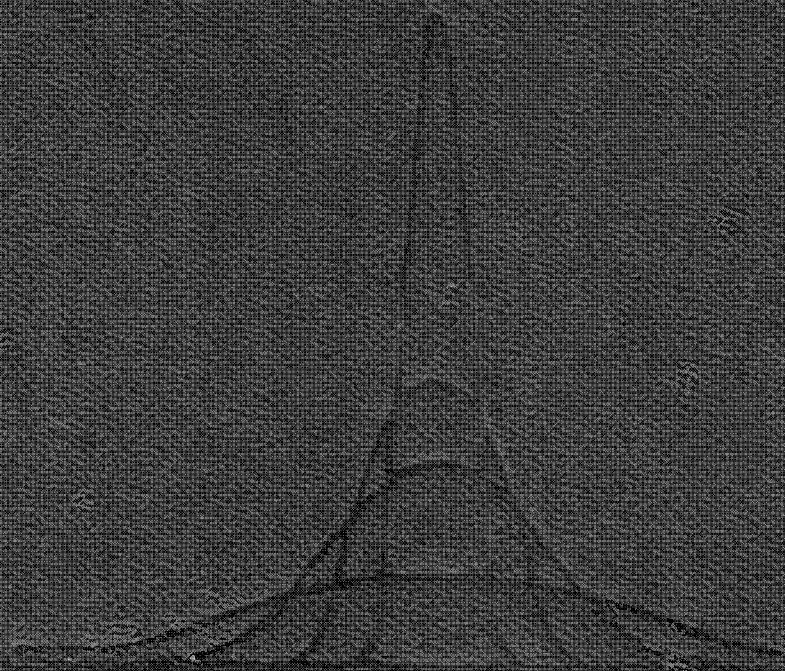


А.Н.ТИХОНОВ, А.А.САМАРСКИЙ

РАСЧЕТЫ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕПЛОТЫ



УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В книге рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными. Расположение материала соответствует основным типам уравнений.

Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач, приводящих к уравнениям рассматриваемого типа. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации результатов. В каждой главе помещены задачи и примеры.

В основу книги положены лекции, читавшиеся на физическом факультете МГУ.

Содержание

Предисловие к пятому изданию	9
Предисловие к четвертому изданию	9
Предисловие к третьему изданию	9
Из предисловия ко второму изданию	9
Из предисловия к первому изданию	9
Глава I. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТИЧНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	
§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка	11
1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными	11
2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными	18
3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами	20
Задачи к главе I	22
Глава II. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач	23
1. Уравнение малых поперечных колебаний струны	23
2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн	27
3. Энергия колебания струны	28
4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах	30
5. Поперечные колебания мембраны	31
6. Уравнения гидродинамики и акустики	34
7. Граничные и начальные условия	39
8. Редукция общей задачи	44
9. Постановка краевых задач для случая многих переменных	45
10. Теорема единственности	46
Задачи	49
§ 2. Метод распространяющихся волн	50
1. Формула Даламбера	50
2. Физическая интерпретация	52

3. Примеры	50
4. Неоднородное уравнение	58
5. Устойчивость решений	60
6. Полуограниченная прямая и метод продолжений	64
7. Задачи для ограниченного отрезка	70
8. Дисперсия волн	73
9. Интегральное уравнение колебаний	75
10. Распространение разрывов вдоль характеристик	79
Задачи	80
§ 3. Метод разделения переменных	82
1. Уравнение свободных колебаний струны	82
2. Интерпретация решения	88
3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн	92
4. Неоднородные уравнения	96
5. Общая первая краевая задача	103
6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями	104
7. Задачи без начальных условий	106
8. Сосредоточенная Сила	110
9. Общая схема метода разделения переменных	113
Задачи	120
§ 4. Задачи с данными на характеристиках	121
1. Постановка задачи	121
2. Метод последовательных приближений для задачи Гурса	123
Задачи	128
§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа	128
1. Сопряженные дифференциальные операторы	128
2. Интегральная форма решения	129
3. Физическая интерпретация функции Римана	132
4. Уравнения с постоянными коэффициентами	135
Задачи к главе II	139
Приложения к главе II	140
I. О колебании струн музыкальных инструментов	140
II. О колебании стержней	143
III. Колебания нагруженной струны	147
1. Постановка задачи	147
2. Собственные колебания нагруженной струны	148
3. Струна с грузом на конце	152
4. Поправки для собственных значений	153
IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн	154
1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии	154
2. Ударные волны. Условия динамической совместности	156
3. Слабые разрывы	161
V. Динамика сорбции газов	165

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа	165
2. Асимптотическое решение	169
VI. Физические аналогии	176
Глава III. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.	180
Постановка краевых задач	
1. Линейная задача о распространении тепла	180
2. Уравнение диффузии	184
3. Распространение тепла в пространстве	185
4. Постановка краевых задач	188
5. Принцип максимального значения	194
6. Теорема единственности	196
7. Теорема единственности для бесконечной прямой	199
§ 2. Метод разделения переменных	200
1. Однородная краевая задача	200
2. Функция источника	205
3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями	207
4. Неоднородное уравнение теплопроводности	214
5. Общая первая краевая задача	217
Задачи	219
§ 3. Задачи на бесконечной прямой	220
1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области	220
2. Краевые задачи для полуограниченной прямой	233
§ 4. Задачи без начальных условий	241
Задачи к главе III	245
Приложения к главе III	246
I. Температурные волны	246
II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры	250
III. Метод подобия в теории теплопроводности	255
1. Функция источника для бесконечной прямой	255
2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности	257
IV. Задача о фазовом переходе	259
V. Уравнение Эйнштейна-Колмогорова	264
VI. δ -функция	267
1. Определение δ -функции	267
2. Разложение δ -функции в ряд Фурье	270
3. Применение δ -функции к построению функции источника	272
Глава IV. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА	
§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа	276
1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач	276
2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля	277

3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат	279
4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа	282
5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного	283
6. Преобразование обратных радиусов-векторов	286
§ 2. Общие свойства гармонических функций	287
1. Формулы Грина. Интегральное представление решения	287
2. Некоторые основные свойства гармонических функций	293
3. Единственность и устойчивость первой краевой задачи	297
4. Задачи с разрывными граничными условиями	298
5. Изолированные особые точки	299
6. Регулярность гармонической функции трех переменных в бесконечности	301
7. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух- и трехмерных задач	303
8. Вторая краевая задача. Теорема единственности	305
§ 3. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных	309
1. Первая краевая задача для круга	339
2. Интеграл Пуассона	314
3. Случай разрывных граничных значений	316
§ 4. Функция источника	318
1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и ее основные свойства	319
2. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы	323
3. Функция источника для круга	326
4. Функция источника для полупространства	327
§ 5. Теория потенциала	329
1. Объемный потенциал	329
2. Плоская задача. Логарифмический потенциал	331
3. Несобственные интегралы	333
4. Первые производные объемного потенциала	340
5. Вторые производные объемного потенциала	343
6. Поверхностные потенциалы	346
7. Поверхности и кривые Ляпунова	350
8. Разрыв потенциала двойного слоя	352
9. Свойства потенциала простого слоя	356
10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач	359
11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам	364
Задачи к главе IV	369
Приложения к главе IV	371
I. Асимптотическое выражение объемного потенциала	371

II. Задачи электростатики	373
III. Основная задача электроразведки	379
IV. Определение векторных полей	385
V. Применение метода конформного преобразования в электростатике	389
VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике	392
VII. Бигармоническое уравнение	398
1. Единственность решения	399
2. Представление бигармонических функций через гармонические функции	400
3. Решение бигармонического уравнения для круга	402
Глава V. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ	
§ 1. Задача с начальными условиями	403
1. Уравнение колебаний в пространстве	403
2. Метод усреднения	405
3. Формула Пуассона	406
4. Метод спуска	408
5. Физическая интерпретация	410
6. Метод отражения	412
§ 2. Интегральная формула	414
1. Вывод интегральной формулы	414
2. Следствия из интегральной формулы	417
§ 3. Колебания ограниченных объемов	420
1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны	420
2. Колебания прямоугольной мембраны	426
3. Колебания круглой мембраны	430
Задачи к главе V	436
Приложения к главе V	437
I. Приведение уравнения теории упругости к уравнениям колебаний	437
II. Уравнения электромагнитного поля	440
1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия	440
2. Потенциалы электромагнитного поля	444
3. Электромагнитное поле осциллятора	446
Глава VI. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ	
§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве	462
1. Функция температурного влияния	482
2. Распространение тепла в неограниченном пространстве	456
§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах	460
1. Схема метода разделения переменных	460
2. Остывание круглого цилиндра	464
3. Определение критических размеров	466
§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами	468
1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника	468
2. Решение краевой задачи	472

3. функция источника для отрезка	474
§ 4. Тепловые потенциалы	476
1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя	476
2. Решение краевых задач	479
Задачи к главе VI	480
Приложения к главе VI	481
I. Диффузия облака	481
II. О размагничивании цилиндра с обмоткой	484
Глава VII. УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО	
ТИПА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)	
§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv=0$	489
1. Установившиеся колебания	489
2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях	490
3. Диффузия в движущейся среде	490
4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv=0$	491
§ 2. Функции влияния точечных источников	493
1. Функции влияния точечных источников	493
2. Интегральное представление решения	495
3. Потенциалы	498
§ 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения	501
1. Уравнение $\Delta v + cv=0=f$ в неограниченном пространстве	501
2. Принцип предельного поглощения	502
3. Принцип предельной амплитуды	504
4. Условия излучения	505
§ 4. Задачи математической теории дифракции	510
1. Постановка задачи	510
2. Единственность решения задачи дифракции	511
3. Дифракция на сфере	515
Задачи к главе VII	521
Приложения к главе VII	523
I. Волны в цилиндрических трубах	523
II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах	534
1. Собственные колебания цилиндрического эйдовибратора	534
2. Электромагнитная энергия собственных колебаний	538
3. Возбуждение колебаний в эйдовибраторе	540
III. Скин-эффект	542
IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли	547
Дополнение I. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	
§ 1. Основные понятия	552
1. Сетки и сеточные функции	553
2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов	554
3. Разностная задача	560
4. Устойчивость	561

§ 2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности	563
1. Схемы для уравнения с постоянными коэффициентами	565
2. Погрешность аппроксимации	566
3. Энергетическое тождество	568
4. Устойчивость	572
5. Сходимость и точность	576
6. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами	577
7. Метод баланса. Консервативные схемы	578
8. Двухслойные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами	582
9. Трехслойные схемы	588
10. Решение систем разностных уравнений. Метод прогонки	590
11. Разностные методы решения квазилинейных уравнений	592
§ 3. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле	596
1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа	596
2. Принцип максимума	601
3. Оценка решения неоднородного уравнения	603
4. Сходимость решения разностной задачи Дирихле	604
5. Решение разностных уравнений методом простой итерации	606
§ 4. Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными	608
1. Многомерные схемы	608
2. Экономичные схемы	610
3. Итерационные методы переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле	619
Дополнение II. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ	
1. Введение	624
2. Общее уравнение теории специальных функций	626
3. Поведение решений в окрестности $x=a$, если $k(a)=0$	627
4. Постановка краевых задач	629
Часть I. Цилиндрические функции	632
§ 1. Цилиндрические функции	632
1. Степенные ряды	633
2. Рекуррентные формулы	637
3. Функции полуцелого порядка	638
4. Асимптотический порядок цилиндрических функций	639
§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя	642
§ 3. Различные типы цилиндрических функций	645
1. Функции Ханкеля	645
2. Функции Ханкеля и Неймана	647
3. Функции мнимого аргумента	649
4. Функция $K_0(x)$	651
§ 4. Представление цилиндрических функций в виде контурных	655

интегралов	
1. Контурные интегралы	655
2. функции Ханкеля	657
3. Некоторые свойства гамма-функции	658
4. Интегральное представление функции Бесселя	660
5. Интегральное представление $K_\nu(x)$	662
6. Асимптотические формулы для цилиндрических функций	663
§ 5. Интеграл Фурье-Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя	666
1. Интеграл Фурье-Бесселя	666
2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя	668
Часть II. Сферические функции	671
§ 1. Полиномы Лежандра	672
1. Производящая функция и полиномы Лежандра	672
2. Рекуррентные формулы	673
3. Уравнение Лежандра	674
4. Ортогональность полиномов Лежандра	675
5. Норма полиномов Лежандра	676
6. Нули полиномов Лежандра	677
7. Ограниченность полиномов Лежандра	677
§ 2. Присоединенные функции Лежандра	678
1. Присоединенные функции	678
2. Норма присоединенных функций	679
3. Замкнутость системы присоединенных функций	680
§ 3. Гармонические полиномы и сферические функции	682
1. Гармонические полиномы	682
2. Сферические функции	683
3. Ортогональность системы сферических функций	687
4. Полнота системы сферических функций	689
5. Разложение по сферическим функциям	690
§ 4. Некоторые примеры применения сферических функций	694
1. Задача Дирихле для сферы	695
2. Проводящая сфера в поле точечного заряда	695
3. Поляризация шара в однородном поле	696
4. Собственные колебания сферы	698
5. Внешняя краевая задача для сферы	701
Часть III. Полиномы Чебышева-Эрмита и Чебышева-Лагерра	
§ 1. Полиномы Чебышева-Эрмита	703
1. Дифференциальная формула	703
2. Рекуррентные формулы	704
3. Уравнение Чебышева-Эрмита	704
4. Норма полиномов $H_n(x)$	705
5. функции Чебышева-Эрмита	706
§ 2. Полиномы Чебышева-Лагерра	706

1. Дифференциальная формула	706
3. Уравнение Чебышева-Лагерра	707
4. Ортогональность и норма полиномов Чебышева-Лагерра	708
5. Обобщенные полиномы Чебышева-Лагерра	709
§ 3. Простейшие задачи для уравнения Шредингера	710
1. Уравнение Шредингера	710
2. Гармонический осциллятор	712
3. Ротатор	713
4. Движение электрона в кулоновом поле	714
Часть IV. Формулы, таблицы и графики	718
I. Основные свойства специальных функций	718
II. Таблицы	723
III. Графики специальных функций	726
IV. Различные ортогональные системы координат	728

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Мы внесли лишь исправления опечаток, обнаруженных в четвертом издании.

1977

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Мы внесли лишь небольшие изменения в Дополнение I и во введение к Дополнению II.

Приносим свою благодарность А. Ф. Никифорову и И. С. Гушину за ряд ценных замечаний.

1972

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание внесен ряд изменений и дополнений. Наибольшему изменению подверглись разделы, касающиеся различных методов решения уравнений математической физики. Они объединены в виде Дополнения I.

Мы считаем своим приятным долгом выразить благодарность В. Я. Арсенину за ряд ценных замечаний, а также В. В. Кравцову за большую помощь при подготовке этого издания.

1966

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании устранены опечатки и неточности, замеченные в первом издании. Некоторые разделы, особенно в главах IV и VI, подверглись переработке. Написано новое приложение к главе VI.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. И. Смирнову за большое число ценных замечаний, а также А. Г. Свешникову за помощь при подготовке второго издания.

1953

А. Тихонов, А. Самарский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Круг вопросов математической физики тесно связан с изучением различных физических процессов. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике

и т. д. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики.

Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет специфические черты.

Круг вопросов, относящихся к математической физике, чрезвычайно широк. В предлагаемой книге рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными.

Мы стремились подчинить выбор и изложение материала характеристике типичных физических процессов, в связи с чем расположить материал соответствует основным типам уравнений.

Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач, приводящих к уравнениям рассматриваемого типа. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации получаемых результатов. В каждой главе помещены задачи, преследующие, в основном, цель развития технических навыков. Некоторые задачи сами по себе представляют физический интерес. В конце каждой главы помещены приложения, в которых даются примеры применения изложенных в основном тексте методов к решению различных задач физики и техники, а также приводится ряд примеров, выходящих за рамки задач, рассматриваемых в основном тексте. Выбор таких примеров, несомненно, можно сильно варьировать.

Книга содержит лишь часть материала, входящего в курс методов математической физики. В книгу не входят теория интегральных уравнений и вариационные методы. Приближенные методы изложены недостаточно полно.

В основу книги были положены лекции, читавшиеся свыше десяти лет А. Н. Тихоновым на физическом факультете МГУ. Частично содержание этих лекций было отражено в конспектах, изданных в 1948—1949 гг. В предлагаемой книге материал конспектов был расширен и подвергнут коренной переработке.

Мы рады возможности выразить благодарность нашим ученикам и товарищам по работе А. Б. Васильевой, В. Б. Гласко, В. И. Ильину, А. В. Лукьянову, О. И. Панычу, Б. Л. Рождественскому, А. Г. Свешникову и Д. Н. Четаеву, без помощи которых мы вряд ли смогли бы подготовить к печати книгу в короткий срок, а также Ю. Л. Рабиновичу, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. В настоящей главе мы рассмотрим классификацию этих уравнений.

§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными. Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно¹⁾:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y .

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y , а являются, подобно F_1 , функциями x, y, u, u_x, u_y , то такое уравнение называется квазилинейным.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} , так и относительно функции u и ее первых производных u_x, u_y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (2)$$

¹⁾ Мы пользуемся следующими обозначениями для производных:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ и т. д.}$$

где a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 , c , f — функции только x и y . Если коэффициенты уравнения (2) не зависят от x и y , то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η , чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных вида (1) с двумя независимыми переменными x и y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя значения производных из (3) в уравнение (1), будем иметь:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (4)$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

а функция \bar{F} не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т. е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то \bar{F} имеет вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т. е. уравнение остается линейным¹⁾.

¹⁾ Отметим, что если преобразование переменных линейно, то $\bar{F} = F$, так как вторые производные от ξ и η в формулах (3) равны нулю и \bar{F} не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент \bar{a}_{11} был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (5)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент \bar{a}_{11} , очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

Докажем следующие леммы.

1. Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (6)$$

2. Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}dx^2 = 0,$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5).

Докажем первую лемму. Поскольку функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5), то равенство

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (7)$$

является тождеством: оно удовлетворяется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (6), если функция y , определенная из неявного соотношения $\varphi(x, y) = C$, удовлетворяет уравнению (6). Пусть

$$y = f(x, C)$$

есть эта функция; тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)}, \quad (8)$$

где скобки и значок $y = f(x, C)$ указывают, что в правой части равенства (8) переменная y не является независимой переменной, а имеет значение, равное $f(x, C)$. Отсюда следует, что $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} &= \\ &= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C)} = 0, \end{aligned}$$

поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях x, y , а не только при $y = f(x, C)$.

Докажем вторую лемму. Пусть $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (6). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (7')$$

для любой точки (x, y) . Пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (7'), то отсюда в силу произвольности (x_0, y_0) будет следовать, что равенство (7') есть тождество и функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (7'). Проведем через точку (x_0, y_0) интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ и рассматривая кривую $y = f(x, C_0)$. Очевидно, что $y_0 = f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} &= \\ &= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C_0)} = 0. \end{aligned}$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать¹⁾.

Уравнение (6) называется характеристическим для уравнения (1), а его интегралы — характеристиками.

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = \text{const}$ есть общий интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = \text{const}$ является другим общим интегралом уравнения (6), не зависящим от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (10)$$

¹⁾ Установленная связь уравнений (5) и (6) эквивалентна известной связи (см. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1937, стр. 287; Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 78) между линейным уравнением с частными производными 1-го порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом можно убедиться, разлагая левую часть уравнения (5) в произведение двух линейных дифференциальных выражений.

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \quad (1)$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением гиперболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, эллиптического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, параболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ¹⁾.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G , во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (11)$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{где} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Это — так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа²⁾. Часто пользуются второй канонической

¹⁾ Эта терминология заимствована из теории кривых 2-го порядка.

²⁾ Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ , надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональ-

формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x, y) = \text{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция, не зависящая от φ . При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

ность строк, т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(при этом мы считаем $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.

Если в правую часть не входит u_{ξ} , то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (9) и (10) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = C$$

— комплексный интеграл уравнения (9). Тогда

$$\varphi^*(x, y) = C,$$

где φ^* — сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (10). Перейдем к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β , равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \\ = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \quad \text{и} \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

Уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид ¹⁾

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы

¹⁾ Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1) — аналитические функции. Действительно, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части уравнений (9) и (10) комплексны, а следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_{ik}(x, y)$ определены для комплексных значений y . При приведении уравнения эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

уравнения (1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гиперболический тип) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (эллиптический тип) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболический тип) $u_{xx} = \Phi$.

2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными. Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lj} u_{x_l x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{lj} = a_{jl}), \quad (12)$$

где a, b, c, f являются функциями x_1, x_2, \dots, x_n . Введем новые независимые переменные ξ_k , полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (13)$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{ij} исходного уравнения в некоторой точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Производя над переменными y линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \eta_k,$$

получим для квадратической формы новое выражение:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l, \quad \text{где} \quad \bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменяются аналогично коэффициентам квадратической формы при линейном преобразовании.

Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу (a_{ij}^0) квадратической формы к диагональному виду, в котором

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{ii}^0| &= 1, \text{ либо } 0; \\ \bar{a}_{ij}^0 &= 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов \bar{a}_{ii}^0 в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Назовем уравнение (12) в точке M_0 уравнением эллиптического типа, если все n коэффициентов \bar{a}_{ii}^0 одного знака; гиперболического типа (или нормального гиперболического типа), если $n-1$ коэффициентов \bar{a}_{ii}^0 имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; ультрагиперболического типа, если среди \bar{a}_{ii}^0 имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ противоположного знака ($m, n-m > 1$); параболического типа, если хотя бы один из коэффициентов \bar{a}_{ii}^0 равен нулю.

Выбирая новые независимые переменные ξ_i так, чтобы в точке M_0

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha_{ik}^0,$$

где α_{ik}^0 — коэффициенты преобразования, приводящего квадратическую форму (13) к каноническому виду (например, полагая $\xi_k = \sum \alpha_{ik}^0 x_i$), получим, что в точке M_0 уравнение в зависимости от типа приводится к одной из следующих канонических форм:

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} + \Phi = 0 \quad (\text{эллиптический тип}),$$

$$u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (\text{гиперболический тип}),$$

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (m > 1, n-m > 1) \\ (\text{ультрагиперболический тип}),$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0) \quad (\text{параболический тип}).$$

Мы не останавливаемся при этом на более подробном делении уравнений параболического типа на уравнения эллиптически-параболические, гиперболически-параболические и т. д.

Таким образом, если уравнение (12) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M , если во всех точках этой окрестности уравнение принадлежит к одному и тому же типу.

Для приведения уравнения в некоторой области к каноническому виду нам пришлось бы функции $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) подчинить дифференциальным соотношениям $\bar{a}_{kl} = 0$, для $k \neq l$. Число этих условий, равное $n(n-1)/2$, превосходит n — число определяемых функций ξ при $n > 3$. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы (\bar{a}_{ik}) , вообще говоря, можно было бы обратить в нули, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными.

Следовательно, при $n \geq 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M . При $n = 2$ можно обратить в нуль единственный недиагональный коэффициент и удовлетворить условию равенства двух диагональных коэффициентов, что и было сделано в п. 1.

Если коэффициенты уравнения (12) постоянны, то, приводя (12) к канонической форме в одной точке M , мы получим уравнение, приведенное к канонической форме во всей области определения уравнения.

3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (14) приводится к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f = 0 \quad (\text{эллиптический тип}), \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f &= 0 \\ \text{или} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{гиперболический тип}), \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_{\xi} + b_2u_{\eta} + cu + f = 0 \quad (\text{параболический тип}). \quad (17)$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо u новую функцию v :

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v,$$

где λ и μ — неопределенные пока постоянные. Тогда

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v),$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v),$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (15) и сокращая затем на $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$, получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda) v_\xi + (b_2 + 2\mu) v_\eta + \\ + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c) v + f_1 = 0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы два коэффициента, например, при первых производных, обратились в нуль ($\lambda = -b_1/2$; $\mu = -b_2/2$). В результате получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

где γ — постоянная, выражающаяся через c , b_1 и b_2 , $f_1 = fe^{-(\lambda\xi + \mu\eta)}$. Производя аналогичные операции и для случаев (16) и (17), приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & (\text{эллиптический тип}), \\ v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{гиперболический тип}),$$

или

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 \quad (\text{параболический тип}).$$

Как было отмечено в п. 2, уравнение с постоянными коэффициентами в случае нескольких независимых переменных

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения. Вводя вместо u новую функцию v

$$u = v e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

и выбирая нужным способом λ_4 , мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем $n = 2$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$u_{xx} + y u_{yy} = 0$$

и привести его к каноническому виду в области гиперболичности.

2. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $u_{xx} + x y u_{yy} = 0$.

б) $y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + y u_y = 0$.

в) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$.

г) $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$.

д) $x u_{xx} + 2\sqrt{xy} u_{xy} + y u_{yy} - u_x = 0$.

е) $(x-y) u_{xx} + (xy - y^2 - x + y) u_{xy} = 0$.

ж) $y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u_x = 0$.

з) $\sin^2 y u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.

и) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

3. Привести к каноническому виду и максимально упростить уравнение

$$a u_{xx} + 2a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0; a, b, c - \text{постоянные.}$$

4. Введя функцию $v = u e^{\lambda x + \mu y}$ и выбирая соответствующим образом параметры λ и μ , упростить следующие уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.

б) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_y + \alpha u + \beta u_x$.

в) $u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{yy} = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$.

г) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют уравнением колебаний струны. В настоящей главе, как и в последующих, мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x . Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ точки x в момент t .

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, u) и что вектор смещения u перпендикулярен в любой момент к оси x ; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука¹⁾. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

¹⁾ С. П. Стрелков, Механика, «Наука», 1965.

Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2) . Длина дуги этого участка равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда

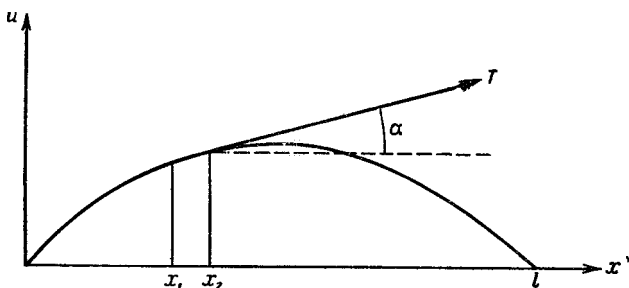


Рис. 1.

в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит и от x , т. е.

$$T(x) = T_0 = \text{const.}$$

Найдем проекции натяжения на оси x и u (обозначим их T_x и T_u):

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) u_x,$$

где α — угол касательной к кривой $u(x, t)$ с осью x . На участок (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси u , то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{или} \quad T(x_1) = T(x_2). \quad (1)$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x , т. е. для всех значений x и t

$$T(x) \equiv T_0. \quad (2)$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны (x_1, x_2) по оси u равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi,$$

где ρ — линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения

$$T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$$

в точках x_2 и x_1 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой) $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3) \end{aligned}$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $u(x, t)$ ¹⁾. Тогда формула (3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0 [u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta t \Delta x,$$

где

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ а } t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

¹⁾ Делая предположение о двукратной дифференцируемости функций, мы фактически уславливаемся о том, что будем рассматривать лишь функции, обладающие этим свойством. Таким образом, подобного типа предположение связано с ограничением круга изучаемых физических явлений и не содержит в себе утверждения, что не существует функций, удовлетворяющих интегральному уравнению колебаний и не имеющих вторых производных. Такие функции существуют и представляют значительный практический интерес. Подробнее см. об этом § 2, п. 7.

Сократив на $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (4)$$

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right), \quad (5)$$

где

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (6)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Если в точке x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (рис. 2), то уравнение (3) запишется так:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 \rightarrow x_0$ и $x_2 \rightarrow x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \rightarrow t_1$, получим:

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0 , зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0 .

2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0, l)$ оси x . Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x, t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x^1). При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x, x + \Delta x)$ в момент t . Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x, t)$. В силу

¹⁾ Выбранная здесь геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x . Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x , в любой последующий момент t находится в точке с координатой $X = x + u(x, t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X , то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто пользуются также переменными Эйлера X, t , где X — геометрическая координата. Если $U(X, t)$ — смещение точки с эйлеровой координатой X , то лагранжева координата

$$x = X - U(X, t).$$

Пример использования координат Эйлера приведен в п. 6

закона Гука натяжение $T(x, t)$ равно

$$T(x, t) = k(x) u_x(x, t), \quad (9)$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке x ($k(x) > 0$).

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10) \end{aligned}$$

где $F(x, t)$ — плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x, t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход¹⁾ при $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня²⁾

$$[k(x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (11)$$

Если стержень однороден ($k(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$), то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \right), \quad (12)$$

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (13)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3. Энергия колебаний струны. Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K — кинетическая и U — потенциальная энергия. Элемент струны dx , движущийся со скоростью $v = u_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (u_t)^2 \quad (m = \rho dx).$$

¹⁾ В дальнейшем мы будем опускать подробности, связанные с предельными переходами, которые были разобраны при выводе уравнения поперечных колебаний струны.

²⁾ Условие малости колебаний в данном случае связано только с границей применимости закона Гука. В общем случае $T = k(x, u_x) u_x$, и мы приходим к квазилинейному уравнению

$$[k(x, u_x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (14)$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t = t_0$ форму $u(x, t_0) = u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $u_0(x)$. Пусть функция $u(x, t)$ дает профиль струны в момент t , причем

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

Элемент dx под действием равнодействующей сил натяжения

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = T u_{xx} dx$$

за время dt проходит путь $u_t(x, t) dt$. Работа, производимая всей струной за время dt , равна

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt &= \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по t от 0 до t_0 , получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt &= \\ = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt. \end{aligned}$$

Нетрудно выяснить смысл последнего слагаемого правой части этого равенства. Действительно, $T_0 u_x|_{x=0}$ есть величина натяжения на конце струны $x = 0$; $u_t(0, t) dt$ — перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_{x=0} dt \quad (15)$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца $x = 0$. Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее $x = l$. Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом $u(0, t) = 0$,

$u_t(0, t) = 0$). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u = 0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \quad (16)$$

потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \quad (17)$$

Совершенно аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0,$$

где l_0 — начальная длина стержня, l — конечная длина. Отсюда непосредственно следует:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах.

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока i и напряжением v , которые являются функциями положения точки x и времени t . Применяя закон Ома к участку длиной dx , можно написать, что падение напряжения на элементе провода dx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x dx = iR dx + i_t L dx, \quad (18)$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины.

Количество электричества, притекающее на элемент провода dx за время dt

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] dt = -i_x dx dt, \quad (19)$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента dx , и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)] dx + G dx \cdot v dt = (Cv_t + Gv) dx dt, \quad (20)$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (18), (19) и (20) получаем систему

$$\left. \begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Li_t + Ri &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

называемую системой телеграфных уравнений¹⁾.

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i , продифференцируем первое равенство (21) по x , второе — по t , умножив его на C . Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Заменяя v_x его значением из второго уравнения (21), получим уравнение для силы тока

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi. \quad (22)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv. \quad (23)$$

Уравнение (22) или (23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ($G \cong R \cong 0$), то мы приходим к известному уравнению колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (24)$$

5. Поперечные колебания мембраны. Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C . Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть ds — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку $M(x, y)$. На этот элемент действует натяжение, равное $T ds$. Вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds . Можно показать, что отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента ds , так что вектор натяжения $T = T(x, y, z)$ является функцией x , y и t . Эти

¹⁾ Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.

свойства вектора T служат математическим выражением отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу.

Будем изучать малые колебания мембраны, пренебрегая квадратами первых производных u_x и u_y , где функция $u(x, y, t)$ определяет форму мембраны в момент времени t . Из этого предположения сразу же следует, что $T_h(x, y, t)$ — проекция натяжения на плоскость (x, y) — равна абсолютной величине натяжения. В самом деле, при любой ориентации дуги ds угол γ' между вектором T и плоскостью (x, y) не превосходит угла γ , образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке (x, y) с осью z . Поэтому

$$\cos \gamma' \geq \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \cong 1,$$

т. е. $\cos \gamma' \cong 1$, и

$$T_h(x, y, z, t) = T \cos \gamma' \cong T(x, y, z, t). \quad (25)$$

Вертикальная составляющая натяжения, очевидно, равна

$$T_u = T \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Выделим на поверхности мембраны элемент площади, проекция которого на плоскость (x, y) является прямоугольником $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат (рис. 3). На этот элемент действует сила натяжения, равная

$$T^* = \oint_{ABCD} T ds. \quad (26)$$

В силу отсутствия перемещения вдоль осей x и y проекции T^* на эти оси равны нулю:

$$\begin{aligned} T_x^* &= \int_B^C T(x_2, y, t) dy - \int_A^D T(x_1, y, t) dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\} dy = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\} dx = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая произвол в выборе площадки $ABCD$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

т. е. натяжение T не меняется при изменении x и y и может зависеть лишь от t .

Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени t равна в нашем приближении

$$\iint \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \cong \iint dx dy. \quad (28)$$

Следовательно, в процессе колебаний не происходит растяжения, откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени. Таким образом, мы установили, что натяжение не зависит от переменных x , y и t

$$T(x, y, t) = \text{const} = T_0. \quad (29)$$

Перейдем к выводу уравнения колебаний мембраны. Воспользуемся теоремой о приращении количества движения. Пусть S_1 — проекция на плоскость (x, y) некоторого участка мембраны, а C_1 — граница S_1 . Приравнявая изменение количества движения импульсу вертикальных составляющих сил натяжения и внешних действующих сил с плотностью $F(x, y, t)$, получаем уравнение колебаний мембраны в интегральной форме

$$\begin{aligned} \iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] \rho(x, y) dx dy = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} F dx dy dt, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны, а $F(x, y, t)$ — плотность внешней силы (на единицу площади).

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим, что функция $u(x, y, t)$ имеет непрерывные вторые производные. С помощью теоремы Остроградского¹⁾ контурный интеграл преобразуется в поверхностный

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy,$$

¹⁾ См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 196; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S_1} \{ \rho u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t) \} dx dy dt = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем, произвольностью выбора S_1 и промежутка времени (t_1, t_2) , делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \quad (31)$$

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho} \right), \quad (32)$$

где $f(x, y, t)$ — плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

6. Уравнения гидродинамики и акустики. Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$, представляющими компоненты вектора скорости v в точке (x, y, z) в момент t (эйлеровы переменные). Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $F(x, y, z, t)$ (если они имеются), рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости T и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т. е. рассматривая идеальную жидкость, получим для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$- \int_S p n dS, \quad (33)$$

где S — поверхность объема T , n — единичный вектор внешней нормали. Формула Остроградского¹⁾ дает:

$$- \int_S p n dS = - \int_T \int \int \text{grad } p d\tau. \quad (34)$$

¹⁾ В самом деле, $p n = p \cos(n, x) i + p \cos(n, y) j + p \cos(n, z) k$, где i, j, k — единичные векторы в системе координат (x, y, z) .

$$\int_S p \cos(n, x) dx = \int_T \int \int \frac{\partial p}{\partial x} d\tau \text{ и т. д.}$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Вычислим производную скорости по времени

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v}{\partial z} v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v,\end{aligned}$$

где

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Такая производная по времени, учитывающая движение частицы среды (субстанции), называется субстанциональной или материальной. Уравнение движения жидкости выражает обычную связь между ускорением частиц и действующими на них силами

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt} d\tau = - \iiint_T \text{grad } p d\tau + \iiint_T \rho F d\tau, \quad (35)$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T . Отсюда в силу произвольности объема T получаем уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера

$$v_t + (v \nabla) v = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + F. \quad (36)$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T , равно потоку через границу S

$$\frac{d}{dt} \iiint_T \rho d\tau = - \iint_S \rho v n dS. \quad (37)$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\iiint_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho v \right) d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho v) = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = 0. \quad (38)$$

К уравнениям (36) и (38) следует присоединить термодинамическое уравнение состояния, которое мы здесь возьмем в виде

$$p = f(\rho).$$

Следовательно, мы получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями v_x, v_y, v_z, p и ρ . Если бы уравнение состояния содержало температуру, то нужно было бы добавить еще уравнение теплопереноса (см. приложение IV). Таким образом, система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v &= F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) &= 0, \\ p &= f(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

представляет замкнутую систему уравнений гидродинамики.

Применим уравнения гидродинамики к процессу распространения звука в газе. Сделаем следующие допущения: 1) внешние силы отсутствуют; 2) процесс распространения звука является адиабатическим, поэтому уравнением состояния служит адиабата Пуассона

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right),$$

где ρ_0 и p_0 — начальная плотность и начальное давление, c_p и c_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; 3) колебания газа малы, можно пренебрегать высшими степенями скоростей, градиентов скоростей и изменения плотности.

Назовем конденсацией газа величину $s(x, y, z, t)$, равную относительному изменению плотности

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (40)$$

откуда

$$\rho = \rho_0(1 + s). \quad (41)$$

Уравнения гидродинамики при сделанных предположениях принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v_t &= - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \\ \rho_t + \rho_0 \text{div } v &= 0, \\ p &= \rho_0(1 + s)^\gamma \cong \rho_0(1 + \gamma s), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

так как

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0} (1 - s + \dots) \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \dots,$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + \dots,$$

где точками обозначены члены второго и высших порядков малости. Вводя обозначение $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, перепишем систему (42) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v_t &= -a^2 \operatorname{grad} s, \\ s_t + \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

Применяя к первому уравнению (42') оператор дивергенции и меняя порядок дифференцирования, будем иметь:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = -a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

где

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа. Используя второе уравнение (42'), получим уравнение колебаний

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt} \quad (43)$$

или

$$a^2 (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

Отсюда и из (40) получаем уравнение для плотности

$$a^2 (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \quad (43')$$

Уравнения (43) и (43') являются уравнениями колебаний. Введем теперь потенциал скоростей и покажем, что он удовлетворяет тому же уравнению колебаний (43), что и конденсация.

Из уравнения

$$v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

следует

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s \, dt \right), \quad (44)$$

где $\mathbf{v}(x, y, z, 0)$ — начальное распределение скоростей. Если поле скоростей в начальный момент имеет потенциал

$$\mathbf{v}|_{t=0} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \quad (45)$$

то имеет место соотношение

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s \, dt \right] = -\text{grad} U, \quad (46)$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $U(x, y, z, t)$. Знания потенциала скоростей достаточно для описания всего процесса движения ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= -\text{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Подставляя эти значения в уравнение непрерывности

$$s_t + \text{div} \mathbf{v} = 0,$$

получим уравнение колебаний для потенциала

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

или

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \quad (48)$$

Для давления p и скорости \mathbf{v} также можно получить уравнение колебаний вида (48), называемое часто уравнением акустики.

При решении задач для двумерного и одномерного случаев надо в уравнении (48) оператор Лапласа заменить оператором $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и, соответственно, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Постоянная

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

имеет размерность скорости и, как будет показано в § 2, является скоростью распространения звука.

Вычислим скорость звука в воздухе при нормальном атмосферном давлении. В этом случае $\gamma = 7/5$, $\rho_0 = 0,001293 \text{ г/см}^3$, $p_0 = 1,033 \text{ кг/см}^2$; следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ м/сек.}$$

¹⁾ Из формулы (46) видно, что потенциал U определен с точностью до слагаемого, являющегося произвольной функцией t . Из уравнения $\mathbf{v}_i = -a^2 \text{grad} s$ и (46) следует $\text{grad} \left(s - \frac{1}{a^2} U_t \right) = 0$, т. е. $s = \frac{1}{a^2} U_t$ при соответствующей нормировке потенциала U_s .

В случае колебаний газа в ограниченной области на ее границе должны быть заданы определенные граничные условия. Если граница представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к условиям

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0. \quad (49)$$

7. Граничные и начальные условия. При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функции и ее первой производной при «начальном» значении аргумента (задача Коши). Встречаются и другие формы дополнительных условий, когда, например, задаются значения функции в двух точках (задача о цепной линии). Для уравнения с частными производными возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим сперва простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $u(x, t)$ дает отклонение струны от оси x . Если концы струны $0 \leq x \leq l$ закреплены, то должны выполняться «граничные условия»

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (50)$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать «начальные условия»:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции точки. В дальнейшем мы покажем, что эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (52)$$

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (50) принимают другой вид:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (50')$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции времени t . Аналогично ставится задача для продольных колебаний струны или пружины.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях пружины, один конец которой закреплен (точка подвеса), а другой конец свободен. Закон движения свободного конца не задан и зачастую является искомой функцией.

В точке подвеса $x = 0$ отклонение

$$u(0, t) = 0;$$

на свободном конце $x = l$ натяжение пружины

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (53)$$

равно нулю (нет внешних сил), так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид

$$u_x(l, t) = 0.$$

Если конец $x = 0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а при $x = l$ задана сила $\bar{v}(t)$, то

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = v(t), \quad \left(v(t) = \frac{1}{k} \bar{v}(t) \right).$$

Типичным является также условие упругого закрепления, скажем для $x = l$,

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t)$$

или

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k} \right), \quad (54)$$

при котором конец $x = l$ может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению $u(l, t)$; коэффициент пропорциональности α называется коэффициентом жесткости закрепления.

