

**С. В. ВАЛЛАНДЕР**

**ЛЕКЦИИ  
ПО ГИДРОАЭРОМЕХАНИКЕ**



ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

ЛЕКЦИИ  
ПО ГИДРОАЭРОМЕХАНИКЕ



Издательство Ленинградского университета  
Ленинград, 1978

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Ленинградского университета*

УДК 532

**Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике.** Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. Ил. — 58, библиогр. — 5 назв. 296 с.

В учебном пособии рассматриваются следующие вопросы: вывод общей системы уравнений гидромеханики, записи этой системы для различных наиболее распространенных моделей жидкости, основы гидродинамики идеальной и вязкой жидкости.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов математико-механических и физических факультетов университетов, аспирантов, научных сотрудников и инженеров, специализирующихся в области гидроаэромеханики.

Под редакцией проф. Н. Н. Поляхова

Б 20303—135  
076(02)—78 86—78

© Издательство Ленинградского  
университета, 1978 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой изложение курса, который много лет читал чл.-кор. АН СССР проф. Сергей Васильевич Валландер на математико-механическом факультете Ленинградского университета. Книга подготовлена на основе записей, сделанных в различные годы слушателями лекций Сергея Васильевича.

С. В. Валландер неоднократно собирался сам подготовить курс к печати, но, к сожалению, в силу большой занятости так и не успел этого сделать.

Никакие конспекты, конечно, не могут полностью воспроизвести содержание лекций, стиль автора, его образный точный язык, лаконичные четкие формулировки.

Однако на основании записи лекций можно сравнительно точно передать структуру курса, научные концепции автора и методы рассмотрения задач гидроаэромеханики.

В различные годы С. В. Валландер по-разному излагал отдельные вопросы. Для настоящего курса выбирался тот вариант, который при одинаковой содержательности являлся наиболее кратким. Некоторые второстепенные вопросы составители вообще не включили в данный курс. Вместе с тем по совету рецензентов были введены некоторые дополнения и примеры, которые отсутствовали в рецензируемом варианте, так как не всегда излагались в лекциях.

В книге нет вводной и заключительной лекций Сергея Васильевича, к сожалению, неповторимых. Студенческие записи не могли передать их содержание достаточно точно, и потому излагать эти лекции от имени Сергея Васильевича составители книги не сочли возможным.

Книга подготовлена к печати группой преподавателей и сотрудников кафедры в составе А. В. Беловой, Н. Б. Масловой, Е. А. Нагнибеда, А. Ф. Полянского, М. А. Рыдалевской.

При окончательном редактировании рукописи большую помощь постоянной консультацией и своими замечаниями оказал Б. В. Русанов — один из первых учеников С. В. Валландера, доцент кафедры математической физики Ленинградского политехнического института.

Перечисленным выше лицам, а также всем, кто содействовал изданию этой книги, отделение механики выражает свою благодарность.

Отделение механики математико-механического факультета ЛГУ приносит глубокую благодарность рецензентам чл.-кор. АН СССР проф. О. М. Белоцерковскому и заслуженному деятелю наук РСФСР проф. Л. Г. Лойцянскому за ряд ценных советов и замечаний, сделанных ими при просмотре рукописи.

Заведующий отделением механики  
математико-механического факультета ЛГУ,  
заслуженный деятель науки РСФСР,  
профессор Н. Н. Поляхов

## **ВВЕДЕНИЕ**

**1. Основные положения.** Гидроаэромеханика есть раздел механики, посвященный изучению законов движения и равновесия жидкостей, а также законов взаимодействия жидких сред с находящимися в них телами.

Понятие жидкости в широком смысле этого слова охватывает в гидроаэромеханике как мало сжимаемые капельные жидкости, так и легко сжимаемые жидкости, которыми являются газы.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что газы при скоростях, небольших по сравнению со скоростью распространения звука в них, ведут себя как несжимаемые жидкости. А капельные жидкости (например, вода) при больших давлениях ведут себя как сжимаемые жидкости.

В основе классической гидроаэромеханики, рассматриваемой в настоящем курсе, лежат следующие предположения:

справедливость классической механики — механики Ньютона,  
справедливость классической термодинамики,  
справедливость схемы сплошной среды.

Первое предположение означает, что исследуются движения, скорости которых малы по сравнению со скоростью света, и поэтому не надо пользоваться релятивистской механикой, и что рассматриваются объекты, гораздо большие объектов микромира, изучаемых квантовой механикой.

Термодинамически равновесным состоянием системы называется такое состояние, в котором все характеристики внутреннего состояния замкнутой системы при сохранении внешних условий могут сколь угодно долго сохранять свои значения. В условиях термодинамического равновесия состояние жидкости (газа) можно определить с помощью нескольких макроскопических параметров (таких, например, как плотность, скорость, температура).

Переход к состоянию термодинамического равновесия требует времени. Время, характеризующее быстроту, с которой затухают отклонения системы от равновесия, называют временем релаксации. Если время, необходимое для установления равновесия, очень мало по сравнению с временем, на котором заметным образом меняются макроскопические параметры газа, то в окрестности каждой точки мы будем иметь дело с жидкостью, находящейся в состоянии термодинамического равновесия или близком к нему, и можем пользоваться для описания ее термодинамическими законами.

Смысл третьего предположения будет подробно рассмотрен ниже.

**2. Понятие физически бесконечно малого объема и схема сплошной среды.** Представим себе, что имеется некоторая среда и что в объеме  $\tau$  заключена масса среды  $M$ . Тогда можно найти

ее среднюю плотность  $\rho_{cp} = \frac{M}{\tau}$ . Предположим, что объем  $\tau$  уменьшается, стягиваясь в точку. В силу неоднородности среды плотность  $\rho_{cp}$  сначала будет заметно зависеть от объема, затем, когда среда в объеме  $\tau$  станет почти однородной, плотность практически не будет изменяться. Такая зависимость  $\rho_{cp}$  от объема оказывается справедливой до тех пор, пока в объеме еще достаточно большое число молекул. При дальнейшем уменьшении объема плотность начнет испытывать резкие колебания. Это связано с тем, что расстояния между молекулами оказываются сравнимыми с размерами объема, и при небольших изменениях объема в одних случаях число молекул в объеме может остаться неизменным, в других — может уменьшиться. В первом случае плотность возрастет (масса постоянна, объем уменьшился), во втором плотность может резко падать.

Объем, размеры которого, с одной стороны, пренебрежимо малы по сравнению с характерным размером рассматриваемого явления, так что его средние характеристики можно считать постоянными, а с другой стороны, содержит в себе настолько много молекул, что эти характеристики будут устойчивы по отношению к изменению объема, будем называть физически бесконечно малым объемом. Во всех дальнейших рассуждениях слова «объем стягивается в точку» и запись  $\tau \rightarrow 0$  будут означать переход к физически бесконечно малому объему. Кроме пространственного приходится также иметь дело с пространственно-временным физически бесконечно малым объемом.

Если отвлечься от молекулярного строения жидкости, то можно представить ее как непрерывно распределенную (размазанную) по пространству среду, обладающую физическими свойствами реальной жидкости. Такая среда является приближенной моделью реальной жидкости, которая дает достаточную точность при ее изучении. Для такой среды мы можем уже строго стягивать объем в точку и делать предельный переход в обычном

смысле. Предположение о справедливости модели сплошной среды равносильно предположению о существовании физически бесконечно малого объема.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятием частицы (бесконечно малой частицы), подразумевая под жидкостью частицей малый жидкий объем (физически бесконечно малый жидкий объем). В силу малости этот объем можно рассматривать как поступательно движущийся и движение частицы представлять себе, как движение материальной точки, характеризуемой конечным числом параметров.

Трактуя жидкость как непрерывную сплошную среду, будем в дальнейшем все функции, имеющие гидродинамический смысл, считать достаточно гладкими, т. е. непрерывными и имеющими достаточное число производных.

**3. Некоторые основные величины.** Остановимся на понятиях плотности, скорости, напряжения. Считаем момент времени  $t$  фиксированным. Выделим в жидкости некоторый объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Пусть  $M$  — масса жидкости, заключенная в объеме  $\tau$ ,  $K$  — вектор количества ее движения.

Плотность жидкости в данной точке понимается как предел, к которому стремится величина  $\rho_{cp}$ , когда объем стягивается к точке, т. е.

$$\rho = \lim_{\tau \rightarrow 0} \rho_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{M}{\tau}.$$

Скоростью точки сплошной среды, как известно из кинематики, называется производная  $v = \frac{dr}{dt}$ , где  $r$  — радиус-вектор, определяющий положение точки. Имея в виду, что наша сплошная среда является моделью реальной жидкости, имеющей молекулярное строение, определим среднюю по объему скорость  $v$  как отношение количества движения к массе:  $v_{cp} = \frac{K}{M}$ . Соответственно скорость в точке, к которой стягивается объем  $\tau$ , будет

$$v = \lim_{\tau \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{K}{M}.$$

Действие жидкости, находящейся вне поверхности  $S$ , на жидкость, находящуюся внутри  $S$ , может быть представлено действием системы сил, распределенных по поверхности  $S$ . Выделим на поверхности площадку  $\Delta S$ . Пусть  $n$  — нормаль к  $\Delta S$  в какой-то средней точке  $A$ . Обозначим через  $F_n$  силу, с которой жидкость, находящаяся с той стороны площадки, куда направлена нормаль, действует на жидкость, находящуюся с другой стороны площадки  $\Delta S$ . Тогда средней поверхностной силой, приходящейся на единицу площади (напряжением), будет вектор

тор  $\tau_{n_{cp}} = \frac{F_n}{\Delta S}$ . Предел, к которому стремится  $\tau_{n_{cp}}$ , когда  $\Delta S$  стягивается к точке A:

$$\tau_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \tau_{n_{cp}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{F_n}{\Delta S},$$

определяет напряжение в этой точке.

**Замечание.** По второму закону Ньютона

$$F_n = \frac{dK}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta t}.$$

Таким образом,  $F_n$  имеет смысл количества движения, переносимого через площадку  $\Delta S$  в единицу времени. Соответственно  $\tau_n$  есть количество движения, переносимое через единичную площадку в единицу времени, т. е. поток вектора количества движения через единичную площадку с нормалью  $n$

$$\tau_n = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t}$$

Важной характеристикой состояния жидкости является температура, понятие о которой дается в физике. Если необходимо учитывать совершающиеся в жидкости тепловые процессы, то в качестве основной функции будет входить также температура  $T$ .

**4. Основные свойства жидкости.** Жидкость есть сплошная среда, которая обладает следующим свойством: в случае, когда она находится в покое или движется как абсолютно твердое тело, в ней наблюдаются только нормальные напряжения и отсутствуют касательные.

Ниже будет установлено, что нормальные напряжения, которые наблюдаются в жидкости, когда она находится в покое или движется как абсолютно твердое тело, не зависят от ориентировки площадки.

Наблюдающиеся в жидкости нормальные напряжения являются большей частью напряжениями сжатия, но не растяжения. В газах вообще не наблюдается напряжений растяжения. В реальных капельных жидкостях напряжения растяжения могут иметь место, но они невелики, т. е. прочность жидкости на разрыв невелика.

Прочность капельных жидкостей в сильной мере зависит от ее чистоты; примеси очень сильно снижают прочность жидкости.

## ГЛАВА I

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

#### § 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА И ЭЙЛЕРА

Существуют две точки зрения на изучение движения жидкости: точка зрения Лагранжа и точка зрения Эйлера. Соответственно используются два вида переменных — переменные Лагранжа и переменные Эйлера.

Точка зрения Лагранжа. Пусть  $\tau_0$  — объем некоторой массы жидкости, который она занимала в начальный момент времени  $t_0$ . В момент времени  $t$  эта масса жидкости будет занимать объем  $\tau$ . Между точками  $\tau_0$  и  $\tau$  имеется взаимно-однозначное соответствие. Произвольная частица объема  $\tau_0$ , которая в момент  $t_0$  находилась в точке  $A_0$ , перешла в определенную точку  $A$  жидкого объема  $\tau$ . Положение частицы определяется координатами  $x, y, z$  той точки пространства, в которой частица находится в момент времени  $t$ . Координаты частицы в момент  $t$  зависят от положения, которое частица занимала в начальный момент времени. Начальное положение частицы может быть задано ее декартовыми координатами  $a, b, c$  в момент времени  $t_0$ . Таким образом, координаты частиц представляются в виде

$$\begin{aligned}x &= x(a, b, c, t), \\y &= y(a, b, c, t), \\z &= z(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Соответственно гидродинамические величины записываются так же, как функции  $a, b, c, t$ :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(a, b, c, t), \\v &= v(a, b, c, t), \\T &= T(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Переменные  $a, b, c, t$  носят название переменных Лагранжа. Равенства (1.1) и (1.2) при фиксированных  $a, b, c$  дают координаты и гидродинамические характеристики частицы, начальное положение которой определяется координатами  $a, b, c$ . При фиксированном  $t$  равенства (1.1) и (1.2) дают координаты и гидродинамические величины различных частиц в зависимости от значений их начальных параметров  $a, b, c$ .

Точка зрения Эйлера. В пространстве выбирают некоторую точку  $A$ , декартовы координаты которой  $x, y, z$ . В разные моменты времени через эту точку  $A$  будут проходить различные частицы жидкости, имея свои значения гидродинамических величин. Представляет интерес изменение искомых гидродинамических величин в фиксированной точке пространства в зависимости от времени. Движение, с точки зрения Эйлера, считается известным, если известны функции

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(x, y, z, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(x, y, z, t), \\ T &= T(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Равенства (1.3) дают гидродинамические величины жидкой частицы, которая в момент времени  $t$  находится в точке с координатами  $x, y, z$ . Переменные  $x, y, z, t$  носят название переменных Эйлера.

**Замечание.** При рассмотрении переменных Лагранжа и переменных Эйлера мы использовали декартову систему координат. Можно вместо декартовых координат  $a, b, c$  и  $x, y, z$  использовать любые другие координаты.

## § 2. ПЕРЕХОД ОТ ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА К ПЕРЕМЕННЫМ ЭЙЛЕРА И ОБРАТНО

1. Пусть задача математического описания движения жидкости решена в переменных Лагранжа и требуется записать решение в переменных Эйлера. В переменных Лагранжа решение имеет вид

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t); \tag{2.1}$$

$$v_x = v_x(a, b, c, t), \quad v_y = v_y(a, b, c, t), \quad v_z = v_z(a, b, c, t); \tag{2.2}$$

$$\rho = \rho(a, b, c, t), \quad T = T(a, b, c, t). \tag{2.3}$$

Так как между координатами  $x, y, z$  и  $a, b, c$  имеет место взаимно-однозначное соответствие, то якобиан

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \neq 0. \tag{2.4}$$

При  $t = t_0$   $a = x, b = y, c = z$  и якобиан равен единице. Систему (2.1) можно разрешить относительно  $a, b, c$  и найти

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t). \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.2) и (2.3), получим решение задачи, записанное в переменных Эйлера:

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t); \quad (2.6)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t). \quad (2.7)$$

2. Пусть задача решена в переменных Эйлера. Это значит, что гидродинамические величины известны в виде (2.6) и (2.7). Чтобы осуществить переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа, надо прежде всего найти формулы вида (2.1), связывающие координаты  $x, y, z$  с переменными  $a, b, c, t$ . В формулах (2.1) величины  $a, b, c$  играют роль начальных координат, постоянных для каждой частицы, а время  $t$  — независимая переменная. Поэтому, рассматривая координаты частицы как функции времени, можем написать

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (2.8)$$

Но  $v_x, v_y, v_z$  известны в виде (2.6). Подставив (2.6) в правые части (2.8), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для отыскания искомой зависимости вида (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \quad (2.9)$$

Проинтегрировав систему (2.9), найдем  $x, y, z$  как функции  $t$ :  
 $x = x(C_1, C_2, C_3, t), \quad y = y(C_1, C_2, C_3, t), \quad z = z(C_1, C_2, C_3, t).$

(2.10)

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные. По определению при  $t = t_0$   $x = a, y = b, z = c$ . Подставляя эти значения в (2.10) и решая полученные равенства относительно  $C_1, C_2, C_3$ , находим  $C_1, C_2, C_3$  как функции  $a, b, c$ . Подставляя  $C_i(a, b, c, t_0)$  в (2.10) и опуская при написании аргумент  $t_0$ , так как он один и тот же для всей задачи, получаем искомые формулы (2.1). Если теперь формулы (2.1) подставить в известные выражения для гидродинамических величин (2.6) и (2.7), то получим эти величины в переменных Лагранжа.

**Замечание.** Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа более сложен, так как он связан с необходимостью интегрировать систему дифференциальных уравнений.

### § 3. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ И МЕСТНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ

**Индивидуальная производная.** Пусть  $A$  — некоторая гидродинамическая величина (векторная или скалярная). Для выделенной жидкой частицы эта величина будет зависеть только от времени:  $A = A(t)$ . Изменение величины  $A$  в предположении, что эта величина относится к фиксированной частице, характеризуется производной от  $A$  по времени, которая

называется *индивидуальной производной*. Обозначим эту производную  $A'_n$ . Рассмотрим, как вычисляется  $A'_n$  в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа.

а) Пусть  $A$  — функция переменных Эйлера. Для фиксированной частицы координаты в соответствии с законом ее движения будут функциями времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (3.1)$$

Поэтому

$$A(t) = A[x(t), y(t), z(t), t]; \quad (3.2)$$

$$A'_n = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Но (3.1) есть уравнения движения частицы, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (3.4)$$

Отсюда

$$A'_n = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Часто для индивидуальной производной в переменных Эйлера используются обозначения  $\frac{dA}{dt}$ ,  $\frac{DA}{dt}$ . В дальнейшем мы примем обозначение  $\frac{dA}{dt}$ . Таким образом,

$$A'_n = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (3.6)$$

б) Пусть  $A$  — функция переменных Лагранжа:  $A = A(a, b, c, t)$ . Для выделенной частицы аргументы  $a, b, c$  фиксированы, изменяется только время. Поэтому

$$A'_n = \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.7)$$

*Местная производная*. Пусть в пространстве зафиксирована некоторая точка. Через эту точку в разные моменты времени будут проходить разные частицы. Каждой из них соответствует некоторая гидродинамическая величина  $A$ . В фиксированной точке пространства

$$A = A(t). \quad (3.8)$$

Изменение величины  $A$  в фиксированной точке пространства характеризуется производной  $A$  по времени, которая называется *местной (локальной) производной* по времени  $A'_m$ .

а) Пусть  $A$  — функция переменных Эйлера, т. е.  $A = A(x, y, z, t)$ . Так как  $x, y, z$  фиксированы, то местная производная есть частная производная

$$A'_m = \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.9)$$

6) Пусть  $A$  — функция переменных Лагранжа:  $A = A(a, b, c, t)$ . В разные моменты времени через фиксированную точку  $M$  пространства проходят разные частицы с разными значениями  $a, b, c$ . Но так как в каждый момент времени в точке  $M$  оказывается одна частица, то можно записать

$$a = a(t), \quad b = b(t), \quad c = c(t).$$

Таким образом, для фиксированной точки пространства

$$A = A[a(t), b(t), c(t), t]$$

и

$$A'_m = \frac{\partial A}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial A}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial A}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Эта формула приобретает значение, если известны производные  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ . Вычислим их. Так как движение задано в переменных Лагранжа, то известна связь (1.1). Дифференцируя по  $t$  обе части (1.1) и учитывая, что  $x, y, z$  фиксированы, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}, \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}, \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система (3.11) — система трех линейных уравнений относительно производных  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ . Якобиан системы не равен нулю.

Решая систему (3.11) относительно  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$  и подставляя эти решения в (3.10), приходим к формуле для местной производной

$$A'_m = \frac{\frac{D(A, x, y, z)}{D(t, a, b, c)}}{\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}}. \quad (3.12)$$

#### § 4. УСТАНОВИВШЕЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

Течение жидкости называется *установившимся*, или стационарным, если в каждой фиксированной точке пространства, принадлежащей области движения, все гидродинамические величины не зависят от времени. Это означает, что если  $A$  — некоторая величина, характеризующая движение, то местная производная  $A'_m = 0$ .

В переменных Эйлера  $A'_m = \frac{\partial A}{\partial t}$ , т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad A = A(x, y, z).$$

В переменных Лагранжа для местной производной имеем формулу (3.12). Так как  $\Delta \neq 0$ , то признаком установившегося движения в переменных Лагранжа должно быть равенство

$$\frac{D(A, x, y, z)}{D(t, a, b, c)} = 0, \quad \text{так что } A = A(x, y, z).$$

Если гидродинамические величины во всем пространстве, занятом жидкостью, или в какой-либо части его изменяются с течением времени, то движение называется *неустановившимся*, или нестационарным. Заметим, что при переходе от одной системы координат к другой установившееся движение может перейти в неустановившееся, и наоборот.

### § 5. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

Скорость частицы является индивидуальной производной от радиус-вектора по времени, ускорение — индивидуальной производной от вектора скорости по времени, т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'_t, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}'_t = \mathbf{r}''_t.$$

Если задача о движении жидкости решается в переменных Эйлера, то

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Ускорение можно вычислить, используя формулу (3.6):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (5.1)$$

В проекциях на оси

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.1')$$

Если задача решается в переменных Лагранжа, то

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t) \quad (5.2)$$

— искомые функции. Если они найдены, то скорость и ускорение легко вычислить. Согласно определению (см. (3.7))

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Соответственно

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2},$$

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad w_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad w_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (5.4)$$

## § 6. ТРАЕКТОРИИ, ЛИНИИ ТОКА, КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

*Траекторией* частицы (точки сплошной среды) называется геометрическое место точек пространства, через которые движущаяся частица последовательно проходит во времени.

Если движение задано в переменных Лагранжа, то известны функции

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) есть параметрические уравнения траектории той жидкой частицы, положение которой в момент  $t = t_0$  определялось параметрами  $a, b, c$ .

Если задача решена в переменных Эйлера, то известны  $v_x(x, y, z, t)$ ,  $v_y(x, y, z, t)$ ,  $v_z(x, y, z, t)$ . Если  $x, y, z$  — координаты точки на траектории, то

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \quad (6.2)$$

Уравнение траектории следует искать как решение системы дифференциальных уравнений (6.2). Чтобы найти траекторию частицы, которая при  $t = t_0$  имела бы координаты

$$x|_{t_0} = x_0, \quad y|_{t_0} = y_0, \quad z|_{t_0} = z_0, \quad (6.3)$$

надо решить задачу Коши для системы (6.2) с начальными данными (6.3).

*Линией тока* называется линия, которая для данного момента времени  $t$  обладает следующим свойством: вектор скорости  $\mathbf{v}$ , вычисленный в любой точке этой линии, направлен по касательной к ней. Фиксируем момент времени  $t$ . Пусть  $d\mathbf{r}$  — бесконечно малый элемент линии тока с проекциями  $dx, dy, dz$ , а  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  — вектор скорости. Тогда по определению вектор  $d\mathbf{r}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{v}$ . Условие коллинеарности  $d\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  в проекциях записывается в виде

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (6.4)$$

Система (6.4) — система дифференциальных уравнений линий тока; время  $t$  здесь является фиксированным параметром. Обозначая общее значение величины дробей через  $ds$

( $s$  — вспомогательная переменная), перепишем систему уравнений (6.4) в виде

$$\frac{dx}{ds} = v_x, \quad \frac{dy}{ds} = v_y, \quad \frac{dz}{ds} = v_z. \quad (6.5)$$

Здесь  $s$  — независимая переменная,  $t$  — параметр.

В переменных Эйлера скорости  $v_x, v_y, v_z$  — известные функции  $x, y, z, t$ . Чтобы найти линию тока, которая проходит через точку  $x_0, y_0, z_0$ , надо решить задачу Коши для системы (6.5) с начальными данными

$$x|_{s=s_0} = x_0, \quad y|_{s=s_0} = y_0, \quad z|_{s=s_0} = z_0. \quad (6.6)$$

В переменных Лагранжа  $a, b, c, t$  функции (6.1) известны. Скорости  $v_x, v_y, v_z$  находятся согласно (5.3). Различным точкам линии тока, положение которых определяется параметром  $s$ , соответствуют различные значения  $a, b, c$  (различные частицы). Координаты точек  $x, y, z$  линии тока оказываются сложными функциями  $s$ . Находя выражения для  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  при фиксированном  $t$  и приравнивая их, согласно (6.5), выражениям для скоростей, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{ds} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{ds} + \frac{\partial x}{\partial c} \frac{dc}{ds} &= \frac{dx}{dt}, \\ \frac{\partial y}{\partial a} \frac{da}{ds} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{ds} + \frac{\partial y}{\partial c} \frac{dc}{ds} &= \frac{dy}{dt}, \\ \frac{\partial z}{\partial a} \frac{da}{ds} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{db}{ds} + \frac{\partial z}{\partial c} \frac{dc}{ds} &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Система (6.7) может быть разрешена относительно производных  $\frac{da}{ds}, \frac{db}{ds}, \frac{dc}{ds}$  в силу условия (2.4). Решая задачу Коши, находим функции

$$a = a(s), \quad b = b(s), \quad c = c(s). \quad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в (6.1), получаем параметрические уравнения линий тока в зависимости от  $s$  при фиксированном значении  $t$ .

Для установившихся течений скорости не зависят от времени, время  $t$  не будет входить явно в правые части уравнений (6.2) для траекторий и уравнений (6.5) для линий тока. А тогда обе системы уравнений совпадают. Так как траектории и линии тока находятся в результате решения одной и той же задачи Коши, то в установившихся течениях они совпадают. Вспомогательный параметр  $s$ , который мы ввели, в этом случае имеет смысл времени движения  $t$ .

Для неустановившихся движений в общем случае линии тока и траектории не совпадают.

*Поверхность тока* — поверхность для фиксированного момента времени, в каждой точке которой вектор скорости лежит в касательной плоскости. Пусть  $n$  — единичный вектор нормали

к поверхности,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости. Тогда по определению  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , или

$$v_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + v_z \cos(\hat{n}, \hat{z}) = 0. \quad (6.9)$$

Пусть уравнение поверхности тока

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0. \quad (6.10)$$

Направляющие косинусы нормали пропорциональны производным  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$ , т. е. вектор  $\mathbf{n}$  параллелен вектору  $\operatorname{grad} \mathcal{F}$ . Из уравнения (6.9) тогда следует, что

$$v_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) — линейное уравнение в частных производных первого порядка для отыскания функции  $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ , где  $t$  — параметр. Характеристики уравнения (6.11) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (6.12)$$

Уравнения (6.12) совпадают с уравнениями (6.4) для линий тока, т. е. характеристики уравнения (6.11) являются линиями тока. Для уравнения (6.11) обычно ставят задачу Коши: отыскать поверхность тока, которая проходит через заданную кривую  $l$ . Эта задача имеет смысл, если кривая  $l$  не является характеристикой. Геометрически поверхность тока обычно строится следующим образом: берут кривую, не являющуюся линией тока, и через точки этой линии проводят линии тока.

Критическая точка — точка потока, в которой вектор скорости равен нулю, т. е. одновременно

$$v_x = v_y = v_z = 0. \quad (6.13)$$

Рассмотрим систему уравнений (6.4) для линий тока. Если в некоторой точке хотя бы одна из составляющих скорости не равна нулю, то в силу теоремы существования и единственности решения для системы (6.4) через такую точку проходит только одна линия тока. Если точка критическая, т. е. выполняется равенство (6.13), то эта точка является особой для системы уравнений (6.4), в ней может нарушаться теорема единственности. Через критическую точку может проходить несколько и даже бесконечно много линий тока.

## § 7. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕНЗОРАХ

Здесь будем рассматривать трехмерное ортогональное пространство с декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  с ортами  $i_1, i_2, i_3$ . Все результаты этого параграфа легко обобщаются на случай евклидова пространства любого числа измерений.

1. Вектор (тензор первого ранга). Рассмотрим две системы координат:  $x_1, x_2, x_3$  и  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Их взаимное расположение характеризуется следующей таблицей направляющих косинусов

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$x'_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$x'_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

$$a_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}_n = \cos(\widehat{x'_m, x_n}), \quad (7.1)$$

где  $(\widehat{x'_m, x_n})$  — угол между ортами осей.

Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки с координатами  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2 + \mathbf{i}_3 x_3. \quad (7.2)$$

Проектируя  $\mathbf{r}$  на оси  $x'_1, x'_2, x'_3$ , получим формулы преобразования координат  $x_1, x_2, x_3$  в  $x'_1, x'_2, x'_3$ :

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

или в общем виде

$$x'_m = \sum_{i=1}^3 a_{mi} x_i \quad (m = 1, 2, 3). \quad (7.3)$$

Пусть  $\mathbf{a}$  — некоторый вектор,  $a_1, a_2, a_3$  — проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2 + \mathbf{i}_3 a_3. \quad (7.4)$$

Проектируя (7.4) на направления осей  $x'_1, x'_2, x'_3$ , получаем проекции  $a'_1, a'_2, a'_3$  вектора  $\mathbf{a}$  в новой системе

$$a'_m = a_{m1} a_1 + a_{m2} a_2 + a_{m3} a_3, \quad (7.5)$$

или

$$a'_m = \sum_{i=1}^3 a_{mi} a_i \quad (m = 1, 2, 3).$$

Формулы (7.5) — формулы преобразования компонент вектора при переходе от одной системы координат к другой — мы получили, трактуя вектор как направленный отрезок. Можно, однако, формулы (7.5) положить в основу следующего определения вектора.

Если в каждой декартовой системе координат заданы три числа  $a_1, a_2, a_3$ , причем при любом линейном ортогональном преобразовании координат эти числа преобразуются по формуле (7.5), то говорят, что величины  $a_1, a_2, a_3$  образуют аффинный ортогональный вектор  $\mathbf{a} = \|a\|$ . В определении присутствует

слово «аффинный», так как преобразование координат линейное, и слово «ортогональный», так как используются только ортогональные преобразования координат. В дальнейшем мы будем использовать только линейные ортогональные преобразования координат, не оговаривая этого.

Если для ортов осей  $x'_1, x'_2, x'_3$  написать выражения через их проекции на оси  $x_1, x_2, x_3$

$$\mathbf{i}'_m = i_1 a_{m1} + i_2 a_{m2} + i_3 a_{m3} \quad (7.6)$$

и использовать ортогональность ортов  $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ , то получим формулы, связывающие направляющие косинусы между собой:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_m &= a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 = 1, \\ \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_n &= a_{m1} a_{n1} + a_{m2} a_{n2} + a_{m3} a_{n3} = 0 \quad (m \neq n), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где  $m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$ .

Используя символ Кронекера  $\delta_{mn}$ , формулы (7.7) можно записать в виде

$$\sum_{l=1}^3 a_{mi} a_{nl} = \delta_{mn}, \quad \text{где } \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (7.8)$$

2. Тензор второго ранга. Рассмотрим два вектора: **a** и **b** с проекциями  $a_1, a_2, a_3$  и  $b_1, b_2, b_3$ . Из компонент этих векторов можно образовать таблицу девяти величин

$$\left\| \begin{array}{lll} a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3 \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3 \\ a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{lll} c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{array} \right\| = \|c_{ik}\|, \quad (7.9)$$

где, очевидно,

$$c_{ik} = a_i b_k. \quad (7.10)$$

Поставим вопрос: как преобразуются величины  $c_{ik}$  при переходе от одной системы координат к другой?

По определению величин  $c_{ik}$  имеем для новой системы координат  $x'_1, x'_2, x'_3$ :

$$c'_{ik} = a'_i b'_k. \quad (7.11)$$

На основании формул (7.5) можем написать

$$a'_i = \sum_{m=1}^3 a_{im} a_m, \quad b'_k = \sum_{n=1}^3 a_{kn} b_n. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.12) в (7.11), имеем

$$c'_{ik} = (\sum_{m=1}^3 a_{im} a_m) (\sum_{n=1}^3 a_{kn} b_n) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{im} a_{kn} a_m b_n. \quad (7.13)$$

Так как  $a_m b_n = c_{mn}$ , то (7.13) можно переписать в виде

$$c'_{ik} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{im} a_{kn} c_{mn}. \quad (7.14)$$

Формулы (7.14) выражают закон преобразования произведений компонент двух векторов при переходе от одной системы координат к другой. Однако кроме произведений компонент двух векторов существуют и другие таблицы величин с двумя индексами, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам (7.14). В связи с этим вводят определение: если в каждой прямолинейной ортогональной системе координат имеется совокупность девяти величин  $c_{ik}$  и если при переходе от одной системы координат к другой эти величины преобразуются по формулам (7.14), то совокупность этих девяти величин определяет новую величину  $c = \|c_{ik}\|$  — аффинный ортогональный тензор второго ранга (или просто тензор второго ранга).

Рассмотрим следующие примеры.

### 1. Таблица

$$I = \|\delta_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{vmatrix}$$

образует тензор второго ранга, который во всех системах координат имеет одни и те же компоненты. В этом легко убедиться, применяя формулы (7.5) и учитывая (7.7). Тензор  $I$  называется *единичным*.

2. Как мы уже показали вначале, таблица  $c = \|c_{ik}\|$ , составляющие  $c_{ik}$  которой образованы из произведений компонент двух векторов:  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ , так что  $c_{ik} = a_i b_k$ , является тензором. Этот тензор называется *диадой*, образованной из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

3. Пусть компоненты  $a_1, a_2, a_3$  некоторого вектора  $\mathbf{a}$  являются функциями координат  $x_1, x_2, x_3$ . Легко показать, что таблица  $c_{ik}$ , в которой  $c_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ , образует тензор второго ранга, т. е. совокупность частных производных от компонент вектора по координатам образует тензор второго ранга.

3. Тензор любого ранга. Если в каждой декартовой системе координат задана таблица величин с  $n$  индексами

$$\|c_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}\|, \text{ где } i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3,$$

и если компоненты этой таблицы при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам

$$c'_{m_1 \dots m_n} = \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \dots \sum_{i_n=1}^3 a_{m_1 i_1} a_{m_2 i_2} \dots a_{m_n i_n} c_{i_1 \dots i_n}, \quad (7.15)$$

то говорят, что совокупность величин  $c_{i_1 \dots i_n}$  определяет аффинный ортогональный тензор ранга  $n$  (или просто тензор ранга  $n$ ). Примером тензора  $n$ -го ранга является совокупность произведений компонент  $n$  векторов.

Формула (7.15), как и формулы (7.5) и (7.14), линейна относительно величин  $c_{m_1 \dots m_n}$ , суммирование в ней идет по вторым индексам, она содержит произведение  $n$  направляющих косинусов. С этой общей точки зрения скаляр (величина, не

меняющаяся при переходе от одной системы координат к другой) есть тензор нулевого ранга, вектор есть тензор первого ранга.

#### 4. Действия с тензорами.

*Сложение тензоров.* Если имеются два тензора ранга  $n$ :

$$A = \|a_{i_1 i_2 \dots i_n}\|, \quad B = \|b_{i_1 i_2 \dots i_n}\|,$$

то величины

$$c_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 i_2 \dots i_n} + b_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

определяют новый тензор  $C$ , который называется суммой тензоров  $A$  и  $B$ :

$$C = \|c_{i_1 i_2 \dots i_n}\|, \quad C = A + B.$$

*Умножение тензора на скаляр.* Если имеем некоторый тензор  $C = \|c_{i_1 i_2 \dots i_n}\|$  ранга  $n$  и скаляр  $a$ , то совокупность величин  $\|ac_{i_1 \dots i_n}\|$  определяет новый тензор ранга  $n$ , который называется произведением исходного тензора  $C$  на скаляр  $a$ :

$$aC = a \|c_{i_1 i_2 \dots i_n}\| = \|ac_{i_1 i_2 \dots i_n}\|.$$

*Умножение тензоров.* Если имеем два тензора: тензор  $A$  ранга  $m$  и тензор  $B$  ранга  $n$ :

$$A = \|a_{i_1 i_2 \dots i_m}\|,$$

$$B = \|b_{j_1 j_2 \dots j_n}\|,$$

то, умножая каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго тензора, получаем совокупность величин, которые образуют новый тензор  $C$  ранга  $m + n$ :

$$C = AB = \|a_{i_1 i_2 \dots i_m} b_{j_1 j_2 \dots j_n}\|.$$

Тензор  $C$  называется произведением (тензорным) тензоров  $A$  и  $B$ . В том, что совокупность величин  $a_{i_1 i_2 \dots i_m} \cdot b_{j_1 j_2 \dots j_n}$  действительно образует тензор ранга  $m + n$ , легко убедиться, применяя формулы (7.15).

*Дифференцирование тензора.* Пусть компоненты тензора ранга  $n$  являются функциями координат  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда совокупность первых частных производных от компонент тензора по координатам определяет тензор ранга  $n + 1$ , т. е. при дифференцировании по координатам ранг тензора повышается на единицу.

*Свертывание тензоров* (сокращение индексов). Пусть имеем некоторый тензор ранга  $n$ :  $a = \|a_{i_1 i_2 \dots i_n}\|$ . Выберем у компонент этого тензора два каких-либо индекса  $i_k$  и  $i_m$ , выберем из всех компонент тензора такие, у которых эти два индекса одинаковы:

$i_k = i_m = j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), и, наконец, просуммируем выбранные компоненты по общему индексу  $j$ . Тогда величины

$$c_{i_1 \dots i_{k-1} i_k + 1 \dots i_{m-1} i_m + 1 \dots i_n} = \sum_{j=1}^3 a_{i_1 \dots i_{k-1} j i_k + 1 \dots i_{m-1} j i_m + 1 \dots i_n}$$

образуют тензор  $C$  ранга  $n - 2$ , который называется сверткой исходного тензора по индексам  $i_k$  и  $i_m$ .

*Представление тензора в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.* Тензор второго ранга называется симметричным, если его компоненты не изменяются при перестановке индексов  $c_{ik} = c_{ki}$ . Тензор второго ранга называется антисимметричным, если его компоненты меняют знак при перестановке индексов, т. е.  $c_{ik} = -c_{ki}$ . Общий вид антисимметричного тензора

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b \\ -a, & 0, & c \\ -b, & -c, & 0 \end{vmatrix}.$$

При преобразовании координат свойства симметричности и антисимметричности сохраняются. Покажем, что каждый тензор второго ранга  $\|c_{ik}\|$  может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Пусть дан тензор  $C = \|c_{ik}\|$ . Образуем новый тензор  $C^* = \|c_{ki}\|$  и построим тензор, равный полусумме тензоров  $C$  и  $C^*$ :

$$S = \frac{1}{2}(C + C^*) = \begin{vmatrix} c_{11} & \frac{1}{2}(c_{12} + c_{21}) & \frac{1}{2}(c_{13} + c_{31}) \\ \frac{1}{2}(c_{21} + c_{12}) & c_{22} & \frac{1}{2}(c_{23} + c_{32}) \\ \frac{1}{2}(c_{31} + c_{13}) & \frac{1}{2}(c_{32} + c_{23}) & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Тензор  $S$  симметричен. Положим  $R = C - S$ . Компоненты тензора  $R$  будут иметь вид

$$R_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}).$$

Очевидно, что  $R_{ik} = -R_{ki}$ ,  $R_{ii} = 0$ , т. е. тензор  $R$  антисимметричен.

Таким образом,

$$C = S + R.$$

Тензор  $S$  называют симметричной, а тензор  $R$  — антисимметричной частями тензора  $C$ .

Приведем некоторые примеры.

1. Рассмотрим скаляр  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  (тензор нулевого ранга). Совокупность производных первого порядка по координатам

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right\|$$

определяет некоторый вектор  $\mathbf{A}$  (тензор первого ранга). Этот вектор  $\mathbf{A}$  называется градиентом функции  $\varphi$

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi = i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

2. Рассмотрим тензор второго ранга, образованный из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , — диаду

$$\|c_{ik}\| = \|a_i b_k\|.$$

Образуем свертку. Для нее имеем

$$D = \sum_{i=1}^3 c_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Таким образом, свертка есть скаляр (тензор нулевого ранга), известный как скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

3. Рассмотрим тензор второго ранга  $C = \|c_{ik}\|$  и единичный тензор второго ранга  $I = \|\delta_{mn}\|$ . Умножая каждую компоненту тензора  $C$  на каждую компоненту тензора  $I$ , получаем тензор четвертого ранга

$$B = \|B_{ikmn}\| = \|c_{ik} \delta_{mn}\|.$$

Можно произвести свертывание этого тензора по значениям  $i$  и  $m$  либо по  $k$  и  $n$ . При этом придет либо к исходному тензору, либо к тензору с переставленными строками и столбцами.

5. Псевдотензоры. Обозначим через  $\Delta$  определитель, образованный из направляющих косинусов преобразования осей  $x_1, x_2, x_3$  в оси  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Известно, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Причем  $\Delta = 1$ , если правая (левая) система координат преобразуется в правую (левую), и  $\Delta = -1$ , если правая (левая) система координат преобразуется в левую (правую). Введем теперь понятие псевдотензора.

Если для каждой прямолинейной ортогональной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  имеется совокупность  $3^n$  величин  $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$  преобразующихся по формулам

$$t'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Delta \sum_{m_1} \dots \sum_{m_n} a_{i_1 m_1} \dots a_{i_n m_n} t_{m_1 \dots m_n} \quad (7.16)$$

в величины  $t'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , отвечающие другой системе координат  $x'_1, x'_2, x'_3$ , то совокупность этих величин определяет новую величину

$$T = \|t_{i_1 i_2 \dots i_n}\|, \quad (7.17)$$

которая называется аффинным ортогональным псевдотензором ранга  $n$ .

Из формулы (7.16) видно, что когда рассматривается преобразование правой системы координат в левую (или наоборот), то  $\Delta = -1$  и компоненты псевдотензора меняют знаки на обратные по сравнению с компонентами тензора. Если же при

преобразовании правая (левая) система координат переходит в правую (левую), то различия в формулах преобразования тензоров и псевдотензоров нет ( $\Delta = 1$ ). Поэтому когда в рассмотрении имеют дело только с правой системой координат, псевдотензоры часто называют просто тензорами.

Приведем примеры псевдотензоров.

1. Векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  меняет знак на обратный при переходе от правой системы к левой (и наоборот), т. е.  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — псевдотензор первого ранга (псевдовектор).

2. Угловая скорость вращения твердого тела является псевдовектором.

3. Псевдотензор Леви — Чивита — псевдотензор третьего ранга  $D = \|d_{klm}\|$ , антисимметричный по всем парам индексов и удовлетворяющий условию  $d_{123} = 1$  в какой-либо правой системе координат. Все его компоненты, имеющие два одинаковых индекса, равны нулю, и тензор имеет только шесть компонент, у которых все три индекса различны. Составляющие  $d_{ikl}$  ( $i \neq k \neq l$ ) принимают значение, равное единице, если  $i, k, l$  — четная перестановка тройки (1, 2, 3), и равное  $-1$ , если  $i, k, l$  — перестановка нечетная. Таким образом,

$$d_{123} = d_{231} = d_{312} = 1, \quad d_{132} = d_{213} = d_{321} = -1.$$

Во всех правых системах координат псевдотензор Леви — Чивита имеет один и тот же вид.

6. Умножение псевдотензоров и тензоров. Произведение псевдотензора на псевдотензор является тензором (так как  $\Delta^2 = 1$ ). Если  $A$  и  $B$  — псевдотензоры рангов  $m$  и  $n$ , то  $A \cdot B$  — тензор ранга  $m + n$ . Произведение тензора на псевдотензор является псевдотензором. Если  $A$  — тензор ранга  $m$ ,  $B$  — псевдотензор ранга  $n$ , то  $A \cdot B$  — псевдотензор ранга  $m + n$ .

Рассмотрим примеры.

1. Возьмем псевдотензор Леви — Чивита  $D = \|d_{klm}\|$  и тензор второго ранга, образованный из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (диаду):

$$C = \|c_{pq}\| = \|a_p b_q\|.$$

Перемножив псевдотензор  $D$  на тензор  $C$ , получим псевдотензор пятого ранга

$$T = \|d_{klm} a_p b_q\|.$$

Выполним два раза операцию свертывания по индексам  $l$  и  $p$  и индексам  $m$  и  $q$ . При двухкратном свертывании ранг псевдотензора понизится на четыре и получим псевдотензор первого ранга (псевдовектор  $\mathbf{R}$ ).

Положим  $l = p = i, m = q = j$ . Тогда

$$R_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{kij} a_i b_j \quad (k = 1, 2, 3).$$

Используя значения  $d_{kij}$ , получаем

$$R_1 = d_{123} a_2 b_3 + d_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$R_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad R_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Из выражений для проекций видно, что  $\mathbf{R} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , т. е.  $\mathbf{R}$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

2. Если псевдотензор Леви — Чивита  $D$  умножить на тензор второго ранга  $\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right\|$ , где  $a_i$  — составляющие вектора  $\mathbf{a}$ , то получим псевдотензор пя-

того ранга. Если этот тензор  $\left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} d_{lmn} \right|$  свернуть два раза по индексам  $i$  и  $n$  и индексам  $k$  и  $m$ , то получим псевдотензор первого ранга. Это будет  $\text{rot } \mathbf{a}$ .

7. Примечание. В теории аффинных ортогональных тензоров использовались прямолинейные ортогональные координаты и их преобразование опять в прямолинейные ортогональные координаты. Эти линейные ортогональные преобразования определялись таблицей направляющих косинусов. Можно рассматривать и неортогональные линейные преобразования.

Пусть преобразование координат определяется формулой

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} x_k, \quad x_k = \sum_{l=1}^3 g'_{ik} x'_l.$$

Тогда для инвариантной функции  $\varphi(r)$  получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} g'_{ik}.$$

Вообще говоря, матрицы  $g_{ik}$  и  $g'_{ik}$  не обязательно совпадают (совпадение имеет место для ортогональных преобразований), поэтому законы преобразования компонент градиента скалярной функции и компонент вектора  $\mathbf{r}$  различны. В связи с этим в общей теории тензоров оказывается необходимым различать два вида векторов и тензоров — контравариантные и ковариантные. Не приводя полного определения, дадим часто употребляемое. Говорят, что контравариантный вектор — это такой вектор, компоненты которого  $A_i$  преобразуются при переходе к другой системе координат, как компоненты вектора  $\mathbf{r}$ . Аналогично величины  $A_i$  определяют ковариантный вектор, если при переходе от одной системы координат к другой эти компоненты преобразуются как компоненты градиента функции, т. е. как частные производные по координатам. Для аффинных ортогональных векторов понятия ковариантного и контравариантного векторов являются совпадающими. В общей теории тензоров рассматриваются не только неортогональные, но и нелинейные преобразования координат.

## § 8. СКОРОСТИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ОБЪЕМА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Пусть в пространстве, связанном с системой координат  $x, y, z$ , движется жидкость. Рассмотрим некоторую малую частицу жидкости с объемом  $\tau$  в момент времени  $t$ . Выберем в этом объеме некоторую точку  $A$  и примем ее за полюс (рис. 1). Обозначим ее радиус-вектор через  $\mathbf{r}_0$ . Выберем в этом же объеме другую точку  $B$  и обозначим ее радиус-вектор через  $\mathbf{r}$ . Относительный радиус-вектор  $\mathbf{AB}$  обозначим через  $\mathbf{p}$ , его проекции —

через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Если координаты точки  $A$  обозначить через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то координаты точки  $B$  будут  $x + \xi$ ,  $y + \eta$ ,  $z + \zeta$ .

Рассмотрим ту же массу жидкости в момент  $t + dt$ . Точки  $A$  и  $B$  займут новое положение  $A'$  и  $B'$ . Радиус-векторы, соответствующие новому положению точек, обозначим через  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}'_0$ ,  $\rho'$ . Очевидно, что

$$\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \rho' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0. \quad (8.1)$$

Вектор  $d\rho = \rho' - \rho$  с проекциями  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  характеризует изменение относительного положения точки  $B$  по отношению к точке  $A$  за время  $dt$ . С учетом (8.1)

$$d\rho = \rho' - \rho = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0). \quad (8.2)$$

Если через  $\mathbf{v}_A$  и  $\mathbf{v}_B$  обозначить скорости точек  $A$  и  $B$ , то  $\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_A dt$  — перемещение точки  $A$ ,  $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{v}_B dt$  — перемещение точки  $B$  за время  $dt$ .

Поэтому (8.2) можно записать в виде

$$d\rho = (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) dt. \quad (8.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x + \xi, y + \eta, z + \zeta), \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(x, y, z). \end{aligned} \quad (8.4)$$

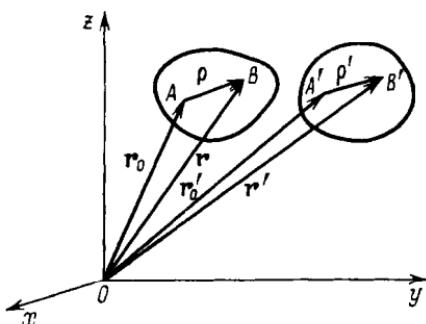


Рис. 1.

Считая рассматриваемый объем  $\tau$  малым, разложим функцию  $\mathbf{v}(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$  в окрестности точки  $x$ ,  $y$ ,  $z$

в ряд Тейлора. С точностью до величин второго порядка малости получим

$$d\rho = \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \zeta \right] dt. \quad (8.5)$$

В проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} d\xi &= \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta \right] dt, \\ d\eta &= \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta \right] dt, \\ d\zeta &= \left[ \frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta \right] dt. \end{aligned} \quad (8.5')$$

Чтобы выяснить характер относительного изменения положений точек  $A$  и  $B$ , преобразуем равенства (8.5'). Сделаем это

подробно на примере первого равенства (8.5').

$$d\xi = \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta \right] dt. \quad (8.6)$$

Введем в рассмотрение псевдовектор-вихрь скорости

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{v} = i \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_z k. \quad (8.7)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

С учетом (8.7) и (8.8) выражение (8.6) для  $d\xi$  и соответственно выражения для  $d\eta$  и  $d\zeta$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} d\xi &= [\epsilon_{xx}\xi + \epsilon_{xy}\eta + \epsilon_{xz}\zeta + \frac{1}{2}(\Omega_y\zeta - \Omega_z\eta)] dt, \\ d\eta &= [\epsilon_{yx}\xi + \epsilon_{yy}\eta + \epsilon_{yz}\zeta + \frac{1}{2}(\Omega_z\xi - \Omega_x\zeta)] dt, \\ d\zeta &= [\epsilon_{zx}\xi + \epsilon_{zy}\eta + \epsilon_{zz}\zeta + \frac{1}{2}(\Omega_x\eta - \Omega_y\xi)] dt. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$F = \frac{1}{2} [\epsilon_{xx}\xi^2 + \epsilon_{yy}\eta^2 + \epsilon_{zz}\zeta^2 + 2\epsilon_{xy}\xi\eta + 2\epsilon_{yz}\eta\zeta + 2\epsilon_{zx}\xi\zeta]. \quad (8.10)$$

Если занумеровать оси координат, положив  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$ ,  $\xi_3 = \zeta$ ,  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{\xi_i \xi_k}$ , то (8.10) можно записать в виде

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} \xi_i \xi_k. \quad (8.10')$$

С учетом введенных обозначений равенства (8.9) примут вид

$$d\xi_i = \left[ \frac{\partial F}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} (\Omega \times \rho)_i \right] dt \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8.11)$$

Формулы (8.11) можно записать в векторном виде

$$d\rho = [\text{grad } F + \frac{1}{2} (\Omega \times \rho)] dt. \quad (8.12)$$

Сопоставляя (8.3) и (8.12), получаем формулу

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \rho + \text{grad } F. \quad (8.13)$$

Для абсолютно твердого тела известна формула  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор мгновенной угловой скорости, с которой твердое тело вращается относительно мгновенной оси, проходящей через полюс. В случае движения жидкой частицы мы получили более общую формулу (8.13). Слагаемое  $\operatorname{grad} F$  обращается в нуль только тогда, когда все  $\epsilon_{ik}$  равны нулю, т. е. когда бесконечно малый объем жидкости движется как бесконечно малый объем абсолютно твердого тела.

Формула (8.13) — запись теоремы, которую иногда называют теоремой Гельмгольца.

*Скорость точки сплошной среды, принадлежащей бесконечно малому объему, складывается из трех слагаемых: скорости полюса, скорости точки во вращательном движении затвердевшей жидкой частицы вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс A, с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , и скорости деформации  $\mathbf{v}_d = \operatorname{grad} F$ .*

Если обе части равенства (8.13) умножить на  $dt$ , то теорему Гельмгольца о разложении скорости можно записать для перемещений

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} + d\mathbf{r}_d. \quad (8.14)$$

Здесь  $d\mathbf{r}_B = \mathbf{v}_B dt$  — поступательное перемещение точки B жидкой частицы;  $d\mathbf{r}_A = \mathbf{v}_A dt$  — перемещение полюса;  $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$  — перемещение точки B при повороте затвердевшей жидкой частицы вокруг оси, проходящей через полюс, на угол  $d\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} dt$ ;  $d\mathbf{r}_d = \mathbf{v}_d dt$  — деформационное перемещение. Такое представление перемещения точек жидкой частицы в виде суммы перемещений затвердевшей жидкой частицы и деформации единственно.

Итак, при рассмотрении движения точек жидкой частицы оказалось необходимым ввести понятие скорости деформации  $\mathbf{v}_d$ , являющейся потенциальным вектором:

$$\mathbf{v}_d = \operatorname{grad} F,$$

где  $F$  — квадратичная функция (8.10). Проекция вектора  $\mathbf{v}_d$

$$\begin{aligned} v_{dx} &= \epsilon_{xx}\xi + \epsilon_{xy}\eta + \epsilon_{xz}\zeta = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{1k}\xi_k, \\ v_{dy} &= \epsilon_{yx}\xi + \epsilon_{yy}\eta + \epsilon_{yz}\zeta = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{2k}\xi_k, \\ v_{dz} &= \epsilon_{zx}\xi + \epsilon_{zy}\eta + \epsilon_{zz}\zeta = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{3k}\xi_k. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Здесь

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (8.16)$$

Из (8.15) видим, что скорость деформации  $\mathbf{v}_d$  связана с таблицей  $\mathcal{E}$ , которая в силу (8.16) симметрична:

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = \|\epsilon_{ik}\| \quad (8.17)$$

## § 9. ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ И ЕГО ИНВАРИАНТЫ

Таблица (8.17) определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Действительно, вектор  $\mathbf{v}$  — тензор первого ранга.

Совокупность величин  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  определяет тензор второго ранга  $\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|$ . Его всегда можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Тензор (8.17)  $\mathcal{E} = \|\epsilon_{ik}\|$  есть симметричная часть тензора  $\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|$ .

Доказательство тензорного характера величин  $\epsilon_{ik}$  можно провести и непосредственно. Имеем равенство (8.13); в нем  $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$  — векторы,  $\Omega \times \rho$  — произведение псевдовектора  $\Omega$  на вектор  $\rho$  — также вектор. Следовательно,  $\mathbf{v}_d$  — также вектор.

Рассмотрим скалярное произведение  $\mathbf{v}_d \cdot \rho$ . Это произведение — скаляр, инвариант (проекция  $\mathbf{v}_d$  на  $\rho$ , не зависит от системы координат). Для скалярного произведения, так как  $\mathbf{v}_d = \text{grad } F$ , имеем

$$\mathbf{v}_d \cdot \rho = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \xi_3. \quad (9.1)$$

Но  $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — однородная функция второй степени; по теореме Эйлера об однородных функциях можем записать:  $\mathbf{v}_d \cdot \rho = 2F$ . Таким образом,  $F$  — инвариант, не зависящий от системы координат.

Рассмотрим две системы координат. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — старые координаты,  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  — новые. Так как  $F = F'$ , то, имея в виду (8.10), можем написать

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \epsilon'_{mn} \xi'_m \xi'_n = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (9.2)$$

Выразим старые координаты через новые:

$$\xi_i = \sum_{m=1}^3 \alpha_{mi} \xi'_m, \quad \xi_j = \sum_{n=1}^3 \alpha_{nj} \xi'_n \quad (9.3)$$

и подставим (9.3) в правую часть (9.2):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \epsilon'_{mn} \xi'_m \xi'_n &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} (\sum_{m=1}^3 \alpha_{mi} \xi'_m) (\sum_{n=1}^3 \alpha_{nj} \xi'_n) = \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \xi'_m \xi'_n (\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \alpha_{mi} \alpha_{nj}). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\epsilon'_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} a_{mi} a_{nj}. \quad (9.5)$$

Формула (9.5) — формула преобразования компонент тензора второго ранга при переходе от одной системы координат к другой. Следовательно, таблица  $\|\epsilon_{ik}\|$  есть аффинный ортогональный тензор второго ранга — тензор скоростей деформаций.

С тензором скоростей деформаций связана квадратичная форма  $F$ , имеющая вид (8.10). Всегда можно ввести такие координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , в которых квадратичная форма примет вид

$$F = \epsilon_1 \xi_1^2 + \epsilon_2 \xi_2^2 + \epsilon_3 \xi_3^2. \quad (9.6)$$

В этих координатах тензор скоростей деформаций будет

$$\|\epsilon_{ik}\| = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (9.7)$$

Оси, в которых тензор  $\epsilon_{ik}$  имеет вид (9.7), называются главными осями тензора скоростей деформаций (это главные оси квадратичной формы  $F$ ). Величины  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , которые входят в (9.7), называют главными скоростями деформаций. Известно, что  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  являются корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \lambda & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \lambda & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9.8)$$

Корни этого уравнения всегда вещественны. Вещественность корней уравнения (9.8) следует из симметричности матрицы  $\|\epsilon_{ik}\|$ . Запишем уравнение (9.8) в виде

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0. \quad (9.9)$$

Поскольку главные скорости деформации  $\epsilon_i$  — инварианты, инвариантами должны быть и коэффициенты уравнения (9.9). Эти коэффициенты  $I_1, I_2, I_3$  называют соответственно линейным, квадратичным и кубическим инвариантами тензора скоростей деформаций. Наиболее простой вид имеет линейный инвариант  $I_1$ . Это просто свертка тензора  $\epsilon_{ik}$ :

$$I_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Коэффициенты  $I_2, I_3$  можно записать в виде

$$I_2 = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{33} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \det \|\epsilon_{ik}\|.$$

## § 10. СМЫСЛ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения для компонент скорости деформации имеют вид (8.15). Скорость деформации  $v_d$  будет определена для любой точки (при известных  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) частицы, если задана таблица (8.17). Выясним физический смысл величин  $\varepsilon_{ik}$  — компонент тензора скоростей деформаций (8.17). Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть  $\varepsilon_{xx} \neq 0$ , все остальные  $\varepsilon_{ik} = 0$ . В этом случае тензор

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (10.1)$$

Формулы (8.15) примут вид

$$v_{dx} = \varepsilon_{xx}\xi, \quad v_{dy} = v_{dz} = 0. \quad (10.2)$$

Таким образом, тензору (10.1) соответствует однородное растяжение ( $\varepsilon_{xx} > 0$ ) или сжатие ( $\varepsilon_{xx} < 0$ ) объема вдоль оси  $x$  (рис. 2). Из (10.2) следует, что

$\varepsilon_{xx} = \frac{v_{dx}}{\xi}$  — скорость растяжения (сжатия) элементарного объема вдоль оси  $x$ , приходящаяся на единицу длины. Аналогичный смысл имеют  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$ . Итак, диагональные элементы тензора скоростей деформаций — относительные скорости равномерного растяжения элементарного объема вдоль координатных осей.

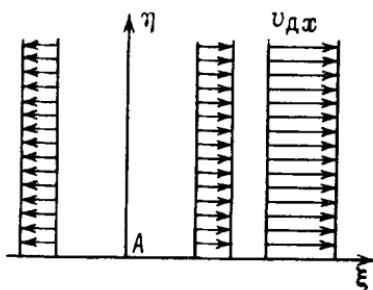


Рис. 2.

2. Пусть теперь  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \neq 0$ , все остальные  $\varepsilon_{ik} = 0$ . Тогда

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (10.3)$$

Соответственно

$$v_{dx} = \varepsilon_{xy}\eta, \quad v_{dy} = \varepsilon_{yx}\xi, \quad v_{dz} = 0. \quad (10.4)$$

Отсюда видно, что точки оси  $\eta$  ( $\xi = 0$ ) испытывают сдвиг в направлении оси  $\xi$ , пропорциональный расстоянию  $\eta$ , точки оси  $\xi$  — сдвиг в направлении оси  $\eta$  (рис. 3). Таким образом, имеет место скашивание прямого угла (в данном случае между осями  $\xi$  и  $\eta$ ). Составляющие

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{v_{dx}}{\eta} = \frac{v_{dy}}{\xi}$$

имеют смысл скорости сканирования прямого угла. Аналогичный смысл имеют другие боковые компоненты (8.17). В общем случае, когда тензор  $T$  имеет вид (8.17), деформацию элементарного объема можно представить как суперпозицию деформаций растяжений (сжатий) относительно трех координатных осей и деформаций сдвига. Если тензор скоростей деформаций отнесен к своим главным осям  $\xi, \eta, \zeta$ , то скорость деформации будет иметь проекции

$$v_{dx} = \epsilon_1 \xi, \quad v_{dy} = \epsilon_2 \eta, \quad v_{dz} = \epsilon_3 \zeta. \quad (10.5)$$

Таким образом, самая общая деформация частицы может быть представлена как деформация растяжения относительно трех главных осей деформации.

Из (10.5) следует, что если  $|v_d| = 0$ , то  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ . Это значит, что отсутствие деформации соответствует нулевому тензору (в главных осях). Но если тензор нулевой в главных осях, то он будет нулевым и во всех других осях, т. е. из  $|v_d| = 0$  следует, что  $\epsilon_{ik} = 0$ . Очевидно, что в этом случае и все инварианты тензора  $\epsilon$  равны нулю:  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ .

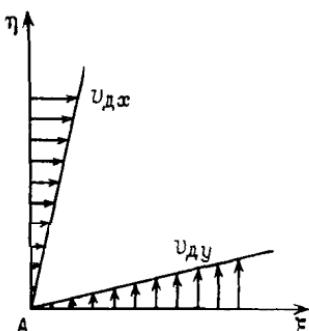


Рис. 3.

