigma}_r &= -q_0 + \frac{x4\mu}{2\mu+c} \left[\frac{c+2\mu e^{-\alpha t}}{4\mu} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + (1-e^{-\alpha t}) \ln \frac{r}{a} \right], \\ \overset{p}{\sigma}_\theta &= -q_0 + \frac{x4\mu}{2\mu+c} \left[\frac{c+2\mu e^{-\alpha t}}{4\mu} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) + (1-e^{-\alpha t}) \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) \right], \\ \overset{p}{\tau}_{r\theta} &= 0, \quad x = \text{sign}(q_0 - q), \quad \alpha = \frac{2\mu+c}{\eta},\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

а в упругой зоне ($1 \leq r \leq b$) следующий вид:

$$\overset{e}{\sigma}_r = -q + \frac{x}{b^2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad \overset{e}{\sigma}_\theta = -q + \frac{x}{b^2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right), \quad \overset{e}{\tau}_{r\theta} = 0. \quad (2.3.3)$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической зонах определяются по одним и тем же формулам

$$\overset{e}{\varepsilon}_\theta = -\overset{e}{\varepsilon}_r = \frac{x}{2\mu r^2}, \quad \overset{e}{\varepsilon}_{r\theta} = 0, \quad u_r = \frac{x}{2\mu r}, \quad u_\theta = 0 \quad (\mu = \mu/k). \quad (2.3.4)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$\overset{p}{\varepsilon}_\theta = -\overset{p}{\varepsilon}_r = \frac{x(1-e^{-\alpha t})}{2\mu+c} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right). \quad (2.3.5)$$

На упругопластической границе выполняется следующее соотношение для внешних усилий

$$\left(\frac{1}{b^2} + |q_0 - q| \right) (2\mu + c) - 2\mu + 4\mu \ln a (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{a^2} = 0. \quad (2.3.6)$$

Упругопластическая граница расположена между a и b , если

$$\begin{aligned}1 - \frac{a^2}{b^2} &\leq |q_0 - q| \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\mu+c)} \left(2\mu - 4\mu \ln \frac{a}{b} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{b^2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{a^2} \right) - 1.\end{aligned}\quad (2.3.7)$$

В случае осесимметричного растяжения пластины с круговым отверстием ($b \rightarrow \infty$), уравнение для определения упругопластической границы записывается следующим образом:

$$|q_0 - q| (2\mu + c) - 2\mu + 4\mu \ln a (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{a^2} = 0, \quad (2.3.8)$$

а распределение напряжений в упругой зоне принимает вид

$$\overset{e}{\sigma}_r = -q - \frac{1}{r^2}, \quad \overset{e}{\sigma}_{r\theta} = -q + \frac{1}{r^2}, \quad \overset{e}{\tau}_{r\theta} = 0. \quad (2.3.9)$$

Полученное решение принимаем в качестве нулевого приближения для исследуемых далее задач.

2.3.2. Линеаризация по малому параметру соотношений теории течения. При решении задач методом малого параметра все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ ($\delta \ll 1$):

$$\begin{aligned} \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \overset{p}{e}_{ij}, \dots, \lambda, \chi_k, \dots\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{\sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \overset{p}{e}_{ij}^{(n)}, \dots, \lambda^{(n)}, \chi_k^{(n)}, \dots\} \quad (2.3.10) \end{aligned}$$

Выражения с верхним индексом (n) всюду ниже будем называть величинам n -го порядка.

Учитывая представление (2.3.10) для соотношения, определяющего поверхность нагружения и ассоциированный закон пластического течения, выполнив разложение функции по малому параметру и приравняв слагаемые при одинаковых степенях δ , получим следующие уравнения:
при $n = 0$

$$F^{(0)} \left(\sigma_{ij}^{(0)}, \varepsilon_{ij}^{(0)}, \overset{p}{e}_{ij}^{(0)}, \dots, \chi_k^{(0)}, k_s \right) = 0 \quad (2.3.11)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(0)} = d\lambda^{(0)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}} \quad (2.3.12)$$

при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n-1)}, \dots, \sigma_{ij}^{(0)}, \overset{p}{e}_{ij}^{(n)}, \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)}, \dots, \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^{(0)}, \\ \overset{p}{e}_{ij}^{(n)}, \overset{p}{e}_{ij}^{(n-1)}, \dots, \overset{p}{e}_{ij}^{(0)}, \chi_k^{(n)}, \dots, \chi_k^{(0)}, k_s) = 0, \quad (2.3.13) \end{aligned}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} d\lambda^{(m)} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(n-m)}, \quad (2.3.14)$$

где

$$F^{(n)} = \left. \frac{d^{(n)} F}{d\delta^{(n)}} \right|_{\delta=0}. \quad (2.3.15)$$

Процедуру разложения функции по малому параметру будем так же называть линеаризацией функции, это объясняется

тем, что при $n > 0$ $F^{(n)}$ будут линейными функциями величин n -го порядка (при $n = 0$ функция $F^{(0)}$ в общем случае нелинейна так как в нее входят смешанные инварианты тензоров напряжений и пластических деформаций (скоростей деформаций)).

Учитывая линейный характер этой зависимости, уравнения (2.3.13) и (2.3.14) можно представить в виде:

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}} \sigma_{ij}^{(n)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \varepsilon_{ij}^{p(0)}} \varepsilon_{ij}^{p(n)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial e_{ij}^{p(0)}} e_{ij}^{p(n)} + \dots + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \chi_k^{(0)}} \chi_k^{(n)} + \Phi^{(n)} = 0, \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^{p(n)} = d\lambda^{(0)} \left(\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)} \partial \sigma_{ks}^{(0)}} \sigma_{ks}^{(n)} + \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)} \partial \varepsilon_{ks}^{p(0)}} \varepsilon_{ks}^{p(n)} + \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)} \partial e_{ks}^{p(0)}} e_{ks}^{p(n)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \sigma_{ij}^{(0)} \partial \chi_k^{(0)}} \chi_k^{(n)} + \dots + \omega_{ij}^{(n)} \right) + \sum_{m=1}^n d\lambda^{(m)} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(n-m)}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Здесь функции $\Phi^{(n)}$ и $\omega_{ij}^{(n)}$ обозначают все прочие слагаемые рядов, они зависят от величин не выше $(n-1)$ -го порядка, т. е.:

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)} = \Phi^{(n)} \left(\sigma_{ij}^{(n-1)}, \dots, \sigma_{ij}^{(0)}; \varepsilon_{ij}^{p(n-1)}, \dots, \varepsilon_{ij}^{p(0)}; e_{ij}^{p(n-1)}, \dots, e_{ij}^{p(0)}; \right. \\ \left. \chi_k^{(n-1)}, \dots, \chi_k^{(0)}; k_s \right). \end{aligned} \quad (2.3.17a)$$

Исходя из линеаризованных соотношений (2.3.16) и (2.3.17), можно построить алгоритм нахождения приближенного решения упруговязкопластической задачи для конкретного вида функции нагружения. В общем случае этот алгоритм позволяет получить лишь численное решение, так как функции $F^{(n)}$ зависят от компонент пластической деформации n -го порядка $\varepsilon_{ij}^{p(n)}$ и, соответственно, скоростей пластических деформаций $e_{ij}^{p(n)}$, следовательно, для каждого приближения имеет место статически неопределенная задача. Задача усложняется еще и тем, что выполнить интегрирование линеаризованных соотношений ассоциированного закона пластического течения невозможно, ввиду того, что они содержат неизвестные функции $\sigma_{ij}^{(n)}$.

Введение дополнительных предположений позволяет, при конкретизации вида функции нагружения, получить приближенное аналитическое решение упруговязкопластической задачи методом малого параметра.

2.3.3. Линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на упругопластической границе. При постановке граничных условий может оказаться, что малый параметр будет входить в уравнения, описывающие границу области, в которой ищется решение задачи. Такую границу

будем называть возмущенной. При этом если в выражениях определяющих границу положить $\delta = 0$, то уравнения будут описывать невозмущенную границу области.

Разложение по малому параметру приводит к тому, что граничные условия, определенные на возмущенной границе, заменяются для каждого приближения новыми граничными условиями на невозмущенной границе. При этом решение для каждого приближения находится в области, определяемой невозмущенной границей.

Так, если уравнение невозмущенной границы имеет вид

$$r = r(\xi, \delta),$$

где ξ — параметр, r — радиус-вектор, а $r|_{\delta=0} = r_0(\xi)$ — уравнение невозмущенной границы, то граничные условия на возмущенной границе для некоторой функции γ можно записать в виде

$$\gamma(r(\xi, \delta)\delta) = \gamma_0.$$

Раскладывая γ по параметру δ , имеем

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \gamma^{(n)}, \quad \gamma^{(n)} = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \gamma}{d \delta^n} \right|_{r=r_0, \delta=0}.$$

Очевидно, для определения функций $\gamma^{(n)}$ можно воспользоваться треугольником Ли.

Для каждого приближения граничные условия на невозмущенной границе будут иметь вид

$$\gamma^{(n)} = \gamma_0^{(n)}.$$

При решении упруговязкопластической задачи необходимо учитывать условия сопряжения решений в упругой и пластической зонах. Условия сопряжения, записанные на упругопластической границе, заменяются новыми условиями для каждого приближения, записанными на невозмущенной упругопластической границе, согласно [142].

Далее, при решении задач, каждый раз будет приводиться конкретный вид условий сопряжения на упругопластической границе.

Очевидно, что ввиду линейности соотношений (1.1.1)–(1.1.7), (1.1.9), их линеаризация по малому параметру также приводит к линейным соотношениям.

2.3.4. Линеаризация по малому параметру функции нагружения упруговязкопластического тела. Для случая изотермических процессов А.Н. Спорыхин, следуя идеям Д.Д. Ивлева [140], предложил для описания поведения ма-

териалов, проявляющих упрочняющиеся упруговязкопластические свойства, функцию нагружения следующего вида [257]:

$$F(\sigma_{ij}^a) \equiv F\left(\sigma_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p\right) = 0, \quad (2.3.18)$$

где c — параметр, характеризующий произвольное упрочнение материала; η — параметр, характеризующий вязкость материала. Частный вид такой зависимости представлен соотношением (1.1.8).

Используя (2.3.10) и (2.3.17a), находим

$$\begin{aligned} F(\sigma_{ij}^a) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n F^{(n)} &= F\left(\sigma_{ij}^{(0)} - c\varepsilon_{ij}^{p(0)} - \eta e_{ij}^{p(0)}\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \left[\frac{\partial F\left(\sigma_{ij}^{(0)} - c\varepsilon_{ij}^{p(0)} - \eta e_{ij}^{p(0)}\right)}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}} \sigma_{ij}^{a(0)} + \Phi^{(n)} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Из выражения (2.3.19) следует, что при $n > 1$

$$\frac{\partial F\left(\sigma_{ij}^{(0)} - c\varepsilon_{ij}^{p(0)} - \eta e_{ij}^{p(0)}\right)}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}} \left(\sigma_{ij}^{(n)} - c\varepsilon_{ij}^{p(n)} - \eta e_{ij}^{p(n)}\right) + \Phi^{(n)} = 0. \quad (2.3.20)$$

Так как $\Phi^{(1)}=0$, то при $n=1$, из (2.3.20) имеем

$$\frac{\partial F\left(\sigma_{ij}^{(0)} - c\varepsilon_{ij}^{p(0)} - \eta e_{ij}^{p(0)}\right)}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}} \left(\sigma_{ij}^{(1)} - c\varepsilon_{ij}^{p(1)} - \eta e_{ij}^{p(1)}\right) = 0. \quad (2.3.21)$$

Видно, что соотношение (2.3.20) определяет в пространстве напряжений плоскость, ортогональную вектору

$$\frac{\partial F\left(\sigma_{ij}^{(0)} - c\varepsilon_{ij}^{p(0)} - \eta e_{ij}^{p(0)}\right)}{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}. \quad (2.3.22)$$

Дальнейшее исследование ограничим случаем плоскодеформированного состояния и решением класса задач в цилиндрической системе координат.

2.3.5. Линеаризованные соотношения трансляционной теории сложных сред. Плоскодеформированное состояние. Далее, для упрощения записи, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу пластичности при чистом сдвиге, а величины, имеющие размерность длины — к некоторому масштабу длины (он определяется при рассмотрении конкретных задач).

Рассмотрим случай, когда поверхность нагружения (2.3.18) описывается уравнением (1.1.8)

$$\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p\right) \left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta e_{ij}^p\right) = 2. \quad (2.3.23)$$

Здесь c и η — безразмерные коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) , уравнение (2.3.20) запишем в виде $(\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0)$

$$\sigma_{\theta}^{(n)} - \sigma_r^{(n)} = \Phi^{(n)}, \quad (2.3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= 2\aleph + 2c\varepsilon_{\theta}^{(0)} + 2\eta e_{\theta}^{(0)}, \\ \aleph &= \text{sign} \left(\sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - 2c\varepsilon_{\theta}^{(0)} - 2\eta e_{\theta}^{(0)} \right), \\ \Phi^{(1)} &= 2c\varepsilon_{\theta}^{(1)} + 2\eta e_{\theta}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)} &= 2c\varepsilon_{\theta}^{(n)} + 2\eta e_{\theta}^{(n)} - \frac{\aleph}{4} \sum_{m=1}^{n-1} \left[\left(\sigma_{\theta}^{(m)} - \sigma_r^{(m)} - 2c\varepsilon_{\theta}^{(m)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\eta e_{\theta}^{(m)} \right) (\sigma_{\theta}^{(n-m)} - \sigma_r^{(n-m)} - 2c\varepsilon_{\theta}^{(n-m)} - 2\eta e_{\theta}^{(n-m)}) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\tau_{r\theta}^{(m)} - c\varepsilon_{r\theta}^{(m)} - 2\eta e_{r\theta}^{(m)} \right) \left(\tau_{r\theta}^{(n-m)} - c\varepsilon_{r\theta}^{(n-m)} - 2\eta e_{r\theta}^{(n-m)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Введем функцию напряжения Эри \mathcal{E} . Тогда

$$s_{ij} = -\mathcal{E}_{,ij} + \delta_{ij} \mathcal{E}_{,kk} \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (2.3.27)$$

Используя соотношения (2.3.27) и (2.3.24) получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}^{(n)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{(n)}}{\partial \theta^2} = \Phi^{(n)} \quad (2.3.28)$$

Отметим, что уравнение (2.3.28), служащее для определения напряжений в пластической области, в рассматриваемом случае отличается от аналогичного уравнения для случая идеально пластического материала тем, что функции $\Phi^{(n)}$ содержат информационную часть.

Соотношения ассоциированного закона пластического течения, для функции (2.3.23) имеют вид

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^p &= -d\varepsilon_{\theta}^p = \frac{1}{2} d\lambda \left(\sigma_r - \sigma_{\theta} - 2c\varepsilon_r^p - 2\eta e_r^p \right), \\ d\varepsilon_{r\theta}^p &= d\lambda \left(\tau_{r\theta} - c\varepsilon_{r\theta}^p - \eta e_{r\theta}^p \right). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Линеаризируя последнее соотношение, получим:

$$\varepsilon_{r\theta}^{(n)} = \int_0^{\lambda^{(0)}} \omega_{r\theta}^{(n)} d\lambda^{(0)}, \quad \varepsilon_r^{(n)} + \varepsilon_{\theta}^{(n)} = 0, \quad (2.3.30)$$

где

$$\omega_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad \omega_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)} - c\varepsilon_{r\theta}^{p(1)} - \eta e_{r\theta}^{p(1)}. \quad (2.3.31)$$

При $n > 2$

$$\begin{aligned} \omega_{r\theta}^{(n)} = & \tau_{r\theta}^{(n)} - c\varepsilon_{r\theta}^{p(n)} - \eta e_{r\theta}^{p(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \left[2 \left(\tau_{r\theta}^{(m)} - c\varepsilon_{r\theta}^{p(m)} - \eta e_{r\theta}^{p(m)} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\theta}^{p(n-m)}}{\partial \lambda^{(0)}} - \right. \\ & \left. - \left(\sigma_{\theta}^{(m)} - \sigma_r^{(m)} - 2c\varepsilon_{\theta}^{p(m)} - 2\eta e_{\theta}^{p(m)} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\theta}^{p(n-m)}}{\partial \lambda^{(0)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Учитывая соотношения (1.1.4), (1.1.9), (2.3.32) из (2.3.30) получаем систему уравнений для определения перемещений в пластической зоне

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \theta} = & 2 \int_0^{\lambda^{(0)}} \omega_{r\theta}^{(n)} d\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}^{(n)}, \\ \frac{\partial u_{\theta}^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(n)}}{\partial \theta} = & 0, \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

где μ безразмерный модуль сдвига.

Введем функцию ψ , так чтобы

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.3.34)$$

Тогда из соотношений (2.3.33), получим уравнение для ее определения

$$\frac{\partial^2 \psi^{(n)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{(n)}}{\partial \theta^2} = 2 \int_0^{\lambda^{(0)}} \omega_{r\theta}^{(n)} d\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}^{(n)}. \quad (2.3.35)$$

Очевидно, решение этого уравнения позволит определить перемещения в пластической зоне. Условие несжимаемости (второе уравнение из (2.3.33)) выполняется автоматически.

Уравнения (2.3.28) и (2.3.35) являются уравнениями гиперболического типа, что устанавливается обычным способом.

Интегрирование соотношений (2.3.30) и (2.3.35) требует определить величину $\lambda^{(0)}$.

В нулевом приближении первое соотношение (2.3.29) дает

$$d\varepsilon_{\theta}^{p(0)} = x d\lambda^{(0)}, \quad (2.3.36)$$

где $x = \pm 1$

Интегрируя (2.3.36), получаем

$$\lambda^{(0)} = x \varepsilon_{\theta}^{p(0)}$$

Таким образом, для случая плоской деформации выведены линсаризированные соотношения упруговязкопластического тела и показано, что задача определения напряжений и перемещений, для любого приближения, может быть сведена к решению уравнений (2.3.28) и (2.3.35). Метод разложения по параметру нагружения, описанный в работе [142], сводит решение упругопластической задачи теории течения к последовательному решению задач упругости. Изложенный выше метод сводит решение упруговязкопластической задачи теории течения к последовательному решению менее сложных задач теории течения.

2.3.6. Алгоритм решения упруговязкопластической задачи методом малого параметра. Изложим алгоритм построения приближенного решения упруговязкопластической задачи теории течения с произвольным упрочнением.

После разложения по малому параметру системы уравнений (1.1.1)–(1.1.11), описывающих рассматриваемую задачу, последовательность действий такова:

1. привлекая решения для предыдущих приближений, вычисляются правые части (2.3.28), служащие для определения напряжений в пластической зоне; эти уравнения решаются;
2. определяются граничные условия для краевой задачи в упругой зоне: на внешней границе, исходя из заданных при постановке задачи граничных условий; на границе раздела упругой и пластической областей, исходя из условий сопряжения решения на этой границе. Согласно [142], граничные условия для величин любого порядка сносятся с искомой упругопластической границы на невозмущенную. При этом необходимо звать все предыдущие приближения;
3. ищется решение в упругой зоне;
4. полученное решение для перемещений в упругой зоне используется в условиях сопряжения перемещений на упругопластической границе, с помощью которых определяются значения компонент вектора перемещений для пластической зоны;
5. интегрируются уравнения, полученные из соотношений ассоциированного закона пластического течения (2.3.30), и тем самым определяются компоненты тензора пластической деформации текущего приближения;
6. решаются уравнения (2.3.35) для определения функции ψ и по соотношениям (2.3.34), находятся перемещения в пластической зоне;
7. вычисляются слагаемые текущего приближения, входящие в уравнение упругопластической границы. Уравнения для определения этого слагаемого получим из уравнения непре-

рывности компонент тензора напряжений текущего приближения на упругопластической границе.

Затем процесс повторяется. По алгоритму, изложенному выше можно искать следующее приближение.

Метод разложения по малому параметру уравнений (1.1.1)–(1.1.11), описывающих поведение упруговязкопластического упрочняющегося тела приводит к линейным соотношениям (2.3.28) и (2.3.35) относительно компонент n -го порядка ($n \geq 1$). При этом линеаризированная функция нагружения (2.3.20) определяет в пространстве главных напряжений плоскость, вектор нормали к которой определяется соотношением (2.3.21).

Так как системы уравнений для определения напряжений и перемещений зависят от компонент тензора пластической деформации и компонент тензора напряжений, то для их решения нужно привлечь алгоритм, описанный выше, который приводит к статически определимой задаче. Отличие этого алгоритма от известных состоит в том, что уравнения для определения напряжений всегда содержат деформационную часть. Следовательно, соотношения ассоциированного закона надо интегрировать для каждого приближения. Правые части уравнений (2.3.28) и (2.3.35) содержат неизвестные функции, обусловленные произвольным упрочнением и вязкостью, поэтому алгоритм предложенный в работах [29–34] не может быть применен. В данной работе за нулевое приближение принимается решение задачи для модели упрочняющегося упруговязкопластического тела, в отличии от работ [29–34], где за нулевое приближение принималось решение для модели идеального пластического материала, а в [35, 36] — для модели упрочняющегося упругопластического тела. Представленный выше алгоритм отличается от известных алгоритмов решения задач теории течения идеального пластического материала и теории упрочняющегося упругопластического тела [35, 36] Ивлева–Ершова тем же, что и алгоритм предложенный в [29–34].

2.3.7. Устойчивость цилиндрической горизонтальной выработки с круговым поперечным сечением. Задача определения докритического состояния массива возле выработки решается в рамках плоской деформации. Для чего строится решение классической задачи Л. Галина [64], которое можно использовать в качестве докритического напряженно-деформированного состояния массива около выработки. Рассмотрим толстую бесконечную пластину с круговым отверстием радиуса a (рис. 2.3.2). На бесконечности действуют взаимно-перпендикулярные усилия интенсивности $P_1 = gh$ и $P_2 = k_0 P_1$ (g — средний объемный вес вышележащих пород, h — глубина

заложения полости, k_0 — коэффициент бокового отпора). По контуру отверстия действует нормальное давление P_0 .

Исследуем случай, когда пластическая зона охватывает контур отверстия. Безразмерные величины P_0/k , P_1/k , P_2/k обозначим

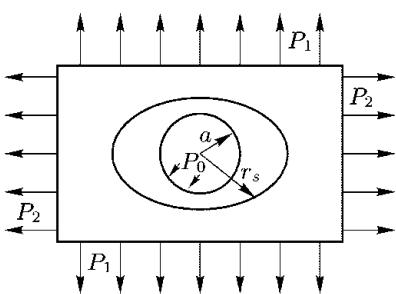


Рис. 2.3.2

через q_0 , q_1 , и q_2 соответственно. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к $r_s^{(0)}$ как и в п. 1 этого параграфа.

Введем малый параметр δ , полагая $(q_1 - q_2)/2 = \delta \tilde{q}$, где \tilde{q} — ограниченная величина.

Будем использовать цилиндрическую систему координат, начало которой совпадает с центром отверстия, тогда на бесконечности радиальные и касательные напряжения будут определяться следующими формулами:

$$\sigma_r = q' - \delta \tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = \delta \tilde{q} \sin 2\theta, \quad (2.3.37)$$

где $q' = (q_1 + q_2)/2$.

На контуре отверстия ($r = a$) имеем

$$\sigma_r = q_0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.3.38)$$

Решение задачи ищем вблизи невозмущенного осесимметричного состояния ($\delta = 0$) (см. п. 1 данного параграфа), когда пластическая зона полностью охватывает контур $a \leq r \leq 1$.

Так как граничные условия на внутреннем контуре и уравнения контура отверстия не содержат малого параметра δ , то из (2.3.37) следует, что при $r = a$

$$\sigma_r^{(n)} = \tau_{r\theta}^{(n)} = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.3.39)$$

Согласно описанному в этом параграфе алгоритму найдем первую итерацию первого приближения.

Используя (2.3.5), находим правую часть уравнения (2.3.28)

$$\Phi_{(1)}^{(1)} = m_1 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right), \quad m_1 = \frac{2c}{2\mu + c} (1 - e^{-\alpha t}) + 2e^{-\alpha t}. \quad (2.3.40)$$

Определяя решение уравнения (2.3.28) и учитывая граничные условия (2.3.39), находим компоненты напряжений в пластической зоне для первой итерации

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right), \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} - 2 - 2 \ln \frac{r}{a} \right), \quad \tau_{r\theta(1)}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Здесь нижний индекс указывает номер итерации.

Из уравнений (2.3.32) следует, что напряжения первого порядка в упругой зоне на бесконечности имеют вид

$$\sigma_r^{(1)\infty} = -\tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)\infty} = \tilde{q} \sin 2\theta. \quad (2.3.42)$$

Из условий сопряжения компонент тензора напряжений [142] следует, что на невозмущенной упругопластической границе

$$\left(\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial r} r_s^{(1)} \right) \Big|_{r_s} = 0. \quad (2.3.43)$$

Учитывая, что $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial r} \right) \Big|_{r_s} = 0$ (следствие уравнения равновесия), находим, что при $r = 1$

$$\sigma_{r(1)}^{(1)} = m_1 a_0, \quad \tau_{r\theta(1)}^{(1)} = 0, \quad (2.3.44)$$

где $a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1 + 2 \ln a \right)$.

Из (2.3.43) следует

$$r_s^{(1)} = -\frac{\sigma_\theta^{(1)}}{\partial \sigma_\theta^{(0)} / \partial r} = -\frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-at})} \sigma_{\theta(1)}^{(1)}. \quad (2.3.45)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений первого порядка первой итерации в упругой зоне ($1 < r < \infty$) при условиях (2.3.44) и (2.3.42) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1 a_0}{r^2} - \tilde{q} \left(1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{r^2} + \tilde{q} \left(1 + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= \tilde{q} \left(1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

$$\begin{aligned} u_{r(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{2r\mu} - \tilde{q} \frac{1}{2\mu} \left(r + \frac{2}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \cos 2\theta, \\ u_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\tilde{q}}{2\mu} \left(r + \frac{1}{r^3} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Из соотношения (2.3.45), используя (2.3.41) и (2.3.46), находим

$$r_{s(1)}^{(1)} = -\frac{(2\mu + c)m_1 a_0}{4\mu(1 - e^{t\alpha})} + \frac{(2\mu + c)\tilde{q}}{2\mu(1 - e^{-t\alpha})} \cos 2\theta \quad (2.3.47)$$

Из условия сопряжения для перемещений при $r = 1$ имеем

$$u_{r(1)}^{(1)} = -\frac{m_1 a_0}{2\mu} - \frac{\tilde{q}}{\mu} \cos 2\theta, \quad u_{\theta(1)}^{(1)} = \frac{\tilde{q}}{\mu} \sin 2\theta. \quad (2.3.48)$$

Равенства $\tau_{r\theta(1)}^{(1)} = 0$ и $e_{r\theta}^{(0)} = 0$ приводят к тому, что правая часть уравнения (2.3.35) становится равной нулю. Решение же

однородного уравнения (2.3.35) при условиях (2.3.48) приводит к следующим выражениям для перемещений в пластической зоне

$$\dot{u}_{r(1)}^{(1)} = -\frac{m_1 a_0}{2\mu r} - \frac{\tilde{q}}{\mu} \left(\cos \chi' + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi' \right) \cos 2\theta, \quad (2.3.49)$$

$$\dot{u}_{\theta(1)}^{(1)} = \frac{\tilde{q}}{\mu} \left(\cos \chi' - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi' \right) \sin 2\theta, \quad (2.3.50)$$

где $\chi' = \sqrt{3} \ln r$.

Так как известны выражения для напряжений и перемещений первого приближения (первой итерации), то из (1.1.4), (1.1.9) можно определить компоненты пластических деформаций в форме

$$\dot{\varepsilon}_{\theta(1)}^{(1)} = -\dot{\varepsilon}_{r(1)}^{(1)} = -\frac{m_1 a_0}{2\mu r} - \frac{\tilde{q}}{\mu} \left(\cos \chi' + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi' \right) \cos 2\theta, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta(1)}^{(1)} = 0. \quad (2.3.51)$$

Таким образом, компоненты напряжений и перемещений первой итерации в первом приближении полностью найдены.

Теперь найдем вторую итерацию первого приближения. Согласно (2.3.51) правая часть уравнения (2.3.28) имеет вид

$$\Phi_{(2)}^{(1)} = \frac{2c\tilde{q}}{\mu r} \left(\cos \chi' - \sqrt{3} \sin \chi' \right) \cos 2\theta + \left(1 - \frac{2a_0 + 1}{r^2} \right) \left(\frac{cm_1}{2\mu} + 2e^{-\alpha t} \right). \quad (2.3.52)$$

Границные условия на контуре отверстия $r = a$ имеют вид (2.3.39).

Решая уравнение (2.3.28), учитывая при этом соотношения на границе (2.3.39), получим выражения для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{r(2)}^{(1)} &= m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \\ &+ \frac{4c\tilde{q}}{\mu r} \left[-\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_1 \cos \chi'_0 \right] \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\theta(2)}^{(1)} &= m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \\ &+ \frac{4c\tilde{q}}{\mu r} \left[-\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_1 \cos \chi'_0 - \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

$$\dot{\tau}_{r(2)}^{(1)} = \frac{4c\tilde{q}}{\mu r} \left[-\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_1 \right] \sin 2\theta, \quad (2.3.55)$$

где $\chi'_0 = \sqrt{3} \ln a$, $\chi'_1 = \sqrt{3} \ln(r/a)$, $m_2 = (cm_1/4\mu) + e^{-\alpha t}$.

На бесконечности граничные условия имеют вид (2.3.42), а на упругопластической границе ($r = 1$) условия сопряжения имеют вид (2.3.43), откуда для $r = 1$ получаем следующие уравнения

$$\sigma_r = m_2 a_0 + K \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = D \sin 2\theta, \quad (2.3.56)$$

где

$$K = \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left(\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_0 \cos \chi'_0 \right),$$

$$D = \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[-\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_0 \right].$$

Соотношение, определяющее радиус упругопластической границы имеет вид (2.3.45).

С учетом граничных условий (2.3.42) и (2.3.56) приходим к выражениям для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в упругой зоне:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(2)}^{e(1)} &= \frac{m_2 a_0}{r^2} + \left[\frac{4\tilde{q} + 2(K - D)}{r^2} + \frac{2D - K - 3\tilde{q}}{r^4} - \tilde{q} \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta(2)}^{e(1)} &= -\frac{m_2 a_0}{r^2} + \left(\tilde{q} + \frac{K - 2D - 3\tilde{q}}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta(2)}^{e(1)} &= \left(\tilde{q} + \frac{2\tilde{q} + K - D}{r^2} + \frac{2D - K - 3\tilde{q}}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

$$\begin{aligned} u_{r(2)}^{e(1)} &= \frac{m_2 a_0}{2r\mu} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{D - K - 2\tilde{q}}{r} + \frac{K - 2D + 3\tilde{q}}{3r^3} - \tilde{q}r \right) \cos 2\theta, \\ u_{\theta(2)}^{e(1)} &= \frac{1}{6\mu} \left(\frac{K - 2D + 3\tilde{q}}{r^3} + 3\tilde{q}r \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

Из соотношения (2.3.45) находим уравнения для определения радиуса упругопластической границы во второй итерации:

$$\begin{aligned} r_{s(2)}^{(1)} &= -\frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\alpha t})} \left\{ m_2 a_1 + m_2 \left[2 - (2a_0 + 1) \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) - 2 \ln a \right] \right\} - \\ &- \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\alpha t})} \left[\frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left(\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_0 \cos \chi'_0 \right) + 2D - K - 4\tilde{q} \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

Учитывая, что условия сопряжения имеют вид (2.3.43), при $r = 1$ находим

$$\begin{aligned} u_{r(2)}^{e(1)} &= \frac{m_2 a_0}{2\mu} + \frac{1}{6\mu} [D - 2K - 6\tilde{q}] \cos 2\theta, \\ u_{\theta(2)}^{e(1)} &= \frac{1}{6\mu} [K - 2D + 6\tilde{q}] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

Во второй итерации правая часть уравнения (2.3.35) отлична от нуля и имеет вид

$$2\varepsilon_{r\theta(2)}^{p(1)} = 2 \int_0^{\lambda^{(0)}} \left(\tau_{r\theta(2)}^{(1)} - c\varepsilon_{r\theta(1)}^{p(1)} - \eta e_{r\theta(1)}^{p(1)} \right) d\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta(2)}^{(1)}, \quad \varepsilon_{r\theta(1)}^{p(1)} = 0. \quad (2.3.61)$$

Для определения $\lambda^{(0)}$ подставим в (2.3.37) соотношение (2.3.5), получим

$$\lambda^{(0)} = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{2\mu + c} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right). \quad (2.3.62)$$

Откуда следует, что в процессе нагружения рассматриваемая частица тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через нее упругопластической границы, что соответствует $r = 1$. Следовательно, в процессе пластической деформации безразмерный радиус в данной точке изменяется от 1 до некоторого значения r , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий.

Полученное соотношение (2.3.62) позволяет перейти в равенстве (2.3.61) от интегрирования по $\lambda^{(0)}$ к интегрированию по r . Производя интегрирование обеих частей равенства (2.3.61), получим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta(2)}^{p(1)} = & - \frac{8c\tilde{q}}{3\mu(2\mu + c)(1 - e^{-\alpha t})} \times \\ & \times \left(\sin^2 \chi'_1 + \frac{\sqrt{3}}{r^3} \ln \frac{r}{a} \sin \chi' + + \frac{1}{r^3} \sin \chi'_0 \sin \chi_1 \right) \sin 2\theta - \\ & - \frac{4c\tilde{q}}{\mu^2 r} \left[\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi_1 \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

Решая (2.3.35) с известной правой частью (2.3.63), получим следующие выражения для компонент вектора перемещений в пластической зоне во второй итерации

$$\begin{aligned} u_{r(2)}^{p(1)} = & - \frac{m_2 a_0}{2r\mu} - \frac{2c\tilde{q}}{3\mu(2\mu + c)(1 - e^{-\alpha t})} \left\{ r \left(\frac{\sqrt{3}}{7} \sin 2\chi'_1 - \frac{2}{7} \cos 2\chi'_1 - 1 \right) - \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}}{r^2} \left[\ln \frac{r}{a} \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \cos \chi' - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \chi'_0 \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\} \cos 2\theta - \frac{2c\tilde{q}}{3\mu^2} \ln r \left[\sqrt{3} \ln \frac{r}{a} \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \right. \\ & - \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \ln a \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \\ & \left. - 2 \cos \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi' \right] \cos 2\theta - 2 (c_{21} \cos \chi' + c_{22} \sin \chi') \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.64a)$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta(2)}^{(1)} = & \frac{2c\tilde{q}}{3\mu(2\mu+c)(1-e^{-\alpha t})} \left\{ r \left[\frac{2\sqrt{3}}{7} \cos \left(2\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{4}{7} \sin \left(2\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \left. \right] + \frac{\sqrt{3}}{r^2} \left[\ln \frac{r}{a} \sin \chi' - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \chi' + \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \chi'_0 \cos \chi'_1 \right] \left. \right\} \sin 2\theta + \\
& + \frac{2cq}{3\mu^2} \left\{ \sqrt{3} \ln \frac{r}{a} \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \\
& - \sqrt{3} \ln a \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi' + \\
& + \ln r \left[-2\sqrt{3} \ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{3} \right) + 4 \ln r \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{36} \right) - 2 \cos \chi' + \right. \\
& \left. + \sqrt{3} \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3} \ln a \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\
& \left. - 4 \cos \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) \right] \left. \right\} \sin 2\theta + \\
& + 2 \left[c_{22} \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + c_{21} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] \sin 2\theta. \quad (2.3.646)
\end{aligned}$$

Постоянные c_{21} и c_{22} , входящие в (2.3.64), находятся из граничных условий (2.3.60) и имеют вид

$$\begin{aligned}
c_{21} = & \frac{2c\tilde{q}}{3\mu(2\mu+c)(1-e^{-\alpha t})} \left[-\frac{\sqrt{3}}{7} \sin 2\chi'_0 - \frac{2}{7} \cos 2\chi'_0 + \frac{3}{2} \ln a - 5 - \right. \\
& \left. - \cos \chi'_0 \sin \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \right] - \frac{1}{12\mu} (D - 2K - 6\tilde{q}), \\
c_{22} = & -\frac{c\tilde{q}}{3\sqrt{3}\mu(2\mu+c)(1-e^{-\alpha t})} \times \\
& \times \left[\frac{4\sqrt{3}}{7} \cos \left(2\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{8}{7} \sin \left(2\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{5}{2} + \cos^2 \chi'_0 \right] - \\
& - \frac{cq}{3\sqrt{3}\mu^2} \left[-\frac{3}{2} - 3 \ln a + 2 \cos \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_0 \right] + \frac{K - 2D + 6\tilde{q}}{6\sqrt{3}\mu} - \frac{c_{21}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, первое приближение (в двух итерациях) задачи Л.А. Галина с круговым отверстием определено. Очевидно, что полагая в приведенных выше соотношениях $c = 0$ и $\eta = 0$, приходим к результатам работы Ивлева–Ершова [142], соответствующим идеально пластическому материалу; при $c \neq 0$ и $\eta = 0$ — к результатам [36], соответствующим идеально упругопластичному материалу с произвольным упрочнением; при $c \ll 1$ и $\eta = 0$ — к результатам [30], соответствующим идеально пластическому материалу с малым упрочнением.

Из полученных соотношений (2.3.41) для первой итерации следует, что характер нагрузки, действующей на бескоиечности,

не сказывается на распределение напряжений в пластической зоне. Очевидно, это является следствием того, что задача для определения напряжений в пластической зоне локально статически определима, а все граничные условия для задачи формулируются на свободной границе (соотношения (2.3.39)).

Так как компонента $\tau_{r\theta(1)}^{(1)}$ в пластической зоне равняется нулю, что обусловлено видом граничных условий (2.3.39), то $d\dot{\varepsilon}_{r\theta(1)}^{p(1)} = 0$, и следовательно, в первой итерации для несжимаемого упруговязкопластического материала с произвольным линейным упрочнением соотношения теории течения простейших сложных сред и деформационной теории приводят к одному и тому же результату.

Во второй итерации $\tau_{r\theta(2)}^{(1)} \neq 0$ в пластической зоне и соотношения для компонент перемещений (2.3.64) при использовании теории течения сложных сред иное, нежели при использовании деформационной теории.

Из полученных выражений (2.3.53)–(2.3.55) следует, что они содержат слагаемые, обусловленные влиянием характеристик материала: модуля сдвига, вязкости, упрочнения и внешних нагрузок.

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2.3.3. Здесь демонстрируется зависимость радиуса

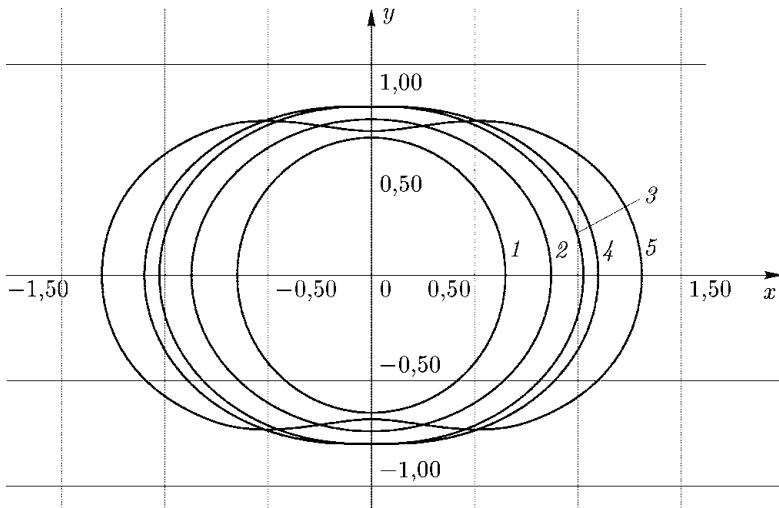


Рис. 2.3.3

упругопластической границы r_s от угла θ . При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: внутреннее давление на контуре $q_0 = 1$, 7; малый параметр $\delta = 0,17$;

коэффициент упрочнения $c = 0,2$; коэффициент вязкости $\eta = 0,001$; модуль сдвига $\mu = 1$; радиус отверстия $a = 0,7$.

Замкнутая кривая 1 соответствует контуру отверстия. Замкнутые кривые 2–4 характеризуют положение упругопластической границы r_s в моменты времени $t = 1 \cdot 10^{-4}$ (кривая 2), $t = 2 \cdot 10^{-4}$ (кривая 3), $t = 3 \cdot 10^{-4}$ (кривая 4).

Далее рост времени приводит, как показал анализ численного эксперимента, к тому, что кривые определяющие радиус упругопластической границы совпадают с кривой 5, которая соответствует упрочняющейся упругопластической задаче. Следовательно, имеет место ограниченная ползучесть. Кривые 2–5 на графиках соответствуют первой итерации. Учет второй итерации, как показал численный анализ, приводит к тому, что кривые практически совпадают.

Теперь можно перейти к решению задачи устойчивости горизонтальной выработки, для чего рассмотрим осесимметричную ($u = u(r, z)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$) форму потери устойчивости состояния равновесия массива возле этой выработки. Решения линеаризованной системы уравнений устойчивости (1.5.16) в случае осесимметричной формы потери устойчивости ($v = 0$) выберем, согласно (1.5.21), в виде

$$u = \sum_n^{\infty} A_n(r) \cos nz, \quad v = 0,$$

$$w = \sum_n^{\infty} C_n(r) \sin nz, \quad \sigma = \sum_n^{\infty} D(r) \cos nz.$$

При этом компоненты основного состояния (с индексом нуль вверху) определяются в области пластического деформирования V^p соотношениями (2.3.53)–(2.3.55), а в области упругого деформирования V^e соотношениями (2.3.57) (при $t \rightarrow \infty$).

К приведенным уравнениям следует присоединить также условия непрерывности векторов перемещений и поверхностных усилий на поверхности раздела области упругого и пластического деформирования (1.5.13) при $r = r_s$ и условия локальности возмущений упругих перемещений при $r \rightarrow \infty$. Очевидно, что в терминах функций $A(r)$, $C(r)$, $D(r)$ основные линеаризованные уравнения следуют из приведенных в § 5 гл. 1 соотношений (1.5.22)–(1.5.25), где следует только опустить слагаемые содержащие функцию $B(r)$ и ее производные и положить $m = 0$. В этом случае линеаризованная краевая задача может быть записана в терминах одной функции $A(r)$. Она представлена соотношениями (2.2.4)–(2.2.10).

Таким образом, получим замкнутую краевую задачу, коэффициенты уравнений которой зависят от безразмерных

параметров материала, геометрических параметров, величин \tilde{q} и P_0 и параметра выпучивания n по оси Oz . Используя, как и ранее, конечные разности (1.6.1)–(1.6.2) и применяя обычную методику, получим характеристическое уравнение вида $\Delta(q, a, \eta, c, k, \tilde{q}, h, r_s, n) = 0$, которое необходимо решать совместно с уравнением для определения радиуса упругопластической границы (2.3.47), если использовать результат первой итерации или (2.3.59), если использовать результат второй итерации.

2.3.8. Устойчивость цилиндрической горизонтальной горной выработки с эллиптическим поперечным сечением. В этом параграфе исследуем устойчивость горизонтальной горной выработки с эллиптическим поперечным сечением, для чего определим напряженно-деформированное состояние массива вокруг выработки. С этой целью построим решение классической задачи Ивлева [142].

Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформируемого состояния толстой пластины с эллиптическим отверстием,

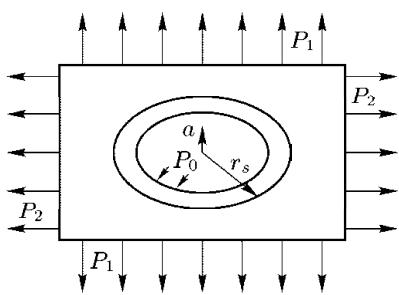


Рис. 2.3.4

с полуосами $a(1 + d)$ и $a(1 - d)$ (рис. 2.3.4). На бесконечности действуют взаимно ортогональные растягивающие напряжения с интенсивностями $P_1 = gh$ и $P_2 = kP_1$ (g – средний объемный вес вышележащих пород, h – глубина заложения полости, k – коэффициент бокового отпора). На контур отверстия действует нормальное давление интенсивности P_0 . Решение ищем в безразмерных переменных.

Характерные размеры такие же, как и в рассмотренной выше задаче Л. Галина о двухосном растяжении толстой пластины ослабленной круговым отверстием (п. 7).

Введем, следуя работе [142], малый параметр δ :

$$\frac{q_1 - q_2}{2k} = \delta \tilde{q}, \quad q_1 = \frac{P_1}{k}, \quad q_2 = \frac{P_2}{k}, \quad d = \delta d'.$$

Величины \tilde{q} и d' характеризуют отклонения от исходного невозмущенного состояния.

Уравнение контура отверстия представим в виде [142]

$$r_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r_3^{(n)} = \frac{a(1 - \delta^2 d'^2)}{\sqrt{1 - 2\delta d' \cos 2\theta + \delta^2 d'^2}} = \\ = a \left[1 + \delta d' \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d'^2 (1 - \cos 4\theta + \dots) \right], \quad (2.3.65)$$

где $a = a/r_s$.

В нулевом приближении, согласно [257], имеет место осесимметричное состояние пластины.