Если точка (система), относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается и ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничное условие

принимает вид

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \quad (55)$$

Условие упругого закрепления на левом конце $x = 0$ имеет вид

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(формально можно считать, что (55) имеет место и при $\dot{x} = 0$, но $h < 0$). Следует отметить, что в случае жесткого закрепления (α велико), когда даже небольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, граничное условие (55) переходит в условие $u(l, t) = \mu(t)$ ($\alpha = \infty$) при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления (α мал), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничное условие переходит в условие свободного конца

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

В дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий:

граничное условие 1-го рода $u(0, t) = \mu(t)$ — заданный режим,

граничное условие 2-го рода $u_x(0, t) = v(t)$ — заданная сила,

граничное условие 3-го рода $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$ — упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x = l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t)$, $v(t)$ или $\theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются однородными.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, мы получим шесть типов простейших краевых задач.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука, когда натяжение на конце является нелинейной функцией смещения $u(l, t)$, так что

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k} F[u(l, t)]. \quad (56)$$

Это граничное условие в отличие от рассмотренных выше является нелинейным. Возможны, далее, соотношения между смещениями и натяжениями на разных концах системы. Например, в задачах о колебании кольца, когда $x = 0$ и $x = l$ представляют одну и ту же физическую точку, граничные условия принимают вид

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad (57)$$

т. е. сводятся к требованиям непрерывности u и u_x . Производные по t могут также входить в граничные условия. Если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения (к концу пружины прикреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины), то граничное условие принимает вид

$$ku_x(l, t) = -au_t(l, t). \quad (58)$$

Если к концу $x = l$ пружины прикреплен груз массы m , то при $x = l$ должно выполняться условие

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \quad (59)$$

Для поперечных колебаний струны все граничные условия записываются в той же форме с заменой k на T_0 .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением трех простейших типов граничных условий, проводя основное изложение на примере первого типа граничного условия и отмечая лишь попутно особенности, связанные со вторым и третьим условиями.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (5):

найти функцию $u(x, t)$, определенную в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{для } 0 < x < l, \quad t > 0,$$

граничным

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad (t > 0)^1), \quad (60')$$

и начальным условиям:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (0 < x < l). \quad (60'')$$

Аналогично ставится задача для уравнения (11).

Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Обратимся теперь к рассмотрению предельных случаев поставленной задачи. Влияние граничных условий в точке M_0 , достаточно удаленной от границы, на которой они заданы, сказывается через достаточно большой промежуток времени.

¹⁾ Мы не останавливаемся на случае, когда граничные условия заданы на отрезке $0 \leq t \leq t_0$.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области: *найти решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{для} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty. \quad (61)$$

Эту задачу часто называют задачей Коши.

Если же мы изучаем явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \leq x < \infty$, когда помимо уравнения даны дополнительные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x < \infty. \quad (62)$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает¹⁾. Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи «без начальных условий» (на установившийся режим) формулируются следующим образом:

найти решение изучаемого уравнения для $0 \leq x \leq l$ и $t > -\infty$ при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

¹⁾ Уравнение колебаний с учетом трения, пропорционального скорости, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0).$$

Подробнее о постановке задач без начальных условий при $\alpha = 0$ см. п. 7 § 3.

В дальнейшем мы будем рассматривать помимо основных краевых задач также предельные задачи:

1. Задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.

2. Задачи без начальных условий (на установившийся режим), когда рассматривается решение, определенное в течение бесконечного промежутка времени.

8. Редукция общей задачи. При решении сложной задачи естественно стремиться свести ее решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частных краевых задач.

Пусть $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \quad (64)$$

при $0 < x < l, t > 0$ и дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_i(0, t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l, t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x, 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) &= \psi^i(x). \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т. е. функция

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(x, t) \quad (66)$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n f^i(x, t) \quad (67)$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\left. \begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_k^i(t) \quad (k = 1, 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \varphi^i(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^n \psi^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению

с линейными дополнительными условиями. Этим свойством мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться.

Решение общей краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ (0 < x < l, t > 0); \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t); \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

может быть представлено в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \quad (70)$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 — решения следующих частных краевых задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t), \end{aligned} \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, & u_2(0, t) &= \mu_1(t), & u_3(0, t) &= 0, & u_4(0, t) &= 0, \\ u_1(l, t) &= 0; & u_2(l, t) &= 0; & u_3(l, t) &= \mu_2(t); & u_4(l, t) &= 0; \\ u_1(x, 0) &= \varphi(x), & u_2(x, 0) &= 0, & u_3(x, 0) &= 0, & u_4(x, 0) &= 0, \\ u_{1t}(x, 0) &= \psi(x), & u_{2t}(x, 0) &= 0; & u_{3t}(x, 0) &= 0; & u_{4t}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Мы ограничимся здесь этой формальной редукцией для того, чтобы характеризовать частные краевые задачи, составляющие основные этапы при решении общей задачи. Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

9. Постановка краевых задач для случая многих переменных.

Мы подробно рассмотрели постановку краевых задач для случая одной независимой геометрической переменной x (и времени t). Если число геометрических переменных $n > 1$ (например, $n = 3$), то первая краевая задача ставится совершенно сходным образом:

требуется найти функцию $u(M, t) = u(x, y, z, t)$, определенную при $t \geq 0$ внутри заданной области T с границей Σ , удовлетворяющую при $t > 0$ внутри T уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, t > 0), \quad (72)$$

граничному условию на Σ

$$u|_{\Sigma} = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, t \geq 0) \quad (73)$$

$(\mu(x, y, z, t))$ есть функция, заданная на Σ) и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned} \right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \quad (74)$$

Разложение общей краевой задачи на ряд более простых происходит аналогично предшествующему. Отметим, что возможна также постановка предельных краевых задач для неограниченной области, полупространства и т. д.

10. Теорема единственности. При решении краевых задач:

1) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы единственности;

2) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т. е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы существования; доказательство существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения.

В настоящем пункте нами будет доказана следующая теорема единственности:

Возможно существование только одной функции $u(x, t)$, определенной в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, k(x) > 0), \\ 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (75)$$

начальным и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

если выполнены условия:

1) функция $u(x, t)$ и производные, входящие в уравнение (75), а также производная u_{xt} непрерывны на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$;

2) коэффициенты $\rho(x)$ и $k(x)$ непрерывны на отрезке $0 \leq x \leq l$.

Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

и рассмотрим разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (77)$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= 0, & v(0, t) &= 0, \\ v_t(x, 0) &= 0; & v(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

а также условию 1) теоремы.

Докажем, что функция $v(x, t)$ тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\} dx \quad (79)$$

и покажем, что она не зависит от t . Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t . Продифференцируем $E(t)$ по t , выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла¹⁾

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}) dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int_0^l kv_x v_{xt} dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx. \quad (80)$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0, t) = 0$ следует $v_t(0, t) = 0$ и аналогично для $x = l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x] dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx = 0,$$

т. е. $E(t) = \text{const}$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0} dx = 0, \quad (81)$$

¹⁾ Для дифференцирования под знаком интеграла достаточно, чтобы получаемое при этом подынтегральное выражение было непрерывно на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$. Это требование в нашем случае выполнено, так как функция $v(x, t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, а $\rho(x)$ и $k(x)$ — условию 2).

так как

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Пользуясь формулой (81) и положительностью k и ρ , заключаем, что

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \quad (82)$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x, t) \equiv 0. \quad (83)$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \quad (84)$$

и подстановка в формуле (80) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы естается без именений.

Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая по-прежнему два решения u_1 и u_2 , получаем для их разности $v(x, t) = u_1 - u_2$ уравнение (77) и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geq 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Представим подстановку в (80) в виде

$$[kv_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

Интегрируя $\frac{dE}{dt}$ в пределах от нуля до t , получим:

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) &= \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx dt - \\ &\quad - \frac{k}{2} \{h_2 [v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\}, \end{aligned}$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leq 0. \quad (86)$$

Так как в силу неотрицательности подинтегральной функции $E(t) \geq 0$, то

$$E(t) \equiv 0, \quad (87)$$

а следовательно, и

$$v(x, t) \equiv 0. \quad (88)$$

Изложенный здесь метод доказательства теоремы единственности, основанный на использовании выражения полной энергии, широко применяется при доказательстве теорем единственности в различных областях математической физики, например, в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

Доказательство единственности других краевых задач (задачи Коши и задачи без начальных условий) будет дано в дальнейшем в соответствующем месте.

Задачи

1. Доказать, что уравнение малых крутильных колебаний стержня имеет вид

$$\Theta_{tt} = a^2 \Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

где Θ есть угол поворота сечения стержня с абсциссой x , G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции поперечного сечения, а k — момент инерции единицы длины стержня. Дать физическую интерпретацию граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода для этого уравнения.

2. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

$$\text{Ответ: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad a^2 = g,$$

где $u(x, t)$ — смещение точки, l — длина нити, g — ускорение силы тяжести.

3. Тяжелая однородная нить длины l , прикрепленная верхним концом ($x=0$) к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω . Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

$$\text{Ответ: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \omega^2 u, \quad \text{где } a^2 = g.$$

4. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

$$\text{Ответ: } v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t, \quad a^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}.$$

5. Вывести граничные условия для уравнения продольных колебаний упругого стержня (пружинны) в случае, когда верхний конец стержня закреплен жестко, а к нижнему прикреплен груз P , если:

а) за положение равновесия принимается напряженное состояние стержня под действием неподвижного груза P , подвешенного к нижнему концу (статическое растяжение);

б) за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент из-под груза убирается подставка, и груз начинает растягивать стержень).

6. Написать уравнение и условия, определяющие процесс крутильных колебаний стержня, к обоим концам которого прикреплены шкивы.

Ответ: При $x = 0$, $x = l$ должны выполняться граничные условия вида

$$\Theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \Theta_x(0, t), \quad \Theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \Theta_x(l, t).$$

7. В некоторой точке $x = x_0$ струны ($0 \leq x \leq l$) подвешен груз массы M . Вывести условия сопряжения в точке $x = x_0$.

8. К концу $x = l$ упругого стержня, упруго закрепленного в точке $x = 0$, подвешен груз массы M . Написать уравнение и условия, определяющие продольные колебания стержня, предполагая, что на него, кроме того, действует внешняя сила. Рассмотреть два случая:

а) сила распределена по стержню с плотностью $F(x, t)$;

б) сила сосредоточена в точке $x = x_0$ и равна $F_0(t)$.

9. Рассмотреть процесс малых колебаний идеального газа в цилиндрической трубке. Вывести сначала основные уравнения гидродинамики, а затем, предполагая процесс адиабатическим, вывести дифференциальное уравнение для: 1) плотности ρ , 2) давления p , 3) потенциала U скорости частиц газа, 4) скорости v , 5) смещения u частиц. Привести примеры реализации граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для этих уравнений.

10. Установить соотношения подобия между процессами механических, акустических и электрических колебаний (см. приложение VI к гл. II).

11. Привести примеры граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода для телеграфных уравнений.

12. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях неоднородного стержня ($k = k_1$ при $x < x_0$, $k = k_2$ при $x > x_0$) и вывести условия сопряжения в точке стыка неоднородных частей стержня (при $x = x_0$).

13. Дать физическую интерпретацию граничного условия

$$au_x(0, t) + bu_t(0, t) = 0.$$

14. Привести пример механической модели, для которой реализовалось бы уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + bu_t + cu.$$

§ 2. Метод распространяющихся волн

1. **Формула Даламбера.** Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. гл. I). Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Вводя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду:

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (3)$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (3)

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая функция только переменного η . Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ , получим:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (4)$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η . Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и f_2 , функция $u(\xi, \eta)$, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Так как всякое решение уравнения (3) может быть представлено в виде (4) при соответствующем выборе f_1 и f_2 , то формула (4) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (5)$$

является общим интегралом уравнения (1).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = af'_1(x) - af'_2(x) = \psi(x). \quad (7)$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(a) da + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ , причем равенства (8) должны иметь место для любого значения аргумента¹⁾. Подставляя в (5) найденные значения f_1 и f_2 , получим:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

Формулу (9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (1)–(2), то оно представлялось бы формулой (9) и совпадало бы с первым решением.

Нетрудно проверить, что формула (9) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной дифференцируемости функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

2. Физическая интерпретация. Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), представляет процесс распространения началь-

¹⁾ В формуле (5) функции f_1 и f_2 определены неоднозначно. Если от f_1 отнять, а к f_2 прибавить некоторую постоянную C_1 , то u не изменится. В формуле (8) постоянная C не определяется через φ и ψ , однако мы можем ее отбросить, не меняя значения u . При сложении f_1 и f_2 слагаемые $C/2$ и $-C/2$ взаимно уничтожаются.

ного отклонения и начальной скорости. Если фиксировать $t = t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент t_0 ; фиксируя $x = x_0$, получим функцию $u(x_0, t)$, дающую процесс движения точки x_0 (рис. 4). Предположим, что наблюдатель, находившийся в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, движется со скоростью a в положительном направлении. Введем систему координат, связанную с наблюдателем, полагая $x' = x - at$, $t' = t$. В этой подвижной системе координат функция $u(x, t) = f(x - at)$ будет определяться формулой $u = f(x')$ и наблюдатель все время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $u(x, t) = f(x - at)$ представляет неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо (в положительном направлении

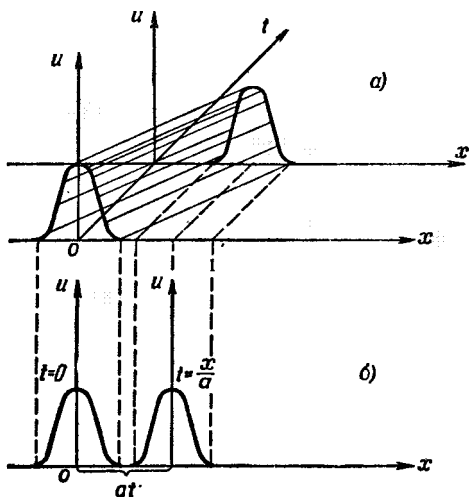


Рис. 4.

оси x) со скоростью a (распространяющуюся или бегущую волну). Функция $f(x + at)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся влево (в отрицательном направлении оси x) со скоростью a . Таким образом, общее решение (9) задачи Коши для бесконечной струны есть суперпозиция двух волн $f_1(x + at) + f_2(x - at)$, одна из которых распространяется направо со скоростью a , а вторая — влево с той же скоростью. При этом

$$\begin{aligned} f_1(x + at) &= \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \Psi(x - at), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha.$$

Для выяснения характера решения (9) удобно пользоваться плоскостью состояний (x, t) или «фазовой плоскостью». Прямые $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ являются характеристиками уравнения (1). Функция $u = f(x - at)$ вдоль характеристики

$x - at = \text{const}$ сохраняет постоянное значение, функция $u = f(x + at)$ постоянна вдоль характеристики $x + at = \text{const}$.

Предположим, что $f(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведем характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$; они разбивают полуплоскость $(x, t > 0)$ на три области *I*, *II* и *III* (рис. 5, а). Функция $u = f(x - at)$ отлична от нуля только в области *II*, где $x_1 < x - at < x_2$ и характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ представляют передний и задний фронты распространяющейся направо волны.

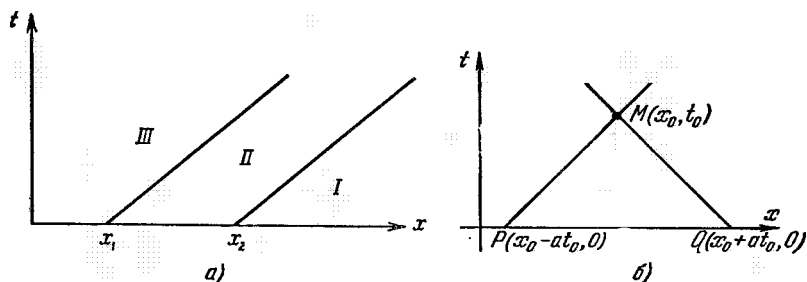


Рис. 5.

Рассмотрим теперь некоторую фиксированную точку (x_0, t_0) и проведем из нее обе характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$, которые пересекут ось x в точках $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$ и $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. Значение функции $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ в точке (x_0, t_0) равно $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, т. е. определяется значениями функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, являющихся вершинами треугольника MPQ (рис. 5, б), образованного двумя характеристиками и осью x . Этот треугольник называется характеристическим треугольником точки (x_0, t_0) . Из формулы (9) видно, что отклонение $u(x_0, t_0)$ точки струны в момент t_0 зависит только от значений начального отклонения в вершинах $P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$ характеристического треугольника MPQ и от значений начальной скорости на стороне PQ . Это становится особенно ясным, если формулу (9) записать в виде

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (10)$$

Начальные данные, заданные вне PQ , не оказывают влияния на значения $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке P_1Q_1 ,

то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок P_1Q_1 .

3. Примеры. Решение (9) можно представить в виде суммы $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где

$$\mu_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \\ &= \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(a) da. \quad (12) \end{aligned}$$

Если начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), то отклонение $u = u_1(x, t)$ есть сумма левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $0,5\varphi(x)$, равной половине начального отклонения. Если же $\varphi(x) = 0$, то $u = u_2(x, t)$ представляет возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

Пример 1. Рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Такой начальный профиль можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1, x_2]$. На рис. 6 даны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

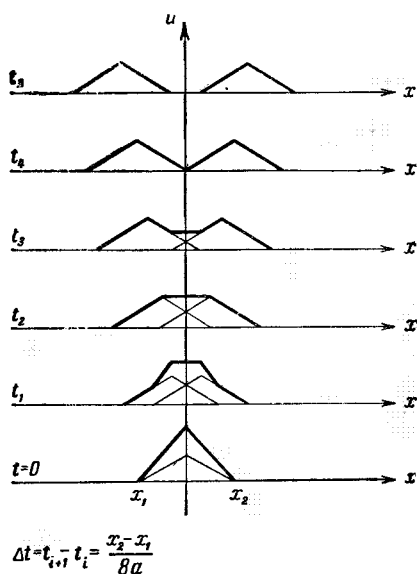


Рис. 6.

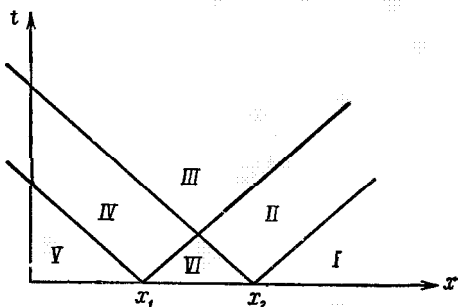


Рис. 7.

Наглядное представление о характере процесса распространения можно получить с помощью фазовой плоскости (x, t) . Проведем характеристики через точки $P(x_1, 0)$ и $Q(x_2, 0)$; они разобьют полуплоскость $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ на шесть областей (рис. 7). Отклонение $u_1(x, t)$ в любой точке (x, t) дается формулой (11). Поэтому в областях I, III, V отклонение равно нулю, так как характеристический треугольник любой точки

из этих областей не имеет общих точек с отрезком $[x_1, x_2]$, на котором заданы начальные условия. В области II решением является «правая волна» $u = 0,5\varphi(x - at)$, в области IV — «левая волна» $u = 0,5\varphi(x + at)$, а в области VI решение есть сумма «левой» и «правой» волн.

Пример 2. Пусть начальное отклонение $\varphi(x) \equiv 0$, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где она принимает постоянное значение ψ_0 : $\psi(x) = \psi_0$ при $x_1 \leq x \leq x_2$, $\psi(x) = 0$ при $x > x_2$ и $x < x_1$. В этом случае решением является функция $u_2(x, t)$. Вычислим функцию $\Psi(x)$, выбрав при этом $x_0 = 0$ (рис. 8):

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ (x - x_1) \psi_0 / 2a & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ (x_2 - x_1) \psi_0 / 2a & \text{при } x > x_2. \end{cases} \quad (13)$$

Решение $u_2(x, t)$ есть разность правой и левой волн с профилем $\Psi(x)$. Последовательные положения этих волн через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$ изображены на рис. 9. Профиль струны для $t \geq 4\Delta t$ имеет форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени. Если $\psi(x)$ отлично от постоянной на $[x_1, x_2]$, то изменится лишь профиль $\Psi(x)$.

Для выяснения характера решения воспользуемся фазовой плоскостью (x, t) (рис. 7). Напишем выражения для $u(x, t)$ в различных областях фазовой плоскости.

В области I ($x - at > x_2$) $\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}$, $u(x, t) = 0$.

В области V ($x + at < x_1$) $\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0$, $u(x, t) = 0$.

В области III ($x - at < x_1, x + at > x_2$)

$$\Psi(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0.$$

В области II ($x_1 < x - at < x_2, x + at > x_2$)

$$\Psi(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a} \psi_0.$$

В области IV ($x_1 < x + at < x_2, x - at < x_1$)

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0, \quad \Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0.$$

В области $VI (x - at > x_1, x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = t\psi_0.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса. Сообщая в начальный момент точкам струны $(x, x + \Delta x)$ постоянную скорость ψ_0 (например, ударяя струну молоточком), мы прикладываем к этому участку импульс I , равный изменению количества движения при $t = 0$, так что $I = \rho \Delta x \psi_0$, где ρ — линейная плотность струны. Таким образом, мы должны решить задачу о колебаниях струны с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ на интервале $(x, x + \Delta x)$, $\psi = 0$ вне этого интервала; здесь $I_0 = I/\Delta x$ — плотность импульса. Анализ решения этой задачи был дан выше при решении примера 2.

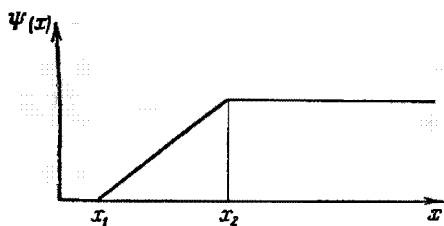


Рис. 8.

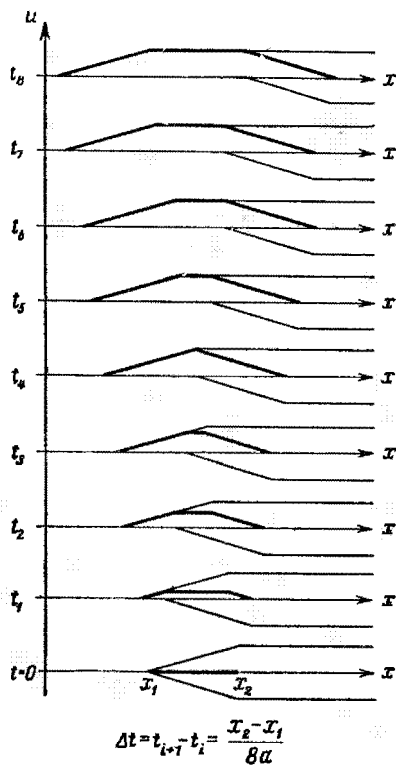


Рис. 9.

Отклонение, вызываемое импульсом, распределенным на интервале $(x, x + \Delta x)$, представляет собой при $t > \Delta x/2a$ трапецию с нижним основанием $2at + \Delta x$ и верхним $2at - \Delta x$. Совершая предельный переход при $\Delta x \rightarrow 0$ $I_0 = \text{const}$, видим, что отклонения будут равны нулю вне $(x - at, x + at)$ и $I/2a\rho$ внутри этого интервала. Можно условно говорить, что эти отклонения вызываются точечным импульсом I .

Рассмотрим фазовую плоскость (x, t) и проведем через точку (x_0, t_0) обе характеристики:

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(рис. 10). Они определяют два угла α_1 и α_2 , называемые верхним и, соответственно, нижним характеристическими углами для точки (x_0, t_0) .

Действие точечного импульса в точке (x_0, t_0) вызывает отклонение, равное $\frac{1}{2a} \frac{I_0}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла и нулю вне его.

4. Неоднородное уравнение.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} u_{tt} &= u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Рис. 10.

Пусть $w_f(x, t; \tau)$ — решение вспомогательной задачи Коши

$$\frac{1}{a^2} (w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau \quad (15)$$

$$w_f(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

Формула Даламбера (9) дает

$$w_f(x, t; \tau) = w_f(x, t - \tau; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (17)$$

Перепишем формулу Даламбера (9) в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0), \quad (18)$$

где

$$w_\psi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad w_\varphi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

являются решениями задачи (15), (16) при $\tau = 0$ и $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ соответственно, так как непосредственное дифферен-

цирование показывает, что

$$\frac{\partial w_{\varphi}}{\partial t}(x, t; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

Докажем, что справедлива следующая лемма:

Решение неоднородного уравнения (14) с нулевыми начальными данными $u_t(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = 0$ имеет вид

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (19)$$

Дифференцируя функцию (19) и учитывая условия (16) для $w_f(x, t; \tau)$, находим:

$$u_t(x, t) = a^2 w_f(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau = \\ &= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + a^2 f(x, t), \end{aligned}$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau.$$

Отсюда видно, что функция (19) удовлетворяет уравнению (14). Из формул (19) и (20) сразу следует:

Решение задачи (14), в силу (18) и (19), можно представить в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial t}(x, t; 0) + w_{\psi}(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (21)$$

Пользуясь выражением (17) для w_f , получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22) \end{aligned}$$

Прямая подстановка (22) в (14) показывает, что функция (22) в самом деле является решением задачи (14), если существуют производные $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ и df/dx .

Из формулы (17) следует, что функция w_f удовлетворяет уравнению при $t = \tau$, если f дифференцируема по x , т. е. представление (21) возможно при тех же условиях, при которых решение задачи Коши существует.

Формула (21) показывает, что решение общей задачи (14) может быть сразу написано, если имеется решение вспомогательной задачи (15)–(16). Аналогичная формула имеет место и для решения задачи Коши в неограниченном пространстве (см. гл. V).

5. Устойчивость решений. Решение уравнения (1) однозначно определено начальными условиями (2). Докажем, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения уравнения (1) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε :

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

если только начальные значения

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ связаны со своими начальными значениями формулой (9) так что

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \\ + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

откуда получаем:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leq \delta(1 + t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

Всякий физически определенный процесс, развивающийся во времени, должен характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от начальных данных. Если бы не было этой непрерывной зависимости, то два существенно различных процесса могли бы соответствовать практически одинаковым системам начальных условий (различие которых лежит в пределах точности измерений). Процессы такого типа нельзя считать определенными (физически) такими начальными условиями. Из предыдущей теоремы следует, что процесс колебаний струны не только математически, но и физически определен начальными условиями.

Если решение математической задачи непрерывно зависит от дополнительных условий (от начальных, граничных данных и от правой части уравнений — от исходных данных задачи), то говорят, что задача устойчива.

В связи с изучением физически детерминированных явлений вводится понятие корректности. Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если 1) решение задачи существует, 2) задача имеет единственное решение, 3) решение задачи непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

Отметим, что некорректно поставленные задачи часто встречаются в приложениях и к их числу относятся многие хорошо известные математические задачи.

Приведем пример некорректно поставленной задачи, решение которой неустойчиво.

Функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, однозначно определяется своими начальными условиями¹⁾ $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$. Рассмотрим функции $u^{(1)}(x, y) \equiv 0$ и $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y$, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Функция $u^{(2)}(x, y)$ зависит от λ , как от параметра. Начальные значения

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

различаются сколь угодно мало при достаточно больших λ . Однако при этом решение $u^{(2)}(x, y)$ может стать сколь угодно большим, каково бы ни было фиксированное значение y . Следовательно, задача с начальными условиями для уравнения Лапласа является некорректно поставленной.

¹⁾ Эти условия математически однозначно определяют решение уравнения Лапласа. В самом деле, задание $u_y(x, 0)$ эквивалентно $v_x(x, 0)$, где $v(x, y)$ — функция гармонически сопряженная для $u(x, y)$. Этим с точностью до постоянной однозначно определяется аналитическая функция, действительной частью которой является функция $u(x, y)$ (см. гл. IV, § 1, п. 5).

Естественно возникает вопрос о том, могут ли некорректно поставленные задачи вообще соответствовать каким-либо задачам, представляющим интерес для физики? А также, какую научную ценность может представлять приближенное решение некорректно поставленных задач, поскольку малым ошибкам в условиях задач могут соответствовать большие ошибки решения?

Подобные сомнения возникают в связи с тем, что в сказанном выше подразумевается, что в качестве приближенного решения задачи берется точное решение задачи, соответствующее приближенным условиям.

Приведем пример некорректно поставленной задачи, имеющей важное практическое значение.

Рассмотрим задачу о нахождении производной $z(x) = \frac{df}{dx}$ по равномерным приближенным значениям для $f(x)$. Пусть мера точности при задании $\tilde{f}(x)$ и определении $\tilde{z}(x)$ определена как

$$\max |\tilde{f}(x) - f(x)| \quad \text{и} \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)|.$$

Очевидно, что эта задача с точки зрения приведенной выше терминологии неустойчива (поставлена некорректно). В самом деле, если $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$, то $\max |\tilde{f}(x) - f(x)| = \delta$ при малом δ . Однако если мы в качестве приближенного значения $\tilde{z}(x)$ выбрали бы точную производную для функции $\tilde{f}(x)$, то

$$\tilde{z}(x) = \tilde{f}'(x) = -\delta \omega \sin \omega x \quad \text{и} \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta \omega;$$

$\delta \omega$ при фиксированном δ и большом ω может быть как угодно большим числом. Однако хорошо известно, что в качестве приближенного значения производной берется разностное отношение $\frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$, которое пред-

ставляет искомую производную с как угодно малой погрешностью, если только h и δ/h достаточно малы. Понятно при этом, что для получения хорошего приближения для df/dx по приближенному значению для $\tilde{f}(x)$ погрешность δ должна быть достаточно мала.

Итак, в рассматриваемом примере, несмотря на неустойчивость задачи, можно указать метод получения сколь угодно точных приближений для искомого решения по достаточно точным приближенным условиям задачи.

Подобное положение типично для многих некорректно поставленных задач¹⁾.

Некорректно поставленные задачи часто встречаются в физике при изучении объектов, недоступных непосредственному исследованию (измерению). В этих случаях приходится делать заключения о характеристиках « z » таких объектов по их косвенным (физически детерминированным) проявлениям « u », доступным для экспериментальных измерений и связанным с « z » функциональной зависимостью вида $A_z = u$. В результате мы приходим к задаче обработки наблюдений, которая является обратной задачей и состоит в определении характеристик « z » объектов по данным « u » эксперимента. Многие из

¹⁾ М. М. Лаврентьев, О некорректных задачах математической физики, Изд. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962; А. Н. Тихонов, Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации, ДАН СССР 151, № 3, 501—504 (1963); «О регуляризации некорректно поставленных задач», ДАН СССР 153, № 1, 45—52 (1963); «О нелинейных уравнениях первого рода», ДАН СССР 161, № 5, 1023—1027 (1965).

этих задач являются некорректно поставленными. В частности, приведенная выше задача Коши для уравнения Лапласа имеет непосредственное отношение к обратной задаче гравиметрии (об определении формы тела по создаваемой им аномалии силы тяжести). Приведенный выше пример о вычислении производной по приближенным значениям функции типичен для многих экспериментов, где измерения проводятся по принципу накопления.

Отметим теперь следующее обстоятельство. Очевидно, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), может быть решением уравнения (1) только в том случае, если функция $\psi(x)$ дифференцируема, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема дважды. Из сказанного ясно, что функции, изображенные на рис. 11 и 12, не могут являться решением уравнения (1), так как они не всюду дважды дифференцируемы. Более того, можно утверждать, что решения уравнения колебаний, удовлетворяющего

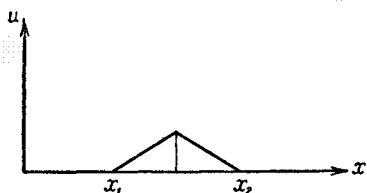


Рис. 11.

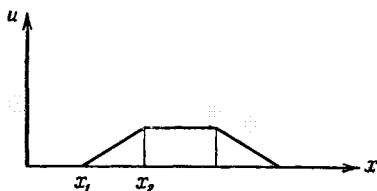


Рис. 12.

условиям (2), не существует, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Действительно, повторяя рассуждения, приведшие нас к формуле (9), мы можем утверждать, что если существует решение уравнения колебаний, то оно должно представляться формулой (9). Если же функции φ , ψ не дифференцируемы достаточное число раз, то формула (9) определяет функцию, не удовлетворяющую уравнению (1), т. е. не существует решения этой задачи.

Однако если немного изменить начальные условия, заменив их дифференцируемыми функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то этим начальным функциям уже будет соответствовать решение уравнения (1). Кроме того, заметим, что при доказательстве теоремы настоящего пункта мы фактически доказали, что функции, определяемые формулой (9), непрерывно зависят от начальных функций φ и ψ (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Таким образом, если некоторым функциям φ , ψ не соответствует решение уравнения колебаний, удовлетворяющее условиям (2), то функция, определяемая формулой (9), является пределом решений уравнения колебаний с немного сглаженными начальными условиями.

Полученные таким предельным переходом функции называются обобщенными решениями. Понятие обобщенных

решений играет большую роль в физике и было введено С. Л. Соболевым¹⁾.

6. Полуограниченная прямая и метод продолжений. Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geq 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом:

найти решение уравнения колебаний

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{при } 0 < x < \infty, t > 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{или } u_x(0, t) = \nu(t)) \quad (t \geq 0)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x < \infty).$$

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{или } u_x(0, t) = 0),$$

т. е. задачу о распространении начального возмущения на струне с закрепленным концом $x = 0$ (или свободным концом).

Отметим следующие две леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

1. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)–(2)) являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0 , то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.

2. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)–(2)) являются четными функциями относительно некоторой точки x_0 , то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.

Докажем лемму 1. Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), при $x = 0$ и $t > 0$ равна

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha) d\alpha = 0,$$

¹⁾ См. подробнее С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954, а также И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично доказывается лемма 2. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Из формулы (9) следует:

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе — в силу четности $\psi(x)$ ¹⁾.

Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Даламбера и не связано с двукратной дифференцируемостью функции $u(x, t)$. Тем самым доказано, что лемма 1 верна для любых функций, представимых формулой Даламбера, а лемма 2 — для функций того же вида с дифференцируемой функцией $\psi(x)$, т. е. для обобщенных решений задачи (1) — (2).

При помощи этих двух лемм можно решить следующие задачи:

требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 < x < \infty, \quad (2')$$

и граничному условию

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетным продолжением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в условие (2'):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

¹⁾ Эти две леммы являются следствием того, что если начальные условия четны (или нечетны), то и при $t > 0$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой Даламбера, обладает тем же свойством (предоставляем читателю доказать это). Геометрически очевидно, что нечетная непрерывная функция и производная четной дифференцируемой функции равны нулю при $x = 0$.

Функция

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

определена для всех x и $t > 0$. В силу леммы 1

$$u(0, t) = 0.$$

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t = 0$ и $x > 0$ следующим начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned} \right\} x > 0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x, t)$ только для $x \geq 0$, $t \geq 0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать:

$$u(x, t) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \\ &\frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t > \frac{x}{a}, \quad x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x, t)$ совпадает с решением (9) для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x = 0$ мы имеем *свободный конец*

$$u_x(0, t) = 0,$$

то, беря четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ \varphi(-x) & \text{для } x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ \psi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

или

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & \text{для } t < \frac{x}{a}, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\} & \text{для } t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$

удовлетворяющие в области $x \geq 0$ начальным условиям (2) и граничному условию $u_x(0, t) = 0$.

В дальнейшем при решении различных задач нам часто придется пользоваться методом продолжения на бесконечную область начальных данных, определенных на некоторой части этой области.

Поэтому мы еще раз сформулируем полученные результаты в виде двух следующих правил.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0, t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую нечетно.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u_x(0, t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую четно.

Рассмотрим два примера. Пусть начальные данные на полуограниченной прямой, закрепленной при $x = 0$, отличны от нуля только в интервале (a, b) , $0 < a < b$, в котором начальное отклонение, даваемое функций $\varphi(x)$, изображается равнобедренным треугольником, а $\psi(x) = 0$. Решение этой задачи будет полу-

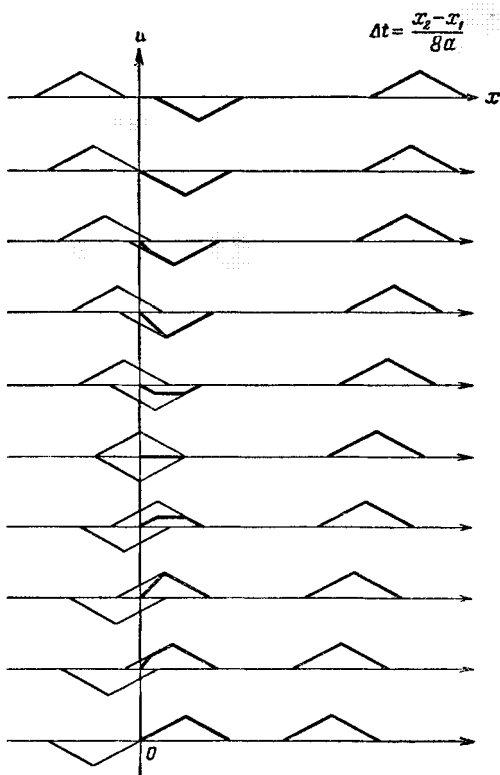


Рис. 13.

чено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую. Процесс распространения волн изображен на рис. 13. Вначале процесс происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение разбивается на две волны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью, причем это продолжается до тех пор, пока полуволна, идущая налево, не дойдет до точки $x = 0$ (рис. 13). В этот момент с левой стороны ($x \leq 0$), на которой происходили аналогичные процессы,

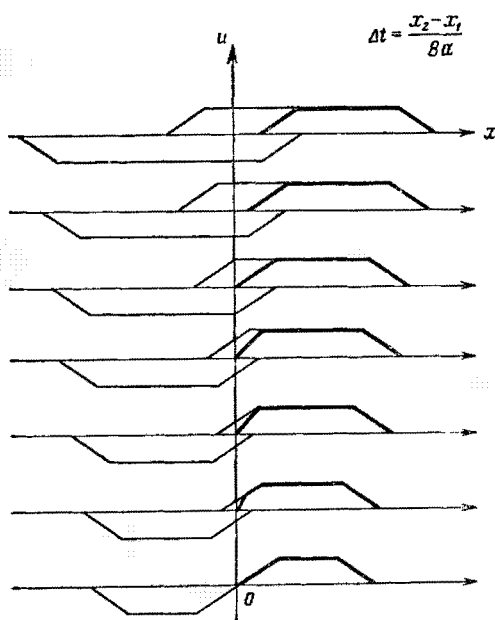


Рис. 14.

к точке $x = 0$ подходит полуволна с «обратной фазой». В последующие моменты происходит отражение полуволны от закрепленного конца. Это изображено в деталях на рис. 13. Профиль отражающейся волны укорачивается, отклонения исчезают, затем отклонения появляются с обратным знаком и, наконец, отраженная полуволна пойдет вправо за ушедшей туда полуволной с той же скоростью. Таким образом, при отражении волны от закрепленного конца струны, ее отклонение меняет знак.

Рассмотрим второй пример. Пусть на полуограниченной прямой $x \geq 0$, закрепленной при $x = 0$, начальное откло-

нение всюду равно нулю, а начальная скорость $\psi(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) ($0 < x_1 < x_2$), причем здесь $\psi(x) = \text{const}$. Продолжим нечетно начальные данные. От каждого интервала (x_1, x_2) и $(-x_1, -x_2)$ распространяются отклонения, подобные отклонениям, изображенным на рис. 14. Как видно из рисунка, в начальной стадии в области $x > 0$ процесс происходит так же, как и на бесконечной прямой. Затем происходит отражение от закрепленного конца и, наконец, волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью движется вправо.

Изучение отражения от свободного конца проводится аналогично, только начальные данные нужно продолжать четно,

так что отражение волны от свободного конца будет происходить не с измененной, а с той же фазой.

Мы рассмотрели задачи с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

или

$$u_x(0, t) = v(t) = 0.$$

В общем случае неоднородных граничных условий решение представляется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий (либо граничному, либо начальному).

Обратимся теперь к решению уравнения при нулевых начальных и заданном граничном условии

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, 0) &= 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0, \\ \bar{u}(0, t) &= \mu(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a , что подсказывает нам аналитическую форму решения:

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

откуда

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

так что

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x - at \leq 0$, так как $\mu(t)$ определена для $t \geq 0$. На рис. 15 эта область изображается заштрихованной частью фазовой плоскости.

Чтобы найти $\bar{u}(x, t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t , полагая $\mu(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда функция

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

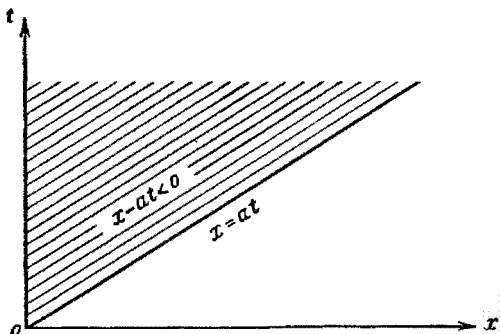


Рис. 15.

будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Сумма этой функции и функции (23), определенной в начале настоящего пункта, представляет решение первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний. Для полуграниченной струны:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t > \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (24)$$

Аналогично может быть построено решение второй краевой задачи. О третьей краевой задаче см. п. 9, стр. 79.

Мы ограничимся здесь решением краевой задачи для однородного уравнения колебаний.

Решение неоднородного уравнения см. в п. 9.

7. Задачи для ограниченного отрезка. Рассмотрим краевые задачи для ограниченного отрезка $(0, l)$. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l.$$

Рассмотрим предварительно случай однородных граничных условий

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Будем искать решение задачи в этом случае методом продолжения, предполагая возможность следующего представления:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha,$$

где Φ и Ψ — функции, подлежащие определению. Начальные условия

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0, l)$.