## § 11. СМЫСЛ КОМПОНЕНТ ВИХРЯ СКОРОСТИ

В § 8 мы установили, что скорость любой точки жидкой частицы может быть представлена в виде

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_d,$$

где  $\mathbf{v}_A$  — скорость полюса;  $\mathbf{v}_d$  — чисто деформационная скорость;  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  — скорость точки во вращательном движении затвердевшей жидкой частицы с угловой скоростью  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}$ .

Вектор  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} = 2\omega$  — удвоенная угловая скорость, с которой затвердевшая жидкость вращается вокруг оси, проходящей через полюс. Проекции вихря скорости

$$\Omega_x = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\omega_x,$$

$$\Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Проекцию вектора угловой скорости на какую-либо ось можно одновременно рассматривать как угловую скорость вращения

относительно этой оси. Поэтому проекции вихря скорости есть удвоенные угловые скорости, с которыми затвердевшая жидкая частица вращается вокруг осей, параллельных осям координат.

### § 12. ВИХРЕВЫЕ ЛИНИИ, ВИХРЕВЫЕ ТРУБКИ

Как было установлено, в общем случае объем жидкой частицы при своем движении деформируется и поворачивается, как целое, с угловой скоростью  $\frac{1}{2}\Omega$ . Чтобы лучше представить себе эту совокупность вращающихся частиц, вводят понятие вихревых линий. *Вихревой линией* называется линия в данный момент времени, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора вихря  $\Omega$  в этой точке. Записывая условие коллинеарности элемента вихревой линии  $d\mathbf{r}$  и вектора  $\Omega$ , получаем дифференциальные уравнения вихревой линии

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

Если взять кривую  $AB$ , не являющуюся вихревой линией, и через каждую ее точку провести вихревую линию, то получим вихревую поверхность. Вихревые линии, проведенные через точки замкнутого контура, образуют вихревую трубку. Если замкнутый контур малый (бесконечно малый), то вихревую трубку называют элементарной трубкой, или вихревой нитью.

### § 13. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

Возьмем в жидкости некоторую кривую  $l$ . Пусть  $\mathbf{v}$  — скорость частиц жидкости в точках этой кривой,  $v_l$  — проекция  $\mathbf{v}$  на касательную к ней. Циркуляцией скорости по некоторой кривой  $AB$  называется вычисленный вдоль этой кривой интеграл

$$\Gamma = \int_A^B v_l \, dl = \int_A^B v \cos(\widehat{\mathbf{v}, d\mathbf{r}}) \, dl,$$

где  $d\mathbf{r}$  — вектор перемещения вдоль кривой  $|d\mathbf{r}| = dl$ . Так как  $v \cos(\widehat{\mathbf{v}, d\mathbf{r}}) \, dl = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ , то выражение для  $\Gamma$  часто записывается в виде

$$\Gamma = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B v_x \, dx + v_y \, dy + v_z \, dz.$$

Если контур замкнутый (точки  $A$  и  $B$  совпадают), то используют такую запись:

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Направление обхода должно быть указано.

Теорема Стокса устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутой кривой и интегралом по поверхности, ограниченной этой кривой. Применяя теорему Стокса к циркуляции  $\Gamma$ , получаем

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \Omega_n dS.$$

Интеграл  $\iint_S (\Omega \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \Omega_n dS$  называют потоком вихря через поверхность  $S$ .

#### § 14. СКОРОСТЬ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим в момент  $t$  некоторую массу жидкости в объеме  $\tau$ , ограниченном поверхностью  $S$ . В момент  $t + \Delta t$  та

же масса жидкости будет занимать объем  $\tau'$ , ограниченный поверхностью  $S'$ . Скоростью объемного расширения жидкости в данной точке называется предел

$$I = \lim_{\substack{\tau' \rightarrow \tau \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\tau' - \tau}{\tau \Delta t}. \quad (14.1)$$

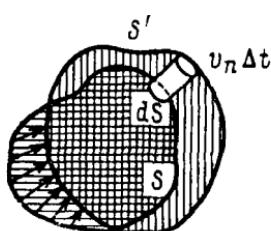


Рис. 4.

Величина  $\frac{\tau' - \tau}{\tau \Delta t}$  есть относительное приращение объема в единицу времени.

Вычислим величину  $I$ , определяемую формулой (14.1). Имеем

$$\tau' - \tau = \iiint_{\tau'} d\tau - \iiint_{\tau} d\tau = \iiint_{\tau'-\tau} d\tau. \quad (14.2)$$

Так как  $\Delta t$  мало, то объем  $\tau' - \tau$  представляет собой тонкий слой между поверхностями  $S$  и  $S'$ . Тогда элемент объема  $d\tau$  можно взять в виде (рис. 4)

$$d\tau = ds \Delta n = dS \cdot v_n \cdot \Delta t, \quad (14.3)$$

где  $\Delta n$  — расстояние по нормали между поверхностью  $S$  и поверхностью  $S'$ , в которую перешли точки поверхности  $S$  за время  $\Delta t$ ;  $v_n$  — проекция скорости точек поверхности  $S$  на внешнюю нормаль к ней. Теперь  $\tau' - \tau$  можем записать в виде

$$\iiint_{\tau'-\tau} d\tau = \Delta t \iint_S v_n dS. \text{ Отсюда}$$

$$\tau' - \tau = \Delta t \iint_S v_n dS \quad \text{и} \quad I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\iint_S v_n dS}{\tau}. \quad (14.4)$$

Разделим обе части на  $\Delta t$  и устремим  $\Delta t$  к нулю. При этом  $A'$  перейдет в  $A$ , и мы получим

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} d\tau + \iint_S A v_n dS. \quad (15.5)$$

Как обычно, преобразуем интеграл по поверхности к интегралу по объему:

$$\begin{aligned} \iint_S A v_n dS &= \iint_S A [v_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + v_z \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, для производной  $\frac{dI}{dt}$  получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) \right] d\tau. \quad (15.6) \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать к другому виду, раскрывая производные от произведений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) &= \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} + \\ &\quad + A \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Соответственно равенство (15.6) примет вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau. \quad (15.7)$$

2. Вычисление  $\frac{dI}{dt}$  в переменных Лагранжа.

Рассмотрим объем  $\tau$  выделенной массы жидкости в момент  $t$ . Координаты частиц этого объема можно записать в виде

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t),$$

где  $a, b, c$  — координаты этих частиц в момент времени  $t_0$ , когда декартовы координаты совпадали с координатами Лагранжа  $x = a, y = b, z = c$ , а объем  $\tau$  занимал объем  $\tau_0$ . В интеграле (15.1), который нужно дифференцировать, перейдем от переменных  $x, y, z$  к переменным Лагранжа. Тогда

$$I = \iiint_{\tau_0} A \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} da db dc. \quad (15.8)$$

в различных точках. Интеграл есть функция времени  $I = I(t)$ . Нас будет интересовать величина

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau. \quad (15.2)$$

Получим выражение для производной  $\frac{dI}{dt}$  в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа.

1. Вычисление  $\frac{dI}{dt}$  в переменных Эйлера. Рассмотрим два близких момента времени  $t$  и  $t' = t + \Delta t$ . Для момента времени  $t$  сохраним введенные обозначения:  $A(x, y, z, t) = A$ ,  $I(t) = I$ . Значения всех функций в момент  $t' = t + \Delta t$  будем отмечать штрихами. Таким образом,

$$I = \iiint_{\tau} A d\tau, \quad I' = \iiint_{\tau'} A' d\tau.$$

При малых  $\Delta t$  можем записать

$$I' = \iiint_{\tau} A' d\tau + \iiint_{\tau' - \tau} A' d\tau, \quad (15.3)$$

$$\Delta I = I' - I = \iiint_{\tau} (A' - A) d\tau + \iiint_{\tau' - \tau} A' d\tau.$$

Подынтегральная функция  $A' - A$  вычисляется в точках, принадлежащих объему  $\tau$ , но  $A$  вычисляется в момент  $t$ , а  $A'$  — в момент  $t' = t + \Delta t$ . С точностью до малых более высокого порядка

$$A' - A = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \dots$$

Учитывая это, приходим к равенству

$$\Delta I = \Delta t \iiint_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} d\tau + \iiint_{\tau' - \tau} A' d\tau. \quad (15.4)$$

Преобразуем второе слагаемое в (15.4) так, как это уже делали в § 14.

Элемент  $d\tau$  объема  $\tau' - \tau$  выберем в виде  $d\tau = dS \Delta n = dS v_n \Delta t$ . Тогда

$$\iiint_{\tau' - \tau} A' d\tau = \Delta t \iint_S A' v_n dS.$$

Равенство (15.4) можно теперь записать в виде

$$\Delta I = \Delta t \iiint_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} d\tau + \Delta t \iint_S A' v_n dS.$$

Разделим обе части на  $\Delta t$  и устремим  $\Delta t$  к нулю. При этом  $A'$  перейдет в  $A$ , и мы получим

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{\partial A}{\partial t} d\tau + \iint_S A v_n dS. \quad (15.5)$$

Как обычно, преобразуем интеграл по поверхности к интегралу по объему:

$$\begin{aligned} \iint_S A v_n dS &= \iint_S A [v_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + v_z \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, для производной  $\frac{dI}{dt}$  получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать к другому виду, раскрывая производные от произведений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Av_y) + \frac{\partial}{\partial z} (Av_z) &= \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} + \\ &\quad + A \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Соответственно равенство (15.6) примет вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau. \quad (15.7)$$

2. Вычисление  $\frac{dI}{dt}$  в переменных Лагранжа.

Рассмотрим объем  $\tau$  выделенной массы жидкости в момент  $t$ . Координаты частиц этого объема можно записать в виде

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t),$$

где  $a, b, c$  — координаты этих частиц в момент времени  $t_0$ , когда декартовы координаты совпадали с координатами Лагранжа  $x = a, y = b, z = c$ , а объем  $\tau$  занимал объем  $\tau_0$ . В интеграле (15.1), который нужно дифференцировать, перейдем от переменных  $x, y, z$  к переменным Лагранжа. Тогда

$$I = \iiint_{\tau_0} A \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} da db dc. \quad (15.8)$$

Но в этом случае объем интегрирования  $\tau_0$  постоянен для всех моментов времени, и можно дифференцировать под знаком интеграла. Таким образом,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A \, d\tau = \iiint_{\tau_0} \frac{d}{dt} \left[ A \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] da \, db \, dc.$$

Сделаем переход в правой части равенства от переменных  $a, b, c$  к переменным  $x, y, z$ , учитывая при этом, что

$$\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)} = \left[ \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right]^{-1}.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A \, d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] d\tau. \quad (15.9)$$

## ГЛАВА II

## ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАСС

Одним из основных законов механики является закон сохранения масс. Это физический закон, справедливый для движений, происходящих со скоростями, незначительными по сравнению со скоростью света. В этой главе будут получены различные математические формы записи этого закона.

## § 1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МАСС

Рассмотрим в момент времени  $t$  некоторый объем жидкости  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Обозначим через  $M$  массу жидкости в этом объеме. Частицы жидкости, находившиеся в момент  $t$  в объеме  $\tau$ , перемещаясь, заполнят в момент  $t'$  объем  $\tau'$  с массой  $M'$ .

Предположим, что в процессе движения жидкости нет ни возникновения, ни исчезновения массы; тогда закон сохранения массы запишется в виде

$$M = M'. \quad (1.1)$$

По определению плотности  $\rho$  масса в объеме  $d\tau$  равна  $dm = \rho d\tau$ . Масса в объемах  $\tau$  и  $\tau'$  соответственно будет

$$M = \iiint_{\tau} \rho d\tau, \quad M' = \iiint_{\tau'} \rho' d\tau. \quad (1.2)$$

Закон сохранения массы примет вид

$$\iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau'} \rho' d\tau, \quad (1.3)$$

или

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0. \quad (1.4)$$

Предположим, что в пространстве, заполненном движущейся жидкостью, имеются пространственно-распределенные источники.

Пусть в объем  $d\tau$  в течение промежутка времени  $dt$  за счет источников поступает масса жидкости  $dm = q d\tau dt$ . Здесь  $q$  имеет смысл поступающей за счет источников массы жидкости, отнесенной к единице объема и единице времени. Поэтому величину  $q$  можно назвать плотностью источников.

Масса жидкости, которая в момент  $t$  находилась в объеме  $\tau$ , будет изменяться во время движения. За время  $dt$  она получит

приращение  $\Delta m = dt \iiint_{\tau} q d\tau$ . За конечный промежуток времени от  $t$  до  $t'$  приращение массы будет равно

$$\Delta M = \int_t^{t'} \left( \iiint_{\tau} q d\tau \right) dt. \quad (1.5)$$

Теперь можем записать

$$M' = M + \Delta M. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2) и (1.5) в (1.6), получаем

$$\iiint_{\tau} \rho d\tau + \int_t^{t'} \left( \iiint_{\tau} q d\tau \right) dt = \iiint_{\tau'} \rho' d\tau. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) — запись закона сохранения масс при наличии пространственно-распределенных источников для конечного объема и конечного промежутка времени.

Дадим интегральную запись закона (1.7) для бесконечно малого промежутка времени. Предположим  $t' = t + \Delta t$ . Тогда (1.7) можно записать в виде

$$\iiint_{\tau'} \rho' d\tau - \iiint_{\tau} \rho d\tau = \Delta t \iiint_{\tau} q d\tau. \quad (1.8)$$

Поделив (1.8) на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t$  к нулю, получим

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} q d\tau. \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) — запись закона сохранения масс для конечного объема для данного момента времени при наличии пространственно-распределенных источников.

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МАСС В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА (УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА)

Исходим из записи закона сохранения масс для конечного объема (1.9). Для выполнения дифференцирования воспользуемся полученной ранее формулой (15.6) гл. I, положив в ней  $A = \rho$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] d\tau. \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.9), получим

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) - q \right] d\tau = 0. \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) имеет место для любого объема  $\tau$ . Это возможно только в том случае, когда подынтегральная функция равна нулю. Таким образом, из (2.2) следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = q. \quad (2.3)$$

Раскрывая в (2.3) производные от произведений и вводя обозначение индивидуальной производной  $\frac{d\rho}{dt}$ , получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q. \quad (2.3')$$

Равенство (2.3) есть дифференциальная форма записи закона сохранения массы в переменных Эйлера при наличии пространственно-распределенных источников с плотностью  $q$ .

Пусть жидкость несжимаема. Это означает, что плотность в движущейся частице не изменяется, т. е. индивидуальная производная от плотности по времени равна нулю. В переменных Эйлера это записывается в виде  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Уравнение неразрывности (2.3) в случае несжимаемой жидкости примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{q}{\rho}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{q}{\rho}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем чаще всего будут рассматриваться потоки, не содержащие источников.

Остановимся на рассмотрении уравнения неразрывности в случае, когда  $q = 0$ . Уравнение неразрывности (2.3) в общем случае запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (2.5)$$

Вводя вектор  $\rho \mathbf{v}$  с проекциями  $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ , можно уравнение (2.5) переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.5')$$

Из (2.3') получаем наиболее часто употребляемую запись уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.6)$$

Рассмотрим запись уравнения неразрывности для частных случаев.

1. Движение установившееся. В этом случае местная производная должна быть равна нулю, т. е.  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Уравнение неразрывности для установившегося движения

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.7)$$

2. Жидкость несжимаема. В этом случае  $\frac{dp}{dt} = 0$ . Из (2.6) следует

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.8)$$

3. Движение плоское. Движение называют плоским, если существует такая плоскость, что все частицы жидкости движутся параллельно этой плоскости, причем на любой прямой, перпендикулярной этой плоскости, гидродинамические величины имеют одно и то же значение. Принимая эту плоскость за плоскость  $(x, y)$ , получим, что  $v_z \equiv 0$ , а все гидродинамические величины будут зависеть только от  $x, y, t$ , и, следовательно, производные по  $z$  будут равны нулю.

Уравнение неразрывности для плоского движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0.$$

Если при этом движение установившееся, то

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0.$$

Для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

4. Одномерное движение с плоской симметрией. Рассмотрим движение, при котором все частицы движутся параллельно некоторой прямой, причем все гидродинамические величины в каждой плоскости, перпендикулярной этой прямой, постоянны. Если эту прямую принять за ось  $x$ , то при таком выборе системы координат  $v_y = v_z \equiv 0$  и  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ . Уравнение неразрывности в этом случае будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0.$$

Кроме движения с так называемой плоской симметрией рассматривают и другие одномерные движения — с осевой симметрией, со сферической симметрией (например, точечный взрыв).

### § 3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

Исходим из интегральной записи закона сохранения масс (1.9). От переменных  $x, y, z$  перейдем к переменным Лагранжа  $a, b, c$ , которые определяют положение частиц в момент времени

$t_0$  в соответствующем объеме  $\tau_0$ . Тогда (1.9) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau_0} \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} da db dc = \iiint_{\tau_0} q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} da db dc. \quad (3.1)$$

Объем  $\tau_0$  не зависит от времени. Производную  $\frac{d}{dt}$  можно внести под знак интеграла. В переменных Лагранжа индивидуальная производная вычисляется как частная производная, поэтому равенство (3.1) можно записать в виде

$$\iiint_{\tau_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] - q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right\} da db dc = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.2) в силу произвольности объема  $\tau_0$  будет следовать, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] - q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 0, \quad (3.3)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = q. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) — уравнение неразрывности в переменных Лагранжа в общем случае при наличии источников.

Если  $q = 0$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] = 0. \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) означает, что величина в квадратных скобках не зависит от лагранжевой переменной  $t$ , т. е.

$$\rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho' \frac{D(x', y', z')}{D(a, b, c)}. \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) — уравнение неразрывности в переменных Лагранжа при  $q = 0$ . Величины, стоящие слева в уравнении (3.6), вычислены в момент  $t$ , справа — в любой другой момент времени  $t'$ . Если за момент  $t'$  взять момент времени  $t_0$ , когда  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ , т. е. когда декартовы координаты совпадают с координатами Лагранжа, то уравнение (3.6) запишется в виде

$$\rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho_0, \quad (3.7)$$

или подробнее

$$\rho(a, b, c, t) \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho_0(a, b, c).$$

Здесь  $x, y, z$  — функции координат Лагранжа  $a, b, c, t$ ;  $\rho_0$  — плотность, вычисленная в момент  $t_0$ .

Если жидкость несжимаема, то  $\rho' = \rho$ , и уравнение неразрывности, как следует из (3.6) и (3.7), может быть записано в виде

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(x', y', z')}{D(a, b, c)}, \quad \text{или} \quad \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 1. \quad (3.8)$$

То, что якобиан сохраняет постоянное значение, равное единице, означает, что объем не изменяется по величине, хотя и может деформироваться.

В случае плоского движения, принимая плоскость движения за плоскость  $(x, y)$ , можем написать

$$x = x(a, b, t), \quad y = y(a, b, t), \quad z = c.$$

При этом

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(x, y)}{D(a, b)},$$

и уравнение неразрывности запишется в виде

$$\rho \frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \rho' \frac{D(x', y')}{D(a, b)}, \quad \text{или} \quad \rho \frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \rho_0.$$

В случае одномерного движения, когда  $x = x(a, t)$ ,  $y = c_1$ ,  $z = c_2$ , уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\rho \frac{dx}{da} = \rho' \frac{dx'}{da}, \quad \text{или} \quad \rho \frac{dx}{da} = \rho_0.$$

Укажем на связь между уравнениями неразрывности, записанными в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа.

Уравнение неразрывности (3.7) в переменных Лагранжа умножим на  $\delta\tau_0 = dadbdc$ . Получим

$$\rho \delta\tau = \rho_0 \delta\tau_0.$$

Здесь  $\delta\tau = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} dadbdc$  — элемент объема, в который в момент времени  $t$  переходит элемент объема  $\delta\tau_0$ . Последнее равенство можно переписать так:

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta\tau) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} \delta\tau + \rho \frac{d}{dt}(\delta\tau) = 0.$$

Отсюда  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\tau) = 0$ . Но ранее было показано, что

$$\frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\tau) = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Таким образом, получаем уравнение неразрывности в переменных Эйлера.

#### § 4. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Для получения уравнения неразрывности в произвольных криволинейных ортогональных координатах поступим следующим образом. Пусть  $q_1, q_2, q_3$  — криволинейные ортогональные координаты и пусть связь между  $q_1, q_2, q_3$  и декартовыми координатами  $x, y, z$  задается соотношениями

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (4.1)$$

Рассмотрим криволинейный параллелепипед, образованный координатными поверхностями (рис. 5):

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{const}, \quad q_1 + dq_1 = \text{const}; \\ q_2 &= \text{const}, \quad q_2 + dq_2 = \text{const}; \\ q_3 &= \text{const}, \quad q_3 + dq_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ребра этого параллелепипеда  $ds_1, ds_2, ds_3$  есть элементы дуг, соответствующие приращению координат  $dq_1, dq_2, dq_3$ :

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3. \quad (4.3)$$

Здесь  $H_1, H_2, H_3$  — коэффициенты Ламе:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

Объем параллелепипеда в предположении ортогональности координат будет равен

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4.5)$$

Для того чтобы записать закон сохранения массы, подсчитаем изменение массы  $\delta M$  за время  $dt$  внутри элементарного параллелепипеда двумя способами.

1. В момент времени  $t$  масса жидкости  $\Delta M$  в объеме  $d\tau$  равна

$$\begin{aligned} \Delta M &= \rho|_t ds_1 ds_2 ds_3 = \\ &= \rho|_t H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

В момент времени  $t + \Delta t$  масса жидкости в том же объеме  $d\tau$  будет

$$\begin{aligned} \Delta M' &= \rho|_{t+\Delta t} ds_1 ds_2 ds_3 = \\ &= \rho|_{t+\Delta t} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Изменение массы в объеме  $d\tau$  за время  $dt$

$$\delta M = \Delta M' - \Delta M = (\rho|_{t+\Delta t} - \rho|_t) H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4.6)$$

Из равенства (4.6) следует

$$\delta M = \frac{\partial \rho}{\partial t} H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 dt. \quad (4.7)$$

2. Изменение массы в рассматриваемом объеме за время  $dt$  может быть связано с тем, что есть источники, распределенные в пространстве, и что количество жидкости, которое втекло в объем  $d\tau$ , не равно количеству жидкости, которое вытекло из этого объема.

Введем обозначения:

$\delta m$  — изменение массы в объеме  $d\tau$  за счет источников;

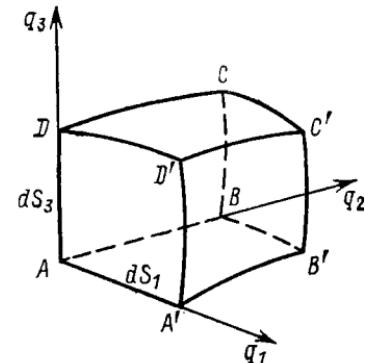


Рис. 5.

$\delta m_1$  — изменение массы в объеме  $d\tau$  за счет того, что через грань  $A'B'C'D'$  могло вытечь не такое количество жидкости, которое втекло через грань  $ABCD$ ;

$\delta m_2$  — изменение массы за счет протекания через грани  $AA'D'D$  и  $BB'C'C$ ;

$\delta m_3$  — изменение массы за счет протекания через грани  $AA'B'B$  и  $DD'C'C$ .

Общее изменение массы  $\delta M$

$$\delta M = \delta m + \delta m_1 + \delta m_2 + \delta m_3. \quad (4.8)$$

По определению величины  $q$  имеем

$$\delta m = q d\tau dt = q H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 dt. \quad (4.9)$$

Подсчитаем  $\delta m_1$ ,  $\delta m_2$ ,  $\delta m_3$ . Для этого обозначим через  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  проекции скорости жидкости на оси  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ . Через грань  $ABCD$  в объем  $d\tau$  за  $dt$  поступает масса жидкости

$$\delta M_1 = (\rho ds_2 ds_3 v_1 dt) |_{q_1} = (\rho v_1 H_2 H_3) |_{q_1} dq_2 dq_3 dt.$$

Через грань  $A'B'C'D'$  за то же время вытекает масса жидкости

$$\delta M'_1 = (\rho ds_2 ds_3 v_1 dt) |_{q_1+dq_1} = (\rho v_1 H_2 H_3) |_{q_1+dq_1} dq_2 dq_3 dt.$$

Интересующая нас величина

$$\begin{aligned} \delta m_1 &= \delta M_1 - \delta M'_1 = [(\rho v_1 H_2 H_3) |_{q_1} - (\rho v_1 H_2 H_3) |_{q_1+dq_1}] dq_2 dq_3 dt = \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3 dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Аналогично получим

$$\delta m_2 = -\frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_1 H_3) dq_1 dq_2 dq_3 dt; \quad (4.11)$$

$$\delta m_3 = -\frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) dq_1 dq_2 dq_3 dt. \quad (4.12)$$

Общее изменение массы  $\delta M$  получим, подставив (4.9) — (4.12) в (4.8):

$$\begin{aligned} \delta M &= \left[ -\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_1 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) + \right. \\ &\quad \left. + q H_1 H_2 H_3 \right] dq_1 dq_2 dq_3 dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Сравнивая два выражения (4.7) и (4.13) для  $\delta M$ , получаем уравнение неразрывности в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_1 H_3) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) = q H_1 H_2 H_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Декартовы координаты  $x, y, z$ . Здесь

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z; \quad H_1 = H_2 = H_3 = 1.$$

Уравнение (4.14) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = q. \quad (4.15)$$

б) Цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ . Здесь

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = z; \quad v_1 = v_r, \quad v_2 = v_\theta, \quad v_3 = v_z.$$

Связь между цилиндрическими и декартовыми координатами имеет вид

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Коэффициенты Ламе, вычисленные по формулам (4.4):

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_z = 1.$$

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах запишется в виде

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z r) = qr. \quad (4.16)$$

в) Сферические координаты  $(r, \theta, \lambda)$ . В этом случае

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \lambda; \quad v_1 = v_r, \quad v_2 = v_\theta, \quad v_3 = v_\lambda;$$

$$x = r \sin \theta \cos \lambda, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \lambda.$$

Коэффициенты Ламе  $H_1 = H_r = 1, H_2 = H_\theta = r, H_3 = H_\lambda = r \sin \theta$ . Уравнение (4.14) в сферических координатах примет вид

$$r^2 \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda r) = qr^2 \sin \theta. \quad (4.17)$$

Обратимся к общему уравнению (4.14). Будем дифференцировать произведения, отделяя множители, содержащие  $\rho$ , и разделим затем все члены на  $H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial \rho}{\partial q_3} + \\ + \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 H_1 H_2) \right] = q \end{aligned} \quad (4.18)$$

Рассмотрим первые четыре слагаемых и учтем при этом (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \rho}{\partial s_i} = \\ = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial s_i} \frac{ds_i}{dt} = \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Подставляя (4.19) в (4.18), получим уравнение неразрывности в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 H_1 H_2) \right] = q. \quad (4.20)$$

Сравнивая уравнение (4.20) с уравнением неразрывности, записанным в инвариантной форме (2.6), заметим, что в криволинейных координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 H_1 H_2) \right]. \quad (4.21)$$

## ГЛАВА III

### ЗАКОН КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Закон количества движения для системы материальных точек устанавливает связь между изменением количества движения и силами, которые вызывают это изменение. При рассмотрении движения жидкости в отличие от движения системы материальных точек приходится иметь дело с силами, непрерывно распределенными по объему или по поверхности.

#### § 1 СИЛЫ МАССОВЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ

Силы, приложенные к частицам жидкости, можно разделить на два класса.

*Массовые силы* — силы, действующие на каждый элемент объема независимо от того, имеются ли рядом другие части жидкости. Пусть  $F^M$  — главный вектор сил, действующих на массу  $M$  жидкости, заполняющей объем  $\tau$ . Средней массовой силой, действующей на массу  $M$ , называют величину  $F_{cp} = \frac{F^M}{M}$ .

Вектор

$$F = \lim_{\tau \rightarrow 0} F_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F^M}{M} \quad (1.1)$$

называется массовой силой, действующей в данной точке. Точнее называть вектор  $F$  массовой силой, отнесенной к единице массы (в случае сил тяжести  $F = g$ ).

Обычно сила  $F$  известна как функция координат точек пространства и времени  $F = F(x, y, z, t)$ . Если сила  $F$  известна во всех точках выделенного объема  $\tau$ , то можно подсчитать главный вектор  $F^M$  сил, действующих на массу жидкости в этом объеме. На объем  $dt$  с массой  $dm = \rho dt$  действует сила  $F dm = F \rho dt$ . Отсюда главный вектор массовых сил будет

$$F^M = \iiint_{\tau} \rho F \, d\tau. \quad (1.2)$$

*Поверхностные силы*. Пусть объем  $\tau$  ограничен поверхностью  $S$ . Жидкость, находящаяся вне объема  $\tau$ , действует через поверхность  $S$  на жидкость внутри  $\tau$ . Силы, с которыми частицы жидкости, находящиеся снаружи поверхности  $S$ , действуют на поверхность частицы объема  $\tau$ , называют поверхностными.

Выделим на  $S$  элемент поверхности  $\Delta S$  с нормалью  $n$ . Главный вектор поверхностных сил, действующих на  $\Delta S$ , обозначим  $\Delta F_n^S$ . Среднее напряжение, действующее на площадку  $\Delta S$ ,

будет  $\tau_n^{\text{cp}} = \frac{\Delta F_n^S}{\Delta S}$ . Пусть площадка  $\Delta S$  стягивается в точку. Вектор

$$\tau_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \tau_n^{\text{cp}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n^S}{\Delta S} \quad (1.3)$$

называют напряжением поверхностных сил, действующим в рассматриваемой точке (вектором поверхностной силы, отнесенными к единице площади). Вектор  $\tau_n$  зависит от координат точки, времени и положения площадки (т. е. от направления нормали  $n$ ). Из (1.3) следует, что на элемент поверхности  $dS$  действует сила  $\tau_n dS$ . Главный вектор поверхностных сил, действующих на поверхность  $S$ :

$$\mathbf{F}^s = \iint_S \tau_n dS. \quad (1.4)$$

Поверхностные силы описывают взаимодействие между различными областями жидкости.

## § 2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Выделим в движущейся жидкости некоторый объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Пусть вектор  $\mathbf{K}$  — количество движения массы жидкости, заполняющей этот объем. В элементарном объеме  $d\tau$  заключена масса  $\rho d\tau$ . Количество движения этой массы, имеющей скорость  $\mathbf{v}$ :

$$\Delta \mathbf{K} = \rho \mathbf{v} d\tau.$$

Количество движения массы, заключенной в объеме  $\tau$ :

$$\mathbf{K} = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau. \quad (2.1)$$

Для выделенной массы жидкости вектор  $\mathbf{K}$ , как и объем  $\tau$ , — функции времени.

Закон количества движения можно сформулировать так: производная по времени от количества движения некоторой системы масс равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^s. \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) выражения (1.2) и (1.4) для главных векторов массовых  $\mathbf{F}^M$  и поверхностных  $\mathbf{F}^s$  сил и выражение (2.1) для  $\mathbf{K}$ , получаем запись закона количества движения в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \iint_S \tau_n dS. \quad (2.3)$$

Проинтегрировав (2.3) от  $t_1$  до  $t_2$ , получим запись закона количества движения для конечного промежутка времени

$$\iiint_{\tau} \rho v \, d\tau |_{t=t_2} - \iiint_{\tau} \rho v \, d\tau |_{t=t_1} = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\tau} \rho F \, d\tau + \iint_S \tau_n \, dS \right] dt. \quad (2.4)$$

Изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно сумме импульса массовых сил и импульса поверхностных сил.

Обратимся к равенству (2.3). Для дифференцирования объемного интеграла имеем формулу (15.7) гл. I. Положив в ней  $A = \rho v$ , получим

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho v \, d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \left( \frac{d\rho v}{dt} + \rho v \operatorname{div} v \right) d\tau. \quad (2.5)$$

Принимая во внимание (2.5), перепишем (2.3) в виде

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\rho v) + \right. \\ \left. + \rho v \operatorname{div} v - \rho F \right] d\tau = \iint_S \tau_n \, dS. \quad (2.6)$$

Равенства (2.3), (2.4), (2.6) дают интегральную запись закона количества движения.

### § 3. ФОРМУЛА КОШИ

Запишем закон количества движения для частного случая объема  $\tau$ . За объем  $\tau$  выберем тетраэдр, три грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 6). Обозначим площади этих граней через  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ . Внешние нормали к этим граням направлены противоположно осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Площадь четвертой грани с нормалью  $n$  обозначим через  $S_n$ . Пусть  $\tau_{-x}$ ,  $\tau_{-y}$ ,  $\tau_{-z}$ ,  $\tau_n$  — напряжения, действующие на каждую из граней.

Применив формулу (2.6) к объему  $\tau$ , будем иметь

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\rho v) + \rho v \operatorname{div} v - \rho F \right] d\tau = \\ = \iint_{S_x} \tau_{-x} \, dS + \iint_{S_y} \tau_{-y} \, dS + \iint_{S_z} \tau_{-z} \, dS + \iint_{S_n} \tau_n \, dS. \quad (3.1)$$

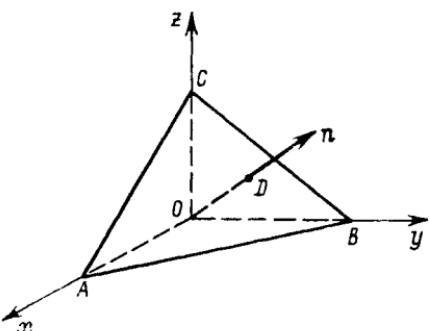


Рис. 6.

ванной площадки может быть вычислено, если известна таблица из девяти величин:

$$T = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

#### § 4. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Будем исходить из формулы Коши (3.7). Докажем, что таблица (3.8) является аффинным ортогональным тензором второго ранга. Для этого надо найти формулы преобразования  $\tau_{ik}$  при переходе от одной системы координат  $x, y, z$  к другой  $x', y', z'$ . Обозначим орты координатных осей соответственно через  $i, j, k$  и  $i', j', k'$ . Вспомним таблицу (7.1) гл. I для направляющих косинусов  $\alpha_{ik}$  и будем пользоваться формулой Коши, выбирая за  $\mathbf{n}$  последовательно  $i', j', k'$ . Получим

$$\tau_{x'} = \tau_x \alpha_{11} + \tau_y \alpha_{12} + \tau_z \alpha_{13}; \quad (4.1)$$

$$\tau_{y'} = \tau_x \alpha_{21} + \tau_y \alpha_{22} + \tau_z \alpha_{23}; \quad (4.2)$$

$$\tau_{z'} = \tau_x \alpha_{31} + \tau_y \alpha_{32} + \tau_z \alpha_{33}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим одну из этих формул, например (4.1). Представим  $\tau_{x'}$  через проекции  $\tau_{x'x}, \tau_{x'y}, \tau_{x'z}$  на оси  $x', y', z'$ :

$$\tau_{x'} = i' \tau_{x'x} + j' \tau_{x'y} + k' \tau_{x'z}. \quad (4.4)$$

Соответственно  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  — через проекции на оси  $x, y, z$ :

$$\tau_x = i \tau_{xx} + j \tau_{xy} + k \tau_{xz},$$

$$\tau_y = i \tau_{yx} + j \tau_{yy} + k \tau_{yz}, \quad (4.5)$$

$$\tau_z = i \tau_{zx} + j \tau_{zy} + k \tau_{zz}.$$

Подставляя (4.4) и (4.5) в (4.1), получаем векторное равенство  $\tau_{x'x}i' + \tau_{x'y}j' + \tau_{x'z}k' = \alpha_{11}(\tau_{xx}i + \tau_{xy}j + \tau_{xz}k) + \alpha_{12}(\tau_{yx}i + \tau_{yy}j + \tau_{yz}k) + \alpha_{13}(\tau_{zx}i + \tau_{zy}j + \tau_{zz}k)$ .

$$+ \alpha_{12}(\tau_{yx}i + \tau_{yy}j + \tau_{yz}k) + \alpha_{13}(\tau_{zx}i + \tau_{zy}j + \tau_{zz}k). \quad (4.6)$$

Умножая последовательно (4.6) скалярно на  $i', j', k'$ , получим выражения для  $\tau_{x'x}, \tau_{x'y}, \tau_{x'z}$  через составляющие таблицы  $T$  в координатах  $(x, y, z)$ . Выпишем одно из равенств (заметим, что  $(i' \cdot i) = \alpha_{11}, (i' \cdot j) = \alpha_{12}, (i' \cdot k) = \alpha_{13}$ ):

$$\begin{aligned} \tau_{x'x} = & \alpha_{11}\alpha_{11}\tau_{xx} + \alpha_{11}\alpha_{12}\tau_{xy} + \alpha_{11}\alpha_{13}\tau_{xz} + \\ & + \alpha_{12}\alpha_{11}\tau_{yx} + \alpha_{12}\alpha_{12}\tau_{yy} + \alpha_{12}\alpha_{13}\tau_{yz} + \\ & + \alpha_{13}\alpha_{11}\tau_{zx} + \alpha_{13}\alpha_{12}\tau_{zy} + \alpha_{13}\alpha_{13}\tau_{zz}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя (4.2) и (4.3), получаем аналогичные выражения для остальных шести составляющих. Из равенства (4.7) видно, что составляющие таблицы  $T$  при переходе от одной системы

ванной площадки может быть вычислено, если известна таблица из девяти величин:

$$T = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

#### § 4. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Будем исходить из формулы Коши (3.7). Докажем, что таблица (3.8) является аффинным ортогональным тензором второго ранга. Для этого надо найти формулы преобразования  $\tau_{ik}$  при переходе от одной системы координат  $x, y, z$  к другой  $x', y', z'$ . Обозначим орты координатных осей соответственно через  $i, j, k$  и  $i', j', k'$ . Вспомним таблицу (7.1) гл. I для направляющих косинусов  $\alpha_{ik}$  и будем пользоваться формулой Коши, выбирая за  $\mathbf{n}$  последовательно  $i', j', k'$ . Получим

$$\tau_{x'} = \tau_x \alpha_{11} + \tau_y \alpha_{12} + \tau_z \alpha_{13}; \quad (4.1)$$

$$\tau_{y'} = \tau_x \alpha_{21} + \tau_y \alpha_{22} + \tau_z \alpha_{23}; \quad (4.2)$$

$$\tau_{z'} = \tau_x \alpha_{31} + \tau_y \alpha_{32} + \tau_z \alpha_{33}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим одну из этих формул, например (4.1). Представим  $\tau_{x'}$  через проекции  $\tau_{x'x'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$  на оси  $x', y', z'$ :

$$\tau_{x'} = i' \tau_{x'x'} + j' \tau_{x'y'} + k' \tau_{x'z'}. \quad (4.4)$$

Соответственно  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  — через проекции на оси  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} \tau_x &= i \tau_{xx} + j \tau_{xy} + k \tau_{xz}, \\ \tau_y &= i \tau_{yx} + j \tau_{yy} + k \tau_{yz}, \\ \tau_z &= i \tau_{zx} + j \tau_{zy} + k \tau_{zz}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4) и (4.5) в (4.1), получаем векторное равенство  $\tau_{x'x'}i' + \tau_{x'y'}j' + \tau_{x'z'}k' = \alpha_{11}(\tau_{xx}i + \tau_{xy}j + \tau_{xz}k) +$

$$+ \alpha_{12}(\tau_{yx}i + \tau_{yy}j + \tau_{yz}k) + \alpha_{13}(\tau_{zx}i + \tau_{zy}j + \tau_{zz}k). \quad (4.6)$$

Умножая последовательно (4.6) скалярно на  $i', j', k'$ , получим выражения для  $\tau_{x'x'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$  через составляющие таблицы  $T$  в координатах  $(x, y, z)$ . Выпишем одно из равенств (заметим, что  $(i' \cdot i) = \alpha_{11}, (i' \cdot j) = \alpha_{12}, (i' \cdot k) = \alpha_{13}$ ):

$$\begin{aligned} \tau_{x'x'} &= \alpha_{11}\alpha_{11}\tau_{xx} + \alpha_{11}\alpha_{12}\tau_{xy} + \alpha_{11}\alpha_{13}\tau_{xz} + \\ &+ \alpha_{12}\alpha_{11}\tau_{yx} + \alpha_{12}\alpha_{12}\tau_{yy} + \alpha_{12}\alpha_{13}\tau_{yz} + \\ &+ \alpha_{13}\alpha_{11}\tau_{zx} + \alpha_{13}\alpha_{12}\tau_{zy} + \alpha_{13}\alpha_{13}\tau_{zz}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя (4.2) и (4.3), получаем аналогичные выражения для остальных шести составляющих. Из равенства (4.7) видно, что составляющие таблицы  $T$  при переходе от одной системы

координат к другой преобразуются как компоненты аффинного ортогонального тензора второго ранга. Тензор  $T = \|\tau_{ik}\|$  называется *тензором напряжений*.

Физический смысл компонент тензора напряжений очевиден. Возьмем вектор  $\tau_x$  — напряжение на площадку, перпендикулярную оси  $x$  (рис. 8):

$$\tau_x = \tau_{xx} \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}.$$

Здесь  $\tau_{xx}$  — нормальное напряжение;  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , являющиеся проекциями вектора  $\tau_x$  на оси координат  $y$  и  $z$ , есть напряжения, касательные к площадке.

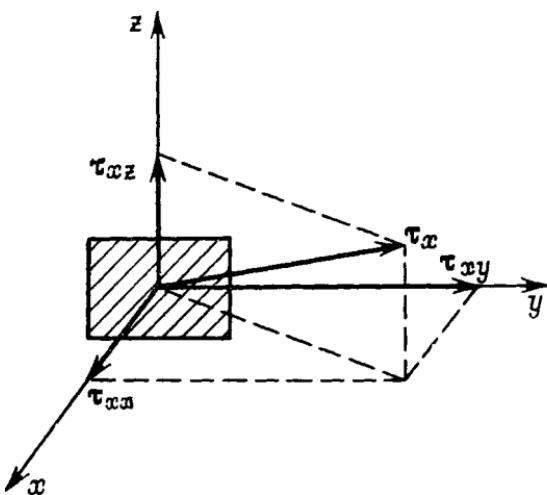


Рис. 8.

Таким образом, диагональные компоненты тензора дают нормальные составляющие напряжений, боковые компоненты дают касательные составляющие напряжений, приложенных к площадкам, перпендикулярным осям координат.

### § 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Исходим из интегральной записи закона (2.6)

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} \right] d\tau = \iint_S \tau_n dS. \quad (5.1)$$

Используя для  $\tau_n$  формулу Коши, преобразуем интеграл по  $S$  в правой части (5.1) к интегралу по объему  $\tau$ , применяя фор-

мулу Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_n dS &= \iint_S [\tau_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \tau_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \tau_z \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) d\tau. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем интегральную запись закона в виде

$$\iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} \rho v + \rho v \operatorname{div} v - \rho F - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right] d\tau = 0. \quad (5.3).$$

Так как (5.3) имеет место для любого объема  $\tau$ , то, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \rho v + \rho v \operatorname{div} v - \rho F - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Выполнив дифференцирование в первом слагаемом, можем переписать (5.4) в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} + v \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) = \rho F + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Равенства (5.4), (5.5) представляют собой дифференциальную запись закона количества движения в общем случае.

Предположим, что движение сплошной среды происходит при отсутствии источников массы, т. е.  $q = 0$ . В этом случае уравнение неразрывности имеет вид (2.6) гл. II. Учитывая это, получим запись закона количества движения в векторной форме:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}, \quad (5.6)$$

или в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5.6')$$

Слева в уравнениях (5.6') стоит оператор полной производной. Уравнение (5.6) или эквивалентную ему систему уравнений (5.6') обычно называют *уравнениями движения сплошной среды в напряжениях*.

**Замечание 1.** Запись закона количества движения в интегральном виде дается равенством (5.3). При отсутствии

источников массы справедливо равенство (2.6) гл. II, в силу чего закон количества движения (5.3) запишется в виде

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \iint_S \boldsymbol{\tau}_n dS,$$

или

$$\iiint_{\tau} (\rho \mathbf{F} - \rho \mathbf{w}) d\tau + \iint_S \boldsymbol{\tau}_n dS = 0, \quad (5.7)$$

т. е. в каждый момент времени сумма всех сил, приложенных к выделенному объему жидкости, включая и силы инерции, равна нулю.

**З а м е ч а н и е 2.** Из второго закона Ньютона, записанного для точки  $\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ , следует, что скорость образования количества движения равна силе, т. е. сила — источник, из которого образуется количество движения. С указанной выше точки зрения изменение количества движения в объеме жидкости  $\tau$  происходит по двум причинам: за счет объемного выделения импульса, порожденного массовой силой, и за счет потока импульса через границу области.

## ГЛАВА IV

## ЗАКОН МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для механической системы закон момента количества движения формулировался так: производная по времени от полного момента количества движения некоторой системы равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему. Получим запись этого закона для случая движения сплошной среды.

### § 1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим массу сплошной среды  $M$ ; пусть в данный момент она занимает объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Эта масса обладает количеством движения  $K$  и моментом количества движения  $L$ . Элемент объема  $d\tau$  содержит массу  $dm = \rho d\tau$ , количество движения которой равно  $\rho v d\tau$ . Момент количества движения этой массы относительно начала координат равен  $(r \times \rho v) d\tau$ . Этот момент связан с поступательным движением и часто называется *орбитальным моментом*. Для области  $\tau$

$$L_{\text{оп}} = \iiint_{\tau} (r \times \rho v) d\tau. \quad (1.1)$$

У большинства жидкостей полный момент количества движения совпадает с орбитальным.

Однако так бывает не всегда. Жидкость имеет молекулярное строение, и состояние жидкости связано с движением молекул и их взаимодействием. Столкновения молекул (атомов) между собой приводят к их вращению. Вращение каждой молекулы можно охарактеризовать вектором внутреннего момента количества движения. В обычных условиях в силу хаотичности движения сумма внутренних моментов количества движения равна нулю. В тех же случаях (например, при наличии магнитных или других сильных полей), когда распределение этих моментов не изотропное, суммарный внутренний момент оказывается отличным от нуля. В связи с этим при рассмотрении макроскопического движения частиц необходимо вводить вектор внутреннего момента. Полный момент количества движения частицы складывается из орбитального момента  $r \times dm v$ , связанного с движением частицы, как целого, и внутреннего момента количества движения, представляющего собой суммарный момент вращений молекул. Обозначим через  $M$  внутренний момент количества движения, которым обладает единица массы жидкости  $M = M(r, t)$ . Масса  $dm = \rho d\tau$  будет обладать моментом  $M \rho d\tau$ . Для массы в объеме  $\tau$  получим

$$L_{\text{вн}} = \iiint_{\tau} M \rho d\tau. \quad (1.2)$$

Полный момент количества движения массы равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{об}} + \mathbf{L}_{\text{вн}},$$

$$\mathbf{L} = \iiint_{\tau} [(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{M}] d\tau. \quad (1.3)$$

Изменение полного момента количества движения связано с наличием моментов, порождаемых словесными полями — полем массовых и поверхностных сил, наличием объемно-распределенных источников внутреннего момента и потока внутреннего момента через поверхность. Введем необходимые определения и запишем выражения для моментов внешних сил и внутренних моментов.

На элемент  $d\tau$  с массой  $dm$  действует сила  $\rho \mathbf{F} dt$ . Орбитальный момент этой силы  $(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) dt$ . Главный орбитальный момент массовых сил равен

$$\mathbf{M}_0 = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) d\tau. \quad (1.4)$$

На элемент поверхности  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$  действует поверхностная сила  $\tau_n dS$ . Главный орбитальный момент поверхностных сил

$$\mathbf{M}_S = \iint_S (\mathbf{r} \times \tau_n) dS. \quad (1.5)$$

Пусть за время  $dt$  в объеме  $d\tau$  порождается момент  $\rho \Pi dt d\tau$ , где  $\Pi$  — момент, отнесенный к единице массы и единице времени. Обозначая через  $\mathbf{M}_0^{\text{вн}}$   $dt$  приращение за то же время внутреннего момента в объеме  $\tau$ , получим для  $\mathbf{M}_0$  выражение

$$\mathbf{M}_0^{\text{вн}} = \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau. \quad (1.6)$$

Через элемент поверхности  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$  в течение времени  $dt$  проникает момент  $\pi_n dS dt$ . Здесь  $\pi_n$  — плотность потока (проникновения) внутреннего момента. Обозначая через  $\mathbf{M}_S^{\text{вн}}$   $dt$  поток за время  $dt$  внутреннего момента через поверхность  $S$ , получаем

$$\mathbf{M}_S^{\text{вн}} = \iint_S \pi_n dS. \quad (1.7)$$

Производная по времени от полного момента количества движения  $\mathbf{L}$  равна сумме перечисленных четырех моментов. Таким образом, закон момента количества движения запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_0^{\text{вн}} + \mathbf{M}_S^{\text{вн}}, \quad (1.8)$$

или с учетом выражений (1.3)–(1.7)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{M}] d\tau = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) d\tau + \\ + \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau + \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{\tau}_n) dS + \iint_S \pi_n dS. \quad (1.9)$$

Рассмотрим левую часть равенства (1.9). Воспользуемся формулой (15.7) гл. I, положив в ней  $\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$ , и преобразуем первое слагаемое (1.9):

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{опб}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau. \quad (1.10)$$

Выпишем подынтегральное выражение

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \mathbf{r} \times \mathbf{v} \frac{d\rho}{dt} + (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right). \quad (1.11)$$

Будем предполагать, что в области, занятой жидкостью, нет источников массы ( $q = 0$ ). Тогда в силу уравнения неразрывности (2.6) гл. II второе слагаемое в правой части (1.11) обращается в нуль. Производная  $\frac{d\mathbf{L}_{\text{опб}}}{dt}$  с учетом выражения (1.11) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{опб}}}{dt} = \iiint_{\tau} \left( \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) d\tau. \quad (1.12)$$

Интеграл в (1.12) можно трактовать как момент сил инерции, взятый с обратным знаком. Аналогичные преобразования выражения для  $\frac{d\mathbf{L}_{\text{вн}}}{dt}$  дадут

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{вн}}}{dt} = \iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{M}) + \rho \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \left[ \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} + \mathbf{M} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] d\tau = \iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} d\tau. \quad (1.13)$$

Таким образом, учитывая (1.3), (1.12) и (1.13), получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \iiint_{\tau} \left( \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) d\tau + \iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} d\tau. \quad (1.14)$$

Закон момента количества движения (1.9) с учетом (1.14) можно переписать в виде

$$\iiint_{\tau} \left[ \left( \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) + \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] d\tau = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) d\tau + \\ + \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau + \iint_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n) dS + \iint_S \pi_n dS. \quad (1.15)$$

Преобразуем интегралы по поверхности к интегралам по объему. Воспользуемся формулой Коши для  $\boldsymbol{\tau}_n$ :

$$\iint_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n) dS = \iint_S [(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_x) \cos(\hat{n}, \hat{x}) + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_y) \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \\ + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z) \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ = \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z) \right] d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_z}{\partial z} \right] d\tau + \\ + \iiint_{\tau} [\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z] d\tau. \quad (1.16)$$

Подставим (1.16) в (1.15) и сгруппируем некоторые слагаемые:

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} d\tau + \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \left[ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_x}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_y}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_z}{\partial z} \right] d\tau - \\ - \iiint_{\tau} [\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z] d\tau - \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau = \iint_S \pi_n dS. \quad (1.17)$$

Второе слагаемое слева равно нулю в силу закона количества движения. Окончательно закон момента количества движения в интегральной форме запишется в виде

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} d\tau - \iiint_{\tau} [\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z] d\tau - \\ - \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau = \iint_S \pi_n dS. \quad (1.18)$$

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим функцию  $\pi_n(\mathbf{r}, t)$ . Применяя закон сохранения моментов к тетраэдру и действуя так же, как и при выводе формулы Коши, получим аналогичную связь между  $\pi_n$ ,  $\pi_x$ ,  $\pi_y$ ,  $\pi_z$ :

$$\pi_n = \pi_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \pi_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \pi_z \cos(\hat{n}, \hat{z}). \quad (2.1)$$

Поток внутреннего момента будет полностью определен, если задана таблица составляющих псевдовекторов  $\pi_x$ ,  $\pi_y$ ,  $\pi_z$

$$\|\pi_{ik}\| = \begin{vmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{vmatrix}.$$

Таблица  $\|\pi_{ik}\|$  — аффинный ортогональный псевдотензор второго ранга.

Преобразуем поверхностный интеграл, входящий в (1.18), к объемному, используя формулу (2.1):

$$\begin{aligned} \iint_S \pi_n dS &= \iint_S [\pi_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \pi_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \pi_z \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z} \right] d\tau. \quad (2.2) \end{aligned}$$

С учетом (2.2) закон момента количества движения (1.18) в интегральной форме запишется в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left[ \rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} - \rho \Pi - (\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \pi_x}{\partial x} - \frac{\partial \pi_y}{\partial y} - \frac{\partial \pi_z}{\partial z} \right] d\tau = 0. \end{aligned}$$

Так как объем  $\tau$  произволен, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю. Отсюда

$$\rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} - \rho \Pi - \frac{\partial \pi_x}{\partial x} - \frac{\partial \pi_y}{\partial y} - \frac{\partial \pi_z}{\partial z} = \mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) — дифференциальная запись закона момента количества движения. Из (2.3) следует, что существует следующая связь между законом сохранения момента и симметричностью тензора напряжений.

1. Если жидкость без внутреннего момента количества движения, т. е.  $\mathbf{M} = 0$ , поле таково, что внутренний момент не возникает в объеме, т. е.  $\Pi = 0$  и  $\pi_{ik} = 0$ , то, как следует из (2.3):

$$\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z = 0.$$

В развернутом виде это равенство дает

$$(\tau_{xy} - \tau_{yx}) \mathbf{k} + (\tau_{zx} - \tau_{xz}) \mathbf{j} + (\tau_{yz} - \tau_{zy}) \mathbf{i} = 0.$$

Из этого равенства следует симметрия тензора напряжений, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.4)$$

2. Если среда такова, что тензор напряжений у нее симметричен, то закон момента количества движения приобретает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \rho \mathbf{\Pi} + \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Физически это означает, что в жидкости действуют два независимых закона: закон сохранения орбитального момента и закон сохранения внутреннего момента, причем закон сохранения орбитального момента является следствием закона сохранения количества движения.

## ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Для записи такого фундаментального физического закона, как закон сохранения энергии, необходимо установить, из каких видов энергии складывается полная энергия жидкого объема, определить виды притоков энергии извне и учесть превращения одного вида энергии в другой.

### § 1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ

Рассмотрим сначала некоторую покоящуюся однородную массу жидкости  $M$  в объеме  $\tau$ . Пусть  $O$  означает ее исходное состояние, которое, вообще говоря, определяется некоторым набором параметров (например, давлением, температурой и др.). В результате нагрева, сжатия и других воздействий масса жидкости перейдет в новое состояние, определяемое другими значениями параметров. Переход массы жидкости из исходного положения  $O$  в другое связан с изменением  $\Delta\mathcal{E}$  энергии. Будем считать, что в исходном состоянии масса  $M$  имела запас энергии  $\mathcal{E}_0$ . Тогда можно ввести величину

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}. \quad (1.1)$$

Если каким-то образом выбрана величина  $\mathcal{E}_0$  и известно  $\Delta\mathcal{E}$  (экспериментально или теоретически), то для любого нового состояния величина  $\mathcal{E}$  может быть определена по формуле (1.1). Таким образом, через  $\Delta\mathcal{E}$  определяется величина внутренней энергии  $\mathcal{E}$  данной массы жидкости. Естественно ввести величину  $E$  — внутреннюю энергию, отнесенную к единице массы. В общем случае неоднородной движущейся жидкости  $E$  — функция координат и времени:

$$E = \lim_{\tau \rightarrow 0} E_{cp} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}}{M}. \quad (1.2)$$

Из определения (1.2) следует, что запас внутренней энергии в массе  $dm$  равен  $d\mathcal{E} = Edm = E\rho d\tau$ . Внутренняя энергия конечной массы жидкости в объеме  $\tau$

$$\mathcal{E} = \iiint_{\tau} \rho E d\tau. \quad (1.3)$$

Выражение для  $E$  обычно известно из физики. Для совершенного газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, уравнение состояния которого есть уравнение Клаудиуса  $p = \rho RT$ , внутренняя энергия зависит только от температуры. Выражение для внутренней энергии имеет вид  $E = \int_0^T c_v dT$ , где  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме.

Здесь в качестве исходного берется состояние, в котором абсолютная температура равна нулю. Когда нет процессов диссоциации и ионизации, внутренняя энергия состоит из энергии поступательного  $E_{\text{п}}$ , вращательного  $E_{\text{вр}}$  и колебательного  $E_{\text{к}}$  движений молекул. Для одноатомного газа  $c_v = \text{const}$  и  $E = E_{\text{п}} = \frac{3}{2}RT$ . Для случая двухатомного газа в определенном диапазоне температур (для кислорода и азота примерно при температурах не выше 600—700 К и не слишком низких температурах), когда практически возбуждены только поступательные и вращательные энергии молекул, теплоемкость постоянна и  $E = E_{\text{п}} + E_{\text{вр}} = \frac{5}{2}RT$ . При более высоких температурах начинает сказываться возбуждение колебательной энергии молекул. Теплоемкость  $c_{v_{\text{к}}}$  колебательных степеней свободы зависит от температуры, и внутренняя энергия может быть представлена в виде  $E = \int_0^T c_v dT = \frac{5}{2}RT + \int_0^T c_{v_{\text{к}}} dT$ . Зависимость  $c_{v_{\text{к}}}$  от  $T$  известна. Для многоатомных газов вид функций  $E_{\text{вр}}$  и  $E_{\text{к}}$  от  $T$  будет зависеть не только от числа атомов, но и от структуры молекулы.

## § 2. ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ

Если жидкость движется, то она обладает кинетической энергией. Кинетическая энергия  $dT_{\text{к}}$  массы  $dm$ , движущейся со скоростью  $v$ , равна  $dT_{\text{к}} = dm \frac{v^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2} d\tau$ . Кинетическая энергия массы, заключенной в объеме  $\tau$ :

$$T_{\text{к}} = \iiint_{\tau} \frac{\rho v^2}{2} d\tau. \quad (2.1)$$

Полной энергией называется сумма кинетической и внутренней энергий данной массы газа

$$U = T_{\text{к}} + \mathcal{E}, \quad U = \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau. \quad (2.2)$$

## § 3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Изменение полной энергии некоторой массы жидкости за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  происходит за счет работы массовых и поверхностных сил, за счет притока за тот же промежуток времени тепловой энергии вследствие наличия объемно-распределенных источников тепла, а также притока тепла через поверхность. Если обозначить через  $A_{\tau}$  работу массовых сил,  $A_s$  — работу поверхностных сил,  $Q_{\tau}$  — объемное поступление энергии,  $Q_s$  — количество тепла, поступившее через поверхность

за время от  $t_1$  до  $t_2$ , то закон сохранения энергии запишется в виде

$$U|_{t=t_2} - U|_{t=t_1} = A_\tau + A_S + Q_\tau + Q_S. \quad (3.1)$$

Здесь  $U|_t$  — значение полной энергии в момент времени  $t$ . В соответствии с определением полной энергии имеем

$$\begin{aligned} U|_{t=t_2} - U|_{t=t_1} &= \\ &= \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau \Big|_{t=t_2} - \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau \Big|_{t=t_1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вычислим слагаемые, входящие в правую часть (3.1).

Работа массовых сил. Обозначим через  $\Delta A_\tau$  работу за промежуток времени  $dt$  массовых сил, приложенных к массе в объеме  $\tau$ . На массу  $dm$  в объеме  $d\tau$  действует сила  $\rho F dt$ . Перемещение этой массы за время  $dt$  есть  $d\tau = v dt$ . Работа указанной силы на перемещении  $d\tau$  равна  $\rho(F \cdot v) d\tau dt$ , откуда следует, что

$$\Delta A_\tau = dt \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau.$$

Работа, совершенная массовыми силами за конечный промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , будет

$$A_\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau. \quad (3.3)$$

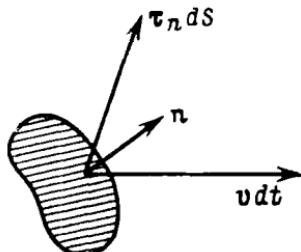


Рис. 9.

Работа поверхностных сил. На элемент поверхности  $dS$  с нормалью  $n$  действует сила  $\tau_n dS$  (рис. 9). Работа этой силы за время  $dt$  равна  $(\tau_n \cdot v) dS dt$ , и, следовательно, работа сил, приложенных ко всей поверхности  $S$ , будет

$$\Delta A_S = dt \iint_S (\tau_n \cdot \mathbf{v}) dS.$$

Работа поверхностных сил за конечный промежуток времени  $(t_1, t_2)$

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S (\tau_n \cdot \mathbf{v}) dS. \quad (3.4)$$

Объемное поглощение энергии. Иногда приходится учитывать поглощение (или выделение) энергии каждым элементом объема жидкости. Не указывая конкретных причин поглощения или выделения энергии, будем учитывать этот факт следующим образом. Обозначим через  $\epsilon dt$  количество тепла, поступившего в объем  $d\tau$  за время  $dt$ . Величину  $\epsilon$ , имеющую смысл секундного притока тепла, отнесенного к единице объема, назовем скоростью объемного поглощения энергии. Энергия,

поглощенная за время  $dt$  конечным объемом  $\tau$ , будет  $\Delta Q_{ob} = dt \iiint_{\tau} \epsilon d\tau$ . Энергия, поступившая в объем  $\tau$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ , будет

$$Q_{ob} = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\tau} \epsilon d\tau. \quad (3.5)$$

Поток тепла через поверхность. Через поверхность  $S$ , ограничивающую объем жидкости  $\tau$ , тепло извне вследствие теплопроводности может проходить внутрь нашего объема. Количество тепла, проникающее в объем через элемент поверхности  $dS$  с нормалью  $n$  за время  $dt$ , равно  $t_n dS dt$ . Величина  $t_n$  есть так называемая плотность потока энергии, тепловой поток, отнесенный к единице площади и единице времени. Количество тепла, прошедшее за  $dt$  через всю поверхность  $S$ ,

$\Delta Q_S = dt \iint_S t_n dS$ . За время от  $t_1$  до  $t_2$  в объем  $\tau$  через поверхность  $S$  проникнет количество тепла

$$Q_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S t_n dS. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.2) — (3.6) в (3.1), получаем интегральную запись закона сохранения энергии для конечного промежутка времени:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau \Big|_{t=t_1} - \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau \Big|_{t=t_2} = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\tau} \epsilon d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S t_n dS. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Разделим обе части равенства на разность  $t_2 - t_1$  и, устремив  $t_2 - t_1$  к нулю, получим еще одну запись закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau &= \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau + \iint_S (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS + \\ & + \iiint_{\tau} \epsilon d\tau + \iint_S t_n dS. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, скорость изменения полной энергии некоторой массы жидкости равна сумме мощности, развиваемой объемными и поверхностными силами, скорости объемного поступления энергии и потока энергии через поверхность.