Нормальные и касательные напряжения на внутреннем контуре представляются, следуя работе [142], таким образом:

$$\sigma_n = \left\{ \sigma_r^{(0)} + \delta \left(\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right) \right\} \Big|_{r=a} = -q_0, \quad q_0 = \frac{P_0}{k}, \quad (2.3.66)$$

$$\sigma_\nu = \left\{ \tau_{r\theta}^{(0)} + \delta \left[\tau_{r\theta}^{(1)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \frac{d\tau_s^{(1)}}{d\theta} \frac{1}{a} \right] \right\} \Big|_{r=a} = 0 \quad (2.3.67)$$

Из (2.3.65) и (2.3.66) находим граничные условия для величин первого порядка при $r = a$

$$\sigma_r = -2d' A \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = -4d' A \sin 2\theta, \quad (2.3.68)$$

где

$$A = \frac{1}{2\mu + c} \left[2\mu (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{c + 2\mu e^{-\alpha t}}{a^2} \right].$$

Правая часть уравнения (2.3.28) для определения напряжений имеет вид

$$\Phi_{(1)}^{(1)} = m_1 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right).$$

Тогда напряжения в пластической зоне в первом приближении первой итерации с учетом (2.3.68) будут следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{4Aad'}{r} \sin \left(\chi_1^1 - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} - 2 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{4Aad'}{r} \sin \left(\chi_1^1 - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{4Aad'}{r} \cos \chi_1^1 \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

Граничные условия для упругой зоны согласно (2.3.43) при $r = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= m_1 a_0 - 4Aad' \sin \left(\chi_0^1 - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= -4Aad' \cos \chi_0^1 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

а условия «на бесконечности» (при $r \rightarrow \infty$) имеют вид

$$\sigma_r^{(1)\infty} = -\tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)\infty} = \tilde{q} \sin 2\theta.$$

В упругой области компоненты напряжений и перемещений при учете соотношений (2.3.70) будут следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1 a_0}{r^2} - \left\{ \tilde{q} \left[1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right] - 4Aad' \left[\sin \left(\chi_0' + \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cos \chi_0' \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \right\} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.3.71a)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{r^2} - \left\{ \tilde{q} \left(1 + \frac{3}{r^4} \right) - 4Aad' \left[\frac{1}{r^4} \sin \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{r^4} \cos \chi'_0 \right] \right\} \cos 2\theta, \\
 \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= \left\{ \tilde{q} \left(1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) - 4Aad' \left[\sin \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \cos \chi'_0 \left(\frac{2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \right\} \sin 2\theta, \\
 u_{r(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{2\mu r} - \frac{1}{2\mu} \left\{ \tilde{q} \left[r + \frac{2}{r} - \frac{1}{r^3} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 4Aad' \left[\cos \chi'_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{3r^3} \right) + \sin \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{1}{3r^3} - \frac{1}{r} \right) \right] \right\} \cos 2\theta, \\
 u_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \tilde{q} \left[r + \frac{1}{r^3} \right] - 4Aad' \left[\frac{1}{3r^3} \sin \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{3r^3} \cos \chi'_0 \right] \right\} \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{2.3.716}$$

Радиус упругопластической границы, исходя из соотношений (2.3.45), (2.3.6) и (2.3.71), определим в виде

$$r_{s(1)}^{(1)} = -\frac{(2\mu + c)m_1 a_0}{4\mu(1 - e^{-\alpha t})} + \frac{2\mu + c}{2\mu(1 - e^{-\alpha t})} (\tilde{q} + 2Aad' \cos \chi'_0) \cos 2\theta. \tag{2.3.72}$$

Границные условия для перемещений в пластической зоне согласно (2.3.71) принимают вид

$$\begin{aligned}
 u_{r(1)}^{(1)} \Big|_{r=1} &= -\frac{m_1 a_0}{2\mu} - \frac{1}{\mu} \cos 2\theta \left[\tilde{q} - \frac{2}{\sqrt{3}} Aad' \sin \chi'_0 \right], \\
 u_{\theta(1)}^{(1)} \Big|_{r=1} &= \frac{1}{\mu} \left[\tilde{q} + Aad' \cos \left(\chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \right] \sin 2\theta.
 \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

Путем интегрирования соотношений ассоциированного закона пластического течения (2.3.30), получим правую часть для уравнения (2.3.35), которое далее используем для определения перемещений в пластической зоне:

$$2e_{r\theta(1)}^{(1)} = \frac{4Aad'}{(2\mu + c)\mu} \left[\frac{(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{r} \cos \chi'_1 + \frac{2(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^3} \cos \chi'_1 \right] \sin 2\theta. \tag{2.3.74}$$

Итак, решая уравнение (2.3.35) с правой частью (2.3.74) с граничными условиями (2.3.73), получим перемещения в

пластической зоне для первой итерации:

$$\begin{aligned}
 u_{r(1)}^{(1)} = & -\frac{m_1 a_0}{2\mu r} - \left\{ \frac{2q}{\sqrt{3}\mu} \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + 2c_1 \cos\chi'_1 + \right. \\
 & + 2c_2 \sin\chi'_1 + \frac{Aad'}{(2\mu + c)\mu} \left[\frac{2(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^2} \sin\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \ln r \sin\chi'_1 \right] \right\} \cos 2\theta, \\
 u_{\theta(1)}^{(1)} = & \left\{ \frac{2q}{\sqrt{3}\mu} \cos\left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6}\right) - 2c_1 \sin\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \right. \\
 & + 2c_2 \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2Aad'}{(2\mu + c)\mu} \left[\frac{(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^2} \cos\chi'_1 - \frac{2\mu e^{-\alpha t} + c}{\sqrt{3}} \times \right. \\
 & \left. \times \left[2 \ln r \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\chi'_1 \right] \right] \left. \right\} \sin 2\theta,
 \end{aligned} \tag{2.3.75}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \frac{Aad'}{(2\mu + c)6\mu} \left\{ 3\mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos\chi'_0 - \right. \\
 & \left. - \sqrt{3} [\mu(1 + 3e^{-\alpha t}) + 2c] \sin\chi'_0 \right\}, \\
 c_2 = & -\frac{Aad'}{(2\mu + c)6\mu} \left\{ \sqrt{3}(\mu(1 - 5e^{-\alpha t}) - 2c) \cos\chi'_0 + \right. \\
 & \left. + [\mu(3 + 5e^{-\alpha t}) + 4c] \sin\chi'_0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (2.3.28) для определения компонент тензора напряжений в пластической зоне во второй итерации имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(2)}^{(1)} = & \left(\frac{cm_1}{2\mu} + 2e^{-\alpha t} \right) \left(1 - \frac{2a_0 + 1}{r^2} \right) \frac{1}{r} \cos 2\theta \left\{ \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \chi'\right) + \right. \\
 & + \frac{2cAad'}{(2\mu + c)\mu} \left[-\mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos(\chi' + \chi'_0) + \frac{\mu(7e^{-\alpha t} - 3) + 2c}{\sqrt{3}} \sin(\chi' + \chi'_0) - \right. \\
 & - \frac{\mu}{r^2} \left[2\sqrt{3} \cos\left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\chi'_1 \right] - \frac{4}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \sin\chi'_1 - \\
 & - 4(2\mu e^{-\alpha t} + c) \ln r \cos\chi'_1 + 2 \frac{2\mu e^{-\alpha t} + c}{\sqrt{3}} \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) \left. \right] - \\
 & - \frac{4aAd'e^{-\alpha t}}{\sqrt{3}} \left[4 \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6}\right) \right] + \frac{4aAd'e^{-\alpha t}}{2\mu + c} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \times \\
 & \times \left[-\mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos(\chi' + \chi'_0) + \frac{\mu(7e^{-\alpha t} - 3) + 2c}{\sqrt{3}} \sin(\chi' + \chi'_0) + \right. \\
 & \left. \left. + 2 \frac{2\mu e^{-\alpha t} + c}{\sqrt{3}} \cos\left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.3.76}$$

Очевидно, граничные условия (2.3.68) остаются в силе и для второй итерации. Решим уравнение (2.3.28) с правой частью (2.3.76) с использованием (2.3.68), получаем распределение

напряжений в пластической зоне во второй итерации

$$\begin{aligned} \sigma_{r(2)}^{(1)} = & m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{1}{r} \cos 2\theta \left\{ \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[\frac{\cos \chi'_0 \sin \chi'_1}{\sqrt{3}} - \right. \right. \\ & - \ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] - 2\sqrt{3} \left[c_1 \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + c_2 \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right] \left\{ -\frac{7\mu}{r^2} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \ln r \left[\ln r \frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{8(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \cos \chi'_1 - \frac{16(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) - \\ & - \frac{4}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \cos \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{2\mu}{\sqrt{3}} \cos \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \\ & + \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \left[\cos(\chi' + \chi'_0) - 2 \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{K}{2} \left\{ \frac{8}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) + 3 \sin(\chi' + \chi'_0) - \ln r \left[2 \cos \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) + \right. \\ & \left. \left. \left. + 6 \cos \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + 12 \sin(\chi' + \chi'_0) + 3 \sin \chi'_1 \right] \right\}, \quad (2.3.77a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta(2)}^{(1)} = & m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \\ & + \frac{1}{r} \left\{ \frac{4cq}{\mu} \left[-\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_1 \cos \chi'_0 - \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \right. \\ & - 2\sqrt{3} \left[c_1 \cos \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) + c_2 \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \left[\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right] \times \\ & \times \left\{ \ln r \left[\frac{4}{\sqrt{3}} 2\mu e^{-\alpha} \cos \chi'_1 - 4(2\mu e^{-\alpha t} + c) \cos \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{4c}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \sin \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) - \\ & - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \ln r \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] - \\ & - \frac{2\mu}{r^2} \left[\cos \chi'_1 + 2 \sin \left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{2c}{3} (\sin \chi'_1 + \cos \chi'_1) - \\ & - \mu e^{-\alpha t} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \sin(\chi' + \chi'_0) - \frac{4}{3} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \times \\ & \times \sin \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \sin \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3}\mu(1 - e^{-\alpha t}) \times \\ & \times \cos \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \left. \right\} + \frac{K}{2} \left\{ \ln r \left[-4 \sin \chi'_1 - 10 \sin \left(\chi' + \chi'_0 \right) - \right. \right. \\ & - 6 \cos \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) - 6 \cos \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \sqrt{3} \cos \chi'_1 + \\ & + \frac{14}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6} \right) \left. \right\} \cos 2\theta, \quad (2.3.776) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p(1)}{\tau r \theta(2)} = & \frac{1}{r} \sin 2\theta \left\{ -\frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_1 \right] + \right. \\
& + [D + Z] \left\{ \ln r \left[-\frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \cos \left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \times \right. \right. \\
& \times \sin(\chi' + \chi'_0) - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6}) + \\
& + \ln r \cos \chi'_1 \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \left. \right] - \frac{5\mu}{2r^2} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \\
& + \frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \sin \left(\chi'_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \cos(\chi' + \chi'_0) + \\
& \left. \left. + \frac{2\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{3}} \cos(\chi' + \chi'_0 + \frac{\pi}{6}) \right\} + K \left\{ \ln r \left[2 \cos \left(\chi'_1 + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 3 \sin \chi'_1 + \sqrt{3} \cos(\chi' + \chi'_0) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi' + \chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\} \right\}, \quad (2.3.77B)
\end{aligned}$$

$$\text{где } D = \frac{2caAd'}{\mu(2u + c)}, \quad K = -\frac{2aAd'e^{-\alpha t}}{\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{4aAd'e^{-\alpha t}}{2\mu + c} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right).$$

Константы c_1 и c_2 имеют вид

$$\begin{aligned}
c_1 = & -\frac{T'_1 \cos \chi'_0}{6} + \frac{T'_1 \sin \chi'_0}{2\sqrt{3}} + \frac{2Aa \sin \chi'_0}{\sqrt{3}} + \frac{T'_2 \cos \chi'_0}{3}, \\
c_2 = & -\frac{T'_1 \sin \chi'_0}{6} - \frac{T'_1 \cos \chi'_0}{3\sqrt{3}} - \frac{2Aa \cos \chi'_0}{\sqrt{3}} + \frac{T'_2 \cos \chi'_0}{3},
\end{aligned}$$

где введены обозначения T'_1 и T'_2 :

$$\begin{aligned}
T'_1 = & \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \left[3\mu(1 - e^{-\alpha t}) + 2(2e^{-\alpha t}\mu + c) \right] \cos 2\chi'_0 - \right. \\
& - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{3}} \sin 2\chi'_0 + \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3\sqrt{3}} - \ln a \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2(2\mu e^{-\alpha t} + c) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\mu(1 - e^{-\alpha t}) \right) \sin 2\chi'_0 - 2c + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos 2\chi'_0 + \right. \\
& \left. \left. + \ln a \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{a^2} \frac{5}{4} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'_2 = & \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left(\ln a \left\{ -\frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} - 2(2\mu e^{-\alpha t} + c) - \right. \right. \\
& - 2(2\mu e^{-\alpha t} + c) \cos 2\chi'_0 + \left[\mu\sqrt{3}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{\mu}{\sqrt{3}}(3(1 - e^{-\alpha t}) + \right. \\
& \left. \left. + 2(2\mu e^{-\alpha t} + c)) \right] \sin 2\chi'_0 - \frac{2\sqrt{3}(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \ln a \right\} + \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3\sqrt{3}} + \\
& + \left[3(1 - e^{-\alpha t}) + 2(2\mu e^{-\alpha t} + c) \right] \frac{\mu}{3} \cos 2\chi'_0 - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{3}} \sin 2\chi'_0 + \frac{7\mu}{2a^2} \right).
\end{aligned}$$

Определим решение в упругой зоне, используя соотношения (2.3.76). Условия на бесконечности и на границе раздела зон упругого и пластического деформирования представим в виде при $r = \infty$

$$\sigma_r^{(1)} = -\tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tilde{q} \cos 2\theta, \quad (2.3.78a)$$

при $r = 1$

$$\sigma_{r(2)}^{(1)} = m_2 a_1 + \cos 2\theta (K'_1 + K'_2), \quad \tau_{r\theta(2)}^{(1)} = (D'_1 + D'_2) \sin 2\theta. \quad (2.3.78b)$$

При заданных условиях (2.3.78) решение в упругой зоне для второй итерации находим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(2)}^{(1)} &= \frac{m_2 a_1}{r^2} + \left\{ \frac{1}{r^2} \left[4q + 2(K'_1 - 2D'_1) + 2(K'_2 - 2D'_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^4} (2D'_1 - K'_1 - 3q - K'_2 + 2D'_2) \right] - q \right\} \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta(2)}^{(1)} &= -\frac{m_2 a_1}{r^2} + \left[q + \frac{1}{r^4} (K'_1 - 2D'_1 + 3q + K'_2 - 2D'_2) \right] \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta(2)}^{(1)} &= \left[\tilde{q} + \frac{1}{r^2} (2q + K'_1 - D'_1 + K'_2 - D'_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^4} (2D'_1 - K'_1 - 3\tilde{q} - K'_2 + 2D'_2) \right] \sin 2\theta, \quad (2.3.79) \\ u_{r(2)}^{(1)} &= -\frac{m_2 a_1}{2\mu r} + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \left(D'_1 - K'_1 - 2\tilde{q} + D'_2 - K'_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3r^3} (K'_1 - 2D'_1 + 3\tilde{q} + K'_2 - 2D'_2) - \tilde{q}r \right] \cos 2\theta, \\ u_{\theta(2)}^{(1)} &= \frac{1}{6\mu} \left[3\tilde{q}r + \frac{1}{r^3} (3q + K'_1 - 2D'_1 + K'_2 - 2D'_2) \right] \sin 2\theta, \end{aligned}$$

где

$$K'_1 = \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left(\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_0 \cos \chi'_0 \right),$$

$$\begin{aligned} K'_2 &= -3c_1 + \sqrt{3}c_2 + \left\{ \mu \left[\frac{7}{2} \cos \chi'_0 + \frac{7\sqrt{3}}{2} \sin \chi'_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{3} \cos \chi'_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \sin \chi'_0 \right\} \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{K}{2} \left\{ \frac{5}{\sqrt{3}} \cos \chi'_0 - 3 \sin \chi'_0 \right\}, \end{aligned}$$

$$D'_1 = \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_0 \right],$$

$$\begin{aligned} D'_2 &= (D + Z) \left\{ \frac{\mu}{4} \left[3 \cos \chi'_0 + 5\sqrt{3} \sin \chi'_0 \right] + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos \chi'_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} (2\mu e^{-\alpha t} + c) \sin \chi'_0 + \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{3}} \sin \chi'_0 \right\}. \end{aligned}$$

Для упрощения записи значений компонент напряжений соотношения (2.3.77) и (2.3.79) при $r = 1$ представим для краткости в форме

$$\begin{aligned}\left. \frac{p}{\theta(2)} \right|_{r=1} &= P' + (R' + R'_1) \cos 2\theta, \\ \left. \frac{p}{r(2)} \right|_{r=1} &= -m_2 a_1 + (B' + B'_1) \cos 2\theta.\end{aligned}$$

Радиус упругопластической границы, согласно (2.3.45), (2.3.77) и (2.3.79), определится так

$$r_{s(2)}^{(1)} = -\frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\alpha t})} [P' + m_2 a_1 + (R' - B' + R'_1 - B'_1) \cos 2\theta], \quad (2.3.80)$$

где

$$\begin{aligned}P' &= m_2 \left[\left(2a_0 + 1 \right) \left(-1 - \frac{1}{a^2} \right) + 2 - 2 \ln a \right], \\ R' &= \frac{c\tilde{q}}{\mu} \left[\ln a + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\chi'_0 \right], \\ B' &= K'_1 - 2D'_1 + 4\tilde{q}, \quad B'_1 = K'_2 - 2D'_2, \\ R'_1 &= \left\{ -\mu \left[4 \cos \chi'_0 - 2\sqrt{3} \sin \chi'_0 \right] + \sin \chi'_0 \left[\frac{2c}{\sqrt{3}} + \frac{4\mu e^{-\alpha t}}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{4(2\mu e^{-\alpha t} + c)}{\sqrt{3}} - \mu(1 - e^{-\alpha t}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) \right] - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos \chi'_0 \right\} \times \\ &\times \left[\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right] + \frac{K}{2} \left\{ 9 \sin \chi'_0 - 6\sqrt{3} \cos \chi'_0 \right\} - 3c_1 + \sqrt{3}c_2.\end{aligned}$$

Задача определения перемещения в пластической области во второй итерации связана с разрешимостью уравнения для функции тока ψ , т. е. интегро-дифференциального уравнения (2.3.35)

$$\frac{\partial^2 \psi^{(n)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{(n)}}{\partial \theta^2} = 2 \int_0^{\lambda^{(0)}} \omega_{r\theta}^{(n)} d\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}^{(n)}. \quad (2.3.81)$$

Однако в силу громоздкости подынтегрального выражения (учитывая (2.3.77)), решить аналитически это интегро-дифференциальное уравнение в этом случае не удается. Поэтому здесь в качестве перемещений в пластической зоне ограничимся первым приближением, которое имеет вид (2.3.75).

Вторая итерация может быть получена только численно. Очевидно полагая в приведенных выше соотношениях $c = 0$ и $\eta = 0$, приходим к результатам работы Ивлева Ершова [142], а при $\eta = 0$ к результатам [36]; при $c \ll 1$ и $\eta = 0$ к результатам [33].

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2.3.5. Здесь показана зависимость радиуса упругопластической границы r_s от угла θ . При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: внутреннее давление на контуре $q_0 = 1,7$; малый параметр $\delta = 0,06$; коэффициент упрочнения $c = 0,2$ и $\eta = 0,001$; модуль сдвига $\mu = 1$; радиус отверстия $a = 0,7$.

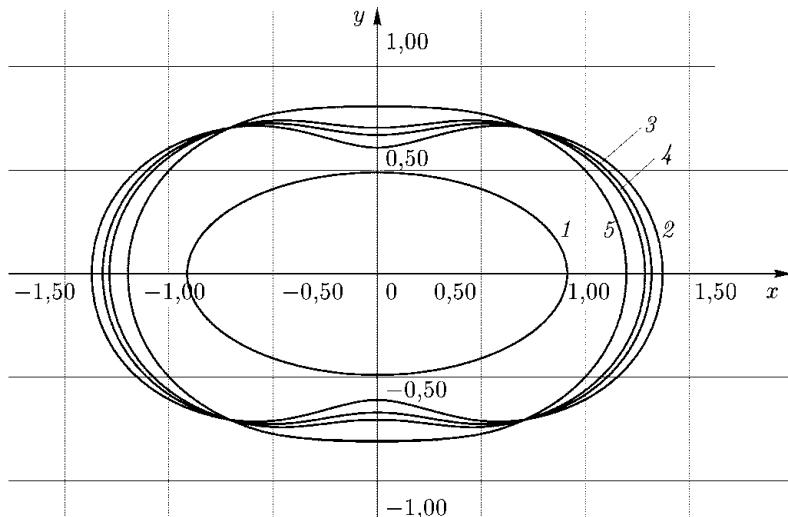


Рис. 2.3.5

Замкнутая кривая 1 — контур отверстия. Замкнутые кривые 2–4 характеризуют положение упругопластической границы r_s соответственно в моменты времени $t = 4 \cdot 10^{-4}$ (кривая 2), $t = 5 \cdot 10^{-4}$ (кривая 3), $t = 6 \cdot 10^{-4}$ (кривая 4).

Дальнейший рост времени приводит, как показал анализ численного эксперимента к тому, что кривые все меньше отличаются от кривой 5, которая соответствует радиусу упругопластической границы для упрочняющейся упругопластической задаче.

Следовательно, имеет место ограниченная ползучесть. Приведенные кривые 2–5 соответствуют первой итерации. Учет второй итерации, как показал численный анализ, приводит к незначительному изменению результатов.

Процедура получения характеристического уравнения для краевой линеаризованной задачи устойчивости горизонтальной горной выработки с эллиптическим поперечным сечением может быть выполнена по ранее примененной в пунктах 7 и 8 схеме. Это уравнение вида $\Delta(\tilde{q}, k, c, q_0, R, r_s, h, n) = 0$ необходимо решать совместно с уравнением для определения радиуса

упругопластической граници (2.3.72) при учете первой итерации или (2.3.80), если учитывать вторую итерацию первого приближения.

2.3.9. Устойчивость горизонтальной цилиндрической горной выработки с поперечным сечением близким к правильному многоугольнику. Для определения напряженно-деформированного докритического состояния горного массива в этом случае рассмотрим задачу о растяжении толстой пластины с отверстием близким к правильному многоугольнику. Пусть, как и в предыдущих задачах с круговым и эллиптическим отверстиями, на бесконечности действуют взаимно ортогональные растягивающие напряжения с интенсивностями $P_1 = gh$ и $P_2 = kP_1$ (g — средний объемный вес вышележащих пород, h — глубина заложения полости, k — коэффициент бокового отпора). На контуре отверстия действует нормальное давление P_0 (рис. 2.3.6).

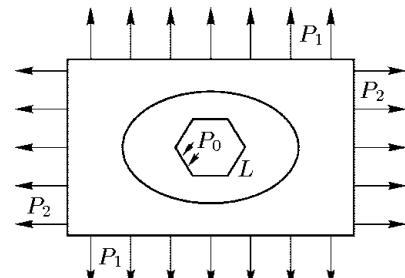


Рис. 2.3.6

Контур многоугольника опишем уравнением гипоциклоиды, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\begin{aligned} X &= (b' - a') \cos \varphi + \lambda a' \cos \frac{b' - a'}{a'} \varphi, \\ Y &= (b' - a') \sin \varphi - \lambda a' \sin \frac{b' - a'}{a'} \varphi, \end{aligned} \quad (2.3.82)$$

где $b' > a' > 0$ и $-\infty < \varphi < \infty$.

Введем обозначения $r_0 = b' - a'$, $\tilde{n} = (b' - a')/a'$ и $\delta = \lambda/\tilde{n}$ и перепишем уравнения (2.3.82) гипоциклоиды следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= r_0(\cos \varphi + \delta \cos \tilde{n}\varphi), \\ Y &= r_0(\sin \varphi - \delta \sin \tilde{n}\varphi). \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

Приведенные уравнения при $\delta = 0$ описывают окружность радиуса r_0 , а при $\tilde{n} > 1$ контур L имеет $\tilde{n} + 1$ точку возврата и приближается по форме к правильному $\tilde{n} + 1$ -угольнику.

Разложим функцию φ в ряд по δ :

$$\varphi = \theta + \delta\theta_1 + \delta^2\theta_2 + \delta^3\theta_3 + \theta(\delta^4), \quad (2.3.84)$$

где θ — полярная координата контура L .

Очевидно, что в этом случае для $\cos \tilde{n}\varphi$ и $\sin \tilde{n}\varphi$ имеет место аналогичное разложение по δ

$$\cos \tilde{n}\varphi = \cos \tilde{n}\theta - \tilde{n}\theta_1 \delta \sin \tilde{n}\theta + \frac{\delta^2 (-\tilde{n}^2 \theta_1^2 \cos \tilde{n}\theta - 2\tilde{n}\theta_2 \sin \tilde{n}\theta)}{2} + \dots, \quad (2.3.85)$$

$$\sin \tilde{n}\varphi = \sin \tilde{n}\theta + \tilde{n}\theta_1 \delta \cos \tilde{n}\theta + \frac{\delta^2 (-\tilde{n}^2 \theta_1^2 \sin \tilde{n}\theta + 2\tilde{n}\theta_2 \cos \tilde{n}\theta)}{2} + \dots,$$

где $\tilde{n} \in N$. Подставляя (2.3.85) в (2.3.83) и учитывая, что $y = x \operatorname{tg} \theta$ находим

$$\theta_1 = \sin \tilde{m}\theta, \quad \theta_2 = (\tilde{m} - 1)\theta_1 \cos \tilde{m}\theta, \quad \tilde{m} = \tilde{n} + 1. \quad (2.3.86)$$

Уравнение контура в полярных координатах, согласно (2.3.83) и (2.3.86), запишем так:

$$r_k = a \left\{ 1 + \delta \cos \tilde{m}\theta - \frac{2\tilde{m}-1}{4} \delta^2 [1 - \cos(2\tilde{m}\theta)] \right\} + \theta(\delta^3), \quad (2.3.87)$$

где \tilde{m} , как отмечено выше, количество углов контура L .

Для упрощения, как и в предыдущих задачах (см. § 2 и § 3 настоящей главы), решение находим в безразмерных переменных. Характерные размеры вводим такие же, как и в предыдущих задачах.

Границные условия для рассматриваемой задачи определим так:

при $r = a$

$$\sigma_r = -2A \cos \tilde{m}\theta, \quad \tau_{r\theta} = -2\tilde{m}A \sin \tilde{m}\theta. \quad (2.3.88)$$

Правая часть уравнения (2.3.88) имеет вид $\Phi_{(1)}^{(1)} = m_1 [(1/r^2) - 1]$.

В первом приближении (первая итерация) напряжения в пластической зоне с учетом (2.3.28) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \\ &\quad + \frac{2Aad'}{r} (\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_1 - \cos \chi_1) \cos \tilde{m}\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} - 2 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \\ &\quad + \frac{2Aad'}{r} (\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_1 - \cos \chi_1) \cos \tilde{m}\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{2\tilde{m}Aad'}{r} \cos \chi_1 \sin \tilde{m}\theta, \end{aligned} \quad (2.3.89)$$

Здесь и далее $\chi = \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln r$, $\chi_0 = \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln a$, $\chi_1 = \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln(r/a)$.

Запишем граничные условия для упругой зоны при $r = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_{r(1)}^{(1)} &= m_1 a_0 - 2Aa(\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_0 + \cos \chi_0) \cos \tilde{m}\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= -2\tilde{m}A \cos \chi_0 \sin \tilde{m}\theta;\end{aligned}\quad (2.3.90a)$$

при $r = \infty$

$$\sigma_r^{(1)} = -\tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tilde{q} \sin 2\theta. \quad (2.3.90b)$$

В первом приближении (первая итерация) с учетом граничных условий (2.3.90) решение в упругой зоне выводим в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{r(1)}^{(1)} &= \frac{m_1 a_0}{r^2} - \tilde{q} \left[1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right] \cos 2\theta - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[M \left(\frac{\tilde{m} + 2}{r^{\tilde{m}}} - \frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+2}} \right) + N \left(\frac{\tilde{m} + 2}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m} + 2}{r^{\tilde{m}}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{r^2} + \tilde{q} \left[1 + \frac{3}{r^4} \right] \cos 2\theta - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[M \left(\frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m} - 2}{r^{\tilde{m}}} \right) + N \left(\frac{\tilde{m} - 2}{r^{\tilde{m}}} - \frac{\tilde{m} + 2}{r^{\tilde{m}+2}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta, \\ \tau_{r\theta(1)}^{(1)} &= \tilde{q} \left[1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right] \sin 2\theta - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[M \left(\frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}}} - \frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+2}} \right) + N \left(\frac{\tilde{m} + 2}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}}} \right) \right] \sin \tilde{m}\theta, \\ u_{r(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{2r\mu} - \frac{\tilde{q}}{2\mu} \left[r + \frac{2}{r} - \frac{1}{r^3} \right] \cos 2\theta - \frac{1}{4\mu} \left[M \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m} + 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\tilde{m}}{\tilde{m} - 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} \right) + N \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m} - 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} - \frac{\tilde{m} + 2}{\tilde{m} + 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta, \\ u_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\tilde{q}}{2\mu} \left[r + \frac{1}{r^3} \right] \sin 2\theta - \frac{1}{4\mu} \left[M \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m} + 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} - \frac{\tilde{m} - 2}{\tilde{m} - 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + N \left(\frac{\tilde{m} - 2}{\tilde{m} - 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} - \frac{\tilde{m} + 2}{\tilde{m} + 1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} \right) \right] \sin \tilde{m}\theta,\end{aligned}\quad (2.3.91)$$

где

$$M = 2Aad' \left(\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_0 + \cos \chi_0 \right), \quad N = 2\tilde{m}Aad' \cos \chi_0.$$

Из (2.3.45) с учетом (2.3.89) и (2.3.91) для радиуса упругопластической границы в первой итерации находим

$$r_{s(1)}^{(1)} = \frac{2\mu + c}{2\mu(1 - e^{-\alpha t})} \left(-\frac{m_1 a_0}{2} + \tilde{q} \cos 2\theta + \tilde{m}Aad' \cos \chi_0 \cos \tilde{m}\theta \right). \quad (2.3.92)$$

Найдем перемещения в пластической зоне. При $r = 1$ перемещения, согласно (2.3.91), имеют вид

$$\begin{aligned} u_{r(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{2\mu} - \frac{\tilde{q}}{2\mu} \cos 2\theta - \frac{\tilde{m} A a d'}{\mu \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin \chi_0 \cos \tilde{m}\theta, \\ u_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\tilde{q}}{\mu} \sin 2\theta + \frac{A a d'}{\mu} \left(\cos \chi_0 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin \chi_0 \right) \sin \tilde{m}\theta. \end{aligned} \quad (2.3.93)$$

При $a \leq r \leq 1$ перемещения в пластической зоне, согласно (2.3.35), следующие:

$$\begin{aligned} u_{r(1)}^{(1)} &= -\frac{m_1 a_0}{2r\mu} - \frac{\tilde{q}}{\mu} \left[\cos \chi' + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi' \right] \cos 2\theta - \\ &- \left\{ \tilde{m} (c_1 \cos \chi + c_2 \sin \chi) - \frac{A a d'}{(2\mu + c)\mu} \left[\frac{(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^2} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. (\cos \chi_1 - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_1) + \frac{(2e^{-\alpha t}\mu + c)\tilde{m}^2}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \ln r \sin \chi_1 \right] \right\} \cos \tilde{m}\theta, \end{aligned} \quad (2.3.94)$$

$$\begin{aligned} u_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\tilde{q}}{\mu} \left[\cos \chi' - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi' \right] \sin 2\theta + \left\{ (c_1 + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}c_2) \cos \chi + \right. \\ &+ (-\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}c_1 + c_2) \sin \chi + \frac{\tilde{m} A a d'}{(2\mu + c)\mu} \left[\frac{(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^2} \cos \chi_1 - \right. \\ &- \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (2e^{-\alpha t}\mu + c) \ln r \sin \chi_1 + (2e^{-\alpha t}\mu + c) \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln r \cos \chi_1 + \\ &\left. \left. + (2e^{-\alpha t}\mu + c) \sin \chi_1 \right] \right\} \sin \tilde{m}\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A a d'}{(2\mu + c)(\tilde{m}^2 - 1)\tilde{m}\mu} \left\{ \mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) \cos \chi_0 + \right. \\ &\left. + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} [(\tilde{m}^2 - 1)(1 - e^{-\alpha t})\mu - \tilde{m}(2\mu + c)] \sin \chi_0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{A a d'}{(2\mu + c)(\tilde{m}^2 - 1)\tilde{m}\mu} \left\{ \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} [\mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 + 1) - \tilde{m} \times \right. \\ &\times (2\mu + c)] \cos \chi_0 + [\tilde{m}^2(2\mu e^{-\alpha t} + c) + (1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1)\mu] \sin \chi_0 \right\}. \end{aligned}$$

Используя (1.1.4), (1.1.9), (2.3.30), получим выражения для пластических деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{m_1}{2\mu} \left(1 - \frac{2a_0 + 1}{r^2} \right) + \frac{q}{r\mu} \left(\cos \chi' - \sqrt{3} \sin \chi' \right) \cos 2\theta - \\ &- \frac{1}{r} \left\{ \tilde{m} \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} (c_1 \sin \chi - c_2 \cos \chi) - \frac{A a d'}{(2\mu + c)\mu} \left[\left((1 + \tilde{m}^2) \cos \chi_1 - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_1 \right) \frac{(1 - e^{-\alpha t})\mu}{r^2} + \frac{(2e^{-\alpha t}\mu + c)\tilde{m}^2}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\sin \chi_1 + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln r \cos \chi_1 \right) \right] \right\} \cos \tilde{m}\theta. \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

Для определения напряжения в пластической зоне во второй итерации определим правую часть уравнения (2.3.28). Она имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(2)}^{(1)} = & \left(\frac{cm_1}{2\mu} + 2e^{-\alpha t} \right) \left(1 - \frac{2a_0 + 1}{r^2} \right) + \frac{2c\tilde{q}}{r\mu} (\cos \chi' - \sqrt{3} \sin \chi') \cos 2\theta + \\
 & + \frac{1}{r} \cos \tilde{m} \theta \left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \left[\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \sin \chi_1 - \left(\mu(\tilde{m}^2 - 1) \times \right. \right. \right. \right. \\
 & \times (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t} + c)}{2} \left. \right) \sin(\chi + \chi_0) - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos \chi_1 \times \\
 & \times (\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) - \mu \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} (1 - e^{-\alpha t}) \times \\
 & \times \cos(\chi + \chi_0) \left. \right] - \frac{\mu}{r^2} \left[(1 + \tilde{m}^2) \cos \chi_1 - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_1 \right] - \\
 & - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \left(\sin \chi_1 + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \ln r \cos \chi_1 \right) \left. \right\} (D + Z) + \\
 & + K \left\{ \tilde{m}^2 \sin \chi_1 - \sin(\chi + \chi_0) + \tilde{m}^2 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos \chi_1 + \right. \\
 & \left. + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos(\chi + \chi_0) \right\}, \quad (2.3.96)
 \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{2caAd'}{(2\mu + c)\mu}, \quad Z = \frac{4ad'e^{-\alpha t}}{2\mu + c} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right), \quad K = -\frac{2aAd'e^{-\alpha t}}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}}.$$

Решая уравнение (2.3.28), с учетом (2.3.88) и (2.3.96), получим во второй итерации выражения для напряжений в пластической зоне в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r(2)}^{(1)} = & m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{4c\tilde{q}}{r\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \chi'_0 \sin \chi'_1 - \right. \\
 & - \ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta + \frac{1}{r} \left\{ \left[c_1(1 - \tilde{m}^2) + c_2 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \right] \cos \chi + \right. \\
 & \left. + \left[-c_1 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} + c_2(1 - \tilde{m}^2) \right] \sin \chi + \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \times \right. \\
 & \times \left\{ \left\{ \ln r \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \left[-\cos(\chi + \chi_0) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin(\chi + \chi_0) \right] + \right. \right. \\
 & + \left[\mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \right] \frac{1}{\tilde{m}^2 - 1} \cos(\chi + \chi_0) - \\
 & - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin(\chi + \chi_0) \left. \right\} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\tilde{m}^2 + 3}{2} \cos \chi_1 - \frac{\tilde{m}^2 + 3}{2} \sin \chi_1 \right) + \\
 & + \frac{\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \left[\mu(\tilde{m}(1 - e^{-\alpha t}) - 2) - c \right] \sin \chi_1 + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \cos \chi_1 + \\
 & \left. + \ln r \left\{ \sin \chi_1 \left[(\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} - \right. \right. \right. \\
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \Big] + \cos \chi_1 \left[-(\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) + \right. \\
& + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2 + 1) \Big] \Big\} + \frac{K}{2} \left\{ \frac{\tilde{m}^2}{\sqrt{\tilde{m}^2 + 1}} \cos \chi_1 + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 + 1}} \cos(\chi + \chi_0) + \tilde{m}^2 \sin(\chi + \chi_0) + \sin \chi_1 - \\
& - \ln r \left[\sqrt{\tilde{m}^2 + 1} \cos(\chi + \chi_0) + (\tilde{m}^2 - 1) \sqrt{\tilde{m}^2 + 1} \cos \chi_1 + \right. \\
& + (\tilde{m}^2 - 1)(\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 + (\tilde{m}^2(\tilde{m}^2 - 1) + 1) \sin(\chi + \chi_0) \Big] \Big\} \\
& + \ln r \left\{ \left[\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \ln r \left[(\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 - \sqrt{\tilde{m}^2 + 1} \cos \chi_1 \right] \right] \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \right\} \cos \tilde{m}\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta(2)}^{(1)} = & m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2 + 2 \ln \frac{r}{a} \right] + \\
& + \frac{4c\tilde{q}}{r\mu} \left[-\ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_1 \cos \chi'_0 - \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] \cos 2\theta + \\
& + \frac{1}{r} \left\{ \left[c_1(1 - \tilde{m}^2) + c_2 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \right] \cos \chi - \left[c_1 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} - \right. \right. \\
& - c_2(1 - \tilde{m}^2) \Big] \sin \chi + \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left\{ \ln r \left[(\mu(\tilde{m}^2 - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c - \right. \right. \\
& - \frac{\tilde{m}^2}{2}(2e^{-\alpha t}\mu + c) \Big) \sin \chi_1 + \left((\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) \times \right. \\
& \times \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \Big) \cos \chi_1 - \left(\mu(1 - e^{-\alpha t}) + \right. \\
& + \frac{\tilde{m}^2}{2}(2e^{-\alpha t}\mu + c) \Big) \sin(\chi + \chi_0) + \left(\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \mu(1 - e^{-\alpha t}) \times \right. \\
& \times \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos(\chi + \chi_0) \Big) - \frac{\mu}{r^2} \left[\tilde{m}^2 \cos \chi_1 + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 - 2) \sin \chi_1 \right] + \\
& + \left[\sin \chi_1 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \frac{\tilde{m}c}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right) + \right. \\
& + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \cos \chi_1 - \sin(\chi + \chi_0) \frac{\tilde{m}^2(e^{-\alpha t}\mu + c + \mu)}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \\
& - \cos(\chi + \chi_0) \left(\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \right) - \ln r \left[\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \times \right. \\
& \times \ln r \left(\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos \chi_1 - (\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 \right) \Big] \Big\} + \\
& + \frac{K}{2} \left\{ \ln r \left[-(2\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 - 1) \cos \chi_1 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\tilde{m}^2(\tilde{m}^2 - 1) + 1) \sin(\chi + \chi_0) - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 - 1) \cos(\chi + \chi_0) \Big] + \\
& + \left[- (2\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 + \frac{3\tilde{m}^2 - 2}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \cos \chi_1 + (\tilde{m}^2 - 2) \sin(\chi + \chi_0) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tilde{m}^4}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \cos(\chi + \chi_0) \right] \Big\} \cos \tilde{m}\theta, \\
\frac{p(1)}{\tau_{r\theta(2)}} &= \frac{4c\tilde{q}}{r\mu} \left[- \ln \frac{r}{a} \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_1 \sin \left(\chi' - \frac{\pi}{6} \right) \right] \cos 2\theta + \\
& + \frac{\tilde{m}}{r} \left\{ \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left\{ \ln r \left[(\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) \cos \chi_1 - \right. \right. \right. \\
& - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin \chi_1 - \mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos(\chi + \chi_0) - \left(\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} + \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \mu(1 - e^{-\alpha t})\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin(\chi + \chi_0) \right) \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\mu}{\tilde{m}^2} (\tilde{m}^2 + 1) \cos \chi_1 - \right. \\
& - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 + 1) \sin \chi_1 \Big] - \sin \chi_1 \left[\frac{\mu}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\tilde{m}c}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right] - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \cos \chi_1 - \sin(\chi + \chi_0) \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\sin \chi_1 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \frac{\tilde{m}c}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \cos \chi_1 - \sin(\chi + \chi_0) \frac{\tilde{m}^2(e^{-\alpha t}\mu + c + \mu)}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right. \\
& \quad \left. - \cos(\chi + \chi_0) \left(\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} - 2\mu(1 - e^{-\alpha t}) \right) \right. \\
& - \ln r \left[\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \ln r \left(\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \cos \chi_1 - (\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 \right) \right] \Big\} + \\
& + \frac{K}{2} \left\{ \ln r \left[- (2\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 - 1) \cos \chi_1 - \right. \right. \\
& - (\tilde{m}^2(\tilde{m}^2 - 1) + 1) \sin(\chi + \chi_0) - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 - 1) \cos(\chi + \chi_0) \Big] + \\
& + \left[- (2\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_1 + \frac{3\tilde{m}^2 - 2}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \cos \chi_1 + (\tilde{m}^2 - 2) \sin(\chi + \chi_0) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\tilde{m}^4}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \cos(\chi + \chi_0) \right] \right\} \cos \tilde{m}\theta,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{T_1 \cos \chi_0}{\tilde{m}(1 - \tilde{m}^2)} + \frac{T_1 \sin \chi_0}{\tilde{m}\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} + \frac{2aA \sin \chi_0}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \frac{T_2 \cos \chi_0}{1 - \tilde{m}^2}, \\
c_2 &= \frac{T_1 \sin \chi_0}{\tilde{m}(1 - \tilde{m}^2)} - \frac{T_1 \cos \chi_0}{\tilde{m}\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \frac{2aA \cos \chi_0}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \frac{T_2 \sin \chi_0}{1 - \tilde{m}^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 = & \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left(\frac{1}{\tilde{m}^2 - 1} \left[\mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \right] \cos 2\chi_0 - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin 2\chi_0 + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \\
& - \ln a \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \left[\frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} + \mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) \right] \sin 2\chi_0 + \right. \\
& + \left. \left[\mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 2\tilde{m}) - c\tilde{m} \right] + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos 2\chi_0 + \right. \\
& \left. + \ln a \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right\} - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{a^2} \frac{\tilde{m}^4 + \tilde{m}^2 + 2}{2\tilde{m}^2}, \\
T_2 = & \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left(\ln a \left\{ - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - (\mu(\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \tilde{m}c) - \right. \right. \\
& - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \cos 2\chi_0 + \left[\mu(1 - e^{-\alpha t}) \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} - \right. \\
& - \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \left(\mu((1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2}) \right] \sin 2\chi_0 - \\
& - \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \ln a \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \} + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} + \\
& + \left[\mu(1 - e^{-\alpha t})(\tilde{m}^2 - 1) + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2} \right] \frac{1}{\tilde{m}^2 - 1} \cos 2\chi_0 - \\
& \left. \left. - \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \sin 2\chi_0 - \frac{\mu}{a^2} \frac{\tilde{m}^2 + 3}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Условия на упругопластической границе и на бесконечности для упругой зоны, используя полученные выше соотношения для напряжений в пластической зоне, запишем таким образом: при $r = \infty$

$$\sigma_r^{(1)} = -\tilde{q} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tilde{q} \sin 2\theta,$$

при $r = 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r(2)}^{(1)} &= m_1 a_0 + M_1 \cos 2\theta + M_2 \cos \tilde{m}\theta, \\
\tau_{r\theta(2)}^{(1)} &= N_1 \sin 2\theta + N_2 \sin \tilde{m}\theta.
\end{aligned}$$

Решение в упругой зоне с учетом этих условий во второй итерации определяем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{r(2)}^{(1)} = & \frac{m_2 a_1}{r^2} + \left[\frac{4\tilde{q} + 2(K_1 - D_1)}{r^2} + \frac{2D_1 - K_1 - 3\tilde{q}}{r^4} - \tilde{q} \right] \cos 2\theta + \\
& + \left[\frac{K_2}{2} \left(\frac{-\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+1}} + \frac{\tilde{m}-2}{r^{\tilde{m}}} \right) + \frac{D_2}{2} \left(\frac{\tilde{m}+2}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m}+2}{r^{\tilde{m}}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta, \tag{2.3.97a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta(2)}^{(1)} = & -\frac{m_2 a_1}{r^2} + \left[\frac{-2D_1 + K_1 + 3\tilde{q}}{r^4} + \tilde{q} \right] \cos 2\theta + \\
& + \left[\frac{K_2}{2} \left(\frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m}-2}{r^{\tilde{m}}} \right) + \frac{D_2}{2} \left(-\frac{\tilde{m}+2}{r^{\tilde{m}+2}} + \frac{\tilde{m}-2}{r^{\tilde{m}}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta(2)}^{(1)} &= \left[\tilde{q} + \frac{2\tilde{q} + K_1 - D_1}{r^2} + \frac{2D_1 - K_1 - 3\tilde{q}}{r^4} \right] \sin 2\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[K_2 \left(-\frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}+2}} + \frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}}} \right) + D_2 \left(\frac{\tilde{m}+2}{r^{\tilde{m}+2}} - \frac{\tilde{m}}{r^{\tilde{m}}} \right) \right] \sin \tilde{m}\theta \\
u_{r(2)}^{(1)} &= -\frac{m_2 a_1}{2r\mu} + \frac{1}{2\mu} \left[-q\tilde{r} + \frac{D_1 - K_1 - 2\tilde{q}}{r} + \frac{1/3(K_1 - 2D_1) + \tilde{q}}{r^3} \right] \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{1}{4\mu} \left[K_2 \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}+1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} - \frac{\tilde{m}}{\tilde{m}-1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + D_2 \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}-1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} - \frac{\tilde{m}+2}{\tilde{m}+1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} \right) \right] \cos \tilde{m}\theta, \\
u_{\theta(2)}^{(1)} &= \frac{1}{6\mu} \left[3\tilde{q}r + \frac{3\tilde{q} + K_1 - 2D_1}{r^3} \right] \sin 2\theta + \\
&\quad + \frac{1}{4\mu} \left[K_2 \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}+1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} - \frac{\tilde{m}-2}{\tilde{m}-1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - D_2 \left(\frac{\tilde{m}+2}{\tilde{m}+1} \frac{1}{r^{\tilde{m}+1}} + \frac{\tilde{m}-2}{\tilde{m}-1} \frac{1}{r^{\tilde{m}-1}} \right) \right] \sin \tilde{m}\theta,
\end{aligned} \tag{2.3.976}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \chi'_0 \cos \chi'_0 \right], \\
D_1 &= \frac{4c\tilde{q}}{\mu} \left[-\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi'_0 - \frac{\pi}{6} \right) \sin \chi'_0 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= c_2(1 - \tilde{m}^2) + c_2 \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} + \\
&\quad + \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left\{ \mu \left[\frac{\tilde{m}^2 + 3}{2} \cos \chi_0 - \frac{\tilde{m}^2 + 3}{2} \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} \sin \chi_0 \right] + \right. \\
&\quad + \frac{\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\mu(\tilde{m}(1 - e^{-\alpha t}) - 2) - c) \sin \chi_0 + \frac{\tilde{m}^2(2e^{-\alpha t}\mu + c)}{2(\tilde{m}^2 - 1)} \cos \chi_0 \left. \right\} + \\
&\quad + \frac{K}{2} \left\{ \frac{\tilde{m}^2}{\sqrt{\tilde{m}^2 + 1}} \cos \chi_0 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}^2 + 1}} \cos \chi_0 - \tilde{m}^2 \sin \chi_0 - \sin \chi_0 \right\}, \\
D_2 &= \frac{\tilde{m}D}{2} \left(\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right) \left\{ \frac{\mu}{\tilde{m}^2} \left[\frac{\mu}{\tilde{m}^2} ((\tilde{m}^2 + 1) \cos \chi_0 - \right. \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1}(\tilde{m}^2 + 1) \sin \chi_0) \right] + \sin \chi_1 \left[\frac{\mu}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tilde{m}c}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} + \frac{\mu(1 - e^{-\alpha t})}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right] + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \cos \chi_0 \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta(2)}^{(1)} \Big|_{r=1} &= P + R \cos 2\theta + R_1 \cos \tilde{m}\theta, \\
\sigma_{\theta(2)}^{(1)} \Big|_{r=1} &= -m_1 a_0 + B \cos 2\theta + B_1 \cos \tilde{m}\theta.
\end{aligned}$$

Радиус упругопластической границы во второй итерации, согласно равенству (2.3.45), определяется по формуле

$$r_{s(2)}^{(1)} = -\frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\alpha t})} [P + m_2 a_1 + (R - B) \cos 2\theta + (R_1 - B_1) \cos \tilde{m}\theta], \quad (2.3.98)$$

где

$$\begin{aligned} P &= m_2 \left[(2a_0 + 1) \left(-1 - \frac{1}{a^2} \right) + 2 - 2 \ln a \right], \\ R &= \frac{c\tilde{q}}{\mu} \left[\ln a + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\chi'_0 \right], \\ B &= K_1 - 2D_1 + 4\tilde{q}, \quad B_1 = K_2 - 2D_2, \\ R_1 &= \left(\left[\frac{D}{2} + \frac{Z}{2} \right] \left\{ -\mu \left[\tilde{m}^2 \cos \chi_0 + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1} (\tilde{m}^2 - 2) \sin \chi_0 \right] + \right. \right. \\ &+ \sin \chi_0 \left[\frac{\tilde{m}c}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} - \frac{\mu}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} (\tilde{m}^2(1 - e^{-\alpha t}) - 2\tilde{m}) + \frac{\tilde{m}^2(e^{-\alpha t}\mu + c + \mu)}{\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}} \right] - \\ &\left. \left. - \cos \chi_0 [-2\mu(1 - e^{-\alpha t})] \right\} \right) + \frac{K}{2} \left\{ 3(\tilde{m}^2 - 1) \sin \chi_0 - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1} (\tilde{m}^2 - 1) \cos \chi_0 \right\} + c_1(1 - \tilde{m}^2) + c_2\sqrt{\tilde{m}^2 - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, в первом приближении (две итерации) определены поля напряжения в упругой и пластической зоне, а также уравнение для границы раздела зон упругого и пластического состояний в пластине с многоугольным отверстием. При этом свойства материала в зоне пластичности описываются моделью упруговязкопластического тела. Определение поля перемещений во второй итерации в зоне пластичности связано, как и в предыдущем случае, с разрешимостью уравнения типа (2.3.35).

Однако в силу громоздкости подынтегрального выражения аналитически решить интегро-дифференциальное уравнение вида (2.3.35) при упруговязкопластическом поведении в зоне пластичности не удается, поэтому в качестве перемещений в пластической зоне в первом приближении, ограничимся результатом первой итерации, которая определена в виде (2.3.94).

Как видно из (2.3.92) и (2.3.98) в данной задаче форма упругопластической границы зависит от формы контура внутреннего отверстия. При этом, если в (2.3.87)–(2.3.98) положить $\tilde{m} = 2$, то мы придем к задаче Ивлева о растяжении пластин с эллиптическим отверстием, рассмотренной в п. 8.

Если в соотношениях (2.3.87)–(2.3.98) положить $\delta = 0$, то они будут описывать напряженно-деформированное состояние пластины с круговым отверстием и соответствовать результатам решения задачи Галина для модели упруговязкопластического тела, рассмотренной в п. 7.

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 2.3.7–2.3.9. Здесь показана зависимость радиуса упругопластической границы r_s от угла θ (первая итерация).

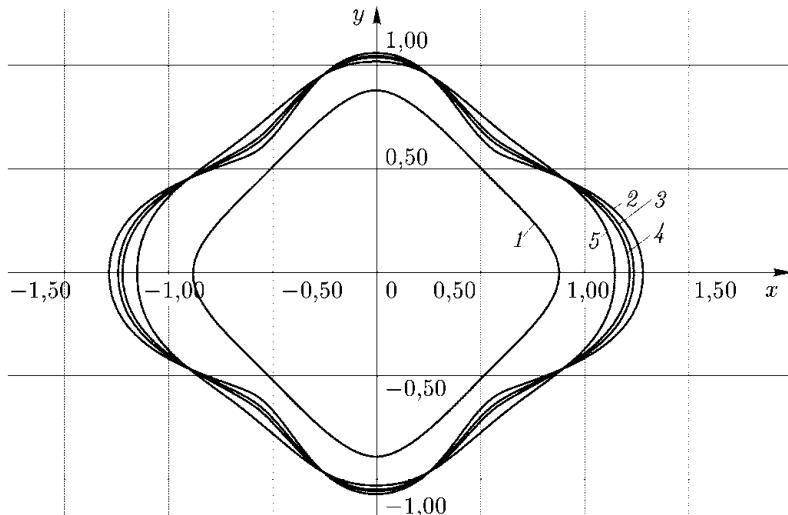


Рис. 2.3.7

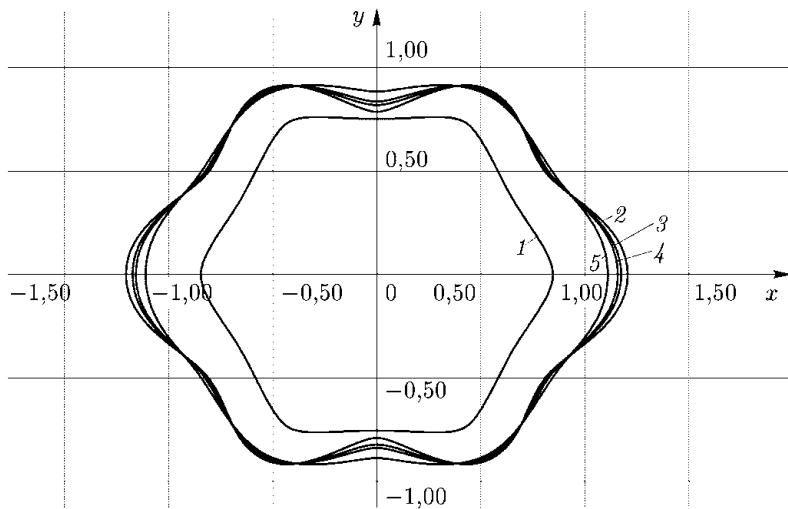


Рис. 2.3.8

Значения безразмерных характеристик принимались следующими: внутреннее давление на контуре $q_0 = 1,7$; малый параметр $\delta = 0,035; 0,005$; коэффициент упрочнения $c = 0,2$ и $\eta = 0,001$; модуль сдвига $\mu = 1$; радиус отверстия $a = 0,8$.