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требования нечетности относительно точек $x = 0$, $x = l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$

$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

Сопоставляя эти равенства, получим:

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

и аналогично для $\Psi(x)$, т. е. Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.

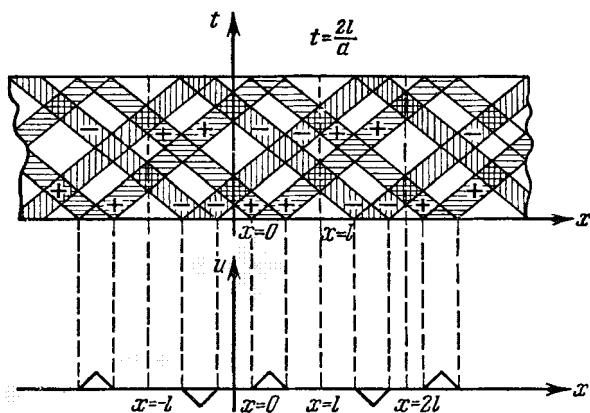


Рис. 16.

Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Подставляя их в формулу (9), получаем решение задачи.

На рис. 16 совмещены фазовая плоскость (x, t) и плоскость (x, u) , в которой дано начальное отклонение и его продолжение. На фазовой плоскости штриховкой выделены полосы, внутри которых отклонение отлично от нуля (см. рис. 7). Знаки плюс и минус, стоящие в этих полосах, указывают на знак (фазу) отклонения (в виде равнобедренного треугольника).

Пользуясь этим рисунком, легко представить себе профиль отклонения в любой момент t . Так, в момент $t = 2l/a$ мы получим отклонения, совпадающие с начальными. Таким образом, функция $u(x, t)$ будет периодической функцией t с периодом $T = 2l/a$ (см. стр. 92).

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t > 0.$$

Из результатов п. 6 вытекает, что при $t < l/a$ решением служит функция

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{где} \quad \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию

$$u(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > l/a.$$

Рассмотрим «отраженную» волну, идущую налево и имеющую при $x = l$ отклонение, равное $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. Ее аналитическое выражение дается формулой

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

Легко проверить, что разность двух волн

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

есть решение уравнения при $t < 2l/a$.

Продолжая этот процесс далее, получим решение в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right). \quad (25)$$

содержащего (для каждого фиксированного t) только конечное число отличных от нуля членов, ибо с каждым новым отражением аргумент уменьшается на $2l/a$, а функция $\bar{\mu}(t) = 0$

для $t < 0$. Выполнение граничных условий проверяется непосредственно. В самом деле, положим $x = 0$ и выделим из первой суммы отдельно первое слагаемое при $n = 0$, равное $\mu(t)$. Остальные слагаемые первой и второй сумм, соответствующие одинаковым значениям n , взаимно уничтожаются; это показывает, что $u(0, t) = \mu(t)$.

Заменяя n на $n - 1$ и изменяя в связи с этим пределы суммирования, преобразуем первую сумму к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a} \right).$$

Полагая теперь $x = l$, непосредственно убеждаемся в том, что слагаемые первой и второй сумм взаимно уничтожаются¹⁾.

Формула (25) имеет простой физический смысл. Функция

$$\bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

представляет собой волну, возбуждаемую граничным режимом при $x = 0$, независимо от влияния конца $x = l$, как если бы струна была бесконечна ($0 < x < \infty$). Следующие слагаемые представляют собой последовательные отражения от закрепленного края $x = l$ (вторая сумма) и от края $x = 0$ (первая сумма).

Аналогично, функция

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

дает решение однородного уравнения с нулевыми начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ и граничными условиями $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = \mu(t)$. На доказательстве единственности рассмотренной задачи и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий мы не останавливаемся.

8. Дисперсия волн. Уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ допускает решение в виде бегущей волны $u = f(x \pm at)$ произвольной формы. Общее уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + b_1 \bar{u}_t + b_2 \bar{u}_x + c \bar{u} = 0 \quad (26)$$

с помощью указанной в гл. I подстановки $\bar{u} = u e^{\lambda x + \mu t}$, где $\mu = -0,5 b_1$, $\lambda = -0,5 b_2 / a^2$, сводится к уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + c u = 0, \quad (27)$$

¹⁾ Начальные условия также проверяются непосредственно, так как аргументы всех функций отрицательны при $t = 0$ и выражение (25) при $t = 0$ равно нулю.

где $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. Покажем, что уравнение (27) не допускает решений в виде произвольной бегущей волны при $c \neq 0$. В самом деле, подставляя $u = f(x - at)$ в (27), находим $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$, откуда, в силу произвольности f , следует $c = 0$.

Импульс или сигнал произвольной формы может быть разложением в интеграл Фурье представлен в виде суперпозиции гармонических волн вида

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

где ω — частота, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны.

Скорость, с которой фаза волны $\alpha = \omega t - kx$ перемещается в пространстве, называется фазовой скоростью волны и равна, очевидно, $v = \omega/k$. Если фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, то говорят о дисперсии волн. В этом случае гармонические составляющие сигнала смещаются друг относительно друга, в результате чего профиль сигнала искажается.

Очевидно, что если уравнение не допускает решений в виде волн произвольной формы, то фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия.

Покажем, что для уравнения (27) имеет место дисперсия при $c \neq 0$. Подставляя в (27) $u = e^{i(\omega t - kx)}$, получаем уравнение, связывающее ω и k :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

Отсюда следует, что фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}} a$$

зависит от частоты. При условии $c = 0$, т. е. для уравнения колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $v = a$ не зависит от частоты и дисперсия отсутствует. Условие $c = 0$ называют также условием отсутствия искажения.

В качестве примера рассмотрим телеграфное уравнение (см. § 1, п. 4)

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + LG)i_t + GRi.$$

Полагая $i = ue^{-\mu t}$, где $\mu = 0,5(CR + GL)/CL$, получаем для u уравнение

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}u,$$

где $\bar{c} = -(CR - LG)^2/4CL$. Отсюда видно, что при $CR \neq LG$ сигнал по кабелю распространяется с искажением, так как имеет место дисперсия волн. Условие

$$CR = LG \quad \text{или} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

называется условием отсутствия искажения в линии. В этом случае телеграфное уравнение допускает решение в виде затухающей волны

$$i(x, t) = e^{-\gamma f} f(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где f — произвольная функция.

Отсутствие искажения волн при их распространении по кабелю имеет особо важное значение для телефонной и телеграфной связи на больших расстояниях.

9. Интегральное уравнение колебаний. При выводе дифференциального уравнения колебаний (5) в § 1 мы исходили из закона сохранения количества движения, который привел нас к уравнению колебаний в интегральной форме (3). Для того чтобы от интегрального уравнения перейти к дифференциальному, мы предположили, что функция $u(x, t)$ имеет вторые производные. Всякое предположение об ограничении класса рассматриваемых функций некоторым свойством означает отказ от изучения функций, не обладающих предполагаемым свойством. Таким образом, переходя от интегрального уравнения колебаний к дифференциальному, мы исключаем из рассмотрения процессы колебаний, не удовлетворяющие требованию двукратной дифференцируемости.

Покажем, что всю теорию можно развить в классе непрерывных кусочно-дифференцируемых функций, исходя из интегрального уравнения колебаний

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_1} \right] \rho \, dx &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F \, dx \, d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Этому уравнению можно придать следующую форму. Рассмотрим в плоскости (x, t) область G , ограниченную кусочно-гладкой кривой C , и покажем, что для этой области имеет место интегральное соотношение

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \iint_G F \, dx \, dt = 0. \quad (29)$$

Для однородной среды эта формула принимает вид

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \iint_G f \, dx \, dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho} \right). \quad (29')$$

Если кривая C является контуром прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то формула (29) совпадает с формулой (28). Если кривая C состоит из кусков, параллельных осям, то область G можно представить как сумму прямоугольников. Суммируя контурные интегралы, соответствующие отдельным слагаемым, мы получим, что слагаемые, относящиеся к внутренним границам, взаимно уничтожаются, так как интегрирование производится в противоположных направлениях, а остающиеся слагаемые дадут формулу (29). Пусть, далее, кривая C содержит дуги C ,

не параллельные осям и не являющиеся линиями разрыва подынтегральной функции. Возьмем сетку со сторонами, параллельными осям координат, и рассмотрим ячейки сетки, пересекающиеся с областью G . Обозначим через G^* совокупность этих ячеек и через C^* — границу области G^* . Формула (29) применима к G^* . Переходя к пределу при уменьшающихся размерах сетки, нетрудно убедиться в справедливости формулы (29) для предельной кривой C .

В самом деле, первое слагаемое формулы (29), примененной к области G^* , состоит из слагаемых типа

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dx \quad \text{или} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dt,$$

где $\Phi(x, t)$ — непрерывная функция и \bar{C}_n — дуга контура C^* , аппроксимирующая дугу \bar{C} (рис. 17).

Рис. 17.

Пусть $t = t_n(x)$ — уравнение кривой \bar{C}_n и $t = t(x)$ — уравнение кривой \bar{C} . Очевидно, что $t_n(x)$ равномерно сходится к $t(x)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi[x, t_n(x)] dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)] dx,$$

что и доказывает законность предельного перехода¹⁾.

Если кривая C содержит дуги, являющиеся линиями разрыва подынтегральной функции, то формула (29) сохраняет силу, если брать в качестве значений подынтегральной функции ее предельные значения с внутренней стороны области G . Таким образом, справедливость интегральной формулы (29) доказана.

Рассмотрим следующую задачу:

найти функцию $u(x, t)$, определенную и кусочно-гладкую в области $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_G f(x, t) dx dt = 0 \quad (29')$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ — кусочно-гладкая функция, а $\psi(x)$ и $f(x, t)$ — кусочно-непрерывны. Здесь C — произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в области $t \geq 0$. Покажем, что эта задача имеет единственное решение, определяемое формулой Даламбера.

Допустим, что функция $u(x, t)$ представляет решение нашей задачи. Рассмотрим треугольник ABM (рис. 18), примыкающий к оси $t = 0$ с вершиной в точке $M(x, t)$, со сторонами, являющимися отрезками характеристик

¹⁾ Поскольку $dx = 0$ на вертикальных звеньях ломаной \bar{C}_n , то в этой формуле $t = t_n(x)$ есть уравнение горизонтальных звеньев кривой C_n .

$x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ и применим к нему формулу (29'). Вдоль отрезка AM имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a du.$$

Вдоль отрезка MB имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = -a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -a du.$$

Следовательно, подынтегральное выражение вдоль характеристик является полным дифференциалом. Производя интегрирование вдоль отрезков BM и MA , получим:

$$\begin{aligned} \int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= -a [u(M) - u(B)], \\ \int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= a [u(A) - u(M)], \end{aligned}$$

так что формула (29') принимает вид:

$$u(M) = \frac{u(B) + u(A)}{2} + \frac{1}{2a} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{1}{2a} \iint_{ABM} f dx dt$$

или

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (30) \end{aligned}$$

Таким образом, если решение поставленной задачи существует, то оно однозначно определяется своими начальными значениями. В случае однородного уравнения ($f=0$) эта формула совпадает с формулой Даламбера. Отсюда следует теорема единственности для рассматриваемой задачи.

Нетрудно непосредственной подстановкой проверить, что функция типа

$$u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi, \tau) d\xi,$$

где f_1 и f_2 — кусочно-гладкие функции, а f_3 — кусочно-непрерывная функция удовлетворяет уравнению (28), а тем самым и уравнению (29'). Это доказывает теорему существования. Решения задач, рассмотренных в п. 3 в качестве примеров, являются кусочно-гладкими функциями и охватываются изложенной теорией.

Обратимся теперь к первой краевой задаче на полуограниченной прямой. Будем искать решение уравнения (29) в некоторой точке $M(x, t)$ для

$t > x/a$ (рис. 19), так как в области $t < x/a$ (под характеристикой $x = at$) влияние граничного режима не сказывается, и решение определяется формулой (30). Применим формулу (29') к четырехугольнику $MAA'B$, в котором MA ,

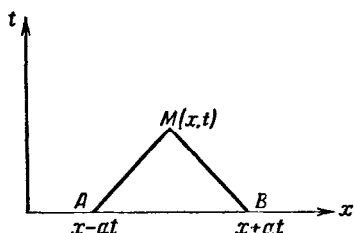


Рис. 18.

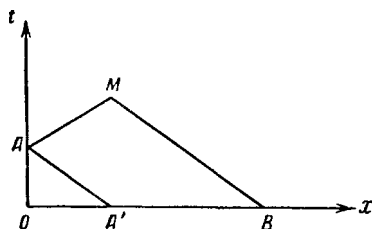


Рис. 19.

MB и AA' — отрезки характеристик. Выполняя интегрирование вдоль характеристик MA , AA' и BM , получим:

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{MAA'B} f dx dt.$$

Подставляя сюда координаты точек M , A , B и A' , будем иметь:

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x + at, 0) - u(at - x, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} dx + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

или

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \quad (31)$$

Из (31) непосредственно следует единственность решения рассматриваемой задачи.

При $f = 0$ эта формула, как нетрудно заметить, совпадает с формулой (24) § 2, п. 6. Аналогичным способом изучается и вторая краевая задача, а также задачи для ограниченного отрезка.

При изучении первой краевой задачи мы видели, что задания двух начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

и одного граничного условия

$$u(0, t) = \mu(t)$$

достаточно для полного определения решения. Отсюда следует, что должно существовать соотношение, связывающее функции φ , ψ , μ и v , где $v(t) = u_x(0, t)$. Дифференцируя формулу (31) по x и полагая $x = 0$, получаем:

$$v(t) = \frac{1}{a} \{\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)]\}, \quad (32)$$

где для простоты положено $f = 0$. Пользуясь формулой (32), можно, например, третью краевую задачу свести к первой краевой задаче.

10. Распространение разрывов вдоль характеристик. Обратимся к рассмотрению разрывов производных решений уравнения (29). Покажем, что линиями разрыва производных функций $u(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (29), могут быть только линии семейств характеристик

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

В самом деле, пусть некоторая дифференцируемая кривая, определяемая уравнением

$$x = x(t),$$

является линией разрыва производных непрерывной, кусочно-дифференцируемой функции $u(x, t)$. Предположим для определенности, что $x(t)$ — возрастающая функция. Применим формулу (29') к прямоугольнику $ABCD$ (рис. 20):

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

а также к криволинейным треугольникам $\Delta_1 = BAD$ и $\Delta_2 = BDC$:

$$\begin{aligned} \int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 dt &= 0, \\ \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 dt &= 0, \end{aligned}$$

где скобки $()_{1,2}$ показывают, что надо брать предельные значения изнутри треугольников Δ_1 или Δ_2 . Вычитая из суммы последних двух равенств предшествующее, получим:

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \right\} dt = 0$$

или в силу произвольной малости дуги DB

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] x' + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (33)$$

где, как обычно, скобками обозначается величина разрыва функции

$$[f] = f_2 - f_1.$$

Возьмем производную по t от значения функции $u(x, t)$ вдоль линии разрыва производных

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x' + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i \quad (i = 1, 2),$$

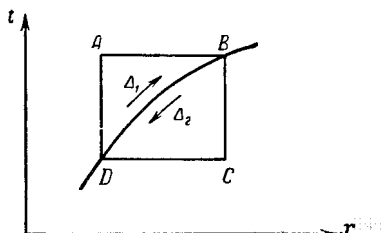


Рис. 20.

причем в качестве значения производных можно брать предельные значения как из Δ_1 , так и из Δ_2 . Разность правых частей при $i = 1$ и $i = 2$ дает:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + x' \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (33) и предполагая, что по крайней мере один из разрывов $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ отличен от нуля, видим, что эти равенства возможны одновременно, если детерминант этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

или

$$x = \pm at + \text{const.}$$

Таким образом, линии разрыва производных решения уравнения колебаний являются характеристиками.

Задачи

1. Начертить профиль струны для различных моментов времени в следующих случаях:

1. Неограниченная струна ($-\infty < x < \infty$).

а) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальный профиль струны задан в виде рис. 21;

б) начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость имеет постоянное значение $u_t(x, 0) = \psi_0$ на участке струны (x_1, x_2) и равна нулю вне этого участка;

в) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c. \end{cases}$$

II. Полуограниченная струна ($0 \leq x < \infty$).

г) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальное отклонение задано в виде треугольника, изображенного на рис. 21. Конец струны закреплен;

д) та же задача для струны со свободным концом $x = 0$;

е) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < c, \\ \psi_0 = \text{const} & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c; \end{cases}$$

конец струны $x = 0$ закреплен;

ж) аналогичная задача для струны со свободным концом $x = 0$. Профиль струны для всех задач а) — ж) следует начертить для моментов времени

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{c}{8a} k \quad (k = 1, 2, \dots, 8).$$

Отметить для задач а) — ж) на фазовой плоскости (x, t) зоны, соответствующие различным стадиям процесса.

2. Найти решение задачи 1а) для всех значений переменных x и t (формулы, выражающие функцию $u(x, t)$, различны для разных зон фазовой плоскости).

3. Определить отклонение в некоторой точке x_0 , t_0 , пользуясь фазовой плоскостью (x, t) и плоскостью (x, u) , в которой (рис. 21) заданы начальные отклонения ($\psi = 0$), как для случая неограниченной струны, так и для случая полугограниченной струны с закрепленным (или свободным) концом.

4. В начале длинной цилиндрической трубки, заполненной газом, находится поршень, движущийся по произвольному закону $x = f(t)$, со скоростью $v = f'(t) < a$. Начальное смещение и скорость частиц газа равны нулю. Найти смещение газа в сечении с абсциссой x . Рассмотреть случай движения поршня с постоянной скоростью $s < a$. Что можно сказать о решении задачи, если начиная с некоторого момента скорость поршня $v > a$? (см. Приложение 5 к гл. II).

5. Пусть по неограниченной струне бежит волна $u(x, t) = f(x - at)$. Состояние струны в момент $t = 0$ принять за начальное и решить уравнение колебаний при соответствующих начальных условиях. Сравнить с задачей 1а).

6. Неограниченный упругий стержень получен соединением в точке $x = 0$ двух стержней с характеристиками

$$k_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1} \quad \text{при } x < 0,$$

$$k_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2} \quad \text{при } x > 0.$$

а) Пусть из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

где f — заданная функция. Найти коэффициенты отражения и преломления волны при прохождении через точку стыка ($x = 0$). Установить, при каких условиях отраженная волна отсутствует.

б) Решить аналогичную задачу, если задано локальное начальное отклонение

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ \varphi(x) & \text{при } x_1 < x < x_2 < 0, \\ 0 & \text{при } x > x_2, \end{cases}$$

а начальная скорость равна нулю.

7. Пусть в некоторой точке струны $x = x_0$ подвешен груз массы M и из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Найти преломленную и отраженную волны.

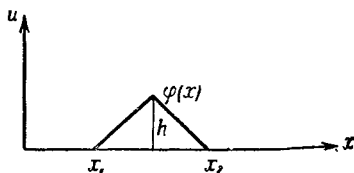


Рис. 21.

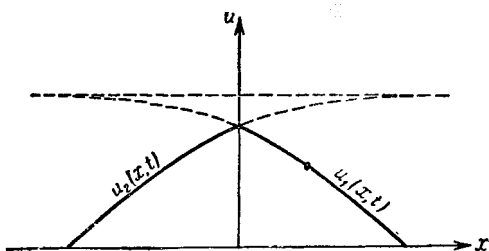


Рис. 22.

8. Полуограниченная трубка ($x > 0$), заполненная идеальным газом, имеет на одном конце, $x = 0$, свободно перемещающийся поршень массы M . В момент времени $t = 0$ поршню при помощи удара сообщают начальную скорость v_0 . Найти процесс распространения волны в газе, если известно что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю.

У к а з а н и е. Рассмотреть решение уравнения колебаний в области $x > 0$. Использовать граничное условие

$$Mu_{tt}(0, t) = Sp_0 u_x(0, t)$$

(p_0 — начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) и начальные условия на границе $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M , находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ ударом молоточка массе M сообщается начальная скорость v_0 . Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рис. 22, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x-at)} \right] & \text{при } x - at < 0 \text{ (прямая волна),} \\ 0 & \text{при } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)} \right] & \text{при } x + at < 0 \text{ (обратная волна),} \\ 0 & \text{при } x + at > 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Воспользоваться условием

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Решить задачу о распространении электрических колебаний в бесконечном проводе при условии

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

и при произвольных начальных условиях.

11. Найти решение интегрального уравнения колебаний для полуограниченной струны при граничных условиях третьего рода (см. п. 9).

12. На конце $x = 0$ полуограниченного стержня укреплен мембрана, оказывающая сопротивление продольным колебаниям стержня, пропорциональное скорости $u_t(0, t)$. Найти процесс колебания, если заданы начальные смещения и $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. Метод разделения переменных

1. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение указанной задачи мы рассмотрим с исчерпы-

вающей подробностью и при дальнейшем изложении курса будем ссылаться на этот параграф, опуская повторения доказательств.

Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу:
найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x , $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

или, после деления на XT ,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (6)$$

Чтобы функция (5) была решением уравнения (1), равенство (6) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t , а левая — только x . Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части

равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (7)$$

где λ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (8)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (9)$$

Граничные условия (4) дают:

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (10)$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (11). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма — Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^\alpha + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l \sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $e^\alpha - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (13)$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) — (3), заключаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — от t . Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1) — (3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n . Потребуем, чтобы функция (17)

удовлетворяла условиям (3):

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leq x \leq l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (19)$$

где ¹⁾

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (20)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (22)$$

¹⁾ Обычно рассматриваются периодические функции с периодом $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Если функция $F(x)$ нечетна, то $a_n = 0$, так что

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Если функция $F(x)$ задана только в промежутке $(0, l)$, то мы можем продолжить ее нечетно и вести разложение в промежутке от $-l$ до $+l$, что и приводит нас к формулам (19) и (20). (См. Б. М. Б у д а к, С. В. Ф о м и н, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.)

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \quad (23)$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Мы определили решение в виде бесконечного ряда (17). Если ряд (17) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

В настоящем пункте мы ограничимся формальным построением решения. Выяснение условий, при которых ряд (17) сходится и представляет решение, будет проведено в п. 3.

2. Интерпретация решения. Обратимся теперь к интерпретации полученного решения. Функцию $u_n(x, t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

с амплитудой

$$\alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

Движение струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x = m \frac{l}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x, t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{2n} l$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$), в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой α_n и называются пучностями стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет синусоиду

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$C_n(t) = a_n \cos \omega_n(t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

В момент времени t , при котором $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t , при которых $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (26)$$

Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = T/\rho$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

Энергия n -й стоячей волны (n -й гармоники) для случая поперечных колебаний струны равна

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражением для a_n , ω_n , а также равенством $T = a^2 \rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho a_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (29)$$

где $M = l\rho$ — масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний

нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением «простых тонов», соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется основным тоном струны. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1 , называются обертонами. Тембр звука зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n . Если $A_1 = B_1 = 0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n , где n — наименьшее число, для которого A_n или B_n отличны от нуля.

Обычно струна издает один и тот же тон. В самом деле, приведем струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

и

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi \, d\xi > 0,$$

так как

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

Следующие коэффициенты, вообще говоря, значительно меньше A_1 , так как функция $\sin \frac{\pi n}{l} \xi$ знакопеременна при $n \geq 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2 = 0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону ($\varphi(x) > 0$), то низшим тоном будет основной тон струны, энергия которого, вообще говоря, больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то

$$A_1 = 0$$

и низший тон соответствует частоте

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук ее резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление совершенно ясно. В момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии $1/3$ ее длины от края, то высота основного тона повышается вдвое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = l/3$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad (30)$$

определяющие частоту и, соответственно, период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально (законы Мерсена).

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален ее длине.

2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Эти правила легко демонстрируются на монохорде.

В настоящем пункте мы рассмотрели стоячие волны, возникающие при колебании струны с закрепленными концами. Вопрос о существовании решения вида

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

эквивалентен вопросу о существовании стоячих волн, так как профили этого решения для различных моментов времени пропорциональны.

3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн. В пункте I мы рассмотрели задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах, и доказали существование частных решений в виде стоячих волн. Там же была дана формальная схема представления произвольного колебания в виде бесконечной суммы стоячих волн. В настоящем пункте дается обоснование возможности представления произвольного решения в виде суперпозиции стоячих волн. В первую очередь рассмотрим обобщение хорошо известного для конечных сумм принципа суперпозиции на случай бесконечных рядов.

Пусть $L(u)$ — линейный дифференциальный оператор, так что $L(u)$ равен сумме некоторых производных функции (обыкновенных или частных) с коэффициентами, являющимися функциями независимых переменных.

Докажем лемму (обобщенный принцип суперпозиции):

Если функции u_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) являются частными решениями линейного и однородного дифференциального уравнения $L(u) = 0$ (обыкновенного или с частными производными), то ряд $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ является также решением этого уравнения, если вычисление производных от u , фигурирующих в уравнении $L(u) = 0$, можно совершить при помощи почленного дифференцирования ряда.

В самом деле, если производные u , фигурирующие в уравнении $L(u) = 0$, вычисляются почленным дифференцированием ряда, то в силу линейности уравнения

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

так как сходящиеся ряды можно складывать почленно. Тем самым доказано, что функция u удовлетворяет уравнению. В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда мы постоянно будем пользоваться условием равномерной сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \quad (31)$$

получаемого после дифференцирования¹⁾.

¹⁾ См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1965; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

Вернемся теперь к нашей краевой задаче. Мы должны прежде всего убедиться в непрерывности функции

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

откуда будет следовать, что $u(x, t)$ непрерывно примыкает к своим начальным и граничным значениям. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $u(x, t)$, так как общий член этого ряда — непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию. Пользуясь неравенством

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

закключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (33)$$

является мажорантным для ряда (32). Если мажорантный ряд (33) сходится, то ряд (32) сходится равномерно, то есть функция $u(x, t)$ непрерывна.

Чтобы убедиться в том, что $u_t(x, t)$ непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению, т. е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для $u(x, t)$, для чего в свою очередь достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = - \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

которым с точностью до множителей пропорциональности соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \quad (36)$$

Так как

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

то наша задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

С этой целью мы используем известные¹⁾ свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$ -я производная ее кусочно-непрерывна, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \quad (38)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin \frac{\pi n}{l} x$ функции $f(x)$, заданной только в промежутке $(0, l)$, то надо, чтобы предшествующие требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$. В частности, для непрерывности $F(x)$ необходимо, чтобы $f(0) = 0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x = 0$; аналогично этому в точке $x = l$ должно быть $f(l) = 0$, так как продолженная функция непрерывна и периодична с периодом $2l$. Непрерывность первой производной при $x = 0$, $x = l$ получается автоматически при нечетном продолжении. Вообще для непрерывности четных производных продолженной функции надо

¹⁾ См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

потребовать, чтобы

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \quad (k = 0, 2, 4, \dots, 2n). \quad (39)$$

Непрерывность нечетных производных имеет место без дополнительных требований.

Итак, для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0, 1, 2)$$

достаточно потребовать, чтобы начальное отклонение $\varphi(x)$ удовлетворяло следующим требованиям.

1° Производные функции $\varphi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, третья производная кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0. \quad (40)$$

Для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1)$$

на начальную скорость $\psi(x)$ следует наложить требования:

2° Функция $\psi(x)$ непрерывно-дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, кроме того,

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (41)$$

Таким образом, нами доказано, что любое колебание $u(x, t)$ при начальных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих требованиям 1° и 2°, представляется в виде суперпозиции стоячих волн. Условия 1° и 2° являются достаточными условиями, связанными с примененными здесь способами доказательства.

Аналогичная задача была нами решена в п. 5, § 2 методом распространяющихся волн

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha, \quad (42)$$

где Φ и Ψ являются нечетными относительно 0 и l продолжениями начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных на отрезке $(0, l)$. Функции Φ и Ψ , как было показано, периодичны с периодом $2l$ и поэтому могут быть представлены рядами

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Подставляя эти ряды в формулу (42) и пользуясь теоремой о синусе и косинусе суммы и

разности, получим выражение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (43)$$

совпадающее с представлением, даваемым методом разделения переменных.

Следовательно, формула (43) имеет место при тех же предположениях, что и формула (42) (см. п. 1 § 3), которая была получена при условии, что функция $\Phi(x)$ непрерывно-дифференцируема дважды, а функция $\Psi(x)$ — один раз.

Переходя к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы помимо условий дифференцируемости должны потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, условия 1° и 2°, являющиеся достаточными для обоснования метода разделения переменных, зависят от метода доказательства и содержат дополнительные условия по сравнению с условиями, обеспечивающими существование решения.

При обосновании возможности представления решения как результата суперпозиции стоячих волн мы привели первый метод доказательства сходимости рядов, поскольку он не связан со специальной формой (42), применимой только к простейшему уравнению колебаний, и без труда может быть перенесен на ряд других задач, хотя этот метод предъявляет несколько повышенные требования к начальным функциям.

4. Неоднородные уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad (45)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l \quad (46)$$

и однородными граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} t > 0. \quad (47)$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (48)$$

рассматривая при этом t как параметр. Для нахождения $u(x, t)$ надо определить функцию $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$

и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (48) в исходное уравнение (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (50)$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (50). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(11)}(t),$$

где

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \cdot f_n(\tau) d\tau \quad (52)$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями¹⁾ и

$$u_n^{(11)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \quad (53)$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi na} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (54)$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была нами исследована ранее достаточно подробно. Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (49) для $f_n(t)$, находим:

$$u^{(11)}(x, t) = \\ = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi na} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (55)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (56)$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta \tau.$$

Функция $\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)$, равна

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi,$$

¹⁾ В этом можно убедиться непосредственно. Формула (52) может быть получена методом вариации постоянных. См. также мелкий шрифт в конце настоящего пункта.

причем

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} F(\tau) d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

есть импульс этой силы за время $\Delta\tau$. Если применить теорему о среднем значении к выражению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

будем иметь

$$u(x, t) = G(x, \bar{\xi}, t - \bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (57)$$

где

$$\xi_0 \leq \bar{\xi} \leq \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leq \bar{\tau} \leq \tau_0 + \Delta\tau.$$

Переходя в формуле (57) к пределу при $\Delta\xi \rightarrow 0$ и $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим функцию

$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \frac{I}{\rho}, \quad (58)$$

которую можно трактовать как влияние мгновенного сосредоточенного импульса мощности I .

Если известна функция $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t - \tau)$, представляющая действие единичного сосредоточенного импульса, то непосредственно ясно, что действие непрерывно распределенной силы $f(x, t)$ должно представляться формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (59) \end{aligned}$$

совпадающей с формулой (55), полученной выше.

Функция влияния сосредоточенного импульса для бесконечной прямой была рассмотрена в предыдущем параграфе. Напомним, что она является кусочно-постоянной функцией, равной $\frac{1}{2a} \frac{I}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла для точки (ξ, τ) и нулю вне этого угла. Функция влияния сосредоточенного импульса для закрепленной струны $(0, l)$ может быть

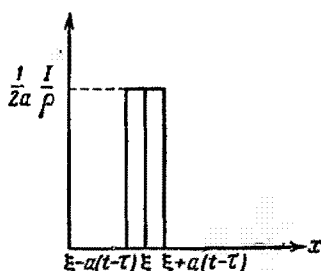


Рис. 23.

получена из функции влияния для бесконечной струны путем нечетного продолжения относительно точек $x = 0$ и $x = l$.

Рассмотрим момент времени t , достаточно близкий к τ , когда влияние отражения от концов $x = 0$ и $x = l$ еще не сказывается. Для этого момента функция влияния изображается графиком, приведенным на рис. 23. Разложим эту функцию (полагая $I = \rho$) в ряд Фурье по $\sin \frac{\pi n}{l} x$; коэффициенты Фурье будут равны

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l G(\alpha, \xi, t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \alpha d\alpha = \frac{1}{al} \int_{\xi - a(t - \tau)}^{\xi + a(t - \tau)} \sin \frac{\pi n}{l} \alpha d\alpha = \\ &= \frac{1}{a\pi n} \left\{ \cos \frac{\pi n}{l} [\xi - a(t - \tau)] - \cos \frac{\pi n}{l} [\xi + a(t - \tau)] \right\} = \\ &= \frac{2}{a\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau). \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi, \quad (60)$$

которая совпадает с формулой (56), найденной методом разделения переменных.

Для значений t , при которых начинает сказываться влияние закрепленных краев, построение функции влияния при помощи характеристик громоздко; представление же в форме ряда Фурье сохраняет силу и в этом случае.

Мы ограничимся приведенной здесь формальной схемой решения, не выясняя условий применимости полученной формулы.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u^{(1)} + p_n u = f(t) \quad (1^*)$$

$$\left(u^{(i)} = \frac{d^i u}{dt^i} \right)$$

и начальными условиями

$$u^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2^*)$$

Его решение дается формулой

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3^*)$$

где $U(t)$ — решение однородного уравнения

$$L(U) = 0$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, видим, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t - \tau_{\varepsilon}^*) = U(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Перейдем к представлению решения неоднородного уравнения через $U(t)$ — функцию влияния мгновенного импульса. Разбивая промежуток $(0, t)$ точками τ_i на равные части

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t),$$

где

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_i \text{ и } t \geq \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{при } \tau_i \leq t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t),$$

где $u_i(t)$ суть решения уравнения $L(u_i) = f_i$ с нулевыми начальными данными.

Если m достаточно велико, то функцию $u_i(t)$ можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности

$$I = f_i(\tau_i) \Delta\tau = f(\tau_i) \Delta\tau,$$

так что

$$u(t) = \sum_{i=1}^m U(t - \tau_i) f(\tau_i) \Delta\tau \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

т. е. мы приходим к формуле

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

показывающей, что влияние непрерывно действующей силы можно представлять суперпозицией влияний мгновенных импульсов.

В рассмотренном выше случае $u_n^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (50) и условиям $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Для функции влияния $U(t)$ имеем:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1,$$

так что

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a t.$$

Отсюда и из (3*) получаем формулу (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t - \tau) f_n(\tau) d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a (t - \tau) f_n(\tau) d\tau.$$

Полученное выше интегральное представление (3*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения неоднородного уравнения колебаний.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:
найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (45)$$

с дополнительными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l; \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} t \geq 0. \quad (47)$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

так что $v(x, t)$ представляет отклонение функции $u(x, t)$ от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x); \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0); \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x, t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x, t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).

6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.

Весьма важным классом задач являются краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45')$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u_1, & u_1 &= \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, & u_2 &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (47')$$

В этом случае решение естественно искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарное состояние (статический прогиб) струны, определяемое условиями

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

$$\bar{u}(0) = u_1,$$

$$\bar{u}(l) = u_2,$$

а $v(x, t)$ — отклонение от стационарного состояния. Нетрудно видеть, что функция $\bar{u}(x)$ равна

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

В частности, если $f_0 = \text{const}$, то

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2} (lx - x^2).$$

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

с однородными граничными условиями

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Таким образом, v является решением простейшей краевой задачи, рассмотренной нами в п. 1 настоящего параграфа.

При выводе уравнения колебаний струны и в ряде других случаев мы не принимали во внимание действия силы тяжести. Из сказанного выше следует, что вместо явного учета силы тяжести (и вообще сил, не зависящих от времени) достаточно брать отклонение от стационарного состояния.

Решим простейшую задачу подобного типа при нулевых начальных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45'')$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (46')$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \quad (47'')$$

В этом случае для функции $v(x, t)$ получаем задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для решения этой задачи нет необходимости пользоваться точным аналитическим выражением для $\bar{u}(x)$.

Выражение для $v(x, t)$ согласно формуле (17) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} \right)$$

есть собственная функция следующей краевой задачи:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (10)$$

Из начальных условий следует, что

$$B_n = 0$$

и

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \bar{u}(x) X_n(x) dx.$$

Для вычисления этого интеграла весьма удобным является следующий метод. Пользуясь уравнением (8), находим:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Подставим это выражение в формулу для A_n и выполним двукратное интегрирование по частям

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \int_0^l \bar{u}(x) X_n''(x) dx = \frac{2}{l\lambda_n} \left\{ \bar{u} X_n'(x) \Big|_0^l - \bar{u}' X_n \Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}'' X_n(x) dx \right\},$$

откуда, учитывая уравнение и граничные условия для $\bar{u}(x)$, находим:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \left[u_2 X'_n(l) - u_1 X'_n(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right]$$

или

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left[u_2 (-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right].$$

В частности, для однородного уравнения ($f_0(x) = 0$) имеем:

$$A_n = \frac{2}{\pi n} [u_2 (-1)^n - u_1].$$

Этим методом удобно вычислять коэффициенты Фурье для граничных условий второго и третьего рода, а также в случае краевой задачи для неоднородной струны

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] + \lambda p(x) X = 0,$$

если известны собственные функции и собственные значения.

7. Задачи без начальных условий. Как было показано выше, задача о колебании струны при заданном граничном режиме может быть сведена к решению неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Однако этот прием зачастую усложняет решение задачи, которое может быть найдено непосредственно.

При изучении влияния граничного режима важно найти какое-нибудь частное решение (однородного уравнения), удовлетворяющее заданным граничным условиям, так как вычисление поправки на начальные данные сводится к решению того же уравнения с нулевыми граничными условиями.

Весьма важным классом задач о распространении граничного режима являются «задачи без начальных условий».

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных с течением времени ослабевает. Таким образом, мы естественно приходим к задаче без начальных условий (I):

$$\left. \begin{array}{l} \text{найти решение уравнения} \\ u_{tt} = a^2 u_{xx} - au_t \quad (a > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \quad (61) \\ \text{при заданных граничных условиях:} \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{array} \right\} \quad (I_a)$$

Эту задачу назовем задачей (I_a).

Слагаемое αu_t в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости.

Рассмотрим сначала задачу о распространении периодического граничного режима:

$$u(l, t) = A \cos \omega t \text{ (или } u(l, t) = B \sin \omega t), \quad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (63)$$

Для дальнейшего нам удобнее записать граничное условие в комплексной форме

$$u(l, t) = A e^{i\omega t}. \quad (64)$$

Если

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + i u^{(2)}(x, t)$$

удовлетворяет уравнению (61) с граничными условиями (63) и (64), то $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ — его действительная и мнимая части — в отдельности удовлетворяют тому же уравнению (в силу его линейности), условию (63) и граничным условиям при $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

Итак, найдем решение задачи

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= A e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Полагая

$$u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$$

и подставляя это выражение в уравнение, получим для функции $X(x)$ следующую задачу:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2} \right), \quad (66)$$

$$X(0) = 0, \quad (67)$$

$$X(l) = A. \quad (68)$$

Из уравнения (66) и граничного условия (67) находим:

$$X(x) = C \sin kx.$$

Условие при $x = l$ дает:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \quad (69)$$

так что

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + i X_2(x), \quad (70)$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — действительная и мнимая части $X(x)$.

Искомое решение можно представить в виде

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, найдем, что

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k = \frac{\omega}{a} \quad (71)$$

и, соответственно,

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \quad (72)$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \quad (73)$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > -\infty; \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & t > -\infty; \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (I_0)$$

которую будем называть задачей (I_0) . Очевидно, что $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ и $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ являются решениями задачи (I_0) при граничных условиях

$$\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$\bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

Решение задачи при $\alpha = 0$ существует не всегда. Если частота вынужденных колебаний ω совпадает с собственной частотой ω_n колебаний струны с закрепленными концами

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

то знаменатель в формулах для $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$ обращается в нуль и решения задачи без начальных условий не существует.

Этот факт имеет простой физический смысл: при $\omega = \omega_n$ наступает резонанс, т. е. не существует установившегося режима. Амплитуда, начиная с некоторого момента $t = t_0$, неограниченно нарастает.

При наличии трения ($\alpha \neq 0$) установившийся режим возможен при любом ω , так как $\sin kl \neq 0$ при комплексном k .

Если $\mu_1(t) = 0$, а $\mu_2(t)$ — периодическая функция, представляемая в виде ряда

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \quad (74)$$

где ω — наименьшая частота, A_n и B_n — коэффициенты Фурье, то решение задачи для случая $\alpha = 0$ принимает вид

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

если только ни одна из частот ωn не совпадает с собственными частотами закрепленной струны.

Если же $\mu_2(t)$ — непериодическая функция, то, разлагая ее в интеграл Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Отметим, что решение задачи без начальных условий при $\alpha = 0$ определено неоднозначно, если только не накладывать каких-либо дополнительных условий. В самом деле, прибавляя к какому-либо решению этой задачи любую комбинацию стоячих волн

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, видим, что эта сумма будет удовлетворять тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Чтобы получить единственное решение задачи (I_α) при $\alpha = 0$, введем дополнительное условие «исчезающего трения»:

Решение задачи (I_0) мы называем удовлетворяющим условию «исчезающего трения», если оно является решением задачи (I_α) при $\alpha \rightarrow 0$.

Аналогично решается задача, если конец $x = l$ закреплен, а при $x = 0$ задан граничный режим.

Решение общей задачи без начальных условий

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определяется в виде суммы двух слагаемых, для каждого из которых неоднородно лишь одно из граничных условий.

Докажем единственность ограниченного решения задачи без начальных условий для уравнения (61). При этом мы будем предполагать непрерывность решения вместе с его производными до второго порядка включительно в области $0 \leq x \leq l$, $-\infty < t < t_0$, если граничные значения

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определены в области $-\infty < t < t_0$.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два ограниченных решения рассматриваемой задачи (I),

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

где $M > 0$ — некоторое число.