#### § 4. НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ЗАПИСИ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

В дальнейшем будем предполагать, что нет источников массы, т. е. уравнение неразрывности имеет вид (2.6) гл. II. Левую часть равенства (3.8), используя (15.7) гл. I, можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau &= \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) + \rho \left( \frac{v^2}{2} + E \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left( \frac{v^2}{2} + E \right) + \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + E \right) \right] d\tau = \\ &= \iiint_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + E \right) d\tau = \iiint_{\tau} \left[ \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} \right] d\tau. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Используя формулу Коши для  $\tau_n$  в интеграле  $\iint_S \tau_n \cdot \mathbf{v} dS$ , перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему:

$$\begin{aligned} \iint_S (\tau_n \cdot \mathbf{v}) dS &= \iint_S [(\tau_x \cdot \mathbf{v}) \cos(\hat{n}, \hat{x}) + (\tau_y \cdot \mathbf{v}) \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \\ &\quad + (\tau_z \cdot \mathbf{v}) \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_x \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_y \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_z \cdot \mathbf{v}) \right] d\tau. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Подставляя (4.1) и (4.2) в (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left[ \rho \frac{dE}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial x} (\tau_x \cdot \mathbf{v}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_y \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_z \cdot \mathbf{v}) - \epsilon \right] d\tau = \iint_S t_n dS. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Равенство (4.3) — одна из форм записи закона сохранения энергии в интегральном виде. Выражение в левой части (4.3) можно упростить. В главе III была получена запись закона количества движения в виде (5.6). Умножив скалярно обе части (5.6) на  $\mathbf{v}$  и перенеся все слагаемые в одну сторону, получим

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

Левая часть (4.4) содержит группу слагаемых, входящих в (4.3). Так как их сумма равна нулю, уравнение (4.3) примет вид

$$\iiint_{\tau} \left[ \rho \frac{dE}{dt} - \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \epsilon \right] d\tau = \iint_S t_n dS. \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) есть общая запись закона сохранения энергии в интегральном виде.

## § 5. ВЕКТОР ПОТОКА ТЕПЛА

Получим формулу для потока тепла  $t_n$ . Рассмотрим тетраэдр (см. рис. 6), три грани которого параллельны координатным плоскостям. Введем те же обозначения, что и при выводе формулы Коши:  $S_x, S_y, S_z$  — площади граней, перпендикулярных осям координат;  $S_n$  — площадь грани с нормалью  $\mathbf{n}$ ;  $h$  — высота тетраэдра, опущенная на грань  $S$ . Объем тетраэдра будет равен  $\tau = \frac{1}{3} Sh$ . Запишем для этого тетраэдра закон сохранения энергии (4.5), применив к интегралам теорему о среднем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} Sh \left[ \rho \frac{dE}{dt} - \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \epsilon \right]_{cp} = \\ = S t_n^{cp} + S_x t_{-x}^{cp} + S_y t_{-y}^{cp} + S_z t_{-z}^{cp}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $S_x = S \cos(\hat{n}, \hat{x})$ ,  $S_y = S \cos(\hat{n}, \hat{y})$ ,  $S_z = S \cos(\hat{n}, \hat{z})$ . Сократив все члены равенства (5.1) на  $S$  и устремив  $h$  к нулю, получим

$$t_n + t_{-x} \cos(\hat{n}, \hat{x}) + t_{-y} \cos(\hat{n}, \hat{y}) + t_{-z} \cos(\hat{n}, \hat{z}) = 0. \quad (5.2)$$

Из физических соображений ясно, что  $t_n = -t_{-n}$ , где  $t_n$  описывает поток энергии внутрь, а  $t_{-n}$  — поток через площадку с нормалью  $(-\mathbf{n})$  — описывает поток изнутри. Вводя величины  $t_x, t_y, t_z$ , получаем

$$t_n = t_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + t_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + t_z \cos(\hat{n}, \hat{z}). \quad (5.3)$$

Из формулы (5.3) следует, что совокупность  $(t_x, t_y, t_z)$  образует вектор. В этом легко убедиться, если записать (5.3), выбирая последовательно в качестве  $\mathbf{n}$  орты новой системы координат  $x', y', z'$ . Полученные формулы связи  $(t_x', t_y', t_z')$  и  $(t_x, t_y, t_z)$  представляют собой известные формулы преобразования компонент вектора при переходе от одной системы координат к другой. Вектор

$$\mathbf{t} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k} \quad (5.4)$$

называют *вектором потока тепла*. Величина  $t_n$  есть проекция этого вектора на  $\mathbf{n}$ :  $t_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})$ .

## § 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Используем формулу (5.3) для преобразования интеграла, связанного с вектором теплового потока:

$$\begin{aligned} \iint_S t_n dS &= \iint_S [t_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + t_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + t_z \cos(\hat{n}, \hat{z})] dS = \\ &= \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} \right] d\tau. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Подставим (6.1) в выражение (4.5), представляющее собой запись закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left[ \rho \frac{dE}{dt} - \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \right. \\ \left. - e - \frac{\partial t_x}{\partial x} - \frac{\partial t_y}{\partial y} - \frac{\partial t_z}{\partial z} \right] d\tau = 0. \quad (6.2) \end{aligned}$$

Равенство (6.2) справедливо для любого объема, следовательно,

$$\rho \frac{dE}{dt} = \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + e + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}. \quad (6.3)$$

Равенство (6.3) — запись закона сохранения энергии в дифференциальной форме.

## ГЛАВА VI

### ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ СРЕД

В предыдущих главах были получены дифференциальные уравнения, представляющие собой запись основных законов сохранения. Закон сохранения массы в общем случае при наличии источников массы имеет вид (2.3) гл. II. При приведении уравнений, представляющих собой запись законов сохранения, к более простому виду предполагалось, что источники массы отсутствуют. Сохраняя это предположение и в дальнейшем, выпишем полученные в дифференциальной форме законы сохранения.

Закон сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (\text{I})$$

Закон количества движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}. \quad (\text{II})$$

Закон моментов количества движения

$$\rho \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \rho \Pi + \mathbf{i} \times \tau_x + \mathbf{j} \times \tau_y + \mathbf{k} \times \tau_z + \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z}. \quad (\text{III})$$

Закон сохранения энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = e + \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}. \quad (\text{IV})$$

В написанных уравнениях функции  $\mathbf{F}$ ,  $\Pi$ ,  $e$  обычно известны. Искомые функции —  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\tau_{ik}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\pi_{ik}$ ,  $t$ . Таким образом, неизвестных больше, чем уравнений. Общих уравнений сохранения недостаточно для получения замкнутой системы уравнений, описывающей движение сплошной среды. В этих общих уравнениях нет информации о самой среде. Надо ввести модели сплошной среды, которые с некоторой точностью отражали бы действительные свойства жидкости и были бы достаточно удобны для получения замкнутой системы уравнений и ее решения. Во всех моделях, рассматриваемых в этой главе, тензор напряжений симметричен, в силу чего уравнение моментов количества движения приобретает вид (2.5) гл. IV.

#### § 1. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ И ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЕ

Жидкость называется *идеальной*, если в ней отсутствуют касательные напряжения и наблюдаются только нормальные напряжения. Таким образом, на движущуюся жидкость распространяется свойство, которое наблюдается в жидкости при равновесии или ее движении как абсолютно твердого тела. В реальных жидкостях касательные напряжения не равны нулю, но

часто встречаются случаи, когда касательные напряжения малы по сравнению с нормальными. В таких условиях жидкости удобно представить как идеальные. Итак, считаем жидкость идеальной. Во всех случаях справедлива формула Коши

$$\tau_n = \tau_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \tau_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \tau_z \cos(\hat{n}, \hat{z}). \quad (1.1)$$

По определению идеальной жидкости

$$\tau_n = p_n \mathbf{n}, \quad \tau_x = p_x \mathbf{i}, \quad \tau_y = p_y \mathbf{j}, \quad \tau_z = p_z \mathbf{k}. \quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в (1.1), получим

$$p_n \mathbf{n} = p_x \mathbf{i} \cos(\hat{n}, \hat{x}) + p_y \mathbf{j} \cos(\hat{n}, \hat{y}) + p_z \mathbf{k} \cos(\hat{n}, \hat{z}). \quad (1.3)$$

Поскольку

$$\mathbf{n} = \cos(\hat{n}, \hat{x}) \mathbf{i} + \cos(\hat{n}, \hat{y}) \mathbf{j} + \cos(\hat{n}, \hat{z}) \mathbf{k}, \quad (1.4)$$

из (1.3) следует, что

$$p_n = p_x = p_y = p_z = -p. \quad (1.5)$$

Формулы (1.2) перепишутся в виде

$$\tau_n = -p \mathbf{n}, \quad \tau_x = -p \mathbf{i}, \quad \tau_y = -p \mathbf{j}, \quad \tau_z = -p \mathbf{k}. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что в идеальной жидкости величина нормального напряжения не зависит от ориентировки площадки. Величину  $p$  называют *давлением*. Из (1.6) следует, что составляющие тензора напряжений  $\tau_{ii} = -p$ ,  $\tau_{ik} = 0$  ( $i \neq k$ ). Тензор напряжений идеальной жидкости будет иметь вид

$$T = \|\tau_{ik}\| = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -pI. \quad (1.7)$$

В тензор (1.7) входит только величина  $p$  — скаляр.

## § 2. ВЯЗКАЯ (НЬЮТОНОВСКАЯ) ЖИДКОСТЬ И ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЕ

*Вязкой* называют жидкость, в которой при движении кроме нормальных напряжений наблюдаются и касательные напряжения. Рассмотрим эксперимент, который проводил еще Ньютон. Имеются две плоскости, между которыми находится жидкость. Нижняя пластина закреплена, верхняя движется параллельно нижней на расстоянии  $h$  со скоростью  $v$  (рис. 10). Опыт показывает, что сила  $f$ , которую надо приложить к верхней пластине,

$f = \mu \frac{v}{h} S$ , где  $S$  — площадь пластины. Сила, приходящаяся на единицу площади, в нашем случае касательное напряжение

$$\tau_{yx} = \mu \frac{v}{h}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент, который зависит от свойств жидкости.

Этот же опыт дает распределение скоростей жидкости: на неподвижной пластине скорость жидкости равна нулю, на верхней — равна скорости пластины. Распределение скоростей по перек линейно зависит от расстояния

$$v_x = v \frac{y}{h}. \quad (2.2)$$

В силу (2.2)  $\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{h}$ , и выражение для  $\tau_{yx}$  можно записать в виде

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (2.3)$$

Для многих жидкостей равенство (2.1) выполняется с большой степенью точности. Коэффициент  $\mu$  называется *коэффициентом вязкости*. Причиной вязкости (касательных напряжений) является хаотическое движение молекул, переход которых из слоя в слой создает торможение этих движущихся слоев относительно друг друга.

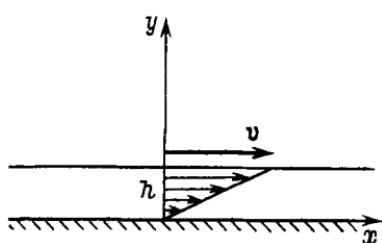


Рис. 10.

Так как в рассматриваемом движении  $v_x = v_x(y)$  и, следовательно,  $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}$ , то, как следует из

(2.3), в этом случае справедливо соотношение

$$\tau_{yx} = 2\mu \epsilon_{xy}. \quad (2.4)$$

В соответствии с рассмотренным опытом можно вывести связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций в общем случае.

Жидкость называется вязкой ньютоновской, если выполнены следующие условия:

1) в жидкости, когда она движется как абсолютно твердое тело или находится в покое, наблюдаются только нормальные напряжения;

2) компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонент тензора скоростей деформаций;

3) жидкость изотропна, т. е. ее свойства одинаковы по всем направлениям.

Условие 1) означает, что  $\tau_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ , если все  $\epsilon_{mn} = 0$ .

Условие 2) означает, что  $\tau_{ik}$  могут быть представлены через  $\epsilon_{mn}$  в виде (учитывая симметрию тензора напряжений)

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= a_{10} + a_{11}\epsilon_{xx} + a_{12}\epsilon_{yy} + a_{13}\epsilon_{zz} + a_{14}\epsilon_{xy} + a_{15}\epsilon_{yz} + a_{16}\epsilon_{zx}, \\ \tau_{yy} &= a_{20} + a_{21}\epsilon_{xx} + a_{22}\epsilon_{yy} + a_{23}\epsilon_{zz} + a_{24}\epsilon_{xy} + a_{25}\epsilon_{yz} + a_{26}\epsilon_{zx}, \\ \tau_{zz} &= a_{30} + a_{31}\epsilon_{xx} + a_{32}\epsilon_{yy} + a_{33}\epsilon_{zz} + a_{34}\epsilon_{xy} + a_{35}\epsilon_{yz} + a_{36}\epsilon_{zx}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= a_{40} + a_{41}\epsilon_{xx} + a_{42}\epsilon_{yy} + a_{43}\epsilon_{zz} + \\ &\quad + a_{44}\epsilon_{xy} + a_{45}\epsilon_{yz} + a_{46}\epsilon_{zx},\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\tau_{yz} = \tau_{zy} &= a_{50} + a_{51}\epsilon_{xx} + a_{52}\epsilon_{yy} + a_{53}\epsilon_{zz} + \\ &\quad + a_{54}\epsilon_{xy} + a_{55}\epsilon_{yz} + a_{56}\epsilon_{zx}, \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= a_{60} + a_{61}\epsilon_{xx} + a_{62}\epsilon_{yy} + a_{63}\epsilon_{zz} + \\ &\quad + a_{64}\epsilon_{xy} + a_{65}\epsilon_{yz} + a_{66}\epsilon_{zx}.\end{aligned}$$

Условие 3) означает, что коэффициенты  $a_{ik}$  в (2.5) не зависят от выбора системы координат.

Предположим, что жидкость покоятся или движется как абсолютно твердое тело. В этом случае все  $\epsilon_{mn} = 0$ . Из формул (2.5) тогда будет следовать, что

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= a_{10}, \quad \tau_{yy} = a_{20}, \quad \tau_{zz} = a_{30}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= a_{40}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = a_{50}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = a_{60}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Но по условию 1) все касательные напряжения при этом обращаются в нуль. Следовательно,

$$a_{40} = a_{50} = a_{60} = 0. \quad (2.7)$$

Нормальные напряжения в этом случае не зависят от ориентировки площадки. Обозначим общую величину этих напряжений через  $-p$ . Тогда

$$a_{10} = a_{20} = a_{30} = -p. \quad (2.8)$$

Перейдем к системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , оси которой являются главными осями для тензора скоростей деформаций. Обозначим  $\epsilon_{x'x'} = \epsilon_1$ ,  $\epsilon_{y'y'} = \epsilon_2$ ,  $\epsilon_{z'z'} = \epsilon_3$  ( $\epsilon_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ). Выпишем выражения для  $\tau_{x'x'}$  и  $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$  в этих координатах, учитывая (2.7) и (2.8):

$$\tau_{x'x'} = -p + a_{11}\epsilon_1 + a_{12}\epsilon_2 + a_{13}\epsilon_3; \quad (2.9)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = a_{41}\epsilon_1 + a_{42}\epsilon_2 + a_{43}\epsilon_3. \quad (2.10)$$

Рассмотрим формулу (2.9). Покажем, что  $a_{12} = a_{13}$ . Для этого введем новые оси координат

$$x'' = x', \quad y'' = z', \quad z'' = y'. \quad (2.11)$$

Оси  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  — тоже главные оси тензора скоростей деформаций. В этих осях равенство (2.9) сохраняет свой вид:

$$\tau_{x''x''} = -p + a_{11}\epsilon_1'' + a_{12}\epsilon_2'' + a_{13}\epsilon_3''. \quad (2.12)$$

Здесь  $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \varepsilon_3''$  — главные скорости деформации в осях  $x'', y'', z''$ . Учитывая (2.11) и определение величин  $\varepsilon_i$ , получим

$$\varepsilon_1'' = \frac{\partial v_{x''}}{\partial x''} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2'' = \frac{\partial v_{y''}}{\partial y''} = \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3'' = \varepsilon_2. \quad (2.13)$$

Подставив (2.13) в (2.12), будем иметь

$$\tau_{x''x''} = -p + a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_3 + a_{13}\varepsilon_2. \quad (2.14)$$

Так как оси  $x'$  и  $x''$  совпадают, то  $\tau_{x'} = \tau_{x''}$  и

$$\tau_{x''x''} = \tau_{x'x'}. \quad (2.15)$$

Приравнивая (2.9) и (2.14), получим

$$(a_{12} - a_{13})(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) = 0. \quad (2.16)$$

Так как (2.16) имеет место при любых  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , то, следовательно,

$$a_{12} = a_{13}. \quad (2.17)$$

Положим

$$a_{12} = a_{13} = \lambda, \quad a_{11} = \lambda + 2\mu. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.9), получим

$$\tau_{x'x'} = -p + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1. \quad (2.19)$$

Аналогично получим формулы для  $\tau_{y'y'}$  и  $\tau_{z'z'}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{y'y'} &= -p + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \\ \tau_{z'z'} &= -p + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.19')$$

Здесь  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \mathbf{v}$ .

Рассмотрим теперь выражение (2.10) для касательных напряжений и покажем, что в главных осях тензора скоростей деформаций все касательные напряжения равны нулю. Наряду с системой координат  $x', y', z'$  введем систему координат  $x''', y''', z'''$ :

$$x''' = x', \quad y''' = -y', \quad z''' = z'. \quad (2.20)$$

Новая система координат также является главной и можно написать

$$\tau_{x'''y'''} = a_{41}\varepsilon_1''' + a_{42}\varepsilon_2''' + a_{43}\varepsilon_3'''. \quad (2.21)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} v_{x'''} &= v_{x'}, \quad v_{y'''} = -v_{y'}, \quad v_{z'''} = v_{z'}, \\ \varepsilon_1''' &= \frac{\partial v_{x'''}}{\partial x'''} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2''' = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3''' = \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в (2.21), получаем

$$\tau_{x'''y'''} = a_{41}\varepsilon_1 + a_{42}\varepsilon_2 + a_{43}\varepsilon_3 = \tau_{x'y'}. \quad (2.23)$$

Но по физическому смыслу  $\tau_{x'y'}$  и  $\tau_{x'''y'''}$  справедливо и такое равенство:

$$\tau_{x'''y'''} = -\tau_{x'y'}. \quad (2.24)$$

Действительно,  $\tau_{x''} = \tau_x$ , величина  $\tau_{x'y'}$  есть проекция вектора  $\tau_x$  на ось  $y'$ , а  $\tau_{x'''y'''}$  — проекция этого же вектора на противоположное направление. Из равенств (2.23) и (2.24) следует, что  $\tau_{x'y'} = 0$ .

Аналогично устанавливается равенство нулю и остальных касательных напряжений:

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} = \tau_{x'z'} = \tau_{z'x'} = \tau_{y'z'} = \tau_{z'y'} = 0, \quad (2.25)$$

т. е. в главных осях тензора скоростей деформаций касательные напряжения в вязкой жидкости равны нулю. Но такие оси есть главные оси тензора напряжений. Следовательно, главные оси тензора скоростей деформаций одновременно являются и главными осями тензора напряжений.

Равенства (2.19) и (2.25) можно объединить, записав их в виде одного тензорного равенства:

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\mu \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Равенство (2.26) устанавливает связь между компонентами двух тензоров (правую часть можно записать в виде одного тензора) в главных осях. Но если два тензора равны между собой в каких-то осях координат, то они будут равны и в любых других осях координат, так как компоненты тензора при переходе к другой системе преобразуются по одним и тем же законам.

Таким образом, связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций в любых осях координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\mu \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Для составляющих получим

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu e_{ii}, \\ \tau_{ik} &= 2\mu e_{ik} (i \neq k). \end{aligned} \quad (2.27')$$

Используя формулы для составляющих тензора скоростей деформаций ((8.8) гл. I), получим окончательное выражение для

составляющих тензора напряжений в вязкой жидкости:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad (2.28) \\ \tau_{zz} &= -p + \lambda \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

В формулы (2.27), (2.28) входят два параметра:  $\lambda$  и  $\mu$ . Если  $\lambda = \mu = 0$ , то тензор напряжений вязкой жидкости обращается в тензор напряжений идеальной жидкости. Коэффициент  $\mu$  называют коэффициентом вязкости (или сдвиговой вязкости),  $\lambda$  — вторым коэффициентом вязкости (или коэффициентом объемной вязкости). Часто коэффициентом объемной вязкости называют не  $\lambda$ , а величину  $\lambda' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ . Наряду с  $\mu$  для несжимаемой жидкости часто рассматривают величину  $\nu$ , называемую кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Коэффициент  $\mu$  может быть определен экспериментально; в случае, если известен закон межмолекулярного взаимодействия, его можно вычислить теоретически. Вообще говоря,  $\mu = \mu(p, T)$ , но зависимость от давления слабая. Наиболее часто пользуются следующими приближенными формулами для зависимости  $\mu$  от  $T$ . Для небольших интервалов температур используют линейную зависимость

$$\mu = \mu_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

Здесь  $\alpha$  берется из эксперимента (для воздуха  $\alpha = 0,00264$ );  $\mu_0$  — значение коэффициента вязкости при  $T = T_0$ . Для более широких интервалов температур принимают  $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$  (для воздуха  $n = 0,76$ ).

Часто пользуются формулой Сюзерленда

$$\mu = \mu_0 \frac{C + 273}{C + T} \left( \frac{T}{273} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Постоянная  $C$  для воздуха, азота и кислорода соответственно имеет значения 117, 110 и 127.

Второй коэффициент вязкости  $\lambda$  исследовать трудно. В случае, если жидкость несжимаема, то  $\operatorname{div} v = 0$  и он выпадает из уравнений. Для случая одноатомных газов теоретически показано, что  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , т. е.  $\lambda' = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ . Коэффициент  $\lambda'$  существен в задаче о распространении звука.

**Замечание.** Закон связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций, который мы установили исходя из закона трения Ньютона, имеет вид (2.27). Жидкости, которые подчиняются этому закону, называются ньютоновскими жидкостями. Однако существуют жидкости, которые не подчиняются закону Ньютона. Приведем примеры.

**Пример 1.** Для растворов полимеров (например, каучук в бензole) и некоторых легко деформируемых металлов, которые можно рассматривать как жидкости, часто используется следующая связь между  $\|\tau_{ik}\|$  и  $\|\varepsilon_{ik}\|$  (предполагается, что  $\operatorname{div} v = 0$ ):

$$\|\tau_{ik}\| = -pI + 2\mu\|\varepsilon_{ik}\| + 2S\|\omega_{ik}\|.$$

Здесь

$$\omega_{ik} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{ip} \varepsilon_{pk}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Тензор  $\|\omega_{ik}\|$  — тензор второго ранга. Действительно, перемножив тензоры скоростей деформаций  $\|\varepsilon_{ij}\|$  и  $\|\varepsilon_{ik}\|$ , получим тензор четвертого порядка с составляющими  $\omega_{ijk} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}$ . Свертывая этот тензор по индексу  $j = l = n$ , приходим к тензору  $\|\omega_{ik}\|$ . В выражение для  $\|\tau_{ik}\|$  тензор  $\|\omega_{ik}\|$  входит с коэффициентом  $2S$ . Коэффициент  $S$  — новая физическая характеристика для жидкостей, он находится из эксперимента.

**Пример 2.** Модель вязкой жидкости неприменима для описания течений разреженных газов. Степень разреженности газа и область применимости модели вязкой жидкости к газам определяются величиной числа Кнудсена  $Kn = l/L$ , где  $l$  — средняя длина свободного пробега молекул,  $L$  — характерный размер тела. Для слаборазреженных газов  $l/L \ll 1$ , коэффициенты вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $k$  пропорциональны  $l$  и закон трения Ньютона верен с точностью до членов порядка  $Kn^2$ . Следующее приближение на этом пути (приближение Барнетта) дает один из простейших примеров неньютоновской жидкости. В этом приближении

$$\tau_{ik} = (-p + \lambda \operatorname{div} v) \delta_{ik} + \mu \varepsilon_{ik} + C \tilde{\tau}_{ik},$$

причем коэффициент  $C$  имеет порядок  $Kn^2$ , а  $\tilde{\tau}_{ik}$  — линейная комбинация вторых производных и произведений первых производных от гидродинамических величин  $\rho$ ,  $T$ ,  $v$ .

### § 3. НЕТЕПЛОПРОВОДНАЯ ЖИДКОСТЬ

Жидкость называется нетеплопроводной, если вектор потока тепла  $t$  равен нулю. Равенство  $t = 0$  в проекциях на оси координат  $t_x = t_y = t_z = 0$ .

Схему нетеплопроводной жидкости используют в случае, когда явления теплопроводности оказывают малое влияние на физический процесс, и обычно принимают одновременно с предложением об идеальности жидкости. Если жидкость идеальная

и нетеплопроводная, то уравнение энергии (6.3) гл. V может быть упрощено. Для идеальной жидкости  $\tau_x = -ip$ ,  $\tau_y = -jp$ ,  $\tau_z = -kp$  и

$$\tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Уравнение энергии для идеальной нетеплопроводной жидкости примет вид

$$\rho \frac{dE}{dt} = e - p \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

#### § 4. ЖИДКОСТЬ, ПОДЧИНЯЮЩАЯСЯ ЗАКОНУ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ

Для широкого класса изотропных сред справедлив закон теплопроводности Фурье: количество тепла  $dq$ , прошедшее внутрь за время  $dt$  через площадку  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , пропорционально  $dS dt$  и производной от температуры по нормали:  $dq = k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt$ . Для потока тепла  $t_n$ , введенного ранее, закон Фурье дает

$$t_n = k \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (4.1)$$

При выводе уравнения энергии было показано, что  $t_n$  — проекция на нормаль вектора потока тепла  $\mathbf{t}$ , т. е.  $t_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})$ . Производная  $\frac{\partial T}{\partial n} = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T)$ . Таким образом, (4.1) равносильно соотношению

$$\mathbf{t} = k \operatorname{grad} T. \quad (4.2)$$

Равенства (4.1), (4.2) — запись закона теплопроводности Фурье.

Коэффициент  $k$  — коэффициент теплопроводности. Величина  $k$  различна для разных жидкостей и зависит в основном от температуры. Обычно вводят число  $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$ , называемое числом Прандтля, и коэффициент теплопроводности  $k$  выражают через  $\mu$  и  $\text{Pr}$ . В некоторых случаях число  $\text{Pr}$  оказывается постоянным. Для многоатомных газов вычисление  $k$  связано со сложными расчетами и экспериментами. Для капельных жидкостей в узких интервалах температур пользуются линейной зависимостью

$$k = k_0 + \alpha(T - T_0).$$

**Замечания.** 1. В смесях газов гам, где существенна диффузия, вектор потока тепла  $\mathbf{t}$  начинает зависеть не только от градиента температуры, но и от градиента концентрации.

2. В неизотропных средах вместо скалярного коэффициента теплопроводности  $k$  приходится вводить тензор теплопроводности  $K$ .

## § 5. НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

Жидкость называется несжимаемой, если ее плотность в частице при движении сохраняется. В переменных Эйлера это означает, что

$$\frac{dp}{dt} = 0, \text{ или } \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.1)$$

Уравнение неразрывности (2.6) гл. II при условии (5.1) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) — уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости. Для однородной жидкости  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  и уравнение (5.1) удовлетворяется тождественно. Если жидкость неоднородна, то (5.2) надо рассматривать совместно с (5.1).

Схему несжимаемой жидкости используют при рассмотрении движений капельных жидкостей (если перепады давлений невелики), а также при рассмотрении движений газов с небольшими скоростями. Воздух при скоростях движения  $v < 100 \text{ м/с}$  можно считать несжимаемой жидкостью.

## § 6. СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

В общем случае плотность является функцией давления и температуры. Уравнение, связывающее плотность  $\rho$ , давление  $p$  и температуру  $T$ , носит название уравнения состояния и имеет вид

$$\rho = f(p, T) \text{ или } \Phi(p, \rho, T) = 0. \quad (6.1)$$

Для идеальных в термодинамическом смысле газов уравнение состояния — уравнение Клапейрона

$$pV = R_0T, \quad (6.2)$$

$V$  — объем одного моля газа;  $R_0$  — универсальная газовая постоянная. Если  $m$  — молекулярный вес, то  $\rho = \frac{m}{V}$  и уравнение Клапейрона записывается в виде

$$p = \frac{R_0}{m} \rho T. \quad (6.3)$$

Этому уравнению подчиняются многие газы, если давление  $p$  не очень большое и температура  $T$  не слишком низкая. Часто уравнение состояния пишут в виде  $p = \rho RT$ , где  $R = \frac{R_0}{m}$  — газовая постоянная. При более высоких давлениях часто используют уравнение Ван дер Ваальса

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = R_0T. \quad (6.4)$$

Здесь  $V = \frac{m}{\rho}$ , а  $a$  и  $b$  — коэффициенты, причем коэффициент  $a$  учитывает силы взаимодействия между молекулами,  $b$  — собственный объем молекул. Коэффициенты  $a$  и  $b$  зависят от  $T$ .

В общем случае в статистической механике строятся так называемые вириальные разложения

$$\frac{pV}{R_0 T} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots, \quad (6.5)$$

где  $B(T)$ ,  $C(T)$  — второй и третий вириальные коэффициенты. В случае идеальных газов все вириальные коэффициенты обращаются в нуль. Часто вводятся полуэмпирические уравнения состояния.

## ГЛАВА VII

# СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЕ

Уравнения, представляющие собой запись законов сохранения, вместе с дополнительными соотношениями, содержащимися в предыдущей главе, образуют систему уравнений гидромеханики. В главе VI на с. 70 была выписана система уравнений, представляющая собой запись в дифференциальной форме законов сохранения: закона сохранения массы, закона количества движения, закона момента количества движения и закона сохранения энергии.

В этой главе рассматриваем идеальную жидкость. Для нее тензор напряжений имеет вид  $\|\tau_{ik}\| = -pI$ . В дальнейшем будем рассматривать жидкости без внутреннего момента. Закон моментов при  $M = 0$ ,  $\Pi = 0$ ,  $\pi_{ik} = 0$  (учитывая вид  $\|\tau_{ik}\|$ ) будет удовлетворяться тождественно, поэтому выписывать его не будем.

### § 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

1. Уравнение неразрывности сохраняет свой вид (I).
2. Уравнения движения сплошной среды — (II). Так как жидкость идеальна, то

$$\tau_x = -ip, \quad \tau_y = -jp, \quad \tau_z = -kp. \quad (1.1)$$

При условии (1.1) уравнение (II) примет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - i \frac{\partial p}{\partial x} - j \frac{\partial p}{\partial y} - k \frac{\partial p}{\partial z}$$

или

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (1.2)$$

В проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.2')$$

Уравнения (1.2) — уравнения движения идеальной жидкости — носят название *уравнений Эйлера*.

3. Уравнение энергии — (IV). Так как жидкость нетеплопроводна, то

$$t_x = t_y = t_z = 0. \quad (1.3)$$

В силу (1.1) и (1.3) уравнение энергии запишется в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} = e - p \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

К полученным уравнениям надо присоединить уравнение состояния  $f(p, \rho, T) = 0$  и выражение для внутренней энергии  $E$  через какие-либо две величины из трех  $(\rho, \rho, T)$ .

Таким образом, система уравнений гидромеханики для идеальной нетеплопроводной жидкости примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} &= e, \\ f(p, \rho, T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система (1.5) — система шести уравнений для отыскания шести искомых функций:  $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$ . Пять уравнений — нелинейные уравнения в частных производных первого порядка, одно уравнение — конечное соотношение. Вид зависимости  $E = E(p, T)$  обычно известен. Массовые силы  $\mathbf{F}$  считаются заданными функциями координат и времени. Объемное поглощение энергии  $e$  обычно задается как функция  $p$  и  $T$ , хотя иногда может зависеть и явным образом от координат и времени.

Выпишем систему уравнений (1.5) более подробно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} + v_x \frac{\partial E}{\partial x} + v_y \frac{\partial E}{\partial y} + v_z \frac{\partial E}{\partial z} \right) + p \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= e, \\ f(p, \rho, T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5')$$

Здесь  $E = E(p, T)$ .

Этой системе уравнений удовлетворяют все течения идеальной нетеплопроводной жидкости, как установившиеся, так и неустановившиеся, а также относящиеся к обтеканию жидкостью

различных тел при разнообразных условиях. Множество решений весьма широко. Надо научиться ставить условия, которые позволяли бы выбрать нужное решение, соответствующее условиям задачи.

## § 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБ ОТЫСКАНИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Согласно определению движение называется установившимся, если для любой гидродинамической величины  $A : A'_m = \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ . Система уравнения (1.5) в этом случае может быть записана в виде

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \rho \left( v_x \frac{\partial E}{\partial x} + v_y \frac{\partial E}{\partial y} + v_z \frac{\partial E}{\partial z} \right) + p \operatorname{div} \mathbf{v} &= e, \\ f(p, \rho, T) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$E = E(p, T). \quad (2.2)$$

Искомые функции  $\rho, v_x, v_y, v_z, p, T$  являются функциями  $x, y, z$ .

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции.

1. Граничные условия на поверхности тела. Пусть установившийся поток жидкости движется относительно тела и пусть система координат неизменно связана с телом. Обозначим, как обычно, через  $S$  поверхность тела, через  $n$  — нормаль к поверхности (функция точек поверхности). Возможны два случая.

а) Тело непроницаемо, т. е. жидкость не проникает через поверхность  $S$  тела. Тогда нормальная составляющая скорости на границе должна быть равна нулю:

$$v_n|_S = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае говорят, что тело обтекается.

б) Тело проницаемо (например, пористое тело), т. е. возможно протекание жидкости через поверхность. В этом случае поток жидкости через  $S$  является заданной функцией точек  $M$  поверхности  $S$  и

$$v_n|_S = f(M). \quad (2.4)$$

Если в жидкости находится несколько тел, неподвижных относительно друг друга, то граничные условия должны выполняться на поверхности каждого из тел.

2. Условия на поверхности раздела жидкостей. Пусть  $\Sigma$  — поверхность раздела (рис. 11). Для установившегося течения эта поверхность неподвижна. Жидкость движется вдоль поверхности  $\Sigma$ , не проникая через нее. Это означает, что

$$v_n^I|_{\Sigma} = v_n^{II}|_{\Sigma} = 0. \quad (2.5)$$

Существует еще условие, относящееся к давлению на поверхности раздела. Из закона количества движения следует, что для любой массы жидкости главный вектор объемных и поверхностных сил, включая силы инерции, равен нулю. Выделим элемент объема в виде шайбы вдоль поверхности раздела. Высота шайбы  $\Delta h$ , площадь основания  $\Delta S$ . Пусть  $\Delta h \ll \Delta S$ . В силу малости  $\Delta h$  силы, действующие на боковую поверхность, можно не учитывать. Объемные силы также можно не учитывать, так как они пропорциональны  $\Delta S \cdot \Delta h$ . Равенство нулю главного вектора сил для такой шайбы приводит к условию равенства нулю суммы сил давлений, действующих на шайбу сверху ( $p^I \Delta S$ ) и снизу ( $p^{II} \Delta S$ ), т. е. дает условие

$$p^I|_{\Sigma} = p^{II}|_{\Sigma}. \quad (2.6)$$

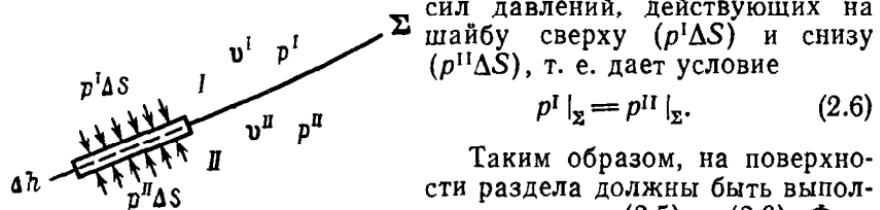


Рис. 11.

3. Условия на бесконечности. Пусть некоторое тело обтекается потоком поступательным и однородным на бесконечности. В этом случае должны быть известны

$$v|_{\infty} = v_{\infty}, \quad p|_{\infty} = p_{\infty}, \quad T|_{\infty} = T_{\infty}. \quad (2.7)$$

Уравнение состояния связывает  $p$ ,  $\rho$  и  $T$ , поэтому достаточно задать только две из этих величин.

Таким образом, из множества решений системы (2.1) надо выбрать то, которое удовлетворяет на поверхности тела условию (2.3) (если поверхность проницаема, то условию (2.4)), на поверхности раздела — условиям (2.5), (2.6), на бесконечности — условиям (2.7). Эти условия имеют общий характер и относятся к произвольным телам. Свойства жидкости (физика жидкости) отражены в уравнении состояния и в выражении для внутренней энергии.

### § 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБ ОТЫСКАНИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

При неустановившихся течениях жидкости гидродинамические функции зависят от координат и времени. Система уравнений, которой они должны удовлетворять, — система уравнений

(1.5). Рассмотрим граничные условия для нестационарных течений.

1. Граничные условия на поверхности движущегося тела. В случае нестационарного течения тела могут перемещаться в жидкости, могут и изменять свою форму. Как и раньше, пусть  $S$  — поверхность обтекаемого тела,  $n$  — нормаль в точках  $S$ . Обозначим через  $v$  скорость частиц жидкости, через  $u(M, t)$  — скорость точки  $M$  поверхности тела в момент  $t$ .

а) Если  $S$  — поверхность непроницаемого тела, то

$$v_n|_S = u_n(M, t). \quad (3.1)$$

б) Если тело проницаемое, то

$$v_n|_S = U(M, t), \quad (3.2)$$

где  $U(M, t)$  — заданная функция.

2. Граничные условия на поверхности раздела. В этом случае поверхность раздела может менять свою форму, перемещаясь с течением времени. Пусть  $u^\Sigma$  — скорость точек поверхности  $\Sigma$ , разделяющей жидкости I и II (см. рис. 11). Тогда условия запишутся в виде

$$v_n^I|_\Sigma = v_n^{II}|_\Sigma = u_n^\Sigma, \quad p^I|_\Sigma = p^{II}|_\Sigma. \quad (3.3)$$

3 Условия на бесконечности:

$$v|_\infty = v_\infty(t), \quad p|_\infty = p_\infty(t), \quad T|_\infty = T_\infty(t). \quad (3.4)$$

4. Начальные условия. Для нестационарных задач движение будет зависеть от того состояния, с которого оно началось. Поэтому кроме граничных условий должны быть заданы в начальный момент времени  $t_0$  условия, характеризующие состояние жидкости во всей области, занятой жидкостью:

$$v|_{t=t_0} = v_0(x, y, z), \quad p|_{t=t_0} = p_0(x, y, z), \quad T|_{t=t_0} = T_0(x, y, z). \quad (3.5)$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такие функции  $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$ , которые являлись бы решениями системы (1.5), в начальный момент времени  $t = t_0$  обращались бы в заданные функции (3.5) и во все моменты времени удовлетворяли бы граничным условиям (3.1) или (3.2) на поверхности тела  $S$ , условиям (3.3) на поверхности раздела (если она имеется), условиям (3.4) на бесконечности. В начальный момент времени поверхность раздела  $\Sigma_0$  должна быть задана. Форма поверхности  $\Sigma$  в зависимости от  $t$  при начальном условии  $\Sigma(t)|_{t=t_0} = \Sigma_0$  ищется в процессе решения задачи. Начальные и граничные условия должны быть согласованы, т. е. начальные условия должны удовлетворять условиям в бесконечно далекой точке и на поверхности обтекаемых тел.

Кроме рассмотренных граничных условий встречаются и другие граничные условия, с которыми приходится иметь дело при рассмотрении различных задач.

## ГЛАВА VIII

# СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЕ

В этой главе будем рассматривать вязкую жидкость, для которой связь тензора напряжений с тензором скоростей деформаций дается формулами (2.28) гл. VI, установленными на основе закона трения Ньютона. Будем предполагать, что жидкость подчиняется закону теплопроводности Фурье (см. (4.1) гл. VI). Будем рассматривать жидкости без внутреннего момента. В этом случае уравнение моментов (учитывая, что  $\tau_{ih} = \tau_{hi}$ ) удовлетворяется автоматически.

### § 1. ОБЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение движения сплошной среды

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_z}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Уравнение энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = e + \boldsymbol{\tau}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \boldsymbol{\tau}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \boldsymbol{\tau}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Связь тензора напряжений с тензором скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \boldsymbol{\tau}_{xy} = \boldsymbol{\tau}_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \boldsymbol{\tau}_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \boldsymbol{\tau}_{yz} = \boldsymbol{\tau}_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \boldsymbol{\tau}_{zz} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \boldsymbol{\tau}_{zx} = \boldsymbol{\tau}_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Закон теплопроводности Фурье

$$t_x = k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad t_y = k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad t_z = k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Уравнение состояния

$$f(p, \rho, T) = 0. \quad (1.6)$$

К этим уравнениям надо присоединить выражения для внутренней энергии  $E$ , коэффициентов вязкости  $\mu$  и  $\lambda$  и теплопроводности  $k$ :

$$E = E(p, T), \quad \lambda = \lambda(p, T), \quad \mu = \mu(p, T), \quad k = k(p, T). \quad (1.7)$$

Считаем, что поле массовых сил  $\mathbf{F}$  и вид функции  $v$  известны.

Таким образом, имеем систему (1.1)–(1.6), в которой число неизвестных равно числу уравнений. Если в уравнения (1.2) и (1.3) подставить (1.4) и (1.5), т. е. исключить из рассмотрения  $\tau_{ik}$  и  $t_i$ , то получим систему шести уравнений: (1.1), (1.2), (1.3), (1.6) для шести искомых функций:  $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$ .

Выразив из уравнения состояния одну из функций через две другие и подставив ее выражение в уравнения (1.1), (1.2), (1.3), можно получить систему пяти уравнений для отыскания пяти функций.

## § 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваем однородную несжимаемую жидкость. Для нее  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  — уравнение состояния. Будем предполагать, что коэффициенты вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $k$  являются постоянными:

$$\mu = \text{const}, \quad k = \text{const}. \quad (2.1)$$

Так как  $\rho = \text{const}$ , то  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  и уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Тензор напряжений  $\tau$  силу (2.2) будет

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим уравнение движения (1.2). Запишем его проекцию на ось  $x$  и подставим вместо  $\tau_{ik}$  выражения (2.3). Учитывая при этом (2.1), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу (2.2) уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Аналогично запишутся два других уравнения — проекции на оси  $y$  и  $z$ . Вводя обозначения

$$v = \frac{\mu}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f, \quad (2.5)$$

перепишем уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \Delta v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \Delta v_y, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta v_z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) равносильны одному векторному уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + v \Delta \mathbf{v}. \quad (2.6')$$

Уравнения (2.6) носят название *уравнений Навье—Стокса*.

Уравнение неразрывности (2.2) и уравнения Навье—Стокса (2.6) образуют систему четырех уравнений для отыскания  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  и  $p$ , т. е. для несжимаемой вязкой жидкости при  $\mu = \text{const}$  задача об отыскании поля скоростей и давлений может быть решена независимо от задачи отыскания поля температур. После того как функции  $\mathbf{v}$  и  $p$  будут найдены из (2.2) и (2.6), можно искать температуру, решая уравнение энергии.

В отличие от уравнений Эйлера в уравнения Навье—Стокса входят производные второго порядка. Это должно отразиться на постановке граничных условий.

Если же  $\mu = 0$ , то уравнения Навье—Стокса переходят в уравнения Эйлера.

Обратимся к уравнению энергии (1.3). Подставим выражения (2.3) для тензора напряжений в группу слагаемых, входящих в уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \tau_x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial v}{\partial z} &= \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \\ + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} + \\ + \mu \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \frac{\partial v_z}{\partial y} + \\ + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial v_x}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \frac{\partial v_y}{\partial z} + \\ + \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \Phi = \Phi. \quad (2.7) \end{aligned}$$

В силу (2.2)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Через  $\Phi$  обозначена сумма

$$\begin{aligned}\Phi = \mu & \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.8)\end{aligned}$$

Используя закон теплопроводности Фурье (1.5) и предположение, что  $k = \text{const}$ , получаем

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = k \Delta T. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.7) и (2.9), перепишем уравнение энергии (1.3) в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} = e + \Phi + k \Delta T. \quad (2.10)$$

Для несжимаемой жидкости  $E = cT + \text{const}$ , где  $c$  — теплоемкость, и уравнение энергии примет вид

$$c\rho \frac{dT}{dt} = e + \Phi + k \Delta T. \quad (2.11)$$

Если система уравнений (2.2), (2.6) проинтегрирована, т. е.  $\mathbf{v}$  и  $\rho$  — известные функции, то уравнение (2.11) есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для отыскания температуры  $T$ . Входящая в (2.11) функция  $\Phi$  неотрицательна и обращается в нуль только в случае, когда жидкость поконится или движется как абсолютно твердое тело. Для идеальной жидкости  $\Phi = 0$ , так как  $\mu = 0$ . Функция  $\Phi$  называется диссипативной функцией.

Если среда неподвижна, т. е.  $v_x = v_y = v_z = 0$ ,  $\Phi = 0$ , то уравнение (2.11) принимает вид известного уравнения теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = e + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Если коэффициент  $k$  нельзя считать постоянным, т. е.  $k = k(T)$ , то уравнение запишется в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = e + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Итак, уравнения (2.2), (2.6), (2.11) образуют систему уравнений вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{v} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \right), \\ c\rho \frac{dT}{dt} &= e + \Phi + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).\end{aligned} \quad (2.12)$$

Функция  $\Phi$  имеет вид (2.8). Система (2.12) содержит пять уравнений для отыскания пяти функций:  $v_x, v_y, v_z, p, T$ .

### § 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБ ОТЫСКАНИИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Имеем систему уравнений вязкой несжимаемой жидкости (2.12). Чтобы решение интересующих нас задач, описываемых этой системой, было единственным, должны быть заданы граничные условия. Рассмотрим граничные условия трех типов: на обтекаемом теле, на границе раздела двух жидкостей и на бесконечности (если жидкость заполняет безграничное пространство).

А. Постановка задач для установившихся течений. В этом случае для любой гидродинамической функции  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{df}{dt} = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

1. Граничные условия на обтекаемом теле. При установившемся течении тела неподвижны, скорость и точек поверхности обтекаемого тела равна нулю. Вязкая жидкость обладает свойством прилипания к телу. Поэтому на поверхности  $S$  непроницаемого тела скорость частиц жидкости должна быть равна нулю, т. е.

$$v|_S = 0, \quad \text{или} \quad v_n|_S = 0, \quad v_\tau|_S = 0, \quad (3.1)$$

где  $v_n, v_\tau$  — нормальная и касательная составляющие скорости. Если поверхность проницаема, то

$$v|_S = U(M), \quad \text{где} \quad U(M) — \text{заданная функция.}$$

Кроме условий для скорости ставится условие для температуры обычно одного из двух видов: либо задается температура  $T$  жидкости у поверхности тела, например, если  $T_w(M)$  — температура точек поверхности тела, то

$$T|_S = T_w(M), \quad (3.2)$$

либо задается поток тепла  $q$ , идущий от тела к жидкости (или обратно):

$$k \frac{\partial T}{\partial n}|_S = q(M). \quad (3.3)$$

Если  $k_t$ ,  $T_t$  — коэффициент теплопроводности и температура тела, то это условие можно записать в виде

$$k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = k_t \frac{\partial T_t}{\partial n} \Big|_S. \quad (3.3')$$

Условие (3.3) означает непрерывность потока тепла.

2. Границные условия на поверхности раздела двух жидкостей. Поверхность  $\Sigma$  неподвижна. Условие для скорости

$$\mathbf{v}^I \Big|_{\Sigma} = \mathbf{v}^{II} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) — условие непрерывности скорости при переходе через поверхность раздела, т. е. в вязкой жидкости должны быть равны не только нормальные, но и касательные составляющие скорости.

Если  $n$  — нормаль к площадке, расположенной на поверхности  $\Sigma$ , то условие для напряжений будет

$$\tau_n^I \Big|_{\Sigma} = \tau_n^{II} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.5)$$

Условие для потока тепла (сохранения потока тепла)

$$k_1 \frac{\partial T^I}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = k_2 \frac{\partial T^{II}}{\partial n} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.6)$$

### 3. Условия на бесконечности

$$\mathbf{v}|_{\infty} = \mathbf{v}_{\infty}, \quad p|_{\infty} = p_{\infty}, \quad T|_{\infty} = T_{\infty}. \quad (3.7)$$

Таким образом, задача состоит в нахождении решения системы уравнений (2.12), удовлетворяющего условиям, указанным в пунктах 1, 2, 3.

Б. Постановка задачи для неустановившихся течений.

1. Границные условия на поверхности тела. При нестационарных течениях тела могут перемещаться в жидкости, могут и изменять свою форму. Пусть  $\mathbf{u}(M, t)$  — скорость точки  $M$  поверхности  $S$  тела в момент времени  $t$ . Тогда для проницаемого тела

$$\mathbf{v}|_S = \mathbf{u}(M, t).$$

Для проницаемого тела  $\mathbf{v}|_S = \mathbf{V}(M, t)$ , где  $\mathbf{V}(M, t)$  — заданная функция.

Условия для температуры сохраняют свой вид, только в этом случае функции, входящие в (3.2), (3.3), зависят еще и от времени  $t$ .

2. Границные условия на поверхности раздела сохраняют вид (3.4) — (3.6), но теперь от времени  $t$  могут зависеть не только функции  $\mathbf{v}$ ,  $\tau_n$ ,  $T$ , но и сама поверхность раздела  $\Sigma$ .

3. На бесконечности должны быть известны  $v_\infty(t)$ ,  $p_\infty(t)$ ,  $T_\infty(t)$ .

4. Начальные условия не отличаются от начальных условий в идеальной жидкости: в некоторый момент  $t_0$  должны быть заданы  $v$ ,  $p$ ,  $T$  как функции координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Кроме того, должна быть задана поверхность раздела  $\Sigma_0$  в момент  $t_0$ .

Таким образом, требуется найти решение системы уравнений вязкой теплопроводной жидкости, которое в момент  $t = t_0$  удовлетворяло бы начальным условиям и во все моменты времени условиям на поверхности тела, условиям на поверхности раздела и условиям на бесконечности.

Методы современной математической физики, основанные на функциональном анализе, позволяют исследовать весьма широкий класс задач гидродинамики, уточнить их постановку и доказать теоремы существования и единственности решения, а также непрерывную зависимость решения от данных задачи.

## ГЛАВА IX

### УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассматриваем покоящуюся жидкость. В этом случае в жидкости наблюдаются только нормальные напряжения, причем их величина не зависит от ориентировки площадки (см. § 1 гл. VI). Тензор напряжений принимает вид (1.7) гл. VI, а это означает, что для задач о равновесии жидкости не существенно различие между идеальной и вязкой жидкостью.

Будем предполагать, что у жидкости нет внутреннего момента и что для нее справедлив закон теплопроводности Фурье.

#### § 1. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Выпишем систему уравнений гидромеханики в общем виде:

$$\frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0; \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}; \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \tau_x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + e; \quad (1.3)$$

$$\rho = f(p, T). \quad (1.4)$$

Так как жидкость находится в равновесии, то это означает, что  $v \equiv 0$  и  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ , а тогда для любой функции  $f$ :  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} f \equiv 0$ . Имея это в виду, обратимся к системе уравнений (1.1)–(1.4). Уравнение неразрывности (1.1) выполняется автоматически.

Закон количества движения (1.2) в силу равенств

$$\tau_x = -ip, \quad \tau_y = -jp, \quad \tau_z = -kp$$

запишется в виде

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение энергии примет вид

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \varepsilon = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), (1.6) и (1.4) образуют систему уравнений равновесия.

Предполагая, что объемных источников тепла нет, т. е.  $\varepsilon = 0$ , и учитывая закон Фурье  $t = k \operatorname{grad} T$ , где  $k = k(p, T)$ , получим систему уравнений равновесия в виде

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0; \quad (1.8)$$

$$\rho = f(p, T). \quad (1.9)$$

В системе уравнений равновесия пять уравнений, а искомых функций три:  $\rho, p, T$ . Система переопределена. Это означает, что равновесие возможно не всегда. Получим условия разрешимости системы (1.7) — (1.9).

## § 2. УСЛОВИЕ ДЛЯ СИЛ

Выпишем уравнения (1.7) в проекциях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho F_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho F_y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho F_z. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Продифференцируем первое уравнение по  $y$ , второе по  $x$  и вычтем одно из другого. Получим

$$\rho \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + F_y \frac{\partial \rho}{\partial x} - F_x \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Аналогично получим еще два уравнения:

$$\rho \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_z \frac{\partial \rho}{\partial y} - F_y \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0; \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_x \frac{\partial \rho}{\partial z} - F_z \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2.4)$$

Умножая (2.2) на  $F_z$ , (2.3) на  $F_x$ , (2.4) на  $F_y$  и складывая, получим

$$\rho \left[ F_x \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_y \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (2.5)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0. \quad (2.5')$$

Условие (2.5) необходимо для возможности равновесия. Это условие есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы векторное поле  $\mathbf{F}$  имело вид

$$\mathbf{F} = B \operatorname{grad} V, \quad (2.6)$$

где  $B$  и  $V$  — некоторые функции координат.

Подставляя (2.6) в (1.7), получаем

$$\operatorname{grad} V = \frac{1}{\rho B} \operatorname{grad} p. \quad (2.7)$$

Образуем якобиан  $\frac{D(p, V)}{D(x, y)}$  и учтем при этом уравнения равновесия (2.1) и равенство (2.6):

$$\frac{D(p, V)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \rho B \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Аналогично получим

$$\frac{D(p, V)}{D(y, z)} = 0, \quad \frac{D(p, V)}{D(z, x)} = 0. \quad (2.8')$$

Равенства (2.8) означают, что между  $p$  и  $V$  имеется функциональная зависимость

$$V = Q(p). \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.7) следует, что  $dp = \rho B dV$ ,  $\rho B = \frac{dp}{dV}$ , т. е.

$$\rho B = \Psi(p). \quad (2.10)$$

Равенство (2.5) или эквивалентное ему равенство (2.6) дает общий вид сил, при которых возможно равновесие. При выполнении (2.5) силовые линии ортогональны к поверхностям  $V = \text{const}$ . Направление  $\mathbf{F}$  параллельно  $\operatorname{grad} V$ .

### § 3. УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

Пусть имеются несжимаемые жидкости I и II, разделенные поверхностью  $\Sigma$ , причем  $\rho^I \neq \rho^{II}$ . Равенство напряжений в точках поверхности раздела в случае равновесия дает условие

$$p^I|_{\Sigma} = p^{II}|_{\Sigma}. \quad (3.1)$$

Для каждой из жидкостей справедливы уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^I}{\partial x} &= \rho^I F_x, & \frac{\partial p^I}{\partial y} &= \rho^I F_y, & \frac{\partial p^I}{\partial z} &= \rho^I F_z; \\ \frac{\partial p^{II}}{\partial x} &= \rho^{II} F_x, & \frac{\partial p^{II}}{\partial y} &= \rho^{II} F_y, & \frac{\partial p^{II}}{\partial z} &= \rho^{II} F_z.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Умножим первое уравнение на  $dx$ , второе на  $dy$ , третье на  $dz$  и сложим полученные выражения. В результате будем иметь

$$dp^I = \rho^I (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.3)$$

Аналогично

$$dp^{II} = \rho^{II} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.4)$$

Пусть  $dx, dy, dz$  — проекции  $d\mathbf{r}$  — перемещения вдоль поверхности раздела  $\Sigma$ . Тогда в силу (3.1)

$$dp^I|_{\Sigma} = dp^{II}|_{\Sigma}. \quad (3.5)$$

Вычитая (3.4) из (3.3) и учитывая (3.5), получаем

$$(\rho^I - \rho^{II}) (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0. \quad (3.6)$$

Так как  $\rho^I \neq \rho^{II}$  по предположению, то из (3.6) следует, что вдоль поверхности раздела

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0, \quad (3.7)$$

или

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.7')$$

т. е. в каждой точке поверхности ее элемент ортогонален вектору силы  $\mathbf{F}$ . Равенство (3.7) означает, что работа массовых сил при перемещении вдоль поверхности раздела равна нулю.

Если считать силы тяжести направленными вертикально, то поверхностями раздела будут горизонтальные плоскости. Если принять, что силы тяжести направлены к центру земли, то поверхностями раздела будут сферы.

#### § 4. РАВНОВЕСИЕ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Система уравнений равновесия содержит уравнения (1.7) — (1.9). Уравнение состояния (1.9) для однородной несжимаемой жидкости имеет вид  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Учитывая это, можно уравнение (1.7) записать в виде

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho_0} \right), \quad (4.1)$$

т. е. равновесие несжимаемой жидкости возможно только в потенциальном силовом поле. Пусть

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V. \quad (4.2)$$

Тогда из (4.1) и (4.2) следует, что  $\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) = -\operatorname{grad} V$ , т. е.  
 $p = C - \rho_0 V$ . (4.3)

Постоянная интегрирования  $C$  находится из условия  $p|_{V=V_0} = p_0$ . Таким образом, давление найдено.

Если массовые силы — силы тяжести, то  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -g$  и потенциал  $V = gz$ . Из формулы (4.3) в этом случае получаем гидростатический закон:

$$p = p_0 + \rho_0 g (z_0 - z).$$

Для несжимаемой жидкости коэффициент теплопроводности зависит от температуры или постоянен. Если  $k = k(T)$ , то уравнение (1.8) для температуры — нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. В случае  $k = \text{const}$  уравнение (1.8) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (4.4)$$

Функции, являющиеся решением уравнения Лапласа, называются гармоническими. Следовательно, в рассматриваемом случае  $T$  есть гармоническая функция.

Для решения уравнения Лапласа должны быть заданы граничные условия. Чаще всего встречаются два типа граничных условий и соответственно формулируются две краевые задачи.

1. На поверхности  $S$  заданы значения температуры, т. е.  $T|_S = T(M)$  — заданная функция точек поверхности (задача Дирихле).

2. На поверхности  $S$  задается значение нормальной производной, т. е.  $\frac{\partial T}{\partial n}|_S = Q(M)$  (задача Неймана). Известно, что задача об отыскании решения уравнения (4.4), когда на  $S$  задана  $\frac{\partial T}{\partial n}$ , разрешима только при условии, если  $\iint_S Q(M) dS = 0$ .

Физический смысл этого условия очевиден. Величина  $k \frac{\partial T}{\partial n} dS$  есть поток тепла через площадку  $dS$ , а условие  $\iint_S Q dS = \iint_S \frac{\partial T}{\partial n} dS = 0$  означает, что общее количество тепла, входящее и выходящее через поверхность  $S$ , равно нулю. При равновесии это условие выполнено.

Если решать внешнюю задачу Неймана для безграничной области, то условие для потока тепла не ставится — тепло рассеивается.

Итак, в случае однородной несжимаемой жидкости задача об определении температуры решается независимо от задачи об определении давления.

## § 5. РАВНОВЕСИЕ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Введем определение: жидкость называется *баротропной*, если ее плотность есть функция только давления

$$\rho = \Phi(p). \quad (5.1)$$

В противном случае жидкость называется *бароклинной*. Предположим, что жидкость баротропна, и выпишем уравнения равновесия (2.1), учитывая (5.1):

$$\frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x, \quad \frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial y} = F_y, \quad \frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial z} = F_z. \quad (5.2)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\Phi(p)}. \quad (5.3)$$

Для  $P(p)$  справедливы равенства

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\Phi(p)} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (5.4)$$

Система (5.2) с учетом (5.4) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = F_z. \quad (5.5)$$

Из (5.5) следует, что массовые силы  $\mathbf{F}$  должны быть потенциальны, т. е. равновесие возможно, если поле массовых сил консервативно. Пусть

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V, \quad (5.6)$$

где  $V$  — потенциал массовых сил. Из (5.5) и (5.6) следует

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad dP = -dV. \quad (5.7)$$

Интегрируя (5.7), получим

$$P(p) = C - V. \quad (5.8)$$

Постоянная  $C$  находится из условия  $p|_{V=V_0} = p_0$ . Определив  $\rho$  и подставив его в (5.1), получим  $\rho$ . Давление и плотность постоянны на поверхностях  $V = \text{const}$ .

**Замечание.** Если жидкость находится при постоянной температуре (изотермична)  $T = T_0$ , то уравнение равновесия для температуры удовлетворяется тождественно, а уравнение состояния принимает вид

$$\rho = f(p, T_0) = \Phi(p),$$

т. е. плотность есть функция только давления — жидкость баротропна.