На рис. 2.3.7 показана зависимость радиуса упругопластической границы r_s от угла θ в случае, когда контур отверстия по форме близок к правильному четырехугольнику; на рис. 2.3.8 — зависимость r_s от θ в случае, когда контур отверстия по форме близок к правильному шестиугольнику; на рис. 2.3.9 контур отверстия по форме близок к правильному двенадцатигольнику. Кривая 1 на рис. 2.3.7 соответствует контуру отверстия в виде правильного четырехугольника; кривая 1 на рис. 2.3.8 соответствует контуру отверстия в виде правильного шестиугольника; кривая 1 на рис. 2.3.9 соответствует контуру отверстия в виде

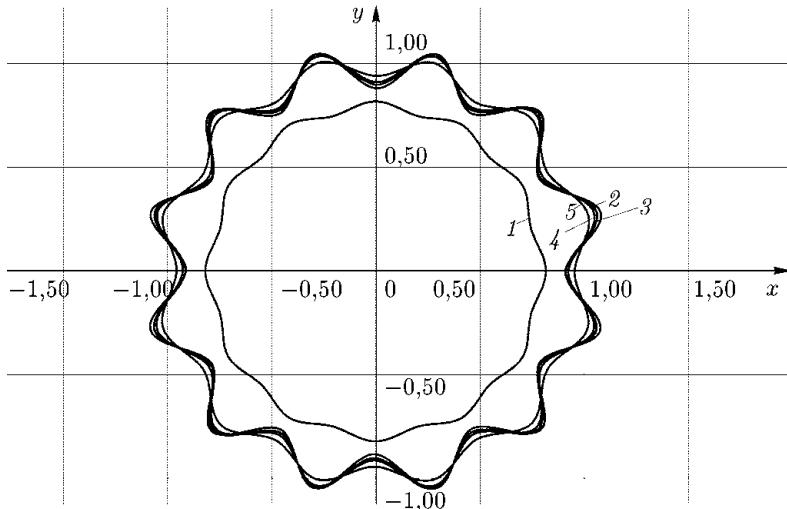


Рис. 2.3.9

правильного двенадцатигольника. Кривым 2–4 на рис. 2.3.7 и 2.3.9 соответствуют моменты времени $t = 4 \cdot 10^{-4}$ (кривая 2), $t = 5 \cdot 10^{-4}$ (кривая 3), $t = 6 \cdot 10^{-4}$ (кривая 4). Дальнейший рост времени приводит, как показал численного эксперимента к тому, что кривые приближаются к кривой 5, которая соответствует радиусу упругопластической границы для упрочняющейся упругопластической задаче. Учет второй итерации, как следует из численного анализа, вносит несущественные поправки, так как соответствующие кривые практически совпадают.

Очевидно, что, применяя обычную методику, получим характеристическое уравнение вида

$$\Delta(\tilde{q}, k, c, q_0, \eta, h, n, r_s) = 0$$

для линеаризированной краевой задачи устойчивости горизонтальной горной выработки с многоугольным поперечным сечением, при этом это уравнение необходимо решать совместно с уравнением для определения радиуса упругопластической

границы (2.3.92) или (2.3.98), в зависимости от числа итераций первого приближения.

Таким образом, полученные в данном параграфе приближенные аналитические решения классических задач, определяющие докритическое состояние класса задач устойчивости горной механики, а также численный анализ построенных решений позволяет сделать следующие выводы.

Численный анализ решения задачи Галина показал, что если упрочнение мало, то его влияние на величину радиуса упругопластической границы несущественно. С ростом времени упругопластическая зона из круга постепенно переходит в эллипс.

Из построенных решений (первого приближения первой итерации) задач о двухосном растяжении пластины с эллиптическим отверстием или близким к правильному многоугольнику отверстием установлено, что $\tau_{r\theta(1)}^{(1)} \neq 0$ (следствие вхождения малого параметра δ в уравнение контура отверстия) и не зависит от параметра нагружения $r_s^{(0)}$. Решения для этих задач будут совпадать с решениями деформационной теории, как и в задаче Галина.

Из полученных выражений для полей напряжений и контура упругопластической границы для всех задач следует, что они содержат слагаемые, обусловливающие влияние на них модуля сдвига, коэффициента упрочнения, вязкости и внешних нагрузок.

Полученные аналитические решения рассмотренных в § 3 задач при $c = 0$ и $t \rightarrow \infty$ переходят в известные решения [142]; при $c \ll 1$, $\eta = 0$ ($t \rightarrow \infty$) в решения [30, 33], а при $c \ll 1$ и $\eta = 0$ ($t \rightarrow \infty$) в решение [36].

Установлено, как особенность данного алгоритма решения задач, что упругопластическая граница для случая $c = 0$ и $t \rightarrow \infty$ частично оказывается поглощенной границей при $c \neq 0$ и $\eta \neq 0$.

Результаты численного счета задач показали, что на конфигурацию упругопластической границы существенное влияние оказывает возмущение границы внутреннего контура.

Из сравнения значений критических нагрузок для сферической выработки, полученных по линеаризированной и приближенной теории устойчивости, а также по теории образования свода обрушения, следует, что для решения подобных задач целесообразнее прибегать к трехмерной линеаризированной теории устойчивости.

Определено, что учет сжимаемости горного массива в большей мере сказывается на критических нагрузках — увеличивает их. Следует также отметить, что исследование устойчивости различных цилиндрических задач горной механики может быть проведено в рамках разработанного единого подхода.

2.4. Неустойчивость цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при осевом сжатии

Моделированию отказов цилиндрической оболочки с упругопластическим заполнителем при осевом сжатии посвящена работа [92]. При этом заполнитель описывался соотношениями теории малых упругопластических деформаций [147] в предположении степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций.

Необходимость предсказаний отказов различных конструкций из металла, бетона и т. д. требует разработки и применения более сложных математических моделей сред, описывающих с большей степенью точности процессы деформирования. С этой точки зрения использование моделей сложных сред, в которых учитываются такие свойства, обнаруживаемые у реальных физических тел, как пластичность, вязкость, упрочнение, не может не представлять интереса.

В данном параграфе в точной трехмерной постановке задача устойчивости цилиндрической оболочки рассматривается, когда заполнитель обладает упрочняющимися упруговязкопластическими свойствами [223]. В этом случае функция нагружения имеет вид (1.1.8), т. е.

$$F = \left(s_{ij} - c \frac{p}{\varepsilon_{ij}} - \eta \frac{p}{e_{ij}} \right) \left(s_{ij} - c \frac{p}{\varepsilon_{ij}} - \eta \frac{p}{e_{ij}} \right) - k^2, \quad (2.4.1)$$

а соотношения ассоциированного закона течения представляются в форме

$$\frac{p}{\varepsilon_{ij}} = \psi \left(s_{ij} - c \frac{p}{\varepsilon_{ij}} - \eta \frac{p}{e_{ij}} \right). \quad (2.4.2)$$

Полная деформация в заполнителе слагается из упругой $\frac{e}{\varepsilon_{ij}}$ и пластической $\frac{p}{\varepsilon_{ij}}$ составляющей:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{e}{\varepsilon_{ij}} + \frac{p}{\varepsilon_{ij}}, \quad (2.4.3)$$

причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука (1.1.7). Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши (1.1.4). Уравнения равновесия и граничные условия примем в форме (1.1.1) и (1.1.2) соответственно. Исследуем неустойчивость шарнироопрётои упругой цилиндрической оболочки толщины h и длины l , скрепленной с упруговязкопластическим заполнением при сжатии усилиями P вдоль образующей, причем усилия действуют как на оболочку, так и на заполнитель, которые одинаково деформируются на величину

$$\varepsilon_{33}^{(1)0} = \varepsilon_{33}^0 = \varepsilon. \quad (2.4.4)$$

Здесь и далее верхний индекс (1) приписан величинам, относящимся к оболочке.

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на боковой поверхности и торцах оболочки с заполнителем, привлекая при этом соотношения (2.4.1)–(2.4.4), учитывая условия несжимаемости (1.1.10), а также условия на линии спая оболочка–заполнитель, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

в оболочке

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{0(1)} &= -\frac{c_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, & \varepsilon_\theta^{0(1)} &= \frac{c_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varepsilon_z^{0(1)} &= \varepsilon, & \sigma_r^{0(1)} &= -\frac{2\mu c_1}{r^2} + c_2, \\ \sigma_\theta^{0(1)} &= \frac{2\mu c_1}{r^2} + c_2, & \sigma_z^{0(1)} &= 3\mu\varepsilon + c_2,\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

в заполнителе

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^0 &= \varepsilon_\theta^0 = -\frac{\varepsilon}{2}, & \varepsilon_z^0 &= \varepsilon, \\ \varepsilon_r^0 &= \varepsilon_\theta^0 = A \left[\exp \left(-\frac{2\mu + c}{\eta} t \right) - 1 \right], & \varepsilon_z^0 &= -2\varepsilon_r^0, \\ \sigma_r^0 &= \sigma_\theta^0 = -2\pi \left(1 + \frac{\tilde{h}}{R} \right)^2 P - 3\mu\varepsilon - 6\mu A \left[\exp \left(-\frac{2\mu + c}{\eta} t \right) - 1 \right], \\ \sigma_z^0 &= -2\pi \left(1 + \frac{\tilde{h}}{R} \right)^2 P, & A &= -\frac{(k/\sqrt{6}) - \mu\varepsilon}{c + 2\mu}, \\ P &= -p' - \frac{3\mu\varepsilon}{2\pi} - \frac{3\mu\varepsilon_r^0 R^2}{\pi (\tilde{h} + R)^2}, \\ c_1 &= \frac{2\pi (R + \tilde{h})^4 P + (3\mu\varepsilon + 6\mu\varepsilon_r^0) R^2 (R + \tilde{h})^2}{2\mu \left[(R + \tilde{h})^2 - R^2 \right]}, \\ c_2 &= \frac{2\pi (R + \tilde{h})^2 P + (3\mu\varepsilon + 6\mu\varepsilon_r^0) R^2}{(R + \tilde{h})^2 - R^2},\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

где p' — давление на наружной поверхности оболочки, R — радиус цилиндра заполнителя.

Исследование устойчивости основного состояния (2.4.5), (2.4.6) составной оболочки сводится к решению уравнений равновесия в вариациях для областей оболочки и заполнителя при соответствующих граничных условиях (1.5.12).

Условия непрерывности напряжений и перемещений на границе $r = R$ контакта оболочки и заполнителя таковы

$$\left(\sigma_j^{(1)i} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{(1)ik} \nabla_k u_j^{(1)} \right) N_j^{(1)} + \left(\sigma_j^i + \overset{\circ}{\sigma}{}^{ik} \nabla_k u_j \right) N_j^{(1)} = 0, \quad u_j^{(1)} - u_j = 0, \quad (2.4.7)$$

здесь N_j — орты нормали на границе $r = R$.

Зависимость между значениями амплитуд напряжений и перемещений для несжимаемой упруговязкопластической среды в заполнителе и упругой оболочке представима в виде (1.5.2). При этом коэффициенты a_{ij} и G_{ij} в заполнителе определены выражениями (1.5.7), а в оболочке — выражениями (1.5.8). К соотношениям (1.5.2), (1.5.7), (1.5.8) для заполнителя и оболочки следует присоединить условия несжимаемости

$$\nabla_n u^n = 0, \quad \nabla_n u^{(1)n} = 0. \quad (2.4.8)$$

Уравнения (1.5.2), (1.5.7), (1.5.8), (1.5.11), (1.5.12), (2.4.7), (2.4.8) представляют собой связанную краевую статическую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений u, v, w и $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ средних нормальных напряжений $\sigma, \sigma^{(1)}$, соответственно, для заполнителя и оболочки. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния, описываемого соотношениями (2.4.5), (2.4.6). Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатическое давление в заполнителе, согласно (1.5.21), представим следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A(r) \cos(m\theta) \cos(\tilde{\gamma}z), \quad v = B(r) \sin(m\theta) \sin(\tilde{\gamma}z), \\ w &= C(r) \cos(m\theta) \sin(\tilde{\gamma}'z), \quad \sigma = D(r) \cos(m\theta) \sin(\tilde{\gamma}z), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

где $\tilde{\gamma} = n\pi/l$.

В оболочке перемещения $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ и среднее нормальное напряжение $\sigma^{(1)}$ имеют вид (2.4.9), где величинам A, B, C и D следует присвоить верхний индекс (1). Выбор решения задачи устойчивости в форме (2.4.9) предполагает, что заполнитель и оболочка работают совместно без проскальзывания и отставания и соответствует неосесимметричному деформированию.

Подставляя функции $u, v, w, \sigma, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \sigma^{(1)}$ в линеаризованные уравнения устойчивости (1.5.11) и учитывая при этом соотношения (1.5.2) и (2.4.8), после ряда преобразований получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

для оболочки

$$\frac{dy^{(1)}(r)}{dr} = C_1(r) y^{(1)}(r) \quad \left(R \leq r \leq R + 2\tilde{h} \right), \quad (2.4.10)$$

для заполнителя

$$\frac{dy(r)}{dr} = D_1(r)y(r) \quad (r \leq R), \quad (2.4.11)$$

где $y^{(1)}(r) = (A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, A^{(1)\prime}, B^{(1)\prime}, C^{(1)\prime})$, $y(r) = (A, B, C, A', B', C')$ — векторы, C_1 и D_1 — матрицы шестого порядка. Элементы c_{ij} и d_{ij} матриц C_1 и D_1 , отличные от нуля, таковы:

$$\begin{aligned} c_{14} &= c_{25} = c_{36} = 1, \\ c_{41} &= \frac{1}{a_{rr}} \left[\rho s^2 + \sigma_z^{0(1)} \tilde{\gamma}^2 + \sigma_\theta^{0(1)} (1 + m^2) + \mu (2 + m^2) \right], \\ c_{42} &= \frac{1}{r^2 a_{rr}} \left[m (1 + r) + \sigma_\theta^{0(1)} \tilde{\gamma}^2 + \mu m (3 + r) \right], \quad c_{51} = \frac{m (2a_{\theta\theta} - \mu)}{\sigma_r^{0(1)} + \mu}, \\ c_{44} &= \frac{1}{a_{rr}} \left(-r \sigma_\theta^{0(1)} - \frac{d\sigma_r^{0(1)}}{dr} + 2\mu r \right), \quad c_{45} = -\frac{\mu m}{r a_{rr}}, \quad c_{46} = -\frac{\mu \tilde{\gamma}}{a_{rr}}, \\ c_{54} &= \frac{m \mu \tilde{\gamma}}{\sigma_r^{0(1)} + \mu}, \quad c_{62} = -\frac{m \mu \tilde{\gamma}}{\sigma_r^{0(1)}}, \quad c_{64} = -\frac{\mu \tilde{\gamma}}{\sigma_r^{0(1)}}, \quad c_{66} = -\frac{1}{\sigma_r^{0(1)}} \frac{d\sigma_r^{0(1)}}{dr}, \\ c_{52} &= \frac{1}{r^2 (\sigma_r^{0(1)} + \mu)} \left[r \frac{d\sigma_r^{0(1)}}{dr} - \mu (r + 1) - \sigma_r^{0(1)} + r^2 (m^2 - 2) \right], \\ c_{63} &= \frac{1}{\sigma_r^{0(1)}} \left[\mu (\tilde{\gamma} + m^2) + m^2 \sigma_\theta^{0(1)} - a_{zz} \tilde{\gamma}^2 \right], \\ c_{55} &= \frac{1}{r (\sigma_r^{0(1)} + \mu)} \left[-r \frac{d\sigma_r^{0(1)}}{dr} - \mu (r - 2) + 2\sigma_r^{0(1)} - a_{\theta\theta} \right], \\ d_{14} &= d_{25} = d_{36} = 1, \quad (2.4.12a) \\ d_{42} &= \frac{1}{r^2 a_r} \left[\sigma_\theta^0 (2 + r) + 2m\mu m (4 + r) + a_{r\theta} \frac{3m}{r^2} \right], \\ d_{41} &= \frac{1}{a_{rr}} \left[\rho s^2 + \sigma_z^0 \tilde{\gamma}^2 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta^{(1)} (1 + m^2) + \mu (4 + m^2) + a_{r\theta} \frac{3}{r^2} \right], \\ d_{43} &= -\frac{\tilde{\gamma}}{a_{rr}} \left[r \sigma_\theta^0 (2 + r) + 2r\mu m + a_{r\theta} \frac{1}{r^2} \right], \\ d_{45} &= -\frac{1}{r a_{rr}} \left(m\mu m + a_{r\theta} \frac{m}{r^2} \right), \quad d_{46} = \frac{\tilde{\gamma}}{r a_{rr}} (\mu m + a_{rz}), \\ d_{51} &= \frac{m}{\overset{\circ}{\sigma}_r + \mu} (-\mu + 2a_{\theta\theta}), \quad d_{54} = \frac{m}{\overset{\circ}{\sigma}_r + \mu}, \\ d_{52} &= \frac{1}{r^2 (\overset{\circ}{\sigma}_r + \mu)} \left[-\mu (1 + r + m^2) - \overset{\circ}{\sigma}_r - \right. \\ &\quad \left. - a_{\theta r} (1 + r - m^2) + r^2 (m^2 - 2) \right], \\ d_{53} &= \frac{m \tilde{\gamma}}{\overset{\circ}{\sigma}_r + \mu} (-a_{\theta z} + \mu + 2a_{\theta r}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{62} &= \frac{m\tilde{\gamma}}{r^3\overset{\circ}{\sigma}_r} [-a_{zr} + r\mu(1-r) - ra_{\theta z}], \quad d_{61} = \frac{\tilde{\gamma}}{r\overset{\circ}{\sigma}_r} (-a_{zr} + \mu - a_{\theta z}), \\ d_{63} &= \frac{1}{\overset{\circ}{\sigma}_r} [\tilde{\gamma}\mu(1-\tilde{\gamma}) + m^2(\mu + \overset{\circ}{\sigma}_r)], \end{aligned} \quad (2.4.126)$$

$$d_{55} = \frac{m\mu}{r^2(\overset{\circ}{\sigma}_r + \mu)} [\mu(r-2) - 2\overset{\circ}{\sigma}_r - a_{\theta\theta}], \quad d_{64} = \frac{\beta s^2 - \tilde{\gamma}}{\overset{\circ}{\sigma}_r}.$$

При этом для заполнителя

$$\begin{aligned} a_{rr} &= 2\mu - 3\hat{a}\hat{K}^2, \quad a_{r\theta} = a_{\theta r} = -3\hat{a}\hat{K}^2, \quad a_{\theta\theta} = a_{rr}, \\ a_{rz} &= a_{zr} = a_{\theta z} = a_{z\theta} = 6\hat{a}\hat{K}^2, \\ a_{zz} &= 2\mu - 12\hat{a}\hat{K}^2, \quad \hat{K} = k/\sqrt{6}, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

а для оболочки эти элементы имеют вид (2.4.13) при $\hat{a} = 0$.

Запишем граничные условия и условия контакта в терминах функций A, B, C, D и $A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}$.

Условие контакта (2.4.7) при $r = R$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u &= u^{(1)}, \quad v = v^{(1)} \quad w = w^{(1)}, \\ A' (a_{rr} + \sigma_r^0) + Ba_{r\theta} \frac{m}{R^3} - Aa_{r\theta} \frac{1}{R} - C\tilde{\gamma}a_{rz} + D &= A'^{(1)} \left(a_{rr} + \sigma_r^{0(1)} \right) + \\ B^{(1)}a_{r\theta} \frac{m}{R^3} - A^{(1)}a_{r\theta} \frac{1}{R} - C^{(1)}\tilde{\gamma}a_{rz} + D^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Условия на поверхности, согласно (1.5.23) при $r = R_1 = \tilde{h} + R$ записутся так:

$$\begin{aligned} A'^{(1)} (a_{rr} + \sigma_r^0) + B^{(1)}a_{r\theta} \frac{m}{R^3} + A^{(1)}a_{r\theta} \frac{1}{R} - C^{(1)}a_{rz}\tilde{\gamma} + D^{(1)} &= 0, \\ B'^{(1)} \left(\mu + \sigma_r^{0(1)} \right) \frac{1}{R_1} + B^{(1)} \left[-\mu(R_1 + 1) - \sigma_r^{0(1)} \right] \frac{1}{R_1^2} + A^{(1)}\mu n &= 0, \\ C'^{(1)} \left(\mu + \sigma_r^{0(1)} \right) + A^{(1)}\mu m &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Поскольку точное аналитическое решение краевой задачи (2.4.10)–(2.4.15) найти не удается, то, как и ранее, будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричной форме $(X_{ij})(Y_i) = 0$. Отсюда следует, что определение критических параметров ε (деформаций) сводится к разрешимости уравнения

$$\det(X_{ij}) = 0. \quad (2.4.16)$$

При вычислении определителя необходимо учитывать соотношения (2.4.5), (2.4.6), описывающие напряженно-деформируемое докритическое состояние. Минимизация должна проводить-

ся по шагу разностной сетки τ , параметрам волнообразования по контуру m и образующей n , параметрам материала оболочки и заполнителя λ_j и величине s . Таким образом, получаем задачу многомерию оптимизации величины ε в зависимости от s, m, n при условии

$$\Phi \equiv \det [X_{ij} (\varepsilon, s, m, n, \lambda_j)] = 0. \quad (2.4.17)$$

2.5. Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических массивах

Известно, что решения задач горной механики, относящихся к процессу бурения нефтяных и газовых скважин, сводятся к постановке и решению задач локальной неустойчивости пород приствольной зоны при упругопластических деформациях [15, 232, 233]. Это обусловлено тем, что вокруг вертикальных выработок и скважин напряжения уже на небольших глубинах до 1 км превосходят предел прочности горной породы, в результате она переходит в состояние неупругого деформирования раньше, чем происходит локальная потеря упругой устойчивости. Очевидно также, что для изучения проблемы устойчивости горных выработок необходимо применять более сложные модели, наиболее полно отражающие поведение горных пород [16]. В отличие от [15] ниже локальная неустойчивость пород приствольной зоны моделируется соотношениями сжимаемого упруговязкопластического тела с трансляционным упрочнением [140, 141, 223].

В этом случае функция нагружения (1.1.14) и соотношения ассоциированного закона течения имеют вид

$$F \equiv \alpha\sigma + \sqrt{\left(s_i^j - c\varepsilon_i^{p'j} - \eta e_i^{p'j}\right)\left(s_i^j - c\varepsilon_i^{p'j} - \eta e_i^{p'j}\right)} - \sqrt{2}K, \quad (2.5.1)$$

$$e_i^{pj} = \Psi\left(\frac{\alpha}{3}g_i^j + \frac{s_i^j - c\varepsilon_i^{p'j} - \eta e_i^{p'j}}{\sqrt{2}K - \alpha\sigma}\right), \quad K = \frac{k}{\sqrt{2}}, \quad (2.5.2)$$

которые следуют из (1.1.15) при $\Psi_1 = 0$. В соотношении (2.5.2) учитывается ассоциированная сжимаемость материала, связанная с возникновением в теле сдвиговых пластических деформаций.

Исследование устойчивости основного состояния тела объема V , характеризуемого вектором перемещения $\dot{u}_i (x_k, t)$, тензором напряжений $\dot{\sigma}_i^j (x_k, t)$, вектором объемных \dot{X}_i и поверхностных сил \dot{P}_i , сводятся к решению системы дифференциальных уравнений (1.5.11) в вариациях при соответствующих

граничных условиях (1.5.12) соответственно для области пластического и упругого деформирования.

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений в пластической $\overset{p}{V}$ и упругой $\overset{e}{V}$ областях представима в форме (1.5.1)

$$\sigma_j^i = a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_k g_j^i + (1 - g_j^i) \overset{p}{g}^{ji} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \quad \forall i, j. \quad (2.5.3)$$

При этом в пластической области коэффициенты $a_{i\alpha}$, G_j^i имеют вид (1.4.10), т. е.

$$a_{i\alpha} = \frac{E}{1 + \nu} \delta_{i\alpha} + \overset{\circ}{f}_{\alpha\alpha} B_{ii} + A_{ii}, \quad G_j^i = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad \forall i, \alpha. \quad (2.5.4)$$

Здесь A_{ij} и B_{ij} имеют вид (1.4.11), где $\Psi_1 = 0$. В упругой области коэффициенты $a_{i\alpha}$, G_j^i определяются соотношениями (2.5.4) при $A_{ij} = B_{ij} \equiv 0$, т. е.

$$a_{i\alpha} = (\lambda + 2\mu) g_{i\alpha}, \quad G_j^i = \mu. \quad (2.5.5)$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе. Заметим, что представление (2.5.3) возможно только в случае однородного докритического состояния или в случае зависимости его только от одной переменной.

Условия непрерывности на упругопластической границе имеют вид (1.5.13).

Приведенная система уравнений представляет собой замкнутую связную систему уравнений для исследования задач устойчивости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении.

Пусть круглая скважина, вертикально проведенная в массиве горных пород, заполнена жидкостью с удельным весом \bar{g} и испытывает давление на стеки $\bar{q} = \bar{g}h$ (h — глубина).

Давление \bar{q} называется противодавлением бурового раствора, препятствующим изменению формы и размеров поперечного сечения ствола скважин. Заменим горный массив со скважиной невесомой бесконечной плоскостью с круговым отверстием радиуса a , по контуру которого приложено равномерно распределенное давление \bar{q} . На бесконечности напряжения в пластине стремятся к gh , (g — удельный вес горной породы). Распределение напряжений в нетронутом массиве горных пород принимается гидростатическим: $p = gh$.

При определении компонент напряженно-деформируемого осевого состояния в осесимметричном случае все функции представляются в виде рядов по степени параметра α (скорости

дилатансии)

$$\left\{ \sigma_{ij}, \frac{p}{\varepsilon_{ij}}, \varepsilon_{ij}, \Psi, \dots \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left\{ \sigma_{ij}^{(n)}, \frac{p^{(n)}}{\varepsilon_{ij}^{(n)}}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \Psi^{(n)}, \dots \right\}. \quad (2.5.6)$$

Нулевое приближение соответствует несжимаемому упруго-вязкопластическому массиву в области $\overset{p}{V}$ и имеет следующий виД

в пластической области ($a^* < r < 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= -\bar{q} - \frac{\chi}{c + 2G} \left(4G \ln \frac{r}{a^*} + \frac{c}{a^{*2}} - \frac{c}{r^2} \right), \\ \varepsilon_{\theta}^{(0)} &= -\frac{\chi}{c + 2G} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) = -\varepsilon_r^{(0)}, \\ \sigma_{\theta}^{(0)} &= -\bar{q} - \frac{\chi}{c + 2G} \left(4G + 4G \ln \frac{r}{a^*} + \frac{c}{a^{*2}} + \frac{c}{r^2} \right), \\ u^{(0)} &= \frac{\chi}{2Gr}, \quad \chi = \operatorname{sign}(\bar{q} - p); \end{aligned}$$

в упругой области ($1 < r < \infty$)

$$\sigma_r^{(0)} = -p + \frac{\chi}{r^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)} = -p - \frac{\chi}{r^2}, \quad u^{(0)} = \frac{\chi}{2Gr}.$$

Здесь все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к $k = \sqrt{2}K/2$, а имеющие размерность длины — к радиусу $r_s^{(0)}$ упругопластической границы в нулевом приближении. Величина $a^* = a/r_s^{(0)}$ определяется из уравнения

$$|\bar{q} - p| (c + 2G) - 2G + 4G \ln a^* - \frac{c}{a^{*2}} = 0.$$

Первое приближение запишем в виде соотношений:
в пластической области ($a^* < r < 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= C_2 + \tilde{B} \ln r + \frac{\tilde{C}}{2r^2} + \tilde{D} (\ln r)^2 - \tilde{E} \left(\frac{\ln r}{2r^2} + \frac{1}{4r^2} \right), \\ \sigma_{\theta}^{(1)} &= C_2 + \tilde{B} \ln r + \tilde{B} + \frac{\tilde{C}}{2r^2} + \tilde{D} \ln r \left(\frac{1}{2} \ln r + 1 \right) - \\ &\quad - \tilde{E} \left(\frac{1}{4r^2} - \frac{\ln r}{2r^2} + \frac{1}{4r^2} \right), \\ u^{(1)} &= \frac{1}{c + 2G} \left(\frac{\ln r}{r} - \frac{r}{2} \right) + \frac{C_1}{r}; \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

в упругой области ($1 < r < \infty$)

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{C_3}{r^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(1)} = -\frac{C_3}{r^2}, \quad u^{(1)} = \frac{C_3}{2Gr}, \quad (2.5.8)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= 2\bar{q}A + A^2 + \frac{A^2c}{2a^{*2}} - 2A^2 \ln a^*, \\ \tilde{C} &= C_1Ac - \frac{Ac}{2c + 4G}, \quad \tilde{D} = 2A^2, \quad \tilde{E} = \frac{Ac}{2c + 4G}, \\ C_1 &= \left(2G + Ac \frac{1 - a^{*2}}{2a^{*2}}\right)^{-1} \left[\frac{G}{c + 2G} + \frac{Ac(1 - a^{*2})}{2a^{*2}(c + 2G)} + \tilde{B} \ln a^* - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{E} \left(\frac{\ln a^*}{2a^{*2}} - \frac{1}{4a^*} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\tilde{D}}{2} (\ln a^*)^2 \right], \\ C_2 &= -\frac{\tilde{C}}{2a^{*2}} - \tilde{B} \ln a^* + \tilde{E} \left(\frac{\ln a^*}{2a^{*2}} + \frac{1}{4a^*} \right) - \frac{\tilde{D}}{2} (\ln a^*)^2, \\ C_3 &= \frac{G}{c + 2G} - 2GC_1, \quad A = \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{f}_{ij}.\end{aligned}$$

Уравнение для радиуса r_{s1} пластинческой границы в первом приближении имеет вид

$$r_{s1} = \left. \frac{\left(\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)} \right)}{\left(d\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)}/dr \right) - \left(d\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)}/dr \right)} \right|_{r=1} = -\left. \frac{\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}^{(1)}}{8G} (c + 2G) \right|_{r=1}. \quad (2.5.9)$$

Для определения пулевого и первого приближений использованы уравнения равновесия, условие пластичности (2.5.1), соотношения ассоциированного закона пластического течения (2.5.2), соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации, общие уравнения теории упругости, граничные условия, а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях.

Таким образом, соотношения (2.5.7)–(2.5.9) определяют до-критическое напряженно-деформированное состояние задачи. Далее величины докритического состояния снабжаем верхним индексом «0».

Граничные условия на поверхности скважины $r = a$ в случае, когда \bar{q} — «следящая» нагрузка, согласно (1.5.18), где $\sigma = 0$, таковы:

$$\left. \left(a_{11}u_{,r} + \frac{a_{12}}{r}v_{,\theta} + \frac{a_{12}}{r}u + a_{13}w_{,z} \right) \right|_{r=a} = 0, \quad (2.5.10)$$

$$(rv_{,r} + u_{,\theta} - v)|_{r=a} = 0, \quad (w_{,r} + u_{,z})|_{r=a} = 0.$$

Условия затухания возмущений при $r \rightarrow \infty$ запишем в виде

$$u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0. \quad (2.5.11)$$

Условия сопряжения (1.5.13) на упругопластической границе r_s для амплитуд возмущений перемещений и напряжений,

согласно (2.5.3), принимают вид

$$\begin{aligned} [u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [w] = 0, \\ \left[\frac{a_{12}}{r} u + \left(a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \right) u_{,r} + \frac{a_{12}}{r} v_{,\theta} + a_{13} w_{,z} \right] = 0, \\ \left[G_3^1 u_{,z} + \left(G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \right) w_{,r} \right] = 0, \\ \left[G_2^1 u_{,\theta} + \left(G_2^1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_1^1 \right) v + \left(G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1 \right) r u_{,r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Если коэффициенты $a_{i\alpha}$, G_j^i линеаризованных уравнений состояния (2.5.3) есть функции одного аргумента r , тогда в квазистатической постановке линеаризованные уравнения равновесия (1.5.11) приводятся к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} u \left[\frac{1}{r} a_{12,1} - \frac{1}{r^2} (a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_\theta) \right] + u_{,r} \left[a_{11,1} + \frac{1}{r} (a_{12} + a_{11} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) \right] + u_{,rr} (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) + u_{,\theta\theta} \frac{1}{r^2} \left(G_1^2 + \frac{1}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) + u_{,zz} (G_1^3 + \overset{\circ}{\sigma}_z) + v_{,\theta} \left[\frac{1}{r} a_{12,1} - \frac{1}{r^2} \left(G_1^2 + a_{22} + \frac{2}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \right] + v_{,r\theta} \frac{1}{r} (G_1^2 + a_{12}) + w_{\theta\theta} \left[a_{13,1} + \frac{1}{r} (a_{13} - a_{23}) \right] + w_{,rz} (G_3^1 + a_{13}) = 0, \\ u_{,\theta} \left[G_{2,1}^1 + \frac{1}{r} \left(a_{22} + G_1^2 + \frac{2}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \right] + u_{,r\theta} (a_{21} + G_2^1) + v \left[-G_{2,1}^1 - \frac{1}{r} \left(G_1^2 + \frac{1}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \right] + v_{,rr} (G_{2,1}^1 + G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) + v_{,rrr} (G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) + v_{,\theta\theta} \frac{1}{r} \left(a_{22} + \frac{1}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) + v_{,zz} r (G_2^3 + \overset{\circ}{\sigma}_r) + w_{,\theta z} (G_2^3 + a_{23}) = 0, \\ u_{,z} \left[G_{3,1}^1 + \frac{1}{r} (a_{32} + G_3^1) \right] + u_{,rz} (a_{31} + G_3^1) + v_{,\theta z} \frac{1}{r} (a_{32} + G_3^2) + w_{,r} \left[G_{3,1}^1 + \frac{1}{r} (G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_r + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}) \right] + w_{,rr} (G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_r) + w_{,\theta\theta} \frac{1}{r^2} \left(G_3^2 + \frac{1}{r^2} \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) + w_{,zz} (a_{33} + \overset{\circ}{\sigma}_z) = 0. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Очевидно, эти линеаризованные уравнения равновесия принимают вид уравнений (1.5.16) при a_{ij} и G_{ij} , не зависящих от аргумента r .

В области пластического деформирования коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются выражениями (2.5.4), а в области упругого деформировання выражениями (2.5.5).

Решение уравнений (2.5.13) будем искать в виде

$$u = \overset{p}{A}(r) \cos(m\theta) \cos(nz),$$

$$v = \overset{p}{B}(r) \sin(m\theta) \cos(nz),$$

$$w = \overset{p}{C}(r) \cos(m\theta) \sin(nz),$$

где m, n — параметры волнообразования.

Систему уравнений (2.5.13) в терминах функций $\overset{p}{A}(r), \overset{p}{B}(r), \overset{p}{C}(r)$ в области пластического деформирования $\overset{p}{V}$, запишем следующим образом:

$$\overset{p}{A}\xi_1 + \overset{p}{A}'\xi_2 + \overset{p}{A}''\xi_3 + \overset{p}{B}\xi_4 + \overset{p}{B}''\xi_5 + \overset{p}{C}\xi_6 + \overset{p}{C}'\xi_7 = 0,$$

$$\overset{p}{A}\xi_8 + \overset{p}{A}'\xi_9 + \overset{p}{B}\xi_{10} + \overset{p}{B}'\xi_{11} + \overset{p}{B}''\xi_{12} + \overset{p}{C}\xi_{13} = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\overset{p}{A}\xi_{14} + \overset{p}{A}'\xi_{15} + \overset{p}{B}\xi_{16} + \overset{p}{C}\xi_{17} + \overset{p}{C}'\xi_{18} + \overset{p}{C}''\xi_{19} = 0.$$

Для области упругого деформирования $\overset{e}{V}$ в системе уравнений (2.5.14) функции $\overset{p}{A}, \overset{p}{B}, \overset{p}{C}$ необходимо заменить на $\overset{e}{A}, \overset{e}{B}, \overset{e}{C}$.

Границные условия (2.5.10) при $r = a$ запишутся так

$$\begin{aligned} \overset{p}{A}a_{12} \frac{1}{r} + \overset{p}{A}'a_{11} + \overset{p}{B} \frac{ma_{12}}{r} + \overset{p}{C}na_{13} = 0, \\ \overset{p}{A}m + \overset{p}{B} - \overset{p}{B}'r = 0, \quad \overset{p}{A}n - \overset{p}{C}' = 0, \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

а условия затухания возмущений (2.5.11) при $r \rightarrow \infty$ принимают вид

$$\overset{e}{A}(r) \rightarrow 0, \quad \overset{e}{B}(r) \rightarrow 0, \quad \overset{e}{C}(r) \rightarrow 0. \quad (2.5.16)$$

Нам осталось только привести условия сопряжения (2.5.12) на упруго-пластической границе r_s :

$$\begin{aligned} A \frac{a_{12}}{r} + A' \left(a_{11} + \overset{o}{\sigma}_1^1 \right) + B \frac{ma_{12}}{r} + Cna_{13} = 0, \\ -AmG_2^1 + B \left(2\overset{o}{\sigma}_1^1 - G_2^1 \right) + B'r \left(G_2^1 + \overset{o}{\sigma}_1^1 \right) = 0, \\ -AnG_3^1 + C' \left(G_3^1 + \overset{o}{\sigma}_1^1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

В соотношениях (2.5.14)–(2.5.17) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{a_{12,1}}{r} - \frac{a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} \left(G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \right) - n^2 \left(G_1^3 + \overset{\circ}{\sigma}_3^3 \right), \\
 \xi_2 &= a_{11,1} + \frac{a_{12} + a_{11} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r}, \quad \xi_3 = a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_1^1, \\
 \xi_4 &= m \left(\frac{a_{12,1}}{r} - \frac{G_1^2 + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r^2} \right), \quad \xi_5 = \frac{m}{r} \left(G_1^2 + a_{12} \right), \\
 \xi_6 &= n \left(a_{13,1} + \frac{a_{13} - a_{23}}{r} \right), \quad \xi_7 = n \left(G_3^1 + a_{13} \right), \\
 \xi_8 &= m \left(\frac{G_1^2 + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} \right), \quad \xi_9 = -m \left(G_1^2 + a_{21} \right), \\
 \xi_{10} &= - \left[\frac{G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} + m^2 \frac{a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} + n^2 r \left(G_2^3 + \overset{\circ}{\sigma}_3^3 \right) \right], \\
 \xi_{11} &= G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2, \quad \xi_{12} = r \left(G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2 \right), \\
 \xi_{13} &= -mn \left(a_{23} + G_2^3 \right), \\
 \xi_{14} &= -n \left(\frac{G_3^1 + a_{32}}{r} \right), \quad \xi_{15} = -n \left(G_3^1 + a_{31} \right), \\
 \xi_{16} &= -\frac{mn}{r} \left(G_3^2 + a_{32} \right), \\
 \xi_{17} &= -\frac{m^2}{r} \left(\overset{\circ}{\sigma}_2^2 + G_3^2 \right) - n^2 \left(\overset{\circ}{\sigma}_3^3 + a_{23} \right), \\
 \xi_{18} &= G_{3,1}^1 + \frac{G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r}, \quad \xi_{19} = G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1.
 \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Для коэффициентов ξ_i ($i = 1$ – 17) в области V значения $\overset{\circ}{\sigma}_r$, $\overset{\circ}{\sigma}_\theta$, $\overset{\circ}{\sigma}_z$ определяются по формулам (2.5.7), a_{ij} и G_j^i – по (2.5.4), в области $\overset{e}{V}$ по формулам (2.5.8) и (2.5.5) соответственно.

Точное аналитическое решение связной краевой задачи (2.5.14)–(2.5.18) найти не удается, будем искать приближенное решение методом конечных разностей. Метод основан на замене производных от функций $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ конечно-разностными выражениями. В результате получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричной форме: $(X_{ij})(Y_i) = (0)$. Отсюда следует, что определение критических параметров (нагрузок) сводится к разрешимости матричного уравнения

$$\Phi \equiv \det(X_{ij}) = 0. \tag{2.5.19}$$

При вычислении определителя, наряду с соотношениями (2.5.7), (2.5.8), определяющими докритическое напряженно-деформированное состояние каждой области, необходимо учитывать и уравнение (2.5.9), определяющее положение упругопластической границы. Минимизация должна проводиться по шагу разностной сетки τ , параметрам волнобразования по контуру m и образующей n , параметрам материала и конструкции λ_j и величине s . Таким образом, как и в предыдущем параграфе, получаем задачу многомерной оптимизации величины давления \bar{q} в зависимости от s, m, n при условии $\Phi(\bar{q}, s, m, n, \lambda_j) = 0$.

Задача определения критической нагрузки при фиксированных значениях h и параметрах λ_j решалась в два этапа. На первом этапе определялась область в пространстве параметров \bar{q}, s, m, n , в которой происходит смена знака функции $\Phi(\bar{q}, s, m, n, h, \lambda_j)$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \bar{q} < 1$, $m, n = 1, 2, \dots$, на втором, согласно (2.5.19), вычисляется значение $\bar{q}_* = \min_{s, m, n} \bar{q}(s, m, n)$, при котором $\Phi(\bar{q}_*, s_*, m_*, n_*, h, \lambda_j) = 0$. Оптимизация по параметру τ проводилась следующим образом. Вычисление критической нагрузки прекращается, если после уменьшения шага разностной сетки в 2 раза получаемые значения нагрузки отличаются друг от друга с заданной точностью. Результаты численного эксперимента приведены на рисунках 2.5.1–2.5.3.

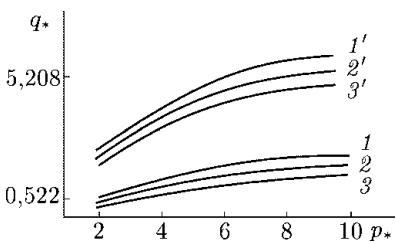


Рис. 2.5.1

$3, 3' - \alpha = 0,8$. С ростом гравитационного параметра величина критического давления увеличивается, с ростом коэффициента Пуассона она увеличивается на 10–15 %.

На рис. 2.5.2 представлена зависимость критического значения гравитационного параметра p_* для свободной выработки (значения нагрузки на бесконечности, при котором свободная выработка начинает терять устойчивость) от скорости дилатации α при $E/k = 100$, $c_0 = 0,1$, $\nu = 0,3$ (кривая 1 соответствует значению $\eta_0 = 0,1$; 2 – $\eta_0 = 0,001$). Как следует из рис. 2.5.2, критическая нагрузка при увеличении вязкости возрастает, т. е. вязкость увеличивает область неустойчивости, в этом смысле можно говорить о дестабилизирующей роли вязкости в среде.

На рис. 2.5.3 приведена зависимость отношения радиуса упругопластической границы R к радиусу выработки R_0 от гравитационного параметра p_* для свободной выработки. Кривым 1–5 соответствуют значения $\alpha = 0,70; 0,55; 0,40; 0,25; 0,10$ при $E/k = 100$, $\eta_0 = 0,1$, $c_0 = 0,1$, $\nu = 0,3$. Видно, что радиус

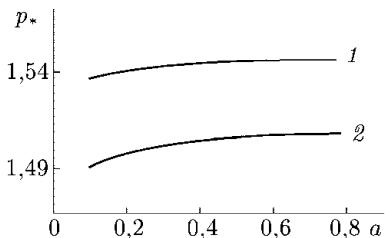


Рис. 2.5.2

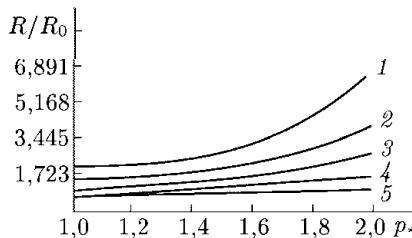


Рис. 2.5.3

упругопластической границы возрастает с ростом гравитационного параметра и увеличением скорости дилатансии. Кривые на приведенных рисунках отвечают безразмерным значениям механических параметров материалов, близких по свойствам к горным породам аллгериту и углю.

Г л а в а 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С МНОГОСЛОЙНЫМИ КРЕПЯМИ

В настоящее время в большинстве случаев добыча и хранение ряда полезных ископаемых продолжительное время ведется в одних и тех же месторождениях. В связи с этим возникают требования по проведению укрепительных работ подземных сооружений, в частности, горных выработок, для безопасности условий труда. Указанное требование обеспечивается, как правило, тем, что в выработках возводится крепь. Крепь может быть монолитной (однослоиной) и разномодульной (многослойной). Использование многослойных крепей позволяет учитывать требования экономического характера по расходу материала — с одной стороны, и обеспечивать более надежную эксплуатацию — с другой. Учитывая вышесказанное, проведенные в этой главе моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния массива возле горных выработок и многослойных крепей выработок имеют большое практическое значение. При изложении материала используются результаты, приведенные в работах [68–71, 152, 189, 232, 233, 244, 257, 283, 285].

3.1. Уравнения, определяющие процесс деформирования упругопластических сред

Как и прежде будем считать реальную горную породу сплошной средой и использовать для описания напряженно-деформированного состояния следующие системы координат: произвольную криволинейную, цилиндрическую и сферическую.

Напряженное докритическое состояние будем определять в рамках геометрически линейной теории (1.1.1) (1.1.7), т. е. в рамках следующих соотношений:

уравнения равновесия

$$\nabla_\beta \sigma_j^\beta = 0, \quad (3.1.1)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_j^\beta = \frac{1}{2} \left(\nabla^\beta u_j + \nabla_j u^\beta \right), \quad (3.1.2)$$

где ∇_β , ∇^β — ковариантная и контравариантная производная по β -й координате;

смешанные граничные условия
на части поверхности S_1 в напряжениях

$$N_\beta \sigma_j^\beta = P_j, \quad (3.1.3)$$

на другой части S_2 в перемещениях

$$u_\beta = U_\beta. \quad (3.1.4)$$

Здесь, как и ранее в гл. 1, N_β — компоненты орта нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии; P_j , U_β — составляющие поверхностных сил и перемещений соответственно.

На поверхности S внутри тела, разделяющей упругую и пластическую зоны, все компоненты тензора деформаций и напряжений предполагаются непрерывными, т. е. выполняются условие сплошности среды, что равносильно непрерывности компонент вектора перемещений

$$[u_\beta]|_S = 0 \quad (3.1.5)$$

и вектора поверхностных сил

$$\left[N_\beta \sigma_j^\beta \right]|_S = 0. \quad (3.1.6)$$

Здесь, по-прежнему, квадратные скобки обозначают разность значений выражений, соответствующих упругой и пластической области.

Присоединяя к уравнениям линейной теории (3.1.1)–(3.1.6) уравнения состояния в зоне упругости и, соответственно, в зоне пластического деформирования среды, получим замкнутую математическую задачу.

Связь между напряжениями и деформациями в упругой зоне будем определять законом Гука:

$$\sigma_j^\beta = \lambda \varepsilon_\alpha^\alpha g_j^\beta + 2G \varepsilon_j^\beta, \quad (3.1.7)$$

или, что то же самое, в форме

$$\varepsilon_j^\beta = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_j^\beta - \nu g_j^\beta \sigma_\alpha^\alpha \right], \quad (3.1.8)$$

где λ , $G = \mu$ — параметры Ламе, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, причем

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.1.9)$$

В зоне пластического деформирования горного массива и крепи, следуя [141], используем модель несжимаемой упруго-пластической среды с трансляционным упрочнением с поверхностью нагружения (1.1.12), т. е.

$$F = \left(s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta \right) \left(s_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j \right) - k^2 = 0, \quad (3.1.10)$$

где c, k — параметры среды. Здесь и далее индексы « p » и « e » вверху обозначают принадлежность величин к пластической или упругой области соответственно. Для несжимаемой среды выполняется условие

$$\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (3.1.11)$$

Допустим возможность представления тензора полных деформаций в виде

$$\varepsilon_j^{\beta} = \overset{p}{\varepsilon}_j^{\beta} + \overset{e}{\varepsilon}_j^{\beta} \quad (3.1.12)$$

Ассоциированный закон течения для условия (3.1.10) имеет вид

$$\overset{p}{\varepsilon}_j^{\beta} = \Psi \left(s_j^{\beta} - c \overset{p}{\varepsilon}_j^{\beta} \right). \quad (3.1.13)$$

Причем $\overset{p}{\varepsilon}_j^{\beta} = 0$, если $F < 0$ или же $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial \sigma_j^{\beta}} d\sigma_j^{\beta} \leq 0$.

Для удобства дальнейших вычислений запишем уравнения равновесия (3.1.1) и формулы Коши в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Главные значения симметричных тензоров $\overset{p}{\varepsilon}_j^{\beta}$, $\overset{e}{\varepsilon}_j^{\beta}$ будем обозначать символами σ_{α} , ε_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$).

Приведенная система уравнений (3.1.1)–(3.1.13), которая должна применяться как для зоны упругого ($\overset{p}{V}$), так и пластического ($\overset{e}{V}$) деформирования, представляет собой математическую задачу, которая далее будет положена в основу определения напряженно-деформированного состояния в горном массиве и крепи. Постоянные v, k, c, E для массива горных пород и крепи различны.

3.2. Математическая модель горного массива с выработкой и определение напряжений в многослойных крепях вертикальных и горизонтальных выработок

Моделируя горный массив с выработкой, подкрепленный многослойной (N -слойной) крепью, как это обычно делается, невесомой бесконечной пластиной с круговым отверстием радиуса R_N , в которое с некоторым натягом помещена система из N колец (слои крепи), последовательно запрессованных одно в другое. К внутреннему контуру первого кольца радиуса R_0 приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 . На линиях сопряжения колец и пластины возникают сжимающие усилия q_1, q_2, \dots, q_N . Будем считать, что величины q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры колец. На бесконечности напряжения в пластине стремятся к величине gh (g — объемный вес породы, h — глубина заложения выработки); рис. 3.2.1.

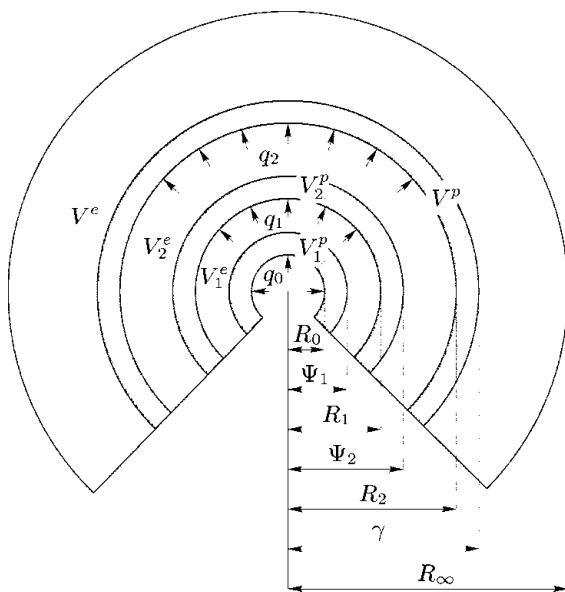


Рис. 3.2.1

Так как горный массив моделируется бесконечной пластиной, то компонентами тензора напряжений $\sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_{rz}$ можно пренебречь, положив равными нулю. Компоненты $\sigma_{r\theta} = 0$ в силу отсутствия закручивания. Оставшиеся компоненты σ_r и σ_θ можно заменить их средними значениями по толщине,

т. е. $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$. Толщина пластины в этом случае не имеет значения, поэтому в дальнейшем она принимается равной единице. Для осесимметричной задачи все компоненты тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений не зависят от угла поворота θ . С учетом вышесказанного из трех уравнений равновесия (3.1.14) остается одно

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.2.1)$$

Соотношения Коши (3.1.15) перепишутся в виде

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zr} = 0. \quad (3.2.2)$$

Условие несжимаемости (3.1.11) примет вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (3.2.3)$$

Используя закон Гука (3.1.7), находим

$$\sigma_\alpha^\alpha = \varepsilon_\alpha^\alpha (\lambda g_\alpha^\alpha + 2G),$$

тогда

$$\sigma_j^\beta = \lambda \frac{\sigma_\alpha^\alpha}{3\lambda + 2G} g_j^\beta + 2G \varepsilon_j^\beta.$$

Учитывая условие несжимаемости, запишем

$$s_j^\beta = \sigma_j^\beta - \frac{1}{3} \sigma_\alpha^\alpha g_j^\beta = 2G \varepsilon_j^\beta. \quad (3.2.4)$$

Из (3.2.1) с учетом (3.1.15) получим

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2G (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta), \quad \sigma_r + \sigma_\theta = 6G (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \quad (3.2.5)$$

Тогда

$$\sigma_r = 2G (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \quad (3.2.6)$$

Подставляя σ_r в уравнение равновесия (3.2.1) и используя соотношения Коши (3.2.2), приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно перемещений u_r :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) = 0, \quad (3.2.7)$$

решая которое, находим

$$u_r = A_1 r + \frac{B_1}{r}, \quad (3.2.8)$$

Здесь A_1 и B_1 есть константы интегрирования. В этом случае компоненты тензора деформаций примут вид

$$\varepsilon_r = A_1 - \frac{B_1}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = A_1 + \frac{B_1}{r^2}, \quad \varepsilon_z = -2A_1. \quad (3.2.9)$$

Рассмотрим вопрос о концентрации напряжений в i -м слое крепи, т. е. в i -м кольце. Здесь и далее индекс i обозначает принадлежность величины к i -му слою крепи, причем $i = 1, 2, \dots, N$.