Разность этих функций

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

ограничена ($|v| < 2M$), удовлетворяет уравнению (61) и однородным граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Коэффициенты Фурье для функции v

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{v}_n + \alpha \dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (*)$$

так как вторые производные функции $v(x, t)$ непрерывны для $0 \leq x \leq l$.

Общее решение уравнения (*) имеет вид

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t}, \quad (**)$$

где $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}$ — корни характеристического уравнения, равные

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

Так как $\alpha > 0$, то $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$. Следовательно, решения (**) уравнения (*) будут ограниченными при $t \rightarrow -\infty$ лишь при $A_n = 0$ и $B_n = 0$, т. е. $v_n(t) \equiv 0$ для любого n .

Таким образом,

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

8. Сосредоточенная сила. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = x_0$. Если сила распределена на некотором участке $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то решение находится по формуле (55). Совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно получить решение поставленной задачи.

С другой стороны, при выводе уравнения колебаний мы видели (см. (8), п. 1 §1), что в точке x_0 , к которой приложена сосредоточенная сила, происходит разрыв первой производной, а сама функция остается непрерывной. Решение задачи $u(x, t)$ о колебаниях струны под действием силы, сосредоточенной в точке x_0 , можно представить двумя различными функциями:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ u(x, t) &= u_2(x, t) \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Эти функции должны удовлетворять уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad x \neq x_0, \quad (76)$$

граничным и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_2(l, t) &= 0; & u_1(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

и условиям сопряжения в точке $x = x_0$ (см. (8), § 1), состоящим из условия непрерывности функции $u(x, t)$:

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad (78)$$

и условия, связывающего величину разрыва производной с силой $f(t)$, сосредоточенной в точке x_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \quad (79)$$

Заботиться о соблюдении начальных условий нет необходимости. Если мы найдем частное решение уравнений (76), удовлетворяющее граничным условиям из (77), а также (78) и (79), то, прибавляя к нему решение однородного уравнения колебаний, мы всегда сможем удовлетворить заданным начальным условиям.

Рассмотрим частный случай

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

и найдем решение, удовлетворяющее лишь граничным условиям, предполагая, что сила действует все время, начиная от $t = -\infty$ (установившийся режим), т. е. решим задачу без начальных данных. Будем искать решение в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &= X_1(x) \cos \omega t \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2(x, t) &= X_2(x) \cos \omega t \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq l. \end{aligned} \right\}$$

Из уравнения (76) следует:

$$\left. \begin{aligned} X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0, \\ X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 &= 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Функции X_1 и X_2 , кроме того, должны удовлетворять граничным условиям

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0, \quad (81)$$

вытекающим из (77), и условиям сопряжения

$$X_1(x_0) = X_2(x_0), \quad X_1'(x_0) - X_2'(x_0) = \frac{A}{k}, \quad (82)$$

вытекающим из (78) и (79).

Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C \sin \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x) = D \sin \frac{\omega}{a} (l - x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$C \sin \frac{\omega}{a} x_0 - D \sin \frac{\omega}{a} (l - x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l - x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D , получаем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} (l - x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \cos \omega t & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} (l - x) \cos \omega t & \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A \sin \omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A \cos \omega t$ или $f(t) = A \sin \omega t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t)$$

(ω — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} (l - x_0)}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n x}{a} \times \right. \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), & 0 \leq x \leq x_0; \\ u_2 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), & x_0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (83)^1$$

¹⁾ Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$, как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) & \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю

$$\sin \frac{\omega n l}{a} = 0,$$

$$\omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_m , то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m , является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_m , то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее сосредоточенной силой надо, чтобы частота ее ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных. Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу:

найти решение уравнения

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (84)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (85)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (86)$$

Здесь k , q и ρ — непрерывные на отрезке $0 \leq x \leq l$ положительные функции ($k > 0$, $\rho > 0$, $q \geq 0$)¹⁾. Проведем решение этой задачи методом разделения переменных. Для отыскания частных решений обратимся, как и раньше, к вспомогательной задаче о существовании стоячих волн:

найти нетривиальное решение уравнения (84), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение и пользуясь граничными условиями, после разделения переменных получаем:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

Для определения функции $X(x)$ мы получим следующую краевую задачу на собственные значения²⁾:

найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \tag{87}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{88}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (87) — (88).

Сформулируем основные свойства собственных функций и собственных значений краевой задачи (87) и (88), необходимые для дальнейшего изложения.

¹⁾ Тот случай, когда $k(x)$ в некоторых точках обращается в нуль, рассматривается отдельно (см. Дополнение II).

²⁾ При $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $k = k_0 = \text{const}$ мы получаем краевую задачу о собственных колебаниях струны с закрепленными концами:

$$X'' + \mu X = 0 \quad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0} \lambda \right),$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

граничные условия (88), будем иметь ¹⁾:

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\} dx = 0 \quad (a=0, \quad b=l),$$

откуда, пользуясь уравнением (87), получаем:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то имеет место условие

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad (92)$$

выражающее ортогональность с весом $\rho(x)$ собственных функций $X_m(x)$ и $X_n(x)$.

Докажем теперь, что каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция ²⁾. В самом деле, всякая собственная функция определяется однозначно как решение дифференциального уравнения 2-го порядка по значению самой функции и ее первой производной при $x=0$. Допустив существование двух функций \bar{X} и $\bar{\bar{X}}$, отвечающих одному и тому же значению λ и обращающихся в нуль при $x=0$, и беря функцию

$$X^*(x) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)} \bar{\bar{X}}(x),$$

¹⁾ Производные X'_m и X'_n непрерывны всюду на отрезке $0 \leq x \leq l$, включая точки $x=0$ и $x=l$, так как уравнение (87) дает:

$$k(x) X'_m(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m dx + C.$$

Отсюда и следует существование производной X'_m при $x=0$ и $x=l$.

²⁾ Доказываемое свойство первой краевой задачи основано на том, что два линейно независимых решения дифференциального уравнения 2-го порядка не могут обращаться в нуль в одной и той же точке. Это утверждение относится к краевой задаче с нулевыми граничными условиями. При других граничных условиях (например, $X(0)=X(l)$, $X'(0)=X'(l)$) могут существовать две различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению $\left(X_n^{(1)}(x) = \cos \frac{2\pi n}{l} x, \quad X_n^{(2)}(x) = \sin \frac{2\pi n}{l} x \right.$ при $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2, n=0, 1, 2, \dots \left. \right)$.

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция $\bar{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}'(0) = \bar{X}'(0).$$

Тем самым доказано, что $X^*(x) = \bar{X}(x)$ и что

$$\bar{X}(x) = A \bar{\bar{X}}(x) \left(A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)} \right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием $\bar{\bar{X}}'(0) \neq 0$, которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\bar{\bar{X}}(0) = 0, \quad \bar{\bar{X}}'(0) = 0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n , то функция $A_n X_n(x)$ (A_n — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же λ_n . Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

Если некоторая функция $\hat{X}_n(x)$ не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент A_n ,

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|\hat{X}_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87) — (88) условию нормировки ($\|X_n\| = 1$), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция $\bar{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}'(0) = \bar{X}'(0).$$

Тем самым доказано, что $X^*(x) = \bar{X}(x)$ и что

$$\bar{X}(x) = A \bar{\bar{X}}(x) \left(A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием $\bar{\bar{X}}'(0) \neq 0$, которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\bar{\bar{X}}(0) = 0, \quad \bar{\bar{X}}'(0) = 0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n , то функция $A_n X_n(x)$ (A_n — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же λ_n . Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

Если некоторая функция $\hat{X}_n(x)$ не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент A_n ,

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|\hat{X}_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87) — (88) условию нормировки ($\|X_n\| = 1$), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Обратимся к доказательству свойства 2. Докажем, что $\lambda > 0$ при $q \geq 0$. Пусть $X_n(x)$ — нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n , так что

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

Умножая обе части этого равенства на $X_n(x)$ и интегрируя по x от 0 до l , получаем:

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = - \int_0^l X_n(x) L[X_n] dx$$

или

$$\lambda_n = - \int_0^l X_n \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX_n}{dx} \right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx,$$

так как функция $X_n(x)$ предполагается нормированной. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями (88), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx = \\ &= \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx, \end{aligned} \quad (93)$$

откуда и следует, что

$$\lambda_n > 0,$$

так как по условию $k(x) > 0$ и $q(x) \geq 0$.

Оставляя доказательство теоремы разложимости в стороне, остановимся вкратце на вычислении коэффициентов разложения.

Нетрудно видеть, что

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx. \quad (94)$$

В самом деле, умножая обе части равенства

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

на $\rho(x) X_n(x)$, интегрируя по x от 0 до l и учитывая ортогональность собственных функций, получаем написанное выше выражение для коэффициентов F_n (коэффициентов Фурье)¹⁾.

¹⁾ Возможность почленного интегрирования ряда следует из теоремы Стеклова о равномерной сходимости ряда (90).

Вернемся теперь к уравнению с частными производными. Для функции $T(t)$ мы имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n T = 0 \quad (95)$$

без каких-либо дополнительных условий. В силу доказанной положительности λ_n его решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

где A_n и B_n — неопределенные коэффициенты. Таким образом, вспомогательная задача имеет бесчисленное множество решений вида

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Обратимся к решению задачи с заданными начальными условиями. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (96)$$

Формальная схема удовлетворения начальным условиям (86) основывается на теореме разложимости 4 и проводится совершенно так же, как и для однородной струны. Из равенств

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

находим, что

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (97)$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при разложении по ортогональной с весом $\rho(x)$ системе функций $\{X_n(x)\}$.

Ограничиваясь общей схемой метода разделения переменных, мы не приводим условий применимости этого метода как в отношении коэффициентов уравнения, так и в отношении начальных функций.

Основополагающие работы по обоснованию этого метода принадлежат В. А. Стеклову¹⁾.

¹⁾ «Сообщения Харьковского математического общества», вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896), «Основные задачи математической физики», т. 1 (1922); В. А. Ильин, О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений, УМН 15, вып. 2 (1960).

Задачи

1. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой (рис. 24) оттягиванием ее в точке $x = c$ на величину h , т. е. $u(c, 0) = h$ (см. приложение I). Начальная скорость равна нулю.

2. Закрепленная на концах струна в точке $x = c$ оттянута силой F_0 . Найти колебания струны, если в начальный момент сила перестает действовать, а начальная скорость равна нулю.

3. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K , распределенным на отрезке $(c - \delta, c + \delta)$: а) равномерно, б) по закону $v_0 \cos \frac{x-c}{2\delta} \pi$

(см. приложение I), если начальное отклонение равно нулю.

4. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K , приложенным в точке $x = c$ (см. приложение I). Начальное отклонение равно нулю.

5. Доказать аддитивность энергии отдельных гармоник для процесса колебаний при граничных условиях $u = 0$, $u_x = 0$. Рассмотреть также случай

граничного условия 3-го рода $u_x + hu = 0$ (все ряды предполагать равномерно сходящимися). Вычислить энергию отдельных гармоник в задачах 1, 2, 3, 4.

6. Пружина, закрепленная одним концом в точке $x = 0$, растянута грузом массы M , подвешенным в точке $x = l$. Найти колебания пружины, если в момент $t = 0$ груз падает и в дальнейшем на конец $x = l$ не действуют никакие силы.

7. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила F_0 . Найти колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

8. Найти процесс колебания пружины, один конец которой закреплен, а ко второму концу в начальный момент подвешивается груз массы M . Начальные условия нулевые.

9. К однородной струне с закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ прикреплена масса M . Найти отклонение струны $u(x, t)$, если: а) в начальный момент в точке $x = c$ струна оттянута на величину h от положения равновесия и отпущена без начальной скорости; б) начальное отклонение и начальная скорость равны нулю (см. приложение III).

10. Найти процесс колебания пружины со свободными концами при равномерном начальном растяжении (представить модель этой задачи).

11. Найти процесс колебания пружины с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости, если начальные условия произвольны.

Решение исследовать при малых h («мягкое» закрепление) и при больших h («жесткое» закрепление) и вычислить соответствующие поправки к собственным значениям для струны со свободными и закрепленными концами.

12. Найти отклонение $u(x, t)$ струны с жестко закрепленными концами, если колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, а начальные условия произвольны.

13. Изолированный электрический провод длины l с характеристиками L , R , C и $G = 0$ заряжен до некоторого постоянного потенциала v_0 . В начальный момент один конец провода заземляется, а второй остается все время изолированным. Найти распределение напряжения в проводе.

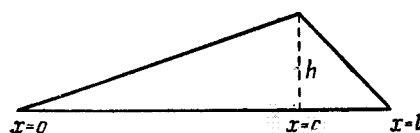


Рис. 24.

14. Струна с закрепленными концами колеблется под действием гармонической силы, распределенной с плотностью $f(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

15. Решить задачу 14, предполагая, что колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти установившиеся колебания, составляющие главную часть решения при $t \rightarrow \infty$.

16. Упругий стержень длины l расположен вертикально и жестко прикреплен верхним концом к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0 , мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, предполагая его нижний конец свободным.

17. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

где b , A и B — постоянные.

18. Решить дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

где A , B и C — постоянные.

19. К однородной струне с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ ($0 < c < l$) приложена гармоническая сила

$$F(t) = P_0 \sin \omega t,$$

действующая, начиная с момента $t = 0$. Найти отклонение струны $u(x, t)$, предполагая начальные условия нулевыми.

20. Решить задачу о колебаниях неоднородного стержня длины l с жестко закрепленными концами, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c$ ($0 < c < l$), если начальное отклонение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & \text{при } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h}{l-c} (l-x) & \text{при } c \leq x \leq l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

21. Найти установившиеся колебания пружины, один конец которой закреплен, а на второй действует сила

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

22. Найти установившиеся колебания неоднородного стержня, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c$, если один конец стержня закреплен, а второй движется по закону

$$u(l, t) = A \sin \omega t.$$

§ 4. Задача с данными на характеристиках

1. Постановка задачи. Рассмотрим ряд задач, являющихся развитием первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Для простоты будем изучать явления вблизи одного края, считая другой край удаленным в бесконечность, т. е. в

качестве исходной задачи возьмем задачу для полубесконечной прямой.

Уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ симметрично относительно переменных x и t , если положить $a^2 = 1$, т. е. изменить масштаб времени, введя переменную $t = at'$. Однако дополнительные условия вносят асимметрию в математическое толкование x и t : в начальных условиях (при $t = 0$) задаются две функции $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$, в то время как в граничных условиях (при $x = 0$) задается только одна функция $u(0, t)$.

Как было отмечено в § 2, п. 9, между функциями и их нормальными производными при $t = 0$ и $x = 0$ существует соотношение

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

при произвольном значении z . Отсюда следует, что при $x = 0$ и $t = 0$ нельзя независимым образом задать все эти функции; произвольными являются только три условия, что и указывает на невозможность симметричной постановки дополнительных условий.

Дополнительные условия могут задаваться либо на прямых линиях $x = 0$, $t = 0$ (с задачами подобного рода мы имели

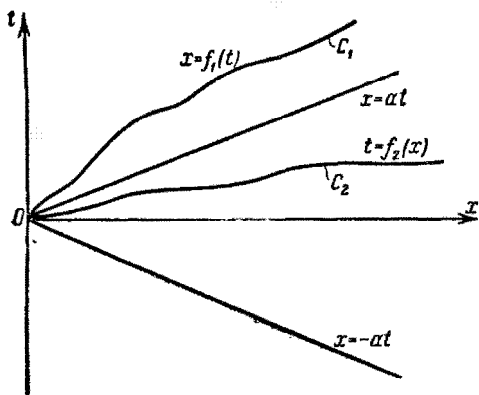


Рис. 25.

дело до сих пор), либо на некоторых кривых в фазовой плоскости. Например, граничные значения можно задавать на некоторой кривой $C_1 (x = R_1(t))$, однако для разрешимости такой задачи кривая C_1 должна помимо достаточной гладкости удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям.

Рассмотрим процесс колебаний газа в трубе с подвижной границей (подвижным поршнем).

Ясно, что скорость перемещения границы, движущейся по закону $x = f_1(t)$, нельзя считать произвольной: она не должна превосходить скорость звука $a \left(\frac{df_1(t)}{dt} < a \right)$. Геометрическим следствием этого является то, что кривая $C_1 (x = f_1(t))$ должна быть отделена характеристикой от линии $t = 0$ несущей начальные значения (рис. 25). Если хотя бы в одной точке ли-

ния C_1 лежала ниже характеристики $x = at$, то значение функции $u(x, t)$ вполне определялось бы начальными условиями и не могло бы задаваться произвольно. Физический смысл этого связан с тем, что при движении газа со скоростями, превосходящими скорость звука, уравнение акустики теряет силу, и надо пользоваться нелинейными уравнениями газовой динамики¹⁾.

Начальные условия можно задавать не только на оси $t = 0$, но и на некоторой линии C_2 ($t = f_2(x)$), которая должна удовлетворять требованию $|f'_2(x)| < 1/a$ (при этом C_2 лежит в области влияния начальных данных). Задачи подобного типа легко решаются с помощью интегрального уравнения колебаний (см. § 2, п. 7).

Не ставя своей целью дать полный перечень всех возможных краевых задач, рассмотрим более подробно задачу определения решения по данным на характеристиках. Эту краевую задачу часто называют *задачей Гурса*. Задача с данными на характеристиках представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов (см. приложение V), процессов сушки (см. задачу 1) и многих других задач.

2. Метод последовательных приближений для задачи Гурса. Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\left. \begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Дополнительные условия даны на прямых $x = 0$ и $y = 0$, являющихся характеристиками уравнения (1). Будем предполагать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Интегрируя последовательно по x и y уравнение (1), получим:

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi$$

или

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

¹⁾ См. приложение IV, стр. 154.

Отметим попутно, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

Для этого рассмотрим разности

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \\ &= \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1}(x, \eta) \right] d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \\ &= \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1}(\xi, y) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Пусть M — верхняя граница абсолютных величин коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и H — верхняя граница абсолютных величин $z_0 = u_1(x, y)$ и ее производных

$$|z_0| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < H$$

при изменении x и y внутри некоторого квадрата ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$). Построим мажорантные оценки для функций z_n , $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. Очевидно, что

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3HM y < 3HM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3HM x < 3HM(x+y).$$

Предположим, что имеют место рекуррентные оценки

$$\begin{aligned} |z_n| &< 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| &< 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| &< 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \end{aligned}$$

где $K > 0$ — некоторое постоянное число, значение которого уточним ниже. Пользуясь этими оценками и формулой для $(n+1)$ -го приближения после ряда упрощений, усиливающих неравенство, получим:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left(\frac{x+y}{n+3} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \\ \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

где

$$K = L + 2.$$

В правых частях этих неравенств с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения e^{2KLM} . Эти оценки показывают, что последовательности функций

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} \end{aligned}$$

сходятся равномерно к предельным функциям, которые мы обозначим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \\ v(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y), \\ w(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (5) и (6), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u] d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вытекающие отсюда равенства

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

позволяют установить, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

а также исходному дифференциальному уравнению (3), что проверяется непосредственно дифференцированием (4) по x и y . Функция $\bar{u} = u(x, y)$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет и дополнительным условиям.

Докажем теперь единственность решения рассматриваемой задачи (3)–(3'). Допуская существование двух решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, сразу же получаем для их разности

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) d\xi d\eta.$$

Обозначая далее через H_1 верхнюю грань абсолютных величин

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

для $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ и повторяя оценки, проведенные для функций $z_n(x, y)$, убеждаемся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

при любом значении n . Отсюда и следует

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Если коэффициенты a , b и c постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f. \quad (8)$$

При $C_1 = 0$ мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2).

Если $C_1 \neq 0$, то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме методом, изложенным в § 5.

Задачи

1. Через трубу ($x > 0$), заполненную веществом, содержащим влагу, продувается воздух (со скоростью v). Пусть $v(x, t)$ — концентрация влаги в поглощающем веществе, $u(x, t)$ — концентрация свободных паров. Вывести уравнение для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$, описывающих процесс сушки, если: 1) процесс изотермический и 2) изотерма сушки имеет вид $u = \gamma v$, где γ — постоянная изотермы (см. также приложение V).

2. По трубе ($x > 0$) пропускается со скоростью v горячая вода. Пусть u — температура воды в трубе, v — температура стенок трубы, u_0 — температура окружающей среды. Вывести уравнения для u и v , пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода — стенка и стенка — среда существует перепад температур и происходит теплообмен по закону Ньютона (см. главу III, § 1).

§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

1. **Сопряженные дифференциальные операторы.** Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u \quad (1)$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — дифференцируемые функции)

— линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа. Умножая $\mathcal{L}[u]$ на

некоторую функцию v , запишем отдельные слагаемые в виде

$$vu_{xx} = (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, \quad vbu_y = (bv u)_y - u(bv)_y,$$

$$vu_{yy} = (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, \quad vcu = ucv.$$

$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x,$$

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

$$v\mathcal{L}[u] = u\mathcal{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{M}(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = \quad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)v, \quad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = \quad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)v. \quad (5')$$

Два дифференциальных оператора называются сопряженными, если разность

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$$

является суммой частных производных по x и y от некоторых выражений H и K .

Рассматриваемые нами операторы \mathcal{L} и \mathcal{M} , очевидно, являются сопряженными.

Если $\mathcal{L}[u] = \mathcal{M}[u]$, то оператор $\mathcal{L}[u]$ называется самосопряженным.

Двойной интеграл от разности $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$ по некоторой области G , ограниченной кусочно-гладким контуром C , равен

$$\iint_G (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_C (H d\eta - K d\xi), \quad (6)$$

где u и v — произвольные дважды дифференцируемые функции (двумерная формула Грина)¹⁾.

2. Интегральная форма решения. Воспользуемся формулой (6) для решения следующей задачи:

найти решение линейного уравнения гиперболического типа

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = -f(x, y), \quad (7)$$

¹⁾ Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

удовлетворяющее начальным условиям на кривой C ,

$$\begin{aligned} u|_C &= \varphi(x), \\ u_n|_C &= \psi(x) \end{aligned} \quad (7')$$

(u_n — производная по направлению нормали к кривой C), и выяснить ту область, в которой решение определяется условиями (7').

Кривая C задана при этом уравнением

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция. Наложим на кривую C условие, чтобы всякая характеристика семейств $y - x = \text{const}$ и $y + x = \text{const}$ пересекала кривую C не более одного раза (для этого надо,

чтобы $|f'(x)| < 1$). Формула (6) для криволинейного треугольника MPQ , ограниченного дугой PQ , кривой C и отрезками характеристик MP и MQ (рис. 26), дает:

$$\begin{aligned} \iint_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \\ = \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) + \int_M^P (H d\eta - K d\xi) + \int_P^Q (H d\eta - K d\xi). \end{aligned}$$

Преобразуем первые два интеграла, взятые вдоль характеристик MQ и MP . Принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ на } QM, \\ d\xi &= d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ на } MP \end{aligned} \right\} (ds\text{-элемент дуги вдоль } QM \text{ и } MP)$$

и пользуясь формулами (4) и (5), получим:

$$\begin{aligned} \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) &= - \int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds = \\ &= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds \end{aligned}$$

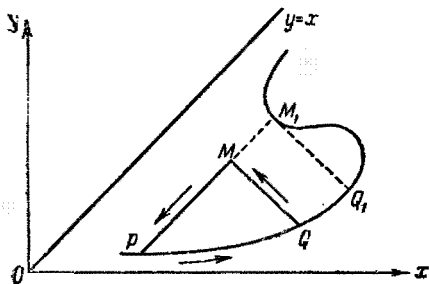


Рис. 26.

и аналогично

$$\int_M^P (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}} v \right) u ds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$\begin{aligned} (uv)_M = & \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_P^Q (H d\eta - K d\xi) - \frac{1}{2} \iint_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta. \quad (8) \end{aligned}$$

Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций u и v .

Пусть u — решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция v зависит от точки M как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_{\xi} - (bv)_{\eta} + cv = 0 \text{ внутри } \triangle MPQ \quad (9)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \text{ на характеристике } MP, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}} v \text{ на характеристике } MQ, \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$\begin{aligned} v &= e^{\int_{s_0}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \text{ на } MP, \\ v &= e^{\int_{s_0}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \text{ на } MQ, \end{aligned}$$

где s_0 — значение s в точке M . Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции v на характеристиках MP и MQ полностью определяют ее в области MPQ . Функцию v часто называют функцией Римана.

Таким образом, формула (8) для функции u , удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + uv(a d\eta - b d\xi)] + \frac{1}{2} \iint_{MPQ} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'} (d\sigma_{M'} = d\xi d\eta). \quad (10)$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль PQ , содержат функции, известные на дуге C . В самом деле, функция v была определена выше, а функции

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге PQ , то они полностью определяют функцию в характеристическом $\triangle PMQ$, если функция $f(x, y)$ известна в этой области ¹⁾.

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция u , определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7) — (7'). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

3. Физическая интерпретация функции Римана. Выясним физический смысл функции $v(M, M')$. Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой C . Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'} \quad (11)$$

¹⁾ Если характеристика пересекает кривую C в двух точках P и M_1 (см. рис. 26), то значение $u(M_1)$ не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальными данными на дуге PQ_1 и значениями $f(x, y)$ в $\triangle PM_1Q_1$.

Предположим, что $f_1(M)$ — локальная функция точки M_1 , равная нулю всюду, кроме малой окрестности S_ε точки M_1 , и удовлетворяющая условию нормировки

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = 1. \quad (12)$$

Формула (11) в этом случае принимает вид

$$u_\varepsilon(M) = \iint_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'}. \quad (13)$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно написать:

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

где M_1^* — некоторая точка области S_ε .

Стягивая ε -окрестность S_ε в точку M_1 ($\varepsilon \rightarrow 0$), находим:

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \quad (14)$$

Функция f_1 , как мы видели на ряде примеров, обычно является плотностью силы, а переменная y — временем. Выражение

$$\begin{aligned} \iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} &= \\ &= \iint_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

представляет собой импульс силы. Отсюда в силу формулы (11) заключаем, что $v(M, M_1)$ является функцией

влияния единичного импульса, приложенного в точке M_1 . Функция $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ была определена как функция параметров $M(x, y)$, удовлетворяющая по координатам ξ, η точки M_1 уравнению

$$\mathcal{M}(\xi, \eta)[v] = 0 \quad (16)$$

с дополнительными условиями (9а).

Рассмотрим функцию

$$u = u(M, M_1),$$

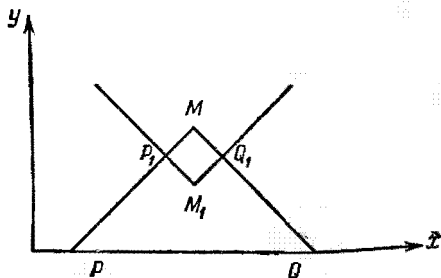


Рис. 27.

являющуюся функцией параметров $M_1(\xi, \eta)$ и удовлетворяющую по координатам x, y точки M уравнению

$$\mathcal{L}_{(x, y)}[u] = 0 \quad (17)$$

с дополнительными условиями (см. рис. 27)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}} u \quad \text{на характеристике } M_1Q_1, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}} u \quad \text{на характеристике } M_1P_1, \\ u(M_1, M_1) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из этих условий находим:

$$u(M, M_1) = \left\{ \begin{aligned} e^{\int_{s_0}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} & \quad \text{на } M_1Q_1, \\ e^{\int_{s_0}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} & \quad \text{на } M_1P_1, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

Уравнение (17) и условия (18) полностью определяют функцию u в четырехугольнике $MP_1M_1Q_1$, ограниченном отрезками характеристик MP_1 , MQ_1 и M_1P_1 , M_1Q_1 .

Применяя формулу (6) к четырехугольнику $MP_1M_1Q_1$, получаем:

$$\int \int_{MP_1M_1Q_1} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) + \int_{Q_1}^M + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

($R(\xi, \eta)$ — переменная точка интегрирования в $MP_1M_1Q_1$). Пользуясь формулами (4) и (5) для K и H и условиями (9а) на характеристиках для функции v , нетрудно вычислить первые два интеграла правой части

$$\begin{aligned} \int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) &= -(uv)_M + (uv)_{P_1}, \\ \int_{Q_1}^M (H d\eta - K d\xi) &= -(uv)_M + (uv)_{Q_1}, \end{aligned}$$

подобно тому как это было сделано при выводе формулы (10).

Аналогично, пользуясь равенствами (4'), (5') и условиями (19) для функции $u(M, M_1)$ на характеристиках, находим:

$$\begin{aligned} \int_P^{M_1} (H d\eta - K d\xi) &= \\ &= \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi d\eta - (uv)_\eta d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v[(2u_\xi d\eta + 2u_\eta d\xi) + (au d\eta - bu d\xi)] = \\ &= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u \right) v ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1} \\ &\quad \left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right), \\ \int_{M_1}^{Q_1} (H d\eta - K d\xi) &= (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1}, \quad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Суммируя все эти четыре равенства, получаем:

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1},$$

или

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \quad (20)$$

так как

$$(u)_{M_1} = (v)_{M_1} = 1.$$

Таким образом, мы видим, что $v(M, M_1)$ — функцию влияния единичного импульса, сосредоточенного в точке M_1 , можно определить как решение уравнения

$$\mathcal{L}_{(x, y)}[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

с дополнительными условиями (18).

4. Уравнения с постоянными коэффициентами. В качестве первого примера применения формулы (10) рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения колебаний струны:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad (y = at, \quad f_1 = \frac{f}{a^2}),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \quad (\psi_1 = \frac{\Psi}{a}).$$

В формуле (10) дуга PQ является отрезком оси $y = 0$.
Оператор

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

является самосопряженным, поскольку

$$\mathcal{K}(u) = \mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

Так как $a = 0$ и $b = 0$, то функция v на характеристиках MP и MQ равна единице. Отсюда следует, что

$$v(M, M') \equiv 1$$

для любой точки M' внутри треугольника PMQ .

Учитывая затем, что в нашем случае

$$d\eta = 0 \quad \text{на } PQ,$$

получаем:

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q u_\eta d\xi + \frac{1}{2} \iint_{PMQ} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Замечая, что $P = P(x-y, 0)$, $Q = Q(x+y, 0)$, где x и y — координаты точки $M = M(x, y)$, и пользуясь начальными условиями, будем иметь:

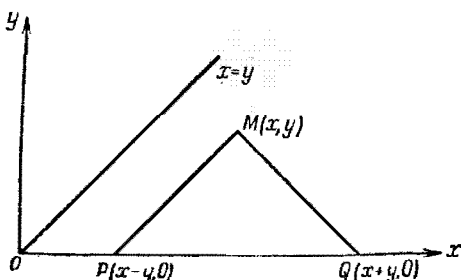


Рис. 28.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \\ &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным x и t , получаем формулу Даламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

с которой мы уже встречались в п. 9 § 2 (формула (30)).

В качестве второго примера рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \quad (21)$$

(a, b, c — постоянные числа),

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad (22)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \quad (23)$$

Подстановка

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \quad (24)$$

позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (25)$$

с дополнительными условиями

$$U|_{y=0} = \varphi(x) e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (22')$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2} \varphi(x) \right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (23')$$

если только выбрать параметры λ и μ соответствующим образом, полагая

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \quad (26)$$

Определение функции $U(x, y)$ по начальным данным и уравнению (25) сводится к построению функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$.

Функция v должна удовлетворять условиям:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= 1 \text{ на характеристике } MP, \\ v &= 1 \text{ на характеристике } MQ \text{ (рис. 28).} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Будем искать v в виде

$$v = v(z), \quad (29)$$

где

$$z = \sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2} \quad \text{или} \quad z^2 = (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2. \quad (30)$$

На характеристиках MP и MQ переменная z обращается в нуль, так что $v(0) = 1$. Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

Дифференцируя выражение для z^2 дважды, по x и y , получим:

$$zz_x = x - \xi,$$

$$zz_y = -(y - \eta),$$

$$zz_{xx} + z_x^2 = 1,$$

$$zz_{yy} + z_y^2 = -1.$$

Отсюда и из формулы (30) находим:

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

Уравнение для v принимает следующий вид:

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

при условии $v(0) = 1$. Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, часть I, § 1)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

или

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{c_1}[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]). \quad (31)$$

Воспользуемся теперь для нахождения $U(x, y)$ формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (v U_\eta d\xi - U v_\eta d\xi) \quad (d\eta = 0). \quad (32)$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку PQ ($\eta = 0$):

$$\begin{aligned} \int_P^Q (v U_\eta - U v_\eta) d\xi &= \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0(\sqrt{c_1}[(x - \xi)^2 - y^2]) U_\eta(\xi, 0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} y J'_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2})}{\sqrt{c_1}[(x - \xi)^2 - y^2]} \right\} d\xi. \quad (33) \end{aligned}$$

Пользуясь начальными условиями (22'), (23'), находим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}) \psi_1(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}) \varphi_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}}, \quad (34) \end{aligned}$$

откуда в силу (24), (22') и (23') получаем формулу

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\varphi(x-y) e^{-\frac{a-b}{2}y} + \varphi(x+y) e^{\frac{a+b}{2}y}}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{c_1} y \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}} \right\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \varphi(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2}) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi, \quad (35) \end{aligned}$$

дающую решение поставленной задачи.

Рассмотрим частный случай $a=0$, $b=0$, т. е. уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + cu = 0.$$

Из формулы (35) сразу получаем:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (36)$$

Полагая здесь $c_1=0$ и $y=at$, приходим к формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi) d\xi, \quad (37)$$

дающей решение уравнения колебаний струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \bar{\psi}(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = a\psi(x) = au_y(y, 0).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Решить задачу 1 из § 4, предполагая, что в начальный момент концентрация влаги постоянна вдоль всей трубы и на вход подается поток сухого воздуха.

2. Решить задачу 2 из § 4, считая, что начальная температура системы равна u_0 , а температура на конце трубы все время поддерживается равной $v_0 > u_0$.

3. Решить систему телеграфных уравнений (см. § 1 (21)):

$$i_x + C v_t + G v = 0,$$

$$v_x + L i_t + R i = 0$$

для бесконечной линии при начальных условиях

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

У к а з а н и е. Свести систему уравнений (§ 1 (21)) к уравнению 2-го порядка для одной из функций $i(x, t)$ или $v(x, t)$, например

$$i_{xx} = CL i_{tt} + (CR + GL) i_t + GR i$$

с начальными условиями $i(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{t=0} = - \left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i \right)_{t=0} = - \frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

и воспользоваться затем формулой (35).

4. Исследовать решение телеграфного уравнения, полученное (формула (35)) для случая малых G и R . Рассмотреть предельный случай $G \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$ и получить из формулы (35) формулу Даламбера для решения уравнений колебаний струны.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ II

I. О колебании струн музыкальных инструментов

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний, тон — периодом колебаний, а тембр — соотношением энергий основного тона и обертонов¹⁾. Не останавливаясь на физиологических процессах восприятия звука и на процессе передачи звука по воздуху, мы будем характеризовать звук струны ее энергией, периодом и распределением энергии по обертонам.

В музыкальных инструментах обычно возбуждаются поперечные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: щипковые, ударные и смычковые. В ударных инструментах (например, рояль) колебание возбуждается ударом, придающим струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются приданием струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Свободные колебания струны, возбуждаемой произвольным способом, могут быть представлены в виде (см. главу II, § 3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a).$$

В качестве упражнения к § 3 была предложена задача 1, лежащая в основе простейшей теории возбуждения струн щипковых инструментов. Решение этой задачи показывает, что если начальное отклонение струны представлено в виде треугольника с высотой h в точке $x=c$ (рис. 29), то

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c(l-c)} \sin \frac{\pi nc}{l}, \quad b_n = 0. \quad (1)$$

¹⁾ Р э л е й, Теория звука, т. I, гл. VI, Гостехиздат, 1955.

Энергия n -й гармоники равна

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \quad (2)$$

и убывает обратно пропорционально n^2 .

В задаче 4 к § 3 рассматривается простейшая теория ударного возбуждения струны при помощи сосредоточенного в точке c удара с импульсом K . Решение этой задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi n c}{l}. \quad (4)$$

Таким образом, при возбуждении струны ударом, сосредоточенным на небольшом интервале длины δ , энергии различных гармоник (для которых δ мало по сравнению с расстоянием между узлами) будут мало различаться между собой, и тон, издаваемый так возбужденной струной, насыщен обертонами. Это заключение легко проверяется экспериментально. Если натянутую струну (на монохорде) ударить лезвием ножа, то струна зазвонит: звук будет насыщен обертонами. В рояле струна возбуждается ударом молоточка, обтянутого кожей. Такое возбуждение струны можно представить при помощи следующих схем:

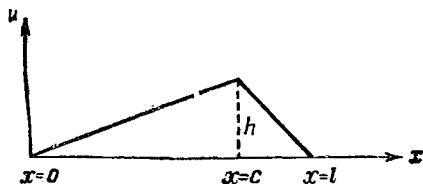


Рис. 29.

1. Струна возбуждается заданием постоянной начальной скорости v_0 на интервале $(c - \delta, c + \delta)$. Этот случай будет соответствовать плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину 2δ и ударяющему в точке c . Процесс колебаний описывается функцией (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

и энергии отдельных гармоник равны

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x-c| < \delta, \\ 0 & |x-c| > \delta. \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку ширины 2δ . Такой молоточек в центре интервала 2δ возбуждает наибольшую начальную скорость, что схематически может быть описано приведенной выше функцией. Возбужденное таким образом колебание имеет вид (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

и энергии гармоник равны

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n\delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi nc}{l}.$$

3. Молоточек, возбуждающий колебания струны, не является идеально жестким. В этом случае колебания определяются уже не начальной скоростью, а силой, меняющейся со временем. Таким образом, мы приходим к неоднородному уравнению с правой частью

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau}, & \text{если } |x-c| < \delta, \\ & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{если } |x-c| > \delta, \\ & t > \tau. \end{cases}$$

Решение этого уравнения для $t > \tau$ представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n\delta}{l} \cos \frac{\omega_n\tau}{2} \sin \frac{\pi nc}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\tau}{l}\right)^2\right]} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что ширина интервала, по которому производится удар, и продолжительность времени удара имеют весьма существенное влияние на величину энергии высоких обертонов. Отметим, кроме того, что присутствие множителя $\sin \frac{\pi n}{l} c$ показывает, что если центр удара молоточка приходится на узел n -й гармоники, то энергия соответствующей гармоники равна нулю.

Наличие высоких обертонов (начиная с 7-го) нарушает гармоничность звука и вызывает ощущение диссонанса¹⁾. Наличие

¹⁾ Например, если основная частота (первая гармоника) в 440 колебаний в секунду соответствует «ля» первой октавы, то в семь раз большая частота соответствует «соль» четвертой октавы. Интервал ля — соль, так называемая малая септима, имеет неприятный для слуха, диссонирующий характер.

низких обертонов, наоборот, вызывает ощущение полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают близко от точки закрепления струны между узлами 7-го и 8-го обертонов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию низких (3-го и 4-го) обертонов. В старых конструкциях рояля, обладавших более резким, даже до некоторой степени звенящим тоном, пользовались узкими и жесткими молоточками.

II. О колебании стержней

В курсах методов математической физики основное место отводится уравнениям 2-го порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и т. д. приводит к уравнениям более высокого порядка.

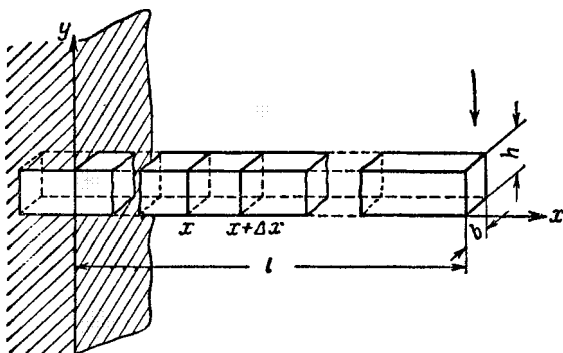


Рис. 30.

В качестве примера на уравнения 4-го порядка рассмотрим задачу о собственных колебаниях камертона, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски. Определение формы колебаний камертона и его частоты сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей ¹⁾.

¹⁾ См., например, монографию А. Н. Крылова «Вибрация судов».

Приведем элементарный вывод уравнения (1). Рассмотрим прямоугольный стержень длиной l ($0 \leq x \leq l$), высотой h и шириной b (рис. 30). Выделим элемент длины dx . После изгиба

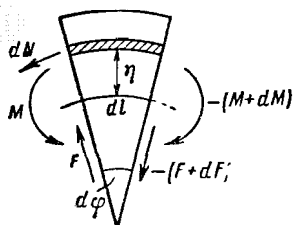


Рис. 31.

торцевые сечения выделенного элемента стержня, предполагаемые плоскими, образуют угол $d\varphi$. Если деформации малы, а длина оси стержня при изгибе не меняется ($dl = dx$), то

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Слой материала, отстоящий от оси стержня $y = 0$ на расстоянии η , изменяет свою длину на величину $\eta d\varphi$

(рис. 31). По закону Гука сила натяжения, действующая вдоль слоя, равна

$$dN = E \cdot b \, d\eta \cdot \frac{\eta d\varphi}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta d\eta,$$

где E — модуль упругости материала стержня. Полный изгибающий момент сил, действующих в сечении x , равен

$$M = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \quad (2)$$

где

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

— момент инерции прямоугольного сечения относительно своей горизонтальной оси. Обозначим через $M(x)$ момент, действующий на правую часть стержня в каждом сечении. В сечении $x + dx$, очевидно, действует момент сил, равный $-(M + dM)$.