**Пример 1.** Рассмотрим равновесие жидкости при отсутствии массовых сил, т. е.  $\mathbf{F} = 0$ . В этом случае  $\operatorname{grad} p = 0$  (см. (1.7)) и  $p = \text{const}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона, при изотермическом равновесии

$$p = \frac{R_0}{m} \rho T, \quad T = T_0.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{m}{R_0 T_0} p = \Phi(p),$$

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\Phi(p)} = \frac{R_0 T_0}{m} \ln \frac{p}{p_0}.$$

Подставляя  $P(p)$  в (5.8) и учитывая, что  $p|_{V=V_0} = p_0$ , получим  $\frac{R_0 T_0}{m} \ln \frac{p}{p_0} = V_0 - V$ ,  $p = p_0 e^{-\frac{m}{R_0 T_0} (V - V_0)}$ . Если массовые силы — силы тяжести, то  $V = gz$  и

$$p = p_0 e^{-\frac{m}{R_0 T_0} (z - z_0) g}.$$

Давление убывает с высотой как  $\exp(-Cz)$ .

## § 6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ В КОНСЕРВАТИВНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Рассмотрим общий случай равновесия сжимаемой жидкости в консервативном силовом поле, когда система уравнений равновесия имеет вид (1.7) — (1.9). Так как поле массовых сил консервативно, т. е.

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V, \quad (6.1)$$

то система уравнений равновесия с учетом (6.1) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (6.3)$$

$$\rho = f(p, T), \quad (6.4)$$

где

$$k = k(p, T). \quad (6.5)$$

Необходимое условие для равновесия выполнено — силы консервативны. Можно ожидать, что задача имеет решение. Из уравнений (6.2) следует, что  $dp = -\rho dV$ , т. е.

$$\rho = -\frac{dp}{dV}. \quad (6.6)$$

Используем результаты, изложенные в § 2, положив в приведенных там формулах  $B = 1$ . Тогда согласно (2.9)

$$p = p(V) \quad (6.7)$$

и в соответствии с (6.6)

$$\rho = \rho(V). \quad (6.8)$$

Таким образом, давление и плотность есть функции только  $V$ .

Так как по предположению температура входит в уравнение состояния (6.4), то  $\frac{\partial f}{\partial T} \neq 0$ . Решив (6.4) относительно  $T$  и учитя (6.7) и (6.8), получим, что температура также есть функция только  $V$ , т. е.

$$T = T(V). \quad (6.9)$$

Очевидно, что на поверхностях равного потенциала  $V = \text{const}$  давление, плотность и температура постоянны.

Решить задачу — значит найти вид зависимостей  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  от  $V$ . Рассмотрим уравнение (6.3). Из (6.5) в силу (6.7) и (6.9) следует, что

$$k = k(p, T) = k(V). \quad (6.10)$$

Так как  $k$  и  $T$ , входящие в (6.3), есть функции лишь  $V$ , то уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{dT}{dV} \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{dT}{dV} \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{dT}{dV} \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0. \quad (6.11)$$

Раскрывая производные от произведений, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} \left( k \frac{dT}{dV} \right) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + k \frac{dT}{dV} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Используя обозначения  $\Delta f$  и  $\text{grad } f$ , будем иметь

$$\frac{d}{dV} \left( k \frac{dT}{dV} \right) (\text{grad } V)^2 + k \frac{dT}{dV} \Delta V = 0,$$

или

$$\frac{\frac{d}{dV} \left( k \frac{dT}{dV} \right)}{k \frac{dT}{dV}} = - \frac{\Delta V}{(\text{grad } V)^2}. \quad (6.13)$$

Левая часть (6.13) — функция только  $V$ , следовательно, и правая часть должна зависеть только от  $V$ . Обозначим

$$\frac{\Delta V}{(\text{grad } V)^2} = - q(V). \quad (6.14)$$

Отсюда следует, что равновесие возможно, если потенциал массовых сил таков, что справедливо (6.14). Поле массовых сил известно, и если (6.14) выполнено, то  $q(V)$  — известная функ-

ция. Чтобы установить, для каких потенциалов массовых сил выполнено равенство (6.14), введем вместо  $q(V)$  новую функцию  $R(V)$  согласно равенству

$$q(V) = \frac{R''(V)}{R'(V)}. \quad (6.15)$$

Функция  $R(V)$  не может быть выбрана произвольно. Посмотрим, какому условию она должна удовлетворять. Из равенства (6.14) следует

$$\frac{dR(V)}{dV} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] + \frac{d^2 R}{dV^2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) есть уравнение Лапласа для  $R(V)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} R(V) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} R(V) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(V) = 0. \quad (6.17)$$

Таким образом, равновесие жидкости в консервативном поле сил возможно, если некоторая функция  $R(V)$  является гармонической. Если предположить, что  $V$  — именно такой потенциал, то функция  $R(V)$  может быть найдена из соотношения (6.15). Имея это в виду, вернемся к уравнению (6.13), которое запишем в виде

$$\frac{\frac{d}{dV} \left( k \frac{dT}{dV} \right)}{k \frac{dT}{dV}} = \frac{R''(V)}{R'(V)}. \quad (6.18)$$

Интегрируя один раз уравнение (6.18), имеем

$$k \frac{dT}{dV} = C_1 R'(V). \quad (6.19)$$

Собирая вместе (6.4), (6.6), (6.19), получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV} &= -f(p, T), \\ k \frac{dT}{dV} &= C_1 R'(V), \\ p &= f(p, T). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Таким образом, задача свелась к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Интегрируя систему дифференциальных уравнений, получим общее решение задачи о равновесии жидкости в консервативном поле сил

$$\begin{aligned} p &= p(V, C_1, C_2, C_3), \\ T &= T(V, C_1, C_2, C_3), \\ p &= f(p, T). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Для определения произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3$  должны быть заданы условия. Условия могут быть различными:

например, на поверхности равного потенциала  $V = V_0$  могут быть заданы  $p$  и  $T$ , на поверхности  $V = V_1$  задано  $T$ , т. е.

$$p|_{V=V_0} = p_0, \quad T|_{V=V_0} = T_0, \quad T|_{V=V_1} = T_1. \quad (6.22)$$

**З а м е ч а н и е.** Все рассуждения сохранились бы и в случае, когда  $k = k(p, T, V)$  и уравнение состояния имеет вид  $\rho = \rho(p, T, V)$ . Вместо системы (6.20) получили бы несколько более общую систему

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV} &= -f(p, T, V), \\ k(p, T, V) \frac{dT}{dV} &= C_1 \frac{dR(V)}{dV}, \\ \rho &= f(p, T, V). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Пусть газ подчиняется закону Клапейрона:  $p = \frac{R_0}{m} \rho T$ . Предположим, что  $m = m(V)$ ,  $k = k(V)$  (например, молекулярный вес  $m$  и коэффициент турбулентной теплопроводности  $k$  зависят от высоты). Система уравнений равновесия (6.23) с учетом уравнения состояния примет вид

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{m(V)}{R_0} \frac{p}{T}; \quad (6.24)$$

$$k(V) \frac{dT}{dV} = C_1 \frac{dR(V)}{dV}; \quad (6.25)$$

$$\rho = \frac{m(V)}{R_0} \frac{p}{T}. \quad (6.26)$$

Из (6.25) получим

$$T(V) = C_2 + C_1 \int_{V_0}^V \frac{1}{k(\xi)} \frac{dR(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (6.27)$$

Подставляя (6.27) в (6.24) и интегрируя полученное уравнение, будем иметь

$$\ln p = \ln C_3 - \frac{1}{R_0} \int_{V_0}^V \frac{\frac{m(\eta) d\eta}{C_2 + C_1 \int_{V_0}^\eta \frac{1}{k(\xi)} \frac{dR(\xi)}{d\xi} d\xi}}{C_2 + C_1 \int_{V_0}^\eta \frac{1}{k(\xi)} \frac{dR(\xi)}{d\xi} d\xi} d\eta. \quad (6.28)$$

Отсюда

$$p = C_3 \exp \left[ -\frac{1}{R_0} \int_{V_0}^V \frac{\frac{m(\eta) d\eta}{C_2 + C_1 \int_{V_0}^\eta \frac{1}{k} \frac{dR}{d\xi} d\xi}}{C_2 + C_1 \int_{V_0}^\eta \frac{1}{k} \frac{dR}{d\xi} d\xi} d\eta \right]. \quad (6.29)$$

Равенства (6.27), (6.29), (6.26) дают решение задачи.

Запишем полученное решение для случая, когда массовые силы — силы тяжести  $F_z = -g = \text{const}$ . Потенциал массовых сил  $V = gz$  удовлетворяет уравнению  $\Delta V = 0$ . Из (6.14) следует, что  $q(V) = R''(V) = 0$ , откуда  $R'(V) = \text{const}$ . Предпола-

гая, что  $k$  и  $m$  постоянны, из (6.27) получаем

$$T = C_2 + \frac{C_1}{k} V. \quad (6.30)$$

Из (6.24) и (6.26) найдем  $p$  и  $\rho$ :

$$p = C_3 \left( C_2 + \frac{C_1}{k} V \right)^{-\frac{m k}{R_0 C_1}}, \quad \rho = \frac{m}{R_0} \frac{p}{T}. \quad (6.31)$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  находятся из условий на границе. Пусть эти условия имеют вид (6.22) и пусть на поверхности Земли  $z = 0$ . Тогда для  $V = gz$  можно равенства (6.22) записать в виде  $T|_{z=0} = T_0$ ,  $p|_{z=0} = p_0$ ,  $T|_{z=z_1} = T_1$ . С учетом условий при  $z = 0$  и  $z = z_1$  получим известные барометрические формулы

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{z_1} z, \quad p = p_0 \left( 1 - \frac{T_0 - T_1}{T_0} \frac{z}{z_1} \right)^{\frac{R_0}{m} \frac{g z_1}{(T_0 - T_1)}}, \quad \rho = \frac{m}{R_0} \frac{p}{T}. \quad (6.32)$$

Последние равенства дают ход изменения температуры, давления и плотности с изменением высоты в предположении, что  $k$  и  $m$  постоянны. Температура линейно зависит от высоты. Для земной атмосферы падение температуры на 1000 м примерно равно  $6,5^\circ$ .

Нетрудно выписать решение и для случая, когда массовые силы изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли.

1. Если рассматривать не очень большие расстояния от Земли, то можно как это обычно делают, приближенно принять поверхность Земли за плоскость и массовые силы направленными вертикально, т. е. положить  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -\frac{ga^2}{(a+z)^2}$ , где  $a$  — радиус Земли,  $g$  — ускорение силы тяжести на ее поверхности  $z = 0$ . В этом случае потенциал массовых сил  $V = -\frac{ga^2}{a+z}$ , откуда  $a+z = -\frac{ga^2}{V}$ . Функция  $q(V)$ , определяемая формулой (6.14), будет  $q(V) = \frac{2}{a^2 g} (a+z) = -\frac{2}{V}$ , и уравнение (6.15) для  $R(V)$  запишется в виде  $\frac{R''(V)}{R'(V)} = -\frac{2}{V}$ .

Отсюда  $R'(V) = \frac{c}{V^2}$  и  $R(V) = -\frac{c}{V} + C_1$ . Выражение  $R(V)$  через  $z$  будет иметь вид  $R = \frac{C}{a^2 g} (a+z) + C_1$ , т. е.  $R(z)$  — гармоническая функция. Подставляя  $R'(V) = \frac{C}{V^2}$  в (6.27) и (6.29) и вычисляя интегралы, легко получим зависимость  $T$ ,  $p$  и  $\rho$  от  $z$ . В частности, температура будет опять линейно зависеть от  $z$ :

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{z_1} z = T_0 \left( 1 - \frac{T_0 - T_1}{T_0} \frac{z}{z_1} \right). \quad (6.33)$$

2. Задачу о равновесии атмосферы вокруг Земли, когда массовые силы есть силы тяготения, можно рассмотреть и в более точной постановке, считая, что Земля — однородный шар и силы направлены к центру Земли. В этом случае, вводя сферические координаты  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , будем иметь

$$F_r = -\frac{ga^2}{r^2}, \quad F_\theta = F_\phi = 0.$$

Потенциал массовых сил  $V = -\frac{ga^2}{r}$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta V = 0$  и согласно (6.14) функция  $q(V) = 0$ , откуда  $R'(V) = \text{const}$ . В формулах (6.27) и (6.29), дающих решение задачи, следует, вообще говоря, при больших изменениях высот учитывать зависимость  $m$  и  $k$  от  $V$ , т. е. от высоты. Если же, как и раньше, принять  $m$  и  $k$  постоянными, то решение может быть сразу выписано. Для температуры оно имеет вид

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{T_0 - T_1}{T_0} \frac{\frac{1 - \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r_1}}}{z_1} \right),$$

где  $T_0$  — температура при  $r = a$ ;  $T_1$  — температура при  $r = r_1$ . Если в выражении для  $T$  обозначить  $r - a$  через  $z$ , то получим

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{T_0 - T_1}{T_0} \frac{z}{z_1} \frac{a + z_1}{a + z} \right). \quad (6.34)$$

#### Примечание редактора

Из уравнений равновесия жидкости в консервативном силовом поле, как известно, следует, что между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  существует функциональная зависимость.

Жидкость, для которой  $\rho$  есть функция только  $p$ , обычно называют баротропной. При этом имеется в виду, что зависимость  $\rho$  от  $p$  заранее задана. Это позволяет при решении задач о движении баротропной жидкости ограничиться рассмотрением уравнения неразрывности и трех уравнений движения для нахождения четырех функций —  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $p$ , а при исследовании равновесия жидкости — рассмотрением трех уравнений (так как уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно).

Жидкость, уравнение состояния которой имеет общий вид  $f(p, \rho, T) = 0$  и относительно которой не делается никаких специальных предположений (об изотермичности или адабатичности процессов и др.), называют бароклинной. При решении задач о движении бароклинной жидкости приходится привлекать уравнение энергии. Задача о равновесии жидкости, уравнение состояния которой имеет общий вид  $f(p, \rho, T) = 0$  и относительно которой не делается никаких специальных предположений, также не может быть точно решена без использования уравнения энергии. Зависимость  $\rho$  от  $p$  в этом случае заранее неизвестна и для каждой задачи может быть найдена только после ее решения.

Решение задачи о равновесии жидкости в консервативном силовом поле, изложенное в § 6, получено С. В. Валландером и изложено в статье «Равновесие бароклинной теплопроводной жидкости в консервативном силовом поле» (Доклады АН СССР, 1974, т. 216, № 2).

## § 7. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СИЛ ДАВЛЕНИЯ

Пусть имеется некоторое тело и пусть  $S$  — часть поверхности тела, соприкасающаяся с жидкостью. Как обычно,  $\mathbf{n}$  — нормаль к элементу поверхности  $dS$ , направленная в ту сторону, где находится жидкость. На площадку  $dS$  со стороны жидкости действует сила

$$d\mathbf{F}^S = \tau_n dS. \quad (7.1)$$

Момент этой силы относительно начала координат

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^S = (\mathbf{r} \times \tau_n) dS. \quad (7.2)$$

Проинтегрировав (7.1) и (7.2) по поверхности  $S$ , получим общие формулы для главного вектора и главного момента сил, действующих на поверхность  $S$  со стороны жидкости:

$$\mathbf{F}^S = \iint_S \tau_n dS; \quad (7.3)$$

$$\mathbf{L} = \iint_S (\mathbf{r} \times \tau_n) dS. \quad (7.4)$$

Если в жидкости действуют только нормальные напряжения, то  $\tau_n = -p\mathbf{n}$  и формулы (7.3) и (7.4) принимают вид

$$\mathbf{F}^S = - \iint_S p \mathbf{n} dS; \quad (7.5)$$

$$\mathbf{L} = - \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) p dS. \quad (7.6)$$

В проекциях на оси координат получим

$$F_x^S = - \iint_S p \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{x}}) dS,$$

$$F_y^S = - \iint_S p \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{y}}) dS, \quad (7.7)$$

$$F_z^S = - \iint_S p \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}}) dS;$$

$$L_x = - \iint_S p [y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}}) - z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{y}})] dS,$$

$$L_y = - \iint_S p [z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{x}}) - x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{z}})] dS, \quad (7.8)$$

$$L_z = - \iint_S p [x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{y}}) - y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{x}})] dS.$$

## § 8. ЗАКОН АРХИМЕДА

Будем рассматривать однородную несжимаемую жидкость в поле силы тяжести. Массовые силы  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -g$ . Задача о равновесии такой жидкости решена в § 4, где была получена формула для давления

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (8.1)$$

Введем вместо  $z$  координату  $z'$ , положив

$$z' = z - z_0 - \frac{p_0}{\rho g},$$

т. е. будем отсчитывать  $z'$  от так называемого приведенного уровня ( $p = 0$  при  $z = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}$ ). Тогда формула для давления примет вид

$$p = -\rho g z'. \quad (8.2)$$

Пусть в жидкость погружено тело. Поверхность этого тела  $S$ , объем  $\tau$ . Вычислим главный вектор  $\mathbf{F}^S$  и главный момент  $\mathbf{L}$  сил, действующих со стороны жидкости на тело. Подставляя (8.2) в формулы (7.7) и учитывая при этом, что поверхность  $S$  замкнутая, находим проекции главного вектора

$$\begin{aligned} F_x^S &= \rho g \iint_S z' \cos(\hat{n}, \hat{x}) dS = 0, \quad F_y^S = 0, \\ F_z^S &= \rho g \iint_S z' \cos(\hat{n}, \hat{z}) dS = \rho g \iiint_{\tau} d\tau = \rho g \tau. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Таким образом, на тело, погруженное в жидкость, действует сила, направленная снизу вверх и равная весу жидкости в объеме этого тела.

Вычислим проекции главного момента. Используя формулы (7.8), получаем

$$\begin{aligned} L_x &= \rho g \iint_S z' [y \cos(\hat{n}, \hat{z}) - z \cos(\hat{n}, \hat{y})] dS = \\ &= \rho g \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial z'} (z' y) d\tau = \rho g \iiint_{\tau} y d\tau, \\ L_y &= -\rho g \iiint_{\tau} x d\tau, \quad L_z = 0. \end{aligned}$$

Введем координаты центра тяжести объема

$$x_c = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} x d\tau, \quad y_c = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} y d\tau.$$

Тогда выражения для  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  можно записать в виде

$$L_x = \rho g \tau y_c, \quad L_y = -\rho g \tau x_c, \quad L_z = 0. \quad (8.4)$$

Формулы (8.4) решают задачу о нахождении момента.

Известно, что система сил приводится к одной равнодействующей, если скалярное произведение главного вектора на главный момент равно нулю. В нашем случае это имеет место:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}) = F_x L_x + F_y L_y + F_z L_z = 0.$$

Выберем начало координат так, чтобы  $x_c = y_c = 0$ , т. е. чтобы ось  $z'$  проходила через центр тяжести объема. Тогда все составляющие момента будут равны нулю.

Таким образом, система сил, действующих на тело, погруженное в однородную несжимаемую жидкость, находящуюся в поле сил тяжести, статически эквивалентна одной силе, равной по величине весу жидкости в объеме тела и направленной вертикально вверх, причем линия действия этой силы проходит через центр тяжести объема тела.

## Часть III. ГИДРОМЕХАНИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

---

Будем предполагать, что жидкость идеальна, нетеплопроводна и объемные источники тепла отсутствуют. Это означает, что  $\tau_n = -np$ ,  $t_x = t_y = t_z = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Система уравнений гидромеханики идеальной нетеплопроводной жидкости была получена в главе VII (формулы (1.5)). В этих уравнениях теперь следует положить  $\varepsilon = 0$ .

### ГЛАВА X

#### ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

При определенных условиях некоторые из уравнений системы могут быть проинтегрированы. Эти условия имеют достаточно общий характер и оказываются выполненными во многих разных по характеру задачах. Полученные соотношения — интегралы системы уравнений — часто бывает более удобно использовать при исследовании задач, чем исходные уравнения.

##### § 1. АДИАБАТА

Движение жидкости называется *адиабатическим*, если жидкость не приобретает тепла извне и не отдает его. Предположения, принятые в этом разделе ( $t = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ), означают, что мы рассматриваем адиабатические движения.

Выпишем уравнение неразрывности и уравнение энергии

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Найдя  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  из (1.1) и подставив ее в (1.2), получим

$$\rho \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

Внутренняя энергия с учетом уравнения состояния может быть представлена как функция  $p$  и  $\rho$ . Принимая это во внимание, можем переписать (1.3) в виде

$$\rho \left( \frac{\partial E}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0,$$

или

$$\rho \frac{\partial E}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \left( \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho} \right) \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.4)$$

Отсюда

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\frac{p}{\rho^2} - \frac{\partial E}{\partial \rho}}{\frac{\partial E}{\partial p}}. \quad (1.5)$$

Правая часть (1.5)— известная функция  $p$  и  $\rho$ , обозначим ее через  $Q(p, \rho)$ :

$$\frac{dp}{d\rho} = Q(p, \rho). \quad (1.5')$$

Уравнение (1.5')— обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно связывает изменение давления с изменением плотности в движущейся частице, поскольку уравнение (1.5) получено из уравнения (1.4), в которое входили полные производные  $\frac{dp}{dt}$  и  $\frac{d\rho}{dt}$ . Проинтегрировав (1.5), получим

$$\mathcal{F}(p, \rho) = C. \quad (1.6)$$

Здесь  $C$ — постоянная интегрирования, сохраняющая свое значение для движущейся частицы. При переходе от одной частицы к другой значение  $C$  может изменяться. Если бы движение рассматривалось в переменных Лагранжа ( $a, b, c, t$ ), то можно было бы записать  $C = C(a, b, c)$ .

Равенство (1.6) означает, что плотность в движущейся частице является функцией одного только давления:

$$\rho = \Phi(p, C), \quad (1.6')$$

т. е. имеется баротропность для частиц. Интеграл (1.6) называется *адиабатой*.

Возможны случаи, когда постоянная  $C$ , входящая в (1.6), постоянна для некоторой совокупности частиц. Так, для

установившегося движения  $C$  имеет постоянное значение на линии тока. Действительно, при установившемся движении траектории и линии тока совпадают. Возьмем точку  $M$  на линии тока, в ней постоянны давление  $p_m$  и плотность  $\rho_m$ . Для любой частицы, прошедшей через эту точку, можно записать  $C = \mathcal{F}(p_m, \rho_m)$ . Для частиц, движущихся вдоль линии тока, проходящей через точку  $M$ , будет справедливо равенство  $\mathcal{F}(p, \rho) = \mathcal{F}(p_m, \rho_m)$ . Таким образом, для установившегося течения имеется баротропность на линии тока. Встречаются случаи движения, когда постоянная  $C$  одинакова для всех частиц жидкости, т. е. имеется баротропность во всем пространстве, занятом жидкостью.

Пример. Адиабата Пуассона. Рассмотрим газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона

$$p = \frac{R_0}{m} \rho T \quad \left( \frac{R_0}{m} = R \right). \quad (1.7)$$

Пусть  $c_v$  и  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном объеме и постоянном давлении; предполагается, что они постоянны. В этом случае внутренняя энергия

$$E = c_v T. \quad (1.8)$$

Учтем известное соотношение  $c_p - c_v = \frac{R_0}{m}$  и, выразив  $T$  из (1.7) через  $p$  и  $\rho$ , подставим  $T$  в (1.8):

$$E = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho}, \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (1.9)$$

Отношение  $c_p/c_v = k$  называют показателем адиабаты. Уравнение (1.5) при таком выражении для  $E$  примет вид

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}. \quad (1.10)$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем соотношение, которое называют *адиабатой Пуассона*:

$$p = C \rho^k. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) имеет место в частице. Постоянная  $C$  может изменяться от частицы к частице. При установившемся движении  $C$  (т. е.  $p/\rho^k$ ) постоянна на линии тока.

Замечание. Предположение о постоянстве  $c_p$  и  $c_v$ , при котором получено соотношение (1.11), справедливо в определенном диапазоне температур, зависящем от физических свойств газа. Величина показателя адиабаты  $k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}$  зависит от структуры молекул, составляющих газ: для одноатомных газов  $c_v = \frac{3}{2} R$  и  $k = \frac{5}{3}$ ; для двухатомных, когда энергию колебательного движения молекул практически можно не учитывать,  $c_v = \frac{5}{2} R$  и  $k = \frac{7}{5}$  и т. д.

## § 2. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ

Предположим, что жидкость идеальна, массовые силы консервативны, движение установившееся, имеет место баротропность на линии тока.

Так как жидкость идеальна, то уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (2.1)$$

Так как массовые силы консервативны, то

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V \quad (2.2)$$

и уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (2.3)$$

Предположение о баротропности на линии тока означает, что

$$\rho = \Phi(p, C), \quad (2.4)$$

где  $C$  постоянна на линии тока.

При установленном движении траектории и линии тока совпадают. Обозначим через  $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$  элементарное перемещение вдоль линии тока и умножим скалярно все члены (2.3) на  $d\mathbf{r}$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = -\operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Так как линия тока является и траекторией, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (2.6)$$

Кроме того,

$$\operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r} = dV, \quad \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{r} = dp. \quad (2.7)$$

Подставив (2.6) и (2.7) в (2.5), получим

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -dV - \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.8)$$

Имея в виду (2.4), введем функцию  $P(p, C)$ :

$$P(p, C) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\Phi(p, C)}. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) равенство (2.8) можно переписать в виде

$$d\left(\frac{v^2}{2} + V + P\right) = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда

$$\frac{v^2}{2} + V + P = \text{const.} \quad (2.11)$$

Равенства (2.10) и (2.11) имеют место на любой линии тока, но постоянная в правой части (2.11) может изменяться при

переходе от одной линии тока к другой. Равенство (2.11) называют *интегралом Бернулли*.

Рассмотрим интеграл Бернулли для двух важных случаев.

1. Однородная несжимаемая жидкость. В этом случае  $\rho$  — заданная постоянная и  $P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p - p_0)$ . Интеграл Бернулли примет вид

$$\frac{v^2}{2} + V + \frac{p}{\rho} = C. \quad (2.12)$$

Если массовые силы — силы тяжести, то  $V = gz$  и интеграл Бернулли в этом случае

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C, \quad (2.13)$$

или

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = C'. \quad (2.14)$$

Отдельные слагаемые в (2.14) имеют размерность длины и называются соответственно:  $\frac{v^2}{2g}$  — скоростной,  $z$  — геометрической,  $\frac{p}{\rho g}$  — пьезометрической высотами. Равенство (2.14) позволяет дать такую формулировку интеграла Бернулли: при движении однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести сумма скоростной, пьезометрической и геометрической высот постоянна вдоль линии тока.

2. Совершенный газ. В этом случае уравнение состояния есть уравнение Клапейрона  $p = \frac{R_0}{m} \rho T$ ,  $c_v = \text{const}$ . При сделанных в этой главе предположениях имеет место адиабата Пуассона (1.11). Введем новую постоянную  $D = C^{1/k}$ . Тогда

$$\frac{p}{\rho^k} = D^k, \quad \frac{1}{\rho} = D p^{-1/k}. \quad (2.15)$$

Учитывая (2.15), вычисляем  $P(p)$ :

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int D p^{-1/k} dp = D \frac{k}{k-1} p^{1-\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (2.16)$$

Подставив (2.16) в (2.11), получим интеграл Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + V + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = C. \quad (2.17)$$

Из физики известно, что производная  $\frac{dp}{d\rho}$  равна квадрату скорости звука. В случае адиабатического процесса можно убедиться, что  $a^2 = \frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}$ . Таким образом,

$$\frac{v^2}{2} + V + \frac{a^2}{k-1} = C. \quad (2.18)$$

Эта формула является одной из важных формул газовой динамики. В газовой динамике обычно массовые силы не учитывают, а постоянную  $C$  обозначают через  $i_0$ . В этом случае интеграл Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = i_0. \quad (2.19)$$

Здесь  $v$  — скорость газа,  $a$  — скорость звука в той же точке.

Чтобы определить постоянную в правой части (2.19), достаточно знать характеристики в какой-либо одной точке линии тока. Из (2.19) следует, что скорость звука и температура, а с учетом (2.15), и давление и плотность будут максимальными на линии тока в точке, где скорость равна нулю. Эти величины обычно обозначают через  $a_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  и называют параметрами аднабатически заторможенного газа (параметрами торможения). Величину  $i = \frac{a^2}{k-1} = c_p T = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$  называют энталпийей (теплосодержанием). Соответственно постоянную  $i_0$  в правой части интеграла (2.19) называют энталпийей торможения. Положив в (2.19) скорость  $v = 0$ , получим выражение для  $i_0$  через параметры заторможенного газа:

$$i_0 = \frac{a_0^2}{k-1} = \frac{k}{k-1} RT_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Может случиться, что в некоторой точке скорость газа окажется равной скорости распространения звука в данном месте, т. е.  $v = a = a_*$ . Полагая в (2.19)  $v = a = a_*$ , получаем выражение  $i_0$  через критическую скорость  $a_*$ .

$$i_0 = \frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \frac{a_*^2}{2}.$$

Соответственно интеграл Бернулли запишется в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \frac{a_*^2}{2}.$$

Из этого равенства следует: если  $v > a_*$ , то тогда  $v > a$ , т. е. поток сверхзвуковой;

если  $v < a_*$ , то  $v < a$ , т. е. поток дозвуковой. Поэтому скорость  $a_*$  и называют критической.

### § 3. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ В СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С УСЛОЖНЕННОЙ ТЕРМОДИНАМИКОЙ

В термодинамике энталпия единицы массы газа определяется выражением

$$i = E + p \frac{1}{\rho}. \quad (3.1)$$

Следовательно, при малых изменениях параметров состояния

$$di = dE + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{dp}{\rho}.$$

На основании первого начала термодинамики сумма  $dE + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$  равна притоку тепла  $dq$  к системе. Если приток тепла к системе или отвод тепла от нее отсутствует, т. е. если процесс адиабатический, то  $dq = 0$  и  $di = \frac{dp}{\rho}$ . Таким образом, для адиабатического процесса равенство (2.8) (при отсутствии массовых сил) можно записать в виде  $d\frac{v^2}{2} + di = 0$  и соответственно интеграл Бернулли — в виде

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0, \quad (3.2)$$

где  $i_0$  — значение энталпии при  $v = 0$ .

Если ввести в (3.2) выражение (3.1) для  $i$ , то будем иметь

$$\frac{v^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} = i_0.$$

Здесь  $E$  — внутренняя энергия, складывающаяся в случае многоатомного газа из энергии поступательного  $E_{\text{п}}$ , вращательного  $E_{\text{в}}$  и колебательного  $E_{\text{к}}$  движений молекул (предполагается, что нет процессов диссоциации, ионизации и др.). В газовой динамике предполагают, что газ совершиенный, а теплоемкость обычно считают постоянной, что справедливо в определенном диапазоне температур, когда можно не учитывать колебательную энергию. В этом случае для двухатомных газов (воздух обычно рассматривают как смесь кислорода и азота)  $E = E_{\text{п}} + E_{\text{в}} = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{k-1} RT$  и энталпия дается формулой (2.16), а интеграл Бернулли имеет вид (2.17) (при  $V = 0$ ). Если температуры таковы, что возбуждается и колебательная энергия  $E_{\text{к}}$ , то интеграл Бернулли надо писать в виде

$$\frac{v^2}{2} + E_{\text{п}} + E_{\text{в}} + E_{\text{к}} + \frac{p}{\rho} = i_0.$$

Для газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, колебательная энергия есть функция температуры  $T$ , но при этом теплоемкость колебательных степеней свободы, а следовательно, и  $k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{p\text{п}} + c_{p\text{в}} + c_{p\text{к}}}{c_{v\text{п}} + c_{v\text{в}} + c_{v\text{к}}}$  зависят от  $T$ .

Для двухатомного газа в предположении, что молекулы — гармонические осцилляторы, выражение для колебательной энергии имеет вид  $E_{\text{к}} = \frac{R\theta}{e^{\theta/T} - 1}$ . Величина  $\theta$ , имеющая размерность температуры и называемая часто характеристической темпера-

турой, равна  $\theta = \frac{hv}{k}$ , где  $v$  — частота колебаний,  $h$  — постоянная Планка, а  $k$  — постоянная Больцмана.

Интеграл Бернулли для двухатомного однокомпонентного газа с учетом возбуждения колебательной энергии будет иметь вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{7}{2} RT + \frac{R\theta}{e^{\theta/T} - 1} = i_0.$$

Интеграл Бернулли может быть использован и при исследовании неравновесных процессов. Чаще всего неравновесным оказывается процесс, связанный с изменением колебательной энергии, так как колебательная энергия достигает своего равновесного значения значительно медленнее, чем энергия поступательного и вращательного движений. В этом случае энергия колебательного движения  $E_k^h$  уже не будет функцией температуры, а будет новой неизвестной функцией. Интеграл Бернулли при этом записывается в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{7}{2} RT + E_k^h = i_0.$$

Для того чтобы система уравнений гидромеханики оказалась замкнутой, должно быть построено дополнительное уравнение для отыскания  $E_k^h$ . В случае, если колебательная энергия мало отклоняется от своего равновесного значения  $E_k(T)$  (т. е. рассматривается слабонеравновесный процесс), это уравнение имеет вид

$$\frac{dE_k^h}{dt} = \frac{1}{\tau} (E_k(T) - E_k^h).$$

Здесь  $E_k(T)$  — равновесное значение  $E_k$ , соответствующее данной температуре  $T$ ;  $E_k^h$  — фактическое (искомое) значение колебательной энергии. Величина  $\tau$ , имеющая размерность времени, называется временем релаксации и характеризует быстроту, с которой система приходит в состояние равновесия. Обычно величина  $\tau$  есть функция  $p$  и  $T$ . Если двухатомные молекулы можно представить как гармонические осцилляторы, то для однокомпонентного газа это уравнение справедливо и при больших отклонениях от равновесия.

#### § 4. ДВА ПРИМЕРА НА ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА БЕРНУЛЛИ

1. Истечение несжимаемой жидкости через малое отверстие. Рассмотрим истечение жидкости из сосуда через отверстие. Будем считать, что отверстие расположено вблизи дна (рис. 12). Жидкость предположим несжимаемой и находящейся в поле сил тяжести. Пусть  $S$  — площадь открытой поверхности жидкости в сосуде,  $s$  — площадь отверстия,  $H$  — уровень жидкости в сосуде.

Предполагаем, что  $s/S \ll 1$ . Когда отверстие открыто, то уровень в сосуде понижается, хотя и медленно. Возникающее течение будет неустановившимся, но медленно изменяющимся во времени ( $s/S$  мало). Это движение можно приближенно рассматривать как последовательную смену установленных движений. Такая трактовка неустановившихся движений носит название квазистационарной трактовки, или квазистационарного подхода. При таком подходе можем записать интеграл Бернулли, который для несжимаемой жидкости при  $V = gz$  для любой линии тока имеет вид (2.13).

Рассмотрим линию тока  $AB$ , проходящую через точку  $A$  поверхности  $S$  и точку  $B$  в сечении  $s$ . Записав интеграл Бернулли для точек  $A$  и  $B$  этой линии, будем иметь

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gH = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho}.$$

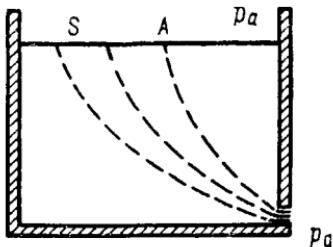


Рис. 12.

Принимая, что давление в точках  $A$  и  $B$  равно атмосферному  $p_A = p_B = p_0$ , получаем

$$\frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{v_B^2}{2}.$$

Уравнение неразрывности (постоянство расхода) приводит к соотношению

$$v_A S = v_B s.$$

Из последних двух равенств найдем скорость истечения жидкости из сосуда

$$v = v_B = \sqrt{\frac{2gH}{1 - s^2/S^2}}.$$

Так как  $s/S \ll 1$ , то можно написать

$$v \cong \sqrt{2gH}.$$

Последняя формула есть известная формула Торричелли. Скорость истечения не отличается от скорости материальной точки, падающей с высоты  $H$ .

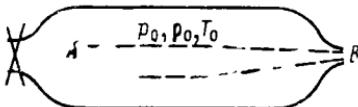


Рис. 13.

2. Истечение газа из сосуда через малое отверстие. Рассматриваем газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона, для которого справедлива адиабата Пуассона. Пусть газ вытекает в атмосферу через малое отверстие (рис. 13). В силу этого параметры газа внутри сосуда меняются мало, и можно пользоваться квазистационарным подходом. Пусть  $AB$  — линия тока, соединяющая точку  $A$  внутри сосуда с точкой  $B$  в сечении вытекаю-

щего газа. В сечении  $s$  давление  $p_B$  и температура  $T_B$  определяются из уравнения Клапейрона

щей струи. Для точек  $A$  и  $B$  можно записать адиабату Пуассона (1.11) и интеграл Бернулли (2.19):

$$\frac{p_A}{\rho_A^k} = \frac{p_B}{\rho_B^k},$$

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_A}{\rho_A} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_B}{\rho_B}.$$
(4.1)

При большом сосуде и малом отверстии  $v_A \ll v_B$  и можно принять  $v_A = 0, p_A = p_0, \rho_A = \rho_0$ . Обозначая  $v_B = v, p_B = p, \rho_B = \rho$ , получаем из интеграла Бернулли (4.1)

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right).$$
(4.2)

Из условия адиабатичности следует

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/k}.$$
(4.3)

Подставляя (4.3) в (4.2), найдем скорость истечения

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$
(4.4)

Формулы (4.3) и (4.4) дают решение задачи.

Рассмотрим полученное решение. Чтобы оно имело смысл, нужно, чтобы  $p \leq p_0$ . Введем величину  $q = \rho v$  — расход на единицу площади. Используя (4.3) и (4.4), получаем

$$q = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \xi^{\frac{2}{k}} \left[ 1 - \xi^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$
(4.5)

Формула (4.5) позволяет исследовать зависимость  $q$  от  $\xi = \frac{p}{p_0}$  или, если  $p_0$  постоянно, от  $p$  — давления среды, в которую вытекает газ. При  $\xi = 1$ , т. е.  $p = p_0$ , имеем равновесие, газ течь не будет. При уменьшении  $p$ , т. е.  $\xi$ , расход увеличивается и при некотором  $\xi = \xi^*$  достигает максимума. При дальнейшем уменьшении  $\xi$  величина  $q$  уменьшается, обращаясь в нуль при  $\xi = 0$  (рис. 14). Эксперименты подтверждают справедливость зависимости  $g(\xi)$  лишь для  $\xi > \xi^*$ . При  $\xi < \xi^*$  в действительности расход остается постоянным, равным максимальному.

Максимальное значение расхода  $q^* = q(\xi^*)$  достигается, когда скорость истечения оказывается равной скорости звука. Дальнейшее понижение давления  $p$  уже не оказывает влияния на истечение из отверстия — возмущения из внешней среды не проникают внутрь (скорость распространения возмущений — скорость звука — будет меньше скорости газа

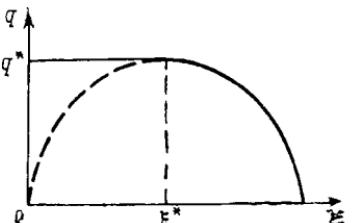


Рис. 14.

в струе). При  $\xi < \xi^*$ , когда струя становится сверхзвуковой, предположение об одномерности течения оказывается неверным, надо учитывать пространственный характер течения.

## § 5. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ФОРМЕ ГРОМЕКИ – ЛЭМБА

Выпишем уравнение Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (5.1)$$

Введем в рассмотрение оператор  $\nabla$  и скалярное произведение  $\mathbf{v} \cdot \nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla &= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{v} \cdot \nabla &= v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Применим оператор (5.2) к вектору скорости  $\mathbf{v}$ :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (5.3)$$

и используем (5.3) при записи вектора ускорения  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  в уравнении (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Легко проверить следующее тождество:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (5.5)$$

С учетом (5.5) уравнение Эйлера (5.4) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) — уравнение Эйлера в форме Громеки — Лэмба. Запишем (5.6) в проекциях на оси, используя обозначение  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) - (v_y \Omega_z - v_z \Omega_y) &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) - (v_z \Omega_x - v_x \Omega_z) &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) - (v_x \Omega_y - v_y \Omega_x) &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.6')$$

Здесь  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,

$$\boldsymbol{\Omega} = i \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (5.7)$$

Уравнения Громеки — Лэмба содержат в явном виде вектор вихря  $\Omega$ .

Существует важный класс движений, для которых  $\text{rot } \mathbf{v} = -\Omega = 0$ . Такие движения называют *безвихревыми*. Для безвихревых движений уравнения (5.6) имеют значительно более простой вид, чем исходные уравнения Эйлера.

## § 6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ, ИЛИ БЕЗВИХРЕВЫЕ, ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим безвихревые движения, т. е. движения, для которых

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (6.1)$$

или в проекциях на оси координат

$$\Omega_x \equiv \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$

$$\Omega_y \equiv \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad (6.1')$$

$$\Omega_z \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

При выполнении условий (6.1), как известно, линейная дифференциальная форма  $v_x dx + v_y dy + v_z dz$  будет полным дифференциалом некоторой функции  $\varphi$  для любого фиксированного момента времени. Иначе говоря, существует такая функция  $\varphi(x, y, z, t)$ , для которой полный дифференциал при постоянном  $t$  вычисляется по формуле

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Но поскольку

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

то, следовательно,

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (6.2)$$

т. е. компоненты скорости есть частные производные от функции  $\varphi(x, y, z, t)$  по координатам. Функцию  $\varphi$  называют *потенциалом скоростей*, а безвихревые движения называют *потенциальными*. Для установившихся движений  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . Равенства (6.2) равносильны векторному равенству

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi,$$

которое следует и непосредственно из (6.1).

## § 7. ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА

Сделаем предположения: 1) жидкость идеальна; 2) имеется баротропность во всем пространстве, занятом жидкостью, т. е.  $\rho = \Phi(p)$ ; 3) массовые силы консервативны; 4) движение безвихревое.

Для безвихревого движения идеальной жидкости уравнение (5.6) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (7.1)$$

Так как жидкость баротропна, то может быть введена функция

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{\Phi(p)}; \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P. \quad (7.3)$$

Предположение 3) означает, что

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V. \quad (7.4)$$

Из предположения 4) следует, что

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7.5)$$

Подставив (7.3), (7.4), (7.5) в (7.1), получим

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P \right) = 0. \quad (7.6)$$

Из равенства (7.6) следует, что выражение в скобках не зависит от координат, но может зависеть от времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P = f(t). \quad (7.7)$$

Полученное соотношение носит название *интеграла Лагранжа*. Интеграл Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + V + P(p) = f(t). \quad (7.8)$$

Предположим, что мы нашли  $\varphi(x, y, z, t)$  и что функция  $f(t)$  известна. Тогда из (7.8) можно найти давление  $p$ , а затем и  $\rho = \Phi(p)$ .

Функцию  $f(t)$ , входящую в правую часть (7.8), можно считать равной нулю, так как потенциал скоростей определяется с точностью до функции времени. Действительно, если  $\varphi(x, y, z, t)$  — потенциал скоростей, то любая функция вида  $\varphi' = \varphi + S(t)$  также есть потенциал скоростей ( $\operatorname{grad} \varphi' = \operatorname{grad} \varphi$ ). Пользуясь этим, можно ввести функцию  $\tilde{\varphi}$  так, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(t) = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \int_0^t f(t) dt.$$

Интеграл Лагранжа запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P(p) = 0.$$

Сравним интеграл Лагранжа и интеграл Бернулли. Как мы видели, уравнение Эйлера при соответствующих условиях приводит к этим интегралам. Интеграл Лагранжа в некотором смысле более общий, чем интеграл Бернулли, так как годится и для неустановившихся движений. Но он менее общий в том смысле, что требует безвихревого движения и полной баротропности (в интеграле Бернулли достаточно баротропности только на линии тока). Область действия этих интегралов разная.

### § 8. ИНТЕГРАЛ ЭЙЛЕРА — БЕРНУЛЛИ

Предположим, что жидкость идеальна, баротропна, массовые силы имеют потенциал, движение безвихревое и установившееся. Первые четыре предположения позволяют написать интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P = f(t). \quad (8.1)$$

Так как движение установившееся, то  $v_x, v_y, v_z$ , а следовательно, и  $\Phi$  не зависят от времени, т. е.  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ . Тогда  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  выпадает из (8.1), и  $f(t)$  переходит в постоянную. Имеем

$$\frac{v^2}{2} + V + P = C. \quad (8.2)$$

Интеграл (8.2) носит название *интеграла Эйлера — Бернулли*. Здесь постоянная  $C$  одна и та же для всего потока в отличие от интеграла Бернулли, в котором постоянная  $C$  на разных линиях тока различна.

### § 9. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ

1. Несжимаемая жидкость. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Так как движение потенциально, то

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Подставляя  $v_x, v_y, v_z$  в уравнение неразрывности, получаем уравнение для потенциала скоростей несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнение для  $\Phi$  есть *уравнение Лапласа*.

2. Сжимаемая жидкость. Рассматриваем безвихревое движение идеальной баротропной жидкости. Считаем, что массовые силы отсутствуют. В силу этих предположений можем написать

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi; \quad (9.1)$$

$$\rho = \Phi(p); \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\Phi(p)} = 0. \quad (9.3)$$

Интеграл Лагранжа (9.3) заменяет уравнение Эйлера. К уравнениям (9.1), (9.2), (9.3) следует присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (9.4)$$

Наша задача — получить уравнение для потенциала скоростей  $\varphi$ .

Из (9.1) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (9.5)$$

Из (9.2), вводя скорость звука  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ , получаем

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{d\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt}. \quad (9.6)$$

Уравнение неразрывности (9.4) согласно (9.5) и (9.6) можно переписать в виде

$$\Delta \varphi + \frac{1}{a^2} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (9.7)$$

Из интеграла Лагранжа (9.3) следует

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right). \quad (9.8)$$

Подставим (9.8) в (9.7). С учетом равенства  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f$  будем иметь

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (9.9)$$

Здесь

$$v^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\Phi'(p)}. \quad (9.10)$$

Из (9.3) следует, что  $\rho$  есть функция суммы  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right)$ . Следовательно,  $a^2$  есть функция производных от  $\varphi$ . Таким образом, уравнение (9.9) есть уравнение для потенциала скоростей  $\varphi$ .

Введем в (9.9) выражение (9.10) для  $v^2$ . Окончательно будем иметь

$$\Delta\phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial t} = 0. \quad (9.11)$$

Частные производные второго порядка в уравнение (9.11) входят линейно, коэффициенты при них зависят от производных первого порядка. Уравнения, линейные относительно старших производных, называются квазилинейными. Уравнение (9.11) служит для нахождения  $\phi$ . После того как  $\phi$  найдено, из (9.3) найдем  $p$ , а затем  $p = \Phi(p)$ .

Предположим, что движение установившееся. В этом случае  $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$  и уравнение (9.11) для потенциала  $\phi$  принимает вид

$$\Delta\phi - \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (9.12)$$

Введем обозначение

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

и перепишем уравнение (9.12) в виде

$$\sum_{i,j=1}^3 \left( \delta_{ij} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

или

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (9.13)$$

Обозначим определитель, составленный из коэффициентов  $a_{ij}$ , через  $D = \det \|a_{ij}\|$ . В зависимости от знака  $D$  различают три типа уравнений (9.13): эллиптические уравнения, если  $D > 0$ ; гиперболические уравнения, если  $D < 0$ ; параболические, если  $D = 0$ . Непосредственно можно убедиться, что в нашем случае определитель  $D$  оказывается равным

$$D = 1 - M^2, \quad M^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{v^2}{a^2}. \quad (9.14)$$

Таким образом, уравнения являются эллиптическими, если  $M < 1$ , т. е.  $v < a$ , — скорость потока меньше скорости звука; уравнения гиперболические, если  $M > 1$ , т. е.  $v > a$ , — скорость потока больше скорости звука.

Частный случай. Рассмотрим задачу о распространении малых возмущений в сжимаемой жидкости. Пусть эти возмущения

возникают в находящемся в равновесии покоящемся газе. Обозначим через  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $a_0$ , где  $a_0^2 = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0}$ , параметры газа при  $v = 0$ . Гидродинамические величины можно в этом случае записать в виде

$$v = v', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (9.15)$$

где  $v'$ ,  $p'$ ,  $\rho'$  — малые возмущения скорости, давления и плотности. Так как рассматривается потенциальное движение, то  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал возмущенного движения ( $\mathbf{v} = v' = \operatorname{grad} \varphi$ ). Отбрасывая в уравнении (9.11) члены, содержащие малые величины в степени выше первой, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (9.16)$$

Уравнение (9.16) — классическое волновое уравнение. Величина  $a_0$  — скорость распространения звука в покоящемся газе. Найдя  $\varphi$  из решения (9.16), определим скорость  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . Определим давление, используя интеграл Лагранжа:

$$p' = p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9.17)$$

Так как жидкость баротропна, то  $\rho = \Phi(p)$ , и можно найти  $\rho'$ :

$$\rho' = \rho - \rho_0 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{p=p_0} (p - p_0) = \frac{1}{a_0^2} p'. \quad (9.18)$$

Давление и плотность также удовлетворяют волновому уравнению. В этом нетрудно убедиться, дифференцируя (9.16) по  $t$  и используя формулы (9.17) и (9.18). Заметим, что волновое уравнение для  $p$  и  $\rho$  можно получить непосредственно из системы уравнений идеальной сжимаемой жидкости. Подставив в систему соотношения (9.15) и исключив из уравнений, например,  $v'$  и  $p'$ , получим волновое уравнение для  $\rho'$ .

Волновое уравнение (9.16) описывает распространение возмущений со скоростью  $a_0$ . Проще всего в этом убедиться, рассматривая частные решения уравнения, зависящие только от  $x$  и  $t$ . В этом случае (9.16) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (9.19)$$

Общее решение уравнения (9.19)

$$\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t) \quad (9.20)$$

( $f_1$ ,  $f_2$  — произвольные функции) описывает распространение двух волн, движущихся в противоположных направлениях со скоростью  $a_0$ . Таким образом, скорость звука можно интерпретировать как скорость распространения малых возмущений в покоящемся газе. Законы распространения звука в движущейся и покоящейся средах изучает акустика.

## ГЛАВА XI

### ОБОБЩЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В данной главе рассматривается задача о течении газа в трубе, поперечное сечение которой  $F(x)$  меняется медленно вдоль оси трубы  $x$ . В этом случае можно построить приближенное решение указанной задачи, используя тот факт, что составляющая скорости  $v_x$  изменяется мало по сечению трубы и поперечные ускорения  $\frac{dv_y}{dt}$ ,  $\frac{dv_z}{dt}$  малы.

#### § 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Выпишем систему уравнений, считая, что жидкость баротропна и массовые силы отсутствуют:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (1.1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (1.2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.4)$$

$$\rho = \Phi(p). \quad (1.5)$$

Предположим, что поперечными ускорениями  $\frac{dv_y}{dt}$ ,  $\frac{dv_z}{dt}$  можно пренебречь по сравнению с  $\frac{dv_x}{dt}$ . Тогда из формул (1.2), (1.3), если в них положить  $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0$ , получим приближенные равенства

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Из равенств (1.6) следует, что давление  $p$ , а из (1.5), что и плотность  $\rho$  зависят только от  $x$  и  $t$ , т. е.

$$p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t). \quad (1.7)$$

Предположим, что  $v_x$  также есть функция только  $x$  и  $t$ , т. е. что оставшимся уравнениям можно удовлетворить, положив

$$v_x = v_x(x, t). \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.1)–(1.5) в силу (1.7) и (1.8) примет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0; \quad (1.10)$$

$$\rho = \Phi(p). \quad (1.11)$$

В этой системе три уравнения и пять неизвестных функций. Преобразуем уравнение (1.10) так, чтобы из него ис消ели  $v_y$  и  $v_z$ , и тем самым получим систему трех уравнений для определения интересующих нас величин (1.7) и (1.8).

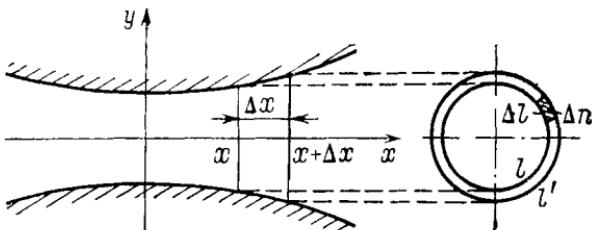


Рис. 15.

Проинтегрируем уравнение (1.10) по поперечному сечению трубы  $F$ :

$$\iint_F \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] dS = 0. \quad (1.12)$$

Три первых слагаемых не зависят от  $y$  и  $z$ , поэтому (1.12) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) F + \iint_F \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dS = 0. \quad (1.13)$$

Преобразуем интеграл в формуле (1.13). Учитывая, что  $\rho$  постоянно по сечению:  $\rho = \rho(x, t)$ , и вводя вектор поперечной скорости  $u = v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ , получаем

$$\iint_F \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dS = \rho \iint_F \operatorname{div} u \, dS = \rho \oint_l u_n \, dl. \quad (1.14)$$

Перемещение частиц за время  $\Delta t$  можно представить как сумму перемещения вдоль оси  $x$  на расстояние  $\Delta x = v_x \Delta t$  и перемещения в поперечной плоскости  $u \Delta t$  (рис. 15). Частицы с контура  $l$  перейдут на контур  $l'$ . Расстояние по нормали от  $l$  до  $l'$  равно  $\Delta n = u_n \Delta t$ . Изменение площади равно площади кольца

$$\Delta F \cong \oint_l \Delta n \, dl \cong \Delta t \oint_l u_n \, dl, \quad \oint_l u_n \, dl = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{dF}{dt}. \quad (1.15)$$

Заменяя в (1.13) согласно (1.14) двойной интеграл криволинейным и учитывая (1.15), получаем

$$F \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \rho \frac{dF}{dt} = 0. \quad (1.16)$$

Считая, что труба не деформируется, т. е.  $\frac{dF}{dt} = v_x \frac{\partial F}{\partial x}$ , запишем (1.16) в виде

$$F \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \rho v_x \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (1.17)$$

Отсюда окончательно получим

$$F \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x F) = 0. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.18), (1.9) и (1.11) образуют систему уравнений для отыскания  $v_x$ ,  $\rho$ ,  $p$ . Для установившихся течений эта система приобретает вид

$$\frac{d}{dx} (\rho v_x F) = 0, \quad v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0, \quad \rho = \Phi(p). \quad (1.19)$$

Уравнения (1.19) могут быть легко проинтегрированы. Решение задачи об одномерном установившемся движении жидкости получим в виде

$$\rho F v_x = C_1, \quad \frac{v_x^2}{2} + \int \frac{dp}{\Phi(p)} = C_2, \quad \rho = \Phi(p). \quad (1.20)$$

Второе уравнение в (1.20) есть запись интеграла Бернулли для полученного приближенного решения задачи. Пренебрежение поперечными ускорениями, принятное вначале, равносильно тому, что в выражении для  $v^2$  мы пренебрегаем величиной  $v_y^2 + v_z^2$  по сравнению с  $v_x^2$ .

Так, например, если взять трубу с углом полураствора  $\alpha$ , таким, что  $\operatorname{tg} \alpha < 0,1$ , то  $(v_y^2 + v_z^2)/v_x^2 < 0,01$ , т. е. указанное рассмотрение дает точность порядка одного процента.

## § 2. ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Площадь  $F = F(x)$  задана. Решение имеет вид

$$v_x F = A, \quad \frac{v_x^2}{2} + \frac{p}{\rho} = B, \quad \rho = \rho_0. \quad (2.1)$$

Отсюда

$$v_x = \frac{A}{F}, \quad p = \rho \left( B - \frac{v_x^2}{2} \right) = \rho \left( B - \frac{A^2}{2F^2} \right). \quad (2.2)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются по заданным характеристикам в некотором сечении. Так, при  $x = x_0$  ( $F(x) = F(x_0) = F_0$ )

должны быть заданы  $v_x|_{x=x_0} = v_x^0$ ,  $p|_{x=x_0} = p_0$ . Вместо скорости можно задать расход  $Q = \rho_0 v_x^0 F_0$ . Из решения видно, что с увеличением сечения  $F$  скорость  $v_x$  убывает, давление возрастает.

### § 3. ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. СОПЛО ЛАВАЛЯ

Формулы (1.20) дают общее решение задачи. Постоянные, содержащиеся в этом решении, находятся по данным гидродинамическим элементам в некотором сечении. Постоянная  $C_1 = Q - \text{расход жидкости}$ . Из (1.20) все интересующие нас величины  $v_x$ ,  $p$ ,  $\rho$  могут быть найдены в любом сечении  $F = F(x)$ . Решение закончено. Однако здесь интересно исследовать характер течения. Для этого прологарифмируем и затем проинтегрируем первое равенство из (1.20), а второе равенство запишем в дифференциальном виде. Тогда будем иметь

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dv_x}{v_x} + \frac{dF}{F} = 0; \quad (3.1)$$

$$v_x \, dv_x + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (3.2)$$

Используя соотношение  $\rho = \Phi(p)$ , можем найти  $\frac{dp}{dp}$ . Известно, что  $\frac{dp}{dp} = a^2$  — квадрат скорости звука. Подставляя  $dp = a^2 dp$  в уравнение (3.2), получаем

$$a^2 \frac{dp}{\rho} = -v_x \, dv_x, \quad \frac{dp}{\rho} = -\frac{v_x}{a^2} \, dv_x. \quad (3.3)$$

Равенство (3.1) с учетом (3.3) можно переписать в виде

$$\left( \frac{v_x^2}{a^2} - 1 \right) \frac{dv_x}{v_x} = \frac{dF}{F}. \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) позволяет сделать ряд выводов. Будем для определенности считать  $v_x > 0$ . Знак скобки в (3.4) зависит от того, с каким течением мы имеем дело.

1. Пусть  $M = \frac{v_x}{a} < 1$ , т. е.  $v_x < a$  — скорость течения меньше скорости звука. Тогда если площадь  $F$  уменьшается,  $dF < 0$ , то  $dv_x > 0$  — скорость увеличивается. Если  $dF > 0$  — сечение увеличивается, то  $dv_x < 0$  — скорость уменьшается.

2. Пусть  $M = \frac{v_x}{a} > 1$ , т. е.  $v_x > a$  — скорость потока больше скорости звука. В этом случае если  $dF < 0$ , то и  $dv_x < 0$ , т. е. с уменьшением сечения уменьшается скорость. Если  $dF > 0$ , то и  $dv_x > 0$  — увеличение сечения ведет к увеличению скорости.

Таким образом, в дозвуковом потоке, как и в несжимаемой жидкости, уменьшение сечения ведет к увеличению скорости, и

наоборот. В сверхзвуковом потоке скорость увеличивается, если растет площадь сечения. Если скорость в потоке равна скорости звука ( $v_x = a$ ), то из (3.4) следует, что  $dF = 0$ , т. е. это возможно лишь в сечении, где  $F(x)$  имеет экстремум. С этими рассуждениями связана гидродинамика сопла Лаваля — трубы, которая служит для перевода дозвукового потока, т. е. потока с малой скоростью, в сверхзвуковой поток. Чтобы получить переход от дозвукового потока к сверхзвуковому, труба должна иметь суживающуюся (конфузорную) часть, в которой скорость потока увеличивается до скорости звука в минимальном сечении, и затем расширяющуюся, в которой мог бы ускоряться сверхзвуковой поток. В минимальном сечении  $v_x = a$ , т. е.  $M = 1$ . Скорость потока, равную скорости звука в данном месте, называют критической.

## ПЛОСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Течение называется *плоским*, если все частицы движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц в соответствующих точках плоскостей, параллельных этой фиксированной плоскости, одинаковы по величине и направлению. Очевидно, в этом случае достаточно рассмотреть течение в одной плоскости, которую можно принять за плоскость  $(x, y)$ . При таком выборе системы координат все величины будут зависеть только от координат  $x, y$ . Это означает, что  $v_z = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Так как течение предполагается установившимся, то  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Следует иметь в виду, что, говоря о течении в плоскости, мы фактически рассматриваем течение в слое между плоскостью  $(x, y)$  и ей параллельной. Так, например, обтеканию контура в плоскости  $(x, y)$  соответствует в пространстве обтекание цилиндра, для которого контур в плоскости  $(x, y)$  является направляющей.

### § 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Так как жидкость несжимаема, то плотность постоянна и должна быть известна:  $\rho = \rho_0$ . Искомые функции

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad p = p(x, y), \quad E = E(x, y). \quad (1.1)$$

Уравнениями плоской задачи являются уравнение неразрывности, уравнения Эйлера в проекциях на оси  $x$  и  $y$  и уравнение энергии. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.2)$$

Будем считать, что массовые силы консервативны или отсутствуют. Тогда при предположениях, сделанных в данной главе, справедлив интеграл Эйлера — Бернулли. Поэтому вместо уравнений Эйлера используем условие отсутствия вихря и интеграл Эйлера — Бернулли.

Условие отсутствия вихря  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  для плоского движения, когда  $\Omega = k\Omega_z$ , приводит к равенству

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

Интеграл Эйлера — Бернулли имеет вид

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{p}{\rho} + V = C. \quad (1.4)$$

Уравнение энергии для несжимаемой жидкости, если нет притока тепла, дает

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (1.5)$$

т. е. для несжимаемой жидкости энергия в частице сохраняется.

Уравнения (1.2), (1.3) содержат лишь функции  $v_x$  и  $v_y$ . Уравнение (1.4) может быть использовано для нахождения давления, если известны скорости  $v_x$  и  $v_y$ .

## § 2. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ

Условие отсутствия вихря имеет вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

вследствие чего существует функция  $\varphi(x, y)$ , такая, что

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy; \quad (2.2)$$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Потенциал скоростей несжимаемой жидкости, как уже было показано и ранее, в силу уравнения неразрывности (1.2) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) должно удовлетворять граничным условиям. В случае обтекания тел однородным безграничным потоком решение должно быть таким, чтобы на бесконечности скорость потока была равна заданной величине  $v_\infty$ , а на поверхности  $S$  тела было удовлетворено условие обтекания, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_\infty = v_\infty x, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_\infty = v_\infty y, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (2.5)$$

Задача нахождения решения уравнения Лапласа по заданному значению нормальной производной на границе называется *задачей Неймана*. В случае, если область бесконечна, имеем внешнюю задачу Неймана с граничными условиями в виде (2.5).