Найдем область зарождения пластической зоны в i -м кольце. Для этого исследуем вместо s_r, s_θ, s_z их выражения через σ_r и σ_θ , определенные в процессе решения указанной выше задачи. В результате получим $(T_1/r^4) + T_2 = k^2$, где T_1 и T_2 константы вычислений. Введем обозначение $f(r) = (T_1/r^4) + T_2$, тогда $f'(r) = -\frac{4T_1}{r^5}$, где $T_1 = \frac{2(q_{i-1} - q_i)^2}{(1/R_{i-1}^2 - 1/R_i^2)^2}$.

Так как константа T_1 всегда положительная величина, то $f'(r) < 0$ при любых значениях r , а, следовательно, зарождение пластической области начинается с внутреннего контура кольца.

Будем считать, что под действием данных нагрузок пластическая зона целиком охватывает внутренний контур i -го кольца ($i = 1, 2, \dots, N$) и в ней реализуется обобщенное плоское напряженно-деформированное состояние.

Из условия несжимаемости (3.2.3) и соотношения Коши (3.2.2) находим

$$(u_r)_i = \frac{A_2^i}{r}, \quad (\varepsilon_r)_i = -(\varepsilon_\theta)_i = \frac{A_2^i}{r^2}, \quad (3.2.10)$$

где A_2^i ($i = 1, 2, \dots, N$) — константы интегрирования. Тогда из ассоциированного закона пластического течения (3.1.13) следует, что

$$(s_r)_i = - (s_\theta)_i. \quad (3.2.11)$$

Подставив (3.2.11) в условие пластиичности (3.1.10) приходим к следующей записи функции нагружения:

$$2 \left[(s_r)_i - c_i \left(\frac{p}{\varepsilon_r} \right)_i \right]^2 = k_i^2, \quad (3.2.12)$$

где c_i, k_i — параметры материала для i -го слоя крепи. Учитывая, что $(s_r)_i = 2G \left[(\varepsilon_r)_i - \left(\frac{p}{\varepsilon_r} \right)_i \right]$, а так же (3.2.10) и (3.2.12) найдем

$$\left(\frac{p}{\varepsilon_r} \right)_i = - \frac{k_i r^2 + 2\sqrt{2} G A_2^i}{r^2 \sqrt{2} (2G + c_i)}. \quad (3.2.13)$$

Вычисляя

$$(\sigma_r)_i - (\sigma_\theta)_i = (s_r)_i - (s_\theta)_i = 2(s_r)_i = 4G \left[(\varepsilon_r)_i - \left(\frac{p}{\varepsilon_r} \right)_i \right],$$

из уравнения равновесия (3.2.1) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\sigma_r}\right)_i &= \frac{2GA_2^i}{r^2} \left(\frac{2G}{2G+c_i} - 1\right) - \frac{2\sqrt{2}Gk_i}{2G+c_i} \ln r + D_1^i, \\ \left(\frac{p}{\sigma_\theta}\right)_i &= \frac{2GA_2^i}{r^2} \left(1 - \frac{2G}{2G+c_i}\right) - \frac{2\sqrt{2}Gk_i}{2G+c_i} (\ln r + 1) + D_1^i. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

В упругой области i -го кольца с помощью закона Гука получим следующие выражения:

$$\left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i = -2GB_1^i \frac{1}{r^2} + C_1^i, \quad \left(\frac{e}{\sigma_\theta}\right)_i = 2GB_1^i \frac{1}{r^2} + C_1^i. \quad (3.2.15)$$

Перемещения и деформации определяются из (3.2.8) и (3.2.9).

На границе раздела упругой и пластической областей i -го слоя крепи ($i = 1, 2, \dots, N$) перемещения не должны терпеть разрыв, т. е. $(u_r)_i^e - (u_r)_i^p = 0$. Откуда следует условие: $A_1^i r + (B_1^i - A_2^i) / r = 0$.

Из закона Гука (3.1.8) и из формул (3.1.9) выразим константу A_1^i через C_1^i при этом учитывая, что коэффициент Пуассона $v = 1/2$. Имеем $A_1^i = C_1^i / (6G)$ $i = 1, 2, \dots, N$. Оставшиеся константы интегрирования B_1^i , C_1^i , A_2^i , D_1^i и радиус границы раздела упругопластической области ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) найдем согласно (3.1.3), (3.1.5) и (3.1.6) из следующей системы граничных условий

- 1) $\left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i = -q_{i-1}$, при $r = R_{i-1}$;
- 2) $\left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i = -q_i$, при $r = R_i$;
- 3) $\left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i - \left(\frac{p}{\sigma_r}\right)_i = 0$, при $r = \psi_i$;
- 4) $\left(\frac{e}{\sigma_\theta}\right)_i - \left(\frac{p}{\sigma_\theta}\right)_i = 0$, при $r = \psi_i$;
- 5) $\left(\frac{e}{u_r}\right)_i - \left(\frac{p}{u_r}\right)_i = 0$, при $r = \psi_i$.

Здесь $i = 1, 2, \dots, N$.

Привлекая соотношения (3.2.14), (3.2.15) из системы уравнений (3.2.16), получим

$$\begin{aligned} B_1^i &= -\frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i q_i / G)}{2G(6R_i^2 - c_i \xi_i^2 / G)}, \quad C_1^i = 2GB_1^i \frac{1}{R_i^2} - q_i, \\ A_2^i &= B_1^i \left(1 + \frac{\psi_i^2}{3R_i^2}\right) - \frac{q_i \psi_i^2}{6G}, \\ D_1^i &= -q_{i-1} + \frac{2c_i}{R_{i-1}^2 (2 + c_i / G)} A_2^i + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i / G} \ln R_{i-1}. \end{aligned}$$

Уравнение для определения ψ_i запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{c_i}{2 + c_i/G} \left(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \frac{q_i \psi_i^2}{3G} - \frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i q_i/G)}{6R_i^2 - c_i \psi_i^2/G} \times \\ & \times \left[\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_i^2} - \frac{c_i}{2G + c_i} \left(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \left(\frac{\psi_i^2}{3R_i^2} + 1 \right) \right] + \\ & + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i/G} \left(\ln \frac{\psi_i}{R_{i-1}} + 1 \right) + q_{i-1} - q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Далее запишем все соотношения, соответствующие области i -го слоя крепи, в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к модулю сдвига горного массива G , а имеющие размерность длины — к внешнему радиусу первого слоя крепи R_1 :

$$\begin{aligned} \left(\overset{*}{\sigma}_j^\alpha \right)_i &= \frac{(\sigma_j^\alpha)_i}{G}, \quad \overset{*}{c}_i = \frac{c_i}{G}, \quad \overset{*}{k}_i = \frac{k_i}{G}, \quad \overset{*}{q}_i = \frac{q_i}{G}, \\ \overset{*}{\psi}_i &= \frac{\psi_i}{R_1}, \quad \overset{*}{R}_i = \frac{R_i}{R_1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Для упрощения записи знак «*» в дальнейшем опустим.

Тогда докритическое напряженно-деформированное состояние, соответствующее i -му слою ($i = 1, 2, \dots, N$) крепи вертикальной (горизонтальной) горной выработки в безразмерном виде запишется в следующей форме:

в пластической области ($R_{i-1} < r < \psi_i$)

$$\begin{aligned} \left(\overset{p}{u}_r \right)_i &= \frac{A_2^i}{r}, \quad \left(\overset{p}{\varepsilon}_r \right)_i = - \left(\overset{p}{\varepsilon}_\theta \right)_i = - \frac{k_i r^2 + 2\sqrt{2}A_2^i}{r^2 \sqrt{2} (2 + c_i)} \\ \left(\overset{p}{\sigma}_r \right)_i &= \frac{2c_i A_2^i}{2 + c_i} \left(\frac{1}{R_{i-1}^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i} \ln \frac{R_{i-1}}{r} - q_{i-1}, \\ \left(\overset{p}{\sigma}_\theta \right)_i &= \frac{2c_i A_2^i}{2 + c_i} \left(\frac{1}{R_{i-1}^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i} \left(\ln \frac{R_{i-1}}{r} - 1 \right) - q_{i-1}, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

в упругой области ($\psi_i < r < R_i$)

$$\begin{aligned} \left(\overset{e}{u}_r \right)_i &= B_1^i \left(\frac{r}{3} + \frac{1}{r} \right) - \frac{rq_i}{6}, \\ \left(\overset{e}{\sigma}_r \right)_i &= 2B_1^i \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) - q_i, \\ \left(\overset{e}{\sigma}_\theta \right)_i &= 2B_1^i \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - q_i, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

где

$$B_1^i = - \frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i q_i)}{2(6 - c_i \psi_i^2)}, \quad A_2^i = B_1^i \left(1 + \frac{\psi_i^2}{3R_i^2} \right) - \frac{q_i \psi_i^2}{6}.$$

Уравнения для определения радиуса ψ_i упругопластической границы в i -м кольце имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{c_i}{2+c_i} \left(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \frac{q_i \psi_i^2}{3} - \frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i k_i)}{6R_i^2 - c_i \psi_i^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_i^2} - \frac{c_i}{2+c_i} \left(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \left(\frac{\psi_i^2}{3R_i^2} + 1 \right) \right] + \\ + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2+c_i} \left(\ln \frac{\psi_i}{R_{i-1}} + 1 \right) + q_{i-1} - q_i = 0. \quad (3.2.20) \end{aligned}$$

В соотношениях (3.2.18)–(3.2.20) $i = 1, 2, \dots, N$.

Решения, приведенные в этом параграфе для многослойной крепи вертикальной (горизонтальной) горной выработки позволяют перейти к нахождению напряженно-деформированного (докритического) состояния в горном массиве возле выработки.

3.3. Математическая модель горного массива вне области выработки и определение напряжений в массиве возле подкрепленных вертикальных и горизонтальных выработок

Как и ранее, горный массив вне области вертикальной (горизонтальной) выработки моделируем невесомой бесконечной пластиной с круговым отверстием радиуса R_N , по периметру которого приложена равномерно распределенная нагрузка q_N .

Рассмотрим упругую область пластины (массива). Устремим $r \rightarrow \infty$, тогда из (3.2.8) следует, что $A_1 = 0$. Следовательно, $u_r^e = \frac{B_1}{r}$. С учетом того, что в пластической области выполняется условие $\varepsilon_z^p = 0$, находим $u_r^p = \frac{A_2}{r}$. Теперь из условия сплошности (3.1.5) будет следовать, что $B_1 = A_2$. Для упругой области ($\gamma < r < \infty$) решения будут иметь вид (3.2.15). Для пластической области справедливы решения:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon_r} = -\frac{p}{\varepsilon_\theta} = -\frac{2\sqrt{2}GB_1 - kr^2}{r^2\sqrt{2}(2G+c)}, \\ \sigma_r = \frac{2GB_1}{r^2} \left(\frac{2G}{2G+c} - 1 \right) + \frac{2\sqrt{2}Gk}{2G+c} \ln r + D_1, \\ \frac{p}{\sigma_\theta} = \frac{2GB_1}{r^2} \left(1 - \frac{2G}{2G+c} \right) + \frac{2\sqrt{2}Gk}{2G+c} (\ln r + 1) + D_1. \quad (3.3.1) \end{aligned}$$

Константы интегрирования B_1 , C_1 , D_1 , а также уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ найдем из

граничных условий (3.1.3), условий непрерывности вектора поверхности сил на поверхности тела, разделяющей упругую и пластическую зоны, (3.1.6) и условия на бесконечности:

- 1) $\overset{p}{\sigma}_r = -q_N$ при $r = R_N$;
- 2) $\overset{e}{\sigma}_r = -g\overset{\circ}{h}$ при $r \rightarrow \infty$;
- 3) $\overset{e}{\sigma}_r - \overset{p}{\sigma}_r = 0$ при $r = \gamma$;
- 4) $\overset{e}{\sigma}_\theta - \overset{p}{\sigma}_\theta = 0$ при $r = \gamma$.

Привлекая соотношения (3.2.15), (3.3.1) из (3.3.2) получим

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}k\gamma^2}{4G}, \quad C_1 = -gh,$$

$$D_1 = -q_N + \frac{2GB_1}{R_N^2} \left(1 - \frac{2G}{2G + c} \right) - \frac{2\sqrt{2}Gk}{2G + c} \ln R_N,$$

$$q_N + gh - \frac{\sqrt{2}kG}{2R_N^2(2G + c)} \left(4R_N^2 \ln \frac{\gamma}{R_N} + 2R_N^2 + \frac{c}{G}\gamma^2 \right) = 0.$$

Таким образом решения, соответствующие области горного массива (пластины) в безразмерном виде запишем в следующей форме:

в пластической области ($R_N < r < \gamma$)

$$\overset{p}{u}_r = \frac{B_1}{r}, \quad \overset{p}{\varepsilon}_r = -\overset{p}{\varepsilon}_\theta = -\frac{2\sqrt{2}B_1 - kr^2}{r^2\sqrt{2}(2 + c)},$$

$$\overset{p}{\sigma}_r = \frac{2B_1c}{2 + c} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k}{2 + c} \ln r - q_N,$$

$$\overset{p}{\sigma}_\theta = \frac{2B_1c}{2 + c} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k}{2 + c} (\ln r + 1) - q_N;$$

в упругой области ($\gamma < r < \infty$)

$$\overset{e}{\sigma}_r = -\frac{2B_1}{r^2} - gh, \quad \overset{e}{\sigma}_\theta = \frac{2B_1}{r^2} - gh, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2}k\gamma^2}{4}. \quad (3.3.4)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ имеет вид

$$q_N + gh - \frac{\sqrt{2}k}{2(2 + c)} \left[4 \ln \frac{\gamma}{R_N} + 2 + c \left(\frac{\gamma}{R_N} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.3.5)$$

В соотношениях (3.3.3)–(3.3.5) величины, имеющие размерность напряжений отнесем к модулю сдвига горного массива G , а имеющие размерность длины — к внешнему радиусу первого слоя крепи R_1 , c — коэффициент упрочнения и предел текучести для материала массива.

3.4. Определение поля напряжений в горном массиве, содержащем сферическую выработку, подкрепленную многослойной крепью

Напряженно-деформированное состояние, соответствующее i -му слою ($i = 1, 2, \dots, N$) многослойной крепи сферической выработки в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) в сферической системе координат (r, θ, φ) , определено, следуя [257], в виде:

в пластической области при $R_{i-1} < r < \psi_i$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{u_r}\right)_i &= \frac{A_2^i}{r^2}, \quad \left(\frac{p}{\varepsilon_r}\right)_i = -2 \left(\frac{p}{\varepsilon_r}\right)_i = -\frac{k_i}{2G_i + c_i} (1 - \psi_i^3 r^{-3}), \\ \left(\frac{p}{\sigma_r}\right)_i &= -\frac{G_i}{2G_i + c_i} (4c_i r^{-3} A_2^i + 6k_i \ln r) + B_2^i, \\ \left(\frac{p}{\sigma_\theta}\right)_i &= \left(\frac{p}{\sigma_r}\right)_i + \frac{3G_i}{2G_i + c_i} (2c_i r^{-3} A_2^i - k_i); \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

в упругой области при $\psi_i < r < R_i$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{u_r}\right)_i &= A_1^i r^{-2}, \quad \left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i = B_1^i - 4G_i r^{-3} A_1^i, \\ \left(\frac{e}{\sigma_\theta}\right)_i &= B_1^i - 2G_i r^{-3} A_1^i. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Неизвестные константы интегрирования A_1^i , A_2^i , B_1^i и B_2^i ($i = 1, 2, \dots, N$) и радиус упругопластической границы ψ_i найдем из следующих граничных условий для $i = 1, 2, \dots, N$:

- 1) $\left(\frac{p}{\sigma_r}\right)_i = -q_{i-1}$ при $r = R_{i-1}$;
- 2) $\left(\frac{e}{\sigma_r}\right)_i = -q_i$ при $r = R_i$.

Откуда, учитывая (3.4.1), (3.4.2), а также условия (3.1.5), (3.1.6) непрерывности решений на поверхности раздела ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) упругой и пластической областей, получим

$$\begin{aligned} A_1^i &= A_2^i = \frac{3k_i \psi_i^3}{4(c_i - G_i)} \quad B_1^i = -q_i + 4G_i R_i^{-3} A_1^i, \\ B_2^i &= \frac{G_i}{2G_i + c_i} (4c_i R_{i-1}^{-3} A_1^i - 6k_i \ln R_{i-1}) - q_{i-1}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы ψ_i имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{3k_i G_i}{c_i - G_i} \left(\frac{\psi_i^3}{R_i^3} - 1 \right) + \frac{G_i}{c_i + 2G_i} \left\{ \frac{3k_i c_i}{c_i - G_i} \left(1 - \frac{\psi_i^3}{R_i^3} \right) + 6k_i \ln \left(\frac{\psi_i}{R_i} \right) \right\} + \\ + q_{i-1} - q_i = 0. \quad (3.4.4) \end{aligned}$$

Соотношения (3.4.1) и (3.4.2) будут справедливы и для области массива (упругой и пластической), если в них у всех величин опустить индекс i , величину ψ_i заменить на γ , R_{i-1} на R_N и положить: $R_i = \infty$, $G_i = 1$. При этом неизвестные константы интегрирования и радиус упругопластической границы γ найдем из следующих граничных условий, условия на бесконечности и условий сопряжения решений:

- 1) $\overset{p}{\sigma}_r = -q_N$ при $r = R_N$,
- 2) $\overset{e}{\sigma}_r = \overset{e}{\sigma}_\theta = -gh$ при $r \rightarrow \infty$,
- 3) $B_1 = -gh$, $B_2 = \frac{1}{2+c_i} (4cR_N^{-3}A_1 - 6k \ln R_N) - q_N$, $A_1 = A_2 = \frac{3k\gamma^3}{4(c_i - 1)}$ при $r = \gamma$.

При этом уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ имеет вид

$$\frac{1}{c+2} \left\{ \frac{3kc}{c-1} \left(1 - \frac{\gamma^3}{R_N^3} \right) + 6k \ln \left(\frac{\gamma}{R_N} \right) \right\} - \frac{3k}{c-1} + q_N - gh = 0. \quad (3.4.6)$$

Равенства (3.4.1)–(3.4.6) записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига G для материала массива, а имеющие размерность длины — к радиусу выработки, R_N , c , k — безразмерные параметры для материала массива.

На основе полученных аналитических решений проведены численные расчеты для случаев, когда:

горный массив содержит вертикальную (горизонтальную) выработку, подкрепленную двухслойной крепью, материал массива — аргиллит, внешний слой крепи — бетон, внутренний — железобетон (случай 1);

горный массив содержит сферическую выработку, подкрепленную, двухслойной крепью, материал массива — аргиллит, материал крепи — бетон (случай 2).

Результаты численного расчета представлены на рисунках 3.4.1–3.4.4.

На рис. 3.4.1 представлена зависимость величины границы раздела упругой и пластической областей ψ_1 во внутреннем слое крепи от сочетания нагрузок q_1 и q_0 (случай 1). Кривая 1 — соответствует отношению $R_0/R_1 = 0,1/1$; кривая 2 — $R_0/R_1 = 0,3/1$.

На рис. 3.4.2 представлена зависимость величины границы раздела упругой и пластической областей ψ_2 во внутреннем слое крепи от сочетания нагрузок q_2 и q_1 (случай 2). Кривая 1 —

соответствует отношению $R_1/R_2 = 0,3/1$, кривая $2 - R_1/R_2 = 0,6/1$.

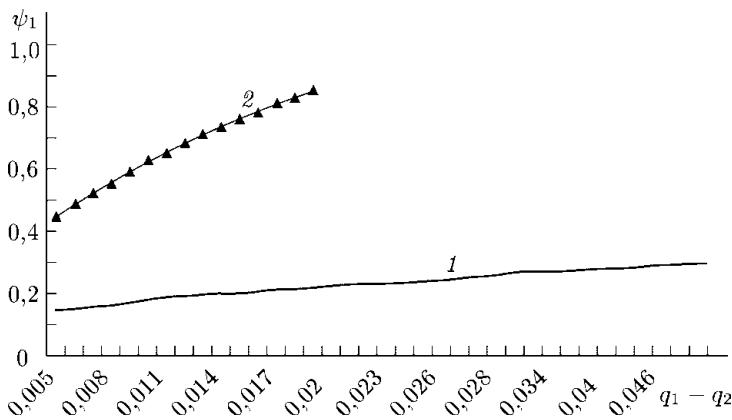


Рис. 3.4.1

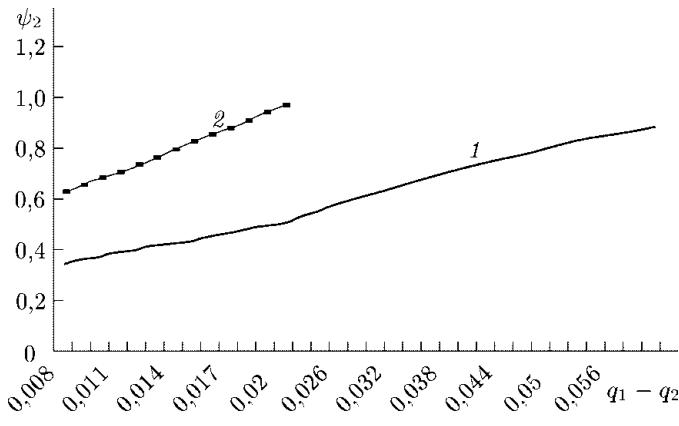


Рис. 3.4.2

На рис. 3.4.3. представлена зависимость величины ψ_1 от геометрии конструкции (случай 1). Кривая 1 — соответствует фиксированной комбинации нагрузок $q_1 - q_0 = 0,019$, а кривая 2 — $q_1 - q_0 = 0,03$.

На рис. 3.4.4. представлена зависимость величины ψ_2 от геометрии конструкции при фиксированном сочетании нагрузок q_1, q_2 (случай 2). Кривая 1 — соответствует комбинации нагрузок $q_1 - q_2 = 0,02$, а кривая 2 — $q_1 - q_2 = 0,05$.

Безразмерные характеристики материалов: песчаник, аргиллит, бетон и железобетон выбирались исходя из результатов известных опытов [265] и приведены в табл. 3.4.1.

Заметим, что выбор бетона и железобетона обусловлен тем, что они являются основными материалами для изготовления крепей выработок [17].

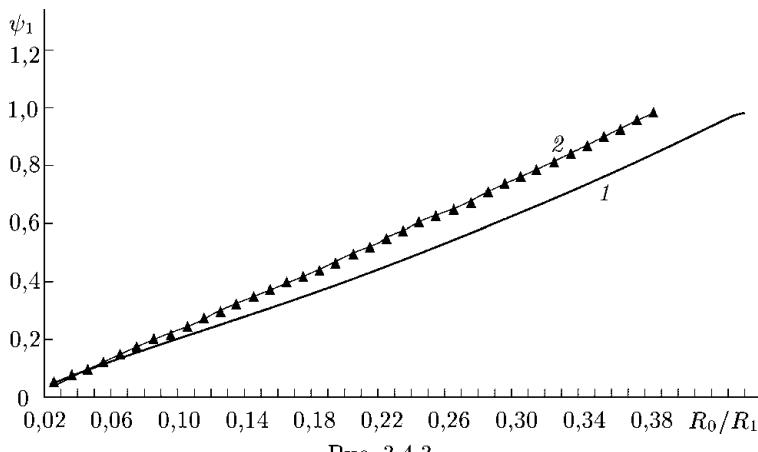


Рис. 3.4.3

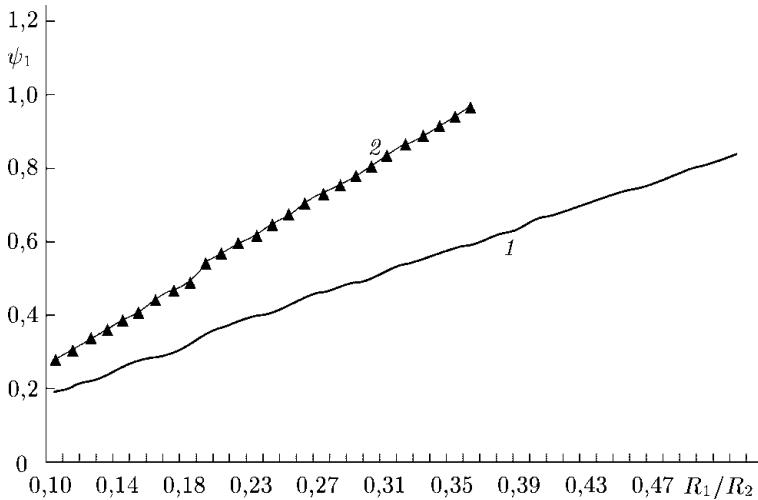


Рис. 3.4.4

Из анализа решений следует:

величина радиуса упругопластической границы, как в слое крепи, так и в массиве, зависит от величины контактных давлений и от геометрии конструкции;

исчерпание локальной несущей способности зависит от ширины слоев крепи;

при увеличении внутреннего радиуса слоя крепи, а также при росте контактных давлений, величина границы раздела упругой и пластической областей в этом слое увеличивается.

Таблица 3.4.1

Физико-механические характеристики	c	k	$E \cdot 10^5$ Па (модуль Юнга)
Песчаник	2,9496	0,017	297 255
Аргиллит	1,5533	0,008	199 555
Бетон	0,4252	0,006	242 910
Железобетон	0,4698	0,007	242 910

Глава 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКАЗОВ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ, ВЕРТИКАЛЬНЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫМИ РАЗНОМОДУЛЬНЫМИ КРЕПЯМИ ПРИ НЕУПРУГОЙ РАБОТЕ МАССИВА И КРЕПИ

Так как добыча и хранение ряда полезных ископаемых продолжительное время ведется в одних и тех же месторождениях, то, как отмечено в гл. 3, возникают условия, требующие проведения укрепительных работ горных выработок. Существуют различные пути решения этого вопроса. Один из них — это создание многослойных крепей из бетона, железобетона и т. п. Поэтому изучение разрушения горных пород возле выработок с многослойными крепями с позиций локальной потери устойчивости является важным и актуальным вопросом.

Вопрос об определении критических контактных давлений (при которых конструкция теряет устойчивость) внутри крепи и на крепь может быть решен разными методами, например из условия возникновения на внутренней поверхности крепи предельного состояния. Однако в этом случае у упругой крепи имеются существенные резервы несущей способности. Этот же вопрос можно решить и из условия перехода всего материала (одного из слоев или всей конструкции) в пластическое состояние. В этом случае потеря устойчивости может произойти раньше, чем крепь достигнет указанного состояния. В связи с этим для определения критических контактных давлений внутри крепи и на крепь желательно привлекать аппарат теории устойчивости деформируемых сред. В такой постановке с позиции приближенного подхода Лейбензона Ишлинского, как отмечено во введении, определялась оптимальная толщина монолитных цилиндрических [14] и сферических [14, 18] крепей. Однако в этих работах вопросы горного давления в выработках и расчета крепи исследовались обособленно друг от друга, т. е. давление на внешнюю поверхность крепи полагалось независящим от глубины и от физико-механических параметров массива. Однако показано [151], что нагрузка на крепь в первую очередь определяется перемещениями породы и образованием области неупругих деформаций. Указанное противоречие можно преодолеть путем совместного расчета крепи с массивом горных пород.

В данной главе исследуется потеря устойчивости (отказ) горизонтальной, вертикальной и сферической выработок с многослойными крепями при совместной неупругой работе крепи и массива, в предположении, что слои (крепей) работают совместно без проскальзывания и отставания, а также с учетом разномодульности крепей.

Для описания пластических свойств горной породы воспользуемся несжимаемой упругопластической моделью среды с трансляционным упрочнением, определяющие соотношения которой приведены в § 1 первой главы. Согласно гипотезе С.Г. Михлина, напряженное состояние нетронутого массива считается гидростатическим $\overset{\circ}{\sigma}_1 = \overset{\circ}{\sigma}_2 = \overset{\circ}{\sigma}_3 = -gh$.

Материалы этой главы изложены в соответствии с публикациями [68–71, 256, 257, 262, 281–283].

4.1. Моделирование отказа горизонтальной выработки с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород

Рассматривается задача о пространственной форме потери устойчивости горизонтальной выработки радиуса R_N , подкрепленной многослойной (N -слойной) крепью с внутренним радиусом R_0 . К внутреннему контуру крепи приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 . Из-за натягов на линиях сопряжения слоев крепи и массива действуют сжимающие усилия q_1, q_2, \dots, q_N , величины которых таковы, что возникающие пластические области целиком охватывают внутренние контуры слоев крепи.

Неоднородное докритическое состояние в i -м ($i = 1, 2, \dots, N$) слое крепи описывается системой уравнений (3.2.18), (3.2.19). Граница раздела ψ_i упругой и пластической зон определяется из (3.2.20). Для области массива верны соотношения (3.3.3), (3.3.4). Граница раздела γ вычисляется по формуле (3.3.5). Линеаризированное уравнение состояния примем в форме (1.5.2). Тогда величины $a_{s\alpha}$ и G_j^s в области пластического деформирования, согласно (1.5.9), таковы

$$a_{11} = a_{22} = 2 - a_*, \quad a_{33} = 2, \quad a_{12} = a_{21} = a_*, \\ a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0, \quad a_* = \frac{2}{2 + c}, \quad G = 1. \quad (4.1.1)$$

В упругих областях следует приравнять $a_* = 0$.

В случае пространственной формы (1.5.21) потери устойчивости из линеаризированных уравнений равновесия в вариациях (1.5.16), учитывая при этом выше сказанное, получаем

следующую систему уравнений в терминах функций $A(r)$, $B(r)$:

$$\begin{aligned}
 & A(r) \left[\overset{\circ}{\sigma}_\theta (1 - m^2) - m^2 - 2r \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} - r^2 n^2 + 1 \right] + \\
 & + A'(r) \left[r^2 \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - r \left(2\overset{\circ}{\sigma}_\theta + 1 - \overset{\circ}{\sigma}_r \right) \right] + A''(r) \left(1 - 2a_* + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) r^2 + \\
 & + B(r) \left[\left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \left(\frac{1}{m} - m \right) - \frac{r \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} (1 + m^2) - (rn)^2}{m^3} \right] + \\
 & + B'(r) \left\{ r \left[\left(2a_* - 1 - \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) m - \frac{1}{m} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \right] + \frac{r^3}{m} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,rr} - n^2 \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{r^2}{m} 2\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right\} + B''(r) \left[\frac{2r^2}{m} \left(\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + 1 \right) \right] + B'''(r) \left[\frac{r^3}{m} \left(\overset{\circ}{\sigma}_r + 1 \right) \right] = 0, \quad (4.1.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A(r) \left[r^2 n \left(a_* - 1 - 2\overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) + \frac{m^2 r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) - \frac{r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right) \right] + \\
 & A'(r) \left[r^3 n \left(1 - a_* \right) - \frac{m^2 r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) - \frac{r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right) \right] + \\
 & + A''(r) \left[\frac{r^2}{n} \left(2 \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) + r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right) \right] + A'''(r) \frac{r^3}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) + B(r) \times \\
 & \times \left[r^2 n m a_* - \frac{n^3 r^2}{m} - \left(\frac{1}{m} + \frac{m^3}{nr^2} \right) \left(\overset{\circ}{\sigma}_\theta + 1 \right) + \frac{m}{r^2 n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right) \right] + \\
 & + B'(r) \left[\frac{rm}{n} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - 1 - \overset{\circ}{\sigma}_r \right) - \frac{r^3 n}{m} \left(r\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + 1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) \right] + \\
 & + B''(r) \left[\left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) \left(\frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Заметим, что эти уравнения следуют из (1.5.26) при $G = 1$. Система уравнений (4.1.2) относится к областям пластического $\overset{p}{(V)}$ и, соответственно, при $a_* = 0$ упругого $\overset{e}{(V)}$ деформирования массива. Если же функциям A , B и компонентам тензора напряжений приписать нижний индекс i , то система уравнений (4.1.2) будет соответствовать зонам $\overset{p}{V}_i$ и $\overset{e}{V}_i$ i -го слоя крепи ($i = 1, 2, \dots, N$).

Границные условия (1.5.27) на внутреннем контуре первого слоя крепи при $r = R_0$ с учетом (4.1.1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \left\{ \frac{2}{R_0} \left[a_* - \left(\overset{p\circ}{\sigma}_\theta \right)_1 - 1 \right] \right\} + \overset{p}{A}'_1 \left[2 - 2a_* + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1 \right] + \overset{p}{B}_1 \times \\
 & \times \left(\frac{1}{R_0} \left\{ m a_* - \frac{1}{m} \left[1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_\theta \right)_1 \right] + m^2 \left[\left(\overset{p\circ}{\sigma}_\theta \right)_1 + 1 - a_* \right] \right\} - \frac{n^2 R_0}{m} \right) + \\
 & + \frac{\overset{p}{B}'_1}{m} \left[1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1 + R_0 \left(\overset{p\circ}{\sigma}_{\theta,r} \right)_1 \right] + \frac{\overset{p}{B}''_1 R_0}{m} \left[1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1 \right] = 0, \quad (4.1.3a)
 \end{aligned}$$

$$mA_1 + \overset{p}{B}_1 - R_0 \overset{p}{B}'_1 \left[1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1 \right] = 0, \quad (4.1.36)$$

$$A_1 \left[n - \frac{1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1}{n R_0^2} \right] + \frac{1 + \left(\overset{p\circ}{\sigma}_r \right)_1}{n R_0} \left[\overset{p}{A}'_1 - \frac{m}{R_0} \overset{p}{B}_1 + m \overset{p}{B}'_1 + R_0 \overset{p}{A}''_1 \right] = 0.$$

Из условий сопряжения (1.5.13) на упругопластической границе ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) с учетом (1.5.2), (1.5.21) получаем

$$\begin{aligned} A_i \frac{1}{\psi_i} - \overset{p}{A}'_i + \overset{p}{B}_i \frac{m}{\psi_i} + \overset{p}{B}'_i \left\{ \frac{\psi_i}{2ma_*} \left[\left(\overset{p\circ}{\sigma}_{r,r} \right)_i - \left(\overset{eo}{\sigma}_{r,r} \right)_i \right] \right\} + \\ + \frac{\psi_i}{2ma_*} \left[\left(\overset{eo}{\sigma}_r \right)_i + 1 \right] \left(\overset{p}{B}''_i - \overset{e}{B}''_i \right) = 0, \\ \overset{p}{A}''_i - \overset{e}{A}''_i = 0. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

На границе раздела γ упругой и пластической областей массива имеют место условия аналогичные условиям (4.1.4), в которых только следует опустить индекс i и ψ_i заменить на γ .

На границе запрессованных i -го и $i+1$ -го слоев крепи, согласно (3.1.5), (3.1.6), и соотношений (1.5.2), (1.5.21), (4.1.1) имеют место условия

$$\begin{aligned} A_{i+1} \frac{1}{\psi_i} - \overset{p}{A}'_{i+1} + \overset{p}{B}_{i+1} \frac{m}{R_i} + \overset{p}{B}'_i \left\{ \frac{R_i}{2ma_*} \left[\left(\overset{p\circ}{\sigma}_{r,r} \right)_{i+1} - \left(\overset{eo}{\sigma}_{r,r} \right)_i \right] \right\} + \\ + \frac{R_i}{2ma_*} \left[\left(\overset{eo}{\sigma}_r \right)_i + 1 \right] \left(\overset{p}{B}''_{i+1} - \overset{e}{B}''_i \right) = 0, \\ \overset{p}{A}''_{i+1} - \overset{e}{A}''_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2, 3$) следует:

$$\overset{e}{A}' = 0, \quad \overset{e}{A}'' = 0, \quad \overset{e}{B}' = 0, \quad \overset{e}{B}'' = 0. \quad (4.1.6)$$

Таким образом, математическая модель локальной потери устойчивости подкрепленной горизонтальной выработки представляется в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5) с краевыми условиями (4.1.3), (4.1.6). Для решения этой системы уравнений относительно параметров $A_{nm}(r)$, $B_{nm}(r)$, будем использовать метод конечных разностей (§ 6 первой главы). Обозначим через M_{ψ_i} , M_{R_i} , M_γ , M_e — количество точек разбиения в областях $\overset{p}{V}_i$, $\overset{p}{V}$, $\overset{e}{V}_i$, $\overset{e}{V}$ соответственно ($i = 1, 2, \dots, N$); $M = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}) + M_\gamma + M_e$ — общее количество точек

разбиения. Заменяя производные функций $A(r)$ и $B(r)$ в (4.1.2) через конечные разности (1.6.2) для каждой из областей в точках $j = 2, 3, 4 \dots, M_k - 2$, где $k = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$, $R_1, R_2, \dots, R_N, \gamma, e$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} & A_{j-1} (2\tau\xi_3 - \tau^2\xi_2) + A_j (2\tau^3\xi_1 - 4\tau\xi_3) + A_{j+1} (\tau^2\xi_2 + 2\tau\xi_3) - \\ & - B_{j-2}\xi_7 + B_{j-1} (2\tau\xi_6 - \tau^2\xi_5 + 2\xi_7) + B_j (2\tau^3\xi_4 - 4\tau\xi_6) + \\ & + B_{j+1} (\tau^2\xi_5 + 2\tau\xi_6 - 2\xi_7) + \xi_7 B_{j+2} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} & - A_{j-2}\xi_{11} + A_{j-1} (2\tau\xi_{10} - \tau^2\xi_9 + 2\xi_{11}) + A_j (2\tau^3\xi_8 - 4\tau\xi_{10}) + \\ & + A_{j+1} (\tau^2\xi_9 + 2\tau\xi_{10} - 2\xi_{11}) + \xi_{11} A_{j+2} + B_{j-1} (2\tau\xi_{14} - \tau^2\xi_{13}) + \\ & + B_j (2\tau^3\xi_{12} - 4\tau\xi_{14}) + B_{j+1} (\tau^2\xi_{13} + 2\tau\xi_{14}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 14$) — коэффициенты в уравнениях равновесия (1.5.26).

В точках $j = 1, j = M_k - 1$ ($k = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, R_1, R_2, \dots, R_N, \gamma, e$), согласно тому, что в крайних точках производные будут аппроксимироваться другими разностными соотношениями (1.6.2), для уравнений равновесия (4.1.2) получим

$$\begin{aligned} & A_{j\mp 1} (2\tau\xi_3 \mp \tau^2\xi_2) + A_j (2\tau^3\xi_1 - 4\tau\xi_3) + A_{j\pm 1} (2\tau\xi_3 \pm \tau^2\xi_2) + \\ & + B_{j\mp 1} (2\tau\xi_6 \mp \tau^2\xi_5 \mp 3\xi_7) + B_j (2\tau^3\xi_4 - 4\tau\xi_6 \pm 10\xi_7) + \\ & + B_{j\pm 1} (2\tau\xi_6 \pm \tau^2\xi_5 \mp 12\xi_7) + B_{j\pm 1} (2\tau\xi_{14} \pm \tau^2\xi_{13}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} & A_{j\mp 1} (2\tau\xi_{10} \mp \tau^2\xi_9 \mp 3\xi_{11}) + A_j (2\tau^3\xi_8 - 4\tau\xi_{10} \pm 10\xi_{11}) + \\ & + A_{j\pm 1} (2\tau\xi_{10} \pm \tau^2\xi_9 \mp 12\xi_{11}) \pm 6\xi_{11} A_{j\pm 2} + A_{j\pm 3} (\mp \xi_{11}) + B_{j\mp 1} \times \\ & \times (2\tau\xi_{14} \mp \tau^2\xi_{13}) + B_j (2\tau^3\xi_{12} - 4\tau\xi_{14}) + B_{j\pm 1} (2\tau\xi_{14} \pm \tau^2\xi_{13}) = 0. \end{aligned}$$

Верхние знаки (+ или -) соответствуют $j = 1$, нижние $-j = M_k - 1$. Шаг τ разностной сетки в каждой из зон $\overset{p}{V}_i, \overset{e}{V}_i, \overset{p}{V}, \overset{e}{V}$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_{\psi_i} &= \frac{\psi_i - R_{i-1}}{M_{\psi_i}}, \quad \tau_{R_i} = \frac{R_i - \psi_i}{M_{R_i}}, \quad \tau_\gamma = \frac{\gamma - R_N}{M_\gamma}, \\ \tau_e &= \frac{R_\infty - \gamma}{M_e} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Величины границ раздела зон упругого и пластического поведения сред ψ_i и γ определяются по формулам (3.2.20) и (3.3.5) соответственно.

Производные функций $A_{nm}(r)$, $B_{nm}(r)$ в условиях (4.1.3–4.1.6) аппроксимируются конечными разностями типа (1.6.2). При этом условиям (4.1.3) соответствует разностный вид

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_1 \left(2\tau_{\psi_1}^2 \varphi_1 - 3\tau_{\psi_1}^2 \varphi_2\right) + 4\tau_{\psi_1}^2 \varphi_2 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_1 - \tau_{\psi_1} \varphi_2 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_1 + \\ \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_j \end{smallmatrix}\right)_1 \left(2\tau_{\psi_1}^2 \varphi_3 - 3\tau_{\psi_1} \varphi_4 + 4\varphi_5\right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_1 (4\tau_{\psi_1} \varphi_4 - 10\varphi_5) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_1 (8\varphi_5 - \tau_{\psi_1} \varphi_4) - 2\left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_1 \varphi_5 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_1 2\tau_{\psi_1} m + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_j \end{smallmatrix}\right)_1 (2\tau_{\psi_1} - 3\varphi_6) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_1 4\varphi_6 - \varphi_6 \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_1 = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_1 \left(2\tau_{\psi_1}^2 \varphi_7 - 3\tau_{\psi_1} \varphi_8 + 4R_0 \varphi_8\right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_1 (4\tau_{\psi_1} \varphi_8 - 10R_0 \varphi_8) - \\ - \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_1 \varphi_8 (8R_0 - \tau_{\psi_1}) - 2\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_1 R_0 \varphi_8 + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_j \end{smallmatrix}\right)_1 \times \\ \times \left[-m\varphi_8 \left(\frac{2\tau_{\psi_1}}{R_0} + 3\tau_{\psi_1}\right)\right] + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_1 4\tau_{\psi_1} \varphi_8 + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_1 (-\tau_{\psi_1} \varphi_8) = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2}{R_0} \left(a_* - 1 - \frac{2a_0 c_1 A_2^1}{R_0^2} - a_* \sqrt{2} k_1 - q_0 \right) - \frac{n^2 R_0}{m}, \\ \varphi_2 &= 2(1 - a_*) - q_0, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{R_0} \left(m - \frac{1}{m} \right) \left(1 + \frac{2a_* c_1 A_2^1}{R_0^2} - a_* \sqrt{2} k_1 - q_0 \right) - \frac{n^2 R_0}{m}, \\ \varphi_4 &= \frac{1}{m} \left(1 + \frac{4a_* c_1 A_2^1}{R_0^2} - 2a_* \sqrt{2} k_1 - q_0 \right), \quad \varphi_5 = \frac{R_0}{m} (1 - q_0), \\ \varphi_6 &= -R_0 (1 - q_0), \quad \varphi_7 = n - \frac{1 - q_0}{n R_0^2}, \quad \varphi_8 = \frac{1 - q_0}{n R_0}. \end{aligned}$$

На границе $r = \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) имеем

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_i \left(\frac{1}{\psi_i} - \frac{3}{2\tau_{\psi_i}} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-1} \end{smallmatrix}\right)_i \frac{2}{\tau_{\psi_i}} + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-2} \end{smallmatrix}\right)_i \left(\frac{1}{2\tau_{\psi_i}} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_j \end{smallmatrix}\right)_i \times \\ \times \left[\frac{m}{\psi_i} - \frac{3\varphi_9}{2\tau_{\psi_i}} + \varphi_{10} \left(\frac{2}{\tau_{\psi_i}^2} - \frac{2}{\tau_{\psi_i}^2} \right) \right] + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-1} \end{smallmatrix}\right)_i \left(-\frac{3\varphi_9}{\tau_{\psi_i}} - \frac{5\varphi_{10}}{\tau_{\psi_i}^2} \right) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-2} \end{smallmatrix}\right)_i \left(\frac{\varphi_9}{2\tau_{\psi_i}} + \frac{4\varphi_{10}}{\tau_{\psi_i}^2} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-3} \end{smallmatrix}\right)_i \left(-\frac{\varphi_{10}}{\tau_{\psi_i}^2} \right) - \\ - \frac{\varphi_{10}}{\tau_{\psi_i}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} c \\ B_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_i + 4\left(\begin{smallmatrix} c \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_i - \left(\begin{smallmatrix} c \\ B_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_i \right] = 0, \quad (4.1.11a) \end{aligned}$$

$$2\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_i \left(\frac{1}{\tau_{\psi_i}^2} - \frac{1}{\tau_{R_i}^2}\right) + \frac{1}{\tau_{\psi_i}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-1} \end{smallmatrix}\right)_i + 4\left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-2} \end{smallmatrix}\right)_i - \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j-3} \end{smallmatrix}\right)_i\right] - \\ - \frac{1}{\tau_{R_i}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_i + 4\left(\begin{smallmatrix} e \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_i - \left(\begin{smallmatrix} e \\ B_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_i\right] = 0. \quad (4.1.116)$$

Здесь

$$\varphi_9 = \frac{1}{2ma_*} \left(\frac{2a_* c_i A_2^i - 4B_1^i}{\psi_i^2} - a_* \sqrt{2} k_i \right),$$

$$\varphi_{10} = \frac{\psi_i}{2ma_*} \left[1 + 2B_1^i \left(1 - \frac{1}{\psi_i^2} \right) - q_i \right].$$

Для условий на границе $r = \gamma$ в соотношениях (4.1.11) следует заменить индексы p_i и e_i на p и e , шаг разностной схемы τ_{ψ_i} на τ_γ и τ_{R_i} на τ_e , величину ψ_i на γ , коэффициентам φ_9 и φ_{10} присвоить значения

$$\varphi_9 = \varphi_{13} = 0, \quad \varphi_{10} = \varphi_{14} = \frac{\gamma}{4ma_*} \left(2 - \sqrt{2} k \right),$$

На границе $r = R_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$, при $i = N p_{i+1} = p$, $\psi_{i+1} = \gamma$) представим условия (4.1.5) в виде

$$\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(1 + \frac{3}{2\tau_{\psi_{i+1}}} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(-\frac{2}{\tau_{\psi_{i+1}}} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(\frac{1}{2\tau_{\psi_{i+1}}} \right) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_j \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(\frac{m}{R_i} - \frac{3\varphi_{11}}{2\tau_{\psi_{i+1}}} + \frac{2\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} - \frac{2\varphi_{12}}{\tau_{R_i}^2} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(\frac{2\varphi_{11}}{\tau_{\psi_{i+1}}} - \frac{5\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} \right) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(-\frac{2\varphi_{11}}{2\tau_{\psi_{i+1}}} + \frac{4\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ B_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(-\frac{\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} \right) - \\ - \frac{\varphi_{12}}{\tau_{R_i}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} e \\ B_{j-1} \end{smallmatrix}\right)_i + 4\left(\begin{smallmatrix} e \\ B_{j-2} \end{smallmatrix}\right)_i - \left(\begin{smallmatrix} e \\ B_{j-3} \end{smallmatrix}\right)_i \right] = 0, \quad (4.1.12)$$

$$2\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \left(\frac{1}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} - \frac{1}{\tau_{R_i}^2} \right) + \frac{1}{\tau_{\psi_{i+1}}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} + 4\left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} - \right. \\ \left. - \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+3} \end{smallmatrix}\right)_{i+1} \right] - \frac{1}{\tau_{R_i}^2} \left[-5\left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j-1} \end{smallmatrix}\right)_i + 4\left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j-2} \end{smallmatrix}\right)_i - \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j-3} \end{smallmatrix}\right)_i \right] = 0.$$

Здесь

$$\varphi_{11} = \frac{R_i}{2ma_*} \left[a_* \sqrt{2} k_i \left(1 + \frac{c_i \psi_{i+1}^2}{2} \right) - 4B_1^i \right],$$

$$\varphi_{12} = \frac{R_i}{2ma_*} (1 - q_i).$$

Условия на бесконечности (4.1.6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} 3\overset{e}{A}_j - 4\overset{e}{A}_{j-1} + \overset{e}{A}_{j-2} &= 0, \quad 2\overset{e}{A}_j - 5\overset{e}{A}_{j-1} + 4\overset{e}{A}_{j-2} - \overset{e}{A}_{j-3} = 0, \\ 3\overset{e}{B}_j - 4\overset{e}{B}_{j-1} + \overset{e}{B}_{j-2} &= 0, \quad 2\overset{e}{B}_j - 5\overset{e}{B}_{j-1} + 4\overset{e}{B}_{j-2} - \overset{e}{B}_{j-3} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

В соотношениях (4.1.10)–(4.1.12) константы B_1^i, A_2^i ($i = 1, 2, \dots, N$) определяются формулами (3.2.19).

В результате получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров $A_{nm}, B_{nm}, A_{nm}^i, B_{nm}^i$ ($i = 0, 1, \dots, N$). Отсюда следует, что определение допустимых комбинаций критических параметров контактных давлений q_i ($i = 0, 1, \dots, N$), соответствующих локальной потери устойчивости горизонтальной выработки с многослойной крепью сводится к разрешимости матричного уравнения, что в свою очередь соответствует равенству нулю определителя конечной разностной системы уравнений (4.1.7)–(4.1.13) при ограничении числа членов в рядах (1.5.21). При вычислении определителя наряду с основным напряженно-деформированным состоянием для каждой области $\overset{p}{V}_i, \overset{e}{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) крепи (3.2.18), (3.2.19) и областей $\overset{p}{V}, \overset{e}{V}$ массива (3.3.3), (3.3.4) необходимо учитывать уравнения (3.2.20) и (3.3.5), определяющие положения упругопластических границ ψ_i многослойной крепи и γ в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разности сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n , параметрам материала и конструкции λ_j .

Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величин q_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_i, m, n, \lambda_j) = 0$.

Ненулевые элементы определителя $|x_{ij}|$ следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2\tau^2\varphi_1 - 3\tau\varphi_2, \quad x_{12} = 4\tau\varphi_2, \quad x_{13} = -\tau\varphi_2, \\ x_{1,M+2} &= 2\tau^2\varphi_3 - 3\tau\varphi_4 + 4\varphi_5, \quad x_{1,M+3} = 4\tau\varphi_4 - 10\varphi_5, \\ x_{1,M+4} &= 8\varphi_5 - \tau\varphi_4, \quad x_{1,M+5} = -2\varphi_5 \quad x_{2,M+2} = 2\tau - 3\varphi_6, \\ x_{21} &= 2\tau m, \quad x_{2,M+3} = 4\varphi_6, \quad x_{2,M+4} = -\varphi_6, \\ x_{31} &= 2\tau^2\varphi_7 - 3\tau\varphi_8 + 4R_0\varphi_8, \quad x_{32} = 4\tau\varphi_8 - 10R_0\varphi_8, \\ x_{33} &= \varphi_8(8R_0 - \tau), \quad x_{34} = -2R_0\varphi_8, \quad x_{3,M+2} = -m\varphi_8 \left(\frac{2\tau}{R_0} + 3\tau \right), \\ x_{3,M+3} &= 4\tau\varphi_8, \quad x_{3,M+4} = -\tau\varphi_8, \end{aligned}$$

где $\tau = \tau_{\psi_1}$.

Вышеприведенные элементы записаны в точке $r = R_0$:

$$\begin{aligned} x_{41} &= 2\tau\xi_3 - \tau^2\xi_2, & x_{42} &= 2\tau^3\xi_1 - 4\tau\xi_3, & x_{43} &= 2\tau\xi_3 + \tau^2\xi_2, \\ x_{4,M+2} &= 2\tau\xi_6 - \tau^2\xi_5 - 3\xi_7, & x_{4,M+3} &= 2\tau^3\xi_4 - 4\tau\xi_6 + 10\xi_7, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$x_{4,M+4} = 2\tau\xi_6 + \tau^2\xi_5 - 12\xi_7, \quad x_{4,M+5} = 6\xi_7, \quad x_{4,M+6} = -\xi_7,$$

$$\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} p \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_1 r = R_0 + \tau_{\psi_1}, \quad \tau = \tau_{\psi_1};$$

$$x_{i,j+1} = 2\tau\xi_3 - \tau^2\xi_2, \quad x_{i,j+2} = 2\tau^3\xi_1 - 4\tau\xi_3,$$

$$x_{i,j+3} = 2\tau\xi_3 + \tau^2\xi_2, \quad x_{ik} = -\xi_7, \quad (4.1.15)$$

$$x_{i,k+1} = 2\tau\xi_6 - \tau^2\xi_5 + 2\xi_7, \quad x_{i,k+2} = 2\tau^3\xi_4 - 4\tau\xi_6,$$

$$x_{i,k+3} = 2\tau\xi_6 + \tau^2\xi_5 - 2\xi_7, \quad x_{i,k+4} = \xi_7,$$

здесь $j = 5, 6, 7, \dots, M_{\psi_1} + 1$, $j = i - 4$, $k = j + M + 1$, $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} p \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $2\tau_{\psi_1} \leq r \leq \psi_1 - 2\tau_{\psi_1}$, $\tau = \tau_{\psi_1}$.

При $i = 2M_{\psi_1} + 5, 2M_{\psi_1} + 6, \dots, 2M_{\psi_1} + M_{R_1} + 1$, $j = i - M_{\psi_1} - 4$ в (4.1.15) следует принять $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} e \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_1 2\tau_{R_1} \leq r \leq R_1 - 2\tau_{R_1}$, $\tau = \tau_{R_1}$.

При $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 5, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + M_{\psi_2} + 1$, $j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - 4$ в (4.1.15) примем $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} p \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_2 2\tau_{\psi_2} \leq r \leq \psi_2 - 2\tau_{\psi_2}$, $\tau = \tau_{\psi_2}$.

При $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + 5, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + M_{R_2} + 1$, $j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - M_{\psi_2} - 4$ в (4.1.15) необходимо положить $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} e \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_2, \tau = \tau_{R_2}, 2\tau_{R_2} \leq r \leq R_2 - 2\tau_{R_2}$.

Проводя аналогичные выкладки, получим соотношения для областей $V_3, \overset{p}{V}_3, \overset{e}{V}_3, \overset{p}{V}_4, \overset{e}{V}_4, \dots, \overset{p}{V}_N, \overset{e}{V}_N$. В общем виде эти соотношения можно записать в следующей форме:

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + \dots + 2M_{R_{\alpha-1}} + 5, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + \dots + 2M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} + 1$, $j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - M_{\psi_2} - \dots - M_{R_{\alpha-1}} - 4$ в (4.1.15) требуется положить $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} p \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha 2\tau_{\psi_\alpha} \leq r \leq \psi_\alpha - 2\tau_{\psi_\alpha}$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$;

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_\alpha} + 5, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_\alpha} + M_{R_\alpha} + 1$, $j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - \dots - M_{\psi_\alpha} - 4$ в (4.1.15) надо положить $\xi_n = \left[\begin{smallmatrix} e \\ \xi_n(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha 2\tau_{R_\alpha} \leq r \leq R_\alpha - 2\tau_{R_\alpha}$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$;

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_N} + 2M_{R_N} + 5, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_N} + 2M_{R_N} + M_{\gamma} + 1, j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - \dots - M_{\psi_N} - M_{R_N} - 4$ в (4.1.15) примем $\xi_n = \xi_n^p(r)$, $2\tau_{\gamma} \leq r \leq \gamma - 2\tau_{\gamma}$, $\tau = \tau_{\gamma}$.

Обозначим через $\overset{\circ}{p} = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}) + M_{\gamma}$, тогда в соотношениях (4.1.15) при $i = 2\overset{\circ}{p} + 5, 2\overset{\circ}{p} + 6, \dots, 2\overset{\circ}{p} + M_e + 1, j = i - \overset{\circ}{p} - 4$ положим $\xi_n = \xi_n^e(r)$, $2\tau_e \leq r \leq R^* - 2\tau_e$, $\tau = \tau_e$. Здесь и далее R^* – бесразмерный радиус, при котором ставятся условия локальности возмущений:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= -\xi_{11}, \quad x_{i,j+1} = 2\tau\xi_{10} - \tau^2\xi_9 + 2\xi_{11}, \\ x_{i,j+2} &= 2\tau^3\xi_8 - 4\tau\xi_{10}, \quad x_{i,j+3} = \tau^2\xi_9 + 2\tau\xi_{10} - 2\xi_{11}, \\ x_{i,j+4} &= \xi_{11}, \quad x_{i,k+1} = 2\tau\xi_{14} - \tau^2\xi_{13}, \\ x_{i,k+2} &= 2\tau^3\xi_{12} - 4\tau\xi_{14}, \quad x_{i,k+3} = \tau^2\xi_{13} + 2\tau\xi_{14}. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Здесь $i = M_{\psi_1} + 2, M_{\psi_1} + 3, \dots, 2M_{\psi_1} - 2, j = i - M_{\psi_1} - 1, k = j + M + 1, \xi_n = \left[\xi_n^p(r) \right]_1^p, 2\tau_{\psi_1} \leq r \leq \psi_1 - 2\tau_{\psi_1}, \tau = \tau_{\psi_1}$.

При $i = 2M_{\psi_1} + M_{R_1} + 2, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} - 2, j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - 1$ в (4.1.16) надо положить $\xi_n = \left[\xi_n^e(r) \right]_1^e, 2\tau_{R_1} \leq r \leq R_1 - 2\tau_{R_1}, \tau = \tau_{R_1}$.

В общем виде соотношения для i, j, ξ_n, τ в областях V_{α}, V_a, V, V^e ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) можно представить следующим образом:

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + 2M_{R_2} + \dots + 2M_{\psi_{\alpha}} + 2, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_{\alpha}} - 2, j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - M_{\psi_2} - \dots - M_{\psi_{\alpha}} - 1$ в (4.1.16) положим $\xi_n = [\xi_n(r)]_{\alpha}^p, 2\tau_{\psi_{\alpha}} \leq r \leq \psi_{\alpha} - 2\tau_{\psi_{\alpha}}, \tau = \tau_{\psi_{\alpha}}, \alpha = 1, 2, \dots, N$;

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + 2M_{\psi_2} + \dots + 2M_{R_{\alpha}} + 2, \dots, 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{R_{\alpha}} - 2, j = i - M_{\psi_1} - M_{R_1} - \dots - M_{R_{\alpha}} - 1$ в

(4.1.16) надо положить $\xi_n = \left[\xi_n^e(r) \right]_{\alpha}^e, 2\tau_{R_{\alpha}} \leq r \leq R_{\alpha} - 2\tau_{R_{\alpha}}, \tau = \tau_{R_{\alpha}}, \alpha = 1, 2, \dots, N$;

при $i = 2M_{\psi_1} + 2M_{R_1} + \dots + 2M_{\psi_N} + 2M_{R_N} + M_{\gamma} + 2, \dots, 2\overset{\circ}{p} - 2, j = i - \overset{\circ}{p} - 1$ в (4.1.16) примем $\xi_n = \xi_n^p(r)$, $2\tau_{\gamma} \leq r \leq \gamma - 2\tau_{\gamma}$, $\tau = \tau_{\gamma}$;

при $i = 2\overset{\circ}{p} + M_e + 2, 2\overset{\circ}{p} + M_e + 3, \dots, 2M - 2, j = i - M - 1$ в (4.1.16) положим $\xi_n = \xi_n^e(r)$, $2\tau_e \leq r \leq R^* - 2\tau_e$, $\tau = \tau_e$.

Элементы: $x_{i,l+1}, x_{i,l+2}, x_{i,l+3}, x_{i,l+S+M}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_{\alpha-1}} + M_{R_{\alpha-1}}, S = 2, 3, \dots, 6, i = 2l + 3$) совпадают с соответствующими элементами в (4.1.14), где необходимо только положить $\xi_n = \left[\xi_n^p (R_{\alpha-1} + \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \dots, N$.

То же справедливо и для элементов $x_{i,l+1}, x_{i,l+2}, x_{i,l+3}, x_{i,l+S+M}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha}, S = 2, 3, \dots, 6, i = 2l + 3$), где $\xi_n = \left[\xi_n^e (R_{\alpha-1} + \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, а так же для элементов: $x_{i,p+1}, x_{i,p+2}, x_{i,p+3}, x_{i,l+S}$ ($l = M + \overset{\circ}{p}, S = 2, 3, \dots, 6, i = 2l + 3$), где надо положить $\xi_n = \left[\xi_n^e (\gamma + \tau_\gamma) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_e$:

$$\begin{aligned} x_{i,M_{\psi_1}+1} &= 2\tau\xi_{10} - \tau^2\xi_9 - 3\xi_{11}, \quad x_{i,M_{\psi_2}+2} = 2\tau^3\xi_8 - 4\tau\xi_{10} + 10\xi_{11}, \\ x_{i,M_{\psi_1}+3} &= 2\tau\xi_{10} + \tau^2\xi_9 - 12\xi_{11}, \quad x_{i,M_{\psi_1}+4} = 6\xi_{11}, \\ x_{i,M_{\psi_1}+5} &= -\xi_{11}, \quad x_{i,l+2} = 2\tau\xi_{14} - \tau^2\xi_{13}, \\ x_{i,l+3} &= 2\tau^3\xi_{12} - 4\tau\xi_{14}, \quad x_{i,l+4} = \tau^2\xi_{13} + 2\tau\xi_{14}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Здесь $l = M + M_{\psi_1}$, $i = 2M_{\psi_1} + 4$, $\xi_n = \left[\xi_n^e (\psi_1 + \tau_{R_1}) \right]_1$, $\tau = \tau_{R_1}$.

Элементы $x_{i,l+S}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1}, S = 1, 2, \dots, 5$), $x_{i,M+l+2}, x_{i,M+l+3}, x_{i,M+l+4}$ при $i = 2l + 4$ определяются из соответствующих выражений (4.1.17), где следует только положить $\xi_n = \left[\xi_n^p (R_1 + \tau_{\psi_2}) \right]_2$, $\tau = \tau_{\psi_2}$. Отличные от нуля элементы в областях $\overset{e}{V}_2, \overset{p}{V}_3, \dots, \overset{p}{V}_N, \overset{e}{V}_N, \overset{p}{V}, \overset{e}{V}$ имеют вид

элементы $x_{i,l+S}, x_{i,M+l+2}, x_{i,M+l+3}, x_{i,M+l+4}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + \dots + M_{R_{\alpha-1}}, S = 1, 2, \dots, 5, i = 2l + 4$) определяются из соответствующих выражений (4.1.17), где следует положить $\xi_n = \left[\xi_n^p (R_{\alpha-1} + \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \dots, N + 1$;

элементы $x_{i,l+S}, x_{i,M+l+2}, x_{i,M+l+3}, x_{i,M+l+4}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + \dots + M_{R_{\alpha-1}}; S = 1, 2, \dots, 5; i = 2l + 4$) определяются из соответствующих выражений (4.1.17), где следует положить $\xi_n = \left[\xi_n^p (R_{\alpha-1} + \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \dots, N + 1$;

элементы $x_{i,l+S}, x_{i,M+l+2}, x_{i,M+l+3}, x_{i,M+l+4}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_\alpha}; S = 1, 2, \dots, 5; i = 2l + 4$) определяются из соответствующих выражений (4.1.17), где следует положить $\xi_n = \left[\xi_n^e (\psi_\alpha + h_{R_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N + 1$.

При $\alpha = N + 1$ следует положить $\overset{e}{V}_\alpha = \overset{e}{V}$, $\overset{p}{V}_\alpha = \overset{p}{V}$

$$\begin{aligned} x_{i,l-1} &= 2\tau\xi_3 - \tau^2\xi_2, & x_{i,l} &= 2\tau^3\xi_1 - 4\tau\xi_3, \\ x_{i,l+1} &= 2\tau\xi_3 + \tau^2\xi_2, & x_{i,M+l-2} &= \xi_7, \\ x_{i,M+l-1} &= -6\xi_7, & x_{i,M+l} &= 2\tau\xi_6 - \tau^2\xi_5 + 12\xi_7, \\ x_{i,M+l+1} &= 2\tau^3\xi_4 - 4\tau\xi_6 - 10\xi_7. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Здесь $l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_\alpha}$, $i = 2l - 1$, $\xi_n = \left[\overset{p}{\xi}_n (\psi_\alpha - \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N + 1$; при $\alpha = N + 1$ следует положить $\overset{p}{V}_\alpha = \overset{p}{V}$.

Вид аналогичный соотношениям (4.1.18) имеют следующие группы элементов $x_{i,l-1}$, $x_{i,l}$, $x_{i,l+1}$, $x_{i,M+l+S}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_\alpha}$; $S = -2, -1, \dots, 2$; $i = 2l - 1$), где следует положить $\xi_n = \left[\overset{e}{\xi}_n (R_\alpha - \tau_{R_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} x_{i,l-3} &= \xi_{11}, & x_{i,l-2} &= -6\xi_{11}, & x_{i,l-1} &= 2\tau\xi_{10} - \tau^2\xi_9 + 12\xi_{11}, \\ x_{il} &= 2\tau^3\xi_8 - 4\tau\xi_{10} - 10\xi_{11}, & x_{i,l+1} &= 2\tau\xi_{10} + \tau^2\xi_9 + 3\xi_{11}, \\ x_{i,M+l} &= 2\tau\xi_{14} - \tau^2\xi_{13}, & x_{i,M+l+1} &= 2\tau^3\xi_{12} - 4\tau\xi_{14}, \\ x_{i,M+l+2} &= \tau^2\xi_{13} + 2\tau\xi_{14}. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Здесь $l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_\alpha}$, $i = 2l - 1$, $\xi_n = \left[\overset{p}{\xi}_n (\psi_\alpha - \tau_{\psi_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N + 1$; при $\alpha = N + 1$ следует положить $\overset{p}{V}_\alpha = \overset{p}{V}$.

Вид аналогичный (4.1.19) имеют следующие группы элементов: $x_{i,l+S}$, $x_{i,M+l}$, $x_{i,M+l+1}$, $x_{i,M+l+2}$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_\alpha}$, $S = -3, -2, \dots, 1$, $i = 2l$), где надо принять $\xi_n = \left[\overset{e}{\xi}_n (R_\alpha - \tau_{R_\alpha}) \right]_\alpha$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

В строке $i = 2M_{\psi_\alpha} + 1$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) расположены элементы вида

$$\begin{aligned} x_{i,M_{\psi_\alpha}-1} &= -\frac{1}{2\tau_{\psi_\alpha}}, & x_{i,M_{\psi_\alpha}} &= \frac{2}{\tau_{\psi_\alpha}}, & x_{i,M_{\psi_\alpha}+1} &= \frac{1}{\psi_\alpha} - \frac{3}{2\tau_{\psi_\alpha}}, \\ x_{i,l-1} &= -\frac{\varphi_{10}}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, & x_{il} &= \frac{\varphi_9}{2\tau_{\psi_\alpha}} + \frac{4\varphi_{10}}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, & x_{i,l+1} &= -\frac{2\varphi_9}{\tau_{\psi_\alpha}} - \frac{5\varphi_{10}}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, \\ x_{i,l+2} &= \frac{m}{\psi_\alpha} + \frac{3\varphi_9}{2\tau_{\psi_\alpha}} + \varphi_{10} \left(\frac{2}{\tau_{\psi_\alpha}^2} - \frac{2}{\tau_{R_\alpha}^2} \right), & x_{i,l+3} &= \frac{5\varphi_{10}}{\tau_{R_\alpha}^2}, \\ x_{i,l+4} &= -\frac{4\varphi_{10}}{\tau_{R_\alpha}^2}, & x_{i,l+5} &= \frac{\varphi_{10}}{\tau_{R_\alpha}^2}, & l &= M + M_{\psi_\alpha}. \end{aligned}$$

Для $i = 2M_{\psi_\alpha} + 2$ ($\alpha = 1, 2.., N$) верны соотношения

$$\begin{aligned} x_{i, M_{\psi_\alpha}-2} &= -\frac{1}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, \quad x_{i, M_{\psi_\alpha}-1} = \frac{4}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, \quad x_{i, M_{\psi_\alpha}} = -\frac{5}{\tau_{\psi_\alpha}^2}, \\ x_{i, M_{\psi_\alpha}+1} &= 2 \left(\frac{1}{\tau_{\psi_\alpha}^2} - \frac{1}{\tau_{R_\alpha}^2} \right), \quad x_{i, M_{\psi_\alpha}+2} = \frac{5}{\tau_{R_\alpha}^2}, \\ x_{i, M_{\psi_\alpha}+3} &= -\frac{4}{\tau_{R_\alpha}^2}, \quad x_{i, M_{\psi_\alpha}+4} = \frac{1}{\tau_{R_\alpha}^2} + \varphi_{10} \left(\frac{2}{\tau_{\psi_\alpha}^2} - \frac{2}{\tau_{R_\alpha}^2} \right). \end{aligned}$$

В этих строках ($2N$ строк) вычисления соответствуют точкам $r = \psi_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$).

При $i = 2l + 1$ ($l = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$) элементы определителя вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_{i, l+1} &= 1 + \frac{3}{2\tau_{\psi_{\alpha+1}}}, \quad x_{i, l+2} = \frac{2}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}}, \quad x_{i, l+3} = \frac{1}{2\tau_{\psi_{\alpha+1}}}, \\ x_{i, M+l-1} &= \frac{\varphi_{12}}{\tau_{R_\alpha}^2}, \quad x_{i, M+l} = -\frac{4\varphi_{12}}{\tau_{R_\alpha}^2}, \quad x_{i, M+l+1} = \frac{5\varphi_{12}}{\tau_{R_\alpha}^2}, \\ x_{i, M+l+2} &= \frac{m}{R_1} - \frac{3\varphi_{11}}{2\tau_{\psi_{\alpha+1}}} + \varphi_{12} \left(\frac{2}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2} - \frac{2}{\tau_{R_\alpha}^2} \right), \quad (4.1.20) \\ x_{i, M+l+3} &= \frac{2\varphi_{11}}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}} - \frac{5\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}, \\ x_{i, M+l+4} &= -\frac{\varphi_{11}}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}} + \frac{4\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}, \quad x_{i, M+l+5} = -\frac{\varphi_{12}}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}. \end{aligned}$$

При $i = 2l + 2$ имеем

$$\begin{aligned} x_{i, l-2} &= \frac{1}{2\tau_{R_\alpha}^2}, \quad x_{i, l-1} = -\frac{4}{\tau_{R_\alpha}^2}, \quad x_{il} = \frac{5}{\tau_{R_\alpha}^2}, \\ x_{i, l+1} &= 2 \left(\frac{1}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2} - \frac{1}{\tau_{R_\alpha}^2} \right), \quad x_{i, l+2} = -\frac{5}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}, \\ x_{i, l+3} &= \frac{4}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}, \quad x_{i, l+4} = -\frac{1}{\tau_{\psi_{\alpha+1}}^2}. \end{aligned}$$

Эти $2N$ строк соответствуют граничным условиям на линии сопряжения i -го и $i + 1$ -го слоев крепи и массива. При $\alpha = N$ следует положить $\overset{p}{V}_{\alpha+1} = \overset{p}{V}$, $\tau_{\psi_{\alpha+1}} = \tau_\gamma$.

При $i = 2\overset{\circ}{p} + 1$ имеют место элементы:

$$\begin{aligned} x_{i, p-1} &= -\frac{1}{2\tau_\gamma}, \quad x_{ip} = \frac{2}{\tau_\gamma}, \quad x_{i, p+1} = \frac{1}{\gamma} - \frac{3}{2\tau_\gamma}, \\ x_{i, M+p-1} &= -\frac{\varphi_{14}}{\tau_\gamma^2}, \quad x_{i, M+p} = \frac{4\varphi_{14}}{\tau_\gamma^2}, \quad x_{i, M+p+1} = -\frac{5\varphi_{14}}{\tau_\gamma^2}, \quad (4.1.21a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{i, M+p+2} &= \frac{m}{\gamma} + \varphi_{14} \left(\frac{2}{\tau_\gamma^2} - \frac{2}{\tau_e^2} \right), \quad x_{i, M+p+3} = \frac{5\varphi_{14}}{\tau_e^2}, \\ x_{i, M+p+4} &= -\frac{4\varphi_{14}}{\tau_e^2}, \quad x_{i, M+p+5} = \frac{\varphi_{14}}{\tau_e^2}. \end{aligned} \quad (4.1.216)$$

При $i = 2p + 2$ элементы имеют вид

$$x_{i, p-2} = -\frac{1}{\tau_\gamma^2}, \quad x_{i, p-1} = \frac{4}{\tau_\gamma^2}, \quad x_{ip} = -\frac{5}{\tau_\gamma^2},$$

$$x_{i, p+1} = 2 \left(\frac{1}{\tau_\gamma^2} - \frac{1}{\tau_e^2} \right), \quad x_{i, p+2} = \frac{5}{\tau_e^2}, \quad x_{i, p+3} = \frac{4}{\tau_e^2}, \quad x_{i, p+4} = \frac{1}{\tau_e^2}.$$

Эти две строки соответствуют условиям на границе γ раздела упругой и пластической областей массива.

Оставшиеся элементы соответствуют значению $r = R^*$:

$$\begin{aligned} x_{2M-1, M-1} &= 1, \quad x_{2M-1, M} = -4, \quad x_{2M-1, M+1} = 3, \\ x_{2M, M-2} &= -1, \quad x_{2M, M-1} = 4, \quad x_{2M, M} = -5, \\ x_{2M, M+1} &= 2, \quad x_{2M+1, 2M} = 1, \quad x_{2M+1, 2M+1} = -4, \quad (4.1.22) \\ x_{2M+1, 2M+2} &= 3, \quad x_{2M+1, 2M-1} = -1, \quad x_{2M+2, 2M} = 4, \\ x_{2M+2, 2M+1} &= -5, \quad x_{2M+1, 2M+2} = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, в рамках конечно-разностной схемы, задача локальной потери устойчивости (отказа) горизонтальной выработки с многослойной крепью в трехмерном случае сведена к разрешимости матричного уравнения $\det(x_{ij}) = 0$, элементы которого имеют вид (4.1.14–4.1.22).

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунках 4.1.1–4.1.4 для случая, когда горный массив содержал выработку, подкрепленную двухслойной крепью. Рассмотрены варианты: 1 — материал массива — песчаник, не опасный по выбросам, внешний слой крепи — железобетон, внутренний — бетон; 2 — материал массива — песчаник, не опасный по выбросам, внешний слой крепи — бетон, внутренний — железобетон; 3 — материал массива — аргиллит, внешний слой крепи — железобетон, внутренний — бетон; 4 — материал массива — аргиллит, внешний слой крепи — бетон, внутренний — железобетон.

На рисунках 4.1.1–4.1.4 показана область критических значений контактных давлений q_1, q_2 , при различной геометрии выработки и крепи, которым соответствуют значения параметров волнообразования $m = n = 4$. При этом безразмерное значение гидростатического давления в нетронутом массиве $gh = 0,01$, геометрические параметры R_0/R_2 изменились в интервале $0,001/1,1 \div 0,005/1,1$.

Анализ численного расчета показал:

локальная потеря устойчивости горизонтальной горной выработки с разномодульной двухслойной крепью происходит по

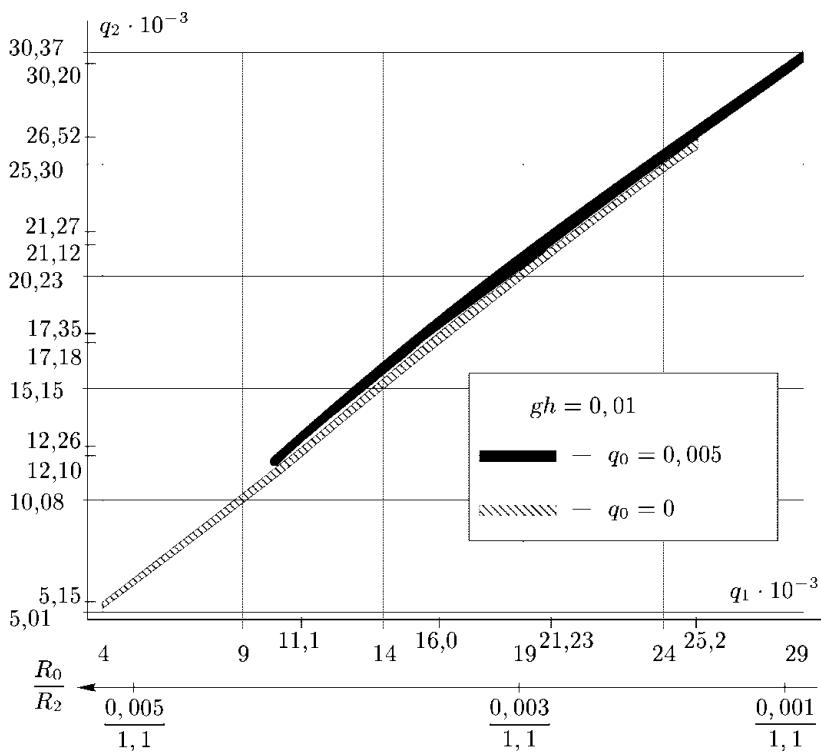


Рис. 4.1.1

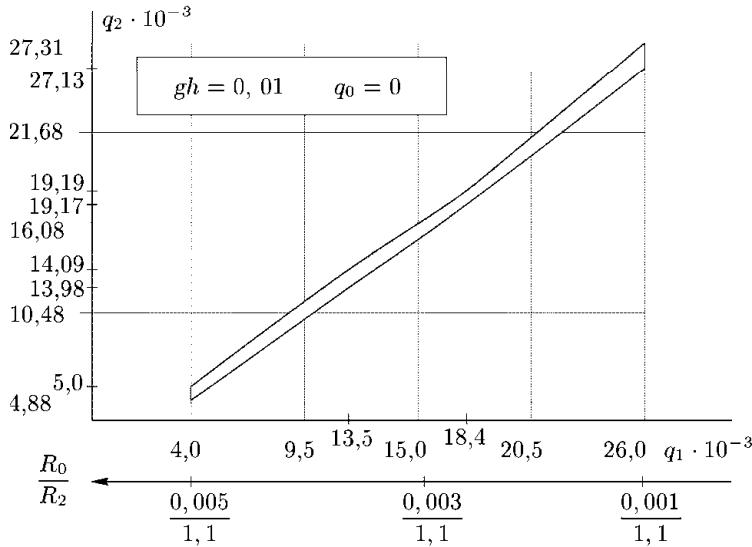


Рис. 4.1.2

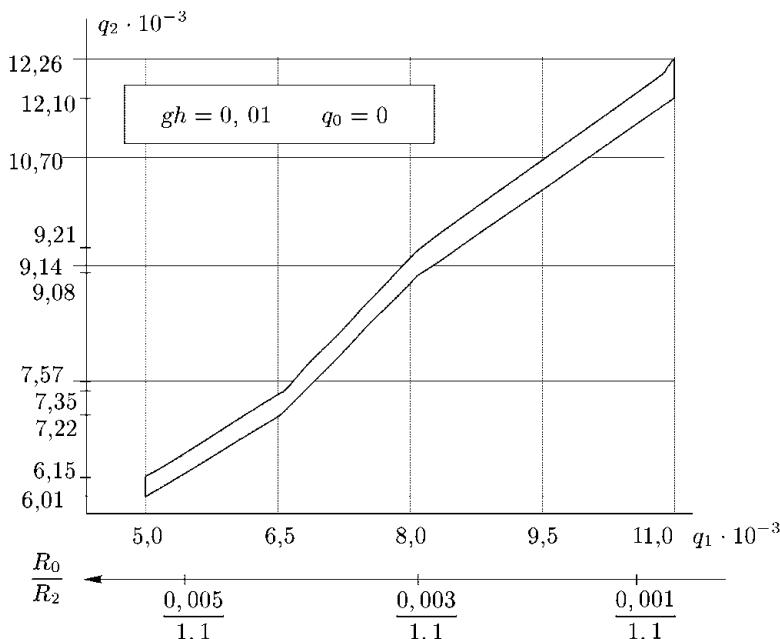


Рис. 4.1.3

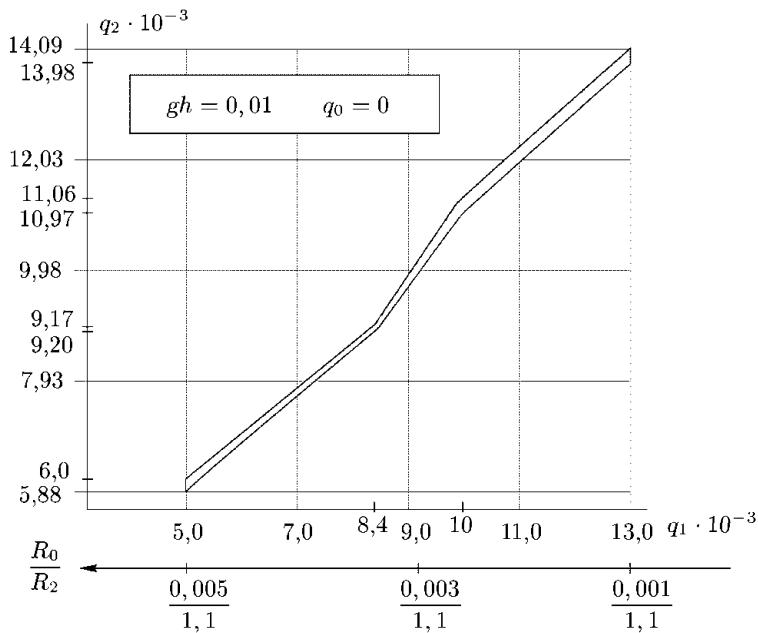


Рис. 4.1.4

осесимметричной форме, которой соответствуют значения параметров волнообразования $m = n = 4$. По-видимому, осесимметричная форма потери устойчивости горизонтальной выработки будет реализовываться и при любом конечном количестве слоев крепи;

область значений критических параметров, существенно зависит как от физико-механических, так и геометрических параметров конструкции — рисунки 4.1.1–4.1.4;

при увеличении давления q_0 на внутреннем контуре первого слоя крепи значения критических контактных давлений, соответствующих локальной потери устойчивости, увеличиваются (см. рис. 4.1.1).

4.2. Моделирование отказа вертикальной выработки с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород

При добыче полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных шахтных стволов, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями. Устойчивость вертикальных выработок в упругих и упругопластических массивах, как отмечено во введении, изучалась многими авторами [1, 2, 5, 108, 232, 257, 283]. При этом в частности, показано, что локальная потеря устойчивости вертикальной выработки кругового поперечного сечения происходит по осесимметричной форме.

Рассмотрим задачу о моделировании отказа вертикальной выработки с многослойной (N -слойной) крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород, в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания. Внутренний радиус i -го слоя — R_{i-1} , внешнего — R_i . На внутреннем контуре i -го слоя приложена сжимающая нагрузка q_{i-1} , на внешнем q_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

В этом случае начальное (докритическое) состояние в i -м слое крепи описывается уравнениями (3.2.18) и (3.2.19). Граница раздела ψ_i упругой и пластической областей определяется из (3.2.20). Основное напряженно деформированное состояние в массиве определяется соотношениями (3.3.3) и (3.3.4). Граница раздела γ вычисляется из (3.3.5).

Будем рассматривать осесимметричную форму потери устойчивости, тогда $u = u(r, z)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$. Согласно (1.5.2) имеем соотношения (2.2.3), т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + (2 - a_*)u_{,r} + a_*\frac{u}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma + (2 - a_*)\frac{u}{r} + a_*u_{,r}, \\ \sigma_z &= \sigma + 2w_{,z}, \quad \sigma_{rz} = u_{,z} + w_{,r}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

При $a_* = 0$ в (4.2.1) приходим к решению в упругой области.

Решение линеаризированной системы уравнений устойчивости (1.5.16) для цилиндрических задач в случае осесимметричной формы потери устойчивости ($v=0$) с учетом (4.2.1), выберем в виде

$$u = \sum_n^{\infty} A_n(r) \cos(nz), \quad w = \sum_n^{\infty} C_n(r) \sin(nz),$$

$$\sigma = \sum_n^{\infty} D_n(r) \cos(nz).$$

Тогда повторяя результаты § 2 второй главы оставшиеся два уравнения системы (1.5.22) для краткости запишем в виде

$$D'(r) = \Phi_1(r), \quad D(r) = -\frac{1}{n} \Phi_2(r). \quad (4.2.2)$$

Дифференцируя второе уравнение (4.2.2) по r и вычитая его из первого, получим

$$\frac{1}{n} \Phi_2' + \Phi_1 = 0. \quad (4.2.3)$$

Из условия несжимаемости (1.5.24) следует

$$C = -\frac{1}{n} \left(A' + \frac{1}{r} A \right). \quad (4.2.4)$$

Исключая, с помощью равенства (4.2.4) функцию C , уравнение (4.2.3) можно переписать в терминах функции A :

$$\xi_1 A^{(IV)}(r) + \xi_2 A'''(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 A'(r) + \xi_5 A(r) = 0, \quad (4.2.5)$$

где

$$\xi_1 = 1 + \overset{\circ}{\sigma}_r, \quad \xi_2 = \frac{1}{r} \left(2 + \overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta} + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right),$$

$$\xi_3 = n^2 (a_{11} - a_{33}) + \frac{1}{r} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} \right) - \frac{3}{r^2} \left(1 + 2 \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta} \right),$$

$$\xi_4 = \frac{n^2}{r} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{\theta} - a_* \right) - \frac{1}{r^2} \left(2 \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} \right) + \frac{3}{r^3} \left(1 + 2 \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta} \right),$$

$$\xi_5 = -\frac{3}{r^4} \left(1 + 2 \overset{\circ}{\sigma}_r - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta} \right) + \frac{1}{r^3} \left(2 \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r} \right) + \frac{n^2}{r^2} \left(a_* - \overset{\circ}{\sigma}_{\theta} \right) - n^4.$$

Система уравнений (4.2.5) соответствует областям пластического V и упругого V при $a_* = 0$ деформирования массива. Если же функции A и компонентам тензора напряжений припишем нижний индекс i , то (4.2.5) будет соответствовать зонам V_i^p и V_i^e i -го слоя крепи ($i = 1, 2, \dots, N$).

Границные условия (1.5.23) на внутреннем контуре первого слоя крепи при $r = R_0$ с учетом (4.2.1) и выбора формы потери

устойчивости таковы:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1\right] \left(\overset{p}{A}'''_1\right) + \frac{1}{r} \left[2 + \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1 + \left(\overset{\circ}{\sigma}_\theta^p\right)_1\right] \left(\overset{p}{A}''_1\right) - \\ & - \left\{ \frac{1}{r^2} \left[1 + 2 \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1 - \left(\overset{\circ}{\sigma}_\theta^p\right)_1\right] + n^2 \left[a_* - 1 + \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1\right] \right\} \left(\overset{p}{A}'_1\right) - \\ & - \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}_\theta^p\right)_1 - 2 \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1 - 1\right] + n^2 (1 + a_*) \right\} \left(\overset{p}{A}_1\right) = 0, \quad (4.2.6) \\ & \left(\overset{p}{A}''_1\right) + \frac{1}{r} \left(\overset{p}{A}'_1\right) + \left[\frac{n^2}{1 + \left(\overset{\circ}{\sigma}_r^p\right)_1} - \frac{1}{r^2}\right] \left(\overset{p}{A}_1\right) = 0. \end{aligned}$$

Из условий сопряжения (1.5.3) на упругопластической границе ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в этом случае получим

$$\begin{aligned} & \left(\overset{p}{A}_i\right) - \left(\overset{e}{A}_i\right) = 0, \quad \left(\overset{p}{A}'_i\right) - \left(\overset{e}{A}'_i\right) = 0, \\ & \left(\overset{p}{A}''_i\right) - \left(\overset{e}{A}''_i\right) = 0, \quad \left(\overset{p}{A}'_i\right) - \frac{1}{\psi_i} \left(\overset{p}{A}_i\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

На границе раздела упругой и пластической областей массива имеют место условия аналогичные (4.2.7), в которых следует опустить индекс i и ψ_i заменить на γ .

На границе i -го и $(i+1)$ -го ($i = 1, 2, \dots, N$) слоев крепи согласно (1.5.12) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \left(\overset{p}{A}_{i+1}\right) - \left(\overset{e}{A}_i\right) = 0, \quad \left(\overset{p}{A}'_{i+1}\right) - \left(\overset{e}{A}'_i\right) = 0, \\ & \left(\overset{p}{A}''_{i+1}\right) - \left(\overset{e}{A}''_i\right) = 0, \quad \left(\overset{p}{A}'_{i+1}\right) - \frac{1}{R_i} \left(\overset{p}{A}_{i+1}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ следует

$$\overset{e}{A}' = 0, \quad \overset{e}{A}'' = 0. \quad (4.2.9)$$

Таким образом, получили замкнутую краевую задачу (4.2.5)–(4.2.9), коэффициенты уравнений которой зависят от безразмерных параметров материалов c_i, k_i, c, k , радиусов R_0, ψ_i, R_i , γ интенсивности нагрузок q_i, q_0 ($i = 1, 2, \dots, N$), параметра волнообразования n и глубины h . Эту задачу в терминах функции A положим в основу исследования отказов вертикальных выработок с многослойной крепью при упругопластическом поведении массива и крепей и докритическом состоянии определенном выше в § 2 и 3.

Для решения задачи, как и ранее, будем использовать конечно-разностный метод. Обозначим через b_{3i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) коэффициенты уравнения (4.2.5) и через b_{1i} ($i = 1, 2, \dots, 4$)

и b_{2i} ($i = 1, 2, 3$) коэффициенты уравнений (4.2.6). Функции $A(r)$ и ее производным следует в каждой зоне конструкции V_i , V_i^p ($i = 1, 2, \dots, N$) присвоить индексы p_i и e_i соответственно. Перейдем с помощью аппроксимаций (1.6.1), (1.6.2) от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям.

Уравнение равновесия (4.2.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} A_{j-2} \left(b_{31} - \frac{\tau}{2} b_{32} \right) + A_{j-1} \left(-4b_{31} + \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} - \frac{\tau^3}{3} b_{34} \right) + \\ + A_j (6b_{31} - 2\tau^2 b_{33} + \tau^4 b_{35}) + A_{j+1} \left(-4b_{31} - \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} + \frac{\tau^3}{3} b_{34} \right) + \\ + A_{j+2} \left(b_{31} + \frac{\tau}{3} b_{32} \right) = 0, \quad (4.2.10) \end{aligned}$$

а граничные условия (4.2.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_1 \left(\tau^3 b_{14} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} + 2\tau b_{12} - \frac{5}{2} b_{11} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix} \right)_1 \times \\ \times \left(9b_{11} - 5\tau b_{12} + 2\tau^2 b_{13} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(4\tau b_{12} - \frac{1}{2} \tau^2 b_{13} - 12b_{11} \right) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+3} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(7b_{11} - \tau b_{12} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+4} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(-\frac{3}{2} \tau^2 b_{11} \right) = 0, \quad (4.2.11) \\ \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_1 \left(2b_{21} - \frac{3}{2} \tau b_{22} + \tau^2 b_{33} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+1} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(2\tau b_{22} - 5b_{21} \right) + \\ + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+2} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(4b_{21} - \frac{\tau}{2} b_{22} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j+3} \end{smallmatrix} \right)_1 \left(-b_{21} \right) = 0. \end{aligned}$$

Условия сопряження (4.2.7) при $r = \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) перепишутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-2} \end{smallmatrix} \right)_i - 2 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-1} \end{smallmatrix} \right)_i + 3 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_i - 2 \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+1} \end{smallmatrix} \right)_i + \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+2} \end{smallmatrix} \right)_i = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-3} \end{smallmatrix} \right)_i - 4 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-2} \end{smallmatrix} \right)_i + 5 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-1} \end{smallmatrix} \right)_i - 4 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_i + 5 \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+1} \end{smallmatrix} \right)_i - \\ 4 \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+2} \end{smallmatrix} \right)_i + \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_{j+3} \end{smallmatrix} \right)_i = 0, \quad (4.2.12) \\ \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-2} \end{smallmatrix} \right)_i - 2 \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_{j-1} \end{smallmatrix} \right)_i + \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_i \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau}{\psi_i} \right) = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} p \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_i - \left(\begin{smallmatrix} e \\ A_j \end{smallmatrix} \right)_i = 0. \end{aligned}$$

Если в соотношениях (4.2.12) убрать индексы i , а величину ψ_i заменить на γ , то получим условия на границе $r = \gamma$.

Условиям (4.2.8) соответствуют соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\overset{e}{A}_{j-2} \right)_i - 2 \left(\overset{e}{A}_{j-1} \right)_i + 3 \left(\overset{e}{A}_j \right)_i - 2 \left(\overset{p}{A}_{j+1} \right)_{i+1} + \frac{1}{2} \left(\overset{p}{A}_{j+2} \right)_i &= 0, \\ \left(\overset{e}{A}_{j-3} \right)_i - 4 \left(\overset{e}{A}_{j-2} \right)_i + 5 \left(\overset{e}{A}_{j-1} \right)_i - 4 \left(\overset{e}{A}_j \right)_i + 5 \left(\overset{p}{A}_{j+1} \right)_{i+1} - \\ - 4 \left(\overset{p}{A}_{j+2} \right)_{i+1} + \left(\overset{p}{A}_{j+3} \right)_{i+1} &= 0, \quad (4.2.13) \\ \frac{1}{2} \left(\overset{e}{A}_{j-2} \right)_i - 2 \left(\overset{e}{A}_{j-1} \right)_i + \left(\overset{e}{A}_j \right)_i \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau}{R_i} \right) &= 0, \\ \left(\overset{p}{A}_j \right)_{i+1} - \left(\overset{e}{A}_j \right)_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Условия на бесконечности (4.2.9) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} 3 \overset{e}{A}_j - 4 \overset{e}{A}_{j-1} + \overset{e}{A}_{j-2} &= 0, \\ 2 \overset{e}{A}_j - 5 \overset{e}{A}_{j-1} + 4 \overset{e}{A}_{j-2} - \overset{e}{A}_{j-3} &= 0 \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

Система уравнений (4.2.9)–(4.2.14) представляет собой бесконечную систему однородных алгебраических уравнений линейных относительно величин A_n , A_n^i ($i = 1, 2, \dots, N$). Следовательно, как и в предыдущем параграфе, исследование вопроса о локальной потере устойчивости (об отказе) вертикальной выработки с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород сведено к определению допустимых комбинаций критических параметров контактных давлений q_i ($i = 0, 1, \dots, N$), из условия равенства нулю определителя конечно-разностной системы уравнений (4.2.9)–(4.2.14).

Ненулевые элементы определителя $\det(x_{ij})$ следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \tau^3 b_{14} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} + 2\tau b_{12} - \frac{5}{2} b_{11}, \quad x_{12} = 9b_{11} - 5\tau b_{12} + 2\tau^2 b_{13}, \\ x_{13} &= 4\tau b_{12} - \frac{1}{2} \tau^2 b_{13} - 12b_{11}, \quad x_{14} = 7b_{11} - \tau b_{12}, \\ x_{15} &= -\frac{3}{2} \tau^2 b_{11}, \quad x_{21} = 2b_{21} - \frac{3}{2} \tau b_{22} + \tau^2 b_{23}, \\ x_{22} &= 2\tau b_{22} - 5b_{21}, \quad x_{23} = 4b_{21} - \frac{\tau}{2} b_{22}, \quad x_{24} = -b_{21}, \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

здесь $b_{1i} = \left[\overset{p}{b}_{1i}(r) \right]_1$, $i = 1, 2, 3, 4$; $b_{2i} = \left(\overset{p}{b}_{2i}(r) \right)_1$, $i = 1, 2, 3$, $r = R_0$.

Элементы

$$x_{M_1+1, j+1} \quad (M_1 = M_{\psi_1} + M_{R_1}, \quad j = M_1 - 3, M_1 - 2, \dots, M_1)$$

и

$$x_{M_1+2, j+1} \quad (M_1 = M_{\psi_1} + M_{R_1}, \quad j = M_1 - 2, M_1 - 1, M_1)$$

определяются по соотношениям (4.2.14) для x_{1i} ($i = 5, 4, 3, 2$) и x_{2i} ($i = 4, 3, 2$) соответственно, в которых только следует положить $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{2i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $r = R_1$. Отличные от нуля элементы для областей $V_2, V_2, \dots, V_N, V_N$ представимы в следующей форме.

Элементы

$$x_{M_{\alpha-1}+1, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k}),$$

$$j = M_{\alpha-1}, M_{\alpha-1} + 1, \dots, M_{\alpha-1} + 4)$$

и

$$x_{M_{\alpha-1}+2, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k}),$$

$$j = M_{\alpha-1}, M_{\alpha-1} + 1, \dots, M_{\alpha-1} + 3)$$

определяются по соотношениям (4.2.14) для x_{1i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) и x_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$) соответственно, где надо положить $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(R_{\alpha-1}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{2i}(R_{\alpha-1}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$. Здесь $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и при $\alpha = 1$ принято $N_{\alpha-1} = 0$.

Элементы

$$x_{M_{\alpha}+1, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k}), \quad j = M_{\alpha}-3, M_{\alpha}-2, \dots, M_{\alpha})$$

и

$$x_{M_{\alpha}+2, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k}), \quad j = M_{\alpha}-2, M_{\alpha}-1, M_{\alpha})$$

определяются по соотношениям (4.2.14) для x_{1i} ($i = 5, 4, 3, 2$) и x_{2i} ($i = 4, 3, 2$) соответственно, в которых положим $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(R_{\alpha}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{2i}(R_{\alpha}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$ $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Элементы

$$x_{M_N+1, j+1} \quad (M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}),$$

$$j = M_N, M_N + 1, \dots, M_N + 4)$$

и

$$x_{M_N+2, j+1} \quad (M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}),$$

$$j = M_N, M_N + 1, \dots, M_N + 3)$$

определяются по соотношениям (4.2.14) для x_{1i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) и x_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$) соответственно, где надо положить $b_{1i} = \frac{p}{2} b_{1i}(R_N)$, $b_{2i} = \frac{p}{2} b_{2i}(R_N)$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= b_{31} - \frac{\tau}{2} b_{32}, \quad x_{i,j+1} = -4b_{31} + \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} - \frac{\tau^3}{2} b_{34}, \\ x_{i,j+2} &= 6b_{31} - 2\tau^2 b_{33} + \tau^4 b_{35}, \\ x_{i,j+3} &= -4b_{31} - \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} + \frac{\tau^3}{2} b_{34}, \\ x_{i,j+4} &= b_{31} + \frac{\tau}{2} b_{32}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

При $i = M_{\alpha-1} + 3, M_{\alpha-1} + 4, \dots, M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} - 1$, $j = i - 1$, $M_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})$, $M_0 = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.2.16) надо

положить $b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha$, $R_{\alpha-1} + 2\tau \leq r \leq \psi_\alpha - 2\tau$.

При $i = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 3, \dots, M_\alpha - 1$, $j = i - 1$, $M_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.2.15) надо положить $b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha$, $\psi_\alpha + 2\tau \leq r \leq R_\alpha - 2\tau$.

При $i = M_N + 3, M_N + 4, \dots, M_N + M_\gamma - 1$, $j = i - 1$, $M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k})$ в (4.2.16) надо положить $b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha$, $R_N + 2\tau \leq r \leq \gamma - 2\tau$.