Избыточный момент $-dM$ уравнивается моментом тангенциальных сил

$$dM = F dx.$$

Отсюда в силу равенства (2) получаем величину тангенциальной силы

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (3)$$

Приравняв действующую на элемент результирующую силу

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

произведению массы элемента на ускорение

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

где ρ — плотность стержня, S — площадь поперечного сечения (при этом мы пренебрегаем вращательным движением при изгибе), получаем уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{EJ}{\rho S} \right). \quad (1)$$

Граничными условиями для заделанного конца $x=0$ являются неподвижность стержня и горизонтальность касательной

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

На свободном конце должны равняться нулю изгибающий момент (2) и тангенциальная сила (3), откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы полностью определить движение стержня, нужно еще задать начальные условия — начальное отклонение и начальную скорость

$$y|_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1) с граничными условиями (4), (5) и с начальными условиями (6).

Будем решать задачу методом разделения переменных, полагая

$$y = Y(x) T(t). \quad (7)$$

Подставляя предлагаемую форму решения в (1), имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = - \frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

Для функции $Y(x)$ получаем задачу о собственных значениях

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \quad (8)$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (8) представляется в виде

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x + C \cos \sqrt[4]{\lambda} x + D \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

Из условий $Y(0)=0$, $Y'(0)=0$ находим $C=-A$, $D=-B$. Отсюда следует, что

$$Y(x) = A (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x - \cos \sqrt[4]{\lambda} x) + B (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x - \sin \sqrt[4]{\lambda} x).$$

Условия $Y''(l)=0$ и $Y'''(l)=0$ дают:

$$A (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l + \cos \sqrt[4]{\lambda} l) + B (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} l + \sin \sqrt[4]{\lambda} l) = 0,$$

$$A (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} l - \sin \sqrt[4]{\lambda} l) + B (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l + \cos \sqrt[4]{\lambda} l) = 0.$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения A и B , если определитель системы равен нулю. Приравняв этот определитель нулю, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений

$$\operatorname{sh}^2 \sqrt[4]{\lambda} l - \sin^2 \sqrt[4]{\lambda} l = \operatorname{ch}^2 \sqrt[4]{\lambda} l + 2 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l \cos \sqrt[4]{\lambda} l + \cos^2 \sqrt[4]{\lambda} l.$$

Так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt[4]{\lambda} l). \quad (10)$$

Корни уравнения (10) без труда вычисляются, например, графически¹⁾:

$$\mu_1 = 1,875,$$

$$\mu_2 = 4,694,$$

$$\mu_3 = 7,854,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad \text{при } n > 3.$$

Последняя формула дает значение μ_n с точностью до трех десятичных знаков, начиная с $n=3$, и с точностью до шестого знака для $n \geq 7$.

Рассмотрим теперь частоты колебаний камертона. Уравнению

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

удовлетворяют тригонометрические функции

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t$$

¹⁾ О вычислении корней уравнения (10) см. Рэлея, Теория звука, т. I, гл. VIII, 1955.

с частотой

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

Частоты ν_n собственных колебаний относятся как квадраты μ_n . Так как

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6,267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17,548,$$

то второй собственный тон выше основного тона более чем на две с половиной октавы, т. е. выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третье же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы. Например, если камертон имеет основную частоту в 440 колебаний в секунду (принятый стандарт для a' — ноты *ля* первой октавы), то следующая собственная частота камертона будет равна 2757,5 колебания в секунду (между $c'''' = 2637,3$ и $f'''' = 2794,0$ — между нотами *ми* и *фа* четвертой октавы равномерно-темперированной гаммы), третья же собственная частота в 7721,1 колебания в секунду уже выходит за пределы шкалы собственно музыкальных звуков.

При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент. Однако с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

III. Колебания нагруженной струны

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о колебаниях закрепленной на концах струны $(0, l)$, в нескольких точках которой $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) помещены сосредоточенные массы M_i .

Условия в точке x_i можно получить двумя способами. Если в точке x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приложена сосредоточенная сила $F_i(t)$, то должны выполняться соотношения

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1)$$

$$ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2)$$

В данном случае под F_i следует понимать силу инерции. Подставляя в формулу (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

получим:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \quad (3)$$

Возможен и другой вывод условия (3). Распределим массу M_i на участке $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ с постоянной плотностью δ_i и воспользуемся уравнением колебаний для неоднородной струны

$$(\rho + \delta_i)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x_i - \epsilon < x < x_i + \epsilon, \quad (4)$$

где ρ — плотность струны. Пусть $u_\epsilon(x, t)$ — решение этого уравнения.

Интегрируя уравнение (4) по x в пределах от $x_i - \epsilon$ до $x_i + \epsilon$ и совершая предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$, получим условие (3) для функции $u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t)$. На обосновании предельного перехода мы не останавливаемся.

Формулируем полностью нашу задачу:

найти решение уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

условиям сопряжения в точках $x = x_i$

$$\left. \begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{tt}(x_i, t) &= k u_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

2. Собственные колебания нагруженной струны. Остановимся, прежде всего, на исследовании собственных частот и профилей стоячих волн для нагруженной струны. Для этого мы должны найти решение поставленной задачи, представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5) и пользуясь граничными условиями, получим после разделения переменных

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (10)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X &= (kX')' + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Условия сопряжения дают:

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$

$$M_i X(x_i) T''' = k X' \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} T.$$

Принимая во внимание уравнение (10), перепишем последнее соотношение в виде

$$k X' \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

Таким образом, для функции $X(x)$ мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda \rho X = 0, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad (11)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} X(x_i - 0) &= X(x_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отличительной особенностью рассматриваемой краевой задачи является то, что параметр λ входит не только в уравнение, но и в дополнительные условия.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательствах существования бесчисленного множества собственных значений и собственных функций, положительности собственных значений, теоремы разложимости. Эта краевая задача, так же как и задачи обычного типа, рассмотренные нами в § 3 главы II, сводится к некоторому интегральному уравнению, которое в данном случае является нагруженным интегральным уравнением и эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса.

Остановимся более подробно на выводе условия ортогональности собственных функций

$$X_1(x), \quad X_2(x), \dots,$$

которое в данном случае отлично от условия (92) § 3 и называется условием ортогональности с нагрузкой.

Как было показано в гл. II (см. § 3), собственные функции для краевой задачи

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

ортогональны с весом ρ на интервале $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (14)$$

Распределяя каждую массу M_i с постоянной плотностью δ_i на некотором интервале $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число, мы приходим к задаче о собственных колебаниях неоднородной струны с плотностью $\rho_\varepsilon(x)$. Пусть $\lambda_{\varepsilon n}$ и $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ — собственные значения и собственные функции этой задачи, для которых должно выполняться условие ортогональности

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x) dx = 0. \quad (15)$$

Выделяя в равенстве (15) интегралы по участкам $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ и совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получим соотношение

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \quad (16)$$

называемое условием ортогональности с нагрузкой¹⁾.

Мы снова оставляем в стороне вопрос о возможности такого перехода.

Условие ортогональности (16) может быть получено и чисто формальным путем из уравнения и условий (11) — (13). Пусть $X_m(x)$ и $X_n(x)$ — собственные функции задачи (11) — (13), соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_m}{dx} \right) + \lambda_m \rho X_m &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho X_n &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $X_n(x)$, второе — на $X_m(x)$ и вычтем из первого результата второй. Интегрируя полученное равенство последовательно по участкам $(0, x_1)$; (x_1, x_2) ; ...; (x_N, l) и складывая, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx - \\ - \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X'_n - X_n k X'_m] dx = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

причем мы полагаем $x_0 = 0$, $x_{N+1} = l$. Выполняя интегрирование в каждом из слагаемых суммы и объединяя члены, соответ-

¹⁾ Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VI, 1951.

ствующие подстановкам $x=x_i-0$ и $x=x_i+0$, получим сумму слагаемых вида

$$A_i = (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i-0} - (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i+0}.$$

При этом подстановки при $x=0$ и $x=l$ в силу граничных условий обращаются в нуль.

Для вычисления A_i воспользуемся условиями сопряжения

$$\left. \begin{aligned} X_j(x_i-0) &= X_j(x_i+0), \\ kX'_j(x_i+0) - kX'_j(x_i-0) &= -M_i \lambda_j X_j(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (j=m, n). \quad (13')$$

Переписывая A_i в виде

$$A_i = X_m(x_i) [kX'_n(x_i-0) - kX'_n(x_i+0)] - \\ - X_n(x_i) [kX'_m(x_i-0) - kX'_m(x_i+0)]$$

и пользуясь формулой (13'), находим

$$A_i = X_m(x_i) M_i \lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i) M_i \lambda_m X_m(x_i) = \\ = M_i X_m(x_i) X_n(x_i) (\lambda_n - \lambda_m).$$

Теперь равенство (17) можно написать в виде

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left\{ \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i X_m(x_i) X_n(x_i) \right\} = 0.$$

Если $\lambda_m \neq \lambda_n$, то отсюда сразу же следует условие ортогональности с нагрузкой (16).

Норма собственных функций $X_n(x)$ определяется по формуле

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i X_n^2(x_i). \quad (18)$$

Очевидно, что при разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

коэффициенты разложения будут определяться по формуле

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i f(x_i) X_n(x_i)}{\|X_n\|^2}. \quad (19)$$

Задача с начальными условиями, поставленная в п. 1, решается по обычной схеме метода разделения переменных.

Аналогично рассматривается задача о колебании стержня (или балки) при наличии сосредоточенных масс.

Задача о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами, находит широкое применение в физике и технике. Еще Пуассон решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к упругой нити. А. Н. Крылов показал¹⁾, что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода «дрожжащих» клапанов и т. д. Для теории многих измерительных приборов важно изучение крутильных колебаний нити, к концу которой подвешена масса (например, зеркальце).

Особую актуальность задача подобного типа приобрела в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла (балки переменного сечения), нагруженного массами (моторы). Кроме того, рассматриваемая задача встречается при расчете собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и самоиндукциями (в связи с этим см. приложение, посвященное аналогии между механическими и электромагнитными колебаниями).

Мы не останавливаемся здесь на приближенных методах нахождения собственных значений и функций задачи, аналогичных приближенным методам нахождения соответствующих величин для неоднородной струны.

3. Струна с грузом на конце. Значительный практический интерес представляет задача о колебаниях однородной струны, один конец которой ($x=0$) закреплен, а ко второму концу ($x=l$) прикреплен груз массы M .

В этом случае условие при $x=l$ принимает вид

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

и для амплитуды стоячих волн получается уравнение

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

с граничными условиями

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda_n X_n(l).$$

Отсюда находим

$$X_n(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\sin \sqrt{\lambda_n} l},$$

где λ_n определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n} l = \frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n}. \quad (20)$$

¹⁾ А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, гл. VII, изд. АН СССР, 1932.

Условие ортогональности функций $\{X_n(x)\}$ принимает вид

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho dx + M X_n(l) X_m(l) = 0.$$

Вычислим квадрат нормы

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho dx + M X_n^2(l).$$

Используя уравнение (20), получаем:

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

Задача с начальными данными решается обычным методом.

4. **Поправки для собственных значений.** Вычислим поправки для собственных частот в случае больших и малых нагрузок M . Для простоты рассмотрим тот случай, когда груз подвешен к концу струны. Возможны два предельных случая.

1. $M=0$. Конец $x=l$ свободен. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

2. $M=\infty$. Конец $x=l$ жестко закреплен: $u(l, t)=0$. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Нас будет интересовать случай малых M ($M \rightarrow 0$) и больших M ($M \rightarrow \infty$).

1° M мало. Найдем поправку к собственному значению $\lambda_n^{(1)}$, полагая

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \epsilon M, \quad (21)$$

где ϵ — некоторое число. Подставляя (21) в уравнение (20) и пренебрегая M^2 и более высокими степенями M , получим:

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l} \right), \quad (22)$$

т. е. собственные частоты нагруженной струны при $M \rightarrow 0$ возрастают, приближаясь к собственным частотам струны со свободным концом.

2° M велико. Выбирая $1/M$ в качестве параметра малости, положим:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \epsilon \frac{1}{M}.$$

Уравнение (20) дает:

$$v = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}}.$$

При этом мы пренебрегли членами, содержащими $1/M^2$ и более высокие степени $1/M$.

Таким образом,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}} \frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \quad (23)$$

т. е. при увеличении нагрузки собственные частоты убывают, равномерно приближаясь к собственным частотам струны с закрепленными концами.

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнения акустики (см. § 1) были получены в предположении малости скоростей движения газа и малых изменений давления, что позволило линеаризовать уравнения гидродинамики.

В задачах, возникающих при изучении полета ракет и скоростных самолетов, в теории баллистики, взрывных волн и т. п., приходится иметь дело с гидродинамическими процессами, характеризующимися большими скоростями и градиентами давлений. В этом случае линейное приближение акустики непригодно и необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидродинамики. Поскольку с такого рода движениями на практике приходится встречаться для газов, то принято о гидродинамике больших скоростей говорить как о газовой динамике или газодинамике.

Уравнения газодинамики в случае одномерного движения газа (в направлении оси x) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (\text{уравнение непрерывности}), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{уравнение движения}), \quad (2)$$

$$p = f(\rho, T) \quad (\text{уравнение состояния}). \quad (3)$$

Таким образом, уравнения газодинамики представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил.

Перейдем теперь к выводу закона сохранения энергии. Энергия единицы объема равна

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho e, \quad (4)$$

где первый член есть кинетическая энергия, второй — внутренняя энергия. Здесь ε , очевидно, обозначает внутреннюю энергию в единицы массы.

Для идеального газа $\varepsilon = c_v T$, где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, T — температура. Вычислим изменение энергии в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon). \quad (5)$$

Производя дифференцирование в первом слагаемом и пользуясь уравнениями (1) и (2), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) - \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6)$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon)$ обратимся к первому началу термодинамики, выражающему закон сохранения энергии

$$dQ = d\varepsilon + p d\tau, \quad (7)$$

где dQ — количество тепла, получаемое (или отдаваемое) системой извне, $p d\tau$ — работа, затрачиваемая при изменении объема на величину $d\tau$ ($\tau = 1/\rho$ — удельный объем).

Если процесс адиабатический (теплообмена со средой нет), то

$$dQ = 0$$

и

$$d\varepsilon = -p d \frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (8)$$

Пользуясь этим равенством, будем иметь:

$$d(\rho \varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = w d\rho, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) = w \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (10)$$

где

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

— тепловая функция или теплосодержание единицы массы.

Производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ в силу соотношений (9) и (11) удовлетворяет уравнению

$$\rho v \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (12)$$

Учитывая равенства (2), (5), (6), (10), (12), получаем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right]. \quad (13)$$

Для выяснения физического смысла этого равенства проинтегрируем его по некоторому объему (x_1, x_2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) dx = - \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Слева стоит изменение энергии в единицу времени на интервале (x_1, x_2) , справа — поток энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема.

Если эффектом теплопроводности нельзя пренебречь, то уравнение сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (14)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

2. Ударные волны. Условия динамической совместности. В случае больших скоростей возможны такие движения, при которых на некоторых поверхностях, перемещающихся в пространстве, возникают разрывы непрерывности в распределении гидродинамических величин (давления, скорости, плотности и др.). Эти разрывы принято называть ударными волнами.

На поверхности разрыва (фронте ударной волны) должны выполняться условия непрерывности потока вещества, энергии и количества движения (условия Гюгонио). Перейдем к выводу этих условий.

Преобразуем уравнение (2) к более удобному для наших целей виду. Умножая (1) на v и складывая с (2), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \rho v^2). \quad (2')$$

Перепишем теперь уравнения непрерывности, движения и сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v), \quad (1')$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \rho v^2), \quad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right]. \quad (13)$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) линию $x = \alpha(t)$, являющуюся «следом» поверхности разрыва на плоскости (x, t) . Пусть AC —

некоторая дуга линии разрыва $x = \alpha(t)$, где A и C — точки с координатами x_1 , t_1 и $x_2 = x_1 + \Delta x$; $t_2 = t_1 + \Delta t$ соответственно. Построим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям.

Запишем закон сохранения вещества в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_t - (\rho)_{t_1}] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}] dt, \quad (15)$$

где слева стоит изменение массы на интервале (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) , а справа — количество вещества, вытекающего из интервала (x_1, x_2) за время (t_1, t_2) . Если функции ρ и ρv непрерывны и дифференцируемы всюду внутри $ABCD$, то уравнение (15) эквивалентно уравнению (1'). В рассматриваемом случае это не имеет места.

Воспользуемся теоремой среднего значения для каждого слагаемого в отдельности

$$[(\rho)_{t=t_2} - (\rho)_{t=t_1}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = - (\rho v)_{x=x_2} + (\rho v)_{x=x_1},$$

где x^* , x^{**} , t^* , t^{**} — средние значения аргументов x и t .

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ ($x_2 \rightarrow x_1$) и $\Delta t \rightarrow 0$ ($t_2 \rightarrow t_1$) и обозначая индексом 2 значения функций выше кривой $x = \alpha(t)$ (сзади фронта ударной волны), а индексом 1 — значения функций ниже этой кривой (перед фронтом), получаем:

$$(\rho_2 - \rho_1) U = - (\rho v)_1 + (\rho v)_2, \quad (16)$$

где

$$U = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

— скорость ударной волны.

В системе координат, движущейся вместе с ударной волной,

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

обозначают скорости частиц перед фронтом и, соответственно, сзади фронта ударной волны. Полученное выше соотношение (16) можно переписать в виде

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \quad (16')$$

Это равенство выражает непрерывность потока вещества через фронт ударной волны.

Записывая в интегральной форме закон сохранения количества движения, имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_t - (\rho v)_{t_1}] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho v^2)_{x_2} - (p + \rho v^2)_{x_1}] dt,$$

где справа стоит сумма импульса действующих сил (давления) и потока количества движения. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$, получаем закон сохранения потока количества движения на фронте

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

или

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2. \quad (17)$$

Аналогично получается также уравнение сохранения энергии на фронте

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

или в силу условия (16)

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, на фронте ударной волны должны выполняться уравнения (условия динамической совместности или условия Гюгонио)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (16')$$

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (18)$$

Из первых двух уравнений (16) и (17) выразим u_1 и u_2 через p и ρ :

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

откуда

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} (p_1 - p_2).$$

Подставляя затем это выражение в уравнение (18), находим соотношение между значениями энергии по обе стороны фронта

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1 + \rho_2) (p_1 - p_2)$$

и

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1 - \rho_2) (p_1 + p_2).$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

т. е.

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \quad (19)$$

Пользуясь формулой (19), после несложных преобразований приходим к так называемому уравнению адиабаты Гюгонио

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \quad (20)$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \quad (21)$$

По этой формуле можно определить одну из величин p_1 , ρ_1 , p_2 , ρ_2 , если известны три остальные величины.

Ударная волна всегда движется относительно газа от областей с большим давлением к областям с меньшим давлением: $p_2 > p_1$ (теорема Цемплена). Отсюда следует, что плотность газа за фронтом больше плотности перед фронтом.

Формула (20) выражает зависимость между p_2 и ρ_2 при заданных p_1 и ρ_1 . Функция $p_2 = p_2(\rho_2)$ при заданных p_1 и ρ_1 является монотонно возрастающей функцией, стремящейся к конечному пределу при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ (ударная волна большой амплитуды):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (22)$$

Эта формула показывает максимальный скачок плотности (уплотнение), который может существовать на фронте ударной волны. Для двухатомного газа $\gamma = 7/5$ и максимальное уплотнение равно 6:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

Пользуясь равенствами (16'), (17) и (20) и полагая $p_1 = 0$, находим:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Если ударная волна движется по покоящемуся газу ($v_1 = 0$), то скорость распространения ударной волны равна

$$U = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

т. е. она растет пропорционально квадратному корню из p_2 .

Рассмотрим простейшую задачу теории ударных волн, допускающую аналитическое решение. В цилиндрической трубе $x > 0$, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой ($x=0$), находится покоящийся газ с постоянной плотностью ρ_1 и при постоянном давлении p_1 . В начальный момент $t=0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x . Перед поршнем возникает ударная волна, которая в начальный момент совпадает с поршнем, а затем удаляется от него со скоростью $U > v$. Между поршнем и фронтом ударной волны возникает область 2, в которой газ движется со скоростью поршня. Перед фронтом (область 1) газ находится в невозмущенном состоянии: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$ ($v = 0$).

Пользуясь условиями на фронте (16), (17) и (18), нетрудно определить скорость фронта, а также величину скачка, плотности и давления.

Введем безразмерные величины

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \quad (23)$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ — скорость звука перед фронтом (в невозмущенной области 1). Тогда уравнения сохранения запишутся в виде

$$\omega \tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{v}}{1 - \omega}, \quad (24)$$

$$\tilde{p} = 1 + \gamma \tilde{U} \tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{p} = 1 + \gamma \frac{\tilde{v}^2}{1 - \omega}, \quad (25)$$

$$\tilde{p} \omega = 1 + (\gamma - 1) \left(\tilde{U} \tilde{v} - \frac{1}{2} \tilde{v}^2 \right). \quad (26)$$

Исключая отсюда \tilde{p} и \tilde{U} , получаем квадратное уравнение для определения ω :

$$2\omega^2 - \omega [4 + (\gamma + 1) \tilde{v}^2] + [2 + (\gamma - 1) \tilde{v}^2] = 0. \quad (27)$$

Так как по смыслу $\omega < 1$; ($\rho_2 > \rho_1$), то выбираем меньший корень

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma + 1)}{4} \tilde{v}^2 - \tilde{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \tilde{v}^2}. \quad (28)$$

Из уравнений (24) и (28) находим

$$\tilde{U} = \frac{(\gamma + 1)}{4} \tilde{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \tilde{v}^2}, \quad (29)$$

$$\tilde{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \tilde{v}^2 + \gamma \tilde{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \tilde{v}^2}. \quad (30)$$

Возвращаясь к прежним величинам, получаем:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2}}{1 + \frac{(\gamma-1)v^2}{2c_1^2}}, \quad (31)$$

$$U = \frac{\gamma+1}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2}, \quad (32)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\}. \quad (33)$$

Так как скорость ударной волны постоянна, то для положения фронта в момент t будем иметь:

$$x = a(t) = \left\{ \frac{(\gamma+1)}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\} t. \quad (34)$$

В предельном случае $v/c_1 \gg 1$ (ударная волна большой интенсивности) из формул (31)–(33) находим предельные соотношения

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2} v; \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot \frac{v^2}{c_1^2},$$

полученные нами ранее.

Если $v/c_1 \ll 1$ (волна малой интенсивности), то можно пренебречь членами v^2/c_1^2 :

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{v}{c_1} \right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4} v,$$

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma v}{c_1} \right),$$

3. Слабые разрывы. Выше было рассмотрено движение ударной волны, на фронте которой величины ρ , p , v и другие испытывают скачки. Такого рода разрывы называются сильными.

Возможны и такие движения, при которых на некоторой поверхности испытывают скачок первые производные величин ρ , p , v и других, в то время как сами эти величины остаются непрерывными. Такие разрывы называются слабыми.

В § 2, п. 10 рассмотрено движение разрывов такого рода и установлено, что эти разрывы распространяются вдоль характеристик. При этом мы исходили из уравнения акустики. Однако и для нелинейных задач газодинамики справедлив аналогичный результат.

Нетрудно убедиться в том, что поверхность слабого разрыва распространяется относительно газа со скоростью, равной локальной скорости звука. В самом деле, выделим малую окрестность поверхности слабого разрыва и возьмем средние значения гидродинамических величин в этой окрестности. Слабый разрыв, очевидно, можно рассматривать на фоне средних значений как малое возмущение, которое удовлетворяет уравнению акустики и должно распространяться с локальной скоростью звука.

В качестве примера рассмотрим истечение газа в вакуум (волна разрежения). Пусть в начальный момент $t=0$ газ, заполняющий полупространство $x > 0$, покоится и имеет постоянные значения плотности ρ и давления p_0 во всей области $x > 0$. При $t=0$ внешнее давление, приложенное к плоскости $x=0$, снимается, и газ начинает двигаться; при этом возникает слабый разрыв (волна разрежения), распространяющийся со скоростью звука c_0 в положительном направлении оси x . На переднем фронте газа $x=x_1(t)$ при $t=0$ мы имеем разрыв плотности и давления. Однако этот разрыв сразу же после начала движения исчезает.

В самом деле, из условий непрерывности потоков вещества и количества движения при $x=x_1(t)$

$$0 = \rho_1^- (v_1 - v_1^-) = \rho_1^+ (v_1 - v_1^+),$$

$$\rho_1^- + \rho_1^- (v_1 - v_1^-)^2 = \rho_1^+ + \rho_1^+ (v_1 - v_1^+)^2,$$

где ρ_1^- , p_1^- , v_1^- — значения слева в точке $x_1(t)$, ρ_1^+ , p_1^+ , v_1^+ — значения справа в точке $x_1(t)$, получаем

$$\rho_1^+ = 0 \quad \text{и} \quad p_1^+ = 0,$$

так как

$$\rho_1^- = p_1^- = v_1^- = 0.$$

Для адиабатического процесса уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (35)$$

Решения задачи будем искать в форме

$$\rho = \rho(\xi); \quad p = p(\xi); \quad v = v(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = x/t.$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t} \xi \frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi},$$

где $f = \rho$, v или p , и подставляя результаты в уравнения (1) и (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} (v - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho \frac{dv}{d\xi}, \\ (v - \xi) \rho \frac{dv}{d\xi} &= \frac{dp}{d\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Умножим первое уравнение на $(v - \xi)$ и сложим со вторым:

$$(v - \xi)^2 \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi}$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = (v - \xi)^2.$$

Отсюда имеем:

$$v - \xi = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm c,$$

где c — скорость звука при адиабатическом процессе.

Поскольку мы рассматриваем движение слабого разрыва в положительном направлении оси x , надо выбрать в предыдущей формуле знак минус, т. е.

$$v - \xi = -c. \quad (37)$$

Подставляя это решение в уравнения (36), получаем:

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \quad (38)$$

или, что одно и то же,

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho c}.$$

Пользуясь уравнением состояния (35), находим:

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

и после интегрирования уравнения (38)

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} \cdot c_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]. \quad (39)$$

Из последней формулы можно выразить ρ через v :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (40)$$

Здесь

$$c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$$

обозначает скорость звука при $v=0$ (в покоящейся газе). Формулу (39) можно также переписать в виде

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0). \quad (41)$$

Подставляя выражение (40) для ρ в уравнение состояния (35), находим:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (42)$$

Из уравнений (41) и (37) получаем формулу

$$v = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), \quad (43)$$

определяющую зависимость v от x и t . Подставляя затем выражение (43) для v в формулы (40) и (42), получим зависимость ρ и p от x и t в явной форме. Все величины оказываются зависящими от x/t . Если измерять расстояния в единицах, пропорциональных t , то картина движения не меняется. Такое движение называется *автомоделным*.

Найдем скорость движения переднего фронта $v_1(t)$. Полагая в равенстве (42) $p=0$, будем иметь:

$$v_1 = - \frac{2}{\gamma - 1} c_0. \quad (44)$$

Отсюда следует, что скорость истечения газа в пустоту конечна. Для двухатомных газов $\gamma=7/5$ и

$$v_1 = - 5c_0.$$

Выражение (44) для скорости левого фронта $x=x_1(t)$ можно получить также из уравнения баланса вещества

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \quad (45)$$

Вводя переменную

$$\xi = x/t,$$

получим

$$\int_{v_1}^{c_0} \rho \, d\xi = \rho_0 c_0.$$

Подставляя затем выражение для ρ из (40) и полагая

$$1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

Будем иметь:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}} d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (46)$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

После вычисления интеграла (46) получим:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

т. е.

$$\lambda_1 = 0,$$

откуда и следует:

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

Задача об истечении газа в вакуум решена.

Мы ограничились выше рассмотрением лишь наиболее простых задач газодинамики. За более подробным ознакомлением с затронутыми здесь вопросами отсылаем читателя к специальной литературе ¹⁾.

V. Динамика сорбции газов

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа. Рассмотрим задачу о поглощении (сорбции) газа ²⁾. Пусть через трубку (ось которой мы выберем за координатную ось x), заполненную поглощающим веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $a(x, t)$ количество газа, поглощенного единицей объема сорбента, а через $u(x, t)$ — концентрацию газа, находящегося в порах сорбента в слое x .

Напишем уравнение баланса вещества, предполагая, что скорость газа v достаточно велика и процесс диффузии не играет существенной роли в переносе газа. Рассмотрим слой сорбента от x_1 до x_2 в течение промежутка времени от t_1 до t_2 . Очевидно,

¹⁾ См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, гл. I, Гостехиздат, 1963; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, гл. VII, Гостехиздат, 1954; Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946; Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 2, (1946).

²⁾ А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий и Я. Л. Забежинский, Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, ЖФХ, 20, вып. 10 (1946).

для него можно написать уравнение баланса вещества

$$[v u|_{x_1} - v u|_{x_2}] S \Delta t = [(a + u)|_{x_2} - (a + u)|_{x_1}] S \Delta x, \quad (1)$$

которое после сокращения на $\Delta x \Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0 \Delta t \rightarrow 0$ принимает вид

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (a + u). \quad (2)$$

Левая часть этого уравнения представляет количество газа, накапливающегося за счет переноса, рассчитанное на единицу длины и времени, правая часть — количество газа, израсходованного на повышение концентрации сорбированного газа и газа, находящегося в порах. К этому уравнению баланса следует присоединить уравнение кинетики сорбции

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - y), \quad (3)$$

где β — так называемый кинетический коэффициент, y — концентрация газа, находящегося в «равновесии» с сорбированным количеством газа.

Величины a и y связаны друг с другом уравнением

$$a = f(y), \quad (4)$$

являющимся характеристикой сорбента.

Кривая $a = f(y)$ называется изотермой сорбции. Если

$$f(y) = \frac{y u_0}{\gamma (u_0 + p y)},$$

то изотерма называется изотермой Лэнгмюра. Наиболее простой вид функции f соответствует так называемой изотерме Генри, справедливой в области малых концентраций,

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \quad (5)$$

где $1/\gamma$ — коэффициент Генри.

В этом случае мы приходим к следующей задаче:

найти функции $u(x, t)$ и $a(x, t)$ из уравнений

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - \gamma a) \quad (6)$$

при дополнительных условиях

$$\left. \begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u(0, t) = u_0, \quad (8)$$

где u_0 — концентрация газа на входе.

Пренебрегая производной $\frac{\partial u}{\partial t}$, представляющей расход газа на повышение свободной концентрации в порах сорбента, по сравнению с производной $\frac{\partial a}{\partial t}$, представляющей расход газа на увеличение сорбированного количества газа, получаем¹⁾:

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a), \quad (6)$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

Исключим функцию $a(x, t)$, дифференцируя первое уравнение по t и используя второе уравнение

$$-vu_{xt} = \beta u_t - \beta \gamma a_t = \beta u_t + \beta \gamma u_x$$

или

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0.$$

Определим начальное условие для u , полагая в первом уравнении $t = 0$,

$$-vu_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0,$$

откуда находим:

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}.$$

Задача нахождения функции $u(x, t)$ свелась к интегрированию уравнения

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0 \quad (9)$$

при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}, \quad (10)$$

$$u(0, t) = u_0. \quad (8)$$

Характеристиками этого уравнения являются линии

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

Дополнительные условия в этой задаче представляют значения искомой функции $u(x, t)$ на характеристиках. Аналогично

¹⁾ Для системы уравнений (2') и (6) достаточно одного начального условия, так как ось $t = 0$ в этом случае становится характеристикой. Подробнее об этом см. примечание на стр. 168.

ставится задача для функции $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{v} a_t + \beta \gamma a_x = 0, \quad (11)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad (7)$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{v} (1 - e^{-\beta \gamma t}). \quad (12)$$

Следует заметить, что подобная задача встречается при рассмотрении ряда других вопросов (например, процесс сушки воздушным потоком, прогревание трубы потоком воды и т. д.)¹⁾.

Решение уравнения (9) может быть получено в явном виде методом, изложенным в § 5, и дается формулой

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1} \left[e^{-t_1 I_0(2\sqrt{x_1 t_1})} + \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau}) d\tau \right], \quad (13)$$

¹⁾ Переходя к уравнению (2'), мы пренебрегали членом u_t . Однако нетрудно показать, что мы приходим к тому же уравнению, если введем переменные:

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{v}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(рис. 32), в которых время в точке x отсчитывается от $t_0 = x/v$ — момента прихода в эту точку потока газовой смеси. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$-v \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \quad (2'')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \quad (6)$$

Начальные условия (7) и уравнения (2) и (6) дают:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

В области между прямой $t = 0$ и осью ξ мы получаем задачу определения функции u по начальным условиям (7') (задача Коши). Очевидно, что в этой области функция $u(x, t) \equiv 0$ (а также $a \equiv 0$). Из уравнений (2') и (6) видно, что при $\tau = 0$ функция $u(x, t)$ претерпевает разрыв, в то время как функция $a(x, t)$ остается непрерывной. Таким образом, при $\tau = 0$ функция u , как было показано выше, определяется из уравнения (2') при $a(x, 0) = 0$. Определяя, как это было сделано на стр. 167—168 (см. формулы (10) и (12)), значения $u(x, 0)$ и $a(0, t)$, мы получаем для функций $u(x, t)$ и $a(x, t)$ задачи с данными на характеристиках.

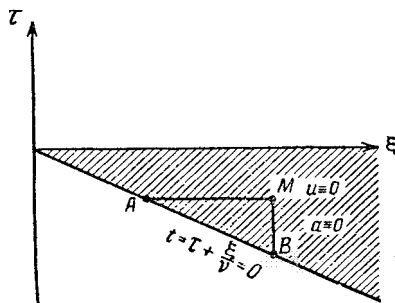


Рис. 32.

где $x_1 = \frac{\beta x}{v}$, $t_1 = \frac{\beta t}{v}$ — безразмерные переменные, I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Пользуясь асимптотическими формулами для функции I_0 , нетрудно получить асимптотическое представление решения при больших значениях аргументов.

2. Асимптотическое решение. Выше мы изучали процесс сорбции газа, подчиняющегося изотерме сорбции Генри, связывающей количество поглощенного вещества a с равновесной концентрацией y линейной зависимостью

$$a = \frac{1}{v} y.$$

Рассмотрим изотерму сорбции общего вида

$$a = f(y).$$

Если ввести безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x\beta}{v}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{v}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0 v},$$

то система (2'), (6), (7), (8) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0 v} f(z u_0) \quad (15)$$

при дополнительных условиях

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \quad (16)$$

$$v(x_1, 0) = 0. \quad (17)$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение функций, представляющих решение системы (14).

Относительно функции $f_1(z)$ мы будем предполагать следующее:

1. $f_1(z)$ — возрастающая функция и $f_1(0) = 0$.

2. $f_1(z)$ имеет непрерывную производную для всех значений z , $0 \leq z \leq 1$.

3. Луч, идущий из начала координат в точку $(1, f_1(1))$, лежит ниже кривой $f_1(z)$ в промежутке $0 \leq z \leq 1$ (рис. 33), что, в частности, имеет место для выпуклой изотермы.

Вводя обозначение для обратной функции

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

будем искать асимптотическое решение поставленной задачи в виде распространяющейся волны¹⁾

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \psi(\xi), \\ \bar{v} &= \varphi(\xi), \quad \xi = x - \sigma t,\end{aligned}\tag{18}$$

где σ — скорость распространения волны, подлежащая определению.

Это означает, что на больших расстояниях (при $x \rightarrow \infty$) или через большой промежуток времени ($t \rightarrow \infty$)

$$v(x, t) = \bar{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \bar{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Концентрации \bar{u} и v должны при $x = \infty$ или $t = \infty$ удовлетворять условию равновесия

$$v = f_1(\bar{u}) \quad \text{или} \quad \bar{u} = F(v).$$

Из условия (16) тогда следует:

$$\bar{u} \Big|_{\substack{x=\infty \\ t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v \Big|_{\substack{x=\infty \\ t=\infty}} = f_1(1).\tag{19}$$

Из условия (17) следует:

$$v \Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u} \Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = F(0) = 0.\tag{20}$$

Условия (19) означают, что при $t \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$) должно установиться всюду насыщение.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнения (14), получим:

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0,\tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi).\tag{22}$$

Из (21) и (20) заключаем, что

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0.\tag{23}$$

Из уравнений (19) тогда следует, что

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} \Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)}\tag{24}$$

или, в размерных величинах,

$$\sigma = \gamma \frac{u_0}{a_0}, \quad a_0 = f(u_0).\tag{24'}$$

¹⁾ Для упрощения записи вместо x_1, t_1 будем писать x, t .

Из (22) и (23) находим:

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \quad (25)$$

После интегрирования будем иметь:

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \quad (26)$$

где $\omega(\varphi)$ — какой-либо интеграл левой части, а ξ_0 — постоянная интегрирования. Отсюда искомая функция $\varphi(\xi)$ определится с точностью до неизвестной постоянной ξ_0 :

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \quad (27)$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \quad (28)$$

Выясним, может ли быть определена функция ω^{-1} и будут ли функции φ и ψ удовлетворять поставленным условиям при $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$. Покажем, что производная

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \quad (29)$$

т. е.

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

— монотонно убывающая функция φ . В самом деле, знаменатель в (29) равен

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

Первое слагаемое есть принадлежащая ординате φ абсцисса точки, лежащей на луче, идущем из начала координат в точку $(1, f_1(1))$ (рис. 33). Так как мы условились, что кривая $\varphi = f_1(z)$ лежит выше этого луча, то

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq f_1(1))$$

и, следовательно,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

Кроме того,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и при} \quad \varphi = f_1(1).$$

Отсюда следует, что

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty \quad \text{при} \quad \varphi = 0,$$

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty \quad \text{при} \quad \varphi = f_1(1).$$

Для обратной функции получаем:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1) \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

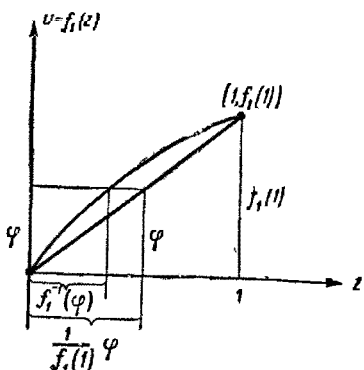
Далее, в силу равенства (29) имеем:

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)} \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)} \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Итак, все условия (19) и (20) удовлетворены, и тем самым доказано, что система уравнений имеет решение в виде распространяющейся волны, содержащей неопределенную постоянную ξ_0 .

Для определения ξ_0 интегрируем первое уравнение по t_1 в пределах от 0 до t_0 и по x в пределах от 0 до x_0 :



$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau) d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau) d\tau \right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0) dx - \int_0^{x_0} v(x, 0) dx \right] = 0. \quad (30)$$

Рис. 33.

Полученное равенство выражает закон сохранения вещества. Переходя к пределу при $x_0 \rightarrow \infty$ и пользуясь начальными условиями для \bar{u} и v , находим:

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau) d\tau = t_0.$$

Допустим, что для больших значений t решение нашей задачи приближается к функциям \bar{u} и \bar{v} , найденным выше в виде распространяющихся волн.

Если мы определим ξ_0 из условия

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty), \quad (31)$$

то это и будет то значение ξ_0 , которое соответствует функциям $\bar{u}(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$.

Преобразуем наш интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{v}(x, t_0) dx &= \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0) dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0) dx = \\ &= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi \quad \left(\begin{array}{l} \xi = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \xi_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Обозначим через φ^* значение $\omega^{-1}(\xi)$ при $\xi = 0$:

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi = \omega^{-1}(\xi)$ — обратная функция для $\xi = \omega(\varphi)$, то (рис. 34)

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^0 \omega^{-1}(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \\ &= \left[-\xi_1 \omega^{-1}(\xi_1) + \int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\xi_1)} \omega(\varphi) d\varphi + \int_0^{\varphi^*} \omega(\varphi) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует, что вместо предельного равенства (31) можно написать:

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi - t_0 &= \\ &= \left\{ (\sigma t_0 + \xi_0) \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \int_0^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi) d\varphi \right\} - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (32')$$

Перейдем к пределу при $t_0 \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sigma \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) \rightarrow \sigma \varphi(-\infty) = \sigma f_1(1) = 1. \quad (32'')$$

Чтобы вычислить предел выражения

$$\sigma t_0 \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

воспользуемся уравнением (25). Разлагая $f_1^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ в ряд вблизи точки $\varphi_0 = f_1(1)$, получим:

$$\begin{aligned} \sigma \varphi - F(\varphi) &= \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) = \\ &= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] = [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots} = d\xi, \quad (33)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка относительно $(\varphi - \varphi_0)$.

Из требования 3 для функции f_1 следует, что

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

Из уравнения (33) находим порядок роста φ при $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\varphi = A e^{k\xi} + \varphi_0, \quad (34)$$

где A и $k > 0$ — некоторые постоянные.

Из (34) следует, что

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 [\sigma \varphi (-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 A \sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \quad (32'')$$

Совершая в формуле (32') предельный переход при $t_0 \rightarrow \infty$ и принимая во внимание (32'') и (32'''), получаем:

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi) d\varphi. \quad (35)$$

Тем самым профили волны $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ определены полностью.