## § 3. ФУНКЦИЯ ТОКА

Из уравнения неразрывности (1.2) следует

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) — условие того, что дифференциальная форма  $v_x dy - v_y dx$  есть полный дифференциал некоторой функции  $\psi(x, y)$

$$v_x dy - v_y dx = d\psi \quad (3.2)$$

и, следовательно,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Для плоских течений несжимаемой жидкости (вихревых и безвихревых) в силу (3.1) всегда существует функция  $\psi$ .

Выпишем уравнение линий тока для плоского случая:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.5) и (3.2), видим, что вдоль линии тока

$$d\psi = 0, \quad \psi = \text{const}. \quad (3.6)$$

Функцию  $\psi(x, y)$  называют *функцией тока*. Равенство  $\psi(x, y) = \text{const}$  дает уравнение линии тока. Различные значения постоянной соответствуют разным линиям тока. Через функцию тока может быть вычислен расход жидкости, протекающей через кривую  $AB$  (через кусок цилиндрической поверхности высотой  $\Delta z = 1$  с направляющей  $AB$ ). Расход через кривую  $AB$

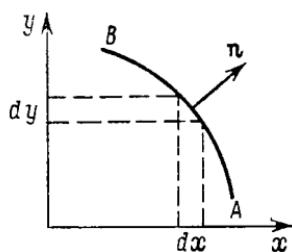


Рис. 16.

$$Q = \int_A^B v_n ds = \int_A^B [v_x \cos(\hat{n}, x) + v_y \cos(\hat{n}, y)] ds. \quad (3.7)$$

Если  $dx, dy$  — проекции элемента кривой  $ds$ , то очевидно (рис. 16)

$$\cos(\hat{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\hat{n}, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.7) и вычисляя интеграл, получаем

$$Q = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (3.9)$$

т. е. расход жидкости через кривую равен разности значений функции тока в концах этой кривой.

Для плоского течения имеется простая связь между функцией тока и вихрем скорости

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi. \quad (3.10)$$

Если движение безвихревое ( $\Omega = 0$ ), то  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) служит для нахождения функции  $\psi$  при соответствующих граничных условиях. Пусть жидкость обтекает непроницаемую поверхность тела. На этой поверхности  $v_n = 0$ . Запишем это условие через функцию  $\psi$ , используя (3.3) и (3.8):

$$v_n = v_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}. \quad (3.12)$$

Получаем, что на контуре тела должно быть выполнено условие  $\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_s = 0$ , т. е.  $\psi|_s = \text{const}$  — функция тока — сохраняет постоянное значение на  $s$ . Это означает, что граница тела должна быть линией тока. Физически это очевидно.

Таким образом, в случае безвихревого движения функция тока  $\psi$  может быть найдена как решение уравнения Лапласа (3.11), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности и на поверхности тела:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_\infty = -v_\infty y, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_\infty = v_\infty x, \quad \psi(x, y)|_s = C. \quad (3.13)$$

Задача отыскания решения уравнения Лапласа по заданному значению функции на границе называется *задачей Дирихле*. Для внешней задачи Дирихле условия имеют вид (3.13).

Обратим внимание еще раз на то, что если потенциал скоростей существует только когда движение безвихревое, то функция тока существует всегда. При безвихревом движении функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

#### § 4. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И КОМПЛЕКСНАЯ СКОРОСТЬ

Мы получили выражения (2.3) и (3.3) для проекций скорости через производные от функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Сравнивая (2.3) и (3.3), получаем уравнения связи между потенциалом скоростей и функцией тока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Это известные из теории функций комплексного переменного условия Коши — Римана, которые гарантируют, что функция

$$w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Равенство (3.1) — условие того, что дифференциальная форма  $v_x dy - v_y dx$  есть полный дифференциал некоторой функции  $\psi(x, y)$

$$v_x dy - v_y dx = d\psi \quad (3.2)$$

и, следовательно,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Для плоских течений несжимаемой жидкости (вихревых и безвихревых) в силу (3.1) всегда существует функция  $\psi$ .

Выпишем уравнение линий тока для плоского случая:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.5) и (3.2), видим, что вдоль линии тока

$$d\psi = 0, \quad \psi = \text{const}. \quad (3.6)$$

Функцию  $\psi(x, y)$  называют *функцией тока*. Равенство  $\psi(x, y) = \text{const}$  дает уравнение линии тока. Различные значения по-

стоянной соответствуют разным линиям тока. Через функцию тока может быть вычислен расход жидкости, протекающей через кривую  $AB$  (через кусок цилиндрической поверхности высотой  $\Delta z = 1$  с направляющей  $AB$ ). Расход через кривую  $AB$

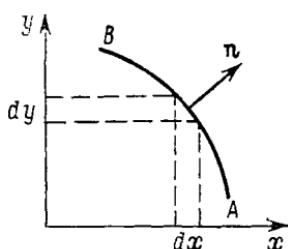


Рис. 16.

$$Q = \int_A^B v_n ds = \int_A^B [v_x \cos(\hat{n}, x) + v_y \cos(\hat{n}, y)] ds. \quad (3.7)$$

Если  $dx, dy$  — проекции элемента кривой  $ds$ , то очевидно (рис. 16)

$$\cos(\hat{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\hat{n}, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.7) и вычисляя интеграл, получаем

$$Q = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (3.9)$$

т. е. расход жидкости через кривую равен разности значений функции тока в концах этой кривой.

Для плоского течения имеется простая связь между функцией тока и вихрем скорости

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi. \quad (3.10)$$

Если движение безвихревое ( $\Omega = 0$ ), то  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) служит для нахождения функции  $\psi$  при соответствующих граничных условиях. Пусть жидкость обтекает непроницаемую поверхность тела. На этой поверхности  $v_n = 0$ . Запишем это условие через функцию  $\psi$ , используя (3.3) и (3.8):

$$v_n = v_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}. \quad (3.12)$$

Получаем, что на контуре тела должно быть выполнено условие  $\frac{\partial \psi}{\partial s}|_s = 0$ , т. е.  $\psi|_s = \text{const}$  — функция тока — сохраняет постоянное значение на  $s$ . Это означает, что граница тела должна быть линией тока. Физически это очевидно.

Таким образом, в случае безвихревого движения функция тока  $\psi$  может быть найдена как решение уравнения Лапласа (3.11), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности и на поверхности тела:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_\infty = -v_\infty y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}|_\infty = v_\infty x, \quad \psi(x, y)|_s = C. \quad (3.13)$$

Задача отыскания решения уравнения Лапласа по заданному значению функции на границе называется *задачей Дирихле*. Для внешней задачи Дирихле условия имеют вид (3.13).

Обратим внимание еще раз на то, что если потенциал скоростей существует только когда движение безвихревое, то функция тока существует всегда. При безвихревом движении функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

#### § 4. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И КОМПЛЕКСНАЯ СКОРОСТЬ

Мы получили выражения (2.3) и (3.3) для проекций скорости через производные от функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Сравнивая (2.3) и (3.3), получаем уравнения связи между потенциалом скоростей и функцией тока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Это известные из теории функций комплексного переменного условия Коши — Римана, которые гарантируют, что функция

$$w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Пример 3.

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \quad (5.1)$$

где  $q$  вещественно.

Рассмотрение этого примера удобнее вести в полярных координатах  $r, \theta$ :

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta = \arg z,$$

$$\omega(z) = \varphi + i\psi = \frac{q}{2\pi} (\ln r + i\theta),$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta.$$

Линии тока  $\psi = \text{const}$  будут лучами, выходящими из начала координат. Линии равного потенциала  $\varphi = \text{const}$  есть окружности  $r = \text{const}$  (рис. 18).

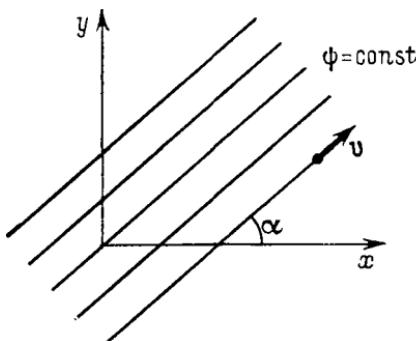


Рис. 17.

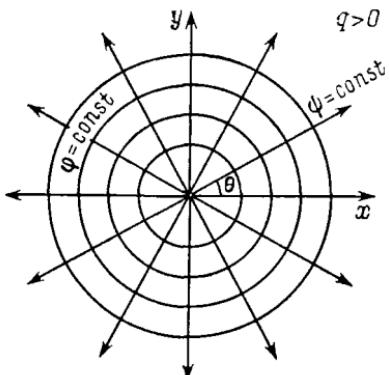


Рис. 18.

Замечание о вычислении скоростей потенциального потока в криволинейных координатах. Пусть имеется потенциал скоростей  $\varphi$ . Тогда

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi,$$

$$\begin{aligned} v_l = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}) &= v_x \cos(\hat{l}, \hat{x}) + v_y \cos(\hat{l}, \hat{y}) + v_z \cos(\hat{l}, \hat{z}) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\hat{l}, \hat{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\hat{l}, \hat{y}) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\hat{l}, \hat{z}) = \frac{\partial \varphi}{\partial l}. \end{aligned}$$

Пусть  $q_1, q_2, q_3$  — криволинейные ортогональные координаты. Элементы дуг  $ds_i$ , соответствующие приращению координаты  $q_i$ , равны  $ds_i = H_i dq_i$ , где  $H_i$  — коэффициенты Ламе. Проекции скоростей вычисляются по формулам  $v_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$ .

Для цилиндрических координат  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = z$  коэффициенты Ламе равны  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ ,  $H_3 = 1$  и проекции скоростей запишутся в виде

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial s_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Вернемся к рассмотрению течения, определяемого комплексным потенциалом  $w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z$ . Проекции скоростей на оси полярных координат будут

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость постоянна по величине на каждой окружности с центром в начале координат, направлена по радиусу и убывает с ростом расстояния  $r$ . При  $q > 0$  скорость направлена от центра ( $v_r > 0$ ), при  $q < 0$  — к центру ( $v_r < 0$ ). Формула (5.1) дает комплексный потенциал течения от источника (стока), расположенного в начале координат.

Выясним смысл величины  $q$ . Подсчитаем расход жидкости  $Q$  через контур, охватывающий начало координат. Записывая интеграл по замкнутому контуру как интеграл от  $A$  до  $B$ , где  $A$  и  $B$  — совпадающие точки контура, получим

$$Q = \oint_A^B v_n ds = \int_A^B d\psi = \Psi_B - \Psi_A = \frac{q}{2\pi} 2\pi = q.$$

Таким образом,  $q$  — обильность источника. При  $q > 0$  имеем источник, при  $q < 0$  — сток (источник отрицательной обильности). Если источник расположен не в начале координат, а в точке  $z = a$ , то комплексный потенциал будет иметь вид

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - a).$$

Пример 4. Пусть в точке  $A$  плоскости  $(x, y)$  расположены источник обильности  $q$ , в точке  $B$  — источник обильности  $-q$  (сток), причем комплексные координаты точек (рис. 19)

$$z_A = \frac{l}{2} e^{ia}, \quad z_B = -\frac{l}{2} e^{ia}.$$

Комплексный потенциал течения, вызываемого каждым из источников, имеет вид

$$w_A(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \left( z - \frac{l}{2} e^{ia} \right),$$

$$w_B(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln \left( z + \frac{l}{2} e^{ia} \right).$$

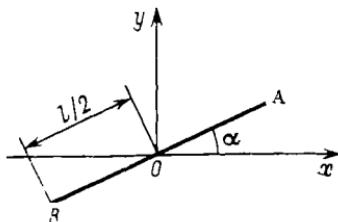


Рис. 19.

## Комплексный потенциал суммарного течения

$$w(z) = w_A(z) + w_B(z),$$

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - \frac{l}{2} e^{ia}}{z + \frac{l}{2} e^{ia}}.$$

Предположим, мы рассматриваем такую точку  $z$ , что  $|z| \gg l$ . Тогда, раскладывая логарифмы в ряды по  $\frac{l}{z}$ , получаем

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1 - \frac{l}{2z} e^{ia}}{1 + \frac{l}{2z} e^{ia}} = \frac{q}{2\pi} \left( -\frac{l}{2z} e^{ia} - \frac{l}{2z} e^{ia} + \dots \right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \frac{l}{z} e^{ia} + \dots \end{aligned}$$

Пусть  $l \rightarrow 0$ , а обильность  $q \rightarrow \infty$ , причем так, чтобы произведение  $ql$  оставалось постоянным:  $ql = M$ . Тогда для такого предельного течения комплексный потенциал будет иметь вид

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} e^{ia}. \quad (5.2)$$

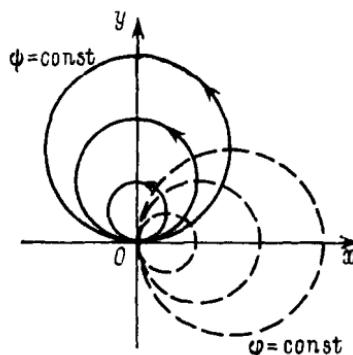


Рис. 20.

Формула (5.2) дает комплексный потенциал течения от расположенного в начале координат диполя с моментом  $M$  и осью диполя, образующей угол  $\alpha$  с осью  $x$ . Ось диполя принято направлять от стока к источнику.

Изучим картину течения от диполя. Не уменьшая общности, положим  $\alpha = 0$ , т. е. рассмотрим диполь,

расположенный в начале координат, ось которого совпадает с осью  $Ox$  (рис. 20). Функции  $w(z)$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \varphi + i\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Линии тока  $\psi = \text{const}$  есть линии, на которых

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2c}, \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Линии тока — окружности, проходящие через начало координат, центры которых лежат на оси  $y$ . Аналогично линии равного потенциала  $\varphi = \text{const}$  — окружности  $(x - \tilde{c})^2 + y^2 = \tilde{c}^2$ , проходящие через начало координат с центрами на оси  $x$ . Скорости

легко вычислить, имея (5.3). Если  $\alpha \neq 0$ , то вся картина поворачивается на угол  $\alpha$ . Если диполь расположен в точке  $z = a$ , то  $w(z) = -\frac{M}{2\pi} e^{ia} \frac{1}{z-a}$ .

Пример 5.

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (5.4)$$

В полярных координатах

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln r + i\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Линии тока  $\psi = \text{const}$  есть окружности с центром в начале координат, линии  $\varphi = \text{const}$  есть лучи  $\theta = \text{const}$  (рис. 21).

Частицы жидкости перемещаются по окружностям со скоростями

$$v_\theta = v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Начало координат  $r=0$  (центр окружностей) является особой точкой. Скорость  $v_\theta > 0$  при  $\Gamma > 0$ , т. е. положительному значению циркуляции соответствует движение по окружности против часовой стрелки. Иногда говорят о «направлении циркуляции», понимая под этим направление движения жидкости ( $\Gamma > 0$  — против часовой стрелки,  $\Gamma < 0$  — по часовой).

Установим смысл величины  $\Gamma$ . Возьмем контур  $l$ , охватывающий начало координат, и вычислим циркуляцию скорости  $\gamma$  по этому контуру:

$$\gamma = \oint v_s ds = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \oint d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \Gamma.$$

Таким образом  $\Gamma$  — циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему начало координат.

Течение, определяемое (5.4), есть течение от вихря. Если вихрь расположен в точке  $z = a$ , то комплексный потенциал  $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-a)$ .

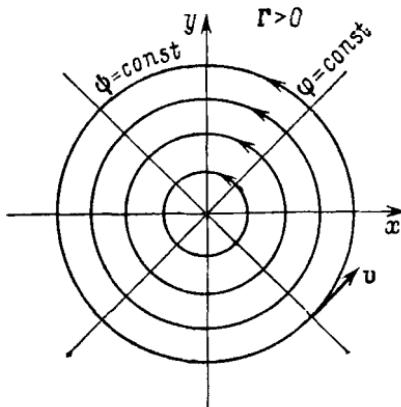


Рис. 21.

Пример 6. Рассмотрим течение, вызываемое присутствием в начале координат источника и вихря:

$$w_1(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \quad w_2(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

$$w(z) = w_1 + w_2 = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (5.5)$$

Течение, описываемое комплексным потенциалом (5.5), называется течением от вихреисточника. Найдем линии тока в этом течении:

$$\varphi + i\psi = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta),$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (q \ln r + \Gamma \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (q\theta - \Gamma \ln r).$$

Линии тока  $\psi = \text{const}$  есть линии тока, на которых  $q\theta - \Gamma \ln r = \text{const}$ . Обозначим постоянную через  $\Gamma \ln c$ ; тогда

$$q\theta = \Gamma \ln \frac{r}{c}, \quad r = ce^{\frac{q}{\Gamma} \theta}.$$

Линии тока — логарифмические спирали. Линии  $\varphi = \text{const}$  — также логарифмические спирали, ортогональные к линиям  $\psi = \text{const}$ . Если вихреисточник расположен в точке  $a$ , то

$$w(z) = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - a).$$

## § 6. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Пусть круговой цилиндр радиуса  $R$  движется со скоростью  $\mathbf{U}$  в потоке жидкости, имеющем на бесконечности заданную скорость  $\mathbf{V}$ , причем скорости  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  перпендикулярны оси цилиндра. Выбрав плоскость  $(x, y)$  перпендикулярно образующим цилиндра, получим плоскую задачу о течении жидкости вне круга, движущегося со скоростью  $\mathbf{U}(U_x, U_y, 0)$  в потоке, имеющем на бесконечности скорость  $\mathbf{V}(V_x, V_y, 0)$ . Пусть в начальный момент времени ось цилиндра проходит через начало координат (рис. 22).

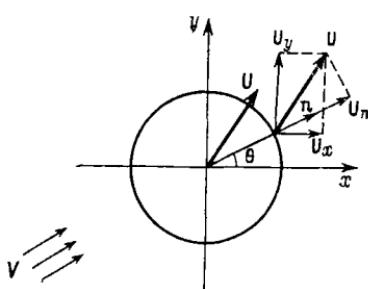


Рис. 22.

Так как движение плоское и безвихревое, то существуют комплексный потенциал  $w(z)$  и комплексная

скорость  $\bar{v}(z) = \frac{d\omega}{dz}$ . Начнем наше рассмотрение с комплексной скорости. Из физических соображений ясно, что функция  $\bar{v}(z) = v_x - iv_y$  должна быть определена во всех точках плоскости

$(x, y)$  вне круга радиуса  $R$ . Она должна быть всюду однозначна, ограничена и принимать на бесконечности заданные значения. Такая функция комплексного переменного может быть разложена в ряд Лорана по неположительным степеням  $z$ :

$$\bar{v}(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c'_1}{z^2} + \frac{c'_2}{z^3} + \dots \quad (6.1)$$

Первый член этого ряда легко находится из условия в бесконечно далекой точке

$$\bar{v}(z)|_{\infty} = \bar{V} = V_x - iV_y.$$

При  $z = \infty$  из (6.1) следует

$$V_x - iV_y = c_0. \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), имеем

$$\frac{d\omega}{dz} = v(z) = V_x - iV_y + \frac{c}{z} + \frac{c'_1}{z^2} + \dots \quad (6.3)$$

Проинтегрировав ряд (6.3) по  $z$ , получим комплексный потенциал

$$w(z) = (V_x - iV_y)z + c \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \quad (6.4)$$

Комплексный потенциал (6.4) обеспечивает выполнение условий на бесконечности при любых значениях постоянных  $c, c_1, \dots, c_n, \dots$ . Эти постоянные надо определить так, чтобы было выполнено условие обтекания цилиндра

$$v_n|_S = U_n. \quad (6.5)$$

Так как движение потенциальное, то  $v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . В полярных координатах  $r, \theta$  условие (6.5) на поверхности цилиндра  $r = R$  запишется в виде

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta. \quad (6.6)$$

Для того чтобы найти постоянные, входящие в  $w(z)$ , удобно перейти в выражении (6.4) к полярным координатам, отделить вещественную и мнимую части  $\phi$  и  $\psi$  и, продифференцировав  $\phi$  по  $r$ , подставить  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$  в (6.6). Полученное равенство будет служить для определения  $c, c_1, \dots, c_n, \dots$ .

Искомые коэффициенты будут, вообще говоря, комплексными. Положим

$$c = A + iB, \quad c_n = A_n + iB_n, \quad (6.7)$$

$$z = re^{i\theta} \quad (6.8)$$

и, подставив (6.7) и (6.8) в (6.4), получим

$$\begin{aligned} \omega(z) = \varphi + i\psi &= (V_x - iV_y)r(\cos\theta + i\sin\theta) + (A + iB)(\ln r + i\theta) + \\ &\quad + (A_1 + iB_1)\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n + iB_n)\frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.9) легко получить выражение для  $\varphi$  и  $\psi$ . Выпишем выражение для  $\varphi$  и производной  $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(V_x r + \frac{A_1}{r}\right) \cos\theta + \left(V_y r + \frac{B_1}{r}\right) \sin\theta + A \ln r - \\ &\quad - B\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta\right); \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \left(V_x - \frac{A_1}{r^2}\right) \cos\theta + \left(V_y - \frac{B_1}{r^2}\right) \sin\theta + \frac{A}{r} - \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Положим в (6.11)  $r = R$  и, подставив  $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R}$  в условие обтекания (6.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(V_x - \frac{A_1}{R^2}\right) \cos\theta + \left(V_y - \frac{B_1}{R^2}\right) \sin\theta + \frac{A}{R} - \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = U_x \cos\theta + U_y \sin\theta. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Справа и слева в (6.12) стоят ряды Фурье. Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим

$$A = 0, \quad V_x - \frac{A_1}{R^2} = U_x, \quad V_y - \frac{B_1}{R^2} = U_y, \quad A_k = B_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots),$$

откуда

$$A = 0, \quad A_1 = (V_x - U_x)R^2, \quad B_1 = (V_y - U_y)R^2, \quad A_k = B_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (6.13)$$

Коэффициент  $B$  остался не определенным. Введем для него обозначение через новую постоянную  $\Gamma$ . Положим

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (6.14)$$

Подставляя (6.13) и (6.14) в (6.9), получаем выражение для комплексного потенциала

$$\omega(z) = (V_x - iV_y)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{(V_x - U_x)R^2 + i(V_y - U_y)R^2}{z}. \quad (6.15)$$

Вводя обозначения

$$V_x - iV_y = \bar{V}_\infty, \quad V_x + iV_y = V_\infty, \quad U_x + iU_y = U, \quad (6.16)$$

запишем решение (6.15) в виде

$$\omega(z) = \bar{V}_\infty z + (V_\infty - U) \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.17)$$

Это общий вид комплексного потенциала обтекания кругового цилиндра. Он представляет сумму трех слагаемых, из которых  $\bar{V}_\infty z$  — комплексный потенциал поступательного потока, второе слагаемое — комплексный потенциал течения от диполя, третье — потенциал течения от точечного вихря. Таким образом, течение около цилиндра можно рассматривать как течение, полученное наложением поступательного потока на поток от диполя и от вихря. Постоянная  $\Gamma$ , имеющая смысл интенсивности вихря, входит в решение как параметр.

1. Пусть обтекается неподвижный цилиндр. Тогда  $U = 0$  и

$$\begin{aligned} w_1(z) = & \bar{V}_\infty z + V_\infty \frac{R^2}{z} + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \end{aligned} \quad (6.18)$$

2. Пусть цилиндр движется в жидкости, покоящейся на бесконечности. Тогда  $\bar{V}_\infty = V_\infty = 0$  и

$$w_2(z) = -U \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.19)$$

3. Пусть цилиндр неподвижен и скорость потока в бесконечности равна нулю. Если  $U = 0$  и  $\bar{V}_\infty = V_\infty = 0$ , то

$$w_3(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.20)$$

Имеем чисто циркуляционное обтекание цилиндра.

Обтекание неподвижного цилиндра. Займемся анализом картины течения около кругового цилиндра. Будем предполагать, что  $U = 0$ , т. е. цилиндр неподвижен и поток на бесконечности направлен вдоль оси  $x$  (ось  $x$  всегда можно направить по направлению скорости в бесконечности). Комплексный потенциал (6.18) при  $V_x = V$ ,  $V_y = 0$  принимает вид

$$w(z) = V \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (6.21)$$

Рассмотрим два случая.

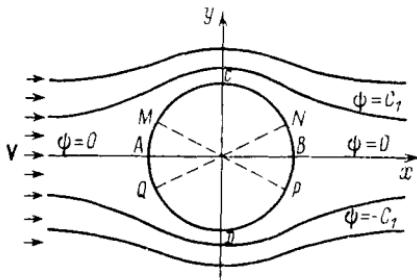


Рис. 23.

А. Бесциркуляционное обтекание цилиндра  $\Gamma = 0$  (рис. 23). В этом случае

$$w(z) = V \left( z + \frac{R^2}{z} \right),$$

или

$$\varphi + i\psi = V \left( x + iy + R^2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right). \quad (6.22)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi &= Vx \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \\ \psi &= Vy \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Линии тока  $\psi = \text{const}$ , т. е.

$$y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = \text{const}$$

есть кривые третьего порядка, симметричные относительно оси  $y$ . Линии  $\varphi = C_1$  и  $\varphi = -C_1$  симметричны относительно оси  $x$ . При  $\varphi = 0$  уравнение линии тока распадается на два множителя:  $y = 0$  — ось  $x$  и  $x^2 + y^2 = R^2$  — окружность.

Рассмотрим поле вектора скорости. Перейдем к полярным координатам  $(r, \theta)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= Vr \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \\ v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \\ v_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Формулы (6.24) дают компоненты скорости в любой точке потока. Полагая в (6.24)  $r = R$ , получаем скорость на поверхности цилиндра

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -2V \sin \theta. \quad (6.25)$$

В точках цилиндра  $\theta_A = \pi$ ,  $\theta_B = 0$  скорость равна нулю, т. е. точки  $A$  и  $B$  — критические. В точках  $\theta_C = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_D = -\frac{\pi}{2}$  скорость имеет наибольшую величину, равную  $2V$ . Если скорость известна, можно найти давление из интеграла Бернуlli

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C, \quad p = \rho (C - 2V^2 \sin^2 \theta). \quad (6.26)$$

Как видно из (6.26), в точках цилиндра  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $M$ , определяемых углами  $\pm\theta$ ,  $\pm(\pi - \theta)$ , давление одинаково, и потому главный вектор сил, действующих на цилиндр, будет равен нулю.

Б. Обтекание цилиндра потоком с циркуляцией. В этом случае  $w(z)$  имеет вид (6.21). Комплексная скорость

$$\tilde{v}(z) = \frac{dw}{dz} = V \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (6.27)$$

Найдем критические точки потока, в которых  $v_x = v_y = 0$ . Прививая нулю  $\bar{v}(z) = v_x - iv_y$ , получаем квадратное уравнение, корни которого  $z_1, z_2$  дадут координаты критических точек

$$Vz^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - VR^2 = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2V} \left( -\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2} \right). \quad (6.28)$$

Здесь возможны различные случаи:

a)  $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 > 0$  — критические точки расположены на обтекаемом цилиндре  $|z_{1,2}| = R$  симметрично относительно оси  $y$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ ,  $\operatorname{Re} z_1 = -\operatorname{Re} z_2$ .

b)  $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 = 0$  — две критические точки сливаются в одну, расположенную на мнимой оси:  $|z_{1,2}| = R$ ,  $z_1 = z_2 = \frac{\Gamma}{4\pi V}i$ .

v)  $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 < 0$  — оба корня уравнения мнимые, причем  $|z_1| < R$ ,  $|z_2| > R$ . В области течения имеется одна критическая точка на мнимой оси вне цилиндра.

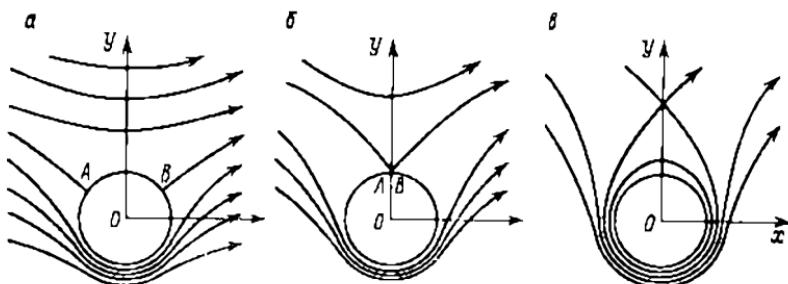


Рис. 24.

Картина течения в рассмотренных случаях, если для определенности принять  $\Gamma > 0$ , изображена на рис. 24.

В рассматриваемом случае обтекания цилиндра с циркуляцией линии тока симметричны относительно оси  $y$ . Давления в точках цилиндра, симметричных относительно оси  $y$ , одинаковы по величине. Симметрии течения относительно оси  $x$  здесь уже нет. Поэтому возникает сила, действующая на цилиндр в направлении оси  $y$ . Сила в направлении оси  $x$ , как и в первом случае, равна нулю.

Результат, заключающийся в том, что тело, обтекаемое потоком идеальной жидкости, не испытывает сопротивления, именуемый название парадокса Даламбера.

Если в случае в) величину  $\Gamma$  увеличивать так, что  $4V^2R^2 \ll \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$ , то критическая точка по мнимой оси будет удаляться от цилиндра и в пределе получим чисто циркуляционное течение.

Можно поставить вопрос: какое же течение реализуется на самом деле? Для идеальной жидкости возможны все указанные случаи. При решении задачи об обтекании цилиндра либо должна быть задана циркуляция, либо какие-то дополнительные условия (например, симметрия потока и др.). Тот факт, что решение задачи содержит произвольный параметр  $\Gamma$ , оказывается существенным при решении многих практически важных задач.

### § 7. МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим решение задачи об обтекании контура произвольной формы (рис. 25). Плоскость, в которой расположен контур  $l$ , выберем за плоскость комплексного переменного  $z = x + iy$ . Одновременно с плоскостью  $z$  рассмотрим плоскость  $\xi =$

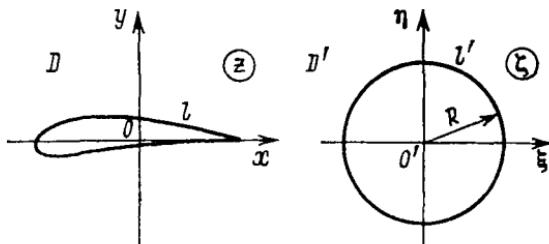


Рис. 25.

$= \xi + i\eta$  и в ней круг радиуса  $R$ . Область плоскости  $z$  вне контура  $l$  обозначим через  $D$ , область плоскости  $\xi$  вне окружности  $l'$  радиуса  $R$  обозначим через  $D'$ .

По теореме Римана о конформном отображении существует аналитическая функция  $z = f(\xi)$ , которая преобразует область  $D'$  в область  $D$  таким образом, что точки контура  $l'$  переходят в точки  $l$  и любая наперед заданная точка  $A' \in D'$  переходит в заданную точку  $A \in D$ . Эта функция будет единственной, если в точке  $A'$  задан  $\arg f'(\xi_{A'}) = \phi_0$ . Воспользуемся этой теоремой, выбрав в качестве точек  $A$  и  $A'$  бесконечно далекие точки плоскостей  $z$  и  $\xi$ , и положим при этом  $\phi_0 = 0$ . Это значит, что мы берем такую функцию  $z = f(\xi)$ , которая преобразует бесконечно далекую точку плоскости  $\xi$  в бесконечно далекую точку плоскости  $z$  и не меняет направлений в этой точке. Для этой функции в бесконечно далекой точке  $\xi = \infty$  производная  $\frac{df}{d\xi}$  есть вещественное положительное число, т. е.  $\frac{dz}{d\xi} = k > 0$ .

На основании теоремы Римана существует и обратное преобразование  $\zeta = F(z)$ .

Предположим, что нам известны функции

$$z = f(\zeta), \quad \zeta = F(z). \quad (7.1)$$

Будем рассматривать задачу об обтекании контура  $l$  потенциальным потоком, скорость которого на бесконечности задана:

$$v_\infty = v_{\infty x} + i v_{\infty y}.$$

Пусть  $w(z)$  — комплексный потенциал, соответствующий этому течению. В  $w(z)$  заменим  $z$  его выражением (7.1) через  $\zeta$ :

$$w(z) = w[f(\zeta)] = W(\zeta). \quad (7.2)$$

Так как функция  $w(z)$  определена во всех точках области  $D$  вне  $l$ , то  $W(\zeta)$  определена в точках  $D'$  вне  $l'$ . Аналитическую функцию  $W(\zeta)$  можно рассматривать как комплексный потенциал некоторого течения в плоскости  $\zeta$ . Каждому течению в плоскости  $z$  можно поставить в соответствие течение в плоскости  $\zeta$ , комплексный потенциал которого получается по формуле (7.2). Найдем это течение. Положим

$$\begin{aligned} w(z) &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \\ W(\zeta) &= \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (7.3)$$

В соответствующих точках плоскостей  $z$  и  $\zeta$  имеет место равенство (7.2), т. е.

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta). \quad (7.4)$$

Следовательно, в соответствующих точках

$$\varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta), \quad \psi(x, y) = \Psi(\xi, \eta). \quad (7.5)$$

Функция  $w(z)$  есть комплексный потенциал обтекания неподвижного контура  $l$  в плоскости  $z$ . Поэтому функция тока  $\psi(x, y)$  на контуре  $l$  постоянна. Контуру  $l$  соответствует окружность  $l'$  в плоскости  $\zeta$ , следовательно, в силу (7.5) на  $l'$  функция  $\Psi(\xi, \eta)$  будет также постоянна, т. е. окружность есть линия тока течения, комплексный потенциал которого  $W(\zeta)$ . Выясним условия на бесконечности для этого течения. Комплексная скорость

$$\bar{V}(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{v}(z) \frac{dz}{d\zeta}. \quad (7.6)$$

В плоскости  $z$  в бесконечно далекой точке скорость известна. По построению функции (7.1) производная  $\frac{dz}{d\zeta}$  в бесконечности положительна:

$$\left( \frac{dw}{dz} \right)_\infty = \bar{v}_\infty = v_{\infty x} - i v_{\infty y}, \quad \left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_\infty = k > 0.$$

Следовательно,

$$\left( \frac{dW}{d\xi} \right)_{\infty} = \bar{V}_{\infty} = k \bar{v}_{\infty}. \quad (7.7)$$

Таким образом,  $W(\xi)$  определяет в плоскости  $\xi$  течение вне круга, причем скорость потока на бесконечности равна  $k v_{\infty}$ . Но комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра известен, он имеет вид

$$W(\xi) = k \bar{v}_{\infty} \xi + \frac{k v_{\infty} R^2}{\xi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \xi. \quad (7.8)$$

Заменяя  $\xi$  в (7.8) на  $F(z)$ , получаем

$$w(z) = k \bar{v}_{\infty} F(z) + \frac{k v_{\infty} R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z). \quad (7.9)$$

Формула (7.9) дает решение задачи об обтекании произвольного контура потенциальным потоком, если известно конформное отображение области вне  $l$  на внешность круга, т. е. если известна функция  $\xi = F(z)$ . Величина  $k$  находится по формуле

$$k = \frac{dz}{d\xi} \Big|_{\infty} = \left( \frac{d\xi}{dz} \Big|_{\infty} \right)^{-1} = [F'(z)_{\infty}]^{-1}.$$

В решении (7.9) циркуляция  $\Gamma$  остается не определенной.

### § 8. ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Пусть в плоскости  $z$  имеем эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ . Задача об обтекании эллипса поступательным потоком, имеющим скорость  $v_{\infty}$ , будет решена, если будет известен комплексный потенциал  $w(z)$ . Для этого надо построить функцию  $\xi = F(z)$ ,

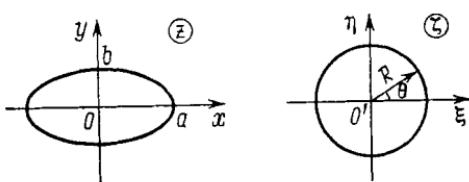


Рис. 26.

которая отображает внешность эллипса на внешность круга. Наряду с плоскостью  $z$  рассмотрим плоскость  $\xi$  (рис. 26).

Введем преобразование Жуковского

$$z = \xi + \frac{c^2}{\xi}. \quad (8.1)$$

Подберем постоянную  $c$  так, чтобы (8.1) давало преобразование области плоскости  $\xi$  вне круга радиуса  $R$  в область плоскости  $z$  вне эллипса. На окружности

$$\xi = Re^{i\theta} = R(\cos \theta - i \sin \theta). \quad (8.2)$$

Подставляя (8.2) в (8.1) и отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$x = \left( R + \frac{c^2}{R} \right) \cos \theta, \quad y = \left( R - \frac{c^2}{R} \right) \sin \theta. \quad (8.3)$$

Уравнения (8.3) — параметрические уравнения эллипса с полуосями

$$a = R + \frac{c^2}{R}, \quad b = R - \frac{c^2}{R}. \quad (8.4)$$

Функция (8.1) будет давать отображение окружности на эллипс с заданными полуосями  $a$  и  $b$ , если положить

$$R = \frac{1}{2}(a+b), \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}(a-b)R} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}. \quad (8.5)$$

Преобразование (8.1) при этом запишется в виде

$$z = \xi + \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{\xi}. \quad (8.6)$$

Получим преобразование, обратное (8.6), т. е. функцию  $\xi = F(z)$ . Согласно (8.6)

$$\xi^2 - \xi z + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0, \quad \xi = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2}. \quad (8.7)$$

Обратное преобразование не однозначно. Выберем такую ветвь корня, чтобы внешность эллипса перешла во внешность круга. Для этого в (8.7) следует взять знак плюс. Действительно, при больших  $z$  в этом случае из (8.7) имеем

$$\xi = z - \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{z} + \dots$$

Таким образом,

$$\xi = F(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2}, \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad k = 1. \quad (8.8)$$

Комплексный потенциал обтекания эллиптического цилиндра будет иметь вид

$$\begin{aligned} w(z) = & \frac{1}{2} \bar{v}_\infty (z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}) + \frac{1}{2} v_\infty \frac{a+b}{a-b} (z - \\ & - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

### § 9. ПОСТУЛАТ ЧАПЛЫГИНА — ЖУКОВСКОГО

Пусть в плоскости  $z$  имеется профиль с одной угловой точкой, причем угол  $\delta < \pi$ . Введем вспомогательную плоскость  $\xi$ . Пусть функция  $z = f(\xi)$  отображает область плоскости  $\xi$  вне круга радиуса  $R$  с контуром  $l'$  на внешность профиля (рис. 27).

Рассмотрим вопрос о вычислении скорости в угловой точке  $A$ . Точка  $A$  при отображении переходит в точку  $A'$  окружности  $l'$ . Комплексная скорость в точке  $A$  может быть представлена в виде

$$\bar{v}_A = \frac{dw(z)}{dz} \Big|_A = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \Big|_{A'} \frac{d\xi}{dz} \Big|_A = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \Big|_{A'} \frac{1}{\frac{d\xi}{dz} \Big|_{A'}}. \quad (9.1)$$

Функция  $z = f(\xi)$  преобразует угол  $\pi$  в точке  $A'$  в угол  $2\pi - \delta$  в точке  $A$ . Поэтому в окрестности точки  $A$  конформность отображения нарушается и функция  $z(\xi)$  должна иметь разложение вида

$$z - z_A = M(\xi - \xi_A) \frac{2\pi - \delta}{\pi} + \dots \quad (9.2)$$

Отсюда

$$\frac{dz}{d\xi} \Big|_{A'} = \frac{2\pi - \delta}{\pi} M(\xi - \xi_{A'})^{\frac{\pi - \delta}{\pi}} \Big|_{\xi = \xi_A} = 0. \quad (9.3)$$

Обратимся к равенству (9.1). В нем при  $\xi = \xi_{A'}$  второй множитель в силу (9.3) обращается в бесконечность. Если скорость  $\frac{dW}{d\xi} \Big|_{A'}$  не равна нулю, то скорость  $v_A$  в угловой точке профиля будет бесконечно велика, что физически недопустимо.

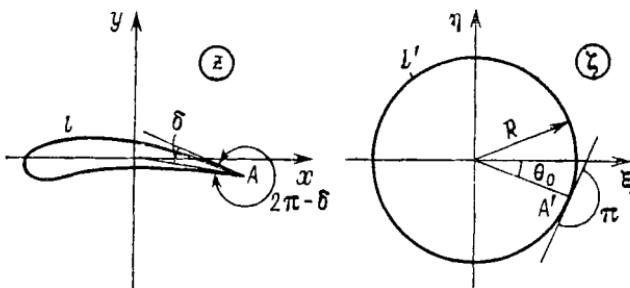


Рис. 27.

Требование, чтобы скорость в задней острой кромке была конечна, составляет содержание постулата Чаплыгина — Жуковского. Выполнение этого постулата возможно только в том случае, если скорость  $\frac{dW}{d\xi}$  в точке  $A'$  равна нулю, т. е. когда точка  $A'$  является критической в потоке, обтекающем цилиндр. Положение точки  $A'$  зависит от величины циркуляции.

Отсюда следует вторая формулировка постулата Чаплыгина — Жуковского: циркуляция при обтекании профиля с острой кромкой  $A$  такова, что точка  $A'$  окружности, в которую переходит при конформном отображении точка  $A$ , должна являться критической в потоке, обтекающем цилиндр.

В критической точке  $A'$  сходятся струи потока, обтекающего цилиндр. Так как линии тока плоскости  $\xi$  при отображении переходят в линии тока плоскости  $z$ , то точка  $A$  профиля также должна быть точкой схода струй. На основании этого может быть дана и третья формулировка постулата. Циркуляция при обтекании контура с острой кромкой такова, что эта кромка является точкой схода струй.

Постулат Чаплыгина — Жуковского позволяет определить значение циркуляции  $\Gamma$ . Для комплексного потенциала  $W(\zeta)$  имеем формулу (7.9):

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + k \frac{v_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \quad (9.4)$$

Комплексная скорость будет

$$\frac{dW}{d\zeta} = k\bar{v}_\infty - \frac{k v_\infty R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}. \quad (9.5)$$

Пусть поток, набегающий на профиль, наклонен под углом  $\alpha$  к оси  $x$ , т. е.

$$\bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha}, \quad v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}. \quad (9.6)$$

Положим в (9.5)  $\zeta = \zeta_{A'}$ . Тогда согласно постулату

$$\left. \frac{dW}{d\zeta} \right|_{A'} = k\bar{v}_\infty - \frac{k v_\infty R^2}{\zeta_{A'}^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta_{A'}} = 0. \quad (9.7)$$

Откуда

$$\Gamma = 2\pi ik \left( \frac{v_\infty R^2}{\zeta_{A'}} - \bar{v}_\infty \zeta_{A'} \right). \quad (9.8)$$

Учитывая (9.6) и полагая в (9.8)  $\zeta_{A'} = Re^{i\theta_0}$ , получим

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi ikR |v_\infty| (e^{i(\alpha-\theta_0)} - e^{-i(\alpha-\theta_0)}), \\ \Gamma &= 4\pi kR |v_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Угол  $(\alpha - \theta_0)$ , где  $\theta_0$  — угол, определяющий положение точки  $A'$  на окружности  $l'$  плоскости  $\zeta$ , называется *углом атаки*. Циркуляция  $\Gamma$  обращается в нуль, когда  $\alpha - \theta_0 = 0$ .

В формуле (9.9) все величины известны, если только известно конформное отображение профиля на круг. Если величина  $\Gamma$  известна, то формула (7.9) для комплексного потенциала будет давать единственное решение задачи обтекания произвольного контура с одной угловой точкой. А тогда можно поставить вопрос о вычислении сил, действующих на профиль со стороны потока.

**Замечание.** Если контур гладкий или имеет угол  $\delta > \pi$  или несколько угловых точек, то вопрос о циркуляции не может быть решен без привлечения дополнительных соображений.

## § 10. ФОРМУЛЫ ЧАПЛЫГИНА — БЛАЗИУСА

Получим общие выражения для главного вектора и главного момента сил давлений, действующих на профиль, обтекаемый безотрывным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Мы будем говорить об обтекании контура  $l$ , имея в виду обтекание бесконечного цилиндра, и о силе, действующей на контур, имея в виду силу, действующую на элемент цилиндра единичной высоты.

Главный вектор сил, действующих на профиль:

$$\mathbf{F} = -\oint_l p \mathbf{n} dl. \quad (10.1)$$

Проекции на оси координат

$$\begin{aligned} F_x &= -\oint_l p \cos(\hat{n}, \hat{x}) dl = -\oint_l p dy, \\ F_y &= -\oint_l p \cos(\hat{n}, \hat{y}) dl = \oint_l p dx. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Образуем величину  $\bar{R}$ :

$$\bar{R} = F_x - iF_y; \quad (10.3)$$

$$\bar{R} = -\oint_l p dy - i \oint_l p dx = -i \oint_l p (dx - idy) = -i \oint_l p d\bar{z}. \quad (10.4)$$

Вдоль контура  $l$  (контур-линия тока) справедлив интеграл Бернулли. Предполагая массовые силы отсутствующими, имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C, \quad p = \rho C - \rho \frac{v^2}{2}. \quad (10.5)$$

Подставим (10.5) в (10.4):

$$\bar{R} = -i \oint_l \rho C d\bar{z} + i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 d\bar{z} = i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 d\bar{z}. \quad (10.6)$$

Рассмотрим элемент контура  $dl$ . Пусть  $\theta$  — угол между касательной к контуру и осью  $x$ . Тогда

$$dz = dl e^{i\theta}, \quad d\bar{z} = dl e^{-i\theta}, \quad d\bar{z} = e^{-2i\theta} dz \quad (10.7)$$

и формулу (10.6) можно записать в виде

$$\bar{R} = i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 e^{-2i\theta} dz. \quad (10.8)$$

При безотрывном обтекании скорость в точках контура  $l$  направлена по касательной к нему (рис. 28):

$$\begin{aligned} ve^{-i\theta} &= v \cos \theta - iv \sin \theta = \\ &= v_x - iv_y = \bar{v}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

на основании чего (10.8) приобретает вид

$$\bar{R} = i \frac{\rho}{2} \oint_l \bar{v}^2 dz. \quad (10.10)$$

Формула (10.10) есть первая формула Чаплыгина — Блазиуса.

Если движение безвихревое, то существует комплексный потенциал  $w(z)$  и формула Чаплыгина — Блазиуса для этого случая принимает вид

$$\bar{R} = i \frac{\rho}{2} \oint_l \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (10.11)$$

Получим выражение для главного момента сил давлений.

К элементу контура  $dl$  приложена сила, проекции которой

$$dF_x = -p dy, \quad dF_y = p dx.$$

Момент  $dL$  этой силы относительно начала координат будет

$$dL = dF_y x - dF_x y = p(x dx + y dy), \quad (10.12)$$

откуда момент сил, действующих на профиль, получим в виде

$$L = \oint_l p(x dx + y dy). \quad (10.13)$$

Используем интеграл Бернулли (10.5). Тогда

$$\begin{aligned} L = C_0 \oint_l (x dx + y dy) - \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 (x dx + y dy) = \\ = -\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 (x dx + y dy). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Рассмотрим выражение  $z d\bar{z}$ :

$$z d\bar{z} = (x + iy)(dx - i dy) = x dx + y dy + i(y dx - x dy).$$

Отсюда

$$x dx + y dy = \operatorname{Re}(z d\bar{z}),$$

и, следовательно,

$$L = -\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 \operatorname{Re}(z d\bar{z}) = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 z d\bar{z}\right). \quad (10.15)$$

Используя (10.7), перепишем (10.15) в виде

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 e^{-2i\theta} z dz\right). \quad (10.16)$$

Принимая во внимание (10.9), получаем вторую формулу Чаплыгина — Блазиуса

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint_l \bar{v}^2 z dz\right). \quad (10.17)$$

Если движение безвихревое, то

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz\right). \quad (10.18)$$

В формулах (10.11) и (10.18) за контур интегрирования может быть взят любой контур, охватывающий контур  $l$  обтекаемого тела.

**Замечание.** Введенная сила  $\bar{R}$  есть величина, сопряженная комплексной величине  $R = F_x + iF_y$ , вещественная и мнимая части которой есть проекции главного вектора на оси координат. Эту величину  $R$  часто называют вектором силы, или просто силой, действующей на профиль, а величину  $\bar{R} = F_x - iF_y$  — сопряженной комплексной силой.

## § 11. ИНТЕГРАЛ ОТ КОМПЛЕКСНОЙ СКОРОСТИ

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$I = \oint_l \bar{v} dz. \quad (11.1)$$

1. Предполагаем, что движение потенциальное, т. е. существует  $\omega(z)$ . Тогда  $\bar{v} = \frac{d\omega}{dz}$  и

$$I = \oint_l \frac{d\omega}{dz} dz = \oint_l d\omega = \oint_l (d\varphi + i d\psi) = \Delta\varphi + i\Delta\psi. \quad (11.2)$$

Здесь  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\psi$  — приращение функций  $\varphi$  и  $\psi$  при обходе контура.

Рассмотрим каждый из интегралов в отдельности. Вдоль контура  $l$   $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl$ , где  $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$  — проекция скорости на элемент контура  $dl$ , и потому

$$\oint_l d\varphi = \int_l \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \oint_l v_l dl = \oint_l (v_x dx + v_y dy) = \Gamma. \quad (11.3)$$

Таким образом, первый интеграл равен циркуляции скорости по контуру. Второй интеграл, как было установлено раньше, дает расход жидкости через контур

$$\Delta\psi = \oint_l d\psi = Q. \quad (11.4)$$

Итак, при обходе замкнутого контура будет  $\Delta\omega = \Delta\varphi + i\Delta\psi = \Gamma + iQ$ , т. е. интеграл от комплексной скорости равен

$$\oint_l \bar{v} dz = \Gamma + iQ. \quad (11.5)$$

2. Комплексная скорость  $\bar{v}(z)$  есть функция комплексного переменного, которая может иметь особенности в точках внутри области, ограниченной контуром  $l$ . Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$  — точки внутри области с контуром  $l$ , являющиеся особыми для функции  $\bar{v}(z)$ . Обозначим через  $\gamma_k$  вычеты в этих особых точках. По теореме о вычетах интеграл по замкнутому контуру равен

$$\oint_l \bar{v} dz = 2\pi i \sum_k \gamma_k, \quad (11.6)$$

где  $\gamma_k = a_k + i\beta_k$ .

Сопоставляя (11.5) и (11.6), получаем

$$\Gamma = -2\pi \sum_k \beta_k, \quad Q = 2\pi \sum_k a_k. \quad (11.7)$$

## § 12. ТЕОРЕМА ЖУКОВСКОГО

Рассмотрим обтекание некоторого профиля  $l$  безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Этому обтеканию отвечает комплексный потенциал  $w(z)$ .

Вычислим комплексную силу  $\bar{R}$  по первой формуле Чаплыгина — Блазиуса:

$$\bar{R} = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (12.1)$$

За контур интегрирования возьмем окружность  $C$  с центром в начале координат, охватывающую контур  $l$ . Вне этой окружности и на ней комплексная скорость может быть разложена в ряд Лорана:

$$\bar{v}(z) = \frac{d\omega}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (12.2)$$

Найдем коэффициенты этого ряда  $A_0$  и  $A_1$ . Полагая  $z = \infty$ , находим

$$A_0 = \left( \frac{d\omega}{dz} \right)_{z=\infty} = \bar{v}_\infty.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл от комплексной скорости. Так как  $\bar{v} = \frac{d\omega}{dz}$  вне  $l$  ограничена и не имеет особенностей во всей внешней относительно  $l$  части плоскости  $z$ , включая и точку  $z = \infty$ , то для вычисления криволинейного интеграла достаточно найти вычет подынтегральной функции в бесконечно удаленной точке. По теореме о вычетах, используя ряд (12.2), получаем

$$\oint \frac{d\omega}{dz} dz = 2\pi i A_1.$$

Согласно (11.5) имеем  $\oint \frac{d\omega}{dz} dz = \Gamma + iQ$ .

Так как профиль предполагается непроницаемым и в потоке нет источников, то  $Q = 0$ . Отсюда

$$\Gamma = 2\pi i A_1, \quad A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Подставляя полученные выражения для  $A_0$  и  $A_1$  в (12.2), имеем

$$\bar{v}(z) = \frac{d\omega}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (12.3)$$

Чтобы воспользоваться формулой (12.1), вычислим  $\left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2$ :

$$\left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2 = \bar{v}_\infty^2 + 2\bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \left( 2A_2 \bar{v}_\infty - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{z^2} + \dots \quad (12.4)$$

По теореме о вычетах  $\oint \left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz = 2\bar{v}_\infty \Gamma$ .

Для комплексной силы  $\bar{R}$  получаем формулу

$$\bar{R} = i\rho \bar{v}_\infty \Gamma, \quad (12.5)$$

где

$$\bar{R} = F_x - iF_y, \quad \bar{v}_\infty = v_{x\infty} - iv_{y\infty}. \quad (12.6)$$

Если воспользоваться (12.5) и перейти к комплексно-сопряженным величинам  $R$  и  $v_\infty$ , то придет к формуле (теореме) Жуковского

$$R = -i\rho v_\infty \Gamma; \quad (12.7)$$

здесь

$$R = F_x + iF_y, \quad v_\infty = v_{x\infty} + iv_{y\infty}. \quad (12.8)$$

**Теорема Жуковского.** Главный вектор сил давлений, действующих на профиль, численно равен произведению плотности и абсолютных величин скорости и циркуляции и имеет направление, получаемое путем поворота вектора скорости  $v_\infty$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  в сторону, противоположную циркуляции.

Таким образом, для величины силы Жуковского имеем формулу

$$|R| = \rho |v_\infty| \cdot |\Gamma|. \quad (12.9)$$

Существенно, что главный вектор сил перпендикулярен направлению скорости на бесконечности. Силу, перпендикулярную скорости  $v_\infty$ , называют подъемной силой; силу в направлении потока — лобовым сопротивлением.

Из теоремы Жуковского следует, что при плоском потенциальном обтекании возникает только подъемная сила. Подъемная сила возможна только при наличии циркуляции. Для циркуляции мы имеем формулу (9.9). Подставляя выражение для  $\Gamma$  в (12.9) (радиус круга обозначаем  $\tilde{R}$ ), получаем

$$|R| = 4\pi k \tilde{R} \rho |v_\infty|^2 |\sin(\theta_0 - \alpha)|.$$

Так как обычно ось  $x$  направляют вдоль скорости  $v_\infty$ , то подъемную силу обозначают через  $R_y$ , силу сопротивления через  $R_x$ . В реальном обтекании возникает как подъемная сила, так и сила сопротивления. Принято вместо  $R_y$  и  $R_x$  исследовать так называемые коэффициенты сопротивления

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S}, \quad C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S}.$$

Здесь  $S$  — площадь характерного сечения обтекаемого тела. Для идеальной жидкости  $C_x = 0$  ( $R_x = 0$  — парадокс Даламбера).

Чтобы иметь возможность теоретически вычислить сопротивление, надо отказаться либо от предположения о потенциальности течения, либо от безотрывности обтекания, либо предполагать жидкость вязкой.

При безотрывном обтекании крыльев формула для  $C_y$ , где  $R_y$  вычисляется по формуле Жуковского, хорошо подтверждается экспериментом.

### § 13. ФОРМУЛА ДЛЯ МОМЕНТА

Исходим из второй формулы Чаплыгина — Блазиуса

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} \oint z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right]. \quad (13.1)$$

Используя разложение (12.4) для  $\left( \frac{dw}{dz} \right)^2$ , получим

$$z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = z \bar{v}_\infty^2 + 2\bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} + \left( 2A_2 \bar{v}_\infty - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{z} + \dots \quad (13.2)$$

Подставляя (13.2) в (13.1) и применяя теорему о вычетах, находим

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} 2\pi i \left( 2A_2 \bar{v}_\infty - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \right) \right],$$

т. е.

$$L = -\operatorname{Re} (2\pi i \rho \bar{v}_\infty A_2). \quad (13.3)$$

Момент может быть вычислен по формуле (13.3), если известно разложение (12.3) комплексной скорости, точнее, если известен коэффициент  $A_2$  в этом разложении. Часто, однако, удобно пользоваться разложением отображающей функции  $z = f(\xi)$  в окрестности бесконечно далекой точки. Это разложение имеет вид

$$z = k\xi + k_0 + \frac{k_1}{\xi} + \frac{k_2}{\xi^2} + \dots \quad (13.4)$$

Перейдя в интеграле (13.1) к переменной  $\xi$ , придем к выражению для момента через интеграл по контуру в плоскости  $\xi$

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} \oint z(\xi) \left( \frac{dW}{d\xi} \right)^2 \frac{d\xi}{dz} d\xi \right]. \quad (13.5)$$

Для вычисления этого интеграла надо получить разложение подынтегральной функции, чтобы найти коэффициент (вычет) при  $\frac{1}{\xi}$ . Используя выражение (7.8) для  $W(\xi)$  и разложение (13.4), находим

$$\left( \frac{dW}{d\xi} \right)^2 = k^2 \bar{v}_\infty^2 + 2k\bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\xi} - \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2k^2 v_\infty \bar{v}_\infty \tilde{R}^2 \right) \frac{1}{\xi^2} + \dots, \quad (13.6)$$

$$\begin{aligned} z \frac{d\xi}{dz} &= z \frac{1}{\frac{dz}{d\xi}} = \left( k\xi + k_0 + \frac{k_1}{\xi} + \dots \right) \frac{1}{k - \frac{k_1}{\xi^2} + \dots} = \\ &= \left( \xi + \frac{k_0}{k} + \frac{k_1}{k} \frac{1}{\xi} + \dots \right) \left( 1 + \frac{k_1}{k} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right) = \\ &= \xi + \frac{k_0}{k} + \frac{2k_1}{k} \frac{1}{\xi} + \dots \end{aligned} \quad (13.7)$$

Имея (13.6) и (13.7), получим разложение подынтегральной функции

$$z(\xi) \left( \frac{dW}{d\xi} \right)^2 \frac{d\xi}{dz} = c_1 \xi + c_0 + \left[ 2k_0 \bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} + 2kk_1 \bar{v}_\infty^2 - \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2k^2 v_\infty \bar{v}_\infty \bar{R}^2 \right) \right] \frac{1}{\xi} + \frac{c_2}{\xi^2} + \dots$$

Применив теорему о вычетах к интегралу (13.5), найдем момент  $L$ :

$$L = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\rho}{2} 2\pi i \left[ 2k_0 \bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} + 2k_1 k \bar{v}_\infty^2 - \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2k^2 v_\infty \bar{v}_\infty \bar{R}^2 \right) \right] \right\}. \quad (13.8)$$

Выражение в круглых скобках вещественно, поэтому формула для момента окончательно примет вид

$$L = \operatorname{Re} [-k_0 \bar{v}_\infty \Gamma - 2\pi i k k_1 \rho \bar{v}_\infty^2]. \quad (13.9)$$

## § 14. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ

Пусть в плоскости  $x, y$  мы имеем отрезок  $[-a, a]$ , расположенный вдоль оси  $x$ . На этот отрезок под углом  $\alpha$  набегает поступательный поток, скорость которого в бесконечности равна  $v_\infty$ .

Нам известно решение задачи об обтекании круглого цилиндра. Чтобы воспользоваться им, надо знать конформное отображение внешности круга на внешность отрезка  $[-a, a]$ . Преобразование Жуковского

$$z = \frac{a}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (14.1)$$

переводит круг единичного радиуса в плоскости  $\xi$  в отрезок прямой плоскости  $z = x + iy$  (рис. 29). Действительно, на окружности  $R = 1$  имеем  $\xi = e^{i\theta}$ . Подставив эти значения  $\xi$  в (14.1), получим

$$z = x + iy = \frac{a}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = a \cos \theta; \quad (14.2)$$

$$x = a \cos \theta, \quad y = 0, \quad (14.3)$$

т. е. окружность переходит в дважды пробегаемый отрезок  $[-a, a]$  оси  $x$  (верхняя полуокружность переходит в верхний берег разреза, нижняя — в нижний).

Получим преобразование, обратное (14.1), т. е. функцию  $\xi = F(z)$ . Согласно (14.1)

$$a\xi^2 - 2z\xi + a = 0, \quad \xi = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - a^2}}{a}. \quad (14.4)$$

Чтобы преобразование  $\zeta = F(z)$  переводило внешность отрезка во внешность круга, надо выбрать в (14.4) знак плюс. Таким образом, обратное преобразование имеет вид

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}. \quad (14.5)$$

Имея (14.5), можем записать комплексный потенциал обтекания пластиинки. Учитывая, что в нашем случае

$$k = \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\infty} = \frac{a}{2}, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = \frac{a}{2}, \quad R = 1, \quad (14.6)$$

получим

$$w(z) = \frac{1}{2} \bar{v}_{\infty} (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \\ + \frac{1}{2} v_{\infty} (z - \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}). \quad (14.7)$$

Заметим, что формулу (14.7) можно было бы получить непосредственно из формулы (8.9), рассматривая пластиинку как предельный случай эллиптического цилиндра, у которого получась  $b = 0$ .

В формулу (14.7) входит циркуляция  $\Gamma$ . Для ее определения имеем постулат Чаплыгина — Жуковского. Непосредственное его применение затруднительно, так как у пластиинки имеются две острые кромки. Нас интересует пластиинка как модель закругленного спереди тонкого профиля с задней острой кромкой. Скорость в задней острой кромке будет конечна, если в соответствии с постулатом Чаплыгина — Жуковского циркуляцию определим по формуле (9.9):

$$\Gamma = 4\pi kR |v_{\infty}| \sin(\theta_0 - \alpha).$$

Здесь  $\alpha$  — угол, образуемый направлением невозмущенного потока с осью  $x$ ;  $\theta_0$  — угол, определяющий положение в плоскости  $\zeta$  точки  $A'$ , в которую переходит задняя острые кромка  $A$ .