При $i = M_N + M_\gamma + 3, \dots, M_N + M_\gamma + M_e - 1$, $j = i - 1$, $M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k})$ в (4.2.16) надо положить $b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha$, $\gamma + 2\tau \leq r \leq R^* - 2\tau$; M_e — количество точек разбиения в упругой области массива, R^* — радиус массива, при котором ставятся условия локальности возмущений:

при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha}$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 1$

$$\begin{aligned} x_{j,j-3} &= x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} &= x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4; \end{aligned}$$

при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_{\psi_\alpha}}{\psi_\alpha};$$

при $j = M_\alpha$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_\alpha + 1$

$$x_{j,j-3} = x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} = x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4;$$

при $j = M_\alpha + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_{R_\alpha}}{R_\alpha}.$$

Здесь $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и при $\alpha = 1$ принято $N_{\alpha-1} = 0$;

при $j = M_N + M_\gamma$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_N + M_\gamma + 1$

$$x_{j,j-3} = x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} = x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4;$$

при $j = M_N + M_\gamma + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_\gamma}{\gamma};$$

при $j = M_N + M_\gamma + M_e$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_N + M_\gamma + M_e + 1$

$$x_{j,j-3} = x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} = x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4;$$

при $j = M_N + M_\gamma + M_e + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_{R^*}}{R^*};$$

$$x_{M+1,M-2} = x_{M+1,M-1} = 0, \quad x_{M+1,M} = \frac{1}{2}, \quad x_{M+1,M+1} = -2,$$

$$x_{M+1,M+2} = \frac{3}{2}, \quad x_{M+2,M-1} = x_{M+2,M} = x_{M+2,M+1} = 0,$$

$$x_{M+2,M+2} = 1, \quad M = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}) + M_\gamma + M_e.$$

Таким образом, в рамках конечно-разностной схемы, задача локальной осесимметричной формы потери устойчивости вертикальной выработки с многослойной крепью сведена к разрешимости матричного уравнения $\det(x_{ij}) = 0$ с элементами отличными от нуля, приведенными выше. При этом при вычислении определителя $\det(x_{ij})$, наряду с основным напряженно-деформированным состоянием для каждой из областей V_i , $V_i^{p,e}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) крепи (3.2.18), (3.2.19) и областей V , V^p массива (3.3.3), (3.3.4), необходимо также учитывать уравнения (3.2.20) и (3.3.5), определяющие положения упругопластических границ ψ_i многослойной крепи и γ — в горном массиве. Минимизация должна проводиться по параметру n и параметрам материала и конструкции λ_j .

Таким образом, как и в предыдущем параграфе, получаем задачу многомерной оптимизации величин q_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) в зависимости от n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_i, n, \lambda_j) = 0$.

Численный расчет проводился для случая, когда горный массив аргиллита содержал выработку, подкрепленную двухслойной крепью. Причем материал внешнего слоя крепи — бетон, внутреннего — железобетон. Результаты расчета представлены на рисунках 4.2.1–4.2.3.

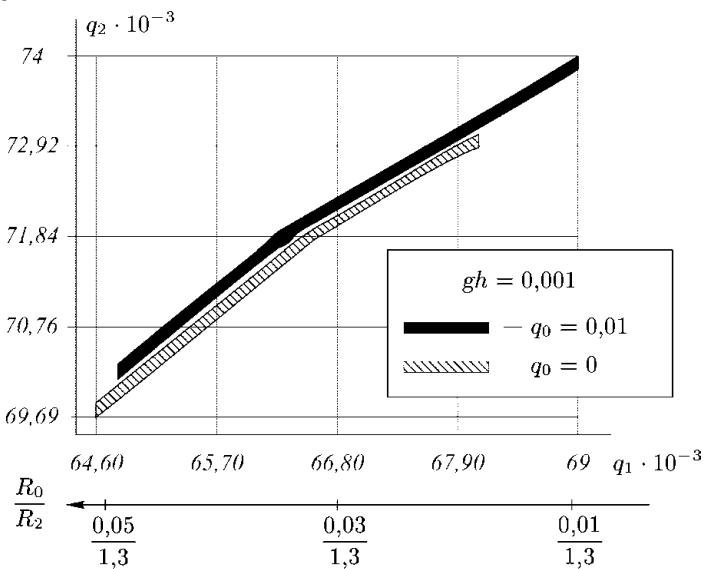


Рис. 4.2.1

На рис. 4.2.1 показана область критических значений параметров контактных давлений q_1 , q_2 при различной геометрии

конструкции, которым соответствует значение параметра волнообразования $n = 2$. При этом принималось безразмерное значение гидростатического давления в нетронутом массиве $gh = 0,01$, геометрические параметры R_0/R_2 изменялись в интервале $0,01/1,3 \div 0,1/1,3$. На рис. 4.2.2 показана область критических

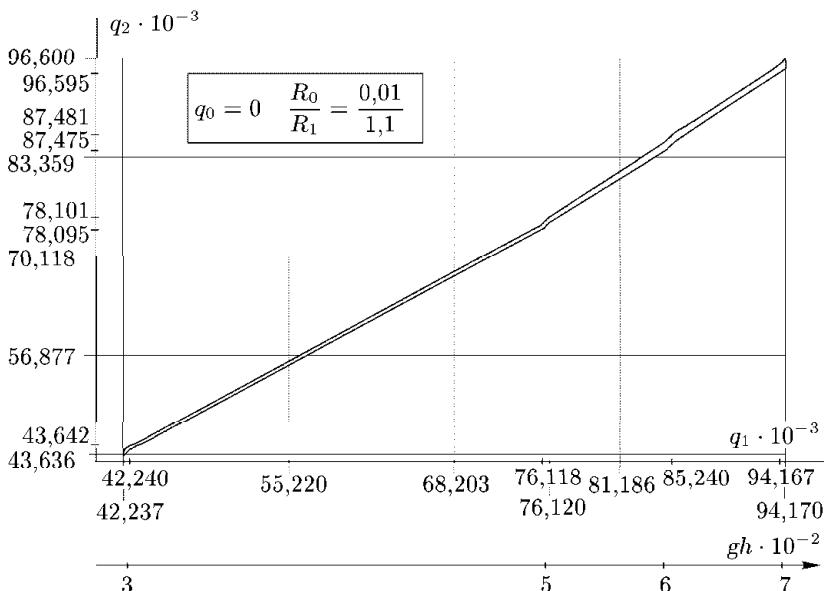


Рис. 4.2.2

значений параметров контактных давлений q_1 , q_2 при значениях безразмерной величины гидростатического давления gh изменяющихся в интервале $0,03 \div 0,07$, при этом геометрические параметры $R_0/R_2 = 0,01/1,1$. На рис. 4.2.3 представлена зависимость

оптимальной толщины крепи от безразмерной величины гидростатического давления (от глубины заложения выработки).

Анализ численного расчета показал:

осесимметричная форма потери устойчивости вертикальной выработки с разномодульной двухслойной крепью происходит при значении параметра волнообразования $n = 2$;

с ростом гидростатического давления критические контактные давления q_i ($i = 1, 2$) возрастают (см. рис. 4.2.2);

Рис. 4.2.3

при увеличении давления q_0 на внутреннем контуре первого слоя крепи значения критических контактных давлений, соответствующих локальной потери устойчивости, увеличиваются (см. рис. 4.2.1);

оптимальная толщина крепи существенно зависит от глубины заложения выработки (см. рис. 4.2.3);

область значений критических параметров, определяющая отказы выработки существенно зависит от геометрических параметров.

4.3. Исследование устойчивости многослойной разномодульной крепи вертикальной горной выработки в массивах, обладающих упругопластическими свойствами

Как отмечалось выше крепежные конструкции (крепи) горных выработок являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями. Поэтому вопрос об устойчивости самих крепей является также актуальным вопросом, как в плане их безаварийной эксплуатации, так и в экономическом плане.

В этом параграфе моделируется потеря устойчивости многослойной (N -слойной) крепи, подкрепляющей вертикальную выработку. Действие массива на внешний слой крепи определяется соотношением (3.3.3) при $r = R_N$. Предполагается, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания. Внутренний радиус i -го слоя — R_{i-1} , внешнего — R_i . На внутреннем контуре i -го слоя приложена сжимающая нагрузка q_{i-1} , на внешнем q_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Докритическое напряженно-деформированное состояние в i -м слое крепи описывается уравнениями (3.2.18) и (3.2.19). Граница раздела ψ_i упругой и пластической областей определяется из (3.2.20). Основное напряженно деформированное состояние в массиве определяется соотношениями (3.3.3), (3.3.4). Граница раздела γ вычисляется из (3.3.5).

Математическая модель для исследования потери устойчивости состояния равновесия разномодульной крепи вертикальной выработки, в случае осесимметричной формы потери устойчивости $u = u(r, z)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$, как и в предыдущем параграфе, сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений состоящей из

уравнений равновесия (4.2.5) для каждой из областей упругого $\overset{e}{V}$ и пластического $\overset{p}{V}$ деформирования слоев крепи ($i = 1, 2, \dots, N$); условий на внутреннем контуре первого слоя крепи при $r = R_0$ (4.2.6);

условий на внешнем контуре последнего слоя крепи при $r = R_N$ (4.2.6), где надо опустить индекс 1, при этом действуют массы на крепь, т. с. величины σ_r^{op} и σ_θ^{op} определяются из соотношений (3.3.3);

условий сопряжения на упругопластической границе ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) (4.2.7); условий сопряжения на границе i -го и $(i+1)$ -го ($i = 1, 2, \dots, N-1$) слоев крепи (4.2.8).

Таким образом, получили замкнутую красную задачу в терминах функции A , коэффициенты уравнений которой зависят от безразмерных параметров материалов c_i, k_i , радиусов ψ_i, R_i , интенсивности нагрузок q_i, q_0 ($i = 1, 2, \dots, N$), параметра выщупивания n .

Отметим, что если в полученной краевой задаче количество слоев крепи N положить равным 1, то приходим к результатам работы [283].

Для решения задачи, как и ранее, будем использовать конечно-разностный метод. Обозначим через b_{3i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) коэффициенты уравнения (4.2.5) и через b_{1i} ($i = 1, 2, \dots, 4$) и b_{2i} ($i = 1, 2, 3$) коэффициенты уравнений (4.2.6). Функции $A(r)$ и ее производным следует в каждой зоне конструкции V_i, V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) приписать индексы p, e и i соответственно.

После применения обычной процедуры получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений линейных относительно параметров A_n^i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Ненулевые элементы определителя $\det(x_{ij})$ полученной системы следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \tau^3 b_{14} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} + 2\tau b_{12} - \frac{5}{2} b_{11}, \\ x_{12} &= 9b_{11} - 5\tau b_{12} + 2\tau^2 b_{13}, \\ x_{13} &= 4\tau b_{12} - \frac{1}{2} \tau^2 b_{13} - 12b_{11}, \quad x_{14} = 7b_{11} - \tau b_{12}, \\ x_{15} &= -\frac{3}{2} \tau^2 b_{11}, \quad x_{21} = 2b_{21} - \frac{3}{2} \tau b_{22} + \tau^2 b_{23}, \\ x_{22} &= 2\tau b_{22} - 5b_{21}, \quad x_{23} = 4b_{21} - \frac{\tau}{2} b_{22}, \quad x_{24} = -b_{21}, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

здесь $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $i = 1, 2, 3, 4$; $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{2i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $i = 1, 2, 3$, $r = R_0$.

Элементы $x_{M_1+1, j+1}$ ($M_1 = M_{\psi_1} + M_{R_1}$, $j = M_1 - 3, M_1 - 2, \dots, M_1$) и $x_{M_1+2, j+1}$ ($M_1 = M_{\psi_1} + M_{R_1}$, $j = M_1 - 2, M_1 - 1, M_1$) определяются этими же соотношениями (4.3.1) для x_{1i} ($i = 5, 4, 3, 2$) и x_{2i} ($i = 4, 3, 2$) соответственно, в которых

следует положить $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{2i}(r) \end{smallmatrix} \right]_1$, $r = R_1$. Для областей $\frac{p}{V_2}, \frac{e}{V_2}, \dots, \frac{p}{V_N}, \frac{e}{V_N}$ отличные от нуля элементы определителя записутся так:

элементы

$$x_{M_{\alpha-1}+1, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})),$$

$$j = M_{\alpha-1}, M_{\alpha-1} + 1, \dots, M_{\alpha-1} + 4)$$

и

$$x_{M_{\alpha-1}+2, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})),$$

$$j = M_{\alpha-1}, M_{\alpha-1} + 1, \dots, M_{\alpha-1} + 3)$$

определяются по соотношениям (4.3.1) для x_{1i} ($i = 1, 2, \dots, 5$) и x_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$) соответственно, где надо положить $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(R_{\alpha-1}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{2i}(R_{\alpha-1}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$; здесь $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и принято при $\alpha = 1$, $N_{\alpha-1} = 0$;

элементы

$$x_{M_{\alpha}+1, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})), \quad j = M_{\alpha}-3, M_{\alpha}-2, \dots, M_{\alpha})$$

и

$$x_{M_{\alpha}+2, j+1} \quad (M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})), \quad j = M_{\alpha}-2, M_{\alpha}-1, M_{\alpha})$$

определяются по соотношениям (4.3.1) для x_{1i} ($i = 5, 4, 3, 2$) и x_{2i} ($i = 4, 3, 2$) соответственно, в которых положим $b_{1i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(R_{\alpha}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$, $b_{2i} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{2i}(R_{\alpha}) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$ $\alpha = 1, 2, \dots, N$:

$$x_{ij} = b_{31} - \frac{\tau}{2} b_{32}, \quad x_{i, j+1} = -4b_{31} + \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} - \frac{\tau^3}{2} b_{34},$$

$$x_{i, j+2} = 6b_{31} - 2\tau^2 b_{33} + \tau^4 b_{35}, \quad (4.3.2)$$

$$x_{i, j+3} = -4b_{31} - \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} + \frac{\tau^3}{2} b_{34}, \quad x_{i, j+4} = b_{31} + \frac{\tau}{2} b_{32}.$$

При $i = M_{\alpha-1} + 3, M_{\alpha-1} + 4, \dots, M_{\alpha-1} + M_{\psi_{\alpha}} - 1$, $j = i - 1$, $M_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})$, $M_0 = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.3.2) надо положить $b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} p \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_{\alpha}$, $R_{\alpha-1} + 2\tau \leq r \leq \psi_{\alpha} - 2\tau$;

при $i = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 3, \dots, M_\alpha - 1$, $j = i - 1$, $M_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha} (M_{\psi_k} + M_{R_k})$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.3.2) надо положить

$b_{3s} = \left[\begin{smallmatrix} e \\ b_{1i}(r) \end{smallmatrix} \right]_\alpha$, $\psi_\alpha + 2\tau \leq r \leq R_\alpha - 2\tau$:
при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha}$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 1$

$$x_{j,j-3} = x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} = x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4;$$

при $j = M_{\alpha-1} + M_{\psi_\alpha} + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_{\psi_\alpha}}{\psi_\alpha};$$

при $j = M_\alpha$

$$x_{j,j+3} = x_{j,j-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j+2} = x_{jj} = -2, \quad x_{j,j+1} = 3;$$

при $j = M_\alpha + 1$

$$x_{j,j-3} = x_{j,j+3} = 1, \quad x_{j,j-2} = x_{j,j+2} = -4, \\ x_{j,j-1} = x_{j,j+1} = 5, \quad x_{jj} = -4;$$

при $j = M_\alpha + 2$

$$x_{j,j-3} = \frac{1}{2}, \quad x_{j,j-2} = -2, \quad x_{j,j-1} = \frac{3}{2} - \frac{\tau_{R_\alpha}}{R_\alpha},$$

здесь $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и принято $N_{\alpha-1} = 0$ при $\alpha = 1$:

$$x_{M+1,M-2} = x_{M+1,M-1} = 0, \quad x_{M+1,M} = \frac{1}{2}, \quad x_{M+1,M+1} = -2,$$

$$x_{M+1,M+2} = \frac{3}{2}, \quad x_{M+2,M-1} = x_{M+2,M} = x_{M+2,M+1} = 0,$$

$$x_{M+2,M+2} = 1 \quad M = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}).$$

Очевидно, при вычислении определителя $\det(x_{ij})$ вместе с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой из областей V_i, V_i^p, V_i^e ($i = 1, 2, \dots, N$) крепи — (3.2.18), (3.2.19) и областей V, V^p, V^e массива (3.3.3), (3.3.4) необходимо учитывать уравнения (3.2.20) и (3.3.5), определяющие положения упругопластических границ ψ_i многослойной крепи и γ — в гориом массиве.

Таким образом, как и в случае ранее рассмотренных задач устойчивости, задача устойчивости многослойной крепи, когда действие массива на крепь определяется величинами σ_r^{0p} и σ_θ^{0p} согласно (3.3.3), сводится к задаче многомерной оптимизации величин q_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) в зависимости от n при условии равенства нулю определяется получением алгебраической системы, т. е. $\det(q_i, n, \lambda_j) = 0$.

Численный расчет проводился для случая, когда горный массив содержал выработку, подкрепленную двухслойной крепью. При этом материал массива — аргиллит, внешний слой крепи — бетон, внутренний — железобетон; Безразмерные характеристики песчаника, аргиллита, бетона и железобетона выбирались согласно табл. 3.4.1.

На рисунках 4.3.1, 4.3.2 показана область критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 при различной геометрии крепи, которым соответствует значение параметра

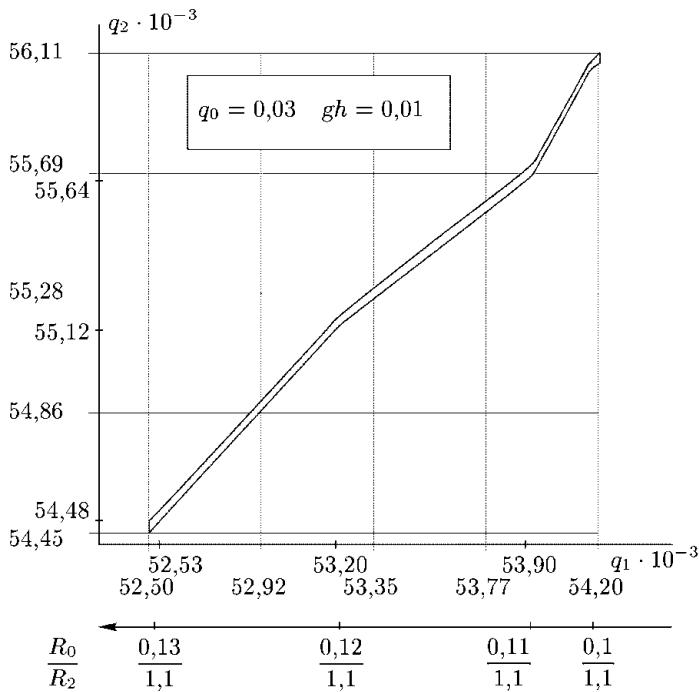


Рис. 4.3.1

волнообразования $n = 2$. При этом в первом случае на внутреннем контуре первого слоя крепи принято $q_0 = 0,03$, во втором $q_0 = 0,01$, безразмерное значение гидростатического давления в нетронутом массиве во всех случаях принималось $gh = 0,01$,

геометрические параметры R_0/R_2 изменялись в интервале $0,001/1,1 \div 0,005/1,1$.

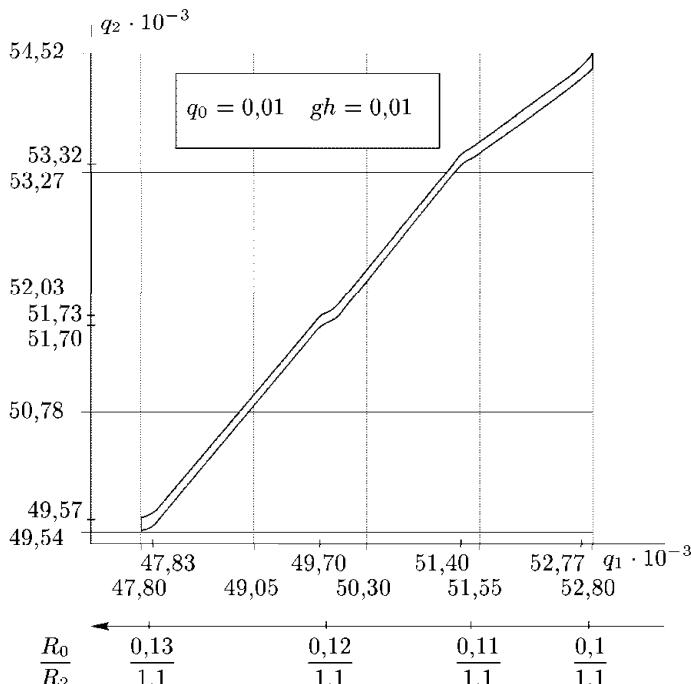


Рис. 4.3.2

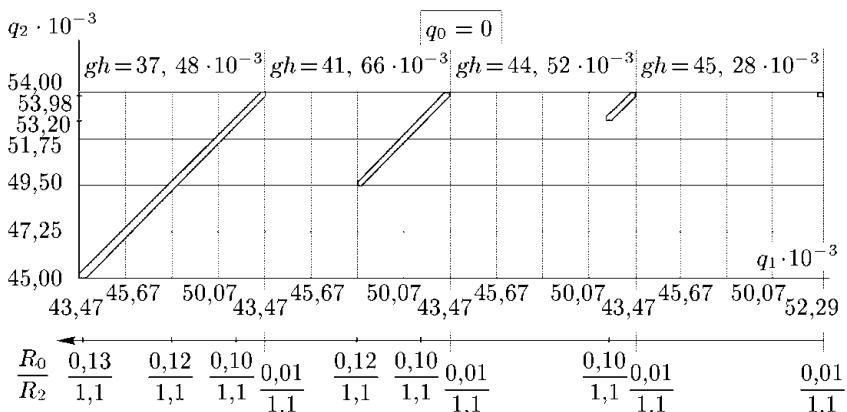


Рис. 4.3.3

На рис. 4.3.3 показана зависимость области критических значений параметров контактных давлений q_1 , q_2 от безразмерной величины гидростатического давления gh , при геометрии крепи

R_0/R_2 изменяющейся в интервале $0,01/1,1 \div 0,13/1,1$. Материал массива — аргиллит, внешний слой крепи — железобетон, внутренний — бетон. Здесь на внутреннем контуре первого слоя крепи принято $q_0 = 0$.

Из анализа решений следует:

как и в случае, рассмотренным в § 2 этой главы, область критических контактных давлений существенно зависит как от геометрических, так и от физических параметров (см. рисунки 4.3.1 и 4.3.2);

потеря устойчивости двухслойной разномодульной крепи в осесимметричном случае происходит при значении параметра волнообразования $n = 2$;

с ростом давления q_0 на внутреннем контуре первого слоя крепи значения критических контактных давлений q_1, q_2 , соответствующих локальной потери устойчивости, увеличиваются (см. рисунки 4.3.1 и 4.3.2);

при увеличении гидростатического давления, а, следовательно, при увеличении давления массива на внешний контур двухслойной крепи, критические контактиые давления возрастают (см. рис. 4.3.3).

4.4. Моделирование отказа сферической выработки с многослойной крепью.

Для хранения нефти и газа, а также при размещении насосных установок на практике часто используются сферические полости. Для более надежной эксплуатации таких полостей их укрепляют.

Далее рассмотрим вопрос моделирования потери устойчивости сферической выработки с многослойной (N -слойной) крепью при совместном расчете крепи с массивом горных пород. Внутренний радиус i -го слоя крепи обозначаем через R_{i-1} , а внешний — R_i . К внутреннему контуру i -го слоя приложено сжимающее усилие q_{i-1} , к внешнему q_i ($i = 1, 2, \dots, N$), величины которых таковы, что образующиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев.

Докритическое напряженно-деформированное состояние массива около сферической выработки определяется соотношениями (3.4.1), (3.4.2), (3.4.5) а в i -ом слое крепи соотношениями (3.4.1)–(3.4.3), в которых следует провести соответствующую замену, указанную в § 4 гл. 3. Уравнения для нахождения границ раздела ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и γ зон упругого и пластического деформирования в i -м слое крепи и в массиве горных пород определяются уравнениями (3.4.4) и (3.4.6) соответственно.

Исследование устойчивости сферических выработок с многослойной крепью при совместном расчете крепи с массивом

горных пород сводится к решению сферической задачи (1.5.36)–(1.5.38), которая состоит из уравнений равновесия, граничных условий и условий непрерывности вектора поверхностных сил и перемещений. Как и в предыдущих задачах этой главы, в случае сферической задачи также будем пользоваться конечно-разностной схемой.

После обычной процедуры применения конечно-разностных соотношений (1.6.1)–(1.6.2) к системе уравнений (1.5.36) и граничным условиям (1.5.37) при $r = R_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$), в которой коэффициенты a_{ij} определяются по формулам (1.5.9), (1.5.10) получим систему линейных алгебраических уравнений.

При этом для аппроксимации производных функций $\overset{p}{A}_i, \overset{p}{A}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) в граничных узлах использовались односторонние разности (1.6.2) при $r = R_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$), при $r = \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и при $r = \gamma$. Для внутренних узлов применялись соотношения (1.6.1). Аналогично заменялись производные функций $\overset{e}{A}_i$ и $\overset{e}{A}$ ($i = 1, 2, \dots, N$): в узлах $r = \psi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и $r = \gamma$ разностями (1.6.2), в узлах $r = R_i$ и $r = R_\infty$ ($i = 1, 2, \dots, N$) разностями (1.6.2), во внутренних узлах разностями (1.6.1).

Обозначим коэффициенты первого и второго уравнений системы (1.5.38) соответственно через b_{1s} и b_{2s} , а коэффициенты уравнения (1.5.36) — b_{3s} . Тогда ненулевые элементы характеристического определителя алгебраической системы будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{00} &= -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13}, & x_{01} &= 9b_{11} - 5\tau b_{12} + 2\tau^2 b_{13}, \\ x_{02} &= -12b_{11} + 4\tau b_{12} - \frac{1}{2}\tau^2 b_{13}, & x_{03} &= 7b_{11} - \tau b_{12}, \\ x_{04} &= 3\tau^3 b_{11}, & x_{10} &= 2b_{11} - \frac{3}{2}\tau b_{22} + \tau^2 b_{23}, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$x_{11} = -5b_{21} + 2\tau b_{22}, \quad x_{12} = 4b_{21} - \frac{1}{2}\tau b_{22}, \quad x_{13} = -\tau^2 b_{21},$$

$$b_{sk} = \left(\overset{p}{b}_{sk} \right)_1, \quad r = R_0, \quad \tau = \tau_{\psi_1}.$$

$$x_{ij} = b_{31} - \frac{1}{2}\tau b_{32},$$

$$x_{i,j+1} = -4b_{31} + \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} - \frac{1}{2}\tau^3 b_{34},$$

$$x_{i,j+2} = \tau^4 b_{35} + 6b_{31} - 2\tau^2 b_{33}, \quad (4.4.2)$$

$$x_{i,j+3} = -4b_{31} - \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} + \frac{1}{2}\tau b_{34},$$

$$x_{i,j+4} = b_{31} + \frac{1}{2}\tau b_{32}.$$

При $i = 2, 3, \dots, M_{\psi_1} + 2, j = i$ в (4.4.2) надо положить $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_1, R_0 \leq r \leq \psi_1, \tau = \tau_{\psi_1}$.

При $i = M_{\psi_1} + 3, M_{\psi_1} + 4, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} - 1, j = i - 1$ в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_1, \psi_1 \leq r \leq R_1, \tau = \tau_{R_1}$.

При $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + 2, M_{\psi_1} + M_{R_1} + 3, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 2, j = i$ в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_2, R_1 \leq r \leq \psi_2, \tau = \tau_{\psi_2}$.

При $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 3, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 4, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + M_{R_2} - 1, j = i - 1$ в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_2, \psi_2 \leq r \leq R_2, \tau = \tau_{R_2}$.

Для областей $V_3, V_3^e, V_4, V_4^e, \dots, V_N, V_N^e, V, V^e$ отличные от нуля элементы определителя можно записать в форме:

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_{\alpha-1}} + M_{R_{\alpha-1}} + 2, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_{\alpha-1}} + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} + 2, j = i, \alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_\alpha, R_{\alpha-1} \leq r \leq \psi_\alpha, \tau = \tau_{\psi_\alpha}$ (при $\alpha = 1, M_{\psi_{\alpha-1}} = M_{R_{\alpha-1}} = 0$);

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} + 3, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_\alpha} + M_{R_\alpha} - 1, j = i - 1, \alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_\alpha, \psi_\alpha \leq r \leq R_\alpha, \tau = \tau_{R_\alpha}$;

при $i = M_N + 2, \dots, M_N + M_\gamma + 2, \left[M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}) \right], j = i$, в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}, R_N \leq r \leq \gamma, \tau = \tau_\gamma$;

при $i = M_N + M_\gamma + 3, \dots, M_N + M_\gamma + M_{R^*} - 1, \left[M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}) \right], j = i - 1$, в (4.4.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}, \gamma \leq r \leq R^*, \tau = \tau_{R^*}$.

При $i = M_{\psi_1} - 1, j = M_{\psi_1} - 4, \dots, M_{\psi_1} - 1$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами x_{ij} ($i = 0, j = 0, 1, 2, 3$) в (4.4.1) где надо положить

$$b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_1, \quad r = \psi_1.$$

При $i = M_{\psi_1} - 1, j = M_{\psi_1} + 5, M_{\psi_1} + 4, \dots, M_{\psi_1} + 2$ в соответствующих элементах (4.4.1) положим

$$b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_1, \quad r = \psi_1.$$

Аналогично записываются отличные от нуля элементы для областей $\overset{p}{V}_2, \overset{e}{V}_2, \overset{p}{V}_3, \overset{e}{V}_3, \dots, \overset{p}{V}_N, \overset{e}{V}_N, \overset{p}{V}, \overset{e}{V}$. В общем виде их можно записать в форме:

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i-3, i-2, \dots, i, \alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.4.1), где надо положить

$$b_{sk} = \left(\overset{p}{b}_{sk} \right)_\alpha, \quad r = \psi_\alpha;$$

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+6, i+5, \dots, i+3, \alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.4.1), где надо положить

$$b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk} \right)_\alpha, \quad r = \psi_\alpha;$$

при $i = M_N + M_\gamma - 1, M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}), j = i-3, i-2, \dots, i$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.4.1), где надо положить

$$b_{sk} = \overset{p}{b}_{sk}, \quad r = \gamma;$$

при $i = M_N + M_\gamma - 1, M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}), j = i+6, i+5, \dots, i+3$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.4.1), где надо положить

$$b_{sk} = \overset{e}{b}_{sk}, \quad r = \gamma.$$

Для областей $\overset{p}{V}_\alpha, \overset{e}{V}_\alpha, \overset{p}{V}, \overset{e}{V}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) получаем при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+1$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2} b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14}, \quad b_{sk} = \left(\overset{p}{b}_{sk} \right)_\alpha, \quad r = \psi_\alpha;$$

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+2$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2} b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14}, \quad b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk} \right)_\alpha, \quad r = \psi_\alpha;$$

при $i = M_N + M_\gamma - 1, M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k}), j = i+1,$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2} b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14}, \quad b_{sk} = \overset{p}{b}_{sk}, \quad r = \gamma;$$

при $i = M_N + M_\gamma - 1$, $M_N = \sum_{k=1}^N (M_{\psi_k} + M_{R_k})$, $j = i + 2$,

$$x_{ij} = -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14}, \quad b_{sk} = b_{sk}^e, \quad r = \gamma.$$

При $i = M_{\psi_1}$, $M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2}$, $M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + M_{R_2} +$
 $+ M_{\psi_3}$, \dots , $M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{N-1}} + M_{\psi_N}$, $\sum_{s=1}^N (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + M_\gamma$

$$x_{i,i-4} = x_{i,i+5} = 3, \quad x_{i,i-1} = x_{i,i+2} = -18,$$

$$x_{ii} = x_{i,i+1} = 2, \quad x_{i,i+4} = -14, \quad x_{i,i-2} = x_{i,i+3} = 24.$$

При $i = M_{\psi_1} + 1$, $M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 1$, \dots , $M_{\psi_1} + M_{R_1} +$
 $+ \dots + M_{R_{N-1}} + M_{\psi_N} + 1$, $\sum_{s=1}^N (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + M_\gamma + 1$, $j = i - 4$

$$x_{ij} = x_{i,i+3} = x_{i+1,i+3} = 1, \quad x_{i,i+1} = x_{i,i+2} = -4,$$

$$x_{i+1,i} = -1, \quad x_{i,j+2} = x_{i,i+1} = 5, \quad x_{i,j+3} = x_{ii} = -2,$$

$$x_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{i,i+1} = \frac{3}{2}, \quad x_{i+1,i+1} = 1.$$

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s})$, $j = i - 3, i - 2, \dots, i$, $\alpha =$

$= 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и x_{0i} в (4.4.1) ($i = 4, 3, 2, 1$), где надо положить

$$b_{sk} = \left(\begin{smallmatrix} e \\ b_{sk} \end{smallmatrix} \right)_{\alpha}, \quad r = R_{\alpha}.$$

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + 1$, $j = i - 2, i - 1, i$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$

элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и x_{1i} в (4.4.1) ($i = 3, 2, 1$), где надо положить

$$b_{sk} = \left(\begin{smallmatrix} e \\ b_{sk} \end{smallmatrix} \right)_{\alpha}, \quad r = R_{\alpha}.$$

При $i = \sum_{s=1}^N (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + M_\gamma + M_{R^*}$, $j = i - 3, i - 2, \dots, i$,

элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и x_{0i} ($i = 4, 3, 2, 1$), где надо положить $b_{sk} = b_{sk}^e$, $r = R^*$.

При $i = \sum_{s=1}^N (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + M_\gamma + M_{R^*} + 1$, $j = i - 2, i - 1, i$,

элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и x_{1i} в (4.4.1) ($i = 3, 2, 1$), где надо положить $b_{sk} = b_{sk}^e$, $r = R^*$.

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s})$, $j = i + 1$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2} b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2} \tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14},$$

$$x_{jj} = 2b_{21} - 3\tau b_{22} - \tau^2 b_{23}, \quad b_{sk} = \left(b_{sk}^e \right)_{\alpha}, \quad r = R_{\alpha}.$$

Таким образом, как и в случае цилиндрических задач (см. § 1–3), здесь, в случае сферических задач, получаем задачу многомерной оптимизации величин q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в зависимости от параметра волнообразования, при условии равенства нулю определителя $\det(x_{ij}) = 0$, отличные от нуля элементы которого приведены выше.

Численный эксперимент проводился для случая, когда двухслойная сферическая крепь состоит: внешний слой крепи — железобетон, внутренний — бетон, горный массив — материал аргиллит.

На рис. 4.4.1 показана зависимость области критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 от безразмерной величины гидростатического давления gh , при этом геометрические параметры крепи R_0/R_1 измениялись в интервале

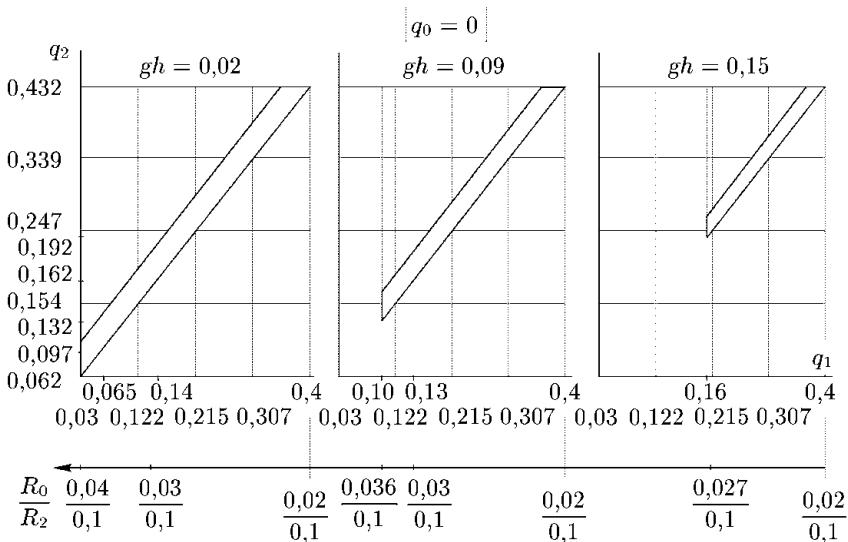


Рис. 4.4.1

$0,02/0,1 \div 0,04/0,1$, а также принято $q_0 = 0$. На рис. 4.4.2 показана область критических значений контактных давлений q_1, q_2 , при этом геометрические параметры крепи R_0/R_1 измениялись в интервале $0,02/0,1 \div 0,04/0,1$, безразмерная величина гидростатического давления $gh = 0,02$, а также принято $q_0 = 0,01$.

Из анализа результатов следует:

локальная потеря устойчивости сферической выработки с двухслойной крепью происходит при $m = 2$;

при увеличении давления q_0 на внутреннем контуре первого слоя крепи значения критических контактных давлений q_1, q_2 , соответствующих локальной потери устойчивости, увеличиваются (см. рисунки 4.4.1 и 4.4.2);

область критических контактных давлений существенно зависит от геометрических параметров крепи и выработки;

с ростом глубины заложения выработки, контактные давления возрастают (см. рис. 4.4.1); при $gh \rightarrow \infty$ величины q_i ($i = 1, 2$) неограниченно возрастают;

при $R_0 \rightarrow 0$ (сплошной шар) потеря устойчивости не наблюдается.

Сделанные выводы согласуются с общими физическими представлениями.

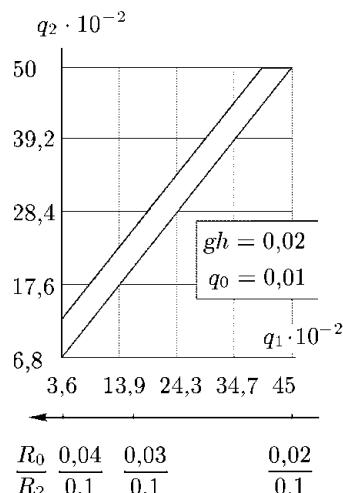


Рис. 4.4.2

4.5. Исследование устойчивости многослойной разномодульной крепи сферической выработки в массивах, обладающих упругопластическими свойствами.

В этом параграфе исследуется потеря устойчивости многослойной (N -слойной) крепи, подкрепляющей сферическую выработку, когда действие массива на внешний слой крепи определяется соотношениями (3.4.2), (3.4.5) при $r = R_N$. Обозначим внутренний радиус i -го слоя крепи через R_{i-1} , внешнего слоя крепи через R_i . К внутреннему контуру i -го слоя приложено сжимающее усилие q_{i-1} , к внешнему q_i ($i = 1, 2, \dots, N$), величины которых таковы, что образующиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев. Также предполагается, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания.

Докритическое напряженно-деформированное состояние в i -м слое крепи моделируется соотношениями (3.4.1)–(3.4.3), а в массиве около сферической выработки описывается уравнениями (3.4.1), (3.4.2), (3.4.5). Уравнения для нахождения границ раздела ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и γ зон упругого и пластического деформирования в i -м слое крепи и в массиве горных пород определяются соотношениями (3.4.4), (3.4.6).

Математическая модель для исследования потери устойчивости разномодульной крепи сферической выработки в этом случае описывается бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений состоящей из: уравнений равновесия (1.5.36) для каждой из областей упругого $\overset{e}{V}_i$ и пластического $\overset{p}{V}_i$ деформирования слоев крепи ($i = 1, 2, \dots, N$); условий на внутреннем контуре первого слоя крепи (1.5.37) при $r = R_0$ и на внешнем контуре последнего слоя крепи при $r = R_N$; условий сопряжения (1.5.38) на упругопластической границе ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и условий сопряжения на границе i -го и ($i + 1$)-го ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) слоев крепи. При этом в соотношениях (1.5.36)–(1.5.38) в каждой из областей упругого $\overset{e}{V}_i$ и пластического $\overset{p}{V}_i$ деформирования слоев крепи ($i = 1, 2, \dots, N$) функции A и ее производным, а также величинам основного состояния нужно приписывать индексы « i », « e » и « p » соответственно.

Отметим, что если в полученной красвой задаче количество слоев крепи положить равным 1 ($N = 1$), то приходим к результатам работы [257].

После обычной процедуры применения конечноразностных соотношений (1.6.1), (1.6.2) к системе уравнений (1.5.36) и граничным условиям (1.5.37) при $r = R_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$), в которой коэффициенты a_{ij} определяются по формулам (1.5.9), (1.5.10), получим систему линейных алгебраических уравнений. При этом аппроксимация производных функций $\overset{p}{(A)}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) проводилась аналогично схеме указанной в предыдущем параграфе.

Сохраняя те же, что и в предыдущем параграфе, обозначения для коэффициентов уравнений (1.5.38) и (1.5.36) получим следующие ненулевые элементы характеристического определителя $\det(x_{ij})$ алгебраической системы:

$$\begin{aligned} x_{00} &= -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13} + \tau^3 b_{14}, \\ x_{01} &= 9b_{11} - 5\tau b_{12} + 2\tau^2 b_{13}, \quad x_{02} = -12b_{11} + 4\tau b_{12} - \frac{1}{2}\tau^2 b_{13}, \\ x_{03} &= 7b_{11} - \tau b_{12}, \quad x_{04} = 3\tau^3 b_{11}, \quad x_{10} = 2b_{11} - \frac{3}{2}\tau b_{22} + \tau^2 b_{23}, \\ x_{11} &= -5b_{21} + 2\tau b_{22}, \quad x_{12} = 4b_{21} - \frac{1}{2}\tau b_{22}, \quad x_{13} = -\tau^2 b_{21}, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

где $b_{sk} = \overset{p}{(b_{sk})}_1$, $r = R_0$, $\tau = \tau_{\psi_1}$.

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= b_{31} - \frac{1}{2} \tau b_{32}, \\
x_{i,j+1} &= -4b_{31} + \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} - \frac{1}{2} \tau^3 b_{34}, \\
x_{i,j+2} &= \tau^4 b_{35} + 6b_{31} - 2\tau^2 b_{33}, \\
x_{i,j+3} &= -4b_{31} - \tau b_{32} + \tau^2 b_{33} + \frac{1}{2} \tau b_{34}, \\
x_{i,j+4} &= b_{31} + \frac{1}{2} \tau b_{32}.
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

При $i = 2, 3, \dots, M_{\psi_1} + 2$, $j = i$ в (4.5.2) надо положить $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_1$, $R_0 \leq r \leq \psi_1$, $\tau = \tau_{\psi_1}$.

При $i = M_{\psi_1} + 3, M_{\psi_1} + 4, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} - 1$, $j = i - 1$ в (4.5.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_1$, $\psi_1 \leq r \leq R_1$, $\tau = \tau_{R_1}$.

При $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + 2, M_{\psi_1} + M_{R_1} + 3, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 2$, $j = i$ в (4.5.2) положим $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_2$, $R_1 \leq r \leq \psi_2$, $\tau = \tau_{\psi_2}$.

При $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 3, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 4, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + M_{R_2} - 1$, $j = i - 1$ в (4.5.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_2$, $\psi_2 \leq r \leq R_2$, $\tau = \tau_{R_2}$.

Проводя аналогичные выкладки, получим элементы определителя отличные от нуля для областей $\binom{p}{V_3}, \binom{e}{V_3}, \binom{p}{V_4}, \binom{e}{V_4}, \dots, \binom{p}{V_N}, \binom{e}{V_N}$ в виде:

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_{\alpha-1}} + M_{R_{\alpha-1}} + 2, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_{\alpha-1}} + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} + 2$, $j = i$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.5.2) положим $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_\alpha$, $R_{\alpha-1} \leq r \leq \psi_\alpha$, $\tau = \tau_{\psi_\alpha}$ (при $\alpha=1 M_{\psi_{\alpha-1}} = M_{R_{\alpha-1}} = 0$);

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} + 3, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{\psi_\alpha} + M_{R_\alpha} - 1$, $j = i - 1$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ в (4.5.2) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_\alpha$, $\psi_\alpha \leq r \leq R_\alpha$, $\tau = \tau_{R_\alpha}$.

При $i = M_{\psi_1} - 1$, $j = M_{\psi_1} - 4, \dots, M_{\psi_1} - 1$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами x_{ij} ($i = 0, j = 0, 1, 2, 3$) в (4.5.1) где надо положить $b_{sk} = \binom{p}{b_{sk}}_1$, $r = \psi_1$.

При $i = M_{\psi_1} - 1$, $j = M_{\psi_1} + 5, M_{\psi_1} + 4, \dots, M_{\psi_1} + 2$ в соответствующих элементах (4.5.1) положим $b_{sk} = \binom{e}{b_{sk}}_1$, $r = \psi_1$.

Для областей $\overset{p}{V}_2, \overset{e}{V}_2, \overset{p}{V}_3, \overset{e}{V}_3, \dots, \overset{p}{V}_N, \overset{e}{V}_N$ элементы определятеля отличные от нуля можно записать в форме:

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i-3, i-2, \dots, i, \alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.5.1), где надо положить $b_{sk} = \left(\overset{p}{b}_{sk}\right)_\alpha, r = \psi_\alpha$.

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+6, i+5, \dots, i+3, \alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} совпадают с соответствующими элементами в (4.5.1), где надо положить $b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk}\right)_\alpha, r = \psi_\alpha$.

Для областей $\overset{p}{V}_\alpha, \overset{e}{V}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ справедливы выражения:

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+1$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14},$$

где $b_{sk} = \left(\overset{p}{b}_{sk}\right)_\alpha, r = \psi_\alpha$;

при $i = M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{\alpha-1}} + M_{\psi_\alpha} - 1, j = i+2$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14},$$

где $b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk}\right)_\alpha, r = \psi_\alpha$.

При $i = M_{\psi_1}, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2}, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + M_{R_2} + M_{\psi_3}, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{N-1}} + M_{\psi_N}$

$$x_{i,i-4} = x_{i,i+5} = 3, \quad x_{i,i-1} = x_{i,i+2} = -18,$$

$$x_{ii} = x_{i,i+1} = 2, \quad x_{i,i+4} = -14, \quad x_{i,i-2} = x_{i,i+3} = 24.$$

При $i = M_{\psi_1} + 1, M_{\psi_1} + M_{R_1} + M_{\psi_2} + 1, \dots, M_{\psi_1} + M_{R_1} + \dots + M_{R_{N-1}} + M_{\psi_N} + 1, j = i-4$

$$x_{ij} = x_{i,i+3} = x_{i+1,j+3} = 1, \quad x_{i,i+1} = x_{i,i+2} = -4, \quad x_{i+1,i} = -1,$$

$$x_{i,j+2} = x_{i,i+1} = 5, \quad x_{i,j+3} = x_{ii} = -2,$$

$$x_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{i,i+1} = \frac{3}{2}, \quad x_{i+1,i+1} = 1.$$

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s}), j = i-3, i-2, \dots, i, \alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и $x_{0i} (i = 4, 3, 2, 1)$, где надо положить $b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk}\right)_\alpha, r = R_\alpha$.

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s}) + 1$, $j = i-2, i-1, i$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ элементы x_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и x_{1i} в (4.5.1) ($i = 3, 2, 1$), где надо положить $b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk}\right)_{\alpha}$, $r = R_{\alpha}$.

При $i = \sum_{s=1}^{\alpha} (M_{\psi_s} + M_{R_s})$, $j = i+1$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$

$$x_{ij} = -\frac{5}{2}b_{11} + 2\tau b_{12} - \frac{3}{2}\tau^2 b_{13} - \tau^3 b_{14}, \quad x_{jj} = 2b_{21} - 3\tau b_{22} - \tau^2 b_{23},$$

где $b_{sk} = \left(\overset{e}{b}_{sk}\right)_{\alpha}$, $r = R_{\alpha}$.

Таким образом, как и в случае ранее рассмотренных задач, задача отказа многослойной сферической крепи, когда действие массива на внешний контур крепи определяется величинами $\overset{op}{\sigma}_r$ и $\overset{op}{\sigma}_{\theta}$ согласно (3.4.1), (3.4.5), сведена к задаче многомерной оптимизации величин q_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) в зависимости от параметра волнообразования t при условии равенства пулю определителя, отличные от нуля элементы которого приведены выше.

4.6. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов

Как известно, исследование поведения предварительно напряженных составных конструкций сводится к постановке и решению задач локальной неустойчивости [256] при упругопластических деформациях. Полученные в § 1 четвертой главы результаты распространим на исследование локальной неустойчивости пластины с кольцевыми включениями.

Исследуем явление локальной неустойчивости в пластинчатой конструкции, состоящей из бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса R_N , в которое с некоторым натягом помещена система из N колец, последовательно запрессованных одно в другое. К внутреннему контуру первого кольца приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 . Из-за натягов на линиях сопряжения деталей возникают сжимающие усилия q_1, q_2, \dots, q_N . Величины q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры колец.

Определение напряженно-деформированного докритического состояния составной пластинчатой конструкции при плоской деформации сводится к решению двух связанных задач о

концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния в i -м кольце, вторая — к определению напряженно-деформированного состояния в пластине.

Докритическое напряженно-деформированное состояние, соответствующее i -му кольцу, в полярных координатах (r, θ) определяется соотношениями (3.2.18) в пластической области при $R_{i-1} < r < \psi_i$ и в виде (3.2.19) в упругой области при $\psi_i < r < R_i$.

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы ψ_i имеет вид (3.2.20).

В равенствах (3.2.18)–(3.2.20) $i = 1, 2, 3, \dots, N$; N — количество колец; ψ_i — радиусы упругопластических границ; R_i — радиусы колец.

Докритическое напряженно-деформированное состояние в пластине в полярных координатах определяется соотношениями (3.3.3) в пластической области при $R_N < r < \gamma$ и в виде (3.3.4) в упругой области при $\gamma < r < \infty$. Уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ имеет вид (3.3.5).

Как и ранее в § 1 исследование устойчивости основного состояния (3.2.18)–(3.2.20), (3.3.3)–(3.3.5) составной пластической конструкции сводится к решению уравнений равновесия в вариациях (1.5.16) для областей пластического и упругого деформирования при соответствующих граничных условиях (1.5.18). Условия непрерывности напряжений и перемещений на поверхностях раздела зон упругого и пластического деформирования имеют вид (1.5.13).