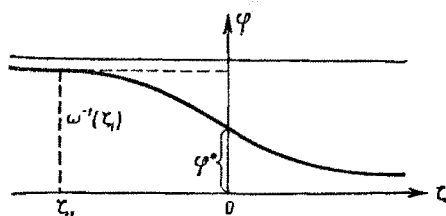


Рис. 34.

Особый интерес представляет случай изотермы Лэнгмюра. Найдем асимптотическое решение для процесса сорбции газа, подчиняющегося изотерме Лэнгмюра.

Уравнение (25) примет вид

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \frac{\varphi}{1-p\varphi}} = d\xi, \quad (36)$$

где $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ — скорость волны. Из (36) находим:

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) &= \sigma \int \frac{(1-p\varphi) d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1-p\varphi)} + A = \\ &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln(\sigma-1-p\sigma\varphi) - \ln\varphi \right] + A. \end{aligned}$$

Очевидно, что когда φ меняется от 0 до $f_1(1)$, то $\omega(\varphi)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Выберем A так, чтобы

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

т. е. чтобы

$$\omega(\varphi^*) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+p}.$$

При этом условии

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{1}{2} p \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+p} \right) \right]$$

и

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln 2 (1 - \sigma\varphi) - \ln 2 (1 + p) \varphi \right].$$

Значение ξ_0 определяется формулой

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi) d\varphi = \ln 2 - 1$$

и не зависит от $p = u_0/y$, т. е. от подаваемой концентрации.

Искомое асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \bar{u}(x, t) &= \sigma \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \quad (37)$$

где $\omega^{-1}(\xi)$ — обратная для $\omega(\varphi)$ функция.

На рис. 35 приведены результаты численного интегрирования уравнений (14) для изотермы Лэнгмюра методом конечных

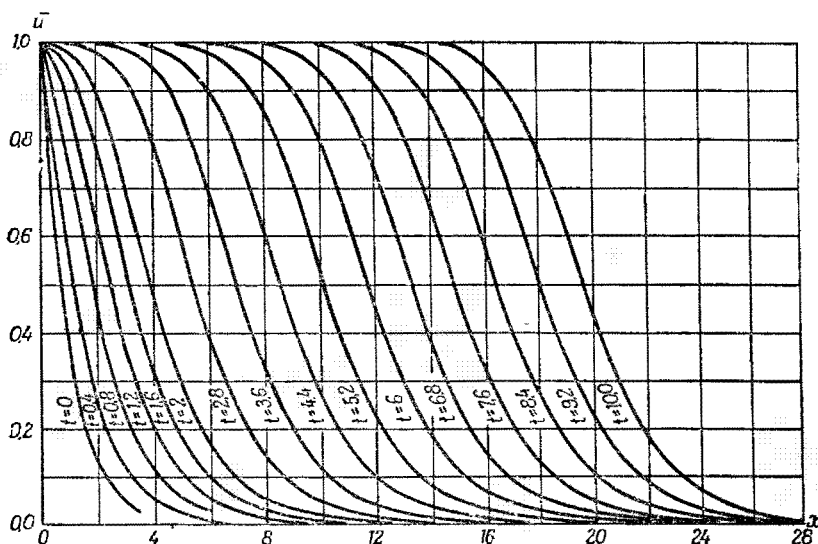


Рис. 35.

разностей. Эти графики даны для значений $0 < t \leq t_1 = 10$. При $t = t_1$ результаты численного интегрирования совпадают с асимптотическим решением с точностью до 1%. Для значений $t > t_1$ можно пользоваться асимптотическими формулами.

VI. Физические аналогии

При рассмотрении явлений в различных областях физики мы часто обнаруживаем общие черты в этих явлениях. Это приводит к тому, что при математической формулировке задачи мы получаем одни и те же уравнения, описывающие различные физические явления. Простейшим примером может служить уравнение

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0,$$

описывающее различные колебательные процессы простейших систем: математический маятник, колебание груза под действием силы упругости пружины, электрические колебания в простом контуре с индуктивностью и емкостью и т. д. Общность уравнений для различных физических процессов позволяет на основании изучения свойств одного явления делать заключение о свойствах другого, менее изученного явления. Так, изучение различных акустических явлений может быть значительно облегчено предварительным рассмотрением подобных электрических схем.

Распространение электрических колебаний в системах с распределенными постоянными описывается, как известно, телеграфными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где C , G , L , R — распределенные емкости, утечка, индуктивность и сопротивление системы. Если можно пренебречь сопротивлением и утечкой тока, то для V и I получаются обычные волновые уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

а уравнения (1) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При решении задачи о распространении звука в одном направлении, например, при изучении движения воздуха в трубах, мы

приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где v — скорость колеблющихся частиц, ρ — плотность, p — давление, а $\tau = \rho_0 \gamma$ — коэффициент упругости воздуха.

Подобие уравнений (2) и (3) позволяет установить соответствие между акустическими и электрическими величинами. Разности потенциалов соответствует давление, току — скорость смещения частиц. Плотность, определяющая инерционные свойства газа, соответствует индуктивности электрической цепи, а емкости электрической цепи соответствует $1/\tau$, т. е. обратная величина коэффициента упругости. Это же соответствие можно установить и из выражений кинетической и потенциальной энергий для электрической и акустической систем.

Возвращаясь к уравнениям (1), мы можем ввести акустические аналоги сопротивления и утечки. Величину акустического сопротивления приходится учитывать в тех случаях, когда при рассмотрении движения газа оказывается существенным трение газа о стенки сосуда. По аналогии с электрическим сопротивлением, которое определяется как отношение напряжения к току, можно ввести и акустическое сопротивление, определяемое отношением давления к току в среде, который пропорционален скорости смещения частиц газа, $R_A = p/uv$. В тех случаях, где рассматривается движение газа в пористой среде, приходится вводить величину, аналогичную утечке в электрических цепях. Эта величина, обозначаемая через P , называется пористостью и определяется частью объема материала, которая оказывается заполненной воздухом.

Механическим аналогом телеграфного уравнения является уравнение продольных колебаний стержня, которое подобно уравнениям (2) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

где T — натяжение стержня, v — скорость колеблющихся точек, ρ — плотность и k — коэффициент упругости стержня.

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), мы можем установить подобие между механическими и электрическими величинами. Так, устанавливая соответствие между электрическим напряжением и натяжением струны, током и скоростью движения частиц, мы получим, что обратная величина коэффициента упругости соответствует емкости, а плотность — индуктивности.

Таким образом, рассмотрение подобных динамических задач приводит к установлению соответствия между рядом электрических акустических и механических величин. Это соответствие можно иллюстрировать следующей таблицей ¹⁾:

	Электрическая система		Акустическая система		Механическая система	
Переменные	Напряжение	V	Давление	p	Натяжение (сила)	T
	Ток	I	Скорость частиц	v	Скорость смещения	\dot{x}
	Заряд	e	Смещение	u	Смещение	x
Параметры	Индуктивность	L	Инертность (плотность)	ρ	Плотность массы	ρ_m
	Емкость	C	Акустическая емкость $C_A = 1/\tau$		Мягкость	$C_M = 1/k$
	Сопротивление	R	Акустическое сопротивление	R_A	Механическое сопротивление	R_M

Развитые выше соображения позволяют в ряде акустических задач получить некоторые сведения о характере явлений до решения задачи.

Так, задача о движении воздуха в порах для простых гармонических волн приводит к уравнениям²⁾

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\text{grad } p,$$

$$\Delta p + i \frac{\gamma P \omega}{\rho c^2} (r - i\omega\rho_m) p = 0,$$

где u — объемная скорость воздуха через поры, p — давление, ρ — плотность, ρ_m — эффективная плотность воздуха в порах, которая может быть больше ρ , так как в порах вместе с воздухом могут колебаться и частицы вещества, P — пористость, c и ω — скорость и частота звука, r — сопротивление потоку, которое характеризует падение давления в материале. Положив $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$, мы получим наши уравнения в виде

$$L_A \frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\text{grad } p,$$

$$C_A L_A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

¹⁾ См., например, Г. Ольсон, Динамические аналогии, ИЛ, 1947.

²⁾ См. В. В. Фурдуев, Электроакустика, Гостехиздат, 1948.

Эти уравнения вполне подобны уравнениям распространения электрических колебаний в линии. Поэтому мы по аналогии с волновым сопротивлением линии

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

можем сразу написать выражение для сопротивления, называемого характеристическим импедансом пористого материала

$$Z = c \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{\rho_w - i \frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

считая при этом $G = 0$. Выражение характеристического импеданса указывает на затухание волн, распространяющихся в пористом материале.

Установленная аналогия между электрическими и акустическими явлениями позволяет заменить изучение ряда акустических задач рассмотрением эквивалентных электрических схем.

Метод подобия в последнее время нашел большое применение в моделирующих счетно-решающих устройствах, в которых для решения уравнения, соответствующего какому-либо физическому процессу, строится эквивалентная электрическая схема.

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач

1. Линейная задача о распространении тепла. Рассмотрим однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2 , то, как хорошо известно, вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры (рис. 36)

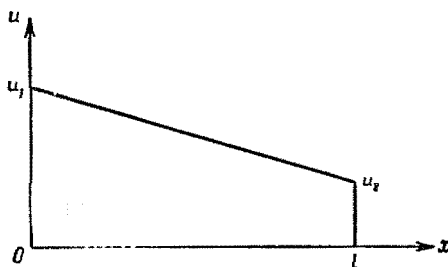


Рис. 36.

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет перетекать тепло. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площади S за единицу времени, дается экспериментальной формулой

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (2)$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x .

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t . Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением тепла.

1. Закон Фурье. Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t + dt)$, равно

$$dQ = qS dt, \quad (3)$$

где

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

— плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекающего в единицу времени через площадь в 1 см^2 . Этот закон представляет обобщение формулы (2). Ему можно также придать интегральную форму

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt, \quad (5)$$

где Q — количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x . Если стержень неоднороден, то k является функцией x .

2. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu , равно

$$Q = cm \Delta u = c\rho V \Delta u, \quad (6)$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, ρ — его плотность, V — объем.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \Delta u(x) dx. \quad (7)$$

3. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть характеризовано

плотностью тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t^1). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x + dx)$ за промежуток времени $(t, t + dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t) dx dt \quad (8)$$

или в интегральной форме

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (9)$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) .

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) . Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5), (7) и (9), можно написать равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi, \quad (10) \end{aligned}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t ²⁾.

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\begin{aligned} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \{c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_3} \Delta x, \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ Если, например, тепло выделяется в результате прохождения электрического тока силы I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R , то $F = 0,24 \cdot I^2 R$.

²⁾ Требуя дифференцируемости функций $u(x, t)$, мы, вообще говоря, можем потерять ряд возможных решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако в случае уравнений теплопроводности, требуя дифференцируемости решения, мы фактически не теряем возможных решений, так как можно доказать, что если функция удовлетворяет уравнению (10), то она обязательно должна быть дифференцируема.

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_1}} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_5}} \Delta x \Delta t, \quad (12)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2) .

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x \Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_3 \\ t=t_1}} + F(x, t) \Big|_{\substack{x=x_4 \\ t=t_1}} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_5 \\ x=x_3}}. \quad (13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2) . Переходя к пределу при $x_1, x_2 \rightarrow x$ и $t_1, t_2 \rightarrow t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

называемое уравнением теплопроводности.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

где a^2 — постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности. Если источники отсутствуют, т. е. $F(x, t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (14')$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, теряемого стержнем¹⁾, рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \theta),$$

¹⁾ Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников тепла.

где $\theta(x, t)$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \quad (15)$$

где $F_1(x, t)$ — плотность других источников тепла.

Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

где $\alpha = \frac{h}{c\rho}$; $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ — известная функция.

3. Коэффициенты k и c , как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t}$$

(см. приложение III).

2. **Уравнение диффузии.** Если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме не постоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полый трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t .

Согласно закону Нернста масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, равна

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S dt = W S dt,$$

$$W = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (16)$$

где D — коэффициент диффузии, S — площадь сечения трубки, $W(x, t)$ — плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени через единицу площади.

По определению концентрации, количество газа в объеме V равно

$$Q = uV;$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки (x_1, x_2) при изменении концентраций на Δu равно

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta u \cdot S dx,$$

где $c(x)$ — коэффициент пористости¹⁾.

Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau = \\ = S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, подобно п. 1, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (17)$$

являющееся уравнением диффузии. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности. При выводе этого уравнения мы считали, что в трубке нет источников вещества и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учет этих явлений приводит к уравнениям, сходным с уравнениями (14) и (15) (см. гл. VI, § 2, п. 3).

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{где } a^2 = D/c.$$

Если коэффициент пористости $c = 1$, а коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx}.$$

3. Распространение тепла в пространстве. Процесс распространения тепла в пространстве может быть characterized температурой $u(x, y, z, t)$ являющейся функцией x, y, z и t .

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой.

¹⁾ Коэффициентом пористости называется отношение объема пор к полному объему V_0 , равному в нашем случае $S dx$.

Пусть $d\sigma$ — некоторая площадка в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ с нормалью \mathbf{n} . Количество тепла, протекающее через $d\sigma$ в единицу времени, согласно закону Фурье, равно

$$W_n d\sigma = (\mathbf{W}\mathbf{n}) d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

где k коэффициент теплопроводности, $\partial u / \partial n$ — производная по направлению нормали \mathbf{n} к $d\sigma$, равная

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = (\text{grad } u, \mathbf{n}).$$

Закон Фурье часто записывают в форме

$$\mathbf{W} = -k \text{grad } u,$$

где \mathbf{W} — вектор плотности теплового потока.

Если среда изотропная, то k есть скаляр. В случае анизотропной среды k есть тензор, а вектор теплового потока \mathbf{W} представляет собой произведение тензора k на вектор $-\text{grad } u$. Мы будем рассматривать только изотропные среды.

Перейдем к выводу уравнения теплопроводности в пространстве.

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Уравнение баланса тепла для объема V за время $\Delta t = t_2 - t_1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \iiint_V c_p [u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_P = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint_V F(P, t) dV_P \right), \quad (18) \end{aligned}$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка интегрирования, $dV_P = d\xi d\eta d\zeta$ — элемент объема, c_p — теплоемкость единицы объема, W_n — нормальная составляющая плотности теплового потока. Это уравнение выражает закон сохранения тепла в объеме V за время Δt : изменение количества тепла в объеме V за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (левая часть в (18)) обусловлено потоком тепла через граничную поверхность S (первое слагаемое в правой части равенства (18)), а также количеством тепла, выделившимся в объеме V за время Δt в результате действия тепловых источников.

Чтобы перейти от интегрального уравнения баланса к дифференциальному уравнению, предположим, что $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ дважды дифференцируема по x, y, z и один раз по t и что эти производные непрерывны в рассматриваемой об-

ласти. Тогда можно воспользоваться формулой Остроградского

$$\int_S W_n d\sigma = \int_V \int_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV$$

и преобразовать уравнение баланса к виду

$$\begin{aligned} \int_V \int_V c\rho [u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_P = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \int_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \int_V F(P, t) dV_P dt. \end{aligned}$$

(Будем предполагать $F(P, t)$ непрерывной функцией своих аргументов.)

Применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_2 \\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = - \operatorname{div} \mathbf{W} \Big|_{\substack{t=t_1 \\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F \Big|_{\substack{t=t_1 \\ P=P_2}} \Delta t \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 — промежуточные точки на интервале Δt , а P_1, P_2, P_3 — точки в объеме V . Фиксируем некоторую точку $M(x, y, z)$ внутри V и будем стягивать V в эту точку, а Δt стремиться к нулю. После сокращения на $\Delta t V$ и указанного предельного перехода получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = - \operatorname{div} \mathbf{W}(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

Заменяя \mathbf{W} по формуле $\mathbf{W} = -k \operatorname{grad} u$, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F.$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

где $a^2 = k/c\rho$ — коэффициент температуропроводности, или

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho} \right),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

4. Постановка краевых задач. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0 .

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leq t \leq T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$, где $v(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)],$$

где $\lambda = h/k$ — коэффициент теплообмена, $\theta(t)$ — некоторая заданная функция. Для конца $x = 0$ стержня $(0, l)$ третье граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ могут быть разных типов, так что число различных задач велико.

Первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи с различными комбинациями краевых условий при $x = 0$ и $x = l$. Возможны краевые условия более сложного типа, чем те, которые были рассмотрены выше.

Пусть, например, на конце $x = 0$ стержня помещена сосредоточенная теплоемкость C_1 (например, тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной) и происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Тогда краевое условие при $x = 0$ (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

где u_0 — температура внешней среды. Это условие содержит производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ (или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если учесть уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$).

Если среда неоднородна и коэффициенты уравнения являются разрывными функциями, то промежуток $(0, l)$, в котором ищется решение задачи, разбивается точками разрыва коэффициентов на несколько частей, внутри которых функция u удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах — условиям сопряжения.

В простейшем случае эти условия заключаются в непрерывности температуры и непрерывности теплового потока

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

где x_i — точки разрыва коэффициентов.

Кроме названных здесь задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка; в задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющее условию

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leq x < \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня:

найти решения уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t_0 \leq t$, удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0, t) &= \mu(t) \quad (t \geq t_0), \end{aligned} \right\}$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ — заданные функции.

Приведенные выше задачи представляют собой предельный случай (вырождение) основных краевых задач. Возможны предельные случаи основной задачи и другого типа, когда пренебрегают точным учетом начальных условий. Влияние начальных условий при распространении температуры по стержню ослабевает с течением времени. Если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то температура стержня практически определяется граничными условиями, так как изменение начальных условий не изменило бы температурного состояния стержня в пределах точности наблюдения. В этом случае практически можно считать, что опыт продолжался бесконечно долго, и начальные условия тем самым отпадают.

Таким образом, мы приходим к краевым задачам без начальных условий, когда ищется решение уравнения теплопроводности для $0 \leq x \leq l$ и $-\infty < t$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

В зависимости от характера граничного режима возможны и другие виды задач без начальных условий.

Весьма важной является задача без начальных условий для полубесконечного стержня ($l = \infty$), когда требуется найти решение уравнения теплопроводности для $0 < x < \infty$, $t > -\infty$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — заданная функция.

Наиболее часто встречаются задачи без начальных условий при периодическом граничном режиме

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(см. приложение I к гл. III).

Естественно считать, что по прошествии большого промежутка времени температура стержня практически также меняется по периодическому закону с той же частотой. Однако, если мы захотим точно учитывать начальные условия, то формально никогда не получим периодического решения, так как влияние начальных условий, хотя и будет ослабевать с течением времени, но в нуль не обратится; учитывать это влияние ввиду ошибок наблюдения нет никакого смысла. Рассматривая периодическое решение, мы пренебрегаем влиянием начальных данных.

Постановка краевых задач, изложенная выше, относится, конечно, не только к уравнению с постоянными коэффициентами. Под словами «уравнение теплопроводности» мы могли бы понимать любое из уравнений предыдущих пунктов.

Помимо перечисленных выше линейных краевых задач, ставятся также задачи с нелинейными граничными условиями, например, вида

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)].$$

Это граничное условие соответствует излучению по закону Стефана — Больцмана с торца $x = 0$ в среду с температурой $\theta(t)$. Остановимся более подробно на постановке краевых задач. Рассмотрим первую краевую задачу для ограниченной области.

Решением первой краевой задачи будем называть функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, t)$ определена и непрерывна в замкнутой области

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

2) $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u(x, t)$ удовлетворяет начальному и граничным условиям, т. е.

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) [=u(0, t_0)] \quad \text{и} \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) [=u(l, t_0)],$$

необходимым для непрерывности $u(x, t)$ в замкнутой области.

Рассмотрим плоскость фазовых состояний (x, t) (рис. 37). В нашей задаче ищется функция $u(x, t)$, определенная внутри

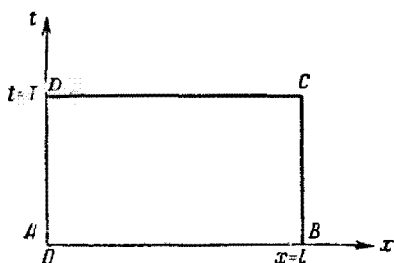


Рис. 37

прямоугольника $ABCD$. Эта область определяется самой постановкой задачи, так как изучается процесс распространения тепла в стержне $0 \leq x \leq l$ за промежуток времени $t_0 \leq t \leq T$, в течение которого нам известен тепловой режим на краях. Пусть $t_0 = 0$; мы предполагаем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению только при $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, но не при $t = 0$ (сторона AB)

и не при $x = 0$, $x = l$ (стороны AD и BC), где начальными и граничными условиями непосредственно задаются значения этой функции. Если бы мы потребовали, чтобы уравнение удовлетворялось, например, при $t = 0$, то этим мы потребовали бы, чтобы существовала производная $\varphi'' = u_{xx}(x, 0)$, входящая в уравнение. Этим требованием мы ограничили бы область изучаемых физических явлений, исключив из рассмотрения те функции, для которых это требование не выполняется. Условие 3) без предположения непрерывности $u(x, t)$ в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ (т. е. в замкнутом прямоугольнике $ABCD$) или какого-либо другого условия, заменяющего это предположение, теряет смысл¹⁾. Действительно, рассмотрим

¹⁾ Ниже будут рассмотрены краевые задачи с разрывными граничными и начальными условиями. Для этих задач будет уточнено, в каком смысле понимается выполнение граничных условий.

функцию $v(x, t)$, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= C & (0 < x < l, \quad 0 < t \leq T), \\ v(x, 0) &= \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \\ v(0, t) &= \mu_1(t), \\ v(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v(x, t) &= C \\ v(x, 0) &= \varphi(x) \\ v(0, t) &= \mu_1(t) \end{aligned}} \right\} (0 \leq t \leq T),$$

где C — произвольная постоянная. Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет условию 2), а также граничным условиям. Однако эта функция не представляет процесса распространения температуры в стержне при начальной температуре $\varphi(x) \neq C$ и граничных температурах $\mu_1(t) \neq C$ и $\mu_2(t) \neq C$, так как она разрывна при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

Непрерывность функции $u(x, t)$ при $0 < x < l$, $0 < t \leq T$ следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению. Таким образом, требование непрерывности $u(x, t)$ при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$; по существу относится только к тем точкам, где задаются граничные и начальные значения. В дальнейшем мы под словами «решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям», будем подразумевать функцию, удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3), не оговаривая эти условия каждый раз, если в этом нет специальной необходимости.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи, в том числе задачи на бесконечном стержне и задачи без начальных условий.

Для задач с несколькими независимыми геометрическими переменными все сказанное выше сохраняет силу. В этих задачах при $t = t_0$ задается начальная температура, на поверхности тела — граничные условия. Можно рассматривать также и задачи для бесконечной области.

В отношении каждой из поставленных задач возникают следующие вопросы ¹⁾:

- 1) единственность решения поставленной задачи,
- 2) существование решения,
- 3) непрерывная зависимость решения от дополнительных условий.

Если поставленная задача имеет несколько решений, то слова «решение задачи» не имеют определенного смысла. Поэтому прежде чем говорить о решении задачи, необходимо доказать его единственность. Для практики наиболее существенным является вопрос 2), так как при доказательстве существования решения обычно дается способ вычисления решения.

¹⁾ Ср. с гл. II, § 2.

Как было отмечено ранее (см. главу II, § 2, п. 5) процесс называется физически определенным, если при малом изменении начальных и граничных условий задачи ее решение меняется мало. В дальнейшем будет доказано, что процесс распространения тепла физически определяется своими начальными и граничными условиями, т. е. небольшое изменение начального и граничных условий мало изменяет и само решение.

5. Принцип максимального значения. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение с постоянными коэффициентами

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

Как мы видели, это уравнение подстановкой

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u \quad \text{при} \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

приводится к виду

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Докажем следующее свойство решений этого уравнения, которое мы будем называть принципом максимального значения.

Если функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq x \leq l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (19)$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x, t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$, или $x = l$.

Функция $u(x, t) = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности и достигает своего максимального (минимального) значения в любой точке. Однако это не противоречит теореме, так как из ее условия следует, что если максимальное (минимальное) значение достигается внутри области, то оно также (а не только) должно достигаться или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура на границе и в начальный момент не превосходит некоторого значения M , то при отсутствии источников внутри тела не может создаться температура, большая M . Остановимся сначала на доказательстве теоремы для максимального значения.

Доказательство теоремы ведется от противного. Обозначим через M максимальное значение $u(x, t)$ при $t = 0$ ($0 \leq x \leq l$) или при $x = 0$, или при $x = l$ ($0 \leq t \leq T$)¹⁾ и допустим, что

¹⁾ Если не предполагать непрерывности $u(x, t)$ в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, то функция $u(x, t)$ могла бы не достигать своего максимума ни в одной точке, и дальнейшие рассуждения были бы неприменимы.

в некоторой точке (x_0, t_0) ($0 < x_0 < l$, $0 < t_0 \leq T$) функция $u(x, t)$ достигает своего максимального значения, равного

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (19) в точке (x_0, t_0) . Так как в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то необходимо должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0^1). \quad (20)$$

Далее, так как $u(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t = t_0$, то²⁾

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0. \quad (21)$$

Сравнивая знаки правой и левой части уравнения (19), мы видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, так как правая и левая части могут быть равны нулю, что не влечет за собой противоречия. Мы привели это рассуждение, чтобы яснее выделить основную идею доказательства. Для полного доказательства найдем точку (x_1, t_1) , в которой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (22)$$

нимы. В силу теоремы о том, что всякая непрерывная функция достигает своего максимального значения в замкнутой области, мы можем быть уверены, что: 1) функция $u(x, t)$ достигает максимального значения на нижней или боковых сторонах прямоугольника, которое мы обозначили через M ; 2) если $u(x, t)$ хотя бы в одной точке больше M , то существует точка (x_0, t_0) , в которой $u(x, t)$ достигает максимального значения, превосходящего M :

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

причем

$$0 < x_0 < l, \quad 0 < t_0 \leq T.$$

¹⁾ Действительно, как известно из анализа, достаточными условиями для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 , лежащей внутри интервала $(0, l)$, имела относительный минимум, являются следующие условия: $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} > 0$. Таким образом, если $f(x)$ в точке x_0 имеет максимальное значение, то 1) $f'(x_0) = 0$ и 2) не может быть, чтобы $f''(x_0) > 0$, т. е. $f''(x_0) \leq 0$.

²⁾ При этом ясно, что если $t_0 < T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, если же $t_0 = T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$.

где k — некоторое постоянное число. Очевидно, что

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

и

$$k(t_0 - t) \leq kT.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $\varepsilon/2$, т. е. $k < \varepsilon/2T$; тогда максимальное значение $v(x, t)$ при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{при } t = 0 \text{ или } x = 0, \text{ или } x = l), \quad (23)$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (22) не превосходит M , а второе $-\varepsilon/2$.

В силу непрерывности функции $v(x, t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0$, $x = l$ имеет место неравенство (23). В точке (x_1, t_1) , по аналогии с (20) и (21), должно быть $v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$, $v_t(x_1, t_1) \geq 0$. Учитывая (22), находим:

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0,$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geq k > 0.$$

Отсюда следует, что

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geq k > 0,$$

т. е. уравнение (19) во внутренней точке (x_1, t_1) не удовлетворяется. Тем самым доказано, что решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности (19) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $u(x, t)$ на границе (т. е. при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Аналогично может быть доказана и вторая часть теоремы о минимальном значении. Впрочем, это не требует отдельного доказательства, так как функция $u_1 = -u$ имеет максимальное значение там, где u — минимальное.

Обратимся теперь к установлению ряда следствий из принципа максимального значения. Прежде всего докажем теорему единственности для первой краевой задачи.

6. Теорема единственности. Если две функции, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные и непрерывные в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{для } 0 < x < l, t > 0), \quad (24)$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ ¹⁾.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Поскольку функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ непрерывны при

$$0 \leq x \leq l,$$

$$0 \leq t \leq T,$$

то и функция $v(x, t)$, равная их разности, непрерывна в этой же области. Как разность двух решений уравнения теплопроводности в области $0 < x < l, t > 0$, функция $v(x, t)$ является решением однородного уравнения теплопроводности в этой области. Таким образом, принцип максимального значения применим к этой функции, т. е. она достигает своего максимального и минимального значений или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$. Однако по условию мы имеем:

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \equiv 0,$$

т. е.

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

Докажем еще ряд прямых следствий из принципа максимального значения. При этом в дальнейшем мы будем говорить просто «решение уравнения теплопроводности» вместо более подробного перечисления свойств функций, удовлетворяющих, кроме того, начальным и граничным условиям.

1. Если два решения уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0),$$

$$u_1(0, t) \leq u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leq u_2(l, t),$$

то

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$$

для всех значений $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$.

¹⁾ В п. 3, § 2 эта теорема будет усилена и требование непрерывности при $t = 0$ снято.

Действительно, разность $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ удовлетворяет условиям, при которых установлен принцип максимального значения, и, кроме того,

$$v(x, 0) \geq 0, \quad v(0, t) \geq 0, \quad v(l, t) \geq 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \geq 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

так как иначе функция $v(x, t)$ имела бы отрицательное минимальное значение в области

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T.$$

2. Если три решения уравнения теплопроводности

$$u(x, t), \quad \underline{u}(x, t), \quad \bar{u}(x, t)$$

удовлетворяют условиям

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \quad \text{при} \quad t=0, \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l,$$

то эти же неравенства выполняются тождественно, т. е. для всех x, t при $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$.

Это утверждение является применением следствия 1 к функциям

$$u(x, t), \quad \bar{u}(x, t) \quad \text{и} \quad \underline{u}(x, t), \quad u(x, t).$$

3. Если для двух решений уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ имеет место неравенство

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon \quad \text{для} \quad t=0, \quad x=0, \quad x=l,$$

то

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon$$

тождественно, т. е. имеет место для всех x, t

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Это утверждение вытекает из следствия 2, если его применить к решениям уравнения теплопроводности

$$\underline{u}(x, t) = -\epsilon,$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

$$\bar{u}(x, t) = \epsilon.$$

Следствие 3 позволяет установить непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от начального и граничных значений. Если мы в некоторой физической задаче вместо решения уравнения теплопроводности, соответствующего начальному и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

возьмем решение $u(x, t)$, соответствующее другим начальному и граничным значениям, определяемым функциями $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$, не отличающимися в пределах заданной степени точности ϵ от функций $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \epsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leq \epsilon, \quad |\mu_2(t) - \mu_2^*(t)| \leq \epsilon,$$

то функция $u_1(x, t)$ будет отличаться от функции $u(x, t)$ в пределах той же точности ϵ

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leq \epsilon.$$

В этом и заключается принцип физической определенности задачи.

Мы подробно провели изучение вопроса о единственности и физической определенности задачи на примере первой краевой задачи для ограниченного отрезка. Теорема единственности первой краевой задачи для ограниченной области в пространстве двух или трех измерений может быть доказана буквальным повторением приведенных выше рассуждений.

Подобные же вопросы возникают при изучении других задач, целый ряд которых был поставлен нами в предшествующем параграфе. Эти задачи требуют некоторого видоизменения метода доказательства.

Единственность решения задачи для неограниченной области (см. п. 7) или задачи без начальных условий имеет место лишь при наложении некоторых дополнительных условий на изучаемые функции.

7. Теорема единственности для бесконечной прямой. При решении задачи на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т. е. существование такого M , что $|u(x, t)| < M$ для всех $-\infty < x < +\infty$ и $t \geq 0$.

Если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — непрерывные, ограниченные во всей области изменения переменных (x, t) функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (19)$$

и условию

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0).$$

Рассмотрим, как обычно, функцию

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Функция $v(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, ограничена во всей области

$$|v(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$$

и удовлетворяет условию

$$v(x, 0) = 0.$$

Принцип максимального значения, которым мы пользовались при доказательстве единственности задачи для отрезка, здесь неприменим, так как в неограниченной области функция $v(x, t)$ может нигде не достигать максимальных значений. Чтобы воспользоваться этим принципом, рассмотрим область

$$|x| \leq L,$$

где L — вспомогательное число, которое затем будем неограниченно увеличивать, и функцию

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (25)$$

Функция $V(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, и кроме того, обладает следующими свойствами:

$$V(x, 0) \geq |v(x, 0)| = 0,$$

$$V(\pm L, t) \geq 2M \geq |v(\pm L, t)|. \quad (26)$$

Для ограниченной области $|x| \leq L$, $0 \leq t \leq T$ справедлив принцип максимального значения. Применяя следствие 2 из предыдущего пункта для функции $\underline{u} = -V(x, t)$, $\underline{u} = v(x, t)$ и $\bar{u} = V(x, t)$ и учитывая (26), получаем:

$$-\frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Фиксируем некоторые значения (x, t) и, воспользовавшись произволом выбора L , будем его неограниченно увеличивать. Переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$, получим:

$$v(x, t) \equiv 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения следующей простейшей задачи I:

найти непрерывное в замкнутой области ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$) решение однородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (5)$$

и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (6)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x , $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на $a^2 X T$, получим:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (7)$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t , а правая — только от x .

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (8')$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (10)$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II (см. § 3, п. 1). При этом было показано, что только для значений параметра λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12)$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (13)$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (15)$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (16)$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентами C_n , определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что

функция $u(x, t)$, определяемая рядом (15), дифференцируема, удовлетворяет уравнению в области $0 < x < l$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t (см. лемму главы II, § 3, п. 3). Покажем, что при $t \geq \bar{t} > 0$ (\bar{t} — любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. В самом деле,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|C_n| = \left| \frac{2}{l} \right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right| < 2M,$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad \text{для} \quad t \geq \bar{t}$$

и аналогично

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad \text{для} \quad t \geq \bar{t}.$$

Вообще

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \quad \text{для} \quad t \geq \bar{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где

$$\alpha_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 \bar{t}}. \quad (15')$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2 + 2n + 1) \bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 \bar{t}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1) \bar{t}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15) любое число раз в области $t \geq \bar{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция, определенная этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности \bar{t} это имеет место для всех $t > 0$. Тем самым доказано, что при $t > 0$ ряд (15) представляет функцию, дифференцируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4) ¹⁾.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, то ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (15)$$

определяет непрерывную функцию при $t \geq 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (\text{при } t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ²⁾.

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

¹⁾ При доказательстве того, что ряд (15) удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $t > 0$, была использована только ограниченность коэффициентов Фурье C_n , которая, в частности, будет иметь место для любой ограниченной $\varphi(x)$.

²⁾ См. гл. II, § 3, п. 3.

2. Функция источника. Преобразуем полученное решение (15), заменяя C_n их значениями:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t > 0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t > 0^1$).

Обозначим

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (18)$$

Пользуясь функцией $G(x, \xi, t)$, можно представить функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется функцией мгновенного точечного источника или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Покажем, что функция источника $G(x, \xi, t)$, рассматриваемая как функция x , представляет распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ в момент времени t , если температура в начальный момент $t = 0$ равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется некоторое количество тепла (величину которого мы определим позже), а на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Выражение «количество тепла Q , выделяющееся в точке ξ » обозначает, как обычно, что мы имеем дело с теплом, выделяющимся на «небольшом» интервале около изучаемой точки ξ .

¹⁾ Ряд $\sum \alpha_n$, где α_n определяется формулой (15'), при $q = 0$ является мажорантным для ряда, стоящего в скобках.

Изменение температуры $\varphi_\epsilon(\xi)$, вызываемое появлением тепла около точки, будет, очевидно, равно нулю вне интервала $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, на котором выделяется тепло, а внутри этого интервала $\varphi_\epsilon(\xi)$ можно считать положительной, непрерывной и дифференцируемой функцией, для которой

$$c\rho \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \varphi_\epsilon(\xi) d\xi = Q, \quad (20)$$

так как левая часть этого уравнения и представляет количество тепла, вызвавшее изменение температуры на величину $\varphi_\epsilon(\xi)$. Процесс распространения температуры в этом случае определяется формулой (19):

$$u_\epsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_\epsilon(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Совершим теперь предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$. Принимая во внимание непрерывность G при $t > 0$ и равенство (20) и применяя теорему среднего значения при фиксированных значениях x, t , будем иметь:

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x, t) &= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} G(x, \xi, t) \varphi_\epsilon(\xi) d\xi = \\ &= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \varphi_\epsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c\rho}, \end{aligned} \quad (21')$$

где ξ^* — некоторая средняя точка интервала $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$. В силу непрерывности функции $G(x, \xi, t)$ по ξ при $t > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) &= \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t) = \\ &= \frac{Q}{c\rho} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует, что $G(x, \xi, t)$ представляет температуру в точке x в момент t , вызванную действием мгновенного точечного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в момент $t = 0$ в точке ξ промежутка $(0, l)$.

Отметим следующее свойство функции $G(x, \xi, t)$: функция $G(x, \xi, t) \geq 0$ при любых x, ξ и $t > 0$. Действительно, рассмотрим начальную функцию $\varphi_\epsilon(x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и соответствующее ей решение (21'). Из неотрицательности начального и граничных условий в силу

принципа максимального значения следует, что

$$u_\varepsilon(x, t) \geq 0$$

для всех $0 \leq x \leq l$ и $t > 0$. Отсюда, воспользовавшись формулой (21'), имеем:

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c\rho} \geq 0 \quad (\text{при } t > 0). \quad (21'')$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, из (21') получим неравенство

$$G(x, \xi, t) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq x, \xi \leq l \text{ и } t > 0,$$

которое и надо было доказать.

Этот результат имеет простой физический смысл. Однако установить его непосредственно из формулы (19) было бы затруднительно, поскольку $G(x, \xi, t)$ представляется знакопеременным рядом.

3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями. Изложенная выше теория относится к решениям уравнения теплопроводности, непрерывным в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Эти условия непрерывности являются весьма ограничительными. В самом деле, рассмотрим простейшую задачу об остывании равномерно нагретого стержня при нулевой температуре на краях. Дополнительные условия имеют вид

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Если $u_0 \neq 0$, то решение этой задачи должно быть разрывным в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Этот пример показывает, что поставленные выше условия непрерывности начального значения и условия сопряжения его с граничными значениями исключают из рассмотрения практически важные случаи. Однако формула (19) дает решение краевой задачи и в этом случае.

В приложениях часто пользуются формулами, выходящими за границы условий их применимости, зачастую вообще не ставя вопроса об условии применимости формул. Последовательное обоснование всех формул было бы весьма громоздким и часто отвлекало бы внимание исследователя от количественных и качественных сторон явления, характерных для физической сущности процесса.

Однако мы считаем нужным, по крайней мере на простейших примерах, дать обоснование математического аппарата, достаточное для решения основных задач.

Рассмотрим краевые задачи с кусочно-непрерывными начальными функциями, не предполагая, что начальная функция сопряжена с граничными условиями. Этот класс дополнительных условий является достаточно общим для потребностей практики и достаточно простым для изложения теории. Нашей

целью является доказать, что та же формула (19) дает решение поставленной задачи. Проведем ее исследование в несколько этапов. Докажем предварительно теорему:

Решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \quad t > 0), \quad (4)$$

непрерывное в замкнутой области $(0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T)$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при $x = 0, x = l$, определено однозначно и представляется формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Эта теорема была доказана выше в предположении дополнительного условия о кусочно-непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(\xi)$.

Освободимся от этого условия. Рассмотрим последовательность непрерывных кусочно-дифференцируемых функций $\varphi_n(\xi)$ ($\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$), равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$. (В качестве $\varphi_n(x)$ можно выбрать, например, функции, представимые ломаными линиями, совпадающими с $\varphi(x)$ в точках $\frac{l \cdot k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$). Функции $u_n(x, t)$, определяемые формулой (19) через $\varphi_n(x)$, удовлетворяют всем условиям теоремы, так как $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию кусочной дифференцируемости. Эти функции равномерно сходятся и определяют в пределе непрерывную функцию $u(x, t)$. В самом деле, для любого ϵ можно указать такое $n(\epsilon)$, что

$$|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \epsilon \quad (0 \leq x \leq l), \quad \text{если } n_1, n_2 \geq n(\epsilon),$$

так как эти функции по условию сходятся равномерно. Отсюда в силу принципа максимальных значений следует также, что

$$|u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \epsilon \quad (0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T), \quad \text{если } n_1, n_2 \geq n(\epsilon),$$

что и доказывает равномерную сходимость последовательности функций $u_n(x, t)$ к некоторой непрерывной функции $u(x, t)$.

Если мы, фиксируя точку (x, t) , перейдем к пределу под знаком интеграла, то получим, что функция

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

непрерывна в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ и удовлетворяет начальному условию (2). В силу сноски на стр. 200 нетрудно убедиться, что она также удовлетворяет уравнению (4) при $t > 0$. Доказательство теоремы закончено.

Формула (19) дает единственное непрерывное решение рассматриваемой задачи.

Обратимся к доказательству теоремы единственности для случая кусочно-непрерывной начальной функции $\varphi(x)$, не предполагая, что эта функция сопряжена с граничными условиями. Докажем, что функция, непрерывная в области $t > 0$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (4)$$

в области $0 < x < l$, $t > 0$, нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

определена однозначно, если:

- 1) она непрерывна в точках непрерывности функции $\varphi(x)$ и
- 2) ограничена в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq \bar{t}_0$, где \bar{t}_0 — произвольное положительное число.