В нашем случае  $\theta_0 = 0$ ,  $k = \frac{a}{2}$ ,  $R = 1$ , и выражение для циркуляции будет

$$\Gamma = -2\pi a |v_{\infty}| \sin \alpha. \quad (14.8)$$

Соответственно выражение для комплексного потенциала можно записать в виде

$$w(z) = \frac{1}{2} \bar{v}_{\infty} (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{1}{2} v_{\infty} (z - \sqrt{z^2 - a^2}) + \\ + ia |v_{\infty}| \sin \alpha \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}). \quad (14.9)$$

Здесь  $\bar{v}_{\infty} = |v_{\infty}| e^{-i\alpha}$ ,  $v_{\infty} = |v_{\infty}| e^{i\alpha}$ . Имея комплексный потенциал, можем найти комплексную скорость  $\bar{v}$  и ее составляющие  $v_x$  и  $v_y$  в точках пластиинки. Картинна обтекания приведена на рис. 30, а.

Определим силу, действующую на пластинку, используя формулу (14.8) для циркуляции. По теореме Жуковского

$$\bar{R} = i\rho\bar{\sigma}_\infty \Gamma = -2\pi i\rho |v_\infty|^2 e^{-ia} \sin a. \quad (14.10)$$

Откуда

$$R_x = -2\pi\rho |v_\infty|^2 a \sin^2 a, \\ R_y = 2\pi\rho |v_\infty|^2 a \sin a \cos a. \quad (14.11)$$

Интересно отметить следующее. Хотя в идеальной жидкости все элементарные напряжения нормальны к пластинке, возникает результирующая сила  $R_x$ , направленная по касательной к ней. Это связано с тем, что постулат Чаплыгина — Жуковского накладывает ограничение на величину скорости лишь у задней острой кромки. Если представить себе переднюю кромку закругленной, имеющей малый радиус кривизны, то скорости вблизи

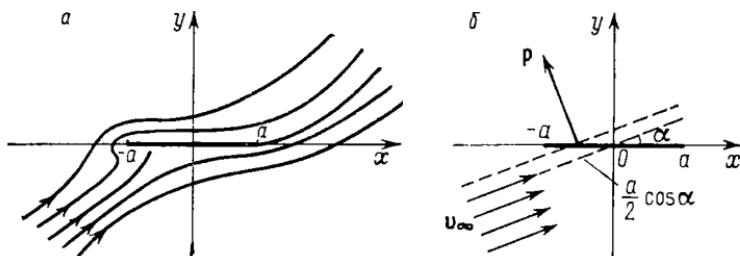


Рис. 30.

носовой части будут очень велики, а давление, согласно уравнению Бернулли, мало. Образующаяся разность давлений между кормовой и носовой частями профиля приводит к появлению некоторой «подсасывающей» силы, параллельной оси  $x$ . Если радиус кривизны закругления устремить к нулю, то скорость вблизи передней кромки будет неограниченно возрастать, а давление — падать. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что при этом «подсасывающая» сила будет стремиться к некоторой предельной величине, совпадающей со значением  $R_x$  из (14.11).

Величина силы Жуковского для пластиинки

$$P = |R| = 2\pi\rho |v_\infty|^2 \sin a. \quad (14.12)$$

Часто рассматривают коэффициент подъемной силы

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho |v_\infty|^2 S}. \quad (14.13)$$

В случае плоского течения за  $S$  принимают произведение хорды на единицу размаха крыла. В нашем случае  $S = 2a$  и

$$C_P = 2\pi \sin a. \quad (14.14)$$

При малых углах  $\alpha$

$$C_P \cong 2\pi\alpha, \quad \frac{dC_P}{d\alpha} \cong 2\pi. \quad (14.15)$$

Ранее была получена формула (13.9) для момента сил, действующих на профиль. Учитывая (14.6), получим выражение для момента сил, действующих на пластинку, в виде

$$L = -\operatorname{Re} \left( 2\pi i \rho |v_\infty|^2 \frac{a^2}{4} e^{-2i\alpha} \right) = -\frac{\pi a^2}{2} \rho |v_\infty|^2 \sin 2\alpha. \quad (14.16)$$

Учитывая (14.12), выражение для  $L$  можно записать в виде

$$L = -\frac{a}{2} \cos \alpha P. \quad (14.17)$$

Из (14.17) следует, что точка приложения равнодействующей силы находится на расстоянии  $\frac{1}{4}$  части хорды от передней кромки (рис. 30, б).

Эксперимент показывает, что результаты, полученные при рассмотрении обтекания пластиинки, могут быть использованы для тонких профилей при малых углах атаки.

## § 15. ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ ЖУКОВСКОГО

### A. Профили Жуковского

Было установлено, что конформное преобразование

$$z = \frac{c}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (15.1)$$

отображает внешность круга единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  во внешность отрезка  $[-c, c]$  вещественной оси плоскости  $z$ .

Перепишем формулу (15.1) в виде

$$2z = c\zeta + \frac{c^2}{c\zeta} \quad (15.2)$$

и введем новые переменные  $z'$  и  $\zeta'$  с помощью преобразования подобия

$$2z = z', \quad c\zeta = \zeta'. \quad (15.3)$$

Тогда получим

$$z' = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'}. \quad (15.4)$$

Преобразование (15.4) переводит внешность круга радиуса  $c$  в плоскости  $\zeta'$  во внешность отрезка  $[-2c, 2c]$  плоскости  $z'$ . Перепишем (15.4) следующим образом:

$$\frac{z' - 2c}{z' + 2c} = \frac{\zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} - 2c}{\zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} + 2c} = \frac{(\zeta' - c)^2}{(\zeta' + c)^2}. \quad (15.5)$$

Точки  $\zeta' = c$  и  $\zeta' = -c$  соответствуют точкам  $z' = 2c$  и  $z' = -2c$ . Произвольная окружность в плоскости  $\zeta'$  с центром на мнимой оси, проходящая через точки  $\zeta' = c$  и  $\zeta' = -c$ , соответствует некоторой кривой плоскости  $z'$ , проходящей через точки  $z' = 2c$  и  $z' = -2c$ . Если центр окружности  $L$  расположен в точке  $\zeta' = ki$  мнимой оси, то ее радиус  $F'B'$  равен  $R = \sqrt{c^2 + k^2}$  (рис. 31, а). Любая точка  $A'$  окружности  $L$  перейдет в некоторую точку  $A$  плоскости  $z'$ , при этом точки  $B'(\zeta' = c)$  и  $C'(\zeta' = -c)$  перейдут в точки  $B(z' = 2c)$  и  $C(z' = -2c)$ .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{BA} &= \mathbf{OA} - \mathbf{OB}, & \mathbf{CA} &= \mathbf{OA} - \mathbf{OC}, \\ \mathbf{B'A'} &= \mathbf{OA'} - \mathbf{OB'}, & \mathbf{C'A'} &= \mathbf{OA'} - \mathbf{OC'}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

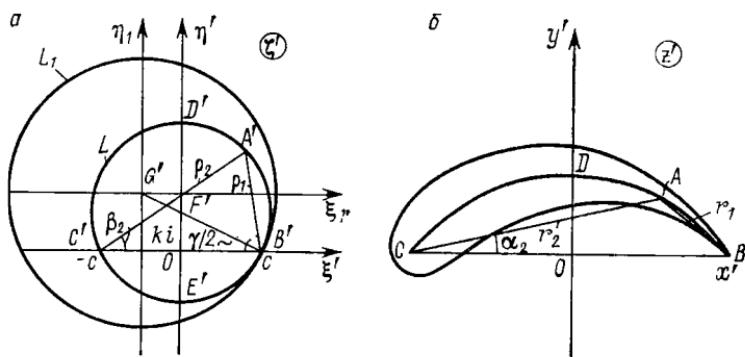


Рис. 31.

Векторы  $\mathbf{BA}$ ,  $\mathbf{CA}$ ,  $\mathbf{B'A'}$  и  $\mathbf{C'A'}$  являются изображением некоторых комплексных величин. Представим эти величины в виде

$$\begin{aligned} z' - 2c &= r_1 e^{i\alpha_1}, & z' + 2c &= r_2 e^{i\alpha_2}, \\ \zeta' - c &= \rho_1 e^{i\beta_1}, & \zeta' + c &= \rho_2 e^{i\beta_2}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Из формул (15.5), (15.7) непосредственно следует равенство

$$\frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 e^{2i(\beta_1 - \beta_2)}, \quad (15.8)$$

или

$$\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\alpha_1 - \alpha_2) = 2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + 2i(\beta_1 - \beta_2).$$

Откуда

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2(\beta_1 - \beta_2). \quad (15.9)$$

Когда точка  $A'$  движется по верхней части окружности  $L$  от  $B'$  к  $C'$ , угол  $\beta_1 - \beta_2$  (или  $\angle C'A'B'$ ) сохраняет постоянное значение как вписанный угол, опирающийся на дугу  $C'B'$ . При этом угол  $\alpha_1 - \alpha_2$  (или  $\angle CAB$ ) тоже сохраняет постоянное значение, т. е. линия, которую описывает точка  $A$  в плоскости  $z'$ , является

другой некоторой окружности. Когда точка  $A'$  движется по нижней части окружности  $L$  от  $C'$  к  $B'$ , точка  $A$  также пробегает некоторую дугу окружности в направлении от  $C$  к  $B$ .

Покажем, что точки  $D'$  и  $E'$  пересечения окружности  $L$  с мнимой осью плоскости  $\zeta'$  отображаются в одну и ту же точку плоскости  $z'$ . Действительно, точке  $D'$  соответствует комплексная координата  $\zeta'_{D'} = (k + \sqrt{k^2 + c^2})i$ , а точке  $E' — \zeta'_{E'} = (k - \sqrt{k^2 + c^2})i$ . Согласно (15.4) отображением  $D'$  в плоскость  $z'$  будет являться точка  $D$ , у которой

$$z'_D = (k + \sqrt{k^2 + c^2})i + \frac{c^2}{(k + \sqrt{k^2 + c^2})i} = 2ki,$$

а отображением  $E'$  в плоскость  $z'$  — точка  $E$ , координата которой

$$z'_E = (k - \sqrt{k^2 + c^2})i + \frac{c^2}{(k - \sqrt{k^2 + c^2})i} = 2ki = z'_D.$$

Отсюда следует, что каждая из дуг  $B'D'C'$  и  $C'E'B'$  окружности  $L$  переходит в одну и ту же дугу  $BDC$  плоскости  $z'$ , но проходящую в противоположных направлениях (рис. 31, б).

Таким образом, преобразование (15.4) отображает внешность круга  $\bar{L}$  плоскости  $\zeta'$  во внешность дужки  $BDC$  плоскости  $z'$ . Задача об обтекании дуги может быть решена через задачу об обтекании круга.

Рассмотрим теперь проходящую через точку  $B'$  окружность  $L_1$ , центр которой  $G'$  находится на продолжении отрезка  $B'F'$  на расстояние  $\varepsilon$  от точки  $F'$ . Окружность  $L_1$  будет иметь радиус, равный  $\sqrt{k^2 + c^2} + \varepsilon$ , и будет касаться окружности  $L$  в точке  $B'$ . Так как  $L_1$  охватывает окружность  $L$  в плоскости  $\zeta'$ , то контур на плоскости  $z'$ , в который переходит окружность  $L_1$ , будет охватывать дугу  $BDC$ , но при этом, подходя к точке  $B$  с двух сторон, он будет касаться дуги  $BDC$  (по теореме о сохранении углов). Полученный таким образом контур носит название *профиля Жуковского*. При заданном расстоянии  $4c$  в плоскости  $z'$  профили, получаемые применением преобразования Жуковского к окружностям  $L_1$ , характеризуются двумя параметрами. Параметр  $k$ , равный расстоянию по мнимой оси до центра основной окружности  $L$ , в плоскости  $z'$  характеризует изгиб или кривизну профиля (его скелетной дужки). Параметр  $\varepsilon$ , равный сдвигу  $F'G'$  по радиусу центра новой охватывающей окружности  $L_1$  относительно центра основной окружности  $L$ , характеризует толщину профиля (его телесность). Таким образом, профили Жуковского образуют двупараметрическое семейство, зависящее от параметров  $k/c$  и  $\varepsilon/c$ .

Если через центр  $G'$  новой окружности  $L_1$  провести координатные оси  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , параллельные осям  $\xi'$  и  $\eta'$ , то точки

комплексной плоскости  $\zeta_1$  будут связаны с точками плоскости  $\zeta'$  преобразованием

$$\zeta' = \zeta_1 + g, \quad (15.10)$$

где  $g$  — комплексное число плоскости  $\zeta'$ , соответствующее вектору  $OG'$ . Так как  $OG' = OF' + F'G'$ , то

$$g = ki + \varepsilon e^{i(\pi - \frac{\gamma}{2})} = ki - \varepsilon e^{-\frac{\gamma}{2} i}. \quad (15.11)$$

Здесь через  $\gamma/2$  обозначен угол  $G'B'C'$ ,  $\operatorname{tg}(\gamma/2) = k/c$ . Подставляя (15.10) в (15.4), получим

$$z' = \zeta_1 + g + \frac{c^2}{\zeta_1 + g}, \quad (15.12)$$

где  $g$  определено формулой (15.11).

### Б. Графическое построение профилей Жуковского

Рассмотрим один из приемов построения профилей Жуковского, указанный Треффтцем.

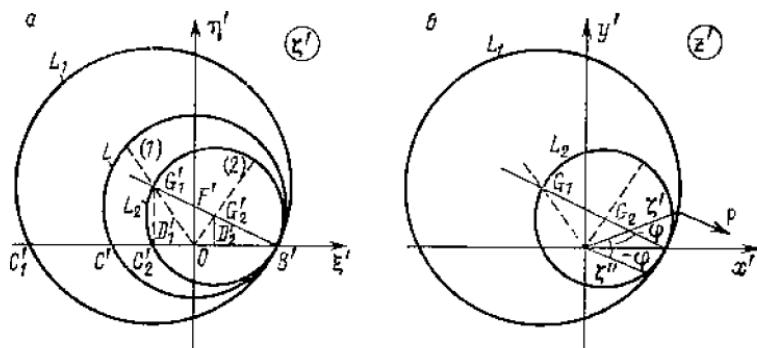


Рис. 32.

Профиль Жуковского в плоскости  $z'$  получался применением преобразования (15.4) к окружности  $L_1$  в плоскости  $\zeta'$ . Пусть в плоскости  $\zeta'$  мы имеем окружность  $L_1$  с центром в точке  $G'_1$   $(\zeta_{0'_1} = ki - \varepsilon e^{-\frac{\gamma}{2} i})$  радиуса  $\sqrt{k^2 + c^2} + \varepsilon$  (рис. 32). Проведем преобразование инверсии

$$\zeta'' = \frac{c^2}{\zeta'}. \quad (15.13)$$

В результате преобразования окружность  $L_1$  перейдет в окружность  $L_2$  (в теории функций комплексной переменной доказывается, что дробно-линейное преобразование, частным случаем которого является (15.13), переводит окружность в окружность). Точка  $\zeta' = c$  переходит в точку  $\zeta'' = c$ , т. е. окружность  $L_2$

также проходит через точку  $B'$ . В силу конформности преобразования окружность  $L_2$  будет пересекать вещественную ось под тем же углом, что и  $L_1$ , т. е.  $L_1$  и  $L_2$  будут касатьсяся друг друга в точке  $B'$ . Отсюда следует, что центр  $G'_2$  окружности  $L_2$  лежит на прямой  $B'G'_1$ .

Покажем, что луч  $OG'_2$  является отражением луча  $OG'_1$  относительно мнимой оси. Проведем перпендикуляры  $G'_1D'_1$  и  $G'_2D'_2$  к вещественной оси и докажем, что  $\frac{OD'_1}{G'_1D'_1} = \frac{OD'_2}{G'_2D'_2}$ . Из рис. 32 видно, что

$$OD'_1 = B'D'_1 - c = \frac{1}{2} B'C'_1 - c \quad (15.14)$$

и

$$OD'_2 = c - B'D'_2 = c - \frac{1}{2} B'C'_2. \quad (15.15)$$

Так как треугольники  $B'G'_1D'_1$  и  $B'G'_2D'_2$  подобны треугольнику  $B'F'O$ , то

$$\frac{G'_1D'_1}{B'D'_1} = \frac{G'_2D'_2}{B'D'_2} = \frac{F'O}{OB'} = \frac{k}{c}. \quad (15.16)$$

Отсюда

$$\frac{OD'_1}{G'_1D'_1} = \frac{\frac{1}{2} B'C'_1 - c}{\frac{k}{c} \frac{1}{2} B'C'_1} = \frac{c}{k} \frac{\frac{1}{2} (c + OC'_1) - c}{\frac{1}{2} (c + OC'_1)} = \frac{c}{k} \frac{OC'_1 - c}{OC'_1 + c}. \quad (15.17)$$

Аналогично

$$\frac{OD'_2}{G'_2D'_2} = \frac{c}{k} \frac{c - OC'_2}{c + OC'_2}. \quad (15.18)$$

При преобразовании инверсии вещественная ось переходит сама в себя, при этом точки пересечения  $C'_1$  и  $C'_2$  окружностей  $L_1$  и  $L_2$  являются соответственными, т. е.  $OC'_2 = \frac{c^2}{OC'_1}$ . Таким образом,

$$\frac{OD'_2}{G'_2D'_2} = \frac{c}{k} \frac{c - \frac{c^2}{OC'_1}}{c + \frac{c^2}{OC'_1}} = \frac{c}{k} \frac{OC'_1 - c}{OC'_1 + c} = \frac{OD'_1}{G'_1D'_1}. \quad (15.19)$$

Отсюда следуют симметричность расположения лучей  $OG'_1$  и  $OG'_2$  относительно мнимой оси и способ графического построения окружности  $L_2$ .

Каждой точке  $\zeta' = |\zeta'| e^{i\phi}$  окружности  $L_1$  будет соответствовать точка  $\zeta'' = \frac{c^2}{|\zeta'|} e^{-i\phi}$  окружности  $L_2$ .

Если провести из начала координат под некоторым углом  $\varphi$  вектор  $\zeta'$  до пересечения с окружностью  $L_1$ , а затем — под углом  $(-\varphi)$  вектор  $\zeta''$  до пересечения с окружностью  $L_2$  и прибавить второй вектор к первому, то получим некоторую точку  $P$  профиля Жуковского (рис. 32, б)  $z' = \zeta' + \zeta'' = \zeta' + \frac{c^2}{\zeta'}$ . По ряду точек мы легко сможем вычертить весь профиль.

## В. Решение задачи об обтекании профилей Жуковского

Комплексный потенциал обтекания круглого цилиндра радиуса  $R$  в плоскости  $\zeta_1$  имеет вид

$$W(\zeta_1) = k\bar{v}_\infty\zeta_1 + \frac{k v_\infty R^2}{\zeta_1} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta_1 \quad (15.20)$$

$$(v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}).$$

Чтобы из (15.20) получить комплексный потенциал  $w(z')$  обтекания профиля Жуковского, мы должны: 1) выразить  $\zeta_1$  через  $z'$ ; 2) найти  $k = \frac{dz'}{d\zeta_1} \Big|_\infty$ ; 3) определить циркуляцию  $\Gamma$  при помощи постулата Чаплыгина — Жуковского (профили Жуковского имеют одну острую кромку).

Согласно (15.12)

$$\zeta_1 + g = \frac{1}{2}(z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}),$$

откуда с учетом (15.11)

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}) - (ki - \epsilon e^{-i\frac{\gamma}{2}}). \quad (15.21)$$

Из формулы (15.12) следует, что  $k = \frac{dz'}{d\zeta_1} \Big|_\infty = 1$ . Для циркуляции  $\Gamma$ , исходя из постулата Чаплыгина — Жуковского, была получена формула (9.9). В нашем случае аргумент  $\theta_0$  в плоскости  $\zeta_1$  точки  $B'$ , в которую переходит острые кромки профиля, равен  $(-\frac{\gamma}{2})$ . С учетом выражения для  $R$  из (9.9) получим

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4\pi R |v_\infty| \sin\left(-\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) = \\ &= -4\pi (\sqrt{c^2 + k^2} + \epsilon) \sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) |v_\infty| \quad (15.22) \\ &\quad \left( \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{k}{c} \right). \end{aligned}$$

Подставляя (15.21), (15.22) в (15.20), получим окончательный вид комплексного потенциала обтекания профиля Жуковского

$$\begin{aligned}
 w(z') = & |v_\infty| e^{-ia} \left[ \frac{1}{2} (z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}) - \left( ki - \epsilon e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right) \right] + \\
 & + |v_\infty| e^{ia} \frac{(\sqrt{k^2 + c^2} + \epsilon)^2}{\frac{1}{2} (z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}) - \left( ki - \epsilon e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right)} + \\
 & + 2i (\sqrt{c^2 + k^2} + \epsilon) \sin \left( a + \frac{\gamma}{2} \right) |v_\infty| \times \\
 & \times \ln \left[ \frac{1}{2} (z' + \sqrt{z'^2 - 4c^2}) - \left( ki - \epsilon e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right) \right]. \quad (15.23)
 \end{aligned}$$

Те профили, у которых угол между верхней и нижней касательными в задней острой кромке мал, не являются прочными (у профиля Жуковского соответствующий угол вообще равен нулю). Поэтому вместо них рассматривают так называемые обобщенные профили Жуковского\*. Для их построения используют преобразование Кармана — Треффнера

$$\frac{z - \sigma c}{z + \sigma c} = \left( \frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^\sigma. \quad (15.24)$$

Если  $\sigma = \frac{2\pi - \delta}{\pi} = 2 - \frac{\delta}{\pi}$ , то в результате преобразования (15.24) окружность плоскости  $\zeta$  перейдет в профиль плоскости  $z$ , у которого угол между касательными в задней кромке равен  $\delta$  (см. рис. 27). Если  $\sigma = 2$ , то получим преобразование Жуковского.

Наряду с преобразованиями (15.24) для построения более сложных профилей используются преобразования вида

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} + \frac{A_1}{\zeta^2} + \frac{A_2}{\zeta^3} + \dots$$

(преобразования Мизеса).

## § 16. ОБТЕКАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ. МЕТОД НУЖИНА

В предыдущих параграфах было рассмотрено обтекание нескольких типов контуров (эллипс, пластинки, профили Жуковского), для которых конформное преобразование внешности профиля во внешность круга найдено точно. Для расчета обтекания профиля произвольной формы имеются различные методы, использующие идею приближенного конформного отображения внешности заданного профиля на внешность круга (методы Теодорсена, Симонова, Серебрянского, Нужина). В настоящем

\* Н. Е. Жуковский предложил способ геометрического построения подобных профилей. Он назвал их профилями типа «Антуанетт».

параграфе будет рассмотрен метод приближенного построения конформного отображения внешности заданного контура на внешность круга, предложенный С. Г. Нужиным в 1947 г. Для этого метода доказана сходимость процедуры последовательных приближений.

Пусть в плоскости  $z$  задан профиль  $l$  (рис. 33). Отметим точки  $A$  и  $B$ , наиболее удаленные друг от друга. Введем систему координат таким образом, что ось  $x$  будет направлена по хорде  $AB$ , начало координат расположим в ее середине.

Пусть уравнения верхней и нижней частей профиля

$$y_{\text{в}} = y_{\text{в}}(x), \quad y_{\text{н}} = y_{\text{н}}(x). \quad (16.1)$$

При построении функции  $z = f(\xi)$ , осуществляющей отображение внешности профиля (16.1) на внешность единичного круга в

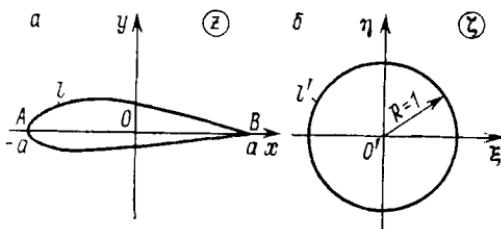


Рис. 33.

плоскости  $\xi$ , будем иметь в виду, что бесконечные точки в плоскостях  $z$  и  $\xi$  соответствуют друг другу и  $\frac{dz}{d\xi} \Big|_{\infty} > 0$ .

Будем искать функцию  $z = f(\xi)$  в виде ряда

$$z = f(\xi) = k\xi + k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\xi^n}. \quad (16.2)$$

Здесь  $k = \frac{dz}{d\xi} \Big|_{\infty}$  — вещественное положительное число. Пусть

$$k_n = a_n + ib_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (16.3)$$

Подставляя (16.3) в (16.2), учитывая, что в плоскости  $\xi$  на окружности  $l'$  единичного радиуса  $\xi = e^{i\theta}$ , получаем

$$z = x + iy = k(\cos \theta + i \sin \theta) + a_0 + ib_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)(\cos n\theta - i \sin n\theta). \quad (16.4)$$

Отсюда

$$x = a_0 + (k + a_1) \cos \theta + b_1 \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (16.5)$$

$$y = b_0 + b_1 \cos \theta + (k - a_1) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta).$$

При изменении  $\theta$  от  $0$  до  $2\pi$  точка с координатами  $x$  и  $y$  должна описывать контур  $l$  в плоскости  $z$ . Нужно найти такие

коэффициенты  $k$ ,  $a_n$  и  $b_n$ , чтобы формулы (16.5) были параметрическими уравнениями заданного профиля. Задача о нахождении коэффициентов разложений (16.4) и (16.5) решается приближенно.

Здесь нужно учесть, что для любого метода последовательных приближений очень существен выбор нулевого приближения.

В методе Нужина за нулевое приближение была принята функция Жуковского

$$z^{(0)} = f^{(0)}(\xi) = \frac{a}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad (16.6)$$

которая отображает внешность круга на внешность отрезка  $[-a, a]$ . Согласно (16.6)

$$x^{(0)} = a \cos \theta, \quad y^{(0)} = 0. \quad (16.7)$$

Формула (16.7) устанавливает соответствие между  $x$  и  $\theta$ . Если  $\theta$  меняется от 0 до  $\pi$ , имеем верхний берег разреза, если  $\theta$  меняется от  $\pi$  до  $2\pi$ , — нижний.

Сопоставляя (16.7) с (16.4) и (16.5), получаем

$$\begin{aligned} k^{(0)} &= \frac{a}{2}, & a_0^{(0)} &= 0, & b_0^{(0)} &= 0, & a_1^{(0)} &= \frac{a}{2}, \\ b_1^{(0)} &= 0, & a_n^{(0)} &= 0, & b_n^{(0)} &= 0 & (n = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (16.8)$$

Для того чтобы в следующем приближении учесть толщину профиля, в формулах (16.1) заменяют  $x$  на  $x^{(0)}$  из (16.7). Тогда в первом приближении будем иметь

$$y_{\text{в}}^{(1)} = y_{\text{в}}(a \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$y_{\text{н}}^{(1)} = y_{\text{н}}(a \cos \theta), \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi,$$

или

$$y^{(1)}(\theta) = \begin{cases} y_{\text{в}}(a \cos \theta), & \theta \in [0, \pi], \\ y_{\text{н}}(a \cos \theta), & \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (16.9)$$

Функцию  $y^{(1)}(\theta)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$y^{(1)}(\theta) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{(1)} \cos n\theta + \beta_n^{(1)} \sin n\theta). \quad (16.10)$$

Ряд (16.10) может быть использован для нахождения в первом приближении коэффициентов разложений (16.5).

Запишем (16.5) для первого приближения:

$$x^{(1)} = a_0^{(1)} + (k^{(1)} + a_1^{(1)}) \cos \theta + b_1^{(1)} \sin \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^{(1)} \cos n\theta + b_n^{(1)} \sin n\theta), \quad (16.11)$$

$$y^{(1)} = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \cos \theta + (k^{(1)} - a_1^{(1)}) \sin \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n^{(1)} \cos n\theta - a_n^{(1)} \sin n\theta). \quad (16.12)$$

Сравнивая (16.10) и (16.12), получим

$$\frac{a_0^{(1)}}{2} = b_0^{(1)}, \quad a_1^{(1)} = b_1^{(1)}, \quad a_n^{(1)} = b_n^{(1)}, \\ \beta_1^{(1)} = k^{(1)} - a_1^{(1)}, \quad \beta_n^{(1)} = -a_n^{(1)} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (16.13)$$

Из (16.13) видно, что у нас нет данных для определения  $a_0^{(1)}$  и  $k^{(1)}$  ( $a_1^{(1)} = k^{(1)} - \beta_1^{(1)}$ ). Укажем условия, из которых их можно найти. Подставляя (16.13) в (16.11), будем иметь

$$x^{(1)} = a_0^{(1)} + (2k^{(1)} - \beta_1^{(1)}) \cos \theta + a_1^{(1)} \sin \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-\beta_n^{(1)} \cos n\theta + a_n^{(1)} \sin n\theta). \quad (16.14)$$

Из выбора системы координат следует, что в любом приближении должно быть

$$x_A = x_{\min} = -a, \quad x_B = x_{\max} = a. \quad (16.15)$$

При этом в первом приближении точкам  $x_{\max} = x_B$  и  $x_{\min} = x_A$  соответствуют значения  $\theta_B^{(1)}$  и  $\theta_A^{(1)}$ , которые не равны значениям  $\theta_B = 0$  и  $\theta_A = \pi$ . (При хорошем выборе нулевого приближения  $\theta_B^{(1)}$  и  $\theta_A^{(1)}$  будут близки к величинам 0 и  $\pi$ .) Из равенства

$$\frac{dx^{(1)}}{d\theta} = 0 \quad (16.16)$$

получим

$$\theta_A^{(1)} = \theta_A^{(1)}(k^{(1)}), \quad \theta_B^{(1)} = \theta_B^{(1)}(k^{(1)}) \quad (16.17)$$

(при дифференцировании (16.14) коэффициент  $a_0^{(1)}$  исчезает, неизвестным остается лишь  $k^{(1)}$ ).

Подставим экстремальные значения  $\theta$  в (16.14) и образуем выражение

$$x_{\max}^{(1)}(k^{(1)}) - x_{\min}^{(1)}(k^{(1)}) = 2a. \quad (16.18)$$

Из (16.18) находим численно  $k^{(1)}$ . Потом из любого равенства (16.15) найдем  $a_0^{(1)}$ . Тогда все коэффициенты разложения (16.2) будут определены, т. е. нам будет известна функция

$$z = f^{(1)}(\xi). \quad (16.19)$$

Для дальнейшего уточнения решения нужно по существу повторять ту же процедуру, которая позволила перейти от нулевого приближения к первому.

Так, для получения второго приближения надо найденное  $x^{(1)}(\theta)$  подставить в (16.1), в результате чего найдем

$$y^{(2)}(\theta) = \begin{cases} y_B(x^{(1)}(\theta)), & \theta_B^{(1)} \leq \theta \leq \theta_A^{(1)}, \\ y_H(x^{(1)}(\theta)), & \theta_A^{(1)} \leq \theta \leq \theta_B^{(1)} + 2\pi, \end{cases} \quad (16.20)$$

где  $\theta_B^{(1)}$  и  $\theta_A^{(1)}$  определены в (16.17) с учетом (16.18). Имея (16.20), можно провести вычисления, аналогичные проделанным при получении первого приближения, и найти второе приближение  $z = f^{(2)}(\xi)$ . Подобным же образом могут быть определены третье и последующие приближения.

Для метода Нужина доказана сходимость, т. е. доказано, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k^{(m)} = k, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^{(m)} = a_n, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} b_n^{(m)} = b_n.$$

Обычно делают от двух до пяти приближений в зависимости от требуемой точности. Наиболее трудоемкими процедурами являются вычисление коэффициентов Фурье (вычисление квадратур) и решение серии трансцендентных уравнений для отыскания  $\theta_B(k^{(m)})$ ,  $\theta_A(k^{(m)})$  и  $k^{(m)}$ .

Расчеты показывают, что наибольшие ошибки получаются около задней кромки и около носика профиля. Решение может быть несколько упрощено за счет хорошего выбора нулевого приближения. Можно модифицировать метод Нужина, взяв за нулевое приближение не пластинку, а теоретический профиль, например обобщенный профиль Жуковского, близкий к исходному профилю в носке и задней кромке.

Мы получили приближенно отображающую функцию  $z = f(\xi)$  в виде ряда. Однако для решения задач обтекания нужна обратная функция  $\xi = F(z)$ . Обращение функции  $z = f(\xi)$  может оказаться затруднительным (особенно вблизи профиля). Можно отказаться от построения  $F(z)$  и  $w(z)$  и использовать функцию  $W(\xi)$ :

$$W(\xi) = k \bar{v}_\infty \xi + \frac{k v_\infty R^2}{\xi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \xi. \quad (16.21)$$

Присоединив к (16.21) найденную функцию

$$z = f(\xi), \quad (16.22)$$

можем исследовать решение задачи в параметрическом виде, используя сразу (16.21) и (16.22). Обычно важно знать скорости  $\bar{v} = \frac{dw}{dz}$ .

Имея (16.21) и (16.22), можем вычислить скорость

$$\bar{v} = \frac{dW}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{dW}{d\xi} \frac{1}{\frac{dz}{d\xi}}.$$

Решение получим в виде

$$\bar{v} = \bar{v}(\xi), \quad z = z(\xi).$$

### § 17. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ранее говорилось о том, что для безвихревых течений существует потенциал скорости  $\varphi$ , а для несжимаемой жидкости — функция тока  $\psi$ . Из определения этих функций следуют условия Коши — Римана

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x},\end{aligned}\tag{17.1}$$

которые в свою очередь эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;\tag{17.2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.\tag{17.3}$$

Таким образом, возможны три формулировки задачи — об отыскании потенциала  $\varphi$  (для этой функции справедливо уравнение (17.2)); об отыскании функции тока  $\psi$  (из уравнения (17.3)); об отыскании комплексного потенциала  $w(z)$  (она была сформулирована и решена для обтекания ряда контуров в настоящей главе).

Все три задачи эквивалентны друг другу. Например, если известна функция  $\varphi$ , то с точностью до константы можно найти  $\psi$ , и, следовательно,  $w(z) = \varphi + i\psi$ . Но формулировки задач различны.

Пусть решается задача для  $\varphi$ . Имеем уравнение (17.2), условия на бесконечности

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\infty} = v_x^{(\infty)}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\infty} = v_y^{(\infty)},\tag{17.4}$$

условия на поверхности обтекаемого тела

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_l = 0\tag{17.5}$$

и условие конечности производных  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  в острой кромке. Для  $\varphi$  мы имеем внешнюю задачу Неймана,

Если решается задача для  $\psi$ , имеем уравнение (17.3), условия на бесконечности

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{\infty} = v_x^{(\infty)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\infty} = -v_y^{(\infty)}, \quad (17.6)$$

условия на обтекаемом контуре

$$\psi|_l = C \quad (17.7)$$

(может быть,  $C = 0$ ) и конечность  $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$  в острой кромке.

Для  $\psi$  имеем внешнюю задачу Дирихле.

Ту же плоскую задачу можно формулировать как задачу об отыскании  $w(z)$ , исходя из того, что  $\operatorname{Re} w(z) = \varphi$  или что  $\operatorname{Im} w(z) = \psi$ : найти комплексную функцию  $w(z)$  такую, что ее действительная часть удовлетворяет всем граничным условиям для  $\varphi$ , найти  $w(z)$  такую, что ее мнимая часть удовлетворяет граничным условиям для  $\psi$ .

## ГЛАВА XIII

## ТЕОРИЯ ТОНКОГО КРЫЛА

В этой главе рассматривается задача об обтекании тонкого крылового профиля потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Предположение о тонкости профиля позволяет сделать ряд существенных упрощений в общей постановке задачи.

### § 1. ПОНЯТИЕ ТОНКОГО КРЫЛА И УСЛОВИЯ ОБТЕКАНИЯ ДЛЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Крыло будем называть тонким, если, во-первых, мало отношение толщины крыла к длине его хорды  $2a$  и, во-вторых, мал угол между направлением касательной в любой точке профиля и хордой. Кроме того, будем считать, что угол между направлением скорости и направлением хорды (угол атаки) мал.

Выберем систему координат  $x, y$  так, чтобы скорость  $V$  на бесконечности была параллельна оси  $x$ , и поместим начало координат в середину хорды профиля. Пусть

$$y_v = \mathcal{F}_1(x), \quad y_u = \mathcal{F}_2(x) \quad (1.1)$$

— уравнения верхней и нижней поверхностей крыла. Для тонкого профиля должны быть выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{F}_1(x)}{2a} \right| &\ll 1, & \left| \frac{\mathcal{F}_2(x)}{2a} \right| &\ll 1, \\ \left| \frac{d\mathcal{F}_1(x)}{dx} \right| &\ll 1, & \left| \frac{d\mathcal{F}_2(x)}{dx} \right| &\ll 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что обычные профили, с которыми приходится иметь дело при дозвуковых скоростях полета, имеют закругленную переднюю кромку и не являются тонкими в смысле данного определения. Поэтому следует иметь в виду, что решение, построенное с учетом упрощений (1.2), не будет годиться в окрестности носика. Кроме того, исключаются из рассмотрения задачи об обтекании профилей под большими углами атаки.

Кроме системы координат  $xOy$  введем скрепленную с профилем систему координат  $x^*Oy^*$ , направив ось  $x^*$  по хорде профиля ( $-a, a$ ). Угол между направлением скорости  $V$  оси  $Ox$  и хордой оси  $Ox^*$  есть угол атаки  $\alpha$  (рис. 34).

Пусть

$$y_v^* = \mathcal{F}_v(x^*), \quad y_u^* = \mathcal{F}_u(x^*) \quad (1.3)$$

— уравнения профиля в этой системе координат.

Учитывая связь между  $x, y$  и  $x^*, y^*$

$$x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

и малость угла  $\alpha$ , имеем

$$x^* = x, \quad y^* = xa + y. \quad (1.4)$$

Уравнения профиля (1.3) в системе координат  $x, y$  с учетом (1.4) примут вид

$$xa + y_a = \mathcal{F}_a(x), \quad xa + y_n = \mathcal{F}_n(x),$$

или

$$y_a = \mathcal{F}_a(x) - ax, \quad y_n = \mathcal{F}_n(x) - ax. \quad (1.5)$$

Перейдем теперь к рассмотрению общей постановки задачи обтекания и тех упрощений, которые могут быть сделаны в ней в случае тонкого профиля. Как было установлено ранее, задача об обтекании профиля будет решена, если найдена функция  $w(z)$ , удовлетворяющая условиям на бесконечности, условиям обтекания профиля (сформулированным для функции  $\psi$  или  $\phi$ ) и постулату Чаплыгина — Жуковского.

Представим комплексный потенциал  $w(z)$  в виде

$$w(z) = Vz + w'(z), \quad (1.6)$$

где  $Vz$  — комплексный потенциал поступательного потока, имеющего скорость  $V$ , а  $w'(z)$  — комплексный потенциал возмущений.

Очевидно, что на бесконечности

$$\frac{d\omega}{dz} \Big|_{\infty} = V, \quad \frac{d\omega'}{dz} \Big|_{\infty} = 0. \quad (1.7)$$

Учитывая определение комплексного потенциала

$$\omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

и (1.6), можем написать

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= Vx + \phi'(x, y), \\ \psi(x, y) &= Vy + \psi'(x, y). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\phi'$ ,  $\psi'$  — потенциал скорости и функция тока возмущенного потока. Чтобы решить задачу об обтекании тонкого профиля, достаточно найти  $w'(z)$ . Получим условие, которому должна удовлетворять функция  $\psi'$ . Поскольку контур крыла  $S$  должен являться линией тока, то, не ограничивая общности, можно положить

$$\psi|_S = 0. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.5) и (1.8) в (1.9), получаем для верхней и нижней частей профиля

$$\begin{aligned} \psi'(x, y_n) &= -V(\mathcal{F}_n(x) - ax), \\ \psi'(x, y_a) &= -V(\mathcal{F}_a(x) - ax). \end{aligned} \quad (1.10)$$

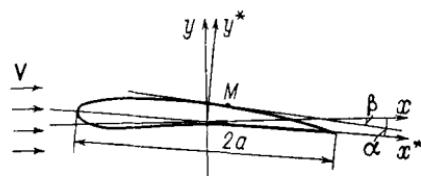


Рис. 34.

Учитывая, что тонкое крыло вносит в поток малые возмущения, разложим функции  $\psi'(x, y_v)$  и  $\psi'(x, y_u)$  в ряд Тейлора по степеням  $y_v$  и  $y_u$  в окрестности  $y_v = y_u = 0$ :

$$\begin{aligned}\psi'(x, y_v) &= \psi'(x, +0) + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \Big|_{+0} y_v + \dots, \\ \psi'(x, y_u) &= \psi'(x, -0) + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \Big|_{-0} y_u + \dots\end{aligned}\quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и ограничиваясь членами первого порядка малости, получаем условие обтекания для функции тока  $\psi'(x, y)$  в виде

$$\begin{aligned}\psi'(x, +0) &= -V(\mathcal{F}_v(x) - ax), \\ \psi'(x, -0) &= -V(\mathcal{F}_u(x) - ax).\end{aligned}\quad (1.12)$$

Таким образом, задача об отыскании  $w(z)$  вне профиля по заданным значениям  $\psi(x, y)$  на его контуре для случая тонкого профиля может быть сведена к задаче об отыскании  $w'(z)$  вне разреза  $(-a, a)$  по заданным значениям (1.12) для функции  $\psi'$  на разрезе. При этом должны быть удовлетворены условия на бесконечности (1.7) и постулат Чаплыгина — Жуковского.

Получим теперь условия обтекания, выраженные через компоненты скорости. Представим  $v_x(x, y)$ ,  $v_y(x, y)$  в виде

$$v_x = V + v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad (1.13)$$

где  $v'_x$ ,  $v'_y$  — скорости возмущений. Учитывая, что на контуре  $v_y = v_x \operatorname{tg} \beta$ , можем записать

$$\begin{aligned}v'_{y_v} &= \left( \frac{d\mathcal{F}_v}{dx} - a \right) (V + v'_x), \\ v'_{y_u} &= \left( \frac{d\mathcal{F}_u}{dx} - a \right) (V + v'_x).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Разлагая функции  $v'_{y_v} = v'_y(x, y_v)$  и  $v'_{y_u} = v'_y(x, y_u)$  в ряд Тейлора по степеням  $y_v$  и  $y_u$  в окрестности  $y_v = y_u = 0$  и ограничиваясь в (1.14) малыми первого порядка малости, получаем условия обтекания в виде

$$\begin{aligned}v'_y(x, +0) &= V \left( \frac{d\mathcal{F}_v(x)}{dx} - a \right), \\ v'_y(x, -0) &= V \left( \frac{d\mathcal{F}_u(x)}{dx} - a \right).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Таким образом, условие обтекания тонкого профиля может быть записано через скорости на верхней и нижней сторонах разреза  $(-a, a)$ .

## § 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Будем искать комплексный потенциал обтекания  $w(z)$  в виде (1.6).

Комплексная скорость возмущенного потока  $\frac{d\omega'}{dz} = v'_x - iv'_y$ . Очевидно, что на бесконечности выполнено условие

$$\left. \frac{d\omega'}{dz} \right|_{\infty} = 0. \quad (2.1)$$

Задача состоит в нахождении функции  $\omega'(z)$ , удовлетворяющей условию (2.1) на бесконечности, условиям обтекания и постулату Чаплыгина — Жуковского. Условия обтекания, записанные для функции тока, имеют вид (1.12), а для компоненты скорости  $v'_y$  — (1.15). Как было показано в § 1, эти условия записываются на верхнем и нижнем берегах разреза  $(-a, a)$ .

Перейдем от комплексного переменного  $z$  к комплексному переменному  $\xi$ , используя преобразование Жуковского

$$z = z(\xi) = \frac{a}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right). \quad (2.2)$$

Это преобразование переводит внешность единичного круга в плоскости  $\xi$  во внешность разреза  $(-a, a)$  в плоскости  $z$ .

Положим

$$\omega'(z) = \omega'(z(\xi)) = W'(\xi). \quad (2.3)$$

Будем искать функцию  $W'(\xi)$ , определенную во внешности единичного круга в плоскости  $\xi$ , удовлетворяющую условию на бесконечности

$$\left. \frac{dW'(\xi)}{d\xi} \right|_{\infty} = 0 \quad (2.4)$$

и соответствующему условию на окружности единичного радиуса. Запишем это условие. Положим  $\xi = \rho e^{i\theta}$  и введем функции  $\Phi'(\rho, \theta)$ ,  $\Psi'(\rho, \theta)$  такие, что

$$W'(\xi) = \Phi'(\rho, \theta) + i\Psi'(\rho, \theta). \quad (2.5)$$

Условия обтекания для функции тока возмущенного течения  $\psi'(x, y)$  записываются на разрезе  $(-a, +a)$ . Этому соответствует задание значений функции  $\Psi'(\rho, \theta)$  на окружности  $\rho = 1$ . Учитывая, что  $\psi'(x, y) = \Psi'(\rho, \theta)$ , получаем условие для  $\Psi'(\rho, \theta)$  на окружности  $\rho = 1$  в виде

$$\Psi'(1, \theta) = \begin{cases} -V[\mathcal{F}_n(a \cos \theta) - aa \cos \theta], & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -V[\mathcal{F}_n(a \cos \theta) - aa \cos \theta], & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.6)$$

Введем функцию

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\mathcal{F}_B(a \cos \theta)}{a}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \frac{\mathcal{F}_H(a \cos \theta)}{a}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда

$$\operatorname{Im} W'(\xi) = aV(a \cos \theta - f(\theta)). \quad (2.8)$$

Функцию  $W'(\xi)$ , заданную во внешности круга  $\rho = 1$  и удовлетворяющую условиям (2.4) и (2.6), будем искать в виде

$$W'(\xi) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n}, \quad (2.9)$$

где  $c_n = a_n + ib_n$ .

Из (2.9) получим

$$\begin{aligned} \Phi'(\rho, \theta) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \\ \Psi'(\rho, \theta) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \rho + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

На окружности  $\rho = 1$  будем иметь

$$\Psi'(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta). \quad (2.11)$$

Сопоставляя (2.8) и (2.11), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) = aV(a \cos \theta - f(\theta)). \quad (2.12)$$

Разложим функцию  $f(\theta)$  в ряд Фурье:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

и подставим этот ряд в (2.12). Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) &= \\ &= aV \left[ a \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right], \end{aligned}$$

Из последнего уравнения найдем коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ :

$$a_n = Va\beta_n, \quad n \geq 1,$$

$$b_0 = -aVa_0, \quad b_1 = aV(a - a_1), \quad b_n = -aVa_n, \quad n \geq 2.$$

Для определения  $\Gamma$  воспользуемся постулатом Чаплыгина — Жуковского, согласно которому скорость в задней кромке профиля ( $z = a$ ) должна быть конечной, и, следовательно, в этой точке должна быть конечной производная  $\frac{d\Phi'}{dx}$ . В силу того, что

$$\frac{d\Phi'}{dx} = \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{d\Phi}{d\theta} \frac{1}{a \sin \theta},$$

в задней кромке, которой соответствует  $\theta = 0$ , должно быть выполнено условие

$$\left. \frac{d\Phi'}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (2.13)$$

Воспользуемся формулой (2.10) для  $\Phi'(\rho, \theta)$  и запишем значения производной  $\frac{d\Phi'}{d\theta}$  на окружности  $\rho = 1$ :

$$\left. \frac{d\Phi'}{d\theta} \right|_{\rho=1} = \frac{\Gamma}{2\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} (-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta).$$

Отсюда, учитывая (2.13), находим оставшуюся до сих пор не определенной циркуляцию  $\Gamma$ :

$$\Gamma = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} nb_n.$$

Таким образом, оказываются известными все коэффициенты, входящие в разложение (2.9), для функции  $W'(\xi)$ .

**Замечание.** Тригонометрические ряды в ряде случаев можно просуммировать и получить решение в замкнутом виде. Однако решение в замкнутом виде, как показано ниже, можно получить и сразу.

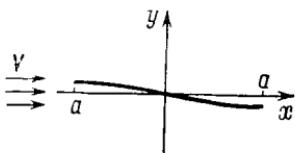


Рис. 35.

### § 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ С НУЛЕВОЙ ТОЛЩИНОЙ

В этом и следующих параграфах излагается решение задачи обтекания тонкого профиля по методу Л. И. Седова.

Заменим профиль его средней линией и рассмотрим задачу обтекания дуги  $y = \mathcal{F}(x)$  (рис. 35). В этом случае  $y_v^* = y_h^* = y^*(x)$  и  $\mathcal{F}(x) = y^*(x) - ax$  (см. (1.3), (1.5)).

Будем искать комплексную скорость возмущений  $\frac{d\omega'}{dz} = v'_x - iv'_y$ , удовлетворяющую на бесконечности условию

$$\left. \frac{d\omega'}{dz} \right|_{\infty} = (v'_x - iv'_y)|_{\infty} = 0 \quad (3.1)$$

и на контуре условиям (1.15), которые теперь запишем в виде

$$\begin{aligned} v'_y(x, +0) &= V \frac{d\mathcal{F}}{dx}, \\ v'_y(x, -0) &= V \frac{d\mathcal{F}}{dx}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вместо  $\frac{d\omega'}{dz}$  рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(z) = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \frac{d\omega'}{dz}. \quad (3.3)$$

Для однозначности выберем ту ветвь корня, которая обеспечивает его положительное значение при  $z = x > a$ . Аналитическая функция  $f(z)$  определена во внешности профиля, однозначна и в силу (3.1) стремится к нулю, когда  $z$  стремится к бесконечности. Если найдем  $f(z)$ , то станет известной и искомая скорость возмущений  $\frac{dw'}{dz}$ .

Будем искать  $f(z)$  во внешности разреза  $(-a, a)$ . Пусть  $L_1$  — контур, охватывающий отрезок  $(-a, a)$ , и  $z$  — точка вне этого контура. Введем функцию комплексного переменного

$$\Phi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}, \quad (3.4)$$

считая  $z$  параметром. Функция  $\Phi(\xi)$  имеет полюс первого порядка в точке  $\xi = z$ . Окружим эту точку замкнутым контуром  $l$  и проведем конгур  $L_2$  так, чтобы он содержал внутри себя контуры  $l$  и  $L_1$ . Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  разрезы, соединяющие контур  $l$  с  $L_1$  и  $L_2$ . Контур  $L$  (рис. 36), состоящий из контуров  $L_1$ ,  $l$ ,  $L_2$  и разрезов  $R_1$ ,  $R_2$ , проходимых дважды, ограничивает односвязную область, в которой функция  $\Phi(\xi)$  регулярна. Интеграл от функции, вычисленный по этому контуру, равен нулю:

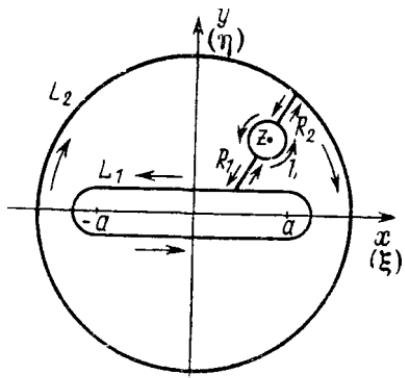


Рис. 36.

Поскольку интегралы по разрезам, проходимым в противоположных направлениях, в сумме дают нуль, из (3.5) следует, что

$$\int_L \Phi(\xi) d\xi + \int_{L_1} \Phi(\xi) d\xi + \int_{L_2} \Phi(\xi) d\xi = 0. \quad (3.6)$$

Первый интеграл в (3.6) вычислим по формуле Коши

$$\int_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z).$$

Далее учтем, что равенство (3.6) имеет место при любых контурах  $L_1$  и  $L_2$ . Поэтому выберем в качестве контура  $L_2$  окружность большого радиуса  $R$  и устремим  $R$  к бесконечности. Интеграл по  $L_2$  при этом устремится к нулю, так как  $f(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Таким образом, равенство (3.6) примет вид

$$2\pi i f(z) + \int_{L_1} \Phi(\xi) d\xi = 0$$

или

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.7)$$

Специализируем теперь вид контура  $L_1$ . Выберем  $L_1$  в виде, указанном на рис. 37, и будем стягивать  $L_1$  к отрезку  $(-a, a)$ , устремляя  $\varepsilon$  к нулю. Интегралы по окружностям  $c_1$  и  $c_2$  при этом будут стремиться к нулю.

В результате получим

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_a^{-a} \frac{f(\xi + i0)}{\xi - z} d\xi - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(\xi - i0)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введем компоненты скорости  $v'_x(\xi, \eta)$ ,  $v'_y(\xi, \eta)$  в подынтегральные выражения в (3.8). Из определения (3.3) для  $f(\xi)$  следует

$$f(\xi) = f(\xi + i\eta) = [v'_x(\xi, \eta) - iv'_y(\xi, \eta)] \sqrt{\frac{\xi + i\eta + a}{\xi + i\eta - a}}.$$

Так как на верхнем берегу разреза

$$\sqrt{\frac{\xi + a}{\xi - a}} = \sqrt{\frac{\xi + i0 + a}{\xi + i0 - a}} = -\sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} i,$$

а на нижнем

$$\sqrt{\frac{\xi + a}{\xi - a}} = \sqrt{\frac{\xi - i0 + a}{\xi - i0 - a}} = \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} i,$$

равенство (3.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} \frac{v'_x(\xi, +0) - iv'_y(\xi, +0)}{\xi - z} d\xi - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} \frac{v'_x(\xi, -0) - iv'_y(\xi, -0)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned}$$

Объединим в этом выражении члены с  $v'_x$  и члены с  $v'_y$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} \frac{v'_x(\xi, +0) + v'_x(\xi, -0)}{\xi - z} d\xi + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} \frac{v'_y(\xi, +0) + v'_y(\xi, -0)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учтем теперь граничные условия (3.2) для проекции на ось  $y$  скорости возмущений

$$v'_y(\xi, +0) = v'_y(\xi, -0) = V \frac{d\mathcal{F}(\xi)}{d\xi}$$

и примем, что

$$v'_x(\xi, +0) + v'_x(\xi, -0) = 0. \quad (3.10)$$

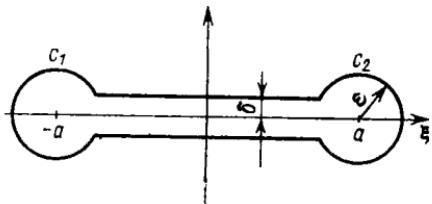


Рис. 37.

Подставляя (4.7) в (4.6), получаем

$$\frac{d\omega'}{dz} = \frac{V}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathcal{F}'(\xi)}{z - \xi} d\xi - \int_{-a}^a \frac{d}{d\xi} \frac{\mathcal{F}(\xi)}{z - \xi} d\xi.$$

Так как  $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(-a) = 0$ , то

$$\frac{d\omega'}{dz} = \frac{V}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathcal{F}'(\xi)}{z - \xi} d\xi. \quad (4.8)$$

Из (4.8) видно, что постулат Чаплыгина — Жуковского выполняется, если задняя кромка профиля  $z = a$  — точка возврата ( $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}'(a) = 0$ ).

## § 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Л. И. Седовым был предложен метод, позволяющий получить решение задачи обтекания произвольного тонкого профиля, если известно решение двух задач, рассмотренных в § 3 и 4: обтекания профиля без толщины и бесциркуляционного обтекания симметричного тонкого профиля.

Рассмотрим тонкий профиль произвольной формы

$$y_b = \mathcal{F}_b(x), \quad y_h = \mathcal{F}_h(x). \quad (5.1)$$

Образуем профиль без толщины

$$y_b^I = y_h^I = \frac{\mathcal{F}_b(x) + \mathcal{F}_h(x)}{2} \quad (5.2)$$

и симметричный профиль

$$y_b^{II} = \frac{\mathcal{F}_b(x) - \mathcal{F}_h(x)}{2}, \\ y_h^{II} = -y_b^{II} = -\frac{\mathcal{F}_b(x) - \mathcal{F}_h(x)}{2}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что

$$y_b = y_b^I + y_b^{II}, \quad y_h = y_h^I + y_h^{II}.$$

Требуется найти комплексный потенциал возмущений  $\omega'(z)$ , заданный во внешности контура (5.1) и удовлетворяющий условиям на бесконечности

$$\left. \frac{d\omega'}{dz} \right|_{\infty} = 0, \quad (5.4)$$

на контуре

$$\psi'(x, +0) = -V\mathcal{F}'_b(x), \\ \psi'(x, -0) = -V\mathcal{F}'_h(x) \quad (5.5)$$

и постулату Чаплыгина — Жуковского.

Пусть функции  $w'_I(z)$ ,  $w'_{II}(z)$  — потенциалы возмущений в случае обтекания профилей (5.2) и (5.3) соответственно. Эти

функции также удовлетворяют условиям обтекания и постулату Чаплыгина — Жуковского. Границные условия для этих функций имеют вид

$$\frac{d\omega'_1}{dz} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{d\omega'_{II}}{dz} \Big|_{\infty} = 0; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}\psi'_1(x, +0) &= \psi'_1(x, -0) = -V \frac{\mathcal{F}_B(x) + \mathcal{F}_H(x)}{2}, \\ \psi'_{II}(x, +0) &= -\psi_{II}(x, -0) = -V \frac{\mathcal{F}_B(x) - \mathcal{F}_H(x)}{2}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Составим функцию

$$\omega'_{III}(z) = \omega'_1(z) + \omega'_{II}(z).$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям на бесконечности и постулату Чаплыгина — Жуковского. Нетрудно, учитывая (5.6) и (5.7), убедиться в том, что эта функция удовлетворяет и условиям (5.5) на верхнем и нижнем берегах разреза  $(-a, +a)$ . Поэтому искомая функция  $w'(z) = \omega'_{III}(z)$ . Таким образом, комплексный потенциал возмущений обтекания произвольного тонкого профиля складывается из комплексных потенциалов возмущений обтекания профиля без толщины и бесциркуляционного обтекания симметричного тонкого профиля.

Для комплексной скорости возмущений имеем

$$\frac{dw'}{dz} = \frac{d\omega'_{III}}{dz} = \frac{d\omega'_1}{dz} + \frac{d\omega'_{II}}{dz}. \quad (5.8)$$

После того как решена задача обтекания, нужно найти давление и подъемную силу. Поскольку жидкость идеальна и движение установившееся, воспользуемся интегралом Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho}.$$

Учитывая, что

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (V + v'_x)^2 + v'_y^2$$

и пренебрегая величинами  $v'_x^2, v'_y^2$ , получаем

$$Vv'_x + \frac{p}{\rho} = \frac{p_{\infty}}{\rho},$$

Подставляя (4.7) в (4.6), получаем

$$\frac{d\omega'}{dz} = \frac{V}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathcal{F}'(\xi)}{z - \xi} d\xi - \int_{-a}^a \frac{d}{d\xi} \frac{\mathcal{F}(\xi)}{z - \xi} d\xi.$$

Так как  $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(-a) = 0$ , то

$$\frac{d\omega'}{dz} = \frac{V}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\mathcal{F}'(\xi)}{z - \xi} d\xi. \quad (4.8)$$

Из (4.8) видно, что постулат Чаплыгина — Жуковского выполняется, если задняя кромка профиля  $z = a$  — точка возврата ( $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}'(a) = 0$ ).

## § 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Л. И. Седовым был предложен метод, позволяющий получить решение задачи обтекания произвольного тонкого профиля, если известно решение двух задач, рассмотренных в § 3 и 4: обтекания профиля без толщины и бесциркуляционного обтекания симметричного тонкого профиля.

Рассмотрим тонкий профиль произвольной формы

$$y_b = \mathcal{F}_b(x), \quad y_h = \mathcal{F}_h(x). \quad (5.1)$$

Образуем профиль без толщины

$$y_b^I = y_h^I = \frac{\mathcal{F}_b(x) + \mathcal{F}_h(x)}{2} \quad (5.2)$$

и симметричный профиль

$$y_b^{II} = \frac{\mathcal{F}_b(x) - \mathcal{F}_h(x)}{2}, \\ y_h^{II} = -y_b^{II} = -\frac{\mathcal{F}_b(x) - \mathcal{F}_h(x)}{2}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что

$$y_b = y_b^I + y_b^{II}, \quad y_h = y_h^I + y_h^{II}.$$

Требуется найти комплексный потенциал возмущений  $\omega'(z)$ , заданный во внешности контура (5.1) и удовлетворяющий условиям на бесконечности

$$\left. \frac{d\omega'}{dz} \right|_{\infty} = 0, \quad (5.4)$$

на контуре

$$\psi'(x, +0) = -V\mathcal{F}'_b(x), \\ \psi'(x, -0) = -V\mathcal{F}'_h(x) \quad (5.5)$$

и постулату Чаплыгина — Жуковского.

Пусть функции  $\omega'_I(z)$ ,  $\omega'_{II}(z)$  — потенциалы возмущений в случае обтекания профилей (5.2) и (5.3) соответственно. Эти

функции также удовлетворяют условиям обтекания и постулату Чаплыгина — Жуковского. Границные условия для этих функций имеют вид

$$\frac{d\omega'_I}{dz} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{d\omega'_{II}}{dz} \Big|_{\infty} = 0; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}\psi'_I(x, +0) &= \psi'_I(x, -0) = -V \frac{\mathcal{F}_B(x) + \mathcal{F}_H(x)}{2}, \\ \psi'_{II}(x, +0) &= -\psi_{II}(x, -0) = -V \frac{\mathcal{F}_B(x) - \mathcal{F}_H(x)}{2}.\end{aligned} \quad (5.7)$$

Составим функцию

$$w'_{III}(z) = \omega'_I(z) + \omega'_{II}(z).$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям на бесконечности и постулату Чаплыгина — Жуковского. Нетрудно, учитывая (5.6) и (5.7), убедиться в том, что эта функция удовлетворяет и условиям (5.5) на верхнем и нижнем берегах разреза  $(-a, +a)$ . Поэтому искомая функция  $w'(z) = w'_{III}(z)$ . Таким образом, комплексный потенциал возмущений обтекания произвольного тонкого профиля складывается из комплексных потенциалов возмущений обтекания профиля без толщины и бесциркуляционного обтекания симметричного тонкого профиля.