В случае пространственной формы (1.5.21) потери устойчивости из линеаризованных уравнений равновесия в вариациях (1.5.16), учитывая при этом соотношения (1.5.2), получим систему уравнений в терминах функций $A(r)$ и $B(r)$ вида

$$\begin{aligned} \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 B(r) + \xi_5 B'(r) + \\ + \xi_6 B''(r) + \xi_7 B'''(r) = 0, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

$$\begin{aligned} \xi_8 A(r) + \xi_9 A'(r) + \xi_{10} A''(r) + \xi_{11} A'''(r) + \\ + \xi_{12} B(r) + \xi_{13} B'(r) + \xi_{14} B''(r) = 0. \end{aligned}$$

где

$$\xi_1 = \overset{\circ}{\sigma}_\theta (1 - m^2) - m^2 - 2r \overset{\circ}{\sigma}_{\theta, r} - n^2 r^2 + 1,$$

$$\xi_2 = r^2 \overset{\circ}{\sigma}_{r, r} - r \left(2\overset{\circ}{\sigma}_\theta + 1 - \overset{\circ}{\sigma}_r \right), \quad \xi_3 = r^2 \left(1 - 2a_* + \overset{\circ}{\sigma}_r \right),$$

$$\xi_4 = \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) \left(\frac{1}{m} - m \right) - \frac{r \overset{\circ}{\sigma}_{\theta, r} (1 + m^2)}{m^3} - \frac{r^2 n^2}{m^3},$$

$$\begin{aligned}
\xi_5 &= r \left[\left(2a_0 - 1 - \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) m - \frac{(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta)}{m} \right] + \frac{r^3}{n} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,rr} - n^2 \right) + \frac{r^2}{m} 2 \overset{\circ}{\sigma}_{r,r}, \\
\xi_6 &= \frac{2r^2}{m} \left(\overset{\circ}{\sigma}_r + \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} + 1 \right), \quad \xi_7 = \frac{r^3}{m} \left(\overset{\circ}{\sigma}_r + 1 \right), \\
\xi_8 &= nr^2 \left(a_0 - 1 - 2 \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) + \frac{m^2 r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) - \frac{r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right), \\
\xi_9 &= nr^3 \left(1 - a_0 \right) - \frac{m^2 r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_\theta \right) - \frac{r}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right), \\
\xi_{10} &= \frac{r^2}{n} \left(2 + 2 \overset{\circ}{\sigma}_r + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right), \quad \xi_{11} = \frac{r^3}{n} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right), \\
\xi_{12} &= mn r^2 a_0 - \frac{n^3 r^2}{m} - \left(\frac{1}{m} + \frac{m^3}{nr^2} \right) \left(\overset{\circ}{\sigma}_\theta + 1 \right) + \frac{m(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r - r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r})}{nr^2}, \\
\xi_{13} &= \frac{rm}{n} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r} - \overset{\circ}{\sigma}_r - 1 \right) - \frac{r^3 n}{m} \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r + r \overset{\circ}{\sigma}_{r,r} \right), \\
\xi_{14} &= \left(1 + \overset{\circ}{\sigma}_r \right) \left(\frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right).
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Границные условия на внутреннем контуре первого кольца при $r = R_0$ запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&A_1 \left\{ \frac{2}{R_0} \left[a_0 - (\overset{\circ}{\sigma}_\theta)_1 - 1 \right] \right\} + (A')_1^p \left[2 - 2a_0 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1 \right] + \\
&+ B_1 \left(\frac{1}{R_0} \left\{ ma_0 - \frac{1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1}{m} + m^2 \left[(\overset{\circ}{\sigma}_\theta)_1 + 1 - a_0 \right] \right\} - \frac{n^2 R_0}{m} \right) + \\
&+ B'_1 \frac{1}{m} \left[1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1 + R_0 (\overset{\circ}{\sigma}_{\theta,r})_1 \right] + B''_1 \frac{R_0}{m} \left[1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1 \right] = 0, \\
&m A_1^p + B_1^p - R_0 B'_1 \left[1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1 \right] = 0, \\
&A_1 \left[n - \frac{1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1}{n R_0^2} \right] + \frac{1 + (\overset{\circ}{\sigma}_r)_1}{n R_0} \left[A'_1 - \frac{m}{R_0} B_1 + m B'_1 + R_0 A''_1 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

На границе ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) упругой и пластической зон включений имеем

$$\begin{aligned}
&A_i \frac{1}{\psi_i} - A'_i + B_i \frac{m}{\psi_i} + B'_i \left\{ \frac{\psi_i}{2ma_0} \left[(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r})_i - (\overset{\circ}{\sigma}_{r,r})_i \right] \right\} + \\
&+ \frac{\psi_i}{2ma_0} \left[(\overset{\circ}{\sigma}_r)_i + 1 \right] \left(B''_i - B''_i \right) = 0, \\
&A''_i - A''_i = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

На границе раздела γ упругой и пластической областей пластины имеют место условия, аналогичные (4.6.4).

На границе запрессованных i -го и $(i+1)$ -го колец имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{p}{A_{i+1}} - \frac{p}{A'_{i+1}} + \frac{m}{R_i} \frac{p}{B_{i+1}} + \frac{p}{B'_{i+1}} \left\{ \frac{R_i}{2ma_0} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}^p \right)_{i+1} - \left(\overset{\circ}{\sigma}_{r,r}^e \right)_i \right] \right\} + \\ + \frac{R_i}{2ma_0} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}_r^e \right)_i + 1 \right] \left[\frac{p}{B''_{i+1}} - \frac{e}{B''_{i+1}} \right] = 0, \\ \frac{p}{A''_{i+1}} - \frac{e}{A''_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2, 3$) следует

$$\overset{e}{A}' = 0, \quad \overset{e}{A}'' = 0, \quad \overset{e}{B}' = 0, \quad \overset{e}{B}'' = 0. \quad (4.6.6)$$

Приведенные соотношения (4.6.1)–(4.6.6) соответствуют краевой задаче (4.1.2)–(4.1.4). Следовательно, характеристический определитель для данной задачи будет иметь тот же вид, что и в § 1 четвертой главы, лишь в выражениях для элементов определителя необходимо положить гидростатическое давление равным нулю.

Численный эксперимент проводился для случая, когда в пластины запрессовано два кольца ($N = 2$) из того же материала, что и пластина. В качестве материала использовались сталь Ст. 3 ($c = 0,001$, $k = 0,0014$, $G = 0,81 \cdot 10^6$ кг/см 2) и медь ($c = 0,006$, $k = 0,0005$, $G = 0,81 \cdot 10^6$ кг/см 2).

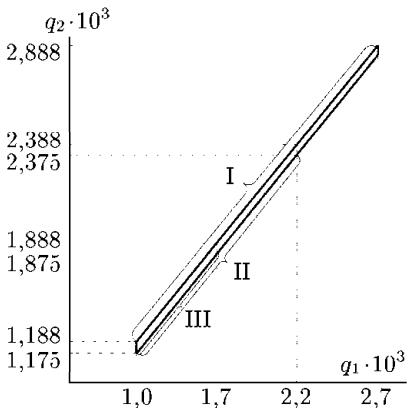


Рис. 4.6.1

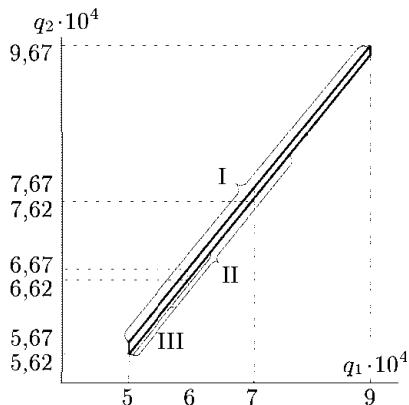


Рис. 4.6.2

На рис. 4.6.1 показаны области критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 при $n = m = 3$ в предположении $q_0 = 0,001$ на внутреннем контуре первого кольца из Ст. 3. Область I соответствует $R_0 = 0,002$; $R_2 = 1,1$ и включает

область II ($R_0 = 0,007$; $R_2 = 1,1$), которая, в свою очередь, содержит область III ($R_0 = 0,02$; $R_2 = 1,1$).

На рис.4.6.2 показаны области критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 при $n = m = 4$ в предположении $q_0 = 0,001$ на внутреннем контуре первого кольца из меди. Область I соответствует $R_0 = 0,002$; $R_2 = 1,1$ и включает область II ($R_0 = 0,007$; $R_2 = 1,1$), которая, в свою очередь, содержит область III ($R_0 = 0,02$; $R_2 = 1,1$).

Из анализа результатов численного расчета следует:

при увеличении ширины внутреннего кольца область критических значений параметров q_1, q_2 увеличивается;

при уменьшении значений физико-химических характеристик c, k область критических значений параметров q_1, q_2 уменьшается;

при одночленной аппроксимации параметров перемещений значения критических параметров q_1, q_2 оказываются завышенными.

Локальная потеря устойчивости в пластине с включениями для материала Ст.3 происходит по несимметричной форме с первоначальным образованием трех полуволны в направлении оси θ и стольких же полуволны в перпендикулярном направлении z . Для меди локальная потеря устойчивости происходит при $n = m = 4$. При $R_2 = R_1$ получим значения критической нагрузки q_1 для пластины с одним кольцевым включением [256].

Г л а в а 5

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ГОРНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ОДНОРОДНЫХ ДОКРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЯХ

В механике горного давления до последнего времени оставались нерешенными в трехмерной постановке задачи устойчивости для однородных основных состояний в случае сложных сред. Используя записанные в первой главе решения статических линеаризированных задач для однородных докритических состояний, в данной главе рассмотрены простейшие и в тоже время имеющие важное практическое значение проблемы горной механики. Задачи подобраны таким образом, чтобы они иллюстрировали специфические свойства, проявляющиеся при использовании трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел. Это такие вопросы как потеря устойчивости целиков, поверхностная неустойчивость полупространства и т. п.

Результаты этой главы излагаются в соответствии с публикациями [205, 223, 224, 228, 234, 236, 238, 241, 244, 248, 249, 262, 284] и др.

5.1. Неустойчивость свободной поверхности

Рассмотрим неустойчивость тела со свободной границей при сжатии. Явления, происходящие в зоне возле свободной поверхности, получили название «skin effect». Они имеют место в непосредственной близости от свободной поверхности и затухают при удалении от нее. Впервые неустойчивость исследовал Biot M.A. [225].

Исследуем в квазистатической постановке неустойчивость полупространства из сжимаемого упруговязкопластического тела описываемого уравнениями (1.1.7), (1.1.9), (1.1.10), (1.1.14), (1.1.15) при сжатии усилиями интенсивности p вдоль оси Ox_3 (рис. 5.1.1). Ненулевые компоненты напряженно-деформированного состояния до потери устойчивости определяются согласно (1.4.3) соотношениями

$$\overset{\circ}{\sigma}_{11} = \overset{\circ}{\sigma}_{22} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{33} = -p, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^p = -2\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^p = -2\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^p = \frac{1}{c} \left[\overset{\circ}{s}_{33} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}K - 2\alpha\overset{\circ}{\sigma}_1 \right) \right].$$

Границные условия на свободной поверхности при $x_2 = 0$ имеют вид

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{23} = 0. \quad (5.1.1)$$

Согласно соотношениям (1.4.6) связь между амплитудами возмущений σ_{ij} и u_j примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= a_{33}u_{3,3} + a_{32}u_{2,2}, \\ \sigma_{22} &= a_{23}u_{3,3} + a_{22}u_{2,2}, \\ \sigma_{23} &= G_{23}(u_{2,3} + u_{3,2}), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

где коэффициенты a_{ij} и G_{ij} определяются по формулам (1.4.10).

Уравнения равновесия в перемещениях (1.4.16) запишутся так

$$L_{32}u_2 + L_{33}u_3 = 0, \quad L_{22}u_2 + L_{23}u_3 = 0, \quad (5.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} L_{23} &= (a_{23} + G) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad L_{32} = (a_{32} + G) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ L_{22} &= a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} + (G - p) \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3}, \\ L_{33} &= G \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} + (a_{33} - p) \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3}. \end{aligned}$$

Представим согласно (1.4.23) решение уравнений (5.1.3) в виде

$$u_3 = -L_{32}\Psi, \quad u_2 = L_{33}\Psi. \quad (5.1.4)$$

Тогда одно из уравнений равновесия тождественно удовлетворяется, а из второго уравнения для функции Ψ получим уравнение:

$$(L_{22}L_{33} - L_{23}L_{32})\Psi = 0. \quad (5.1.5)$$

Подставляя сюда значения операторов (5.1.3) получаем

$$\left(A \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} + B \frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial x_2^2} + C \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) \Psi = 0, \quad (5.1.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= (a_{22} - p)(G - p), \quad C = Ga_{22}, \\ B &= G(G - p) + a_{22}(a_{22} - p) - (G + a_{23})(G + a_{32}). \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Решение уравнения (5.1.5) представим в форме

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (5.1.8)$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 будут удовлетворять согласно (1.4.29) уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi_i = 0, \quad \forall i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь ξ_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют уравнению

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{B}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2C} \right)^2 - \frac{A}{C}}. \quad (5.1.9)$$

Функция Ψ , удовлетворяющая уравнению (5.1.6) и обеспечивающая затухание компонент σ_{ij} , u_j при $x_2 \rightarrow -\infty$ представима в виде

$$\Psi = \left[C_1^1 \exp\left(\frac{\pi}{l} \xi_i x_2\right) + C_1^3 \exp\left(\frac{\pi}{l} \xi_2 x_2\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{l} x_3\right). \quad (5.1.10)$$

Границные условия (5.1.1) теперь можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} C_1^1 \{ a_{23} (G + a_{32}) \xi_1 + a_{22} \xi_1 [G \xi_1^2 - (a_{33} - p)] \} + \\ + C_1^3 \{ a_{23} (G + a_{32}) \xi_2 + a_{22} \xi_2 [G \xi_2^2 - (a_{33} - p)] \} = 0, \\ C_1^1 [(a_{33} - p) + a_{32} \xi_1^2] + C_1^3 [(a_{33} - p) + a_{32} \xi_2^2] = 0. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Система линейных однородных алгебраических уравнений (5.1.8) относительно C_1^1 , C_1^3 имеет нетривиальное решение в случае если выполнено условие:

$$\begin{aligned} \xi_1 \{ a_{23} (G + a_{32}) + a_{22} [G \xi_1^2 - (a_{33} - p)] \} (a_{33} - p + a_{32} \xi_2^2) - \\ - \xi_2 \{ a_{23} (G + a_{32}) + a_{22} [G \xi_2^2 - (a_{33} - p)] \} (a_{33} - p + a_{32} \xi_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Критическое значение величины p находится из этого уравнения в рамках алгоритма численной реализации определения корня.

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 5.1.2 и 5.1.3. На рис. 5.1.2 показана зависимость критической нагрузки p_0 от скорости дилатансии $0 < \alpha \leq 0,5$ характерной для сыпучих сред (песок, гравий) для значений $c_0 = 0,1$, $\eta_0 = 0,01$.

Кривая 1 на рис. 5.1.2 соответствует значениям $\nu = 0,5$, $K_0 = 0,001$; кривая $1' - \nu = 0,5$, $K_0 = 0,1$; кривая $2 - \nu = 0,3$, $K_0 = 0,001$; кривая $2' - \nu = 0,3$, $K_0 = 0,1$.

На рис. 5.1.3 представлена зависимость p_0 от c_0 при $\nu = 0,3$, $K_0 = 0,001$, $\eta_0 = 0,01$. Здесь все величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к E и им приписан нижний индекс «0».

Кривая 1 соответствует $\alpha = 0,7$, кривая 2 — $\alpha = 0,4$, кривая 3 соответствует безразмерным характеристикам материала типа Ст. 3 при $\alpha = 0$, $\nu = 0,3$, $K_0 = 0,0014$, $\eta_0 = 0$, $0 < c_0 \leq 0,008$. Кривая 4 соответствует безразмерным характеристикам материала типа медь при $\alpha = 0$, $\nu = 0,3$, $K_0 = 0,0005$, $0 < c_0 \leq 0,006$.

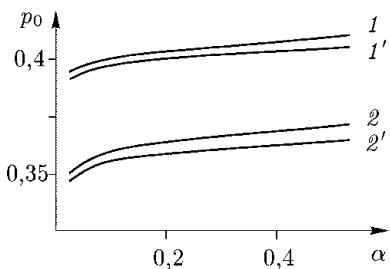


Рис. 5.1.2

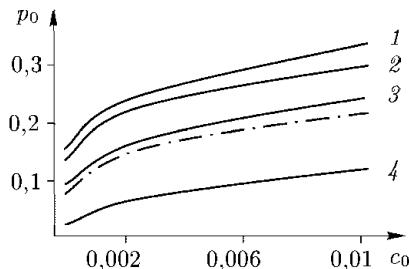


Рис. 5.1.3

Штрихпунктирная кривая соответствует результатам работы [100], построенной для иссжимаемых упруговязкопластических сред ($\alpha = 0$).

Расчет показал, что вязкость оказывает дестабилизирующую роль, т. е. увеличивает область неустойчивости и влияние скорости дилатанции и коэффициента Пуассона на величину критической силы (до 5%). Однако получающиеся при этом числовые значения критических нагрузок, физически нереальны, таким образом, явление поверхностной неустойчивости практически не наблюдается в рассмотренных пределах изменения параметров среды характерных для сыпучих сред. Отметим, что скорость дилатанции $\alpha = \operatorname{tg} \rho$; ρ — угол внутреннего трения, в частности для песка $\rho = 26\text{--}400$, а $\alpha = 0,49\text{--}0,82$. Это явление не реализуется и для материалов типа Ст. 3 и медь.

5.2. Определение оптимальных поперечных размеров ленточных и цилиндрических целиков

Камерно-столбовая система разработки занимает в настоящее время большое место в практике эксплуатации месторождений полезных ископаемых. Эта система разработки отличается простотой и высокими экономическими показателями. Широкое использование современных высокопроизводительных механизмов значительно повышает эффективность этой системы. Полезные ископаемые извлекаются в этом случае обычно камерами прямоугольной формы, между которыми оставляются целики различных размеров: чаще всего ленточные, реже — столбчатые. Различают барьерные, предохранительные, опорные целики, функции которых различны. Если оставлять целики больших

размеров, чем необходимо, то это повлечет за собой неоправданно большие потери полезного ископаемого, возрастающие с углублением работ. Если же размеры целиков оказываются недостаточными, то могут произойти их разрушение и авария. Однако разрушение, например, барьерных целиков недопустимо, так как они охраняют поверхность от оседания, локализуют распространение зон обрушения и выполняют другие функции. Из вышесказанного становится ясно, как необходимо правильно рассчитывать оптимальные размеры целиков.

На напряженное состояние целиков оказывает влияние много факторов, учет которых при теоретических решениях не всегда возможен. Вследствие этого приходится ограничиваться рассмотрением наиболее важных факторов, которыми являются, например, геометрические размеры целиков и их глубина.

Относительно величин нагрузок, действующих на целики, существуют две группы гипотез.

В первой предполагается, что нагрузка на поддерживающие целики соответствует полному весу столба вышележащих пород с основанием, равным приходящейся на целик части поддерживающей площадки (Турнер и др.).

В гипотезах второй группы нагрузка на поддерживающие целики предполагается значительно меньшей полного веса вышележащих пород за счет разгрузки поддерживающих целиков на окружающий массив и опорные целики (Слесарев В.Д. и др.).

В вопросе о напряженном состоянии поддерживающих целиков большинство авторов полагают распределение вертикальных сжимающих напряжений по среднему поперечному сечению целиков равномерным, часть — неравномерным, распределенным по какому-либо закону.

Основным допущением, существенно облегчающим решение задач и принимаемым во всех исследованиях на эту тему, является предположение об однородном напряженно-деформированном состоянии целика. При определении оптимального поперечного размера целика, исходя из принципа устойчивого состояния равновесия, до настоящего времени использовался только приближенный подход Лейбензона-Ипплинского. Ниже эта задача решается с позиции трехмерной линеаризированной теории устойчивости.

Если в задаче о потери устойчивости нагрузка увеличивается от нуля до некоторого критического значения при постоянных размерах, то при определении оптимального поперечного размера целика при постоянной нагрузке меняется ширина ленточного или радиус цилиндрического целика. При решении этой задачи считается, что:

выработанное пространство поддерживается равноудаленными целиками одинаковых размеров;

возмущения перемещений в плоскостях торцов целиков отсутствуют;

целики несут нагрузку от веса всей покрывающей толщи пород.

5.2.1. Определение оптимального поперечного размера ленточного целика. Задача определения оптимального размера ленточного целика шириной a и высотой l решается по расчетной схеме, изображенной на рис. 5.2.1. Напряженно-деформированное состояние ленточного целика из упругоупругого материала с трансляционным упрочнением (1.1.12),

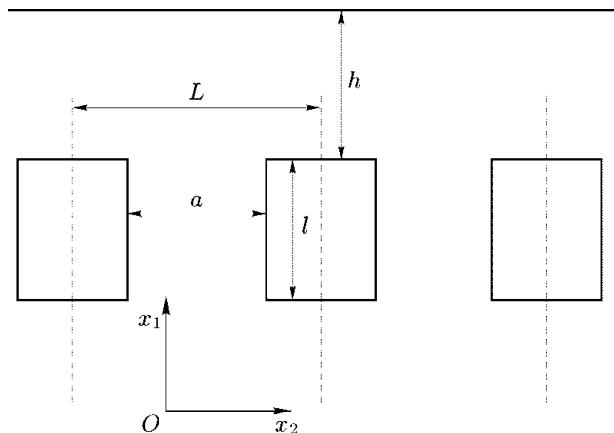


Рис. 5.2.1

сжатого равномерно распределенными нагрузками интенсивности ghL/a вдоль оси Ox_1 и p_{22} вдоль оси Ox_2 (давление со стороны выработок, создаваемое, например, рядом подкрепляющих штанг), определяется при плоском деформировании соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{11} &= -p_{11}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -p_{22} = -p, \quad p_{11} = q = \frac{ghL}{a}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} &= -\overset{\circ}{\varepsilon}_{22} = \frac{\rho}{2c} (|q - p| + \sqrt{2}K), \quad \rho = \operatorname{sign}(p - q). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Здесь L — площадь основания столба пород, приходящегося на единицу длины ленточного целика, h — глубина, g — объемный вес вышележащих пород.

Если предположить, что в момент потери устойчивости перемещения происходят в плоскости x_1Ox_2 , т. е. $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, то, используя общее решение (1.4.23) уравнений устойчивости (1.4.16), (1.4.17) и соотношения (1.4.6),

(1.4.9) получим

$$\begin{aligned} u_1 &= -(\mu + a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Psi, \quad u_2 = \left[(a_{11} - q) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (\mu - p) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \Psi, \\ \sigma_{22} &= \left\{ [a_{22}(a_{11} - q) - a_{21}(\mu + a_{12})] \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{22}(\mu - p) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi, \\ \sigma_{12} &= \mu \left[(a_{11} - q) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (a_{12} + p) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Здесь $a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu - a_0$, $a_{12} = \lambda + a_0$, $a_0 = 2\mu^2/(2\mu + c)$.

Границные условия (1.4.5) при $x_2 = \pm a/2$ в случае «мертвой» нагрузки со стороны выработки принимают вид

$$\sigma_{22} = p \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = p \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Подставив в граничные условия соотношения (5.2.2), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi = 0, \quad x_2 = \pm \frac{a}{2}, \quad (5.2.3)$$

где

$$B_1 = \frac{(\mu - p)(a_{22} - p)}{(a_{11} - q)(a_{22} - p) - a_{12}(\mu - a_{12})}, \quad B_2 = \frac{p(\mu - a_{12}) - (a_{12} + p)\mu}{\mu(a_{11} - q)}.$$

Исследуем две формы потери устойчивости: «цилиндрическую» — двухстороннее выпучивание и «стержневую» — одностороннее выпучивание. В первом случае функция u_2 должна быть четной относительно аргумента x_2 , во втором — нечетной. Решение представим в виде соотношения (5.1.10). При этом в первом случае функция Ψ имеет вид

$$\Psi = [C_1^1 \operatorname{ch}(\xi_1 mx_2) + C_1^3 \operatorname{ch}(\xi_2 mx_2)] \sin(mx_1),$$

а во втором

$$\Psi = [C_1^1 \operatorname{sh}(\xi_1 mx_2) + C_1^3 \operatorname{sh}(\xi_2 mx_2)] \sin(mx_1),$$

где ξ_i определяются из соотношений (5.1.9). Подставив эти решения в граничные условия (5.2.3), получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1^1 и C_1^3 . Из условия существования нетривиального решения этой системы получаем уравнения:

для «цилиндрической» формы потери устойчивости

$$\frac{\xi_1 (\xi_1^2 B_1 - 1) (\xi_2^2 B_2 - 1)}{\xi_2 (\xi_1^2 B_2 - 1) (\xi_2^2 B_1 - 1)} = \operatorname{th}(\xi_2 mx_2) \operatorname{cth}(\xi_1 mx_2), \quad x_2 = \pm \frac{a}{2}; \quad (5.2.4)$$

для «стержневой» формы потери устойчивости

$$\frac{\xi_1 (\xi_1^2 B_1 - 1) (\xi_2^2 B_2 - 1)}{\xi_2 (\xi_1^2 B_2 - 1) (\xi_2^2 B_1 - 1)} = \operatorname{cth}(\xi_2 m x_2) \operatorname{th}(\xi_1 m x_2), \quad x_2 = \pm \frac{a}{2}. \quad (5.2.5)$$

Из условия отсутствия возмущений пересечений на контакте целика с кровлей и почвой $u_2 = 0$ при $x_1 = 0, l$ находим $m = \pi n/l, n = 0, 1, \dots, \infty$. Рассмотрим случай, когда $n = 1$.

Докритическое плоско-деформированное состояние ленточного целика в случае, когда свойства материала описываются соотношениями (1.1.15), (1.1.17) определяется в виде

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{11} &= -q, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -p, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^p = \frac{1}{2} \left(3\varphi_1 - \sqrt{2\chi - 9\varphi_1^2} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^p &= \frac{1}{2} \left(3\varphi_1 + \sqrt{2\chi - 9\varphi_1^2} \right), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(\sigma)$ — функция объемного сжатия, $\sigma = (p + q)/3$, $\chi = 2(\sqrt{\Sigma} + \alpha\sigma - K)^2/c^2$, $\Sigma = (p^2 + q^2 - pq)/3$.

Аналогично придем к характеристическим уравнениям (5.2.4), (5.2.5). В этом случае коэффициенты a_{ij}, G_j^i определяются по формулам (1.4.10), (1.4.11), где $\eta = 0$.

Характеристические уравнения (5.2.4) и (5.2.5) решены численно. Для конкретных горных пород получены значения оптимального поперечного размера ленточного целика из упруго-пластического материала с трансляционным упрочнением и из сжимаемого с изотропным линейным упрочнением. Осредненные значения постоянных массива брались из таблиц 3.4.1, 5.2.1, 5.2.2.

В табл. 5.2.1 приведены вычисленные значения констант сжимаемых горных пород с изотропным линейным упрочнением.

Таблица 5.2.1

Материал	c_0	α	10^5 Па		
			K	K_0	c
Аргиллит	2,8216	0,212	758,54	0,1073	187255
Песчаник, не опасный по выбросам	2,2921	0,387	1499,96	0,1199	286712

В табл. 5.2.2 первая строка относится к несжимаемому углю с трансляционным упрочнением, вторая — к сжимаемому с линейным изотропным упрочнением. Для объемных деформаций выбирался степенной закон [62]

$$\sigma = S e^m, \quad \varphi_1 = \left(\frac{\sigma}{S} \right)^{1/m};$$

Воспользовавшись общим решением (1.4.21) уравнений устойчивости (1.4.16), получим из (1.5.2) выражения для физических составляющих компонент σ_r , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} тензора напряжений в цилиндрической системе координат. Коэффициенты a_{ij} и G_j^i определяем по формулам (1.5.5) :

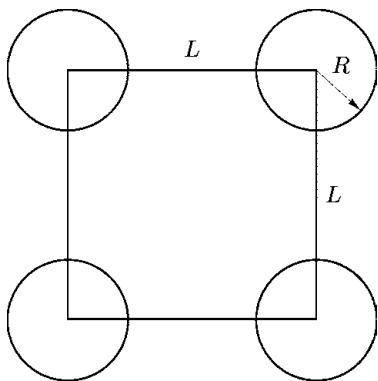


Рис. 5.2.4

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \lambda + 2\mu - a_0, \\ a_{12} &= \lambda - a_0, \\ a_{33} &= \lambda + 2\mu - \frac{1}{4}a_0, \\ a_0 &= \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{2\mu + c}, \quad G_j^i = \mu, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

а величины ξ_i ($i = 1, 2, 3$) — по (1.4.30).

Решения Ψ_i ($i = 1, 2, 3$) выберем в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_1 I_n \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_1 r \right) \sin \left(\overset{\circ}{\beta} x_3 \right) \cos \theta, \\ \Psi_i &= A_i I_n \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_i r \right) \cos \left(\overset{\circ}{\beta} x_3 \right) \cos \theta, \\ \overset{\circ}{\beta} &= m \frac{\pi}{l}, \quad i = 2, 3, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

где I_n — модифицированные функции Бесселя n -го порядка.

Используя зависимости (1.5.2) для составляющих тензоров напряжений и перемещений и приведенные выше решения, из граничных условий на свободной поверхности получим систему алгебраических уравнений относительно констант A_i ($i = 1, 2, 3$). Для случая $n = 1$ она принимает вид:

$$\begin{aligned} A_1 R \left[\left(\frac{p}{\mu} - 1 \right) \overset{\circ}{\beta} \xi_1^2 I_1'' \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_1 \right) + \xi_1 I_2 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_1 \right) \right] + \\ + A_2 I_2 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) \overset{\circ}{\beta} \xi_2 \left(\frac{p}{\mu} - 2 \right) + A_3 I_2 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) \overset{\circ}{\beta} \xi_3 \left(\frac{p}{\mu} - 2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned} A_1 R I_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_1 \right) - A_2 I_1' \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) \overset{\circ}{\beta} \xi_2^2 \left[\frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_2^2 \right) \left(1 - \frac{p}{\mu} \right) - 1 \right] - \\ - A_3 I_1' \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) \xi_3 \overset{\circ}{\beta} \xi_3^2 \left[\frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_3^2 \right) \left(1 - \frac{p}{\mu} \right) - 1 \right] = 0, \end{aligned}$$

Оссесимметричная форма потери устойчивости ($\Psi \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) исследуется по системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 & A_2 \left[a_{12} \xi_2 I'_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) + a_{13} \frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_2^2 \right) I_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) \overset{\circ}{\beta} - \right. \\
 & \quad \left. - (p - a_{11}) \xi_2^2 \overset{\circ}{\beta} I''_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) \right] + A_3 \left[a_{12} \xi_3 I'_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + a_{13} \frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_3^2 \right) I_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) \overset{\circ}{\beta} - (p - a_{11}) \xi_3^2 \overset{\circ}{\beta} I''_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) \right] = 0, \\
 & A^2 \xi_2 I'_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_2 \right) \left[\frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_2^2 \right) \left(1 - \frac{p}{\mu} \right) - 1 \right] + \\
 & \quad + A_3 \xi_3 I'_1 \left(\overset{\circ}{\beta} \xi_3 \right) \left[\frac{a_{11} - p}{a_{13} + \mu} \left(\frac{\mu - q}{a_{11} - p} - \xi_3^2 \right) \left(1 - \frac{p}{\mu} \right) - 1 \right] = 0. \tag{5.2.11}
 \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения линейной алгебраической системы уравнений (5.2.10) или (5.2.11) получим характеристическое уравнение для определения оптимального радиуса целика R^* .

Докритическое состояние целика из сжимаемого упругопластического материала с изотропным линейным упрочнением определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\sigma}_{11} &= \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -p, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{33} = -q, \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^p &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^p = \varphi_1 + \frac{\sqrt{\chi - 3c\varphi_1^2}}{c\sqrt{6}}, \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^p &= \varphi_1 - \frac{\sqrt{\chi - 3c\varphi_1^2}}{c\sqrt{6}}, \quad \chi = \left(\sqrt{\Sigma} + \alpha\sigma - K \right)^2, \\
 \Sigma &= \frac{(p - q)^2}{3}, \quad \sigma = -\frac{2p - q}{3}. \tag{5.2.12}
 \end{aligned}$$

Все уравнения для исследования устойчивости целиков, полученные в предыдущем случае, остаются в силе и для этого варианта, только при определении коэффициентов a_{ij} и G_j^i следует воспользоваться формулами (1.4.10) и (1.4.11), где следует положить $\eta = 0$.

Решение на ЭВМ проводилось для конкретных горных пород (см. таблицы 2.1.1 и 5.2.2), при этом для вычисления модифицированных функций Бесселя использовалось их разложение в ряд. Для объемных деформаций по-прежнему выбирался степенной закон с постоянными, приведенными в табл. 5.2.3. На рис. 5.2.5 показаны зависимости безразмерных критических параметров и gh/E (E — модуль Юнга материала целика от R/l) при $p = 0$. Штриховые линии соответствуют осесимметричной форме потери устойчивости, сплошные — произвольной.

Вычисления проводились при следующих значениях величин L/l : кривые 1, 2, 3, 4 при значении 3; 5, 6, 7, 8 при значении 5; 9, 10, 11, 12 при значении 7. Номера кривых соответствуют таким случаям. Аргиллит: 1, 5, 9 — сжимаемая

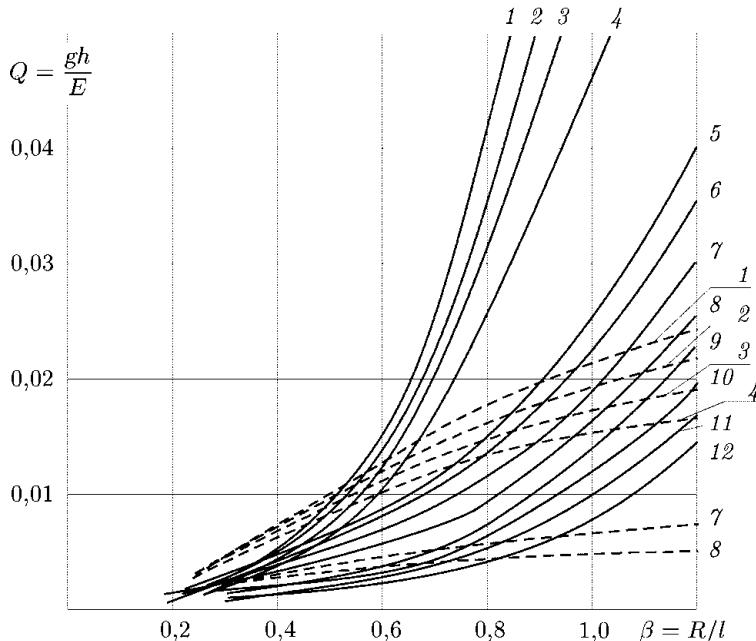


Рис. 5.2.5

модель с изотропным линейным упрочнением; 2, 6, 10 — несжимаемая модель с трансляционным упрочнением; угол: 3, 7, 11 — сжимаемая модель с изотропным линейным упрочнением; 4, 8, 12 — несжимаемая модель с трансляционным упрочнением.

5.3. Неустойчивость бесконечного упруговязкопластического пространства с круговой цилиндрической полостью

Рассмотрим явление поверхности неустойчивости бесконечного пространства с круговой цилиндрической полостью радиуса R_0 , ось которой совпадает с осью Ox_3 (Рис. 5.3.1), сжатого вдоль полости «мертвой» нагрузкой p .

Докритическое состояние определяется соотношениями (1.4.2), где

$$\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0 = 0, \quad \sigma_{33}^0 = -p \quad (5.3.1)$$

Общее решение трехмерных уравнений (1.4.16) имеет вид (1.4.28) при $q = 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.3.2)$$

Корни ξ_i^2 определены (1.4.30) при $q = 0$, а функции ψ_i соотношениями (1.4.32). Выбирая решение, удовлетворяющее условиям затухания при $r \rightarrow \infty$ в (1.4.32) $C_{mn}^{il} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и удовлетворяя граничным условиям

$$\sigma_{rr}^0 = 0, \quad \sigma_{r3}^0 = 0 \quad (5.3.3)$$

на свободной поверхности $r = R_0$ круговой цилиндрической полости, в случае осесимметричной задачи, когда длины волны формы потери устойчивости значительно меньше радиуса полости ($l \ll R_0$), обычным образом получаем характеристический определитель в виде

$$\det(x_{ij}) = 0. \quad (5.3.4)$$

Здесь использованы обозначения

$$x_{11} = (\xi_2^2 + k_2) K_0(\xi \xi_2) + 2k_3 \xi_2 \xi^{-1} K_1(\xi \xi_2),$$

$$x_{12} = x_{11}(\xi_3), \quad x_{21} = -(k_1 \xi_2 + \xi_2^3) K_1(\xi \xi_2),$$

$$x_{22} = x_{21}(\xi_3), \quad \chi_i = \xi \xi_i,$$

$$k_1 = \frac{a_{13} + p}{a_{11}}, \quad k_2 = \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{a_{13} - p}{G},$$

$$k_3 = \frac{G(G + a_{13})}{G a_{11}}, \quad \varsigma = \frac{\pi R}{l},$$

$$K_0(\chi_i) = \left(\frac{\pi}{2\chi_i}\right)^{1/2} e^{-\chi_i} \left(1 - \frac{1}{8\chi_i} + \frac{9}{128\chi_i^2}\right),$$

$$K_1(\chi_i) = -\left(\frac{\pi}{2\chi_i}\right)^{1/2} e^{-\chi_i} \left(1 + \frac{3}{8\chi_i} - \frac{15}{128\chi_i^2}\right).$$

Критические значения нагрузки определяются из условия (1.4.27).

Полученный характеристический определитель для рассмотренной задачи в рамках модели упруговязкопластического тела верен и для других моделей при соответствующей замене коэффициентов a_{ij} и b_{ij} . При этом, если в величинах a_{ij} приведенных характеристических уравнений $\overset{\circ}{a} = 0$, то они в точности совпадут с характеристическими уравнениями для упругих тел.

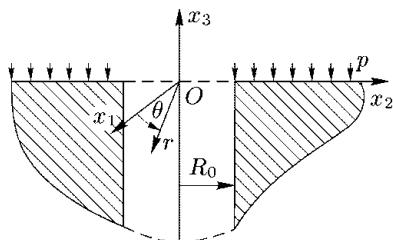


Рис. 5.3.1

5.4. Неустойчивость деформирования слоистых массивов, упрочняющихся в пластических средах

В квазистатической постановке рассмотрим задачу о неустойчивости деформирования слоистых массивов, упрочняющихся в пластических средах. Чередующиеся слои наполнителя и связующего упрочняющиеся упруговязкопластические с характеристиками λ, μ, c, k, η ; $2h$ — толщина. Величинам, относящимся к наполнителю, будем приписывать индекс (1).

Массив сжат вдоль оси ox_3 усилиями интенсивности p (рис. 5.4.1).

Предположим, что массив бесконечен в направлении оси Ox_2 , т. е. исследуем случай плоской деформации в плоскости x_1Ox_3 .

Рассмотрим возможность потери устойчивости деформирования массива при сжатии, исходя из общих решений

трехмерных уравнений устойчивости для упрочняющихся упруговязкопластических тел. Аналогичная задача в статической постановке для материала, состоящего из чередующихся ортотропных слоев, рассмотрена в работе [72].

Для решения задачи каждый из слоев (i -е слои связующего и наполнителя) отнесем к системам координат (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) и $(x_{1i}^{(1)}, x_{2i}^{(1)}, x_{3i}^{(1)})$, которые получаются из системы координат x_1, x_2, x_3 путем параллельного переноса вдоль оси Ox_1 , и связаны со срединными поверхностями соответствующих слоев.

Исходя из общих соотношений упруговязкопластических тел (см. § 1 гл. 1), можно показать, что напряженно-деформированное состояние массива до потери устойчивости без учета сжимаемости будет определяться соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{11i} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{11i}^{(1)} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{13i} = 0, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{13i}^{(1)} = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{13i} = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{13i}^{(1)} = 0, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{33i}^{(1)} = -\frac{2\sqrt{2}h_0 \left(c^{(1)}k - ck^{(1)} \right) + (2+c)c^{(1)}p_0(1+h_0)}{(2+c^{(1)})h_0c + (2+c)\mu_0c^{(1)}}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{33i} = -\frac{\overset{\circ}{\sigma}_{33i}^{(1)}}{h_0} - p_0 \frac{1+h_0}{h_0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{11i} = -\overset{\circ}{\varepsilon}_{33i} = \frac{k\sqrt{2}}{2c} - \frac{\overset{\circ}{\sigma}_{33i}}{2c}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11i}^{(1)} = -\overset{\circ}{\varepsilon}_{33i}^{(1)} = \frac{k^{(1)}\sqrt{2}}{2c^{(1)}} - \frac{\overset{\circ}{\sigma}_{33i}^{(1)}}{2c^{(1)}}, \quad i = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

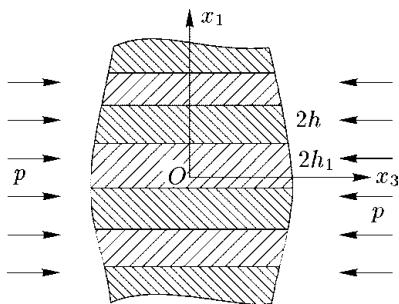


Рис. 5.4.1

Здесь и далее, величины, характеризующие связующие слои и наполнитель и имеющие размерность напряжений, отнесены соответственно к μ и μ_1 , $p_0 = p\mu^{-1}$, $\mu_0 = \mu^{(1)}\mu^{-1}$, $h_0 = h(h^{(1)})^{-1}$.

Рассмотрим две формы потери устойчивости: форму потери устойчивости первого и второго рода. Предположим, что слои теряют устойчивость по одной форме и в одной фазе. Решения основных уравнений (1.4.16), периодические по оси Ox_3 , с периодом $2h+2h^{(1)}$, удовлетворяющие условиям симметрии, согласно (1.4.31) и (2.1.23) запишем в форме

$$\begin{aligned}\psi_i &= \left[C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l} \xi_1 x_{1i}\right) + C_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l} \xi_3 x_{1i}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{l} x_{3i}\right), \\ \psi_i^{(1)} &= \left[C_1^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l} \xi_1^{(1)} x_{1i}^{(1)}\right) + C_2^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{l} \xi_3^{(1)} x_{1i}^{(1)}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{l} x_{3i}^{(1)}\right),\end{aligned}\quad (5.4.2)$$

где величины ξ_i , определяемые (1.4.30), имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_{1,3}^2 &= \left[1 - \frac{\frac{2}{3}\gamma_0^*}{3} + \frac{\frac{1}{2}\sigma_{33i}}{2} \right] \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\frac{2}{3}\gamma_0^*}{3} + \frac{\frac{1}{2}\sigma_{33i}}{2} \right)^2 - \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\sigma_{33i}}{2} \right)} \\ \gamma_0^* &= \frac{6}{2 + c_0 + s\eta_0}\end{aligned}\quad (5.4.3)$$

Формулы для вычисления $\xi_1^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ имеют вид (5.4.3), необходимо лишь в этих формулах всем величинам приписать индекс (1). Так как решение в виде (5.4.2) удовлетворяет условиям симметрии и периодичности, то необходимо удовлетворить только следующим условиям на линии спая $x_{1i} = h; h^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11i} &= \sigma_{11i}^{(1)}, \quad \sigma_{13i} = \sigma_{13i}^{(1)}, \\ u_{1i} &= u_{1i}^{(1)}, \quad u_{3i} = u_{3i}^{(1)}.\end{aligned}\quad (5.4.4)$$

Из уравнений (5.4.4) с учетом (2.1.7) и (1.4.23), а также (5.4.1)–(5.4.3) при условии существования ненулевых решений получаем трансцендентное уравнение относительно s типа (5.3.4) ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Элементы x_{ij} определителя (5.3.4) имеют вид

$$\begin{aligned}x_{11} &= \xi_1 (\xi_1^2 - \delta) \operatorname{sh}(\alpha \xi_1), \quad x_{12} = x_{11}(\xi_3), \\ x_{13} &= \mu_0 \xi_1^{(1)} \left(\xi_1^{(1)2} - \delta^{(1)} \right) \operatorname{sh} \left(\alpha^{(1)} \xi_1^{(1)} \right), \quad x_{14} = x_{13}(\xi_3), \\ x_{21} &= (1 + \xi_1^2) \operatorname{ch}(\alpha \xi_1), \quad x_{22} = x_{21}(\xi_3), \\ x_{23} &= -\mu_0 \left(1 + \xi_1^{(1)2} \right) \operatorname{ch} \left(\alpha^{(1)} \xi_1^{(1)} \right), \quad x_{24} = x_{23}(\xi_3), \\ x_{31} &= \xi_1 \operatorname{sh}(\alpha \xi_1), \quad x_{32} = x_{31}(\xi_3), \quad x_{33} = \xi_1^{(1)} \operatorname{sh} \left(\alpha^{(1)} \xi_1^{(1)} \right), \\ x_{34} &= -\mu_0 \left(1 + \xi_1^{(1)2} \right) \operatorname{sh} \left(\alpha^{(1)} \xi_1^{(1)} \right), \quad x_{44} = x_{34}(\xi_3),\end{aligned}\quad (5.4.5a)$$

$$\begin{aligned}
 x_{34} &= x_{33} \left(\xi_3^{(1)} \right), \quad x_{41} = \operatorname{ch}(\alpha \xi_1), \quad x_{42} = \operatorname{ch}(\alpha \xi_3), \\
 x_{43} &= -\operatorname{ch} \left(\alpha^{(1)} \xi_1^{(1)} \right), \quad x_{44} = x_{43} \left(\xi_3^{(1)} \right), \\
 \delta &= 3 - \frac{4}{3} \gamma_0 + 3 \sigma_{33i}^{\circ}, \quad \alpha = \frac{\pi h}{l}, \\
 \delta^{(1)} &= 3 - \frac{4}{3} \gamma_0^{(1)} + 3 \sigma_{33i}^{(1)}, \quad \alpha^{(1)} = \frac{\pi h^{(1)}}{l}.
 \end{aligned} \tag{5.4.56}$$

В результате решения трансцендентного уравнения (5.3.4) получим зависимость $p_0 = f(l, s)$, откуда, минимизируя, имеем

$$\frac{\partial p_0}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial s} = 0 \tag{5.4.6}$$

Условие устойчивости примем в виде (1.4.27)

В случае формы потери устойчивости второго рода, когда срединные поверхности слоев связующего остаются плоскими, а слои наполнителя теряют устойчивость по ранее рассмотренным формам, получаем

$$\begin{aligned}
 \psi_i &= \left[C_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{l} \xi_1 x_{1i} \right) + C_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{l} \xi_3 x_{1i} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi}{l} x_{3i} \right), \\
 \psi_i^{(1)} &= \left[C_1^{(1)} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{l} \xi_1^{(1)} x_{1i}^{(1)} \right) + C_2^{(1)} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{l} \xi_3^{(1)} x_{1i}^{(1)} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi}{l} x_{3i}^{(1)} \right).
 \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Подставляя выражения (5.4.7) в граничные условия (5.4.4) аналогично только что рассмотренному случаю получаем однородную систему алгебраических уравнений, из условия существования нетривиальных решений которой получаем трансцендентное уравнение для определения критических нагрузок

$$\det(b_{ij}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{5.4.8}$$

Элементы b_{ij} совпадают с x_{ij} , если при $j = 1, 2$ $\operatorname{sh}(\alpha \xi_1)$ и $\operatorname{sh}(\alpha \xi_3)$ поменять местами с $\operatorname{ch}(\alpha \xi_1)$ и $\operatorname{ch}(\alpha \xi_3)$.

В общем случае решение полученных уравнений может быть выполнено численными методами.

5.5. Неустойчивость неоднородного полупространства

При подходе типа Лейбензона–Ишлинского [257] исследуем неустойчивость упруговязкопластического тела (полупространство с непрерывной неоднородностью) значительных размеров в направлении осей Ox и Oy (ось y направлена вниз), находящегося под действием однородного гравитационного поля ρgy (ρ — плотность, g — гравитационное ускорение) и горизонтально-го сжатия $P(y)$ вдоль оси Ox (рис. 5.5.1).

Допустим, что

$$P = P_0 e^{-\tilde{a}y} \quad (5.5.1)$$

Таким образом, поле состоит из двух частей: члена ρgy , увеличивающегося линейно с глубиной, и горизонтального сжатия $P_0 e^{-\tilde{a}y}$, уменьшающегося с глубиной экспонентно. Положим, что в соотношениях напряжения–деформации для упруговязко-копластической среды

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 e^{-\tilde{a}y}, \quad c = c_0 e^{-\tilde{a}y}, \\ \eta &= \eta_0 e^{-\tilde{a}y}, \quad k = k_0 e^{-\tilde{a}y}, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

где μ_0 , c_0 , η_0 , k_0 – значения физико-механических характеристик материала на поверхности $y = 0$. Такая среда является несжимаемой анизотропной и неоднородной.

Очевидно, что при предположении (5.5.2) прочностные характеристики уменьшаются экспоненциально с глубиной при постепенном переходе среды от твердого состояния к жидкому. Ограничимся случаем плоской деформации, когда потеря устойчивости происходит в плоскости xOy , и квазистатической постановкой.

Напряженно-деформированное состояние полупространства до потери устойчивости определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{11} &= -P_0 e^{-\tilde{a}y} - \rho gy, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -\rho gy, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} &= \frac{k_0 \sqrt{2} - P_0}{2c_0} \left[1 - \exp \left(-\frac{c_0}{\eta_0} t_0 \right) \right], \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} = -\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} &= 0, \quad \overset{\circ}{e}_{11} = \frac{k_0 \sqrt{2} - P_0}{2\eta_0} \exp \left(-\frac{c_0}{\eta_0} t_0 \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} &= -\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}, \quad \overset{\circ}{e}_{12} = 0, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

если анализ устойчивости этого состояния производить на конечном интервале времени. Если устойчивость основного состояния исследовать по предельной системе уравнений (см. § 2 гл. 1), то в соотношениях (5.5.3) следует положить $t_0 \rightarrow \infty$. Далее ограничимся только этим случаем.

Исследование устойчивости этого состояния тела сводится к решению уравнений в вариациях и соответствующих граничных условий, которые имеют вид (1.2.16), где $\rho = 0$ и соответственно (1.2.20), где $p_i = 0$. Эта задача замыкается путем при-

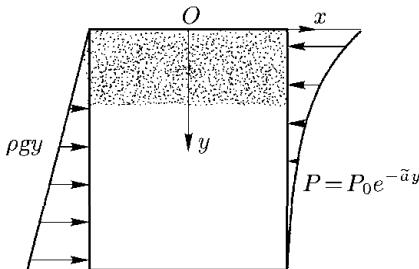


Рис. 5.5.1

соединения вариационных соотношений для упруговязкопластических тел (1.4.33). Из уравнений равновесия можно получить

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (s_{11} - s_{22}) = \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial y^2}, \quad (5.5.4)$$

где, согласно (1.4.33), при учете (5.5.3) и условия несжимаемости

$$\begin{aligned} s_{11} &= 2(\mu_0 - \tilde{a}\varepsilon^2) e^{-\tilde{a}y} u_{1,1} = -s_{22}, \\ \sigma_{12} &= \mu_0 e^{-\tilde{a}y} (u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \varepsilon = -\left(\frac{P_0}{2} + c_0 \overset{op}{\varepsilon}_{11}\right). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Границные условия (1.2.20) на свободной поверхности таковы

$$\sigma_{12} + \overset{\circ}{\sigma}_{11} u_{1,2} = 0, \quad \sigma_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_{22} u_{2,2} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (5.5.6)$$

Используя уравнения равновесия (1.2.16), (5.5.4), связь между напряжениями и деформациями (1.4.33), а также условие несжимаемости, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\tilde{a}^2 u_{,2} + b_1 u_{,11} + b_2 u_{,112} - u_{,222} - \tilde{a}^2 v_{,1} + v_{,111} - v_{,122} &= 0, \\ u_{,1} + v_{,2} &= 0, \quad b_1 = 4\tilde{a} \left(1 - \frac{2}{3} \gamma_0\right), \quad b_2 = \frac{8}{3} \gamma_0 - 3, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

где $u_1 = u$, $u_2 = v$. Здесь и далее величины, имеющие размерность напряжений отнесены к μ_0 , а γ_0 — определено выражением (5.4.3).