Предположим, что такая функция существует. Очевидно, что в силу предшествующей теоремы она может быть представлена в области $t > \bar{t}$ формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) d\xi \quad (t > \bar{t} > 0) \quad (19')$$

при любом \bar{t} , где \bar{t} — вспомогательное значение,

$$0 < \bar{t} \leq t, \quad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

Совершим предельный переход в этой формуле при $\bar{t} \rightarrow 0$, сохраняя x и t неизменными. Покажем¹⁾, что возможен переход под знаком интеграла

1) Доказываемая ниже теорема является частным случаем теоремы Лебега о возможности перехода к пределу под знаком интеграла, если последовательность функций $F_n(x)$ почти всюду сходится к предельной суммируемой функции $F(x)$ и если эта последовательность ограничена суммируемой функцией. Это доказательство приводится, чтобы избежать пользования теоретико-множественными понятиями. Если воспользоваться теоретико-множественными понятиями, то совершенно аналогично можно доказать теорему о том, что решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, однозначно определено:

- 1) если $u(x, t) \leq F(x)$, где $F(x)$ — некоторая суммируемая функция и
- 2) если почти всюду

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная начальная суммируемая функция.

и, следовательно, функция $u(x, t)$ представима в виде интеграла

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \quad (19)$$

однозначно ее определяющего.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — точки разрыва функции $\varphi(x)$. Полагая $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = l$ (рис. 38) и беря замкнутые отрезки I_k ($x_k + \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta$)

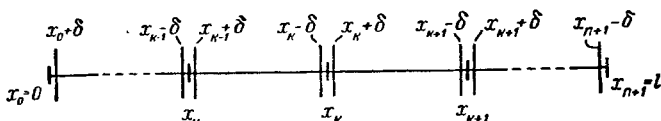


Рис. 38.

($k = 0, 1, \dots, n$), где δ — некоторое фиксированное достаточно малое число, нетрудно убедиться, что подынтегральная функция из (19') равномерно сходится к подынтегральной функции из (19) на всяком отрезке I_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). На отрезках I_k ($x_k - \delta \leq x \leq x_k + \delta$) ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), \bar{I}_0 ($x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$), и \bar{I}_{n+1} ($x_{n+1} - \delta \leq x \leq x_{n+1}$) подынтегральные выражения в (19) и (19') ограничены некоторым числом N при любом \bar{t} ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0$) в силу предположенной ограниченности функции $u(x, t)$ и в силу непрерывности $G(x, \xi, t)$ при $0 \leq \xi \leq l$, $t > 0$. Разбивая разность интегралов (19) и (19') на $2n + 3$ интеграла, взятых по I_k ($k = 0, 1, \dots, n$) и \bar{I}_k ($k = 0, 1, \dots, n + 1$), видим, что эта разность может быть сделана меньше наперед заданного числа ε , если

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2n + 3} \frac{1}{4N},$$

так что

$$\left| \int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n + 3},$$

и если \bar{t} выбрано настолько малым, что

$$|G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)| < \frac{1}{l} \frac{\varepsilon}{2n + 3} \quad \text{для } t \leq \bar{t} \quad \text{на } I_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

так что

$$\int_{I_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi < \frac{\varepsilon}{2n + 3} \quad \text{для } t \leq \bar{t} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left| \int_0^l [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| < \varepsilon \quad \text{для } t \leq \bar{t},$$

доказывающее законность перехода к пределу при $\bar{t} \rightarrow 0$ под знаком интеграла. Таким образом, если существует функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, то она представима в виде (19), что и доказывает единственность такой функции.

Докажем теперь, что формула (19) представляет ограниченное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (2) для любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$, непрерывное во всех точках непрерывности $\varphi(x)$.

Эту теорему мы докажем в два приема. Докажем, что она верна, если $\varphi(x)$ — линейная функция:

$$\varphi(x) = cx. \quad (2')$$

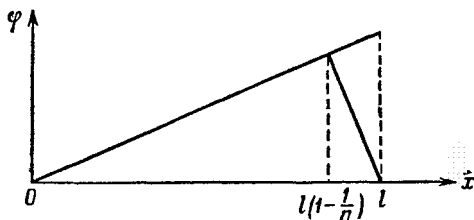


Рис. 39.

Рассмотрим последовательность вспомогательных непрерывных функций (рис. 39)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx & \text{для } 0 \leq x \leq l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ \alpha(l - x) & \text{для } l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq x \leq l, \quad \alpha = (n - 1)c. \end{cases}$$

Функции $u_n(x, t)$, определенные при помощи формулы (19) для $\varphi_n(x)$, являются непрерывными решениями уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями и начальными условиями

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Так как

$$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

то в силу принципа максимальных значений

$$u_n(x, t) \leq u_{n+1}(x, t).$$

Функция $U_0(x) = cx$ является непрерывным решением уравнения теплопроводности. В силу принципа максимального значения

$$u_n(x, t) \leq U_0(x),$$

так как это неравенство имеет место при $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$. Таким образом, $u_n(x, t)$ есть монотонно неубывающая последовательность, ограниченная сверху функцией $U_0(x)$, откуда следует, что эта последовательность сходится. Нетрудно видеть,

что

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \leq U_0(x), \end{aligned}$$

так как переход к пределу под знаком интеграла законен. В силу сноски на стр. 204 эта функция удовлетворяет уравнению и нулевым граничным условиям при $t > 0$. Докажем, что эта функция непрерывна при $t = 0$ для $0 \leq x < l$. Пусть $x_0 < l$. Выберем n так, чтобы $x_0 < l \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Принимая во внимание, что

$$u_n(x, t) \leq u(x, t) \leq U_0(x)$$

и что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

закключаем, что существует предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

не зависящий от способа стремления $x \rightarrow x_0$ и $t \rightarrow 0$. Отсюда и следует непрерывность $u(x, t)$ в точке $(x_0, 0)$. Эта функция ограничена, так как она не превосходит $U_0(x)$. Итак, для $\varphi(x) = sx$ теорема доказана.

Заменой x на $l - x$ убеждаемся в том, что теорема верна для

$$\varphi(x) = b(l - x). \quad (2'')$$

Отсюда следует, что она верна для любой функции типа

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

так как подобная функция может быть получена суммированием $(2')$ и $(2'')$. Далее, отсюда следует также, что теорема верна для любой непрерывной функции без предположения о том, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. В самом деле, любую функцию $\varphi(x)$ такого типа можно представить в виде

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l} (\varphi(l) - \varphi(0)) \right] + \psi(x),$$

где слагаемое в квадратных скобках — линейная функция, а $\psi(x)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Так как мы убедились уже

в том, что для каждого слагаемого теорема применима, то отсюда следует, что теорема верна и для $\varphi(x)$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы для произвольной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. Формула (19) и в этом случае определяет решение, удовлетворяющее уравнению и нулевым граничным условиям.

Пусть точка x_0 — какая-либо точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Докажем, что для любого ε можно найти $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и $t < \delta(\varepsilon)$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует $\eta(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } |x - x_0| < \eta(\varepsilon),$$

откуда

$$\varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } |x - x_0| < \eta(\varepsilon). \quad (23)$$

Построим вспомогательные непрерывные дифференцируемые функции $\bar{\varphi}(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$:

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \quad (a)$$

$$\bar{\varphi}(x) \geq \varphi(x) \quad \text{для } |x - x_0| > \eta(\varepsilon),$$

$$\underline{\varphi}(x) = \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \quad (б)$$

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \quad \text{для } |x - x_0| > \eta(\varepsilon).$$

На интервале $|x - x_0| > \eta(\varepsilon)$ функции $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ удовлетворяют только условиям (а) и (б), а в остальном произвольны. В силу неравенств (23),

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}(x). \quad (24)$$

Рассмотрим функции

$$\bar{u}(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \bar{\varphi}(\xi) d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \underline{\varphi}(\xi) d\xi.$$

В силу непрерывности функций $\bar{\varphi}(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$ функции $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$ непрерывны в точке x_0 , т. е. найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left. \begin{aligned} |\bar{u}(x, t) - \bar{\varphi}(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} \quad \text{для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x, t) &\leq \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon, \\ \underline{u}(x, t) &\geq \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

В силу неотрицательности функции $G(x, \xi, t)$ из формулы (24) следует, что

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t). \quad (25)$$

Отсюда получаем неравенства

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

или

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. Ограниченность функции $|u(x, t)|$ следует из (25) и из ограниченности функций $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$.

Этим теорема доказана.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \quad (26)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решение этой задачи $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (11), т. е. по функциям $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (27)$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x, t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \quad (28)$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (29)$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \quad (30)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (29) с нулевым начальным условием (30)¹⁾, находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Подставляя выражение (31) для $u_n(t)$ в формулу (27), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (32)$$

Воспользуемся выражением (28) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (32):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad (34)$$

совпадает с функцией источника, определяемой формулой (18).

¹⁾ См. мелкий шрифт в конце п. 4, § 3, гл. II.

Выясним физический смысл полученного решения

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (33)$$

Предположим, что функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau.$$

Функция $F(\xi, \tau) = c\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность тепловых источников. Общее количество тепла, выделяющееся на отрезке $(0, l)$ за все время действия источника (т. е. за $\Delta\tau$), равно

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} c\rho f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (35)$$

Применим теорему о среднем к выражению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = G(x, \bar{\xi}, t - \bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t), \end{aligned}$$

где

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta\xi \rightarrow 0$ и $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим функцию

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\tau \rightarrow 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0), \quad (36)$$

которую можно интерпретировать как функцию влияния мгновенного источника тепла, сосредоточенного в точке ξ_0 в момент τ_0 .

Если известна функция $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t - \tau)$, представляющая действие единичного мгновенного сосредоточенного источника, то действие источников, непрерывно распределенных с плотностью $F(x, t) = c\rho f(x, t)$, должно выражаться формулой (33), как это непосредственно следует из физического смысла функции $G(x, \xi, t - \tau)$.

Итак, температурное влияние тепловых источников, действующих в области $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)$, дается выражением

$$G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \Delta\xi \Delta\tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta\xi \Delta\tau \right).$$

Если источники распределены непрерывно, то, суммируя тепловые влияния источников, действующих во всей области $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$, получим после предельного перехода при $\Delta \xi \rightarrow 0$ и $\Delta \tau \rightarrow 0$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Таким образом, исходя из физического смысла функции источника $G(x, \xi, t)$, можно было бы сразу написать выражение (33) для функции, дающей решение неоднородного уравнения.

Имея форму, в которой должно представляться решение задачи, можно исследовать условия применимости этой формулы в отношении функции $f(\xi, \tau)$. Мы не будем проводить этого исследования.

Мы рассматривали здесь неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Если начальное условие отлично от нуля, то к этому решению следует прибавить решение однородного уравнения с заданным начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, найденное в п. 1.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad (37)$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= \bar{f}(x, t), \\ \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}] \end{aligned}$$

с дополнительными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

для чего достаточно положить¹⁾

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Таким образом, нахождение функции $u(x, t)$, дающей решение общей краевой задачи, сведено к нахождению функции $v(x, t)$, дающей решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Метод нахождения функции $v(x, t)$ дан в п. 4.

Изложенная выше формальная схема решения задач при наличии неоднородностей в уравнении и граничных условиях не всегда удобна для представления искомой функции $u(x, t)$. Трудности, возникающие при нахождении вспомогательной функции $v(x, t)$, зависят от функции $U(x, t)$, от которой ищется отклонение.

В частности, для задач со стационарными неоднородностями удобнее выделять стационарное решение и искать отклонение от этого решения²⁾.

Рассмотрим, например, задачу для ограниченного стержня $(0, l)$, концы которого поддерживаются при постоянных температурах u_0 и u_1 :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= u_0, \\ u(l, t) &= u_1. \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарная температура, а $v(x, t)$ — отклонение от стационарной температуры.

Для функций $\bar{u}(x)$ и $v(x, t)$ будем иметь условия

$$\begin{aligned} \bar{u}'' &= 0, & v_t &= a^2 v_{xx}; \\ \bar{u}(0) &= u_0, & v(x, 0) &= \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x); \\ \bar{u}(l) &= u_1, & v(0, t) &= 0, \\ & & v(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l} (u_1 - u_0).$$

¹⁾ См. гл. II, § 3, п. 5.

²⁾ См. гл. II, § 3, п. 6.

Функцию $v(x, t)$, определяемую начальным условием и однородными граничными условиями, без труда находим методом разделения переменных.

Задачи

1. Вывести уравнение для процесса нагревания однородной тонкой проволоки постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит теплообмен с окружающей средой.

2. Вывести уравнение диффузии в среде, равномерно движущейся в направлении оси x со скоростью w . Рассмотреть случай одной независимой переменной.

3. Исходя из уравнений Максвелла, предполагая $E_x = E_z = 0$, $H_z = 0$ и пренебрегая токами смещения, показать, что в однородной проводящей среде составляющая электромагнитного поля E_y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

где σ — проводимость среды, c — скорость света. Вывести уравнения для H_x .

4. Дать физическое истолкование следующих граничных условий в задачах теплопроводности и диффузии:

$$\begin{aligned} \text{а) } u(0, t) &= 0, & \text{б) } u_x(0, t) &= 0, \\ \text{в) } u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0, & & \\ & u_x(l, t) + hu(l, t) = 0 & (h > 0). \end{aligned}$$

5. Решить задачу об остывании равномерно нагретого однородного стержня при нулевой температуре на концах, предполагая отсутствие теплообмена на боковой поверхности.

6. Начальная температура стержня $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ при $0 < x < l$. Температура концов поддерживается постоянной $u(0, t) = u_1$; $u(l, t) = u_2$ при $0 < t < \infty$. Найти температуру стержня, если теплообмен на боковой поверхности отсутствует. Найти стационарную температуру.

7. Решить задачу 6 при следующих граничных условиях: на одном конце поддерживается постоянная температура, второй конец теплоизолирован.

8. Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки постоянным электрическим током, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равны нулю.

9. Цилиндр длины l , заполненный воздухом при давлении и температуре окружающей среды, открывают с одного конца в начальный момент времени, и из окружающей атмосферы, где концентрация некоторого газа равна u_0 , начинается диффузия газа в цилиндр. Найти количество газа, диффундировавшего в цилиндр за время t , если начальная концентрация газа в цилиндре равна нулю.

10. Решить задачу 9 в предположении, что левый конец цилиндра закрыт полупроницаемой перегородкой.

11. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$, а на концах происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Рассмотреть частный случай $\varphi(x) = u_0$.

12. Решить задачу 11, предполагая, что температура окружающей среды равна U_0 .

13. Решить задачу 11, считая, что на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой:

- равна нулю
- постоянна и равна u_1 .

14. Найти установившуюся температуру стержня, пренебрегая теплообменом на боковой поверхности и считая, что один конец стержня теплоизолирован, а ко второму концу подводится поток тепла, гармонически меняющийся во времени.

15. Решить задачу 14, считая, что один конец стержня имеет нулевую температуру, а температура второго конца гармонически меняется во времени.

16. Стержень $(0, l)$ составлен из двух однородных кусков одинакового поперечного сечения, соприкасающихся в точке $x = x_0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2 . Найти установившуюся температуру в таком стержне (тепловые волны), если один конец стержня ($x = 0$) поддерживается при нулевой температуре, а температура второго меняется синусоидально во времени.

17. Левый конец составного стержня задачи 16 поддерживается при температуре, равной нулю, а правый — при температуре $u(l, t) = u_1$, начальная же температура стержня равна нулю. Найти температуру $u(x, t)$ стержня на регулярном режиме (первый член разложения).

18. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, начальная температура которого равна нулю, а граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

где A, B и $\alpha > 0$ — постоянные.

§ 3. Задачи на бесконечной прямой

1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши):

найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то выполнение начального условия будем понимать в том смысле, что $u(x, t)$ непрерывно при $t = 0$, т. е.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Как мы видели в п. 7, § 1, решение уравнения теплопроводности однозначно определяется своими начальными условиями, если оно ограничено. Поэтому в формулировку теорем вводится условие ограниченности.

Дадим сначала формальную схему решения поставленной задачи, основанную на разделении переменных.

Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения (1), представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (1), получаем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — параметр разделения. Отсюда следует:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad (4)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем частные решения уравнения (1) вида

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \quad (6)$$

удовлетворяющие условию ограниченности. Здесь λ — любое вещественное число $-\infty < \lambda < \infty$; поэтому в (6) возьмем знак «плюс» и образуем функцию

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda. \quad (7)$$

Если производные, входящие в уравнение (1), можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла (7), то функция (7), очевидно, будет удовлетворять уравнению (1) как суперпозиция частных решений этого уравнения.

Требуя выполнения начального условия при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (8)$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Внутренний интеграл в (10) равен ¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), приходим к интегральному представлению искомого решения

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (13)$$

Функцию $G(x, \xi; t)$, определяемую формулой (13), часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x, \xi; t - t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 (t - t_0)}} \quad (13')$$

представляет температуру в точке x в момент времени t , если в начальный момент времени $t = t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q = c\rho$.

Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x, t) ²⁾, что можно проверить непосредственным дифференцированием.

¹⁾ Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

²⁾ В самом деле,

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x - \xi}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t - t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - t_0)}},$$

т. е.

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

Количество тепла, находящееся на оси x в момент $t > t_0$, равно

$$\begin{aligned} \text{ср} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx &= \frac{Q}{V\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} = \\ &= \frac{Q}{V\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = \text{ср}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \sqrt{\pi} \\ \left(\alpha &= \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, количество тепла на нашей прямой не меняется с течением времени. Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ зависит от времени только через аргумент $\theta = a^2(t - t_0)$, так что эту функцию можно записать в виде

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \quad (13'')$$

На рис. 40 изображен график функции G в зависимости от x для различных значений θ . Почти вся площадь, ограниченная этой кривой, находится над промежутком

$$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

где ε — сколь угодно малое число, если только $\theta = a^2(t - t_0)$ — достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на ср , равна количеству тепла, подведенному в начальный момент. Таким образом, для малых значений $t - t_0 > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки ξ . Из сказанного выше следует, что в момент t_0 все количество тепла помещается в точке ξ .

Рассматривая изменение температуры в фиксированной точке $x = \xi + h$ с течением времени при $h \neq 0$, т. е. при $x \neq \xi$, получим:

$$G_{x \neq \xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Таким образом, температура в той точке, где выделяется тепло, для малых θ неограниченно велика.

Если $x \neq \xi$, т. е. $h \neq 0$, то функция G представляется в виде произведения двух множителей

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-h^2/4\theta}.$$

Второй сомножитель меньше единицы: при больших θ он ≈ 1 , при малых θ он ≈ 0 . Отсюда следует, что $G_{x \neq \xi} = G_{x=\xi}$ для больших θ ; $G_{x \neq \xi} \ll G_{x=\xi}$ для малых θ . Чем меньше h , т. е. чем ближе x к ξ , тем больше второй множитель.

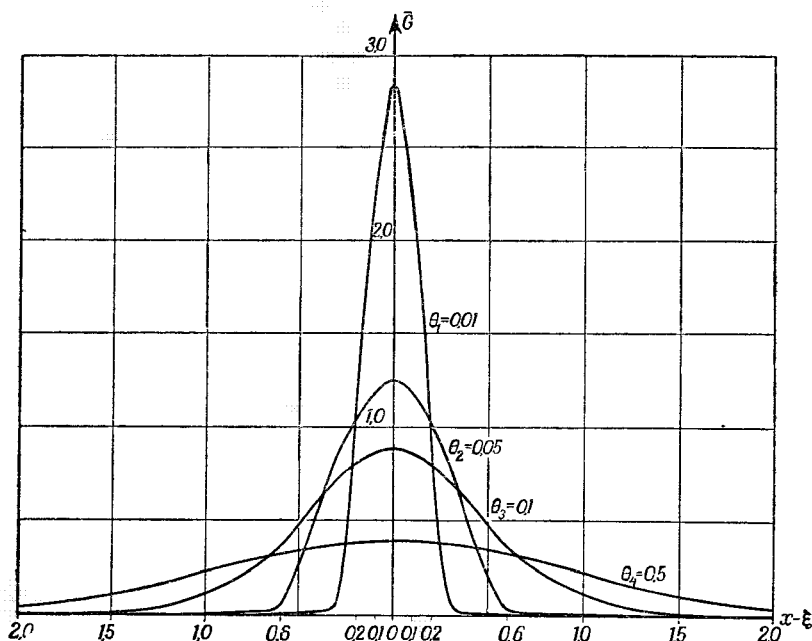


Рис. 40.

Графики функции $G_{x=\xi}$ и $G_{x \neq \xi}$ при $h_2 < h_1$ приведены на рис. 41.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G_{x \neq \xi} = 0.$$

Раскрывая неопределенность, находим:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/4\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{h^2/4\theta}} = 0.$$

Формула (13') показывает, что во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником, действующим в начальный момент $t = 0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Подобный факт можно было бы интерпретировать как результат бесконечно быстрого рас-

пространения температуры (бесконечная скорость). Однако это противоречит молекулярно-кинетическим представлениям о природе тепла. Такое противоречие получается в связи с тем, что выше при выводе уравнения теплопроводности мы пользовались феноменологическими представлениями о растекании тепла, не учитывая инерционность процесса движения молекул.

Теперь выясним условия применимости формулы (12).

Докажем, что формула

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad (12')$$

называемая интегралом Пуассона, для любой ограниченной функции $|\varphi(\xi)| < M$ представляет при $t > 0$ ограниченное решение уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающее при $t = 0$ к $\varphi(x)$ во всех точках непрерывности этой функции.

Докажем предварительно лемму (обобщенный принцип суперпозиции).

Если функция $U(x, t, \alpha)$ по переменным (x, t) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$L(U) = 0$$

при любом фиксированном значении параметра α , то интеграл

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

также является решением того же уравнения $L(u) = 0$, если производные, входящие в линейный дифференциальный оператор $L(U)$, можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство леммы крайне просто. Линейный дифференциальный оператор $L(U)$ представляет сумму производных функции U с некоторыми коэффициентами, зависящими от x и t . Дифференцирование функции u , по предположению, можно производить под знаком интеграла. Коэффициенты также можно внести под знак интеграла. Отсюда следует, что

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha)) \varphi(\alpha) d\alpha = 0,$$

т. е. что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$.

Напомним достаточные условия дифференцируемости под знаком интеграла, зависящего от параметра.

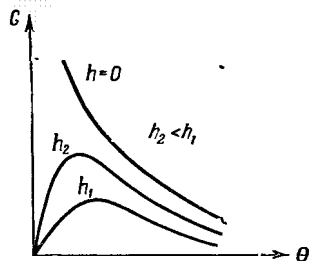


Рис. 41.

Функция

$$F(x) = \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла, если $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ является непрерывной функцией переменных x и α в области их изменения (см. Б. М. Будаг, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965).

Нетрудно видеть также, что функция

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла при тех же условиях относительно функции $f(x, \alpha)$ и произвольной, ограниченной (и даже абсолютно интегрируемой) функции $\varphi(\alpha)$. Если пределы интегрирования бесконечны, то в этом случае требуется равномерная сходимость интеграла, полученного в результате дифференцирования подынтегральной функции по параметру (см. там же).

Эти же замечания относятся и к кратным интегралам, зависящим от параметров.

Для линейных уравнений $L(u) = 0$ имеет место принцип суперпозиции, заключающийся в том, что функция

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i u_i(x, t),$$

представленная в виде суммы конечного числа частных решений, является также решением уравнения. Если мы имеем решение $u(x, t, \alpha)$, зависящее от параметра, то интегральная сумма

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \quad (C_n = \varphi(\alpha_n) \Delta \alpha) \quad (14)$$

также является решением уравнения $L(u) = 0$. Доказанная лемма, так же как и лемма на стр. 91, устанавливает условия, при которых предел суммы (14), в нашем случае равный

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

также является решением уравнения $L(u) = 0$. С этой точки зрения доказанную лемму, как и лемму на стр. 91, естественно называть обобщенным принципом суперпозиции.

Обратимся к изучению интеграла (12'). Докажем, во-первых, что если функция $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$, то ин-

теграл (12') сходится и представляет ограниченную функцию. В самом деле,

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}} \right),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Докажем далее, что интеграл (12') удовлетворяет уравнению теплопроводности при $t > 0$. Для этого достаточно доказать, что производные этого интеграла при $t > 0$ можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

В случае конечных пределов интегрирования это законно, так как все производные функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

при $t > 0$ непрерывны. Для возможности дифференцирования под знаком интеграла при бесконечных пределах достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла, полученного после дифференцирования под знаком интеграла. Проведем это исследование на примере первой производной по x .

Итак, для доказательства дифференцируемости функции (12) по x , а также равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (G(x, \xi, t)) \varphi(\xi) d\xi$$

достаточно доказать равномерную сходимость интеграла, стоящего справа; при этом для дифференцируемости в точке (x_0, t_0) достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в некоторой области значений переменных, содержащей исследуемые значения (x_0, t_0) , например в области

$$t_1 \leq t_0 \leq t_2, \quad |x| \leq \bar{x}.$$

Достаточным условием равномерной сходимости интеграла (аналогичным признаку равномерной сходимости ряда) является существование положительной функции $F(\xi)$, не

зависящей от параметров (x, t) , которая мажорирует функцию

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \right| \leq F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \quad (15)$$

и интеграл от которой сходится:

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi) d\xi < \infty. \quad (15')$$

Величина x_1 обозначает некоторое число, начиная с которого выполняется неравенство (15).

Найдем оценку сверху для абсолютной величины подынтегрального выражения в формуле для $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t) \right| \cdot |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi) \quad \text{для } \xi < \bar{x} \end{aligned} \quad (16)$$

при любых $|x| \leq \bar{x}$ и $t_1 \leq t \leq t_2$. Нетрудно убедиться в сходимости интеграла (15') от функции $F(\xi)$. Интеграл

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} d\xi = \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_2}} d\xi_1 \\ &(\xi_1 = |\xi| - \bar{x}) \end{aligned}$$

сходится, так как под знаком интеграла стоит множитель типа $(a\xi + b)e^{-c\xi^2}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Совершенно аналогично доказывается возможность вычисления всех остальных производных под знаком интеграла. Тем самым доказано, что функция (12') удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Обратимся теперь к выяснению основного свойства интеграла (12'), а именно, докажем, что

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \text{ и } x \rightarrow x_0$$

во всех точках непрерывности функции $\varphi(x)$.

Итак, пусть $\varphi(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0 . Мы должны доказать, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

В силу предполагаемой непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует такое $\eta(\varepsilon)$, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (17)$$

если только

$$|x - x_0| < \eta.$$

Разбивая промежуток интегрирования на части, представим $u(x, t)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \dots d\xi + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_2}^{\infty} \dots d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$x_1 = x_0 - \eta \quad \text{и} \quad x_2 = x_0 + \eta.$$

Главное слагаемое этой суммы u_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = & \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Интеграл I_1 вычисляется непосредственно

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{a^2 t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}}. \quad (19)$$

Как только $|x - x_0| < \eta$, то верхний предел становится положительным, а нижний — отрицательным, и при $t \rightarrow 0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний к $-\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

Таким образом, можно указать такое δ_1 , что

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (20)$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_1.$$

Покажем, что остальные интегралы: I_2 , u_1 и u_3 — малы. Оценим прежде всего интеграл I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

Из равенств (18) видно, что при

$$x_1 < \xi < x_2$$

имеет место неравенство

$$|\xi - x_0| < \eta.$$

Пользуясь неравенством (17), а также тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1,$$

каковы бы ни были x' и x'' , получаем:

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (21)$$

где новая переменная α определяется формулой (19). Оценим

$$\begin{aligned} |u_3(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ &< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \quad (22) \end{aligned}$$

и аналогично

$$|u_1(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0, \end{matrix} \quad (23)$$

так как если $x \rightarrow x_0$, то $x_2 - x > 0$, и $x_1 - x < 0$, и если $t \rightarrow 0$, то в последних членах (22) и (23) нижний предел и, соответственно, верхний предел стремятся к $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно, можно указать такое δ_2 , что

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (24)$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_2.$$

Пользуясь установленными выше оценками (22), (23), получаем:

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| \leq \\ \leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad (25)$$

если только

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad |t| < \delta,$$

где δ равно наименьшему из чисел δ_1 и δ_2 .

Таким образом, мы доказали, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \quad (12')$$

ограничена, удовлетворяет уравнению теплопроводности и начальному условию.

Если начальное значение задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то выражение для $u(x, t)$ приобретает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t - t_0)}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (12'')$$

Единственность полученного решения для непрерывной функции $\varphi(x)$ следует из теоремы, доказанной в § 2, п. 3. Если начальная функция $\varphi(x)$ имеет конечное число точек разрыва, то интеграл (12'') представляет ограниченное решение

уравнения (1), непрерывное всюду, кроме точек разрыва функции $\varphi(x)$ ¹⁾.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:

найти решение уравнения теплопроводности, если начальная температура (при $t = t_0 = 0$) имеет постоянные, но различные значения для $x > 0$ и $x < 0$, а именно:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{для } x > 0, \\ T_2 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (12'), получаем решение задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (26) \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right).$$

В частности, если

$$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$$

то

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \right) \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right).$$

¹⁾ Пользуясь методом, изложенным в п. 3, § 2, можно убедиться, что функция $u(x, t)$ перечисленными условиями определяется однозначно.

Профиль температуры в заданный момент t дается кривой

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где z представляет абсциссу точки, в которой определяется температура, если за единицу длины, в зависимости от t , принимается значение $2\sqrt{a^2 t}$. Построение этой кривой не представляет труда, так как интеграл

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

называемый обычно интегралом ошибок, часто встречается в теории вероятностей и для него существуют подробные таблицы¹⁾.

Формула (26) при произвольных T_1 и T_2 может быть записана в виде

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Отсюда видно, что в точке $x = 0$ температура все время постоянна и равна полусумме начальных значений справа и слева, так как $\Phi(0) = 0$.

Решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0,$$

очевидно, должно представляться формулой

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (27)$$

как то следует из смысла функции $G(x, \xi, t)$ (см. п. 4, § 2). Мы не будем подробнее заниматься изучением этой формулы и условий применимости, которые надо наложить на функцию $f(x, t)$.

2. Краевые задачи для полуограниченной прямой. Как мы уже отмечали в § 1, п. 4, в тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого конца несущественно, принимают, что этот

¹⁾ См., например, А. А. Марков, Курс теории вероятностей, где даны таблицы этого интеграла с шестью десятичными знаками. См. также более краткую таблицу в конце книги.

конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

на полубесконечной прямой $x > 0$ для значений $t > 0$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берется в одном из следующих видов:

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{первая краевая задача}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t) \quad (\text{вторая краевая задача})$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)] \quad (\text{третья краевая задача}).$$

В дальнейшем мы ограничимся подробным исследованием только первой краевой задачи, заключающейся в отыскании решения уравнения теплопроводности при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \quad (28)$$

Для того чтобы условия задачи определяли единственное решение, необходимо наложить некоторые условия в бесконечности. Потребуем в качестве дополнительного требования, чтобы функция $u(x, t)$ была всюду ограничена

$$|u(x, t)| < M \quad \text{для } 0 < x < \infty \text{ и } t \geq 0,$$

где M — некоторая постоянная. Отсюда следует, что начальная функция $\varphi(x)$ должна также удовлетворять условию ограниченности

$$|\varphi(x)| < M.$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ представляет влияние только начальных условий, а $u_2(x, t)$ — влияние только граничного условия. Эти функции можно определить как решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0 \quad (28')$$

и

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \quad (28'')$$

Очевидно, что сумма этих функций будет удовлетворять условиям (28). Докажем предварительно две леммы относительно функции $u(x, t)$, определяемой интегралом Пуассона,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi. \quad (29)$$

1. Если функция $\psi(x)$ является нечетной функцией, т. е.

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

то функция (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

обращается в нуль при $x = 0$,

$$u(0, t) = 0.$$

При этом, конечно, предполагается, что интеграл, определяющий функцию $u(x, t)$, сходится, что имеет место, если $\psi(x)$ ограничена. Подынтегральная функция в интеграле

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

нечетна относительно ξ , так как является произведением нечетной функции на четную. Интеграл же от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равен нулю; следовательно,

$$u(0, t) = 0,$$

что и доказывает лемму.

2. Если функция $\psi(x)$ является четной функцией, т. е.

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

то производная функция $u(x, t)$ из формулы (29) равна нулю при $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

для всех $t > 0$.

В самом деле,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi \Big|_{x=0} = 0,$$

так как при $x = 0$ подынтегральная функция нечетна, если $\psi(\xi)$ — четная.

Перейдем теперь к построению функции $u_1(x, t)$, удовлетворяющей условиям (28').

Введем вспомогательную функцию $U(x, t)$, определенную на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющую уравнению, а также условиям

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{для } x > 0.$$

Эту функцию, пользуясь леммой, можно определить при помощи начальной функции $\Psi(x)$, совпадающей с $\varphi(x)$ для $x > 0$ и являющейся нечетным продолжением $\varphi(x)$ для $x < 0$, т. е.

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

так что

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi.$$

Рассматривая значения функции $U(x, t)$ только в интересующей нас области $x \geq 0$, получим:

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \text{при } x \geq 0.$$

Пользуясь определением функции $\Psi(x)$, будем иметь:

$$U(x, t) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

причем в первом интеграле сделана замена $\xi' = -\xi$ и использовано равенство

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

Соединяя оба интеграла вместе, получим искомую функцию

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi \quad (30)$$

в виде, не содержащем вспомогательных функций. Заметим, что при $x = 0$ выражение в фигурных скобках обращается в нуль и $u_1(0, t) = 0$.

Пользуясь леммой 2, нетрудно убедиться, что решение уравнения теплопроводности с однородным граничным условием второго рода $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$ и начальным условием $\bar{u}_1(x, 0) = \varphi(x)$ представляется в виде

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (30')$$

Применим полученную формулу к решению задачи об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается постоянная температура, которую мы примем равной нулю. Задача состоит в определении решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего условиям

$$v_1(x, t_0) = T, \quad v_1(0, t) = 0.$$

Учитывая, что начальное условие задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, вместо формулы (30) получим:

$$v_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \quad (31)$$

Разбивая интеграл на два слагаемых и вводя переменные

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

получим:

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \quad (31')$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

— интеграл ошибок.

Обратимся теперь к отысканию функции $u_2(x, t)$, представляющей вторую часть решения первой краевой задачи.

Пусть

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const.}$$

Функция

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \quad (32)$$

является решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим условиям

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right) \right] \quad (33)$$

и является искомой, так как она удовлетворяет тому же уравнению и условиям

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0) \quad \text{и} \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

Представим $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

где

$$U(x, t - t_0) = 1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-a^2} da \quad (34)$$

является решением той же задачи, что и $v(x, t)$, при $\mu_0 = 1$.

По определению функция $U(x, t - t_0)$ имеет смысл только при $t \geq t_0$. Продолжим определение этой функции, полагая

$$U(x, t - t_0) \equiv 0 \quad \text{для} \quad t < t_0.$$

Очевидно, что это определение согласуется со значением функции $U(x, t)$ при $t = 0$ и определенная таким образом функция будет удовлетворять уравнению теплопроводности для всех t при $x > 0$. Граничное значение этой функции (при $x = 0$) является ступенчатой функцией, равной нулю при $t < t_0$ и равной единице при $t > t_0$. Функция $U(x, t)$ весьма часто встречается в приложениях и является вспомогательным звеном для нахождения функции $u_2(x, t)$.

Рассмотрим вторую вспомогательную задачу, заключающуюся в нахождении решения уравнения теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$v(x, t_0) = 0, \quad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{для } t_0 < t < t_1, \\ 0 & \text{для } t > t_1. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

Вообще, если граничная функция $\mu(t)$ задается в виде ступенчатой функции

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{для } t_0 < t \leq t_1, \\ \mu_1 & \text{для } t_1 < t \leq t_2, \\ \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \text{для } t_{n-1} < t \leq t_n, \end{cases}$$

то, рассуждая совершенно аналогично, получим, что решение краевой задачи с подобной функцией $\mu(t)$ может быть записано следующим образом:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i [U(x, t - t_i) - U(x, t - t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}). \quad (35)$$

Пользуясь теоремой о конечном приращении, получим:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \left. \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t} \right|_{\tau_i} \Delta \tau + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) \quad (36)$$

для $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$.

Обратимся теперь к задаче о нахождении решения $u(x, t)$ уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием и граничным условием

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

где $\mu(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. Приближенное решение этой задачи легко получить в виде (36), если функцию $\mu(t)$ заменить кусочно-постоянной функцией. Переходя к пределу при уменьшении интервалов постоянства вспомогательной функции, получим, что предел суммы (36) будет равен

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau,$$

так как при $x > 0$

$$\lim_{t - t_{n-1} \rightarrow 0} \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) = 0.$$

Очевидно, что искомое решение $u_2(x, t)$ второй задачи должно быть равно

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (37)$$

Мы не будем подробно останавливаться на правомерности предельного перехода и выяснении условий применимости этой формулы в отношении функции $\mu(\tau)$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-a^2 \alpha^2} d\alpha \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \\ &= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2 \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение в случае произвольной функции $\mu(t)$ может быть представлено в виде

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau) d\tau$$

или

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_{t_0}^t \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Отметим, что в процессе получения формулы (38) мы нигде не пользовались специальными свойствами уравнения теплопроводности, кроме его линейности. Мы нигде не пользовались также аналитической формулой функции $U(x, t)$, а только тем, что она удовлетворяет граничным и начальным условиям

$$U(0, t) = 1 \quad \text{для } t > 0,$$

$$U(x, 0) = 0 \quad \text{для } x > 0$$

или

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если мы имеем дело с решением какого-либо линейного дифференциального уравнения при граничном условии

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

нулевых начальных условиях и нулевых дополнительных граничных условиях, если такие имеют место (например, при $x=l$), то решение этой задачи может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (39)$$

где $U(x, t)$ — решение аналогичной краевой задачи при

$$U(0, t) = 1.$$

Сформулированный здесь принцип, называемый принципом Дюгамеля, показывает, что основную трудность при решении краевых задач представляет постоянное граничное значение. Если краевая задача с постоянным граничным значением решена, то решение краевой задачи с переменным граничным условием представляется формулой (39). Этим принципом часто

¹⁾ Это представление решения первой краевой задачи с нулевыми начальными условиями дано здесь для удобства сравнения с решением той же задачи, полученным в гл. VI, § 4 другим методом.

пользуются при решении многих краевых задач, приводя решение только для постоянного граничного условия, не оговаривая, что решение краевой задачи с переменным $\mu(t)$ дается формулой (39).

Сумма функций

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой для однородного уравнения.

Пользуясь формулой (27) п. 1 § 3 и принципом нечетного продолжения, нетрудно убедиться в том, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty, t > 0)$$

при нулевом начальном и нулевом граничном условии ($u(0, t) = 0$) дается формулой

$$u_3(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (40)$$

Сумма

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. Задачи без начальных условий

Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об отыскании решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех типов, заданным для всех $t > -\infty$. Если стержень ограничен, то задаются граничные условия на обоих концах стержня. Для полубесконечного стержня задается лишь одно граничное условие.

Рассмотрим первую краевую задачу для полубесконечного стержня:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности в области $x > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (1)$$

где $\mu(t)$ — заданная функция. Предполагается, что функции $u(x, t)$ и $\mu(t)$ ограничены всюду, т. е.

$$|u(x, t)| < M,$$

$$|\mu(t)| < M.$$

Как будет показано ниже (см. мелкий шрифт), функция $u(x, t)$ определяется однозначно. Возьмем наиболее часто встречающийся случай граничного условия

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

Эта задача изучалась еще Фурье и впервые была применена при определении температурных колебаний почвы¹⁾.

Запишем граничное условие в виде

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \quad (2')$$

Из линейности уравнения теплопроводности следует, что действительная и мнимая части некоторого комплексного решения уравнения теплопроводности каждая в отдельности удовлетворяет тому же уравнению.

Если найдено решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию (2'), то его действительная часть удовлетворяет условию (2), а мнимая — условию

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A \sin \omega t.$$

Итак, рассмотрим задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (3)$$

$$u(0, t) = Ae^{i\omega t}.$$

Ее решение будем искать в виде

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \quad (4)$$

где α и β — неопределенные пока постоянные.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и граничное условие, находим:

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2} \beta, \quad \beta = i\omega,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right]. \end{aligned}$$

¹⁾ См. приложение 1.

Для $u(x, t)$ имеем:

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right)}. \quad (5)$$

Действительная часть этого решения

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right) \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному условию (2). Формула (6) в зависимости от выбора знака определяет не одну, а две функции. Однако только функция, соответствующая знаку минус, удовлетворяет требованию ограниченности. Таким образом, решение поставленной задачи получаем в виде

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right). \quad (7)$$

Аналогично решается задача без начальных условий для ограниченного отрезка:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A \cos \omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Переписывая граничное условие в виде

$$\hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad \hat{u}(l, t) = 0,$$

будем искать решение в форме

$$\hat{u}(x, t) = X(x) e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим для функции $X(x)$ уравнение

$$X'' + \frac{i\omega}{a^2} X = 0 \quad \text{или} \quad X'' + \gamma^2 X = 0, \\ \gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} (1 + i) \quad (10)$$

и дополнительные условия

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

Отсюда для функции $X(x)$ будем иметь:

$$X(x) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (12)$$

где X_1 и X_2 — вещественная и мнимая части функции $X(x)$. Для функций $\hat{u}(x, t)$ получаем выражение

$$\hat{u}(x, t) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} e^{-i\omega t}. \quad (13)$$

Выделяя вещественную часть функции $\hat{u}(x, t)$, находим решение исходной задачи без начальных условий в виде

$$u(x, t) = X_1(x) \cos \omega t + X_2(x) \sin \omega t. \quad (14)$$

Мы не даем здесь явного выражения для X_1 и X_2 , хотя это и нетрудно сделать.