Для комплексной скорости возмущений имеем

$$\frac{dw'}{dz} = \frac{dw'_{III}}{dz} = \frac{d\omega'_I}{dz} + \frac{d\omega'_{II}}{dz}. \quad (5.8)$$

После того как решена задача обтекания, нужно найти давление и подъемную силу. Поскольку жидкость идеальна и движение установившееся, воспользуемся интегралом Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho}.$$

Учитывая, что

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (V + v'_x)^2 + v'_y^2$$

и пренебрегая величинами  $v'_x^2, v'_y^2$ , получаем

$$Vv'_x + \frac{p}{\rho} = \frac{p_{\infty}}{\rho},$$

или

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{p - p_\infty}{\rho} = -Vv'_x.$$

Поскольку при рассмотрении произвольного тонкого профиля складываются скорости возмущений, соответствующие обтеканию профиля без толщины и обтеканию симметричного профиля, то складываются и возмущения давления  $p'$ , а следовательно, и подъемные силы. Симметричный профиль при бесциркуляционном обтекании имеет нулевую подъемную силу. Поэтому произвольный тонкий профиль имеет такую же подъемную силу, как и профиль без толщины, проведенный по его средней линии.

## ГЛАВА XIV

# ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Течение называется осесимметричным, если существует такая прямая  $l$ , что во всех плоскостях, проходящих через  $l$ , картина течения одинакова и траектории жидкой частицы лежат в полуплоскостях, проходящих через  $l$ . С осесимметричными течениями мы часто имеем дело на практике: например, при изучении течений в трубах и каналах, а также при обтекании тел вращения без угла атаки.

Осесимметричные течения могут описываться как в цилиндрических  $r, \varphi, z$ , так и в сферических  $r, \theta, \lambda$  координатах. В цилиндрических координатах в случае осесимметричного течения все гидродинамические величины зависят только от  $r$  и  $z$  и не зависят от  $\varphi$ , а в сферических координатах они зависят от  $r$  и  $\theta$  и не зависят от  $\lambda$ .

### § 1. ИСТОЧНИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим сферически-симметричное течение от источника обильности  $q$ , помещенного в начале координат. Такое течение представляет собой частный случай осесимметричного (все гидродинамические величины функции только  $r$ ). Поскольку жидкость несжимаемая, то уравнение неразрывности во всех точках, не совпадающих с началом координат, имеет вид  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Поскольку течение безвихревое, то  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$  и потенциал скоростей  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

В сферических координатах выражение для  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  имеет вид (см. (4.21) гл. II)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (v_\lambda r) \right\}. \quad (1.1)$$

Уравнение для потенциала скоростей получим, подставляя выражение для компонент скорости в этих координатах

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (1.2)$$

в уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \right\} = 0. \quad (1.3)$$

В случае сферически-симметричного течения  $\varphi = \varphi(r)$ , поэтому из уравнения Лапласа (1.3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем  $\varphi = -\frac{C}{r} + C_1$ .

Так как потенциал скоростей определен с точностью до произвольной постоянной, не ограничивая общности, можно считать, что  $C_1 = 0$ , т. е.

$$\varphi = -\frac{C}{r}. \quad (1.4)$$

Зная  $\varphi$ , можем вычислить проекции скорости на оси координат

$$v_r = \frac{C}{r^2}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\lambda = 0. \quad (1.5)$$

Рассмотрим сферу радиуса  $r$  с центром в начале координат. Выразим постоянную  $C$  через обильность источника  $q$ . Обильность источника есть количество жидкости, протекающей через поверхность сферы в единицу времени. Очевидно, что

$$q = 4\pi r^2 v_r = 4\pi C \text{ и } C = \frac{q}{4\pi}.$$

Тогда потенциал скоростей в случае течения от источника, помещенного в начале координат, запишется в виде

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi r}. \quad (1.6)$$

**Замечание 1.** Если источник помещен не в начале координат, а в точке с декартовыми координатами  $a, b, c$ , то

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

**Замечание 2.** Потенциал скоростей  $\varphi = -\frac{q}{4\pi r}$  является решением уравнения Лапласа во всех точках, кроме точки  $r = 0$ .

Поставим вопрос, какому уравнению удовлетворяет этот потенциал в точке  $r = 0$ . Вычислим расход жидкости через любую поверхность, охватывающую начало координат:

$$q = \iint_S v_n dS = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, имеем

$$q = \iiint_V \Delta \varphi d\tau.$$

Последнее преобразование носит формальный характер, так как функция  $\varphi$  и ее производные разрывны при  $r = 0$ . Таким обра-

зом, интеграл по любому объему  $\tau$ , содержащему начало координат, равен одному и тому же значению  $q$ . Вследствие этого подынтегральная функция  $\Delta\varphi$  может быть представлена в виде

$$\Delta\varphi = q\delta(r),$$

где  $\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  — трехмерная дельта-функция, или функция Дирака, равная нулю всюду, кроме  $r = 0$ , такая, что

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1.$$

На основании этого можно считать, что в области, содержащей начало координат, потенциал  $\varphi = -\frac{q}{4\pi r}$  удовлетворяет не уравнению Лапласа, а уравнению Пуассона с правой частью, содержащей функцию Дирака.

Хотя приведенное определение дельта-функции, как легко видеть, математически противоречиво, формальное использование этой функции часто оказывается очень полезным. В современной математической физике построена строгая теория функций Дирака и других аналогичных функций (теория обобщенных функций).

## § 2. ДИПОЛЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим течение от источника и стока. Пусть источник и сток расположены на расстоянии  $l$  друг от друга и имеют обильности, одинаковые по величине и противоположные по знаку. Пусть система координат выбрана так, что они расположены на оси  $z$  в точках  $l/2$  и  $-l/2$ . Так как уравнение для  $\varphi$  линейно, то

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (2.1)$$

где  $\varphi_1$  — потенциал течения от источника:

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}}, \quad (2.2)$$

$\varphi_2$  — потенциал течения от стока:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}. \quad (2.3)$$

Подставим (2.2), (2.3) в (2.1). Получим

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}} \right\}.$$

Рассмотрим предельный случай, когда  $q \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow 0$ , причем  $ql = M = \text{const}$ . В этом случае течение называется течением от пространственного диполя. Разложим выражение в квадратных

скобках в ряд Тейлора по степеням  $l$  и перейдем к пределу при  $l \rightarrow 0$ .

В результате получим

$$\varphi = -\frac{Mz}{4\pi r^3}, \quad \text{где } M = ql = \text{const.} \quad (2.4)$$

Величина  $M$  называется моментом диполя. Нетрудно видеть, что (2.4) можно записать в виде

$$\varphi = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Если ось диполя  $l$  не совпадает с координатной осью, то потенциал течения от диполя имеет вид

$$\varphi = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right),$$

где

$$\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(\hat{l}, \hat{x}) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(\hat{l}, \hat{y}) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(\hat{l}, \hat{z})$$

— производная по направлению оси диполя.

### § 3. ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ

Рассмотрим сферу радиуса  $R$ , движущуюся со скоростью  $u$  вдоль оси  $z$ ; вектор скорости набегающего потока  $\mathbf{V}$  направлен по оси  $z$ .

Требуется найти потенциал скоростей  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (3.1)$$

и граничным условиям на поверхности сферы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_S = u_n \quad (3.2)$$

и на бесконечности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{\infty} = V. \quad (3.3)$$

Записывая уравнения Лапласа в сферических координатах и учитывая, что течение осесимметрично и  $\varphi$  не зависит от  $\lambda$ , получаем для функции  $\varphi = \varphi(r, \theta)$  следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Границные условия (3.2), (3.3) можно записать в виде (рис. 39)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{r=R} = u \cos \theta; \quad (3.5)$$

$$v_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = V \cos \theta, \quad v_\theta \Big|_{r \rightarrow \infty} = -V \sin \theta, \quad v_\lambda \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (3.6)$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = V \cos \theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{r \rightarrow \infty} = -V \sin \theta. \quad (3.7)$$

Исходя из вида уравнения (3.4) и граничных условий (3.5), (3.7), решение будем искать в виде

$$\varphi(r, \theta) = Q(r) \cos \theta. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Эйлера для функции  $Q(r)$

$$r^2 \frac{d^2 Q}{dr^2} + 2r \frac{dQ}{dr} - 2Q = 0. \quad (3.9)$$

Представив решение в виде  $Q = r^k$ , получим следующее уравнение для  $k$ :

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

корни которого  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = 1$ .  
Поэтому

$$Q = C_1 r + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\varphi = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.10)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из граничных условий.

Из (3.10) имеем

$$v_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = C_1 \cos \theta,$$

$$v_\theta \Big|_{r \rightarrow \infty} = -C_1 \sin \theta, \quad v_\lambda \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.11)$$

Сопоставляя (3.11) и (3.6), видим, что  $C_1 = V$ . На поверхности шара

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \left( V - \frac{2C_2}{R^3} \right) \cos \theta. \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.12) и (3.5), получаем

$$C_2 = R^3 \frac{V - u}{2}. \quad (3.13)$$

Таким образом, потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \left( Vr + \frac{V-u}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.14)$$

Можно переписать эту формулу в виде

$$\varphi = Vz + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 (V - u) z, \quad (3.15)$$

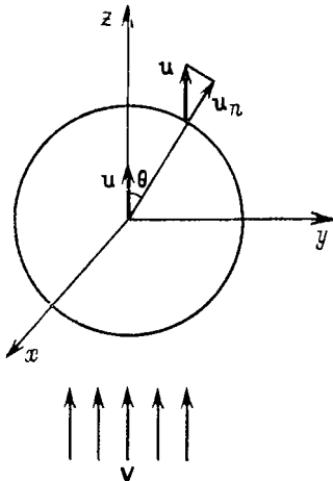


Рис. 39.

или

$$\varphi = Vz - \frac{R^3}{2}(V-u) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Очевидно, что первое слагаемое есть потенциал поступательного потока со скоростью  $V$ , а второе — потенциал диполя с моментом  $M = 2\pi R^3(u-V)$ .

Таким образом, обтекание сферы может быть представлено в виде наложения двух таких течений.

Если сфера неподвижна, то  $u = 0$  и

$$\varphi = V \left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.16)$$

Если жидкость на бесконечности поконется, то  $V = 0$  и

$$\varphi = - \frac{R^3}{2r^2} u \cos \theta. \quad (3.17)$$

Изучим распределение скоростей на поверхности неподвижной сферы ( $u = 0$ ). Из (3.16) имеем

$$v_r = V \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = - V \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$

На поверхности сферы

$$v_r|_{r=R} = 0, \quad v_\theta|_{r=R} = - \frac{3}{2} V \sin \theta. \quad (3.18)$$

Максимальное значение величины скорости на поверхности сферы равно  $\frac{3}{2} V$ , оно достигается в точках  $\theta = \pm \pi/2$ .

Напомним, что в случае обтекания бесконечного цилиндра потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости максимальное значение скорости на поверхности цилиндра равно  $2V$ .

Из интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}$$

имеем

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{V^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right).$$

Из симметрии распределения давлений следует, что главный вектор всех сил давления равен нулю. В этом заключается парадокс Даламбера в случае обтекания сферы потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

#### § 4. ФУНКЦИЯ ТОКА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

При рассмотрении осесимметричных течений удобно использовать цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах уравнение неразрывности имеет вид (см. (4.16) гл. II)

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = 0. \quad (4.1)$$

В осесимметричном течении, если ось симметрии принята за ось  $z$ , все гидродинамические величины не зависят от  $\theta$ . Поэтому в этом случае из (4.1) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим выражение  $\rho v_\rho dz - v_z d\rho$ . Вследствие (4.2) оно является полным дифференциалом некоторой функции  $\psi(\rho, z)$

$$d\psi = \rho v_\rho dz - v_z d\rho. \quad (4.3)$$

Но по определению полного дифференциала

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz. \quad (4.4)$$

Поэтому

$$v_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (4.5)$$

Функцию  $\psi(\rho, z)$ , существование которой является следствием уравнения неразрывности и производные от которой по координатам связаны с компонентами скорости соотношениями (4.5), называют функцией тока для осесимметричного течения.

Так же как и в плоском случае, функция тока обладает двумя характерными свойствами.

1. Функция тока постоянна на линии тока. Действительно, в случае осесимметричного течения уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{d\rho}{v_\rho} = \frac{dz}{v_z}.$$

Отсюда следует, что на линии тока  $v_\rho dz - v_z d\rho = 0$ , т. е.  $d\psi = 0$  и  $\psi = \text{const}$ .

2. Через  $\psi$  можно выразить расход жидкости. Подсчитаем расход жидкости, т. е. объем жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность, полученную вращением кривой  $AB$  вокруг оси  $z$  (рис. 40):

$$Q = \iint_S v_n dS = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.6)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к дуге  $AB$ .

Учитывая, что в цилиндрических координатах векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$  имеют соответственно проекции  $v_\rho, 0, v_z$  и  $n_\rho, 0, n_z$ , перепишем (4.6) в виде

$$Q = \iint_S (v_\rho n_\rho + v_z n_z) dS.$$

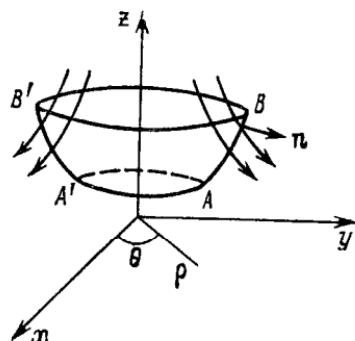


Рис. 40.

Поскольку  $dS = \rho d\theta dl$ , то

$$Q = \int_0^{2\pi} \left( \int_A^B \rho (v_\rho n_\rho + v_z n_z) dl \right) d\theta = 2\pi \int_A^B \rho (v_\rho n_\rho + v_z n_z) dl.$$

Так как  $n_\rho = \frac{dz}{dl}$ ,  $n_z = -\frac{d\rho}{dl}$ , выражение для  $Q$  можно записать в виде

$$Q = 2\pi \int_A^B \rho (v_\rho dz - v_z d\rho) = 2\pi \int_A^B d\psi = 2\pi (\psi_B - \psi_A).$$

Очевидно, что если контур  $AB$  замкнутый, то  $Q = 0$ .

Если движение потенциальное, то существует потенциал скоростей  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . В цилиндрических координатах

$$v_\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \quad v_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4.7)$$

причем для течения с осевой симметрией  $v_\theta = 0$ . Из (4.7) и (4.5) видно, что производные функций  $\psi$  и  $\varphi$  связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (4.8)$$

Заметим, что (4.8) отличаются от условий Коши — Римана, которые имели место в плоской задаче.

Запишем теперь уравнение для функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Сначала про-дифференцируем первое из условий (4.8) по  $z$ , второе по  $\rho$  и вычтем одно из другого:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) есть уравнение для функции тока  $\psi$  в случае осесимметричных течений. Это уравнение отличается от уравнения Лапласа, которому удовлетворяла функция тока в плоском случае. Теперь умножим соотношения (4.8) на  $\rho$ , затем первое из них про-дифференцируем по  $\rho$ , а второе по  $z$  и сложим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) есть уравнение для потенциала скоростей в случае осесимметричных течений. Оно представляет собой уравнение Лапласа, записанное в цилиндрических координатах.

Заметим, что если известна одна из функций  $\varphi$  или  $\psi$ , то вычисление второй из них сводится к квадратуре. Действительно, если известен потенциал скорости  $\varphi(\rho, z)$ , то для  $\psi(\rho, z)$  имеем

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\rho - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} dz \right), \\ \psi &= \psi(\rho_0, z_0) + \int_{\rho_0, z_0}^{\rho, z} \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\rho \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогично для  $\varphi(\rho, z)$

$$\varphi = \varphi(\rho_0, z_0) + \int_{\rho_0, z_0}^{\rho, z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{dz}{\rho} \right). \quad (4.12)$$

Рассмотрим несколько примеров. Запишем функции тока для некоторых осесимметричных течений.

1. Поступательный поток  $\varphi = Vz$ . По формуле (4.11) имеем  $\psi = -V \frac{\rho^2}{2} + C$ . Если ось потока  $\rho = 0$  есть линия тока  $\psi = 0$ , то  $C = 0$  и  $\psi = -\frac{V}{2} \rho^2$ .

2. Течение от источника  $\varphi = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ . Очевидно, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{q}{4\pi} \frac{\rho}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{z}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3}.$$

Используя второе из соотношений (4.8), имеем  $\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\frac{q}{4\pi} \frac{\rho z}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3}$ . Отсюда

$$\psi = \frac{q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + f(z).$$

Вычисляя производную от  $\psi$  по  $z$ , получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{\rho^2}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Но на основании первого из равенств (4.8)  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ , откуда следует, что  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ , т. е.  $f(z) = C = \text{const}$ .

Таким образом, функция тока в случае течения от источника будет

$$\psi = \frac{q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + C. \quad (4.13)$$

3. Течение от диполя:  $\varphi = -\frac{M}{4\pi} \frac{z}{r^3} = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right)$ .

Запишем выражение для  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ , используя первое равенство (4.8):

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{M\rho}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M}{4\pi} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right).$$

Отсюда будем иметь

$$\psi = \frac{M}{4\pi} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + f(\rho).$$

Вычисляя производную от этой функции по  $\rho$  и сравнивая ее с выражением для  $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$ , которое можно получить исходя из

второго соотношения (4.8), найдем, что  $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ , т. е.  $f(\rho) = \text{const}$ .

Таким образом, функция тока для течения от диполя имеет вид

$$\Psi = -\frac{M}{4\pi} \frac{\rho^2}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} + C. \quad (4.14)$$

**Замечание о постановке задач в случае потенциальных осесимметричных течений идеальной несжимаемой жидкости.** Если ищется потенциал скоростей  $\phi$ , то в случае осесимметричного течения нужно интегрировать уравнение Лапласа (4.10) с граничными условиями на поверхности тела  $\frac{\partial \phi}{\partial n}|_S = 0$  и на бесконечности (если рассматривается обтекание неподвижного тела безграничным потоком)  $\frac{\partial \phi}{\partial \rho}|_{\infty} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{\infty} = V$ .

Другими словами, задача о нахождении  $\phi(\rho, z)$  есть задача Неймана соответственно внутренняя или внешняя в зависимости от того, бесконечна область или ограничена.

Если ищется функция тока  $\psi$ , то интегрируется уравнение (4.9) с граничными условиями на теле  $\psi|_S = 0$  и на бесконечности  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}|_{\infty} = 0, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}|_{\infty} = V$ .

Как уже говорилось, в отличие от плоских течений функция тока в данном случае не является гармонической функцией.

С этим связано то обстоятельство, что для осесимметричных течений метод конформных отображений, столь эффективный для плоских задач, не может быть использован. Для решения задач в осесимметричном случае хорошо зарекомендовал себя метод источников и стоков, который рассматривается в следующем параграфе.

## § 5. ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. МЕТОД ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

Рассмотрим продольное обтекание тела, полученного вращением кривой  $AIB$  вокруг оси  $z$  (рис. 41).

Идея метода источников и стоков состоит в замене рассматриваемого тела системой источников и стоков, расположенных на оси вращения. Причем одна из поверхностей тока для течения, образованного этой системой особенностей, должна совпадать с поверхностью тела вращения. Другими словами, по за-

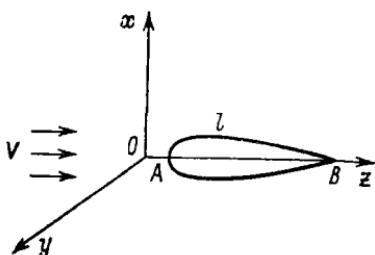


Рис. 41.

данному телу вращения требуется подобрать распределение источников и стоков.

Пусть источники (и стоки) распределены на оси  $z$  непрерывно с плотностью  $\mu(\xi)$ . Тогда суммарная обильность источников (и стоков), расположенных на отрезке  $\xi$ ,  $\xi + d\xi$ , равна  $\mu(\xi)d\xi$ . При малом  $d\xi$  можно считать, что в точке  $\xi$  расположен точечный источник обильности  $\mu(\xi)d\xi$ . Функция тока для течения от этого источника равна

$$d\psi_1 = -\frac{\mu(\xi)d\xi}{4\pi} \left(1 - \frac{z - \xi}{\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}}\right). \quad (5.1)$$

Интегрируя (5.1), получаем функцию тока для течения, образованного непрерывно распределенными по оси  $z$  источниками с плотностью  $\mu(\xi)$ :

$$\psi_1(\rho, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\xi) \left(1 - \frac{z - \xi}{\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}}\right) d\xi. \quad (5.2)$$

Наложим на этот поток поступательный поток со скоростью  $V$ , направленной вдоль оси  $z$ . Функция тока для поступательного потока

$$\psi_2 = -\rho^2 \frac{V}{2}. \quad (5.3)$$

Поскольку уравнение для функции тока линейно, то для описания суммарного течения функции тока складываются:

$$\psi(\rho, z) = -\frac{V\rho^2}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\xi) \left(1 - \frac{z - \xi}{\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}}\right) d\xi. \quad (5.4)$$

Очевидно, что, выбирая разные  $\mu(\xi)$ , мы получим разные течения. Наша задача так выбрать  $\mu(\xi)$ , чтобы получить течение около рассматриваемого тела. Для этого, во-первых, учтем, что тело непроницаемо, и, во-вторых, что одна из поверхностей тока должна совпадать с поверхностью тела вращения.

Поскольку тело непроницаемо, должно быть выполнено условие

$$\int_A^B \mu(\xi) d\xi = 0, \quad (5.5)$$

т. е. суммарная обильность источников (и стоков), расположенных внутри тела, должна быть равна нулю. При условии (5.5) из (5.4) имеем

$$\psi(\rho, z) = -\frac{V\rho^2}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{(z - \xi)\mu(\xi)}{\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}} d\xi. \quad (5.6)$$

Пусть  $\rho = \tilde{\rho}(z)$  — уравнение контура тела. На контуре  $\psi = 0$ , так как контур тела — продолжение линии тока, которая до носика тела совпадала с осью  $z$ . Тогда можем записать

$$\frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{(z - \xi)\mu(\xi)d\xi}{\sqrt{\tilde{\rho}^2(z) + (z - \xi)^2}} = \frac{1}{2} V\tilde{\rho}^2(z). \quad (5.7)$$

Мы получили уравнение для нахождения  $\mu(\zeta)$  по известному  $\tilde{\rho}(z)$ . Это интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Одним из возможных приближенных способов решения этого уравнения является следующий. Отрезок  $AB$  разбивается на интервалы, в каждом из которых выбирается точка  $\zeta_i$ , и интеграл заменяется суммой Римана

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{(z - \zeta_i) \mu(\zeta_i) \Delta_i}{\sqrt{\tilde{\rho}^2(z) + (z - \zeta_i)^2}},$$

где неизвестными являются значения  $\mu(\zeta_i)$  в точках  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Заменим в (5.7) интеграл указанной суммой и потребуем, чтобы полученное уравнение выполнялось в точках  $z_k$ , каждая из которых принадлежит интервалу  $\Delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Таким образом, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения  $\mu(\zeta_i)$ :

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(z_k - \zeta_i) \mu(\zeta_i) \Delta_i}{\sqrt{\tilde{\rho}^2(z_k) + (z_k - \zeta_i)^2}} = \frac{1}{2} V \tilde{\rho}^2(z_k).$$

## § 6. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть тело вращения с осью, параллельной оси  $z$ , обтекается потоком, скорость которого  $V$  на бесконечности перпендикулярна оси вращения (параллельна оси  $x$ ).

Представим себе, что на оси вращения на отрезке  $AB$  расположены непрерывным образом с плотностью  $\mu(\zeta)$  диполи с осями, параллельными оси  $x$ . Суммарный момент диполей, расположенных на отрезке  $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ , равен  $\mu(\zeta) d\zeta$ , и, как и ранее, при малом  $d\zeta$  можно считать, что в точке  $\zeta$  расположен диполь с моментом  $\mu(\zeta) d\zeta$ . Потенциал скоростей для течения от такого диполя равен

$$d\varphi_1 = - \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{4\pi} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2})^3}. \quad (6.1)$$

Все диполи, расположенные на  $AB$ , образуют течение с потенциалом скоростей

$$\varphi_1 = - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) x d\zeta}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2})^3} \quad (6.2)$$

или в цилиндрических координатах

$$\varphi_1 = - \frac{\rho \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3}.$$

Как и в предыдущем случае, наложим на это течение поступательный поток, текущий со скоростью  $V$  параллельно оси  $x$ . Для

такого потока потенциал скоростей равен  $\varphi = Vx$  или  $\varphi = V\rho \cos \theta$ , а для суммарного течения

$$\varphi = V\rho \cos \theta - \frac{\rho \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3}. \quad (6.3)$$

Покажем, что при определенном выборе  $\mu(\zeta)$  поверхность тела будет поверхностью тока.

Рассмотрим уравнения линий тока в цилиндрических координатах

$$\frac{d\rho}{v_\rho} = \frac{dz}{v_z} = \frac{\rho d\theta}{v_\theta} \quad (6.4)$$

и запишем выражения для  $v_\rho$ ,  $v_z$ ,  $v_\theta$ :

$$v_\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = V \cos \theta - \frac{\cos \theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3} \right\}; \quad (6.5)$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\rho \cos \theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3} \right\}; \quad (6.6)$$

$$v_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - V \sin \theta + \frac{\sin \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3}. \quad (6.7)$$

Подставив эти выражения в уравнение

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{v_\rho}{v_z},$$

нетрудно убедиться в том, что получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\rho}{dz} = f(\rho, z) \quad (6.8)$$

для нахождения функции  $\rho = \rho(z)$ .

Потребуем, чтобы равенство (6.8) выполнялось на поверхности тока, совпадающей с обтекаемым телом, уравнение контура которого имеет вид  $\rho = \Phi(z)$ . Подставляя эту функцию в (6.8), получим интегральное уравнение для нахождения  $\mu(\zeta)$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{V - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3} \right]}{\frac{1}{4\pi} \rho \frac{\partial}{\partial z} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2})^3}}.$$

Здесь  $\rho = \Phi(z)$  и  $\frac{d\rho}{dz} = \Phi'(z)$  — известные функции.

Для решения этого уравнения на практике используется метод, изложенный в предыдущем параграфе.

## § 7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть на тело вращения набегает поступательный поток со скоростью  $V$ . (Всегда можно выбрать систему координат так, чтобы вектор  $V$  лежал в плоскости  $x, z$ .) Задача состоит в интегрировании уравнения Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \quad (7.1)$$

при условиях на контуре

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (7.2)$$

и на бесконечности

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{\infty} = V_x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{\infty} = V_z. \quad (7.3)$$

Рассматриваемую задачу можно разбить на две задачи: о продольном обтекании тела вращения потоком со скоростью  $V_z$  и о поперечном обтекании тела вращения потоком со скоростью  $V_x$  на бесконечности. Пусть  $\phi_1$  — решение первой задачи, т. е.  $\phi_1$  — решение уравнения  $\Delta\phi_1 = 0$ , удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \Big|_{\infty} = V_z.$$

Пусть  $\phi_2$  — решение второй задачи, т. е.  $\phi_2$  — решение уравнения  $\Delta\phi_2 = 0$ , удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \Big|_{\infty} = V_x, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \Big|_{\infty} = 0.$$

Образуем  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ . Нетрудно видеть, что  $\phi_3$  удовлетворяет также уравнению Лапласа, а граничные условия имеют вид (7.2), (7.3). Поскольку решение уравнения Лапласа при заданных условиях единственno, отсюда следует, что искомый потенциал скоростей  $\phi$  равен  $\phi_3$ , т. е. равен сумме потенциалов скоростей продольного и поперечного обтеканий рассматриваемого тела соответственно со скоростями  $V_z$  и  $V_x$  на бесконечности.

## ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

## § 1. ОБЩИЙ ВИД ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ

Пусть в жидкости движется некоторое твердое тело, ограниченное гладкой поверхностью  $S$ . Отнесем это движение к некоторой неподвижной системе координат  $x_0y_0z_0$  и предположим, что скорость поступательного движения рассматриваемого тела относительно взятой системы отсчета равна  $u_0$  (рис. 42). Предположим также, что мгновенная угловая скорость тела относительно выбранного нами в теле полюса  $O$  равна  $\omega$ . Тогда скорость произвольной точки  $N$ , принадлежащей этому телу в его движении относительно системы  $x_0y_0z_0$ , будет выражаться формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\omega,$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из полюса в точку  $N$ . Будем далее считать, что жидкость до того момента времени, когда тело начало в ней двигаться, находилась в покое. Движущееся тело будет возмущать окружающую его жидкость, создавая в ней поле скоростей  $\mathbf{v}(t, x_0, y_0, z_0)$ . Будем предполагать, что скорости возмущенного движения жидкости убывают при удалении от тела и на бесконечности жидкость поконится. Если жидкость идеальна, баротропна и массовые силы имеют потенциал, то возмущенное движение жидкости будет также потенциальным. В случае несжимаемой жидкости потенциал этого движения будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \tilde{\phi} = 0. \quad (1.1)$$

Вследствие непроницаемости тела на его поверхности в каждой точке должно выполняться граничное условие

$$v_n = \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right)_S = (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\omega) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.2)$$

где  $n$  — орт нормали.

Для удобства вычислений рационально в дальнейшем воспользоваться подвижной системой координат  $x, y, z$  с началом в полюсе  $O$ , неизменно связанной с движущимся телом. Если закон движения тела известен, то для каждого заданного момента времени  $t$  координаты  $x_0, y_0, z_0$  можно выразить через

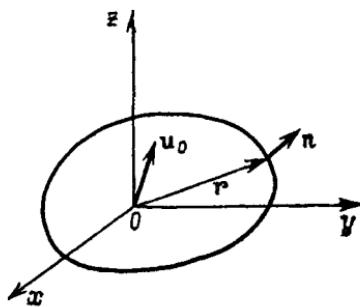


Рис. 42.

координаты  $x, y, z$  и представить потенциал  $\tilde{\Phi}(t, x_0, y_0, z_0)$  как функцию  $x, y, z$ :

$$\tilde{\Phi}(t, x_0, y_0, z_0) = \varphi(t, x, y, z). \quad (1.3)$$

Переход от системы  $x_0, y_0, z_0$  к системе  $x, y, z$  совершается с помощью переноса начала и поворота системы координат. Как известно, при указанных преобразованиях координат уравнение Лапласа сохраняет свой вид, так что

$$\Delta\varphi(t, x, y, z) = 0. \quad (1.4)$$

Условие на бесконечности также сохраняет свой вид, так как соотношения  $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \rightarrow \infty$  и  $(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \infty$  равносильны (в течение любого промежутка времени тело пройдет лишь конечный путь). Условие на теле значительно упростится, поскольку оно будет записано в системе координат, жестко связанный с телом, и будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (u_{0x} + u_{\omega x})\alpha + (u_{0y} + u_{\omega y})\beta + (u_{0z} + u_{\omega z})\gamma,$$

где  $\alpha = \cos(\hat{n}, \hat{x})$ ,  $\beta = \cos(\hat{n}, \hat{y})$ ,  $\gamma = \cos(\hat{n}, \hat{z})$ ,

$$u_{\omega x} = \omega_y z - \omega_z y, \quad u_{\omega y} = \omega_z x - \omega_x z, \quad u_{\omega z} = \omega_x y - \omega_y x,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial n} = & u_{0x}\alpha + u_{0y}\beta + u_{0z}\gamma + \omega_x(y\gamma - z\beta) + \omega_y(z\alpha - x\gamma) + \\ & + \omega_z(x\beta - y\alpha). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из формулы (1.5) непосредственно можно заключить, что потенциал  $\varphi$  должен линейно зависеть от скоростей, изменяющихся во времени, и будет иметь структуру

$$\varphi(t, x, y, z) = u_{0x}\varphi_1 + u_{0y}\varphi_2 + u_{0z}\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6, \quad (1.6)$$

где функции  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) будут функциями координат  $x, y, z$ . Такая форма представления потенциала принадлежит Г. Кирхгофу.

Из изложенного видно, что если заданы форма тела и закон его движения, то определение потенциала возмущенного движения приводит к задаче: найти вне поверхности  $S$  гармоническую функцию, стремящуюся к нулю на бесконечности, нормальная производная которой на  $S$  принимает согласно (1.2) заданные значения (1.5). Эта задача в теории потенциала носит название внешней задачи Неймана.

Вследствие линейности (1.6) все функции  $\varphi_i(x, y, z)$ , каждая в отдельности, должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.7)$$

условиям на поверхности  $S$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_S &= \alpha, \quad \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right|_S = \beta, \quad \left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial n}\right|_S = \gamma, \\ \left.\frac{\partial \varphi_4}{\partial n}\right|_S &= y\gamma - z\beta, \quad \left.\frac{\partial \varphi_5}{\partial n}\right|_S = za - x\gamma, \quad \left.\frac{\partial \varphi_6}{\partial n}\right|_S = xb - ya\end{aligned}\quad (1.8)$$

и условиям на бесконечности

$$\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|_{\infty} = \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right|_{\infty} = \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right|_{\infty} = 0. \quad (1.9)$$

Определение каждой из этих функций приводит, следовательно, к задаче Неймана.

Из (1.8) видно, что функция  $\varphi_1$  соответствует тому случаю движения тела, когда

$$u_{0x} = 1, \quad u_{0y} = u_{0z} = 0, \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \quad (1.10)$$

т. е. тело движется в направлении оси  $x$  с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют функции  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . Функция  $\varphi_4$  соответствует случаю, когда

$$u_{0x} = u_{0y} = u_{0z} = 0, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_y = \omega_z = 0, \quad (1.11)$$

т. е. тело вращается с единичной угловой скоростью вокруг оси  $x$ .

Общий вид потенциала (1.6) определяет зависимость  $\varphi$  от времени для нестационарных задач. Из (1.6) видно, что функция  $\varphi$  зависит от времени только через посредство  $u_0$  и  $\omega$ , поскольку функции  $\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right|_S$  зависят лишь от координат точек поверхности тела.

## § 2. ПОВЕДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ

Замечание о сферических функциях. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Построим решение этого уравнения, имеющее вид однородных полиномов степени  $n$ . При  $n = 0$  существует одно линейно-независимое решение  $u_0 = a = \text{const}$ . Однородный полином первой степени  $u_1 = ax + by + cz$  содержит три линейно-независимых решения. Квадратичный полином общего вида  $u_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$  будет удовлетворять уравнению Лапласа, если  $a + b + c = 0$ . Таким образом, при  $n = 2$  будем иметь пять линейно-независимых решений.

Можно показать, что существует  $2n + 1$  линейно-независимых однородных полиномов степени  $n$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа.

Вводя сферическую систему координат по формулам

$$x = r \sin \theta \cos \lambda, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \theta,$$

можно однородные гармонические полиномы степени  $n$  записать в виде

$$u_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \lambda).$$

Функция  $Y_n(\theta, \lambda)$  называется поверхностью сферической, или просто сферической функцией порядка  $n$ . Очевидно, что функция  $Y_n$  есть полином от  $\cos \theta, \sin \theta, \cos \lambda, \sin \lambda$ .

Из сказанного выше следует, что при каждом  $n$  существует  $2n + 1$  линейно-независимых сферических функций. Сферическая функция общего вида может быть представлена следующим образом:

$$Y_n(\theta, \lambda) = a_0 P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\lambda + b_m \sin m\lambda) P_{n,m}(\cos \theta),$$

где  $P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  — полиномы Лежандра, а  $P_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$  — присоединенные функции Лежандра.

Полагая поочередно один из коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  равным единице, а остальные — нулями, получим  $2n + 1$  линейно-независимых сферических функций порядка  $n$ .

При этом легко показать, что наряду с  $r^n Y_n(\theta, \lambda)$  решением уравнения Лапласа является также функция  $Y_n(\theta, \lambda)/r^{n+1}$  и что всякая гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, может быть при достаточно больших  $r$  разложена в ряд вида

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}. \quad (2.1)$$

Вернемся к задаче о движении твердого тела и рассмотрим поведение  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\Sigma$  — сфера радиуса  $R$  с центром в начале координат. Так как жидкость несжимаема и объем  $\tau$  тела не изменяется, то поток ее через поверхность  $\Sigma$  должен равняться нулю, т. е.

$$Q = \iint_{\Sigma} v_r dS = 0. \quad (2.2)$$

Потенциал скоростей  $\varphi$  можно представить в виде (2.1), откуда

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+2}}. \quad (2.3)$$

Тогда из (2.2) получим

$$-4\pi A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R^{n+2}} \iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \lambda) dS = 0. \quad (2.4)$$

Чтобы (2.4) выполнялось при  $R \rightarrow \infty$ , необходимо положить  $A = 0$ . Отсюда следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки разложение для  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}, \quad (2.5)$$

т. е.  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю как  $1/r^2$ , а  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$  — как  $1/r^3$ .

### § 3. РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА

Рассмотрим вопрос о силовом воздействии потока на тело.

На поверхность тела со стороны жидкости действуют силы давления, приложенные к элементам поверхности  $S$ . Для главного вектора этих сил и для главного момента относительно начала координат можно записать выражения

$$\mathbf{R} = - \iint_S p \mathbf{n} dS; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{L} = - \iint_S p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали к поверхности  $S$ ;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки поверхности относительно начала координат.

Так как жидкость у нас идеальная, несжимаемая, массовые силы отсутствуют, течение безвихревое, то можно записать интеграл Лагранжа в системе  $x_0, y_0, z_0$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (3.3)$$

В бесконечно далекой точке скорость равна нулю и

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right|_{\infty} + \frac{p_{\infty}}{\rho} = f(t),$$

откуда

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right|_{\infty} = f(t) - \frac{p_{\infty}}{\rho} = f_1(t).$$

Считая, что в бесконечно далекой точке потенциал скорости определен для неуставновившихся течений с точностью до некоторой функции времени, получаем

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_{\infty}}{\rho}, \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi} - \int f_1(t) dt. \quad (3.5)$$

Опуская штрихи, можем переписать (3.4) в виде

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2}. \quad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.1) и (3.2), получим

$$\mathbf{R} = \rho \iint_S \mathbf{n} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) dS \quad (3.7)$$

и

$$\mathbf{L} = \rho \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) dS. \quad (3.8)$$

Выражения для  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{L}$  можно также получить и из закона количества движения и закона момента количества движения.

Возьмем произвольную неподвижную в пространстве поверхность  $\Sigma$ , охватывающую поверхность  $S$ . Количество движения  $\mathbf{K}$  жидкости, заключенной в объеме  $\tau$  между поверхностями  $S$  и  $\Sigma$ , равно

$$\mathbf{K} = \rho \iiint_{\tau} \mathbf{v} d\tau = \rho \iiint_{\tau} \operatorname{grad} \tilde{\Phi} d\tau. \quad (3.9)$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, приведем  $\mathbf{K}$  к виду

$$\mathbf{K} = \rho \iint_{\Sigma} \tilde{\Phi} \mathbf{n} dS - \rho \iint_S \tilde{\Phi} \mathbf{n} dS. \quad (3.10)$$

Применяя закон количества движения к массе жидкости в объеме  $\tau$ , будем иметь

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}, \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{R}'$  — главный вектор сил, приложенных к поверхности  $\Sigma$  со стороны жидкости, находящейся вне  $\tau$ . Отсюда

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' - \frac{d\mathbf{K}}{dt}. \quad (3.12)$$

Для  $\mathbf{R}'$ , учитывая (3.6), получаем

$$\mathbf{R}' = - \iint_{\Sigma} p \mathbf{n} dS = \rho \iint_{\Sigma} \mathbf{n} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) dS. \quad (3.13)$$

Количество движения частиц жидкости, находящихся в объеме  $\tau$ , меняется со временем. Часть количества движения переносится через поверхность  $\Sigma$  за счет жидкости, втекающей (вытекающей) через эту поверхность. Поэтому суммарное изменение за время  $dt$  количества движения жидкости в объеме  $\tau$  равно

$$d\mathbf{K} = d \left[ \rho \iint_{\Sigma} \tilde{\Phi} \mathbf{n} dS - \rho \iint_S \tilde{\Phi} \mathbf{n} dS \right] + \rho \iint_{\Sigma} \mathbf{v} v_n dS dt. \quad (3.14)$$

Последнее слагаемое в (3.14) соответствует изменению количества движения за счет жидкости, которая втекла в объем  $\tau$  или вытекла из него за время  $dt$  через поверхность  $\Sigma$ . Таким образом,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS - \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS + \iint_{\Sigma} \rho v v_n dS. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.13) и (3.15) в (3.12), получим

$$\begin{aligned} R = & \rho \iint_{\Sigma} \mathbf{n} \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) dS - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS + \\ & + \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS - \iint_{\Sigma} \rho v v_n dS. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как поверхность  $\Sigma$  неподвижна, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS &= \iint_{\Sigma} \rho \mathbf{n} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} dS, \text{ поэтому} \\ R &= \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS + \rho \iint_{\Sigma} \left( \mathbf{n} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} v_n \right) dS. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Учитывая, что на  $\Sigma$  при больших  $R$  потенциал  $\tilde{\varphi}$  имеет порядок  $\frac{1}{R^2}$ , а  $v$  — порядок  $\frac{1}{R^3}$ , получаем, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по  $\Sigma$  в (3.17) будет стремиться к нулю. Таким образом, устремляя  $R$  к бесконечности, находим, что сила, с которой действует безгранична жидкость на тело, такова:

$$R = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\varphi} \mathbf{n} dS. \quad (3.18)$$

Теперь получим формулу для главного момента сил давлений, приложенных к телу. Если  $I$  — момент количества движения жидкости в объеме  $\tau$ ,  $L$  и  $L'$  — главные моменты сил давлений, которые действуют на поверхности  $S$  и  $\Sigma$ , то закон моментов запишется в виде

$$\frac{dI}{dt} = L' - L. \quad (3.19)$$

Согласно определению

$$I = \rho \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d\tau = \rho \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \tilde{\varphi}) d\tau.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского, получаем

$$I = \rho \iint_{\Sigma} \tilde{\varphi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS - \rho \iint_S \tilde{\varphi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS. \quad (3.20)$$

Вместо (3.12) будем иметь

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' - \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (3.21)$$

Выражения для  $\mathbf{L}'$  и  $\frac{d\mathbf{l}}{dt}$  будут аналогичны выражениям (3.13) и (3.15):

$$\mathbf{L}' = \rho \iint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) dS, \quad (3.22)$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \rho \tilde{\Phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS - \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\Phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS + \iint_{\Sigma} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) v_n dS.$$

Учитывая неподвижность  $\Sigma$  в пространстве, приходим к формуле, аналогичной (3.17); затем, устремляя  $R$  к бесконечности, получаем окончательно

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\Phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS. \quad (3.23)$$

#### § 4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Твердое тело под действием внешних сил движется в идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Возникающее при этом движение жидкости потенциально. Как было установлено выше, силы давления, действующие со стороны жидкости на тело, приводятся к главному вектору  $\mathbf{R}$  и главному моменту  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{R} = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\Phi} \mathbf{n} dS,$$

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \tilde{\Phi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS.$$

Обозначим через  $\mathbf{G}$  главный вектор количества движения, через  $\mathbf{H}$  — главный момент количества движения твердого тела. Внешние силы, отличные от сил давления, приводятся к главному вектору  $\mathbf{F}$  и главному моменту  $\mathbf{Q}$  ( $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{Q}$  следует считать заданными).

Применяя закон количества движения и закон моментов количества движения к телу, движущемуся в жидкости, можем написать

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \mathbf{R} + \mathbf{F}, \\ \frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \mathbf{L} + \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя в эти равенства выражения для  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{L}$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \mathbf{G} - \rho \iint_S \tilde{\varphi} \mathbf{n} \, dS \right) &= \mathbf{F}, \\ \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{H} - \rho \iint_S \tilde{\varphi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \, dS \right] &= \mathbf{Q}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Интегралы

$$\mathbf{B} = -\rho \iint_S \tilde{\varphi} \mathbf{n} \, dS, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{I} = -\rho \iint_S \tilde{\varphi} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \, dS \quad (4.4)$$

называются присоединенным количеством движения и присоединенным моментом количества движения соответственно. Иногда вектор  $\mathbf{G} + \mathbf{B}$  называют импульсивной силой, а вектор  $\mathbf{H} + \mathbf{I}$  — импульсивной парой.

Уравнения (4.2) удобнее рассматривать в подвижной системе координат, связанной с телом. Действительно, в § 1 был приведен общий вид потенциала (1.6), при этом для потенциалов  $\varphi_i$  были выписаны условия (1.8). В системе координат, связанной с телом, направляющие косинусы внешней нормали  $\alpha, \beta, \gamma$  фиксированы. Каждая из функций  $\varphi_i$  определяется только геометрией тела. Опираясь на соотношения (1.6) и (1.8), можно указать сравнительно простые формулы для вычисления векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{I}$ . Обозначим

$$\begin{aligned}u_{0x} &= U_1, & u_{0y} &= U_2, & u_{0z} &= U_3, \\ \omega_x &= U_4, & \omega_y &= U_5, & \omega_z &= U_6.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Тогда (1.6) перепишется в виде

$$\varphi = \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k. \quad (4.6)$$

Если ввести также обозначения

$$\begin{aligned}B_x &= B_1, & B_y &= B_2, & B_z &= B_3, \\ I_x &= B_4, & I_y &= B_5, & I_z &= B_6,\end{aligned}\quad (4.7)$$

то согласно формулам (4.3), а также (1.8) можем записать

$$\begin{aligned}B_1 &= -\rho \iint_S \varphi \alpha \, dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \, dS, \\ B_2 &= -\rho \iint_S \varphi \beta \, dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \, dS, \\ B_3 &= -\rho \iint_S \varphi \gamma \, dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \, dS.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Из (4.4) с учетом (1.8) следуют равенства

$$\begin{aligned} B_4 &= -\rho \iint_S \varphi (y\gamma - z\beta) dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS, \\ B_5 &= -\rho \iint_S \varphi (z\alpha - x\gamma) dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS, \\ B_6 &= -\rho \iint_S \varphi (x\beta - y\alpha) dS = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) можно объединить:

$$B_i = -\rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS. \quad (4.10)$$

Подставим (4.6) в (4.10). Получим

$$B_i = -\sum_{k=1}^6 \rho U_k \iint_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS, \quad (4.11)$$

или

$$B_i = \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_k, \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i, k = 1, \dots, 6). \quad (4.13)$$

Из (4.12) следует, что все  $B_i$ , т. е. компоненты присоединенного вектора количества движения  $\mathbf{B}$  и присоединенного вектора момента количества движения  $\mathbf{I}$ , выражаются через  $U_k$  (т. е. компоненты скорости твердого тела  $u_0$  и угловой скорости  $\omega$ ) и коэффициенты  $\lambda_{ik}$ , определенные формулами (4.13). Эти коэффициенты, имеющие размерность массы, определяются по существу геометрией тела (в подвижной системе от времени они не зависят). Их называют присоединенными массами. Всего имеется 36 коэффициентов  $\lambda_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ).

В действительности среди этих 36 коэффициентов различных не больше, чем 21, так как имеет место симметрия коэффициентов

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}, \quad \begin{cases} k = 1, \dots, 6, \\ i = 1, \dots, 6. \end{cases} \quad (4.14)$$

Докажем это. Используя вторую формулу Грина, можем записать

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) d\tau &= \\ &= \iint_S \left( \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS - \iint_S \left( \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В нашем случае  $\tau$  — объем жидкости, заключенный между поверхностью тела  $S$  и некоторой сферой  $\Sigma$  радиуса  $R$ .

Левая часть в (4.15) равна нулю, так как все функции  $\Phi_i$  являются гармоническими. Функции  $\Phi_i$  и  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}$  на сфере соответственно имеют порядок  $\frac{1}{R^2}$  и  $\frac{1}{R^3}$ , поэтому интеграл по поверхности  $\Sigma$  в (4.15) при  $R \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю как  $\frac{\text{const}}{R^3}$ . Таким образом, получаем

$$\iint_S \left( \varphi_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) dS = 0,$$

откуда следуют равенства (4.14).

Когда решены задачи об отыскании  $\varphi_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ), вычисление присоединенных масс  $\lambda_{ik}$  сводится к вычислению квадратур (4.13).

Запишем выражение для кинетической энергии  $T$  жидкости, окружающей тело. Кинетическая энергия жидкости в объеме  $\tau$  будет равна

$$T_\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_\tau v^2 d\tau. \quad (4.16)$$

Так как движение жидкости потенциальное, равенство (4.16) можно переписать в виде

$$T_\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_\tau \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (4.17)$$

На основании первой формулы Грина будем иметь

$$\iiint_\tau \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \iint_\Sigma \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS.$$

Нетрудно убедиться, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по  $\Sigma$  стремится к нулю, и, следовательно,

$$T = -\frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS. \quad (4.18)$$

Подставляя в (4.18) формулу (4.6) для потенциала  $\varphi$ , получим следующее выражение для кинетической энергии жидкости:

$$T = -\frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 U_k U_l \iint_S \varphi_k \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dS,$$

или согласно (4.13)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 \sum_{k=1}^6 \lambda_{lk} U_k U_l. \quad (4.19)$$

Компоненты  $B_i$ , определяемые формулами (4.12), теперь можно записать в виде

$$B_i = \frac{\partial T}{\partial U_i}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.20)$$

Если рассматриваемое тело имеет плоскость симметрии, то, принимая эту плоскость за одну из координатных плоскостей, например за плоскость  $(x, y)$ , можно упростить вычисление функций  $B_i$  и  $T$ .

Действительно, в этом случае величины  $\alpha = \cos(\widehat{n, x})$  и  $\beta = \cos(\widehat{n, y})$  будут четными функциями, а  $\gamma = \cos(\widehat{n, z})$  — нечетной функцией координаты  $z$ . При этом согласно формулам (1.8) для искомых гармонических функций на поверхности обтекаемого тела будем иметь равенства

$$\left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right)_A = \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right)_{A'}, \quad i = 1, 2, 6; \quad (4.21)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right)_A = - \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right)_{A'}, \quad k = 3, 4, 5, \quad (4.22)$$

где  $A$  и  $A'$  — симметричные относительно плоскости  $x, y$  точки поверхности.

Условиям (4.21) будут удовлетворять гармонические функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_6$ , четные относительно переменной  $z$ , а условиям (4.22) — функции  $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ , нечетные относительно  $z$ . Действительно, если функция  $\varphi$  — четная по  $z$ , то  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  — нечетная, а  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  — четные функции относительно  $z$ , и, следовательно,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma$  — четная функция по  $z$ . Аналогично рассматривается случай функций, нечетной по  $z$ .

Покажем, что в этом случае коэффициенты  $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$  ( $i = 1, 2, 6; k = 3, 4, 5$ ) обращаются в нуль. Используя формулы (4.13) и вводя обозначения  $S_h$  и  $S_b$  для симметричных относительно плоскости  $x, y$  частей поверхности, можем написать

$$\lambda_{13} = - \rho \iint_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS = - \rho \iint_{S_h} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS - \rho \iint_{S_b} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS. \quad (4.23)$$

Вследствие нечетности подынтегральной функции и симметрии частей поверхности  $S_h$  и  $S_b$  будем иметь

$$\lambda_{13} = 0. \quad (4.24)$$

Совершенно аналогично получим

$$\lambda_{1k} = 0, \quad k = 4, 5; \quad (4.25)$$

$$\lambda_{ik} = 0, \quad i = 2, 6; \quad k = 3, 4, 5.$$

В случае, если поверхность  $S$  имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии (например,  $S$  — поверхность эллипсоида), подобным образом можно показать, что все коэффициенты  $\lambda_{ik}$  с разными индексами обращаются в нуль.

В качестве примера рассмотрим обтекание сферы радиуса  $R$ , движущейся в жидкости со скоростью  $v$  под действием некоторой силы  $F$ , приложенной в центре шара.

Воспользуемся полученными ранее результатами. Согласно формуле (3.17) гл. XIV потенциал обтекания шара, движущегося с единичной скоростью вдоль оси  $z$ , будет

$$\Phi_3 = -\frac{R^3 \cos \theta}{2r^2}, \quad (4.26)$$

где  $r, \theta, \lambda$  — сферические координаты с началом в центре шара и полярной осью, направленной по оси  $z$ . Из (4.26) следуют равенства

$$\left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right|_{r=R} = \cos \theta, \quad \Phi_3|_{r=R} = -\frac{R}{2} \cos \theta. \quad (4.27)$$

Подставив (4.27) в (4.13), найдем

$$\begin{aligned} \lambda_{33} &= -\rho \iint_S \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = \frac{\rho R}{2} \iint_S \cos^2 \theta dS = \\ &= \frac{\rho R^3}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{2}{3} \rho \pi R^3. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Точно так же получим

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3. \quad (4.29)$$

Последние три равенства (1.8), если перейти в них к сферическим координатам и учесть, что при этом  $\alpha = \sin \theta \cos \lambda$ ,  $\beta = \sin \theta \sin \lambda$ ,  $\gamma = \cos \theta$  (нормаль к поверхности сферы направлена по радиусу), дают

$$\left. \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} \right|_{r=R} = 0.$$

Отсюда непосредственно следуют равенства

$$\lambda_{44} = \lambda_{55} = \lambda_{66} = 0. \quad (4.30)$$

Отметим, что равенство нулю производной  $\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right|_{r=R}$  и равенство нулю функции  $\Phi_i$  на бесконечности обеспечивают равенство нулю этой функции во всем пространстве.

Далее, в силу симметрии шара можно утверждать, что все  $\lambda_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ .

Таким образом, формулы (4.12) примут вид

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{2}{3} \rho \pi R^3 U_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ B_i &= 0, \quad i = 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Согласно обозначениям (4.7) равенства (4.31) эквивалентны двум векторным равенствам

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \mathbf{U}, \quad \mathbf{I} = 0. \quad (4.32)$$

В соответствии с формулами (3.18) и (3.23) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= -\frac{2}{3} \rho \pi R^3 \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \\ \mathbf{L} &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Формулы (4.33) дают главный вектор и главный момент сил, действующих со стороны жидкости на сферу. Из (4.33) непосредственно видно, что в нашем случае силы приводятся к одной равнодействующей, приложенной в центре шара. Равенство нулю главного момента можно было бы предвидеть и с самого начала вследствие симметрии задачи.

Если масса шара равна  $m$  и на шар действует сила  $\mathbf{F}$ , приложенная в его центре, то уравнения движения шара (4.2) можно переписать в виде

$$m \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F},$$

или

$$\left( m + \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \right) \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.34)$$

Таким образом, движение шара происходит так, как оно происходило бы в пустоте при том, что масса шара увеличилась на величину  $\frac{2}{3} \rho \pi R^3$ , равную половине массы жидкости, вытесненной шаром.

## ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Предыдущие главы были посвящены рассмотрению течений идеальной жидкости, для которых существовал потенциал скорости  $\varphi$ . В этом случае  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ , и поскольку для любой функции  $f$  имеет место равенство  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ , поле скоростей было безвихревым:  $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ .

В этой главе мы будем рассматривать вихревые движения, т. е. такие движения, у которых вектор вихря во всех точках области или какой-либо ее части не равен нулю:  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ .

При изучении вихревых движений приходится иметь дело с такими понятиями, как циркуляция скорости и поток вектора вихря скорости через поверхность. Из теоремы Стокса следует, что поток вихря через поверхность  $S$  равен циркуляции скорости по контуру, ограничивающему эту поверхность:

$$\iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}).$$

Таким образом, циркуляция является одной из важных характеристик вихревых течений.

### § 1. ТЕОРЕМА ТОМСОНА

Прежде чем сформулировать и доказать теорему Томсона, получим один вспомогательный результат кинематического характера. Рассмотрим, как с течением времени изменяется циркуляция скорости  $\Gamma$ , вычисляемая по контуру, состоящему все время из одних и тех же частиц жидкости (так называемому «жидкому» контуру). Такой контур перемещается вместе с жидкостью и может деформироваться. Очевидно, что для жидкого контура  $\Gamma = \Gamma(t)$ .

Рассмотрим незамкнутый жидкий контур  $AB$  в различные моменты времени. Для такого контура

$$\Gamma(t) = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (1.1)$$

Для того чтобы составить представление об изменении  $\Gamma(t)$ , вычислим производную

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2)$$

Очевидно, что пределы интегрирования  $A$  и  $B$  зависят от времени  $t$ . Перейдем в интеграле к такой переменной, у которой область интегрирования не зависит от времени. Пусть  $A_0 B_0$  — положение кривой  $AB$  в момент времени  $t = t_0$ . Введем координаты Лагранжа, а именно каждую точку (частицу)  $M$  на  $AB$

в момент времени  $t$  будем характеризовать моментом времени  $t$  и положением  $M_0$  частицы на кривой  $A_0B_0$  в начальный момент времени  $t_0$  (рис. 43).

Положение частицы на  $A_0B_0$  можно задавать длиной дуги  $s$ , отсчитываемой от точки  $A_0$ . Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $M$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ , а скорость  $\mathbf{v}$  и ускорение  $\mathbf{w}$  согласно определению будут равны соответственно

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Так как при интегрировании вдоль контура время  $t$  фиксировано и  $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds$ , то (1.1) можно переписать в виде

$$\Gamma(t) = \int_0^l \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds. \quad (1.4)$$

Здесь  $l$  — длина дуги  $A_0B_0$ . В интеграле (1.4) пределы интегрирования постоянны, и при отыскании  $\frac{d\Gamma}{dt}$  можно проводить дифференцирование под знаком интеграла:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^l \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial s} \right) ds = \int_0^l \mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds + \int_0^l \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds.$$

Вдоль контура  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) ds = d \left( \frac{v^2}{2} \right)$ .

Переходя к старым переменным, получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B d \left( \frac{v^2}{2} \right) = \int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}. \quad (1.5)$$

Если кривая замкнута ( $A = B$ ), то

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Таким образом, производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому (жидкому) контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.

Применим полученный нами результат для доказательства так называемой теоремы Томсона: если жидкость идеальна, баротропна и массовые силы имеют потенциал, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не зависит от времени.

Для идеальной жидкости имеем

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Так как жидкость баротропна ( $\rho = \rho(p)$ ), то существует функция  $P(p)$  такая, что  $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P$ . Вследствие того, что

массовые силы консервативны,  $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$ . Поэтому, учитывая условия теоремы Томсона, будем иметь

$$\mathbf{w} = -\operatorname{grad}(P + V). \quad (1.8)$$

Подставив (1.8) в доказанное равенство (1.6), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \operatorname{grad}(P + V) \cdot d\mathbf{r} = -\oint d(P + V) = 0, \quad (1.9)$$

откуда

$$\Gamma(t) = \text{const.}$$

Таким образом, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью, остается для этого контура постоянной во все время движения.

**Замечание.** При записи (1.9) учитывается, что интеграл вычисляется для данного момента времени, поэтому  $\operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = df$ .

Поскольку из теоремы Стокса следует, что поток вихря через поверхность  $S$  равен циркуляции скорости по контуру, ограничивающему эту поверхность, то из теоремы Томсона вытекает, что поток вектора вихря через поверхность  $S$ , ограниченную жидким контуром, не зависит от времени.

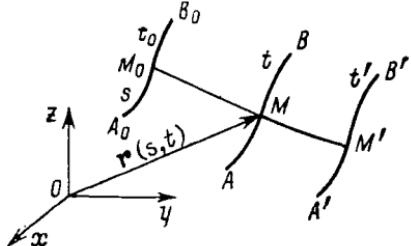


Рис. 43.

## § 2. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Пусть выполнены условия теоремы Томсона, т. е. жидкость идеальна, баротропна и массовые силы консервативны. Тогда справедлива следующая теорема Лагранжа: если в некоторый момент времени  $t_0$  в фиксированной массе жидкости нет вихрей, то их не было в предыдущие и не будет в последующие моменты времени.

Действительно, пусть в рассматриваемой массе жидкости, находящейся в объеме  $\tau$ , в момент времени  $t_0$  нет вихрей, т. е.  $\Omega = 0$ . Тогда течение жидкости потенциально:  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$  и циркуляция скорости  $\Gamma_0$  по произвольному замкнутому контуру  $l_0$  равна нулю:

$$\Gamma_0 = \oint_{l_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{l_0} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим выделенную массу жидкости в любой другой момент времени  $t$  и в ней возьмем произвольный контур  $l$ . Любому контуру  $l$  в момент  $t$  можно сопоставить контур  $l_0$  в момент  $t_0$ , состоящий из тех же частиц жидкости, для которого справедлива формула (2.1).

По теореме Томсона циркуляция  $\Gamma$  по контуру  $l$  будет также равна нулю. Применяя формулу Стокса, получаем для любого момента времени

$$\iint_S \Omega_n dS = \Gamma = 0, \quad (2.2)$$

где  $S$  — поверхность, ограниченная контуром  $l$  и целиком находящаяся в объеме, занимаемом жидкостью.

Поскольку для любой области  $S$  интеграл равен нулю, из (2.2) следует, что  $\Omega = 0$ . Теорема Лагранжа составляет основу для рассмотрения безвихревых течений в гидромеханике идеальной жидкости, так как если движение жидкости безвихревое (потенциальное) в начальный момент времени, то оно будет безвихревым (потенциальным) и в последующие моменты времени.

Все предположения в теореме Лагранжа существенны. В частности, существенно не сформулированное явно предположение о гладкости поля скоростей.

В условиях Земли теорема Лагранжа является приближенной, так как массовые силы будут консервативны, если не учитывать силы Кориолиса, а сжимаемую жидкость можно рассматривать как баротропную, если пренебречь рядом факторов, например, теплопроводностью и др.

### § 3. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В этом параграфе предполагаются выполнеными условия теоремы Томсона, а именно: жидкость идеальна, баротропна и массовые силы консервативны.

**Первая теорема.** Если жидкие частицы в какой-либо момент времени  $t_0$  образуют вихревую линию, то эти же частицы образуют вихревую линию во все последующие и все предыдущие моменты времени.

Докажем сначала, что если в некоторый момент времени жидкие частицы образуют вихревую поверхность, то эти же частицы образуют вихревую поверхность при всех  $t$  ( $t < t_0$  и  $t > t_0$ ).