Так как решения уравнений (5.5.7) удовлетворяют условию несжимаемости, то должны иметь место следующие соотношения:

$$u = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (5.5.8)$$

В случае деформаций, синусоидальных вдоль оси x , положим

$$f = \varphi(y) \sin(lx) \quad (5.5.9)$$

После подстановки (5.5.8), (5.5.9) в (5.5.7) получим уравнение для функции $\varphi(y)$:

$$\begin{aligned} \varphi''' + a_3 \varphi'' + a_2 \varphi' + a_1 \varphi &= 0 \\ a_1 = l^4 + \tilde{a}^2 l^2, \quad a_2 = b_1 l^2, \quad a_3 = l^2 + \tilde{a}^2 + b_2 l^2 \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Решение (5.5.10) представим в виде

$$\varphi = C_1 e^{\delta_1 \tilde{a}y} + C_2 e^{\delta_2 \tilde{a}y}, \quad (5.5.11)$$

где δ_i — корни характеристического уравнения

$$\delta^4 + a_3 \delta^2 + a_2 \delta + a_1 = 0. \quad (5.5.12)$$

Выбор решений в форме (5.5.11) обеспечивает затухание компонентов напряженного и деформированного состояния при $y \rightarrow \infty$.

Пользуясь соотношениями (5.5.5), (5.5.8), (5.5.9) и уравнениями равновесия, найдем компоненту напряжения σ_{22} возмущенного состояния, при подстановке которой в граничные условия на возмущенной поверхности (5.5.6) получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} [(1 - P_0 - \rho_0 h)(\delta_1 \tilde{a})^2 + l^2] C_1 + [(1 - P_0 - \rho_0 h)(\delta_2 \tilde{a})^2 + l^2] C_2 &= 0, \\ (K_1 - \rho_0 h \delta_1 \tilde{a}) C_1 + (K_2 - \rho_0 h \delta_2 \tilde{a}) C_2 &= 0 \quad (5.5.13) \\ \rho_0 = \frac{\rho g}{\mu_0}, \quad K_i = \frac{\delta_i \tilde{a} + 1}{(\delta_i - 1) \tilde{a}} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

При выводе (5.5.13) влияние тяготения заменено силой, пропорциональной местному изменению высоты, т. е. гидростатическим давлением, при этом на бесконечности напряжения (при $P_0 = 0$) стремятся к величине γh ($\gamma = \rho g$, γ — объемный вес породы, h — высота). Для определения критического давления получим уравнение

$$P_0 = \frac{A_2 D_1 (\delta_2 - 1) - A_1 D_2 (\delta_1 - 1)}{D_1 (\delta_2 - 1) (\delta_2 \tilde{a})^2 - D_2 (\delta_1 - 1) (\delta_1 \tilde{a})^2}, \quad (5.5.14)$$

где $A_i = l^2 + (1 - \rho_0 h)(\delta_i \tilde{a})^2$, $D_i = 1 + \delta_i \tilde{a} - \rho_0 h (\tilde{a})^2 \delta_i (\delta_i - 1)$, $i = 1, 2$.

На рис. 5.5.2 представлена зависимость безразмерной сжимающей нагрузки P_0 от безразмерного числа волн $l_* = l/\tilde{a}$ при заданных значениях гравитационного параметра $h_* = \rho_0 h/\tilde{a}$ и при $0 < \eta_0 \ll 1$, $c_0 = 0,05$ близких для пластических глин [14]. Сплошные кривые (1, 2) соответствуют упруговязкопластическому упрочняющемуся массиву, а штриховые (3, 4) — упругому массиву [292]. Кривые 1 и 4 соответствуют $h_* = 0,05$, а 2 и 3 — $h_* = 0$. Как следует из приведенных результатов, с ростом h_* критическая нагрузка P_0 существенно уменьшается.

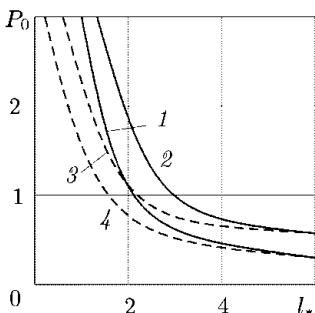


Рис. 5.5.2

Список литературы

1. *Акопян Ж.С.* О потере устойчивости вертикальной выработки по неосесимметричной форме // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 116–119.
2. *Акопян Ж.С.* Числовые результаты для неосесимметричной задачи об устойчивости вертикальной горной выработки // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12, № 9. – С. 130–131.
3. *Акопян Ж.С., Гузь А.Н.* О вариационных принципах теории устойчивости горных выработок для сжимаемых моделей // ДАН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 33–35.
4. *Акопян Ж.С., Гузь А.Н.* О вариационных принципах теории устойчивости горных выработок для несжимаемых моделей // ДАН УССР. Сер. А. – 1981. – № 10. – С. 27–30.
5. *Акопян Ж.С., Гузь А.Н., Навоян А.В.* О задачах устойчивости вертикальных горных выработок // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 54–62.
6. *Акопян Ж.С., Гузь А.Н., Навоян А.В.* О построении теории устойчивости горных выработок // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 3–22.
7. *Акопян Ж.С., Гузь А.Н., Навоян А.В.* Об устойчивости упругопластических тел при всестороннем сжатии // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 12. – С. 107–110.
8. *Алимжанов М.Т.* Исследование устойчивости горизонтальных подземных выработок. // В кн.: Проблемы механики горных пород. – Новосибирск: Наука, 1971. – С. 39, 40.
9. *Алимжанов М.Т.* Исследование устойчивости подземных выработок // В кн.: Материалы первой научной конференции молодых ученых АН КазССР. Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1968. – С. 7, 8.
10. *Алимжанов М.Т.* К определению давления на крепь подземных выработок сферической формы // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1970. – № 5. – С. 9–13.
11. *Алимжанов М.Т., Ершов Л.В.* О характере проявления горного давления вблизи одиночной горизонтальной капитальной выработки глубокого заложения // В кн.: Проблемные вопросы механики горных пород – Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1972. – С. 67–76.
12. *Алимжанов М.Т.* Об определении оптимальных размеров подземных полостей, используемых для хранения нефти и газа // Тр. ин-та матем. и мех. АН КазССР. – 1970. – № 1. – С. 172–176.

13. Алимжанов М.Т. Об устойчивости вертикального шахтного ствола // В кн.: Материалы отчетно-научной конференции по математике и механике. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1967.
14. Алимжанов М.Т. Об устойчивости горизонтальной подземной выработки круглого сечения // Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат. – 1967. – № 5. – С. 80–86.
15. Алимжанов М.Т. Об устойчивости стенок бурящихся скважин // В кн.: Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. – С. 3–14.
16. Алимжанов М.Т. Проблема устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Усп. мех. – 1990. – Т. 13, № 3. – С. 21–57.
17. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1982. – 270 с.
18. Алимжанов М.Т., Габдулин Б.Ж. Об упругопластическом состоянии неоднородных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек // Вест. АН КазССР. – 1967. – № 10. – С. 52–67.
19. Алимжанов М.Т., Гордон В.Н. Об устойчивости толстостенной сферической оболочки // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – № 5. – С. 57–59.
20. Алимжанов М.Т., Евстропов Н.А. Расчет устойчивости подземных полостей, созданных внутренними взрывами. // Сборник научных трудов МГИ. – М.: 1971.
21. Алимжанов М.Т., Евстропов Н.А. Расчет устойчивости подземных полостей, созданных внутренними взрывами // Сборник научных трудов МГИ. – М.: 1973. – С. 345–347.
22. Алимжанов М.Т., Ершов Л.В. К определению давления на крепь и смещения контура вертикального шахтного ствола // Некоторые вопросы механики горных пород. – М.: 1971. – С. 10–17.
23. Алимжанов М.Т., Ершов Л.В. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи горного давления. // В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 47–54.
24. Алимжанов М.Т., Естаев Е.К. Упругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием // Мех. деформ. тв. тела. – 1982. – С. 105–115.
25. Алимжанов М.Т., Исхаков М.Д. Об устойчивости равновесия в некоторых осесимметричных задачах горных пород. // В кн.: Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата: КазССР, 1972. – С. 243–255.
26. Андреева И.Ю., Медведь Н.А., Спорыхин А.Н. Моделирование отказов цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при осевом сжатии // Тр. II Всерос. научно-техн. конф. «Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении». Часть 1, Воронеж, 2001. – С. 12–18.
27. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.

28. *Ариаратнам С.Т., Дюби Р.Н.* Устойчивость упругопластической цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. Е. – 1969. – № 1. – С. 47–51.
29. *Артемов М.А.* Двухосное растяжение тонкой пластины с эллиптическим отверстием // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. Чебоксары, 1988. С. 4 8.
30. *Артемов М.А.* Метод возмущений в теории упрочняющегося тела // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1988. – С. 51–53.
31. *Артемов М.А.* О двухосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // Журн. прикл. механ. и техн. физ. – 1985. – № 6. – С. 158–163.
32. *Артемов М.А.* Приближенное решение задач теории кинематического упрочнения // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары: Чувашск. кн. изд-во, 1986. – С. 8–13.
33. *Артемов М.А.* Приближенное решение плоской задачи теории пластичности изотропного материала с анизотропным упрочнением // ВГУ. – Воронеж, 1986. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.05.86, № 3481В.
34. *Артемов М.А.* Эксцентрическая труба из упрочняющегося упругопластического материала под действием внутреннего давления // ВГУ. – Воронеж, 1984. – 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.01.85, № 83-85.
35. *Артемов М.А., Ковалев А.В.* О локальной неустойчивости в задаче Галина для сложной среды // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл. школы. Воронеж: изд-ние ВГУ, 1992. – С. 7.
36. *Артемов М.А., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в одном классе упругопластических задач с произвольным упрочнением // ВГУ. – Воронеж, 1995. - 30 с. - Деп. в ВИНИТИ 14.03.96, № 685–695.
37. *Асамидинов Ф.М.* Устойчивость массива возле горизонтальной горной выработки эллиптической формы при одноосном растяжении–сжатии // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 11. – С. 124–126.
38. *Асамидинов Ф.М., Гузь А.Н., Кулиев Г.Г.* Ос устойчивости горизонтальных выработок некруговой формы // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 112–115.
39. *Бабич И.Ю., Бакланова Г.Н., Гузь А.Н.* Плоская упругопластическая задача устойчивости горизонтальных горных выработок // Прикл. механика. 1978. Т. 14, № 3. С. 68–73.
40. *Бабич И.Ю., Гузь А.Н.* Потеря устойчивости как возможный механизм образования выбросов // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 23–26.
41. *Бабич И.Ю., Гузь А.Н.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек из композитных материалов (трехмерная постановка) // Прикл. механика. – 1983. – Т. 19, № 11. – С. 3–20.

42. *Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Лобовик С.Б.* Об устойчивости упругопластического полупространства вокруг сферической полости // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 10. – С. 22–27.
43. *Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Шульга Н.А.* Исследование динамики и устойчивости композитных материалов в трехмерной постановке // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 3–32.
44. *Бабич И.Ю., Навоян А.В.* К вопросу об устойчивости горизонтальной выработки кругового поперечного сечения // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. – С. 110–113.
45. *Бакланова Г.Н.* Пространственная задача об устойчивости горных выработок при упругопластических деформациях // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 7. – С. 35–40.
46. *Беломытцева И.В., Спорыхин А.Н.* Устойчивость плит под действием равномерно распределенных касательных усилий // В сб.: Трехмерные задачи механики структурно-неоднородных сред. – Воронеж, 1991. – С. 41, 50.
47. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. – М.: Физматгиз, 1959. – 544 с.
48. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
49. *Болотин В.В.* Нелинейная теория упругости и устойчивость «в большом» // Расчеты на прочность. – 1958. – Вып. 3. – С. 311–353.
50. *Болотин В.В.* Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Наука, 1971. – 270 с.
51. *Болотин В.В., Григорюк Э.И.* Устойчивость упругих и неупругих систем // В кн.: Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука, 1972. – С. 325–363.
52. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Наука, 1980. – 271 с.
53. *Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д.* Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // Прикл. матем. и мех. – 1987. – Т. 51, № 2. – С. 314–322.
54. *Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д.* Концентрация напряжений в упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // Куйбышевск. гос. ун-т. – Куйбышев, 1983. – 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.05.83, № 2443-83.
55. *Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д.* Применение метода возмущений к теории кручения упругопластических стержней // Прикл. матем. и мех. – 1961. – Т. 45, № 5. – С. 932–939.
56. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 527 с.
57. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
58. Вопросы механизма разрушения горных пород: сб. науч. трудов / Отв. ред. Шемякин Е.И. – Новосибирск: Наука, 1976. – 152 с.; 1978. – 152 с.

59. *Вульман С.А.* О решении осесимметричных упругопластических задач методом малого параметра // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. – 1969. – № 3. – С. 16–169.
60. *Вульман С.А., Семыкина Т.Д.* Напряженно-деформированное состояние пластины с включением // Прикл. задачи мех. сплошных сред. Воронеж, 1988. С. 48–51.
61. *Вульман С.А., Ивлев Д.Д., Семыкина Т.Д.* Коническая труба под действием равномерного давления // ВГУ – Воронеж, 1980. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.12.80, № 5337-80.
62. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов. – М.: Высш. школа, 1978. – 447 с.
63. *Галеркин Б.Г.* Теория продольного изгиба и опыт применения продольного изгиба к многоэтажным стержням, стойкам с жесткими соединениями и системами стоек // Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 23–124.
64. *Галин Л.А.* Плоская упругопластическая задача // Прикл. матем. и мех. – 1946. – Т. 3, № 3. – С. 367–386.
65. *Глушко В.Т., Долинина Н.Н., Розовский М.Н.* Устойчивость горных выработок. – Киев: Наука, 1973. – 206 с.
66. *Горбачева Н.Б., Шашкин А.И.* Устойчивость горизонтальных горных выработок в упрочняющемся упруговязкопластическом массиве // В кн.: Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства. Тр. конф. – Воронеж. – 1998. – С. 77–81.
67. *Горбачева Н.Б., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* К определению напряженно-деформированного состояния в задаче Галина для сложной модели среды // Вест. Воронежск. ун-та, сер. 2. Естественные науки. – № 3. – Воронеж. – 1998. – С. 245–249.
68. *Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // Ж. прикл. мех. и техн. физ., СО РАН. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 146–151.
69. *Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* Неустойчивость многослойной крепи в вертикальной горной выработке // Тр. II Всерос. научно-техн. конф. «Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении». Часть 1, Воронеж, 2001. – С. 12–18.
70. *Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* Исследование устойчивости состояния равновесия горного массива возле многослойной сферической крепи при упругопластическом поведении материалов // Вістник Дніпропетровського університету, сер. мех. – 2001. – В. 1. – Т. 1. – С. 49–55.
71. *Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н.* Локальная неустойчивость горного массива возле многослойной сферической крепи при упругопластическом поведении материалов // Вест. фак-та Прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Изд-ние ВГУ. – 2002. – № 3. – С. 90–98.
72. *Гузь А.Н.* Исследование локальной потери устойчивости слоистых несжимаемых композитных структур // Механика композит. материалов. – 1991. – № 1. – С. 31–39.

73. Гузь А.Н. Локальная неустойчивость слоистых сжимаемых композитов // Мех. тв. тела. – 1991. – № 2. – С. 49–55.
74. Гузь А.Н. О вариационных принципах трехмерной теории устойчивости деформируемых тел при действии «следящих» нагрузок // ДАН СССР. – 1979. – Т. 246, № 6. – С. 1314–1316.
75. Гузь А.Н. О задачах устойчивости в механике горных пород // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата, 1972. – С. 27–35.
76. Гузь А.Н. О задачах устойчивости горных выработок // ДАН СССР. – 1980. – Т. 253, № 3. – С. 553–555.
77. Гузь А.Н. О континуальном приближении в пространственных неосесимметричных задачах теории устойчивости слоистых сжимаемых композитных материалах // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 23–27.
78. Гузь А.Н. О соотношениях теории пластического упрочняющегося тела в регулярной поверхности нагружения // Докл. АН УССР. Сер. А, 1976. – № 1. – С. 34–37.
79. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Внутренняя неустойчивость // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 3–17.
80. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Поверхностная неустойчивость // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 24–35.
81. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости упругопластических тел // Докл. АН УССР. Сер. А, 1976. – № 3. – С. 221–226.
82. Гузь А.Н. Об устойчивости упруговязкопластических тел при неоднородном докритическом состоянии // Докл. АН УССР. Сер. А, 1976. – № 5. – С. 410–416.
83. Гузь А.Н. Об общих решениях трехмерной теории устойчивости деформируемых тел для различных моделей // Докл. АН УССР. Сер. А, 1976. – № 10. – С. 908–912.
84. Гузь А.Н. Основы теории устойчивости горных выработок. – Киев: Наукова думка, 1977. – 204 с.
85. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Кнев: Вища школа, 1980. – 512 с.
86. Гузь А.Н. Про стійкість товстих пластин за границею пружності // Докл. АН УССР. Сер. А, 1969. – № 9. – С. 813–816.
87. Гузь А.Н. Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 25–44.
88. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наукова думка, 1971. – 276 с.
89. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – Кнев: Наукова думка, 1979. – 144 с.
90. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Кнев: Наукова думка, 1973. – 272 с.
91. Гузь А.Н. Устойчивость упругопластических тел // Прикл. механика. – 1969. – Т. 5, № 3. – С. 11–19.

92. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. Киев: Наукова думка, 1985. – 280 с.
93. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.
94. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулесов Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка. – 1981. – 186 с.
95. Гузь А.Н. О численных методах в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // Прикл. механика. – 1988. – Т. 21, № 1. – С. 3–10.
96. Гузь А.Н., Корж В.П., Чехов В.Н. Неустойчивость слоистых тел при сжатии с учетом действия поверхностных распределенных нагрузок // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 13–22.
97. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И., Лебедев В.К. Основы ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в твердых телах. – Киев.: Наукова думка, 1974. – 203 с.
98. Гузь А.Н., Навоян А.В. Дослідження стійкості горизонтальної гірської виробки кругового поперечного перерізу // Докл. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 7. – С. 630–633.
99. Гузь А.Н., Спорыхин А.Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Общие вопросы. // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 3–22.
100. Гузь А.Н., Спорыхин А.Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Конкретные результаты. // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 8. – С. 3–27.
101. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Исследование поверхностной неустойчивости слоистых тел в трехмерной постановке // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 3–24.
102. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Линеаризированная теория складкообразования в толще земной коры // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, № 1. – С. 3–14.
103. Гузь О.М. Про стійкость деформування нелинійного в'язко-пружного тривимірного тіла // Докл. АН УССР. Сер. А, 1969. – № 1. – С. 1003–1006.
104. Гузь О.М. Стійкість циліндричної товтосстіної оболочки за границею пружності // Докл. АН УССР. Сер. А, 1969. № 10. С. 919–921.
105. Дель Г.Д., Балакерев А.И. Растижение листа с разиой начальной разиотолщинностью // Изв. вузов. Машиностр. 1984. № 12. – С. 7–11.
106. Дериглазов Л.В. К устойчивости горизонтальной выработки в изотропном массиве при неравномерном сжатии // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 99–102.
107. Дериглазов Л.В. Устойчивость горизонтальной горной выработки в ортотропном массиве // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 45–49.

108. *Дериглазов Л.В.* Устойчивость горных выработок в трансверсальном изотропном массиве // Прикл. механика. – 1977. Т. 13, № 5. – С. 27–33.
109. *Динник А.Н.* Устойчивость упругих систем. – М.: Объед. науч.-техн. изд-во, 1935. – 183 с.
110. *Динник А.Н., Моргаевский А.Б., Савин Г.Н.* Распределение напряження вокруг подземных горных выработок. // Тр. Сов. по управлению горным давлением. – М.: Изд-во АН СССР, 1938.
111. *Друккер Д., Прагер Б.* Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование. // В сб.: Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975.
112. *Дудукаленко В.В., Ивлев Д.Д.* О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. – 1963. – № 3. – С. 115–118.
113. *Дудукаленко В.В., Ивлев Д.Д.* О кручении анизотропных упрочняющихся призматических стержней при линеаризированном законе пластического течения // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. – 1963. – № 5. – С. 173–175.
114. *Егоров А.К.* Об устойчивости полого шара при внутреннем и внешнем давлениях // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – № 5. – С. 29–34.
115. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К.* Об устойчивости сферической оболочки при внутреннем давлении // Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат. – 1976. – № 1. – С. 43–49.
116. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К.* Теория процесса складкообразования в толще горных пород (математическое описание). – Алма-Ата: Наука КазССР, 1968. – С. 210.
117. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А.* Теория складкообразования в земной коре. – М.: Наука. – 1975. – 240 с.
118. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Еришибаев У.Д.* Об упругой устойчивости весомого полупространства со сферической полостью // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – № 5. – С. 17–20.
119. *Ержанов Ж.С., Сагинов А.С., Векслер Ю.А.* Расчет устойчивости горных выработок, подверженных большим деформациям. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1973. – 176 с.
120. *Ержанов Ж.С., Серегин Ю.Н., Смирнов В.Ф.* Расчет нагруженности опорных и поддерживающих целиков. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1973. – 140 с.
121. *Еришов Л.В.* Искусственное усиление устойчивости целиков путем установки подкрепляющих штаг. // Изв. АН СССР. ОТН, 1963. – № 2. – С. 180–182.
122. *Еришов Л.В.* Исследование вопросов проявления горного давления с позиций устойчивости упругопластических тел. // Прикл. матем. 1963. – Т. 9, № 4. – С. 387–397.
123. *Еришов Л.В.* К вопросу о проявлении горного давления в вертикальном шахтином стволе // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1962. – № 6. – С. 103–107.

124. Ершов Л.В. К математической теории горного давления. // В кн.: Аналитические методы исследования и математическое моделирование горных процессов. – М.: Госгортехиздат, 1963, С. 19–43.
125. Ершов Л.В. О постановке задачи устойчивости горных выработок // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 2. – С. 305–307.
126. Ершов Л.В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 298–300.
127. Ершов Л.В. Об образовании шейки в плоском образце при растяжении // Ж. прикл. мех. и техн. физ. – 1961. – № 1. – С. 135–137.
128. Ершов Л.В. Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления // Прикл. механика и техн. физика. – 1960. – № 4. – С. 81–82.
129. Ершов Л.В. Об учете влияния эффекта Баушингера на потерю устойчивости сжатой полосы // Прикл. матем. и мех. – 1962. Т. 26, № 3. – С. 577–579.
130. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр. – 1958. – № 8. – С. 149–152.
131. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. № 1. С. 124–125.
132. Ершов Л.В., Максимов В.А. Математические основы физики горных пород. М.: Изд-ние МГИ, 1968. 293 с.
133. Заславский Ю.З. Исследование проявлений горного давления в капитальных выработках глубоких шахт Донецкого бассейна. – М.: Недра, 1966.
134. Зебриков В.П. Напряженное состояние концентрической трубы при упругопластическом деформировании под действием давления // Ж. прикл. механ. и техн. физ. – 1983. – № 3. – С. 152–159.
135. Ибрагимов В.А., Нефагин В.А. Аналитическое решение задачи о двусном растяжении плоскости с круговым отверстием при определяющих соотношениях теории пластичности с упрочнением // Теор. и прикл. механика. – Минск, 1987. – С. 29–32.
136. Ибрагимов В.А., Нефагин В.А. Метод разложения по параметру нагружения в упругопластических задачах для упрочняющихся тел // Теор. и прикл. механика. – 1986. – № 13. – С. 3–7.
137. Ибрагимов В.А., Нефагин В.А. О сходимости метода разложения по малому параметру нагрузления в задаче об упругопластическом изгибе кольцевой пластины // Белорус. политехн. ин-т. – Минск, 1987. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.06.87, № 3880-В87.
138. Ибрагимов В.А., Нефагин В.А. Сходимость метода разложения по параметру нагрузления в задачах упругопластического деформирования стержней // Теор. и прикл. мех. – Минск. 1988. – № 15. – С. 50–58.

139. Ивлев Д.Д. К теории сложных сред // ДАН СССР. – 1963. – Т. 148, № 1. С. 64–67.
140. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
141. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
142. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
143. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т.1. – М.: Физматлит, 2001. – 445 с.
144. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т.2. – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.
145. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела // Учен. зап. Московск. ун-та. – 1940. – Вып. 39. – С. 3–47.
146. Ильюшин А.А. Нормальное и касательное напряжение при чистом изгибе балки за пределом упругости и аналогия с задачей об изгибе плит // Инж. сб. – 1954. – Т. 19. – С. 3–12.
147. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
148. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения круглой пластины // Прикл. матем. и мех. – 1943. – Т. 7, № 6. – С. 701–715.
149. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы и кругового прута // Прикл. матем. и мех. – 1943. – Т. 7, № 2. – С. 109–115.
150. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 701 с.
151. Кацауров И.Н. Механика горных пород. – М.: Недра. – 1981. – 161 с.
152. Кирсанов М.И., Спорыхин А.Н. О неустойчивости сферического тела при равномерном нагружении // Ж. Прикл. мех. и техн. физ. – Новосибирск: Наука. – 1979. – № 1. – С. 161–165.
153. Клюшников В.Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – № 5. – С. 16–20.
154. Клюшников В.Д. Изгиб и выпучивание пластин и оболочек за пределами упругости // Тр. УИ Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. – 1969. – М.: Наука. – 1970. – С. 808–812.
155. Клюшников В.Д. К проблемам устойчивости упругопластического стержня // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 2. – С. 132–133.
156. Клюшников В.Д. Неустойчивость пластических конструкций (обзор). – Механика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир. – 1976. – № 7. – С. 148–177.
157. Клюшников В.Д. О зависимости критических нагрузок от истории нагружения упругопластических пластин // В сб.: Мех. деформ. тел и конструкций. – М.: Машиностроение. – 1975. – С. 220–226.

158. Клюшинов В.Д. О некоторых особенностях явления неустойчивости за пределом упругости // В сб.: Усп. мех. деформир. сред. – М.: Наука – 1975. – С. 20–27.
159. Клюшинов В.Д. Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, № 6. – С. 3–11.
160. Клюшинов В.Д. Устойчивость пластин за пределом упругости // Изв. АН СССР, ОТН. – 1957. № 7. – С. 41–56.
161. Клюшинов В.Д. Устойчивость процесса сжатия идеализированного упругопластического стержня // Мех. и машиностроение. – 1964. – № 6. – С. 59–68.
162. Клюшинов В.Д. Устойчивость упругопластических систем. – М.: Наука. – 1980. – 240 с.
163. Ковалев А.В., Спорыхин А.Н., Чиканова Н.Н. К определению поля напряжений в пластинах с отверстиями различных очертаний. // Информационные технологии и системы. – Воронеж. – 1994. – Ч. 3. – С. 11–15.
164. Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. Двухосное растяжение упругопластического пространства с включением близким по форме к правильному многоугольнику. // Вестн. ВГУ. Серия 2. Естественные науки. – Воронеж. – 1998. – № 3. – С. 136–141.
165. Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. О двухосном растяжении пластины с отверстием. // International information Academij, Информационные технологии и системы. Воронежск. отд. Воронеж. – 1998. – В.2. – С. 61–65.
166. Ковалев А.В., Спорыхин А.Н., Яковлев А.Ю. Двухосное растяжение упругопластического пространства с призматическим включением. // Прикладная механика, НАН Украины. – Киев. – 2000. – Т.36, № 6. – С. 114–120.
167. Кузнецов В.В. Деформированное упругопластическое состояние толстой плиты с эллиптическим отверстием, изгибаемой в своей плоскости // Изв. вузов. – 1980. – № 4. – С. 23–27.
168. Кулиев Г.Г. Разрушение и устойчивость трехмерных тел с трещинами и некоторые родственные проблемы горной и нефтяной механики. – Баку: Элм, 1983. – 143 с.
169. Кулиев Г.Г., Асамидинов Ф.М. Устойчивость горизонтальных горных выработок кругового поперечного сечения при двухосном сжатии массива // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 122–124.
170. Куршин Л.М. Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. – 1978. – № 3. – С. 125–160.
171. Легеня И.Д. Об устойчивости сжатой пластины с учетом углов поворота // ДАН СССР. – 1963. – Т. 149, № 4. – С. 802–805.
172. Легеня И.Д. Об устойчивости толстой квадратной свободно опертой плиты // Изв. АН СССР. ОТН. – 1962. – № 6. – С. 165–168.
173. Легеня И.Д. Об устойчивости толстой пластиически деформируемой плиты // ДАН СССР. – 1962. – Т. 147, № 6. – С. 1314–1317.
174. Легеня И.Д. Об устойчивости толстой плиты сжимаемой в двух направлениях // Прикл. механика. – 1966. – Т. 2, № 7. – С. 87–94.

175. *Легеня И.Д.* Об устойчивости толстой прямоугольной свободно опертой плиты под действием сжимающей нагрузки // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140, № 4. – С. 776–779.
176. *Легеня И.Д.* Цилиндрическая форма потери устойчивости толстой плиты // Изв. вузов. Машиностроение – 1969. – № 3. – С. 38–41.
177. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. труд. – М.: АН СССР. 1951. – Т. 1. – С. 50–85.
178. *Лехтицкий С.Г.* Распределение напряжений вблизи горизонтальной выработки эллиптического сечения в трансверсальноизотропном массиве с наклонными плоскостями изотропии // Инж. ж. МТТ. – 1966. – № 2.
179. *Лобовик С.Б.* Исследование устойчивости сферической полости вариационным методом // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 35–39.
180. *Лобовик С.Б.* Об устойчивости несжимаемого полупространства со сферической полостью // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 12. – С. 117–120.
181. *Лобовик С.Б.* Устойчивость сферической полости при одиосном сжатии // В сб.: Прикл. механика. – Физика коиденсированного состояния. – Киев, 1978. – С. 16–20.
182. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: 1970. – 81 с.
183. *Лурье А.И.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. – Тр. Ленингр. индустр. ин-та. – Т. 3, № 6. 1937. – С. 31–36.
184. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
185. *Марушкей Ю.М.* Двухное растяжение упругопластического пространства с включением // Изв. вузов. Сер. машиностр. – 1975. – № 12. – С. 25–30.
186. *Марушкей Ю.М.* Об упругопластическом состоянии среды с включением в виде эллиптического цилиндра // Прикл. механика. – 1975. – Т. 12, № 2. – С. 126–130.
187. *Марушкей Ю.М.* Об упругопластическом состоянии среды с включением в виде эллиптического цилиндра // Прикл. механика. – 1975. – Т. 12, № 2. – С. 126–130.
188. *Медведь Н.А., Спорыхин А.Н.* О потере устойчивости круглых вращающихся полых цилиндров из упругопластического материала // ВГУ. Воронеж, 1982. – 10 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.82. – № 1517-82. Деп. – 10 с.
189. *Мешков С.И., Шашкин А.И.* О потере устойчивости сферической оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 5. – С. 117–119.
190. *Михлин С.Г.* О распространении напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. // Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР, 1934, № 29.

191. *Мусаев Д.А., Юсубов Р.А.* Устойчивость двух некруговых цилиндров в упругой матрице при малых докритических деформациях // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 11. – С. 3–9.
192. *Навоян А.В., Гузь А.Н.* О постановке и методах решения задач об устойчивости горизонтальных горных выработок // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1973. – № 3. – С. 263–266.
193. *Назаренко В.М.* Влияние зоны трещинообразования вокруг круговой горизонтальной выработки на ее устойчивость // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 4. – С. 114–115.
194. *Назаренко В.М.* К вопросу об устойчивости горизонтальной горной выработки при наличии зон раздела физико-механических свойств пород // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 121–124.
195. *Назаренко В.М.* Об устойчивости горных выработок с учетом зон раздела физико-механических свойств пород // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 12. – С. 34–38.
196. *Назаренко В.М.* Устойчивость горизонтальной горной выработки в массивах с трансляционным упрочнением // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 9. – С. 124–127.
197. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
198. *Новоэсилов В.В.* Основы сплюснутой теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
199. *Новоэсилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
200. *Акопян Ж.С., Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Дериглазов Л.В.* О задачах устойчивости вертикальных горных выработок в анизотропном массиве // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 12. – С. 23–29.
201. *Онат Е., Прагер В.* Образование шейки при пластическом течении растягиваемого образца // Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. – 1965. – № 4. – С. 93–97.
202. *Остросаблин Н.Н.* Определение смещений в задаче Л.А. Галина // Динамика сплошных сред : Ин-т гидродинамики СО АН СССР. – Новосибирск: Наука, 1973. – Вып. 14. – С. 67–70.
203. *Остапесмин А.Н., Лунин В.А.* Кручение конического стержня из упругопластического материала // Пробл. прочности. – 1985. – № 6. – С. 60–64.
204. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1964. – 336 с.
205. *Подболотов Б.Н., Спорыхин А.Н.* Неустойчивость неоднородного полупространства // Вестн. АН КазССР. – 1987. – № 3. – С. 66–69.
206. *Подболотова Н.Б., Спорыхин А.Н.* К построению решения плоской задачи для сложной среды с неизвестной границей. // Прикл. механика, НАН Украины. – Киев. – 1998. – Т.4, №11. – С. 67–77.
207. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

208. *Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.* Устойчивость стержней и пластин в условиях ползучести // Прикл. матем. и мех. 1957. Т. 21, № 3. – С. 406–412.
209. *Ревуженко А.Ф., Стоневский С.Б., Шемякин Е.И.* Некоторые модели деформирования горных пород и грунтов // В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск, 1975. – С. 140–145.
210. *Ржаницин А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
211. *Сегал В.М.* Технологические задачи теории пластичности. – Минск: Наука и техника. –1977. – 254 с.
212. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 536 с.
213. *Семчинов К.Н.* Об одной задаче нелинейной теории упругости // Инж. журн. – 1961. – Т. 1, № 1. – С. 104–110.
214. *Семыкина Т.Д.* О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностр. – 1963. – № 1. – С. 17–21.
215. *Сетх Б.Р.* Устойчивость конечных деформаций // В кн.: Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 7 30.
216. *Скаченко А.В.* К вопросу устойчивости многослойных тел // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 88–93.
217. *Скаченко А.В.* Устойчивость многослойных композитов при неупругих деформациях // Прикл. механика. – 1980. – Т. 15. – № 8. – С. 104–106.
218. *Скаченко А.В., Спорыхин А.Н.* Устойчивость упругопластических тел при больших пластических деформациях // Прикл. мех. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 11–17.
219. *Скаченко А.В., Спорыхин А.Н.* Устойчивость упругопластического шара, нагруженного виешним давлением // Прикл. механика и техн. физика. – 1977. – № 5. – С. 155–159.
220. Современные композиционные материалы // Под. ред. Л. Браутмана и Р. Кроха. – М.: Мир. – 1970. – 558 с.
221. *Соколов А.П.* Об упругопластическом состоянии пластинки // ДАН СССР. – 1948. – Т. 10, № 1. – С. 33–36.
222. *Сорокин В.И., Швайко Н.Ю.* Бифуркация процесса упругопластического деформирования // ДАН СССР. Сер. А. - 1979. – № 1. – С. 43–48.
223. *Спорыхин А.Н.* Об устойчивости деформирования упруго-вязко-пластических тел // Прикл. мех. и техн. физ. - 1967. – № 4. – С. 52–58.
224. *Спорыхин А.Н.* Об устойчивости плиты при сжатии // Прикл. механика. – 1969. – Т. 5, № 8. – С. 120–122.
225. *Спорыхин А.Н.* К устойчивости равновесия нелинейных вязкоупругих сред // Сб. работ по математике и механике. – Воронеж. – 1969. – С. 17–24.

226. Спорыгин А.Н. К устойчивости равновесия упруго-вязко-пластической среды // Прикл. мех. и техн. физ. – 1970. № 5. С. 86–92.
227. Спорыгин А.Н., Трофимов В.Г. К построению общего решения линеаризованных уравнений плоской задачи устойчивости упруго-вязко-пластического тела // В кн.: Тр. НИИМ ВГУ. – 1971. – Вып. 4. – С. 111–116.
228. Спорыгин А.Н. Неупругая устойчивость толстых круглых пластин, находящихся в состоянии трехмерного напряжения // В кн.: Тр. НИИМ ВГУ. – 1971. – Вып. 4. – С. 107–111.
229. Спорыгин А.Н., Анохин О.Е. Устойчивость толстых круглых плит из нелинейно вязко-упругого материала // В кн.: Тр. НИИМ ВГУ. – 1972. – Вып. 6. – С. 6–10.
230. Спорыгин А.Н., Трофимов В.Г. Устойчивость упруговязкопластических тел // Прикл. механика. – 1972. Т. 8, № 9. С. 15–19.
231. Спорыгин А.Н., Трофимов В.Г. Задачи устойчивости упруго-вязко-пластических тел // Прикл. механика и техн. физ. – 1973. – № 4. – С. 144–147.
232. Спорыгин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость вертикальных выработок, упрочняющихся в пластических массивах // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 11. – С. 76–80.
233. Спорыгин А.Н. К устойчивости горизонтальных выработок в массивах, обладающих упруговязкопластическими свойствами // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1975. – № 1. – С. 67–72.
234. Спорыгин А.Н. О неустойчивости деформирования слоистых массивов, упрочняющихся в пластических средах // В. кн.: Механика деформир. твердого тела. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та. – 1975. – № 1. – С. 63–65.
235. Спорыгин А.Н., Чигорев Ю.В. Устойчивость стохастически иеоднородных упруго-вязко-пластических сред // В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. – М. – 1975. С. 179–180.
236. Спорыгин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи горного давления // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – Алма-Ата, 1976. – № 3. – 19 с. (депон. в ВИНИТИ 20.1.76, № 181-76). – 21 с.
237. Спорыгин А.Н., Чигорев Ю.В. Об устойчивости деформирования стохастически неоднородной упрочняющейся упруговязкопластической среды // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 24–32.
238. Спорыгин А.Н. К теории устойчивости сжимаемого упругопластического грунта // Прикл. мех. и техн. физ. – 1977. – № 5. – С. 148–154.
239. Спорыгин А.Н. Устойчивость цилиндрических упругопластических тел // Мех. деформ. тв. тела. – 1977. – № 3. – С. 89–93.
240. Спорыгин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость сферической полости в упругопластическом массиве при больших пластических деформациях // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевск. ун-та. – 1977. – № 2. – С. 75–79.

241. Спорыхин А.Н. О влиянии неоднородности на критические нагрузки в задачах устойчивости упругопластических грунтов // В кн.: Механика деформируемого твердого тела. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевск. ун-та. – 1978. – № 4. – С. 31–36.
242. Спорыхин А.Н. Устойчивость стохастически неоднородных сжимаемых упругопластических грунтов // Прикл. механика. 1978. – Т. 14, № 12. – С. 30–37.
243. Спорыхин А.Н. О применимости статического метода к исследованию устойчивости упруговязкопластических сред. // Механика деформируемых сред. Куйбышев: изд-во Куйбышевск. ун-та. – 1978. – С. 115–134.
244. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. К определению оптимальных размеров горных выработок в упругопластическом грунте // ВГУ. Воронеж, 1980. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.10.80, № 4388-80.
245. Спорыхин А.Н. К теории устойчивости структурно-неоднородных сложных сред // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. № 1. – С. 46–49.
246. Спорыхин А.Н. К трехмерной теории устойчивости конечно-деформируемых упругопластических тел. // В кн.: Механика деформируемых сред. Куйбышев: изд-во Куйбышевск. ун-та. – 1981. – С. 41–46.
247. Спорыхин А.Н. К устойчивости деформирования стохастически неоднородных материалов с реологическими свойствами // В кн.: МДТТ. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1982. – С. 128–137.
248. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. Числовые результаты решения некоторых неупругих задач в механике горных пород // ВГУ. – Воронеж, 1982. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.09.82, № 4932-82.
249. Спорыхин А.Н. О поверхностной неустойчивости структурно-неоднородных упругопластических массивов // В кн.: Актуальные задачи механики сплошной среды. – Чебоксары: Изд-нне Чувашск. ун-та, 1986. – С. 102–106.
250. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. О потере устойчивости сжимаемого упругопластического массива около вертикальной выработки // Прикл. механика. – 1988. – Т. 24, № 3. – С. 119–123.
251. Спорыхин А.Н. Об одном обобщении в теории устойчивости упругопластических тел // В сб.: Прикладные задачи по механике сплошных сред. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. – С. 11–16.
252. Спорыхин А.Н. К теории устойчивости копечнодеформируемых сжимаемых упругопластических сред // В кн.: Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. – С. 41–46.
253. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость пескимасмого полупространства вокруг сферической полости // Прикладные задачи механики деформированного тела. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. – С. 46–52.
254. Спорыхин А.Н. Исследование устойчивости стохастически неоднородных сред в трехмерной постановке // В сб.: Актуальные задачи МДТТ. – Воронеж: Изд-во ВГУ. – 1990. – С. 123–140.

255. *Спорыхин А. Н., Чиканова Н. Н., Ковалев А. Н.* К определению поля напряжений в пластинах с отверстиями различных очертаний // Информационные технологии и системы. – Воронеж: Изд-ние Воронежск. технол. ин-та, 1994. – Ч. 3. – С. 11–15.
256. *Спорыхин А.Н., Чиканова Н.Н.* Локальная неустойчивость составных упругопластических конструкций. // Мех. композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 248–267.
257. *Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. – Воронеж: Изд-ние ВГУ, 1997. – 361 с.
258. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Исследование устойчивости состояния равновесия горного массива возле вертикальных цилиндрических выработок кругового поперечного сечения // В кн.: Материалы международной 53-й научно-технической конференции профессоров, преподавателей и аспирантов Белорусской государственной политехнической академии. В 4-х частях. Часть 1. – Минск. – 1999. – С. 149.
259. *Спорыхин А.Н., Чеботарев А.С.* Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических массивах // Прикл. мех. и техн. физ. СО РАН. – 1999. – № 6. – С. 177–183.
260. *Спорыхин А.Н., Щеглова Ю.Д.* Метод возмущений в задаче упругопластического кручения полых стержней. // В сб.: Математическое моделирование технологических систем. Воронеж: Воронежск. государственная технологическая академия. – 1999. Вып.3. С. 131–134.
261. *Спорыхин А.Н., Щеглова Ю.Д.* Метод возмущений в задачах упругопластического кручения стержней. // Ж. МТТ. РАН. – 2000. – № 5. – С. 54–64.
262. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* Определение оптимальных размеров горных целиков // Математическое моделирование информационных и технологических систем. Воронеж: Изд-ние Воронежск. гос. технол. акад. – 2000. – В. 4. – С. 245–248.
263. *Спорыхин А.Н., Шашкин А.И.* О потере устойчивости сферической полости. // В сб.: Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. – М.: Изд-ние Московск. гос. горн. ун-та. – 2001. – С. 313–323.
264. *Сузdal'skaya L.I.* Определение неизвестной границы в обратных задачах для полосы с отверстием // Изв. АН СССР. МТТ. – 1965. – № 4. – С. 121–124.
265. *Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.* Пластичность горных пород. – М.: Недра, 1979. – 301 с.
266. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А. и др.* Теория складкообразования в земной коре. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
267. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластины и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
268. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 532 с.

269. Толоконников Л.А. Вариационные уравнения задачи устойчивости состояния равновесия // Научн. труды Тульск. горн. ин-та. – Тула. – 1961. – Вып. – 3. – С. 45–51.
270. Толоконников Л.А., Тарасьев Г.С., Левин В.А. Наложение больших упругих деформаций. Проблемы, теория, результаты // II Всес. конф. по теории упругости: Тез. докл. – Тбилиси, 1984. – С. 271–272.
271. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 167 с.
272. Хорошун Л.П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями // Прикл. механика. – 1967. – Т. 3, № 9. – С. 12–19.
273. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов. – Киев. – 1980. – 110 с.
274. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. – М.: ИЛ, 1955. – 175 с.
275. Цветков Ю.Д. Кручение упругопластического цилиндрического стержня с поперечным сечением, близким к круговому // В кн.: Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 117–119.
276. Циглер Г. Об устойчивости упругих систем // Пробл. механики. – М.: ИЛ, 1959. – С. 116–160.
277. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
278. Черепанов Г.П. Об одном методе решения упругопластической задачи // Прикл. матем. и мех. – 1963. – Т. 27. Вып. 3. – С. 428–436.
279. Чехов В.Н. Влияние «следящей» нагрузки на складкообразование в земной толще // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 86–92.
280. Чехов В.Н. Исследование процесса складкообразования при нелинейном докритическом состоянии // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 32–40.
281. Шашкин А.И. К устойчивости равновесия сферической полости // Устойчивость пространственных конструкций. – Киев, 1978. – С. 129–133.
282. Шашкин А.И. Определение оптимальной толщины монолитной крепи // Тр. НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 8. – С. 50–53.
283. Шашкин А.И. Определение оптимальных размеров неупругих крепей вертикальной выработки и сферической полости // ВГУ. – Воронеж, 1982. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 2.07.82, № 3450–82.
284. Шашкин А.И. Определение оптимальных размеров целиков из сжимаемого упругопластического материала // ВГУ. – Воронеж, 1982. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 3.05.82, № 2146–82.

285. *Шашкин А.И.* Определение оптимальных размеров толстостенных крепей горных выработок, проведенных в массивах, имеющих границу раздела зон упругого и пластического деформирования // В кн.: Принципиальные задачи механики сплошных сред. – Воронеж. – 1999. – С. 341–348.
286. *Швайко Н.Ю.* Сложные нагрузления и некоторые вопросы устойчивости элементов конструкций // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 6–34.
287. *Шемякин Е.И.* О закономерностях деформирования в окрестности подготовительной выработки // Горн. давление в капитальных и подготовительных выработках. – Новосибирск, 1975. – С. 3–17.
288. *Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В.* Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – Киев.: Наукова думка, 1981. – 296 с.
289. *Ariaratnam S.T., Dubey R.N.* Some cases of bifurcation in elastic-plastic solids in plane strain // Quart. Appl. Math. – 1969. – Vol. 27, № 3. – P. 344–358.
290. *Bazant Z.P.* Correlation study of formulation of incremental Deformation and stability of continuous bodies // Trans. ASME. Ser. E. – 1971, – № 4. – P. 107–121.
291. *Biezno C.B., Hencky H.* On the general theory of elastic stability // Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proc. of the Soc. Sci., 1928. – Vol. 31.; 1929. – Vol. 32.
292. *Biot M.A.* Mechanics of Incremental Deformation. – N-Y.: John Wiley and Sons. 1965. – P. 506.
293. *Biot M.A.* Non linear theory of elasticity and linearized case for a body under initial stress // Phil. Mag. Ser. 7. – 1939. – Vol. 27. – P. 89–115.
294. *Biot M.A.* Rheological stability with couple stress and its application to geological folding // Proc. Roy. Soc. – 1967. – A 298, № 1455. – P. 402–423.
295. *Biot M.A.* Sur la stabilité de l'équilibre élastique Equations de l'élasticité d'un milieu soumis à tension initiale // Ann. Soc. Sci. Ser. B. – 1934. – Vol. 54, Pt. 1. – P. 91–109.
296. *Chakrabarty I.* Bifurcation phenomenon and the rate problem in plasticity // Int. J. Mech. Sci. – 1969. – Vol. 11, № 8. – P. 659–666.
297. *Chakrabarty I.* On the problem of uniqueness under pressure loading // Int. J. Mech. Ser. – 1969. – Vol. 11, № 9. – P. 696–706.
298. *Dubey R.N., Ariaratnam S.T.* Bifurcation in elastic-plastic solids in plane strain // Quart. Appl. Math. – 1969. – Vol. 27, № 3. – P. 381–390.
299. *Green A.E., Rivlin R.S., Shield R.D.* General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1952. – Vol. 211, № 1104. – P. 128–154.
300. *Guo Zhong-heng, Urbanowski W.* Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations // Arch. Mech. Stos. – 1966. – Vol. 15, № 2. – P. 111–128.

301. *Hill R.A.* General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // *J. Mech. Phys. Solids.* 1958. Vol. 6, № 3. P. 236–249.
302. *Kappus R.* Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen // *Z. Angew. Math. and Mech.* – 1939. – Vol. 19, № 5. – P. 27–31.
303. *Murphy L.N., Lee L.H.* Inelastic buckling process of axially compressed cylindrical shells subject to edge constraints // *Int. J. Solids a. Struct.* – 1971. – Vol. 7, № 9. – P. 1153–1170.
304. *Naghdi P.M.* A Critical Review of the State of Plasticity. // *ZAMM.* – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
305. *Southwell R. V.* On general theory of elastic stability // *Phil. Trans. Roy. Ser. A.* 1913. Vol. 213, № 2. P. 15–20.
306. *Sporihin A.N., Skachenko A.V.* Bifurcation in process of deformation of elastoplastic body at finite homogeneous deformations // *Arch. mech. stosow.* – 1977. – Vol. 29, № 1. – P. 105–113.
307. *Thomas T. Y.* Combined elastic and Prandtl-Reuss stress strain relations // *Proc. Nat. Acad. Sci.* – 1955. – Vol. 41. – P. 251–262.
308. *Trefftz E.* Über die Ableitung der stabilitätskeiterien des elastischen Gleichgewichts aus Elastizitätstheorie der endlichen Deformationen // In.: *Proc. Erd Int. Congr. Mech. (Stockholm, 1930).* – 1931. – Vol. 3. – S. 103–110.
309. *Trefftz E.* Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts // *Z. Angew. Math. and Mech.* – 1933. – Vol. 12, № 3. – S. 17–30.
310. *Wesolowski Z.* Stability of an elastic thick-walled spherical shell loaded by an external pressure // *Arch. Mech. Stos.* – 1967. – Vol. 19, № 1. – P. 98–127.
311. *Zahorski S.* Instability of a non-linear viscoelastic column under finite compression // *Arch. Mech. Stos.* – 1965. – Vol. 17, № 6. – P. 801–821.
312. *Zahorski S.* Kinematics stability in the case of slow steady plastic flow // *Arch. Mech. Stos.* – 1964. – Vol. 16. – P. 514–529.
313. *Zahorski S.* On plastik instability in some cases of simple flow. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. techn.* – 1964. – Vol. 12, № 11. – P. 523–529.
314. *Zahorski S.* Small additional deformation in non-linear viscoelasticity // *Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn.* – 1966. – Vol. 14, № 1. – P. 17–22.
315. *Zahorski S.* Some results of the theory of visco-elastic instability // *Bull. Acad. Polon., Ser. Sci. Techn.* – 1966. – Vol. XIY, № 1. – P. 23–28.
316. *Zahorski S.* Theory of small motion superposed on fundamental slow deformation of non-linear visco-elastic materials // *Arch. Mech. Stos.* – 1965. – Vol. 17, № 5. P. 671–686.

Научное издание

*СПОРЫХИН Анатолий Николаевич
ШАШКИН Александр Иванович*

**УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ТЕЛ И ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ГОРНЫХ ПОРОД**

Редактор *Д.А. Миртова*
Оригинал-макет: *О.Б. Широкова*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЗИР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 12.02.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 16,7. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерperiодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, <http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Московская
типорграфия № 6» Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
115088 Москва, ЖК-88, Южнопортовая ул., 24