Если граничная функция представляет собой комбинацию гармоник разных частот, то решение такой задачи может быть получено как суперпозиция решений, соответствующих отдельным гармоникам.

Докажем единственность задачи без начальных условий для полуограниченной прямой. Будем исходить из формулы

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} u(0, \tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} u(\xi, t_0) d\xi = I_1 + I_2 \quad (15) \\ (t \geq t_0),$$

которая представляет любое ограниченное решение уравнения теплопроводности через его начальное значение $u(x, t_0)$ и граничное $u(0, t) = \mu(t)$ в области $x \geq 0, t \geq t_0$.

Покажем, что

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} I_2(x, t) = 0, \quad (16)$$

если только

$$|u(x, t)| < M$$

при любом t . Действительно,

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_x^\infty e^{-\alpha_1^2} d\alpha_1 - \int_x^\infty e^{-\alpha_2^2} d\alpha_2 \right\} = \\ = \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

Отсюда и следует равенство (16), так как x и t фиксированы, а $t_0 \rightarrow -\infty$. Если в формуле (15) фиксировать x и t и устремить $t_0 \rightarrow -\infty$, то $u(x, t)$ будет равно пределу только первого слагаемого, и мы получим формулу

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \quad (17)$$

доказывающую, что двух различных решений нашей задачи быть не может. Можно также доказать, что для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $\mu(t)$ формула (17) представляет решение поставленной задачи.

Аналогично может быть исследована задача без начальных условий для ограниченного отрезка ($0 \leq x \leq l$). Эта задача без условия ограниченности имеет многозначное решение, так как функция

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

при любом n представляет решение этой задачи с нулевыми граничными значениями. Однако решения такого типа при $t \rightarrow -\infty$ неограниченны, и не составляет труда доказать единственность ограниченного решения поставленной задачи.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для:

- полуограниченного стержня при граничных условиях 1-го и 2-го рода и при отсутствии теплообмена на боковой поверхности;
- неограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности;
- полуограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности и при граничных условиях первых двух типов.

2. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью для третьей краевой задачи [граничное условие вида $\frac{\partial u}{\partial x} - hu(0, t) = f(t)$].

3. Решить уравнение теплопроводности для случаев а), б), в) задачи 1, если:

- в точке $x = \xi_0$ действует источник тепла $Q = Q(t)$, в частности $Q = Q_0 = \text{const}$;
- задано начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x)$, в частности

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{вне интервала } (0, l); \end{cases}$$

3) тепловые источники распределены с плотностью $f(x, t)$ по всему стержню, а начальная температура равна нулю; рассмотреть, в частности, случай $f = q_0 = \text{const}$ (стационарные источники).

4. Полуограниченный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью был равномерно нагрет до температуры

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} \quad (x > 0).$$

Конец стержня, начиная с момента $t = 0$, поддерживается при температуре, равной 0,

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

Найти температуру стержня $u(x, t)$ и, пользуясь таблицами интеграла ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

построить графики по x на интервале $0 \leq x \leq l$ функции $u(x, t)$ при $t = l^2/16a^2, t = l^2/2a^2, t = l^2/a^2$.

Указание. Удобно ввести безразмерные переменные

$$x' = x/l, \theta = a^2 t/l^2, v = u/u_0.$$

5. Конец полуограниченного цилиндра в начальный момент времени $t = 0$ открывают в атмосфере, где концентрация некоторого газа равна u_0 .

Найти концентрацию газа в цилиндре $u(x, t)$ для $t > 0$ и $x > 0$, если начальная концентрация $u(x, t) = 0$. Пользуясь таблицами интеграла ошибок, установить, через какое время в слое, отстоящем на расстоянии l от конца цилиндра, концентрация газа достигнет 95% внешней концентрации. Найти закон движения фронта постоянной концентрации.

6. К концу полуограниченного стержня, начальная температура которого была равна нулю, подводится тепловой поток $ku_x(0, t) = q(t)$. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, если:

а) стержень теплоизолирован с боков;

б) на боковой поверхности стержня происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой нулевой температуры.

Рассмотреть частный случай $q = q_0 = \text{const}$.

7. Конец полуограниченного стержня поддерживается при постоянной температуре u_0 ; на боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, постоянная температура которой равна u_1 . Начальная температура стержня равна нулю. Найти $u(x, t)$ — температуру стержня.

8. Решить задачи 6а, 6б, считая, что $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

9. Найти установившуюся температуру вдоль полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого

а) задана температура $u(0, t) = A \cos \omega t$;

б) задан тепловой поток $Q(t) = B \sin \omega t$;

в) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой меняется по закону $v(t) = C \sin \omega t$.

10. Пользуясь методом отражения, построить функцию влияния мгновенного точечного источника для ограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при граничных условиях 1-го и 2-го рода.

11. Неограниченный стержень составлен из двух однородных стержней, соприкасающихся в точке $x = 0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2 . Начальная температура

$$u(x, 0) = \Phi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{при } x < 0, \\ T_2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти температуру $u(x, t)$ стержня для случая, когда боковая поверхность теплоизолирована.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Температурные волны

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.

Температура на поверхности земли носит, как известно, ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \leq x \leq \infty$. Эта задача является характерной задачей без начальных условий, так как при многократном повторении температурного хода на поверхности влияние начальной температуры будет меньше влияния других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородность почвы). Таким образом, приходим к следующей задаче¹⁾:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < \infty, \quad -\infty < t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

Эта задача была рассмотрена в главе III. Ее решение имеет вид (см. гл. III, § 4, (7))

$$u(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x - \omega t\right). \quad (3)$$

На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной

$$A(x) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x},$$

т. е., если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии (первый закон Фурье).

2. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}} x$$

(второй закон Фурье).

3. Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное

¹⁾ Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x}.$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1 и T_2 глубины x_1 и x_2 , на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} x_1$$

(третий закон Фурье). Так, например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2 = 365 T_1$, показывает, что

$$x_2 = \sqrt{365} x_1 = 19,1 x_1,$$

т. е. что глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности была бы в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

В качестве примера приведем результаты наблюдений над годовыми температурными колебаниями на станции Гош в Приамурье¹⁾:

Глубина (м)	1	2	3	4
Амплитуды (°C)	11,5	6,8	4,2	2,6

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 м уменьшается до 13,3% своего значения на поверхности, равного 19,5°. На основании этих данных можно определить коэффициент температуропроводности почвы

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x, \quad a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}},$$

откуда находим, что коэффициент температуропроводности почвы равен

$$a^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Время запаздывания максимальной температуры на глубине 4 м достигает 4 месяцев.

Следует, однако, иметь в виду, что изложенная здесь теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемое этой теорией.

¹⁾ М. И. Сумгин, С. П. Качурин, Н. И. Толстихин, В. Ф. Тумель, Общее мерзотоведение, гл. V, Изд. АН СССР, 1940.

Температуропроводность является одной из характеристик тела, важных для изучения его физических свойств, а также для различных технических расчетов. На изучении распространения температурных волн в стержнях основан один из лабораторных методов определения температуропроводности¹⁾.

Пусть на конце достаточно длинного стержня поддерживается периодическая температура $\mu(t)$. Представив эту функцию в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right], \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},\end{aligned}$$

где T — период, и взяв температурные волны, соответствующие каждому слагаемому, получим, что температура $u(x, t)$ для любого x будет периодической функцией времени и ее n -я гармоника равна

$$\begin{aligned}u_n(x, t) &= a_n(x) \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n(x) \sin \frac{2\pi n}{T} t = \\ &= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}} x} \cos \left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}} x - \frac{2\pi n}{T} t + \frac{2\pi n}{T} \delta_n^0 \right]\end{aligned}$$

или

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1) + b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2) + b_n^2(x_2)}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}} (x_1 - x_2)}.$$

Эта формула показывает, что если произвести измерение температуры в каких-нибудь двух точках, x_1 и x_2 , за полный период, то, находя коэффициенты $a_n(x_1)$, $b_n(x_1)$, $a_n(x_2)$, $b_n(x_2)$ при помощи гармонического анализа, можно определить коэффициент температуропроводности стержня a^2 .

Периодические колебания температуры в стержне можно вызвать, например, следующим образом. Поместим один из концов стержня в электрическую печь и будем через одинаковые промежутки времени включать и выключать ток. В результате такого периодического нагревания в стержне через некоторое время установятся периодические колебания температуры; измеряя с помощью термопар температуры $u(x_1, t)$ и $u(x_2, t)$ в каких-либо двух точках, x_1 и x_2 , за полный период

¹⁾ Специальный физический практикум, т. I, Гостехиздат, 1945, задача 35.

изменения граничного режима и подвергая u_1 и u_2 описанной выше обработке, можно определить a^2 — коэффициент теплопроводности материала, из которого сделан стержень. Естественно, что для применимости изложенной выше теории стержень должен быть теплоизолирован с боков, а также должен быть проведен контроль температуры на другом конце стержня, чтобы иметь возможность пользоваться теорией температурных волн в полубесконечном стержне.

Для возможности использования теории температурных волн в полубесконечном стержне надо убедиться в том, что температура на свободном конце стержня постоянна. Это контролируется с помощью дополнительной термопары.

II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Для суждения о внутреннем температурном состоянии Земли мы имеем немногие данные, получаемые из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем. Суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое (порядка 10—20 м для годовых колебаний). Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящиеся к верхним 2—3 км земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на 3°C на каждые 100 м.

Первые попытки, относящиеся к концу прошлого столетия, дать теоретическое объяснение наблюдаемого геотермического градиента встретили непреодолимые трудности¹⁾. Эти попытки исходили из представления об охлаждении Земли, раскаленной в прошлом. Начальная температура, характеризующая этот процесс остывания, должна иметь порядок $T_0 = 1200^\circ\text{C}$ (температура плавления горных пород), а поверхностная температура имеет порядок 0°C и не могла значительно (больше 100°) отклоняться от этой величины за весь период существования жизни на Земле. Простейшая количественная теория остывания Земли приводит к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полупространстве $0 < z < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = 0.$$

¹⁾ Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

Решение этой задачи было рассмотрено в § 3 настоящей главы и дается формулой

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Градиент этой функции при $z = 0$ равен

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \bigg|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 t}}.$$

Подставляя сюда известные значения геотермического градиента $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ град/см, $T_0 = 1200^\circ \text{C}$, а также значение $a^2 = 0,006 \text{ см}^2/\text{сек}$, соответствующее среднему экспериментально определяемому коэффициенту температуропроводности гранитов и базальтов, получим для продолжительности процесса остывания значение $t = 0,85 \cdot 10^{15} \text{ сек} = 27\,000\,000 \text{ лет}$. Такое представление о возрасте Земли никак не согласовывалось с геологическими данными. Приближенный характер рассматриваемой теории (пренебрежение кривизной Земли, непостоянство коэффициента температуропроводности, приближенность значения T_0) не может, конечно, изменить порядка найденного значения для возраста Земли, который по современным данным оценивается приблизительно в $2 \cdot 10^9$ лет.

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления *радиоактивного распада*. Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывают ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{c\rho} \right),$$

где A — объемная плотность тепловых источников. На основании многочисленных измерений радиоактивности горных пород и их тепловыделения принято значение

$$A = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ кал/см}^3 \text{ сек}.$$

Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием и калием вместе с их продуктами распада.

Предположим, что плотность радиоактивных источников внутри земного шара постоянна и равна значению A , определенному для верхних слоев земной коры. В этом случае количество тепла, выделяющегося во всем земном шаре

за единицу времени, будет равно

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

Сделаем второе предположение о том, что Земля радиоактивным теплом не нагревается. В этом случае поток тепла через единицу поверхности

$$q = k \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \geq \frac{Q}{4\pi R^2},$$

где k и $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ суть коэффициент теплопроводности и геотермический градиент у поверхности Земли.

Отсюда для $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ при $z=0$ находим значение

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \geq \frac{AR}{3k} \cong 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ град/см},$$

где $R = 6,3 \cdot 10^3$ км — радиус Земли и $k = 0,004$ — среднее значение коэффициента теплопроводности осадочных пород.

Таким образом, геотермический градиент, вычисленный в предположении, что распределение радиоактивных элементов постоянно и что Земля не нагревается благодаря радиоактивному распаду, на два порядка превышает наблюдаемое значение геотермического коэффициента

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ град/см}.$$

Откажемся от гипотезы постоянства распределения радиоактивных элементов и предположим, что радиоактивные элементы расположены в слое мощности H у поверхности Земли. Пренебрегая кривизной Земли, получим для определения стационарной температуры уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & \text{для } 0 \leq z \leq H, \\ 0 & \text{для } z > H \end{cases}$$

с условиями

$$u(0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

Очевидно, что решение поставленной задачи равно

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k} \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right), & 0 \leq z \leq H, \\ \frac{A}{k} \frac{H^2}{2}, & z \geq H, \end{cases}$$

так как эта функция непрерывна вместе с первой производной при $z = H$ и удовлетворяет условиям задачи.

Определяя значение градиента этой функции при $z = 0$, равное

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

и сопоставляя его с наблюдаемым значением $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ град/см, находим, что

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км.}$$

Оценим влияние сделанной гипотезы стационарности температуры на величину геотермического градиента. Рассмотрим для этого решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leq z \leq H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$w(z, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0.$$

Решение этой задачи представляется, как мы видели в § 3, интегралом

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \xi; t - \tau) f(\xi) d\tau d\xi,$$

где G — функция источника для полубесконечной прямой, равная

$$G(z, \xi; t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - \tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}} - e^{-\frac{(z + \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}} \right\}.$$

Вычислим значение градиента при $z = 0$, принимая во внимание значение функции f :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{A}{c\rho 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\xi}{V[a^2(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t - \tau)}} d\xi d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2(t - \tau)} \int_0^{H^2} \frac{H^2}{4a^2(t - \tau)} e^{-a} da d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2\theta} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}} \right] d\theta, \quad \text{где } \theta = t - \tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\},$$

где

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{a^2}{H} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \theta}}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma} \Big|_{\sigma_0}^{\infty} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

откуда

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho a^2} \left\{ \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 t}} \right] + H \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma \right\}. \quad (1)$$

Отметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{k} H,$$

так как $c\rho a^2 = k$, предел первого слагаемого в фигурных скобках равен нулю, а предел второго слагаемого равен H .

Вычислим отклонение $\frac{\partial w}{\partial z}$ от его предельного значения для

$$t = 2 \cdot 10^9 \text{ лет} = 6 \cdot 10^{16} \text{ сек.}$$

Значение σ_0 мало:

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^6}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \cong 0,025.$$

Разлагая функции, входящие в формулу (1), в ряды, получим:

$$\frac{A}{k} H - \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\pi} \sigma_0} [\sigma_0^2 + \dots] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{k} H \cdot 0,014,$$

т. е. $\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0}$ отличается от своего предельного значения на 1,4%.

Нетрудно было бы вычислить функцию $w(z, t)$ для $z > 0$ и убедиться, что для $z \geq H$, $w(z, t)$ далеко еще не достигает своего предельного значения для t , равного возрасту Земли¹⁾ (хотя, как мы убедились, градиент у поверхности практически равен своему предельному значению).

¹⁾ А. Н. Тихонов, О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 1937, стр. 431—459.

Приведенные выше рассуждения носят, конечно, лишь оценочный характер; однако, принимая во внимание весьма большую устойчивость скорости радиоактивного распада, не изменяющейся под воздействием доступных нам температур и давлений, мы должны прийти к заключению о том, что концентрация радиосактивных элементов должна быстро убывать с глубиной, если основываться на значении A для верхних слоев земной коры, установленном многочисленными измерениями. Физическое объяснение, позволяющее установить закон убывания концентрации радиоактивных элементов с глубиной, до сих пор отсутствует.

III. Метод подобия в теории теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен метод подобия. В качестве примера рассмотрим две задачи.

1. Функция источника для бесконечной прямой. Уравнение теплопроводности, как нетрудно видеть, остается неизменным при преобразовании переменных

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \quad (1)$$

т. е., если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

Будем искать сначала решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

При указанном выше изменении масштабов начальное условие (3) остается также без изменения, поэтому для функции $u(x, t)$ должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \quad (4)$$

при любых значениях x , t и k .

Полагая

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad (5)$$

получим:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (6)$$

Таким образом, u зависит только от аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \quad (7)$$

Вычисляя производные для u из формулы (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

подставляя в уравнение теплопроводности (2) и сокращая на множитель $u_0/4t$, получаем:

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \quad (8)$$

при дополнительных условиях

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad (9)$$

соответствующих начальному условию для функции u .

Интегрируя уравнение (8) будем иметь:

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = C e^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Здесь нижний предел выбран так, чтобы выполнялось первое условие (9). Чтобы удовлетворить второму условию (9), следует положить:

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right], \quad (10)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(интеграл ошибок). Если начальное значение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при } x > \bar{x}, \\ 0 & \text{при } x < \bar{x}, \end{cases} \quad (11)$$

то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (12)$$

Обратимся теперь к решению второй вспомогательной задачи, где начальные значения задаются в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_2 < x, \\ u_0 & \text{при } x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{при } x < x_1. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right].$$

Начальная температура u_0 соответствует количеству тепла

$$Q = c\rho(x_2 - x_1)u_0.$$

Если

$$Q = c\rho,$$

то

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right]. \quad (14)$$

Функция влияния источника, сосредоточенного в точке, очевидно, представляет предел функции $u(x, t)$ при $x_2 - x_1 \rightarrow 0$.

Предельный переход в формуле (14) дает:

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right]_{\xi=x_1}, \quad (15)$$

так как в правой части формулы (14) стоит разностное отношение, пределом которого является производная в (15).

Производя дифференцирование, находим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}}, \quad (16)$$

т. е. $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ — функция мгновенного точечного источника.

2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17)$$

с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному и начальному условиям

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \quad (18)$$

предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0 ¹⁾.

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ . Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке M

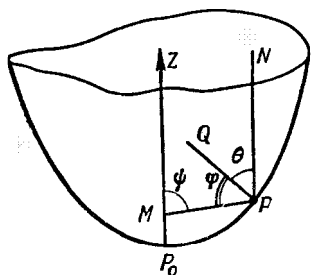


Рис. 63.

оси z , направленной по внутренней нормали, равна

$$\frac{dV}{dz}(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \psi}{R_{MP}^2} \mu(P) d\sigma_P, \quad (44)$$

где ψ — угол между осью z и вектором \vec{MP} . Проведем из точки P (рис. 63) нормаль PQ и прямую PN , параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ , равный углу между нормалью в точке P и осью z (нормали в точке P_0 ²⁾). Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos \varphi}{R^2}$, где $\varphi = \angle MPQ$. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

$$\cos(\pi - \psi) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \Omega = -\cos \psi,$$

где Ω — двугранный угол с ребром PQ ³⁾. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(M) &= - \iint_{\Sigma} (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^2} d\sigma = \\ &= -W_1 - I(M), \end{aligned} \quad (45)$$

¹⁾ Предел разностного отношения $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ при $M \rightarrow P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0 .

²⁾ Очевидно, что θ и $\sin \theta$ стремятся к нулю, когда $P \rightarrow P_0$. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_0 , т. е. ее уравнение можно представить в виде

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin \theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и, следовательно,

$$\sin \theta < Ar$$

(для поверхностей Ляпунова $\sin \theta < Ar$ ⁶⁾).

³⁾ Если направление PQ принять за ось новой сферической системы, то эта формула совпадает с формулой (13) на стр. 326.

для преобразованной функции уравнение $\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\frac{\partial u}{\partial t}$ с начальными и граничными условиями $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 1$. Полагая

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}},$$

получаем для f уравнение

$$\frac{d}{dz} \left[(1 + \alpha f) \frac{df}{dz} \right] = -2z \frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (22)$$

Если коэффициент теплопроводности $k(u)$ является степенной функцией температуры, $k(u) = k_0 u^\sigma$, $k_0 = \text{const} > 0$, $\sigma > 0$, а вместо (18) заданы условия $u(0, t) = u_0 t^n$, $n > 0$, $u(x, 0) = 0$, то уравнение (17) при $c\rho = 1$ имеет решения вида $u(x, t) = t^n f(z)$, где $z = x/ct^m$, $m = (1 + n\sigma)/2$, $c = \text{const} > 0$. В частности, при $n = \sigma$ получаем решения типа «температурной волны», распространяющейся с конечной скоростью c : $u(x, t) = u_0 t^n \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ при $x \leq ct$, $u(x, t) = 0$ при $x \geq ct$ (см. Допол-

нение I, рис. 87). На рис. 42 приведены результаты численного интегрирования уравнения (22) для различных значений α .

IV. Задача о фазовом переходе

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания¹⁾.

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x = \xi(t)$. За время t , $t + \Delta t$ граница $x = \xi$ переместится от точки $\xi = x_1$ до точки $\xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплавляется, если $\Delta\xi < 0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через

¹⁾ Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XIII, Гостехиздат, 1937.

границы $\xi = x_1$ и $\xi = x_2$, т. е. должно выполняться условие

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x_2} \right] \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а λ — скрытая теплота плавления.

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, мы и получим дополнительное условие на границе раздела в следующем виде:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}.$$

Это условие имеет место как для процесса затвердевания (когда $\Delta \xi > 0$ и $\frac{d\xi}{dt} > 0$), так и для процесса плавления (когда $\Delta \xi < 0$ и $\frac{d\xi}{dt} < 0$); направление процесса определяется знаком левой части.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x \geq 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x = 0$. В начальный момент $t = 0$ вода обладает постоянной температурой $c > 0$. Если на поверхности $x = 0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1 < 0$, то граница замерзания $x = \xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & \text{для } 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & \text{для } \xi < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c_1 & \text{при } x = 0, \\ u_2 &= c & \text{при } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при } x = \xi, \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}. \quad (4)$$

где k_1 , a_1^2 и k_2 , a_2^2 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз. Задачу (1) — (4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right),$$

где A_1 , B_1 , A_2 и B_2 — пока неопределенные постоянные, а Φ — интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Удовлетворяя условиям (2) и (3), получим:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

из условия (2) и

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1 \sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2 \sqrt{t}}\right) = 0$$

из условия (3). Последние условия должны иметь место для любых значений t . Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \quad (5)$$

где α — некоторая постоянная. Соотношение (5) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных A_1 , B_1 , A_2 , B_2 и α получаются выражения

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы определить постоянную α , надо воспользоваться соотношением (4)

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7)$$

Решение этого трансцендентного уравнения и дает значение α . Наличие хотя бы одного решения при $c_1 < 0$, $c > 0$ следует уже

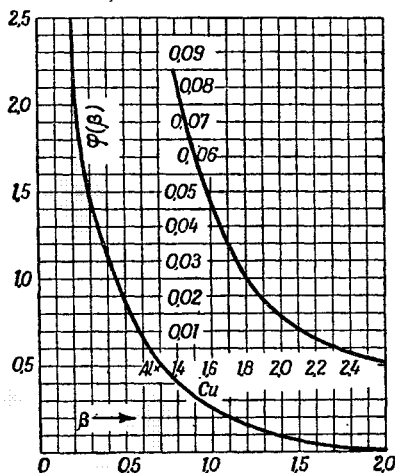


Рис. 43.

из того, что при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ ¹⁾, а правая — от 0 до $-\infty$. В случае, если c равно температуре плавления ($c=0$), то выражения (6) и (7) для определения коэффициентов принимают более простой вид:

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \quad (6')$$

и

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda \rho a \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7')$$

Положив $\alpha/2a_1 = \beta$, можем переписать уравнение (7') в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

где постоянная D определяется выражением

$$D = \frac{\lambda \rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Воспользовавшись графиком функции $\varphi(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi} \Phi(\beta)}$, данным на рис. 43, легко графически определить значение α .

Решение задачи о промерзании может быть также получено при помощи метода подобия, приведенного в приложении III к этой главе. Задача о промерзании является в некотором смысле предельным случаем нелинейных краевых задач, рассмотренных в приложении III. В самом деле, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости в задаче о промерзании являются кусочно-постоянными функциями, и, кроме того, при $u=0$ теплоемкость имеет бесконечно большое значение. Этот случай можно получить как предельный при $\varepsilon \rightarrow 0$, когда скрытая теплота выделяется не мгновенно, а на некотором промежутке

¹⁾ Асимптотическое представление функции $1 - \Phi(z)$ при $z \rightarrow \infty$ см. стр. 718.

$-\varepsilon, +\varepsilon$, причем должно выполняться условие

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u) du = \lambda.$$

Однако эту задачу можно решить и непосредственно, пользуясь методом подобия. Нетрудно проверить, что все условия задачи останутся неизменными, если масштаб длины увеличить в k раз, а масштаб времени — в k^2 раз. Это значит, что решение задачи зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$, т. е. что

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что движение нулевой изотермы будет описываться уравнением $\xi = \alpha\sqrt{t}$, где α — значение аргумента, при котором $f(\alpha) = 0$. Для определения функции f мы имеем следующие условия:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad \text{для } 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad \text{для } \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f'_1(\alpha) - k_2 f'_2(\alpha) = \lambda \rho \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2a_1}\right), & \text{если } 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2a_2}\right), & \text{если } \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

Для определения постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 мы должны использовать условия (2) и (3), из которых вытекают формулы (6). Для определения α получается условие (7). Таким образом, аналитическая часть решения в обоих методах одинакова.

Изложенные здесь соображения показывают, что задачу о промерзании можно решать также и в тех случаях, когда скрытая теплота выделяется не при фиксированной температуре, а на некотором интервале температур. Подобным же методом можно решить задачу, если имеется не одна, а несколько критических температур, что встречается при фазовых превращениях в процессе перехода от одной кристаллической структуры к другой, например при перекристаллизации стали. Наиболее эффективным методом численного решения задач о фазовых

переходах является метод конечных разностей, который применим для случая двух и трех пространственных переменных при наличии нескольких фазовых переходов (см. Дополнение I, § 4).

V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова

Микроскопические частицы, находящиеся в среде в свободном, взвешенном состоянии, совершают беспорядочное движение, называемое броуновским. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0 , находиться в момент t в малой окрестности ΔV точки M функцией

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \quad (1)$$

Вероятность здесь понимается в том смысле, что если в течение некоторого малого промежутка $t_0 + \Delta t$ из точки M_0 выходит достаточно большое количество частиц N (причем взаимодействие между ними пренебрежимо мало), то концентрация этих частиц при $\Delta t \rightarrow 0$ в точке M в момент t будет равна $W(M, t; M_0, t_0)$, если за единицу массы частиц принять всю массу выходящих из точки M_0 частиц.

С подобным же явлением мы встречаемся при диффузии газа, происходящей в какой-либо (например, воздушной) среде. Функция $W(M, t; M_0, t_0)$ представляет функцию точечного источника, соответствующего единичной массе.

Очевидно, что

$$\int W(M, t; M_0, t_0) dV_M = 1 \quad (t > t_0) \quad (2)$$

и что если начальная концентрация частиц в некоторый момент времени t_0 равна $\varphi(M)$, то концентрация $u(M, t)$ этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_P, \quad (3)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из последнего равенства следует уравнение ¹⁾

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0) dV_P \quad (4) \\ (t_0 < \theta < t),$$

имеющее место для любого значения $t_0 < \theta < t$. Это последнее уравнение называют уравнением Эйнштейна — Колмогорова.

¹⁾ М. А. Леонтович, Статистическая физика, гл. VI, Гостехиздат, 1944; А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятности, Успехи математических наук, вып. V, 1938.

Покажем, что при определенных условиях, наложенных на функцию $W(M, t; M_0, t_0)$, решение уравнения Эйнштейна — Колмогорова удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными параболического типа. Рассмотрим случай, когда положение точки M характеризуется одной координатой x . Предположим, что функция $W(x, t; x_0, t_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{x - \xi}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi = A(\xi, t). \quad (5)$$

Если за время τ частица переходит из положения ξ в положение x , то $\frac{x - \xi}{\tau}$ является средней скоростью частицы. Таким образом, первое условие означает требование существования конечной скорости упорядоченного движения частицы.

2°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - \xi)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi = 2B(\xi, t). \quad (6)$$

Величина $(x - \xi)^2$ не зависит от направления смещения точки x относительно точки ξ . Среднее значение квадрата отклонения за время τ

$$\overline{(x - \xi)^2} = \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx$$

обычно рассматривается как мера неупорядоченности движения за этот промежуток времени. Требование 2° означает предположение линейной зависимости среднего квадрата от времени при малых τ .

3°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{|x - \xi|^3}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int |x - \xi|^3 \cdot W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi = 0. \quad (7)$$

Функция $W(x, t + \tau; \xi, t)$, являющаяся функцией точечного источника, для малых значений τ должна быстро убывать, когда $|x - \xi| \rightarrow \infty$, и возрастать, когда $|x - \xi|$ мало.

Для получения дифференциального уравнения Эйнштейна — Колмогорова умножим обе части уравнения (4) на произвольную функцию $\psi(x)$, обращаящуюся в нуль вместе со своей производной на границах области интегрирования, и проинтегрируем по всей этой области:

$$\begin{aligned} \int W(x, t + \tau; x_0, t_0) \psi(x) dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi \int W(x, t + \tau; \xi, t) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Разложив в правой части функцию $\psi(x)$ в ряд Тейлора по $x - \xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x - \xi)^3,$$

где ξ^* — среднее значение, заключенное между x и ξ , и разделив на τ , после простых преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{W(x, t + \tau; x_0, t_0) - W(x, t; x_0, t_0)}{\tau} dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) \left[\psi'(\xi) \frac{x - \xi}{\tau} + \psi''(\xi) \frac{(x - \xi)^2}{2\tau} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{3! \tau} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx. \end{aligned}$$

Предполагая, что $\psi'''(x)$ ограничена

$$|\psi'''(x)| < A$$

и учитывая, что

$$\int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi = 1,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx \right| \leq \\ \leq \frac{A}{\tau} \int |x - \xi|^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = \frac{A |x - \xi|^3}{\tau}. \end{aligned}$$

Из условия 3° вытекает, что это выражение при $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ и используя условия 1°, 2°, получаем:

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{\partial W(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) [\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)] d\xi. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям правой части, принимая во внимание, что функция ψ обращается в нуль вместе со своей производной на границе области интегрирования, получим:

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольной функции $\psi(x)$, то для функции вероятности $W(x, t; x_0, t_0)$ мы получаем дифференциальное уравнение Эйнштейна — Колмогорова

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial(AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Полученное уравнение является уравнением параболического типа, подобным уравнению теплопроводности, и может быть записано в виде

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x} (BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \quad (9)$$

где

$$\alpha = -A + B_x, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

Из уравнения (9) видно, что величина B имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если рассматриваемый процесс однороден в пространстве и времени, т. е. функция W зависит только от разности $\xi = x - x_0$ и $\theta = t - t_0$, то коэффициенты A и B не зависят от x и t и являются постоянными. Уравнение (8) в этом случае является уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Если функция W зависит только от $|x - \xi|$, т. е. вероятности смещения направо и налево на одинаковые расстояния от точки ξ равны, то очевидно, что A должно быть равно нулю. Аналитически это следует из формулы (5) в силу того, что подинтегральная функция нечетна.

В этом случае уравнение (8) является простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (11)$$

VI. δ -функция

1. Определение δ -функции. Наряду с непрерывно распределенными величинами (масса, заряд, тепловые источники, механический импульс и т. п.) часто приходится иметь дело с сосредоточенными величинами (точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и т. д.). Не следует забывать, что эти понятия являются «предельными образами» и могут быть характеризованы при помощи понятия «обобщенных функций»¹⁾.

Имея в виду физический смысл задачи, рассмотрим потенциал в точке M (см. главу IV, § 5) единичной массы, сосредоточенной внутри некоторого объема T в окрестности точки M_0 . Возьмем какую-либо последовательность функций $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$), каждая из которых равна нулю вне шара $S_{\epsilon_n}^{M_0}$ радиуса ϵ_n с центром в точке M_0 , где $\epsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и для

¹⁾ См. подробнее Р. Курант, Уравнения с частными производными, Москва, 1964, а также И. М. Гельфанд и Е. Г. Шилев, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.

которых, начиная с некоторого n ,

$$\int_T \int \int \rho_n(P) d\tau_P = \int \int \int_{S_{e_n}^{M_0}} \rho_n(P) d\tau_P = 1. \quad (1)$$

Рассматривая последовательность функций

$$u_n = \int \int \int \frac{\rho_n}{r} d\tau,$$

являющихся потенциалами масс, распределенных с плотностями ρ_n , и совершая предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0 M}}. \quad (2)$$

Этот результат, очевидно, не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$. Хотя последовательность $\{u_n\}$ и сходится к $1/r$, однако последовательность $\{\rho_n\}$ не имеет предела в классе рассматриваемых кусочно-дифференцируемых функций. «Предельный образ», соответствующий последовательности $\{\rho_n\}$, называют функцией $\delta(M, M_0)$.

Основным свойством, определяющим δ -функцию, является следующее формальное операторное соотношение:

$$\int_T \int \int \delta(M_0, M) f(M) d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & \text{если } M_0 \in T, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin T, \end{cases} \quad (3)$$

где $f(M)$ — произвольная непрерывная функция точки M . Имея в виду, что при $n \rightarrow \infty$ функции ρ_n равномерно стремятся к нулю во всякой области, не содержащей точки M_0 , и неограниченно возрастают в окрестности $S_{e_n}^{M_0}$ точки M_0 , иногда определяют δ -функцию формально при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} \delta(M, M_0) &= 0 && \text{при } M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) &= \infty && \text{при } M = M_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и

$$\int_T \int \int \delta(M, M_0) d\tau_M = \begin{cases} 1 & \text{при } M_0 \in T, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin T. \end{cases} \quad (5)$$

Равенство (5) является очевидным следствием формулы (3) при $f = 1$.

При рассмотрении последовательностей функций в различных задачах приходится иметь дело с разными определениями сходимости.

Говорят, что последовательность функций

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (6)$$

сходится равномерно на интервале (a, b) , если для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n, m > N$ для любого x из (a, b) будет выполняться условие

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \epsilon \text{ при } n, m > N.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится в среднем на интервале (a, b) , если для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n, m > N$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится слабо на интервале (a, b) , если для любой непрерывной функции f существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

При рассмотрении сходящихся последовательностей обычно вводят предельные элементы последовательностей. Рассмотрим класс непрерывных функций на интервале (a, b) . В случае равномерной сходимости предельный элемент принадлежит тому же классу функций, что не всегда имеет место для сходимости в среднем и слабой сходимости.

Если предельный элемент не принадлежит рассматриваемому классу функций, то вводят предельные элементы, расширяя исходный класс. При этом под расширением понимается совокупность исходных и предельных элементов. С понятием расширения встречаются в теории действительного числа, когда иррациональные числа вводятся как предельные элементы, определяемые классом эквивалентных последовательностей.

Говоря о предельных элементах в смысле слабой сходимости, мы будем говорить, что две последовательности, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, имеют один и тот же предельный элемент, если эти последовательности эквивалентны, т. е. последовательность $\{u_n - v_n\}$ слабо сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Будем называть последовательность неотрицательных функций $\{\delta_n\}$ нормированной локальной последовательностью точки x_0 ,

если функция δ_n равна нулю вне интервала $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{\delta_n\}$ сходится слабо. Предельный элемент последовательности $\{\delta_n\}$ обычно называют δ -функцией в точке x_0 .

В том случае, если предельный в смысле слабой сходимости элемент u последовательности $\{u_n\}$ выходит из класса функций u_n , то интеграл от произведения некоторой функции $f(x)$ на элемент u определяется как предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx = \int_a^b f(x) u dx.$$

Очевидно, что для δ -функции точки x_0 имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) \delta(x_0, x) dx = f(x_0).$$

Это соотношение часто принимают за определение δ -функции.

2. Разложение δ -функции в ряд Фурье. δ -функцию можно определить так же, как предельный образ других последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости приведенной выше последовательности $\delta_n(x)$ локальных нормированных функций точки x_0 .

Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n(x_0, x) &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{m\pi}{l} x_0 \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x + \sin \frac{m\pi}{l} x_0 \sin \frac{m\pi}{l} x \right) = \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \cos \frac{m\pi}{l} (x - x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

или в комплексной форме

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l} \sum_{-n}^n e^{im \frac{\pi}{l} (x - x_0)}, \quad (7')$$

определенную на интервале $(-l, l)$.

Очевидно, что для любой функции $g(x)$, разлагаемой в ряд Фурье, имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \bar{\delta}_n(x_0, x) g(x) dx = g(x_0), \quad (8)$$

которое показывает, что в классе функций $\{g(x)\}$, разлагаемых в ряды Фурье, приведенная выше последовательность $\delta_n(x_0, x)$ эквивалентна в смысле слабой сходимости последовательности $\bar{\delta}_n(x_0, x)$, т. е. что

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{\pi m}{l} (x_0 - x), \quad (9)$$

если это равенство понимать с изложенной выше точки зрения слабой сходимости.

С этой же точки зрения имеет место равенство

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(x_0), \quad (10)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортогональная и нормированная система функций, определенная на некотором интервале (a, b) , а также равенство

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0-x)} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x_0 - x) dk. \quad (11)$$

Покажем, что при вычислении интегралов, содержащих δ -функцию, можно пользоваться рядом (9), производя почленное интегрирование подынтегральной функции.

Рассмотрим некоторую функцию $g(x)$, разложимую в ряд Фурье, и интеграл

$$\int_{-l}^l g(x) \delta(x_0, x) dx.$$

Подставляя сюда вместо $\delta(x_0, x)$ ее выражение из формулы (9), выполним почленное интегрирование ряда, стоящего под знаком интеграла. В результате получим:

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos \frac{\pi m}{l} x + \bar{g}_m \sin \frac{\pi m}{l} x \right), \quad (11')$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \cos \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \sin \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Сопоставление формулы (11) с равенством

$$\int_{-l}^l \delta(x, x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (-l < x_0 < l)$$

показывает, что выполненное выше почленное интегрирование ряда для δ -функции приводит к правильному результату.

Таким образом, в классе функций, разложимых в ряд Фурье, последовательность частичных сумм

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^k e^{i \frac{\pi n}{l} (x-x')}$$

эквивалентна нормированной локальной последовательности $\{\delta_n\}$.

Другие формы представления δ -функции также основаны на использовании некоторых функциональных последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости последовательности $\{\delta_n\}$.

3. Применение δ -функции к построению функции источника. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (15)$$

Заданной функции $\varphi(x)$ соответствует единственное решение задачи

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)].$$

Допустим, что оператор \mathcal{L} можно представить в виде

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где $G(x, \xi, t)$ — ядро оператора \mathcal{L} .

Для того чтобы найти ядро $G(x, \xi, t)$, положим:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (14')$$

Заменяя в формуле (16) $\varphi(x)$ δ -функцией, получим:

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \quad (17)$$

т. е. $G(x, x_0, t)$ является решением задачи (13) при начальном условии (14').

Представим δ -функцию в виде ряда Фурье

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Ядро G , очевидно, надо искать в виде суммы

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (18)$$

каждое слагаемое которой должно удовлетворять уравнению теплопроводности. Отсюда следует, что

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Из начального условия сразу же получаем:

$$B_n = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Таким образом, мы формально получили для ядра G выражение

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0, \quad (19)$$

совпадающее с представлением для функции источника, которое было исследовано в § 3. Решение задачи (13) — (15) дается формулой (16), где $G(x, x_0, t)$ — функция, определяемая формулой (19).

Подобным же образом можно найти выражение для функции источника на неограниченной прямой. Функция G в этом случае будет определяться условиями

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (21)$$

Имея в виду разложение δ -функции в интеграл Фурье

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda,$$

будем искать $G(x, x_0, t)$ в виде

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_\lambda(t) \cos \lambda (x - x_0) d\lambda. \quad (22)$$

Из уравнения (20) находим:

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (23)$$

Полагая $t = 0$ и сравнивая формулы (23) и (21), получаем:

$$A_\lambda^{(0)} = 1.$$

Таким образом,

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda.$$

Вычисление этого интеграла дает:

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

Отсюда следует, что решение задачи о распространении начальной температуры на бесконечной прямой должно выражаться формулой

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Выяснение границы применимости формул, полученных методом δ -функции, требует специального исследования.

В качестве примера рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \quad (25)$$

где $F(x, t)$ — плотность распределенных тепловых источников. Если в точке $x = \xi$ в момент $t = t_0$ помещен мгновенный источник тепла мощности Q_0 , то

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi) \delta(t - t_0). \quad (26)$$

Найдем решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho} \delta(x - \xi) \delta(t - t_0) \quad (t_0 > 0) \quad (27)$$

при нулевом начальном условии

$$u(x, 0) = 0.$$

Учитывая интегральное представление

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x - \xi) d\lambda,$$

будем искать функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_{\lambda}(t) \cos \lambda (x - \xi) d\lambda.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), получаем уравнение для $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2 \lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \delta(t - t_0)$$

с начальным условием

$$u_\lambda(0) = 0.$$

Как известно, решение неоднородного уравнения

$$\dot{u} + a^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-a^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

В нашем случае

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{Q_0}{c\rho} e^{-a^2 \lambda^2 (t-t_0)} & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 (t-t_0)} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho} G(x, \xi, t - t_0),$$

где

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}}$$

— функция влияния мгновенного точечного источника.

Подобный метод построения функции влияния часто используется в теоретической физике¹⁾.

¹⁾ См. подробное изложение теории δ -функции и многочисленные примеры ее применения в книге Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова, Классическая теория поля, гл. I, Гостехиздат, 1951.