В каждой точке вихревой поверхности согласно ее определению вектор вихря скорости перпендикулярен нормали к поверхности, т. е.

$$\Omega_n = \Omega \cdot n = 0. \quad (3.1)$$

Пусть жидкие частицы в момент  $t_0$  образуют вихревую поверхность  $S_0$ . Рассмотрим на этой поверхности произвольный замкнутый контур  $l_0$ , ограничивающий участок поверхности  $\sigma_0$ . Согласно формуле Стокса имеем

$$\Gamma = \oint_{l_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\sigma_0} \Omega \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.2)$$

В момент времени  $t$  частицы жидкости, находившиеся в момент  $t_0$  на контуре  $l_0$ , образуют контур  $l$ , ограничивающий площадку  $\sigma$  поверхности  $S$ , на которую перешли частицы с поверхности  $S_0$ . Но по теореме Томсона циркуляция по жидкому контуру не меняется со временем, т. е.

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Следовательно, для участка  $\sigma$  поверхности  $S$ , учитывая формулу Стокса, получаем

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.3)$$

Ввиду произвольности  $\sigma$  из (3.3) следует, что в любой точке поверхности выполняется (3.1), т. е. поверхность  $S$  вихревая. Действительно, допустим, что это не так и поверхность не вихревая, тогда найдется такая точка  $A$  этой поверхности, в которой  $\Omega_n \neq 0$ . По непрерывности  $\Omega_n \neq 0$  и в некоторой области, ограничивающей эту точку. Эту область можно выбрать настолько малой, что  $\Omega_n$  будет сохранять тот же знак, что и в точке  $A$ . Взяв эту область за  $\sigma$ , получим  $\iint_{\sigma} \Omega_n d\sigma \neq 0$ , что противоречит (3.3).

Докажем теперь, что вихревая линия остается при движении жидкости вихревой. Пусть в момент времени  $t_0$  жидккая кривая  $A_0B_0$  есть вихревая линия. Проведем через какую-либо точку этой линии две пересекающиеся кривые. Проведя через точки этих кривых вихревые линии, получим вихревые поверхности  $S_1^{(0)}$  и  $S_2^{(0)}$ . Линия пересечения  $S_1^{(0)}$  и  $S_2^{(0)}$  есть по построению вихревая линия  $A_0B_0$ . В момент времени  $t$  жидкие поверхности  $S_1^{(0)}$  и  $S_2^{(0)}$  перейдут в поверхности  $S_1$  и  $S_2$ . По доказанному выше поверхности  $S_1$  и  $S_2$  будут вихревыми. На поверхности  $S_1$  будут все жидкые частицы, которые были на  $S_1^{(0)}$ , на  $S_2$  — все частицы, которые были на  $S_2^{(0)}$ . Жидкие частицы, которые принадлежали сразу двум поверхностям  $S_1^{(0)}$  и  $S_2^{(0)}$ , опять будут принадлежать сразу двум поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ . Это значит, что вихревая линия  $A_0B_0$  перешла в линию пересечения  $AB$  вихревых поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ .

Вектор вихря  $\boldsymbol{\Omega}$  в любой точке пересечения двух поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  должен лежать в касательной плоскости к каждой из поверхностей, т. е. вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  направлен по касательной к линии пересечения  $AB$ , поэтому линия  $AB$  — вихревая линия.

**Вторая теорема.** Интенсивность вихревой трубки постоянна по ее длине и не изменяется со временем.

Совокупность вихревых линий, проведенных через замкнутый контур, образует вихревую трубку. Интенсивностью вихревой трубки называют циркуляцию скорости по контуру, охватываю-

щему трубку  $\Gamma = \oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ . Такое понятие имеет смысл, если интенсивность (т. е. циркуляция  $\Gamma$ ) не зависит от положения контура  $l$  по длине трубы. По теореме Стокса  $\Gamma = \oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \Omega_n d\sigma$ , где  $\sigma$  — поверхность, пересекающая вихревую трубку.

Докажем, что для всех контуров  $l$ , лежащих на поверхности трубы и охватывающих ее, интенсивность одна и та же. Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — два каких-либо из таких контуров. Рассмотрим объем  $\tau$ , ограниченный поверхностью  $S$ , состоящий из  $S_1, \Sigma, S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — сечения трубы, ограниченные соответственно контурами  $l_1$  и  $l_2$ , а  $\Sigma$  — часть боковой поверхности трубы, заключенная между  $l_1$  и  $l_2$ .

Рассмотрим поток вихря через поверхность  $S$ . Согласно теореме Гаусса — Остроградского, получим

$$\iint_S \Omega_n dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{Q} d\tau = 0, \quad (3.4)$$

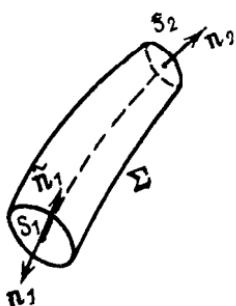


Рис. 44.

так как  $\operatorname{div} \mathbf{Q} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ . Из (3.4) следует, что

$$\iint_S \Omega_n dS = \iint_{S_1} \Omega_n dS + \iint_{S_2} \Omega_n dS + \iint_{\Sigma} \Omega_n dS = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку  $\Omega_n = 0$  на поверхности  $\Sigma$  ( $\Sigma$  — вихревая поверхность), из (3.5) имеем

$$\iint_{S_1} \Omega_n dS + \iint_{S_2} \Omega_n dS = 0. \quad (3.6)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем  $\tau$  (рис. 44). Введя  $\tilde{n}_1 = -n_1$  и используя формулу Стокса, получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \Omega_n dS &= \oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_2, \\ \iint_{S_1} \Omega_n dS &= \oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma'_1 = -\Gamma_1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — циркуляции, вычисленные при обходе контуров  $l_1$  и  $l_2$  в одном направлении. Из формулы (3.6), учитывая (3.7), получим

$$\oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2,$$

т. е. интенсивность  $\Gamma$  вихревой трубы постоянна по ее длине. Так как выполнены условия теоремы Томсона, то циркуляция по любому жидкому контуру не зависит от времени и, следовательно, интенсивность вихревой трубы не изменяется со временем.

#### § 4. О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВИХРЕЙ

Теорема Лагранжа о безвихревом движении жидкости и теорема Гельмгольца о сохранении вихрей справедливы при предположениях, что жидкость идеальна, баротропна и массовые силы консервативны. Вопрос о том, к чему приводит отказ от предположения об идеальности жидкости, будет рассмотрен в дальнейшем. В этом параграфе будет показано, что если жидкость не баротропна или массовые силы не консервативны, то вихри даже в идеальной жидкости могут возникать и уничтожаться. При доказательстве теоремы Томсона было получено равенство (1.6). Учитывая уравнения Эйлера, описывающие движение идеальной жидкости

$$\frac{dv}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

уравнение (1.6) можно переписать в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_l \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим два случая: 1) жидкость баротропна:  $\rho = \varphi(p)$ , но массовые силы не консервативны; 2) жидкость бароклинна, т. е. плотность зависит не только от давления, но и от других параметров, например, температуры, влажности (для воздуха) или от солености (для воды).

В первом случае имеем  $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P$ , и, следовательно,

$$\oint_l \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{r} = \oint_l \operatorname{grad} P \cdot d\mathbf{r} = \oint_l dP = 0.$$

Равенство (4.1) принимает вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Но правая часть (4.2) — работа силы, действующей на единицу массы, при обходе контура  $l$ . Эта работа в неконсервативном поле, вообще говоря, не равна нулю. Следовательно,  $\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$  и теорема Томсона несправедлива, вихри могут возникать и могут уничтожаться.

Рассмотрим второй случай, предполагая, что массовые силы консервативны:  $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$ , но жидкость бароклинна. В этом случае равенство (4.1) принимает вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_L \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{r} = - \oint_L \frac{1}{\rho} dp = - \oint_L \omega dp, \quad (4.3)$$

где  $\omega = \frac{1}{\rho}$ .

Рассмотрим два семейства поверхностей:  $p = \text{const}$  (изобарические поверхности) и  $\omega = \text{const}$  (изостерические поверхности). В баротропной жидкости плотность сохраняет постоянное

значение на изобарической поверхности. Следовательно, в баротропной жидкости изобарические и изостерические поверхности совпадают. В рассматриваемом же нами случае эти поверхности будут пересекаться. Четыре поверхности:  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega = \omega_1$ ,  $p = p_0$ ,  $p = p_1$  образуют трубку, которая называется изобаро-изостерической.

Рассмотрим трубку, для которой  $\omega_1 = \omega_0 + 1$ ,  $p_1 = p_0 + 1$ , и контур  $ABCD$ , охватывающий эту трубку (рис. 45). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= - \int_A^B \omega dp - \int_B^C \omega dp - \int_C^D \omega dp - \int_D^A \omega dp = \\ &= - \int_B^C \omega dp - \int_D^A \omega dp = \omega_0 - (\omega_0 + 1) = -1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При другом расположении поверхностей можно получить равенство  $\frac{d\Gamma}{dt} = +1$ . В первом случае трубка называется единичной отрицательной, а во втором — единичной положительной изобаро-изостерической трубкой. Если контур охватывает  $N^+$  единичных положительных трубок и  $N^-$  отрицательных, то

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N^+ - N^-. \quad (4.5)$$

Равенства (4.3), (4.5) составляют содержание теоремы Бьеркнеса. Они показывают, что в бароклинной жидкости  $\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$  и, следовательно, вихри в бароклинной жидкости могут возникать и уничтожаться,

## § 5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВИХРЯ

Получим уравнения, описывающие изменение вихря. Будем исходить из уравнений Эйлера, записанных в форме Громеки — Лэмба:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (5.1)$$

Применим к обеим частям этого равенства операцию  $\operatorname{rot}$ . Тогда получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right). \quad (5.2)$$

Воспользуемся теперь следующими легко проверяемыми формулами векторного анализа:

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}, \quad (5.3)$$

$$\text{где } (\mathbf{B} \cdot \nabla) = (iB_x + jB_y + kB_z) \cdot \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} (\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \alpha \times \mathbf{A}; \quad (5.4)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} B = 0; \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{C} = 0. \quad (5.6)$$

Из формулы (5.5) следует, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} = 0. \quad (5.7)$$

Из формул (5.3) и (5.4), если положить  $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}$ , будем иметь

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.8)$$

Из формул (5.4) и (5.5) получим

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = \left( \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \right) \times \operatorname{grad} p = - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p. \quad (5.9)$$

Подставляя (5.7), (5.8), (5.9) в (5.2), имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p,$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{F} + \frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) называется уравнением Фридмана. Если поле массовых сил консервативно ( $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$ ) и жидкость баротропна, то

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p = \varphi'(p) \operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} p = 0.$$

В этом случае уравнение Фридмана приобретает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla) v - \Omega \operatorname{div} v = 0. \quad (5.11)$$

Если, кроме того, жидкость несжимаема ( $\operatorname{div} v = 0$ ), уравнение (5.10) запишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega \cdot \nabla) v. \quad (5.12)$$

Уравнения (5.11), (5.12) впервые были получены Гельмгольцем. Теоремы Гельмгольца можно доказать исходя из уравнения (5.11).

Уравнение Фридмана дает возможность количественно описать изменение вихря, происходящее вследствие неконсервативности массовых сил и бароклинности жидкости.

## § 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА СКОРОСТИ ПО ВИХРЮ И ДИВЕРГЕНЦИИ

По заданному полю скорости легко найти его дивергенцию  $\theta = \operatorname{div} v$  и вихрь  $\Omega = \operatorname{rot} v$ . Поставим обратную задачу. Пусть заданы функции  $\theta = \theta(x, y, z)$  и  $\Omega = \Omega(x, y, z)$ . Требуется найти поле скорости  $v(x, y, z)$ , удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} v = \theta(x, y, z); \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} v = \Omega(x, y, z). \quad (6.2)$$

Очевидно, что эта система не всегда имеет решение (уравнений четыре, искомых функций три). Так как  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ , то одно из необходимых условий разрешимости системы состоит в выполнении равенства

$$\operatorname{div} \Omega = 0. \quad (6.3)$$

Будем предполагать, что условие (6.3) выполнено. Система уравнений (6.1), (6.2) должна решаться при соответствующих граничных условиях. Если ищется поле скорости внутри области  $\tau$ , ограниченной поверхностью  $S$ , то на этой поверхности задается нормальная составляющая скорости

$$v_n|_S = v_n(M). \quad (6.4)$$

Если поле скоростей отыскивается во внешней части  $\tau$ , то наряду с (6.4) необходимо задать скорость на бесконечности. В первом случае функция  $v_n(M)$  не может быть произвольной. Действительно, интеграл  $\iint_S v_n dS$  (расход жидкости через поверхность) можно записать в виде

$$\iint_S v_n(M) dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} v d\tau.$$

Следовательно, нормальная составляющая скорости на поверхности  $S$  должна удовлетворять условию

$$\iint_S v_n(M) dS = \iiint_{\tau} \theta d\tau. \quad (6.5)$$

Рассмотрим решение задачи в случае, когда жидкость занимает все пространство и покоятся на бесконечности:

$$\mathbf{v}_{\infty} = 0. \quad (6.6)$$

Будем искать поле скорости  $\mathbf{v}$  в виде суммы двух полей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

таких, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \theta, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_{1\infty} = 0; \quad (I)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v}_{2\infty} = 0. \quad (II)$$

Поскольку исходная задача линейна, сумма скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  будет искомым решением.

Построим сначала решение задачи (I). Будем искать скорость  $\mathbf{v}_1$  в виде

$$\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi. \quad (6.7)$$

В этом случае второе уравнение (I) удовлетворяется тождественно, а из первого уравнения получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \theta(x, y, z). \quad (6.8)$$

Таким образом, задача свелась к отысканию решения уравнения Пуассона в неограниченном пространстве.

Угадать вид решения уравнения (6.8) можно из физических соображений. Предположим, что функция  $\theta(x, y, z)$  отлична от нуля только в ограниченной области  $\tau$ . Разобьем область  $\tau$  на  $n$  меньших областей  $\tau_i$  и положим

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

где каждая из функций  $\theta_i$  отлична от нуля только в области  $\tau_i$ . Поскольку уравнение (6.8) линейное, решение его можно искать в виде суммы:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i, \quad (6.9)$$

где  $\varphi_i$  — решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = \theta_i(x, y, z). \quad (6.10)$$

Положим  $\mathbf{v}_1^{(i)} = \operatorname{grad} \varphi_i$  и подсчитаем расход жидкости  $q_i$  через поверхность сферы  $S$ , внутри которой находится область  $\tau_i$ :

$$\begin{aligned} q_i &= \iint_S v_n^{(i)} dS = \iiint_{\tau_i} \operatorname{div} \mathbf{v}^{(i)} d\tau = \iiint_{\tau_i} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) d\tau = \\ &= \iiint_{\tau_i} \theta_i d\tau = \tau_i \theta_{i \text{ cp}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что течение с потенциалом  $\varphi_i$  можно приблизенно описать как течение от источника обильности  $q_i$ . Тогда можно ожидать, что

$$\varphi_i(x, y, z) \approx -\tau_i \theta_{i \text{ cp}} (4\pi r_i)^{-1}, \quad (6.11)$$

где  $r_i^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2$ , а  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  — координаты точки из области  $\tau_i$ . Подставляя (6.11) в (6.9), получаем

$$\varphi \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i \theta_{i \text{ cp}}}{r_i}. \quad (6.12)$$

В правой части (6.12) стоит сумма Римана для интеграла

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

поэтому можно ожидать, что решение уравнения Пуассона (6.8) имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (6.13)$$

Функция (6.13) называется ньютоновым потенциалом.

В курсах математической физики доказывается, что эта функция является единственным решением уравнения Пуассона (6.8), стремящимся на бесконечности к нулю, если только наложить некоторые дополнительные условия на функцию  $\theta$ .

Достаточно потребовать, чтобы функция  $\theta$  была кусочно-гладкой, ограниченной и убывала на бесконечности как  $\frac{1}{R^{2+\alpha}}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Таким образом, решение задачи (I) определяет вектор

$$\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau. \quad (6.14)$$

Перейдем теперь к решению задачи (II). Ранее говорилось о том, что для любого вектора  $\mathbf{A}$  справедливо равенство  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ . Следовательно, если искать решение задачи (II) в виде

$$\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

то первое уравнение этой задачи удовлетворяется тождественно, а второе уравнение в этом случае имеет вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.15)$$

Функцию  $\mathbf{A}$  называют векторным потенциалом поля скорости. Используя легко проверяемое равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

запишем уравнение (6.15) в виде

$$\Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\boldsymbol{\Omega}. \quad (6.16)$$

Не уменьшая общности, можно считать, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Действительно, если  $\operatorname{div} \mathbf{A} = f \not\equiv 0$ , то, полагая  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi$ , получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_1 = f + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = f + \Delta \varphi.$$

Выбирая  $\varphi$  как решение уравнения Пуассона  $\Delta \varphi = -f$  (см. задачу (I)), получаем  $\operatorname{div} \mathbf{A}_1 = 0$ ,  $\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1$ . Таким образом, использование векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_1$  для вычисления скорости  $\mathbf{v}_2$  приведет к одинаковым результатам, и при этом  $\operatorname{div} \mathbf{A}_1 = 0$ .

Итак, будем считать, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Тогда уравнение (6.16) примет вид

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\Omega}. \quad (6.17)$$

В проекциях на оси координат уравнение (6.17) имеет вид

$$\Delta A_x = -\Omega_x, \Delta A_y = -\Omega_y, \Delta A_z = -\Omega_z. \quad (6.18)$$

Каждое из уравнений (6.18)—уравнение Пуассона, а мы уже научились строить его решение при рассмотрении задачи (I). Таким образом, используя решение задачи (I), можно записать

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau.$$

Возвращаясь к исходной задаче, получим

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau. \quad (6.20)$$

Таким образом, поставленная задача решена, однако осталось несколько моментов, которые подлежат проверке.

1. При построении вектора  $\mathbf{A}$  предполагалось, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Проверим, что полученное для  $\mathbf{A}$  выражение (6.19) действи-

тельно удовлетворяет этому равенству. Рассмотрим сначала выражение  $\Delta \operatorname{div} \mathbf{A}$ . Учитывая (6.17), получим

$$\Delta \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \Delta \mathbf{A} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = -\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  — гармоническая функция. Нетрудно проверить, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Но известно, что функция, гармоническая во всем пространстве и стремящаяся к нулю на бесконечности, есть тождественный нуль. Следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

2. Установим единственность полученного решения задачи (6.1), (6.2), (6.6). Предположим, что наряду с построенным решением  $\mathbf{v}$  имеется другое решение задачи  $\mathbf{v}_1$ . Тогда разность  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_\infty = 0.$$

Покажем, что  $\mathbf{u} \equiv 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{u}$  — потенциальное поле  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$ . Но  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$ . Следовательно,  $\varphi$ , а вместе с ней и  $\mathbf{u}$  являются гармоническими функциями. Таким образом,  $\mathbf{u}$  — гармоническая функция, обращающаяся в нуль на бесконечности. Отсюда следует, что  $\mathbf{u} \equiv 0$  и  $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}$ . Единственность полученного нами решения доказана.

**Замечание.** Скажем несколько слов о решении в области  $\tau$ , ограниченной поверхностью  $S$ , задачи (6.1), (6.2) с граничным условием (6.4). Решение этой задачи можно искать в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{u},$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — построенные выше функции, а  $\mathbf{u}$  удовлетворяет уравнениям  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \psi$ . Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi = 0$ . Для нормальной составляющей  $v_n$  будем иметь

$$v_n|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S + \operatorname{rot}_n \mathbf{A} |_S + u_n |_S = V_n(M).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_S = f(M), \tag{6.21}$$

где  $f(M) = V_n(M) - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S - \operatorname{rot}_n \mathbf{A} |_S$ . Поскольку  $f$  — заданная функция, для  $\psi$  получаем задачу Неймана.

## § 7. СКОРОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ВИХРЕВОЙ НИТЬЮ

Пусть в жидкости, заполняющей все пространство, имеется замкнутая вихревая трубка с конечным объемом  $\tau$ . Поле скоростей, индуцируемое такой вихревой трубкой, определяется формулой (6.20). В нашем случае  $\boldsymbol{\Omega}(x, y, z) = 0$  вне области  $\tau$ . Так

как мы предполагаем, что в жидкости нет источников, то  $\theta(x, y, z) = 0$  всюду. Поэтому

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\tau} \iiint \frac{\Omega}{r} d\tau. \quad (7.1)$$

Пусть  $\sigma$  — сечение трубки,  $l$  — средняя линия трубки, а  $\mathbf{t}$  — единичный вектор касательной к средней линии. Полагая вихрь скорости  $\Omega$  постоянным в каждом сечении трубки, для элемента вихревой трубки длины  $dl$  можно записать  $\Omega dt = \Omega \sigma dl = \mathbf{t} \Omega \sigma dl$ . Тогда

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_l dl \iiint \frac{\Omega}{r} d\sigma \cong \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_l \frac{\Omega \sigma \mathbf{t}}{r} dl. \quad (7.2)$$

Устремляя  $\sigma$  к нулю (при этом  $\Omega \rightarrow \infty$ ), но так, чтобы произведение  $\Omega \sigma$  оставалось постоянным, получаем вихревую нить с интенсивностью  $\Gamma = \Omega \sigma$ . По теореме Гельмгольца интенсивность  $\Gamma$  постоянна вдоль  $l$ , поэтому, переходя к пределу, получаем

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{rot} \int_l \frac{\mathbf{t}}{r} dl. \quad (7.3)$$

Проекции скорости  $\mathbf{v}$  на координатные оси определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_l \frac{t_z}{r} dl - \frac{\partial}{\partial z} \int_l \frac{t_y}{r} dl \right), \\ v_y &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial z} \int_l \frac{t_x}{r} dl - \frac{\partial}{\partial x} \int_l \frac{t_z}{r} dl \right), \\ v_z &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_l \frac{t_y}{r} dl - \frac{\partial}{\partial y} \int_l \frac{t_x}{r} dl \right). \end{aligned}$$

Вектор  $\mathbf{t}$  не зависит от координат  $x, y, z$ . Выполняя дифференцирование под знаком интеграла и учитывая, что  $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , где  $\mathbf{r} = (x - \xi) \mathbf{i} + (y - \eta) \mathbf{j} + (z - \zeta) \mathbf{k}$ , получаем

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \left( \frac{y - \eta}{r} t_z - \frac{z - \zeta}{r} t_y \right) \frac{dl}{r^2}, \\ v_y &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \left( \frac{z - \zeta}{r} t_x - \frac{x - \xi}{r} t_z \right) \frac{dl}{r^2}, \\ v_z &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \left( \frac{x - \xi}{r} t_y - \frac{y - \eta}{r} t_x \right) \frac{dl}{r^2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В скобках под знаком интегралов в (7.4) стоят компоненты векторного произведения двух векторов  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Поэтому

формулы (7.4) для скорости, индуцируемой в пространстве вихревой нитью, можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_l (\mathbf{t} \times \mathbf{m}) \frac{dl}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_l (\mathbf{t} \times \mathbf{r}) \frac{dl}{r^3}. \quad (7.5)$$

Очевидно, что элемент вихревой нити  $\Delta l$  порождает в точке  $M(\mathbf{r})$  скорость  $\Delta \mathbf{v}$ :

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \mathbf{t} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{dl}{r^2} \quad (7.6)$$

с численным значением  $|\Delta \mathbf{v}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \sin \alpha \frac{dl}{r^2}$ . Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{r}$  (рис. 46).

Формулы (7.5) и (7.6) аналогичны формулам Био — Савара в электродинамике.

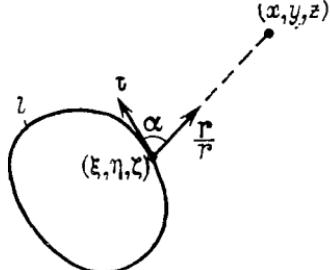


Рис. 46.

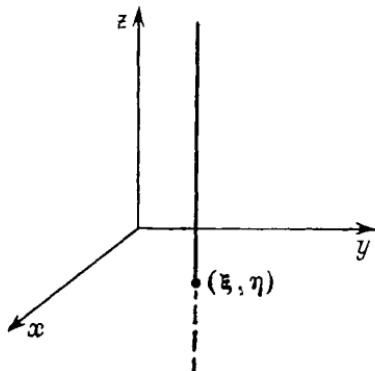


Рис. 47.

### § 8. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ВИХРЕВАЯ НТЬ

Формулы (7.5), (7.6) были выведены для замкнутой вихревой нити, однако они имеют смысл и для бесконечной вихревой нити. В качестве примера рассмотрим прямолинейную вихревую нить, проходящую через точку  $(\xi, \eta)$  параллельно оси  $z$  (рис. 47). Тогда  $t_x = t_y = 0$ ,  $t_z = 1$ ,  $dl = d\xi$  и формула (7.5) приобретает вид

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} d\xi, \quad (8.1)$$

или в проекции на оси координат

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi} (\eta - y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{r^3},$$

$$v_y = - \frac{\Gamma}{4\pi} (\xi - x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{r^3},$$

$$v_z = 0. \quad (8.2)$$

Полагая  $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{r^3} = \frac{2}{\rho^2}.$$

Поэтому формулы (8.2) можно записать так:

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - \eta}{\rho^2}, \quad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{\rho^2}, \quad v_z = 0. \quad (8.3)$$

Нетрудно видеть, что формулы (8.3) описывают плоское течение. В каждой плоскости, перпендикулярной вихрю, частицы движутся по окружности, в центре которых находится вихрь. Величина скорости  $v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho}$ .

Таким образом, рассмотренное в главе III течение в плоскости от точечного вихря, есть течение, вызываемое бесконечно тонкой прямолинейной вихревой нитью, перпендикулярной этой плоскости.

### § 9. ВИХРЕВОЙ СЛОЙ

Представим себе плоское движение жидкости со следующим распределением скоростей (рис. 48):

$$v_x = \begin{cases} v_1 & \text{при } y < 0, \\ v_1 + \frac{v_2 - v_1}{\epsilon} y & \text{при } 0 \leq y \leq \epsilon, \\ v_2 & \text{при } y > \epsilon. \end{cases}$$

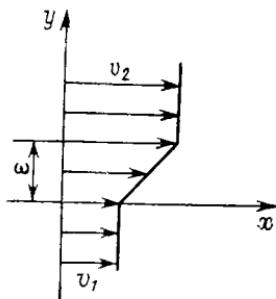


Рис. 48.

(9.1)

Две другие составляющие скорости  $v_y = v_z = 0$ .

Вычислим вектор вихря для рассматриваемого движения. Так как течение плоское, то отлична от нуля только составляющая вихря скорости вдоль оси  $z$

$$\Omega = k \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -k \frac{dv_x}{dy}.$$

Воспользовавшись выражением (9.1), получим для  $\Omega_z$

$$\Omega_z = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \frac{v_1 - v_2}{\epsilon} & \text{при } 0 \leq y \leq \epsilon, \\ 0 & \text{при } y > \epsilon. \end{cases} \quad (9.2)$$

Таким образом, линейному распределению скорости жидкости в слое соответствует вихрь  $\Omega_z = \frac{v_1 - v_2}{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — ширина слоя.

Выделим в слое вихревую трубку прямоугольного сечения шириной  $\Delta x = 1$ , высотой  $\varepsilon$  и вычислим ее интенсивность:

$$\Gamma = \iint_S \Omega_z dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^\varepsilon \frac{v_2 - v_1}{\varepsilon} dy = -(v_2 - v_1). \quad (9.3)$$

Из последней формулы следует, что интенсивность вихревой трубы  $\Gamma = \Omega_z \varepsilon$  не зависит от толщины слоя  $\varepsilon$ . В пределе, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\Omega_z \rightarrow \infty$ , а интенсивность  $\Gamma = v_1 - v_2$  сохраняется постоянной, будем иметь течение с поверхностью разрыва касательной составляющей скорости. Это течение с тангенциальным разрывом можно трактовать как течение, порождаемое вихревым слоем (бесконечно тонким вихревым слоем, в котором расположены вихри достаточно большой интенсивности).

## ГЛАВА XVII

# ТЕОРИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

В случае обтекания крыла бесконечного размаха задача сводилась к изучению плоского движения — обтеканию профилей. При рассмотрении обтекания профилей был установлен постулат Чаплыгина — Жуковского и получена формула для подъемной силы. Теперь нужно построить теорию обтекания крыла конечного размаха.

### § 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОТЕКАНИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА С ЗАДНЕЙ ОСТРОЙ КРОМКОЙ. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Пусть на крыло конечного размаха набегает установившийся безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости. Массовые силы будем предполагать отсутствующими.

Так как поток безвихревой, то существует потенциал скоростей  $\phi$  и задача сводится к отысканию функции  $\phi(x, y, z)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям на поверхности крыла

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (1.2)$$

и на бесконечности (принимая, что ось  $x$  параллельна  $v_\infty$ )

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_\infty, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Если при этом, как и в случае плоской задачи, потребовать непрерывности скоростей  $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  во всем внешнем по отношению к крылу пространстве, то такая задача будет иметь единственное решение. Вычислив главный вектор сил давления, действующих на крыло, получим, что  $F = 0$  — парадокс Даламбера.

Если задняя кромка крыла острые, то окажется, что получение решение дает в этой кромке бесконечно большие значения для некоторых компонент скорости, т. е. постулат Чаплыгина — Жуковского в течении, соответствующем полученному решению задачи, не выполнен. В этом решении нет произвольного параметра, который входил в решение для плоской задачи (там этим параметром была циркуляция  $\Gamma$ ).

Таким образом, сделанные предположения не обеспечивают возможности выполнения постулата Чаплыгина — Жуковского. Нужно отказаться от некоторых из них.

Предполагая, как и раньше, что движение идеальной жидкости установившееся и потенциальное, не будем требовать, чтобы  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  всюду вне крыла были непрерывны. Поскольку мы хотим сохранить постулат, т. е. чтобы жидкость, обтекая крыло конечного размаха, покидала его в задней острой кромке, и так как ниоткуда не следует, что скорости частиц жидкости, сходящие с верхней и нижней сторон крыла, одинаковы, то естественно допустить, что в жидкости имеется поверхность  $\Sigma$ , проходящая через заднюю острую кромку, на которой нет непрерывности скоростей. Так как движение установившееся, то эта поверхность  $\Sigma$  должна быть неподвижна в пространстве. В точках этой поверхности с верхней и нижней сторон должны быть выполнены условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости, т. е.

$$p^B|_{\Sigma} = p^H|_{\Sigma}, \quad \frac{\partial \phi^B}{\partial n}|_{\Sigma} = \frac{\partial \phi^H}{\partial n}|_{\Sigma}. \quad (1.4)$$

При отсутствии массовых сил из интеграла Бернулли  $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}$  следует, что квадрат скорости, а следовательно, и величина скорости непрерывны при переходе через  $\Sigma$ . Но  $v^2 = v_n^2 + v_t^2$ , где  $v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$  — нормальная,  $v_t$  — касательная составляющие скорости. Так как функция  $v_n^2$  непрерывна при переходе через  $\Sigma$ , то непрерывна и  $v_t^2$ , а тогда и абсолютная величина  $v_t$ . Но сама касательная составляющая  $v_t$  может терпеть разрыв, при этом при стационарном движении разрыв испытывает только  $v_z$  — поперечная составляющая  $v_t$ .

Поверхность, на которой терпит разрыв касательная составляющая скорости, может быть интерпретирована как вихревой слой. Заметим, что поверхность  $\Sigma$ , вообще говоря, неизвестна и должна быть найдена в процессе решения задачи.

Таким образом, задача сводится к отысканию функции  $\phi(x, y, z)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (1.1), граничным условиям (1.2) на поверхности крыла  $S$ , условиям (1.4) на неизвестной поверхности разрыва  $\Sigma$  (эти условия нелинейные, так как давление выражается через  $v^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2$ ) и условиям на бесконечности. Условия на бесконечности теперь следует формулировать несколько иначе, а именно:  $v_x = v_\infty$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z = 0$  бесконечно далеко от  $S$  и  $\Sigma$ .

Основные предположения, которые лежат в основе теории, излагаемой в этой главе, следующие:

1) рассматриваемое крыло тонкое,

- 2) крыло имеет большое удлинение,
- 3) применима гипотеза плоских сечений,
- 4) справедлива схема жидкого крыла.

Выберем оси координат так, чтобы ось  $x$  была параллельна скорости  $v_\infty$  невозмущенного потока, ось  $z$  направлена по размаху крыла. Начало координат поместим в середине размаха крыла.

1) Первое предположение означает, что профиль, полученный в сечении крыла плоскостью  $z = \text{const}$ , тонкий и хорда профиля образует малый угол с направлением скорости (угол атаки  $\alpha$  мал).

2) Для крыла произвольной формы в плане за удлинение принимают отношение  $\lambda = \frac{L^2}{S}$ , где  $L$  — размах крыла,  $S$  — его площадь в плане. Для прямоугольного крыла  $S = bL$ , где  $b$  — хорда профиля и удлинение  $\lambda = \frac{L^2}{S} = \frac{L}{b}$  — отношение размаха к хорде. По второму предположению  $\lambda$  велико (практически достаточно брать  $\lambda > 4$ ), т. е. крыло длинное и узкое.

3) Гипотеза плоских сечений, оправданием которой служит второе предположение, позволяет в плоскости  $z = \text{const}$  скорости и давления

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad p = p(x, y)$$

построить так же, как в случае крыла бесконечного размаха.

4) Гипотеза о справедливости схемы жидкого крыла предполагает возможность подобрать такую систему особенностей, которая может заменить действие твердого непроницаемого крыла на поток и вызвать такое же движение жидкости, которое вызывалось действием крыла.

## § 2. ВИХРЕВАЯ СИСТЕМА КРЫЛА И ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Составим представление об общей схеме рассмотрения задачи с учетом сделанных предположений. Жидкость, заполняющая безграничное пространство, обтекает крыло конечного размаха (рис. 49). С задней острой кромки крыла сбегает поверхность  $\Sigma$  разрыва касательных составляющих скорости, которую можно трактовать как вихревую поверхность, образованную вихревыми трубками. Выделим на этой поверхности бесконечно тонкую вихревую трубку. При сделанных предположениях (движение установившееся, жидкость несжимаемая, массовые силы отсутствуют) справедлива теорема Гельмгольца, согласно которой вихревые трубы при движении все время остаются вихревыми трубками, перемещаясь вместе с жидкостью. Но поскольку движение установившееся, это возможно, только если вихревые линии будут совпадать с линиями тока.

Так как крыло тонкое, то можно скорости представить в виде  $v_x = v_\infty + v'_x$ ,  $v_y = v'_y$ ,  $v_z = v'_z$ , где  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  — скорости возмущений, возникающие из-за наличия крыла. Так как последние невелики по сравнению со скоростью  $v_\infty$ , то линии тока будут мало отклоняться от линий тока невозмущенного движения. Поверхность тока, сбегающая с задней острой кромки крыла, и совпадающая с ней вихревая поверхность будут мало отклоняться от плоскости  $(x, z)$ . Поэтому приближенно можно принять, что вихревая поверхность совпадает с частью плоскости  $(x, z)$ , а вихревые линии, образующие эту поверхность, будут прямыми, параллельными оси  $x$ .

По теореме Гельмгольца вихревая трубка сохраняет свою интенсивность по всей длине и потому не может оканчиваться в жидкости. Согласно схеме жидкого крыла можно считать все

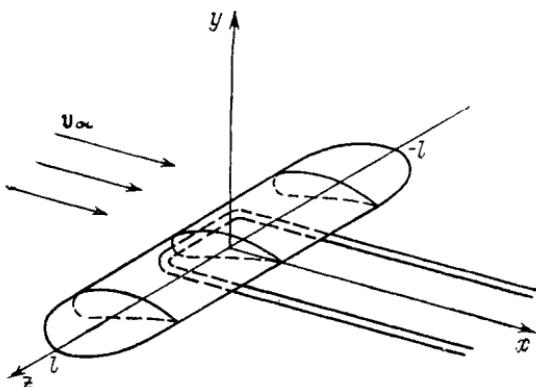


Рис. 49.

пространство заполненным жидкостью. Поэтому вихревую трубку нужно представить продолженной в области внутрь крыла и затем выходящей из него, т. е. каждый вихрь можно представить в виде П-образного вихря. Часть вихря, связанную с крылом, называют *присоединенным вихрем*, части вихря, покидающие крыло и уходящие в бесконечность, называют *свободными вихрями*.

Так как крыло имеет большое удлинение (узкое), то все присоединенные вихри рассматривают как один линейный вихрь внутри крыла, расположенный вдоль отрезка оси  $z$  ( $-l \leq z \leq l$ ), имеющий переменную интенсивность  $\Gamma = \Gamma(z)$  вдоль своей длины. От этого присоединенного вихря сбегают свободные вихри, образующие вихревую пелену  $\Sigma$  (рис. 50). Заметим, что в случае крыла бесконечного размаха свободные вихри отсутствуют.

Свободные вихри индуцируют в пространстве скорости. В разных точках пространства эти скорости  $v_i$ , называемые индуктив-

ными, различны. Но нас интересует течение вблизи крыла. На основании гипотезы плоских сечений можем свести пространственную задачу к плоской. В сечении  $z = \text{const}$  ( $-l \leq z \leq l$ ) будем рассматривать обтекание профиля потоком, скорость которого складывается из скорости  $v_\infty$  невозмущенного потока и скорости  $v_i$ , вызываемой свободными вихрями.

Так как крыло имеет большое удлинение, то на протяжении длины хорды изменения скорости  $v_i$  в зависимости от  $x$  и  $y$  вблизи профиля малы. Поэтому можно приближенно принять индуктивную скорость постоянной и равной скорости, вызываемой системой свободных вихрей, в точке на оси  $z$ , т. е. там, где расположен присоединенный вихрь (рис. 51).

Теперь в сечении  $z = \text{const}$  будем иметь плоскую задачу обтекания профиля потоком, имеющим скорость  $v_m = v_\infty + v_i$ , где  $v_i = \text{const} = v_i(z)$ . Угол  $\alpha_i$  между  $v_m$  и  $v_\infty$  называют углом скоса потока.

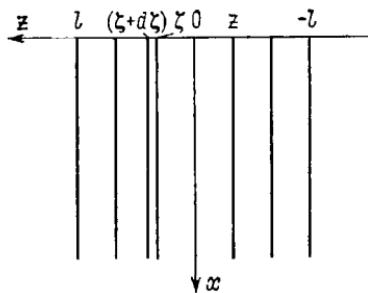


Рис. 50.

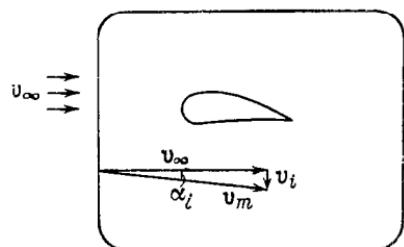


Рис. 51.

Таким образом, вместо пространственного течения около крыла будем рассматривать в каждом сечении  $z = \text{const}$  плоское обтекание профиля потоком, скорость которого  $v_m$  зависит от  $z$ .

Итак, задача обтекания крыла конечного размаха разделась на две — задачу обтекания профиля поступательным потоком и определение изменения циркуляции  $\Gamma(z)$  по размаху крыла.

Будем сначала считать  $\Gamma(z)$  известной и получим формулы для индуктивной скорости, угла скоса потока, индуктивного сопротивления и подъемной силы.

Выделим элемент крыла шириной  $dz$  и подсчитаем силу, действующую на него. По теореме Жуковского эта сила перпендикулярна скорости  $v_m$  и равна

$$dR = \rho v_m \Gamma(z) dz. \quad (2.1)$$

Эту силу можно разделить на две составляющие: подъемную силу

$$dR_y = dR \cos \alpha_i$$

и силу  $dR_x$ , связанную со скосом потока и называемую силой индуктивного сопротивления:

$$dR_x = dR \sin \alpha_i.$$

Учитывая малость угла  $\alpha_i$ , имеем

$$dR_y \cong dR, \quad dR_x \cong \alpha_i dR. \quad (2.2)$$

Кроме того, из рис. 51 видно, что  $\tan \alpha_i = -\frac{v_i}{v_\infty}$ , а для малых  $\alpha_i$

$$\alpha_i = -\frac{v_i}{v_\infty}. \quad (2.3)$$

Интегрируя равенства (2.2) по размаху крыла с учетом (2.1), получим формулы для подъемной силы и силы индуктивного сопротивления, действующих на крыло:

$$R_y = \rho v_\infty \int_{-l}^l \Gamma dz. \quad (2.4)$$

$$R_x = \rho v_\infty \int_{-l}^l \alpha_i \Gamma dz, \quad (2.5)$$

или

$$R_x = -\rho \int_{-l}^l v_i \Gamma dz. \quad (2.6)$$

Этими формулами определяется силовое воздействие потока на крыло, если известно распределение циркуляции  $\Gamma(z)$  по размаху крыла. Преобразуем эти формулы.

От элемента  $d\xi$ , взятого около точки  $\xi$  присоединенного вихря, отходит свободный вихрь. Интенсивность свободного вихря  $dv$  равна изменению интенсивности присоединенного вихря, т. е.  $dv = \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi$ . Бесконечная вихревая нить, параллельная оси  $x$  и проходящая через точку  $(0, 0, \xi)$ , вызывает в точке  $(x, 0, z)$  скорость  $v_y = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - \xi}$ . Свободный вихрь интенсивности  $d\Gamma$ , выходящий из точки  $\xi$  оси  $z$  (полубесконечный вихрь), индуцирует в точке оси  $z$  скорость

$$dv_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{z - \xi}. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7) по размаху крыла  $(-l, +l)$ , получаем скорость, индуцируемую в точке  $(0, 0, z)$  системой свободных вихрей:

$$v_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z - \xi}. \quad (2.8)$$

(При этом интеграл вычисляется в смысле главного значения Коши.)

Подставляя (2.8) в (2.3), получаем

$$a_i = \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z - \xi} \quad (2.9)$$

и затем

$$R_x = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^l \Gamma(z) \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z - \xi} dz. \quad (2.10)$$

Удобно в формулах (2.4), (2.9), (2.10) ввести новую независимую переменную, положив  $z = -l \cos \theta$  (соответственно  $\xi = -l \cos \theta'$ ), и представить  $\Gamma$  в виде тригонометрического ряда

$$\Gamma(\theta) = 4v_\infty l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (0 \leq \theta, \theta' \leq \pi). \quad (2.11)$$

Рассмотрим сначала выражение для подъемной силы. Подставим (2.11) в (2.4):

$$R_y = \rho v_\infty^2 (2l)^2 \sum_n A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta. \quad (2.12)$$

Учитывая, что  $\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$  получим

$$R_y = \pi \rho \frac{v_\infty^2}{2} (2l)^2 A_1, \quad (2.13)$$

т. е. подъемная сила определяется только коэффициентом  $A_1$  в разложении  $\Gamma$  в ряд по синусам.

Теперь запишем выражение для  $v_i$ . Подставим (2.11) в (2.8). Принимая во внимание, что

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \left( \frac{d\xi}{d\theta} \right)^{-1} = 4v_\infty l \sum_n nA_n \cos n\theta' \frac{1}{l \sin \theta'}, \quad (2.14)$$

получим

$$v_i = -\frac{v_\infty}{\pi} \sum_n nA_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}. \quad (2.15)$$

Так как

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad (2.16)$$

то окончательно для индуктивной скорости будем иметь

$$v_i = -v_\infty \sum_n nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (2.17)$$

Угол скоса потока при этом выразится формулой

$$a_i = \sum_n nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (2.18)$$

Выражение для силы сопротивления получим, подставив (2.11) в (2.5):

$$R_x = \pi \rho \frac{v_\infty^2}{2} (2l)^2 \sum_n nA_n^2. \quad (2.19)$$

Из (2.19) видно, что при заданной подъемной силе (последняя определяется только через  $A_1$ ) индуктивное сопротивление будет минимальным, если все  $A_i = 0$ ,  $i \geq 2$ .

Определим коэффициент подъемной силы и коэффициент индуктивного сопротивления:

$$C_y = \frac{R_y}{\rho \frac{v_\infty^2}{2} S},$$

$$C_x^{(i)} = \frac{R_x}{\rho \frac{v_\infty^2}{2} S}.$$

Здесь  $S$  — площадь крыла в плане.

Используя формулы (2.13) и (2.19) для  $R_y$  и  $R_x$ , получаем

$$C_y = \pi \frac{(2l)^2}{S} A_1,$$

$$C_x^{(i)} = \pi \frac{(2l)^2}{S} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2.$$

Так как  $(2l)^2/S = \lambda$  — удлинение крыла, то выражения для  $C_y$  и  $C_x^{(i)}$  можно записать в виде

$$C_y = \pi \lambda A_1, \quad (2.20)$$

$$C_x^{(i)} = \pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2. \quad (2.21)$$

### § 3. КРЫЛО С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЦИРКУЛЯЦИИ

Рассмотрим некоторые свойства крыла с минимальным индуктивным сопротивлением при заданной подъемной силе. Как было показано выше, у такого крыла подъемная сила и индуктивное сопротивление определяются формулами

$$R_x = \pi \rho \frac{v_\infty^2}{2} (2l)^2 A_1^2, \quad (3.1)$$

$$R_y = \pi \rho \frac{v_\infty^2}{2} (2l)^2 A_1. \quad (3.2)$$

Учитывая, что  $A_i = 0$ , при всех  $i \geq 2$  из (2.11) имеем

$$\Gamma(\theta) = 4v_\infty l A_1 \sin \theta. \quad (3.3)$$

Исключив  $\sin \theta$  из (3.3), с помощью равенства  $z = -l \cos \theta$  получим уравнение для  $\Gamma(z)$

$$\left( \frac{\Gamma}{4v_\infty l A_1} \right)^2 + \left( \frac{z}{l} \right)^2 = 1. \quad (3.4)$$

Из этого уравнения видно, что крыло с минимальным индуктивным сопротивлением при заданной подъемной силе имеет эллип-

тическое распределение циркуляции по размаху. Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^2 = 1,$$

где  $\Gamma_{\max} = 4v_{\infty}A_1l$ .

Из формул (2.17) и (2.18) следует, что у такого крыла

$$v_i = -v_{\infty}A_1, \quad a_i = A_1.$$

Подъемная сила, индуктивное сопротивление, индуктивная скорость и угол скоса потока определяются только коэффициентом  $A_1$ .

Крыло с постоянным по размаху геометрическим углом атаки  $\alpha$  называется геометрически незакрученным. Крыло с постоянным по размаху эффективным углом атаки  $\alpha_e = \alpha - \alpha_i$  называется аэродинамически незакрученным. В противном случае говорят, что крыло имеет крутку (соответственно геометрическую или аэродинамическую). Очевидно, что если крыло с эллиптическим распределением циркуляции является геометрически незакрученным, то оно является и аэродинамически незакрученным.

Посмотрим, какую форму в плане имеет такое крыло. Запишем два выражения, определяющие подъемную силу, действующую на элемент крыла  $dz$ :

$$dR_y = \rho v_{\infty} \Gamma(z) dz,$$

$$dR_y = C_y \rho \frac{v_{\infty}^2}{2} b(z) dz.$$

Приравнивая правые части, получаем

$$\Gamma(z) = C_y \frac{v_{\infty}}{2} b(z).$$

Поскольку в плоскости  $(\Gamma, z)$  мы имеем эллипс, то и  $b(z)$  имеет вид эллипса, т. е. рассматриваемое крыло с эллиптическим распределением циркуляции имеет эллиптическую форму в плане.

При небольших углах атаки можно приближенно положить

$$C_y = A + B\alpha_e,$$

где  $A, B$  — некоторые характеристики профиля,  $\alpha_e = \alpha - \alpha_i$ .

#### § 4. ПАРАБОЛА ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПЕРЕСЧЕТ КРЫЛА С ОДНОГО УДЛИНЕНИЯ НА ДРУГОЕ

Установим связь между подъемной силой и индуктивным сопротивлением. Используем для этого формулы (2.20) и (2.21).

Рассмотрим наиболее выгодные крылья (с минимальным индуктивным сопротивлением). Для этих крыльев

$$C_x^{(i)} = \pi \lambda A_1^2. \quad (4.1)$$

Из формулы (2.20) можно коэффициент  $A_1$  выразить через  $C_y$ :

$$A_1 = \frac{C_y}{\pi \lambda}$$

и, подставив его в (4.1), получить связь между коэффициентом индуктивного сопротивления и коэффициентом подъемной силы:

$$C_x^{(i)} = \frac{C_y^2}{\pi \lambda_1}. \quad (4.2)$$

В плоскости  $(C_x, C_y)$  зависимость (4.2) изображается в виде параболы, называемой *параболой индуктивного сопротивления* (рис. 52).

Индуктивное сопротивление, как уже говорилось выше, связано со скосом потока, возникающим вследствие свободных вихрей, сбегающих с задней кромки. Если скоса потока нет, то индуктивное сопротивление равно нулю. В реальной жидкости кроме силы индуктивного сопротивления на крыло действует еще сила так называемого профильного сопротивления, которое складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. Коэффициентом полного сопротивления называется величина

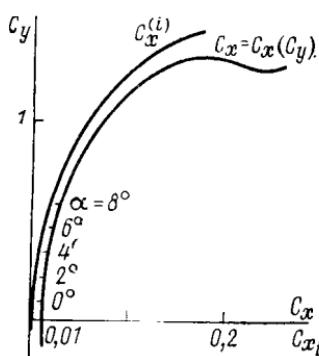


Рис. 52.

$$C_x = \frac{R_x^{\text{полн}}}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S},$$

где  $R_x^{\text{полн}}$  — сумма профильного и индуктивного сопротивлений.

В широком диапазоне условий коэффициенты  $C_x$ ,  $C_y$  можно считать постоянными при заданной форме тела и его положении по отношению к потоку. При различных углах атаки получается кривая  $C_x = C_x(C_y)$ , называемая *полярой крыла* (см. рис. 52).

При небольших углах атаки справедливо следующее соотношение:

$$C_x(C_y) - C_x^{(i)}(C_y) = C_x^{(p)} = \text{const.} \quad (4.3)$$

Величина  $C_x^{(p)}$  называется коэффициентом профильного сопротивления. Тот факт, что при небольших углах атаки коэффициент  $C_x^{(p)}$  постоянен, дает возможность получить простые формулы для пересчета крыла с одного удлинения на другое.

Пусть имеется поляра крыла для удлинения  $\lambda = \lambda_1$ , надо построить поляру для крыла с удлинением  $\lambda = \lambda_2$ . Воспользуемся формулой (4.3):

$$C_x^{(\lambda_2)} = C_x^{(p)} + C_x^{(i)}(\lambda_2) = C_x^{(p)} + \frac{C_y^2}{\pi \lambda_2}. \quad (4.4)$$

$C_x^{(p)}$  от удлинения не зависит, поэтому

$$C_x^{(p)} = C_x^{(\lambda_1)} - C_x^{(i)}(\lambda_1) = C_x^{(\lambda_1)} - \frac{C_y^2}{\pi \lambda_1}. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) получим

$$C_x^{(\lambda_2)} = C_x^{(\lambda_1)} + \frac{C_y^2}{\pi} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right). \quad (4.6)$$

На двух разных полярах одинаковые значения  $C_y$  могут быть только при равных эффективных углах атаки

$$\alpha^{(\lambda_2)} - \alpha_i^{(\lambda_2)} = \alpha^{(\lambda_1)} - \alpha_i^{(\lambda_1)}. \quad (4.7)$$

Поскольку для крыла заданной формы  $\alpha_i = A_1$ , то  $\alpha_i = \frac{C_y}{\pi \lambda}$ .

Тогда из (4.7) имеем

$$\alpha^{(\lambda_2)} = \alpha^{(\lambda_1)} + \frac{C_y}{\pi} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right). \quad (4.8)$$

Формулы (4.6), (4.8) используются для пересчета крыла с одного удлинения на другое.

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ $\Gamma(z)$ В ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

До сих пор мы считали  $\Gamma(z)$  известной и по ней находили коэффициенты индуктивного сопротивления, подъемной силы и угол скоса потока.

Установим уравнение, определяющее  $\Gamma$  по заданной форме крыла. Используем формулу, полученную для циркуляции в плоской задаче:

$$\Gamma = \frac{v_\infty}{2} ab (\alpha - \alpha_0), \quad (5.1)$$

где  $b$  — хорда крыла;  $a = \frac{dC_y}{da}$ ;  $\alpha$  — геометрический угол атаки;  $\alpha_0$  — угол атаки, при котором подъемная сила равна нулю. Согласно гипотезе плоских сечений эта формула справедлива в каждом сечении крыла, но в ней вместо  $\alpha$  должен стоять эффективный угол атаки  $\alpha_e$ .

Таким образом, формулу (5.1) следует записать в виде

$$\Gamma(z) = \frac{v_\infty}{2} a(z) b(z) [\alpha_e(z) - \alpha_0(z)], \quad (5.2)$$

где  $\alpha_e = \alpha - \alpha_i$ .

Подставляя в (5.2) вместо  $\alpha_i$  его значение (2.9), получим следующее интегродифференциальное уравнение для нахождения циркуляции  $\Gamma(z)$ :

$$\Gamma(z) = \frac{v_\infty}{2} a(z) b(z) \left[ a(z) - \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z - \xi} - a_0(z) \right]. \quad (5.3)$$

Это уравнение называется интегродифференциальным уравнением Прандтля. Если использовать представление  $\Gamma(z)$  в виде (2.11), то можно, подставляя (2.11) в (5.3), свести это уравнение к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $A_i$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n\mu(\theta) + \sin \theta] A_n \sin n\theta = \mu(\theta) a(\theta) \sin \theta,$$

где  $\mu(\theta) = \frac{1}{8l} a(\theta) b(\theta)$ .

## Часть IV. ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### ГЛАВА XVIII

## ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ранее была получена общая система уравнений гидромеханики вязкой жидкости и сформулирована постановка задач, позволяющая выделить конкретные движения.

В данной главе будут рассмотрены свойства движений вязкой жидкости, являющиеся общими для разнообразных видов ее движения.

### § 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем предполагать, если не оговорено особо, что коэффициенты вязкости  $\mu$  и теплопроводности  $k$  постоянны. В этом случае уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности образуют замкнутую систему уравнений для определения давления  $p$  и составляющих вектора скорости  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение энергии для несжимаемой жидкости в предположении, что внутренняя энергия является функцией только температуры  $E = cT$ , имеет вид

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \epsilon + k \Delta T + D. \quad (1.3)$$

Последнее слагаемое правой части уравнения энергии, как будет показано ниже, характеризует приток тепла, обусловленный работой сил трения.

Так как система уравнений (1.1), (1.2) не содержит температуры  $T$ , то, решив ее, можно определить неизвестные функции

$\mathbf{v}$  и  $p$ , а затем найти температуру  $T$  из уравнения (1.3). Тогда для определения составляющих тензора напряжений и вектора потока тепла имеем следующие уравнения:

$$\|\tau_{ik}\| = -pI + 2\mu\|\boldsymbol{\epsilon}_{ik}\|; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{t} = \operatorname{grad} T, \quad (1.5)$$

где

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Для отыскания решений системы (1.1)–(1.3) должны быть заданы граничные условия. Характер этих условий в различных задачах был подробно рассмотрен в главе VII. В частности, при решении задачи об обтекании неподвижного тела с поверхностью  $S$  безграничным установившимся потоком вязкой жидкости ищутся решения системы (1.1), (1.2), удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{v}|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_\infty = \mathbf{v}_\infty, \quad p|_\infty = p_\infty. \quad (1.6)$$

## § 2. НЕОБРАТИМОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим сначала течения идеальной несжимаемой нетеплопроводной жидкости. Такие течения описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Массовые силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$  известны. Пусть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

— решения системы (2.1). Введем новые функции

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{v}(x, y, z, -t), \quad p' = p(x, y, z, -t). \quad (2.3)$$

Очевидно, что если функции (2.2) — решения системы уравнений (2.1), то функции (2.3) также будут решениями этой системы уравнений. Действительно,  $\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  и  $\operatorname{grad} p' = \operatorname{grad} p$ . Это свойство называется обратимостью течений идеальной жидкости, или иначе инвариантностью по отношению к обращению времени. Таким образом, если движение идеальной несжимаемой жидкости возможно в одном направлении, то оно возможно с теми же скоростями и давлением в противоположном направлении. Докажем теперь, что движения вязкой жидкости в общем случае необратимы. Действительно, если  $\mathbf{v}, p$  — решения системы уравнений (1.1) и (1.2), а функции  $\mathbf{v}', p'$  определены, как и ранее, по формулам (2.3), то в силу того, что  $\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ,  $\operatorname{grad} p' = \operatorname{grad} p$ ,  $\Delta\mathbf{v}' = -\Delta\mathbf{v}$ , для функций  $\mathbf{v}', p'$  получим си-

стему уравнений, которая не будет совпадать с исходной системой уравнений (1.1) и (1.2). Таким образом, функции  $v'$ ,  $p'$  не являются решениями уравнений Навье — Стокса. Обратимость течения будет иметь место только тогда, когда  $\Delta v = 0$ , т. е.  $v$  — гармоническая функция. Но практически для всех граничных задач  $\Delta v \neq 0$ .

### § 3. ЗАВИХРЕННОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Будем исходить из системы уравнений для вязкой несжимаемой жидкости (1.1), (1.2). Покажем, что любое решение задачи о потенциальном движении идеальной жидкости является точным решением системы уравнений (1.1), (1.2).

Действительно, если движение вязкой жидкости безвихревое, то

$$v = \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.1)$$

В силу уравнения неразрывности  $\operatorname{div} v = 0$  имеем

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta v = \Delta \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \Delta \varphi = 0. \quad (3.3)$$

Но при наличии (3.3) уравнения Навье — Стокса (1.1) совпадают с уравнениями Эйлера (2.1), т. е. решения уравнений Эйлера при предположении (3.1) являются и решениями уравнений Навье — Стокса.

Рассмотрим задачу об обтекании неподвижного тела установленвшимся потоком вязкой жидкости. Решение такой задачи должно удовлетворять уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.6).

Нельзя ли найти решение этой задачи в классе потенциальных (безвихревых) течений? Такое решение (если оно существует) должно удовлетворять уравнению (3.2) и граничным условиям (1.6). Но, как было показано ранее, решение уравнения (3.2) определяется с точностью до циркуляции при следующих условиях:

$$v_n|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = 0, \quad \operatorname{grad} \varphi|_\infty = v_\infty.$$

При этом касательная составляющая скорости  $v_\tau$  на поверхности тела будет отлична от нуля, т. е.  $v_\tau|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_S \neq 0$ .

Это означает, что потенциальный поток в случае вязкой жидкости не удовлетворяет в точках соприкосновения с твердой стенкой условию прилипания  $v|_S = 0$ , т. е. класс потенциальных течений не может быть использован для решения задач об обтекании тел вязкой несжимаемой жидкостью. Течения вязкой

жидкости в этом случае вихревые. Это второе принципиальное отличие движения вязкой жидкости от движения идеальной жидкости.

#### § 4. ДИССИПАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Выделим некоторый объем жидкости  $\tau$  с массой  $M$ , ограниченный поверхностью  $S$ . На этот объем \* (массу) будут действовать объемные и поверхностные силы. Обозначим через  $\Delta A_\tau$  работу объемных сил, через  $\Delta A_S$  — работу поверхностных сил за промежуток времени  $dt$ .

Вычислим работу объемных сил  $\Delta A_\tau$ . К массе  $\rho d\tau$ , находящейся в элементе объема  $d\tau$ , приложена сила  $\mathbf{F} \rho d\tau$ . Работа этой силы при перемещении объема  $d\tau$  на  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  равна

$$\delta A_\tau = dt \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau.$$

Работа за время  $dt$  сил, приложенных ко всей массе жидкости в объеме  $\tau$ ,

$$\Delta A_\tau = dt \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau. \quad (4.1)$$

Вычислим работу поверхностных сил. На площадку  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$  действует сила  $\tau_n dS$ . Работа этой силы на перемещении  $\mathbf{v} dt$  равна  $dt (\tau_n \cdot \mathbf{v}) dS$ . Отсюда

$$\Delta A_S = dt \iint_S \tau_n \cdot \mathbf{v} dS. \quad (4.2)$$

Используя формулу Коши для  $\tau_n$  ((3.7) гл. III) и применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\Delta A_S = dt \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial (\tau_x \cdot \mathbf{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_y \cdot \mathbf{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_z \cdot \mathbf{v})}{\partial z} \right] d\tau. \quad (4.3)$$

Складывая (4.1) и (4.3) и преобразуя второй интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \Delta A_\tau + \Delta A_S &= dt \iiint_{\tau} \left[ \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) \right] d\tau + \\ &+ dt \iiint_{\tau} \left[ \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для любой сплошной среды справедлив закон количества движения ((5.6) гл. III)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right).$$

\* В случае несжимаемой жидкости термины «объемные» и «массовые» силы равноправны, так как  $\rho = \text{const}$ .

Поэтому (4.4) можно переписать в виде

$$\Delta A_{\tau} + \Delta A_S = dt \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau + dt \iiint_{\tau} D d\tau. \quad (4.5)$$

Здесь через  $D$  обозначено выражение

$$D = \tau_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \tau_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \tau_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (4.6)$$

Преобразуем первое слагаемое в (4.5), учитывая, что для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) объем  $d\tau$  не меняется:

$$\begin{aligned} dt \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau &= \iiint_{\tau} \rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) d\tau = \\ &= \iiint_{\tau} \rho d \left( \frac{v^2}{2} \right) d\tau = d \iiint_{\tau} \frac{\rho v^2}{2} d\tau = dT. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что первое слагаемое в (4.5) представляет собой изменение кинетической энергии  $T$  за время  $dt$ . Таким образом,

$$\Delta A_{\tau} + \Delta A_S = dT + dt \iiint_{\tau} D d\tau. \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) показывает, что работа, совершенная силами, приложенными к выделенной массе жидкости, лишь частично идет на изменение кинетической энергии.

Рассмотрим второе слагаемое в (4.8). Записывая скалярные произведения, входящие в (4.6), через проекции и подставляя вместо  $\tau_{ik}$  их выражения через составляющие тензора скоростей деформаций (аналогичные преобразования были проделаны в главе VIII, § 2), получим

$$\begin{aligned} D = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что величина  $D \geq 0$  и обращается в нуль только тогда, когда все компоненты тензора скоростей деформации равны нулю, т. е. когда жидкость движется как абсолютно твердое тело.

Таким образом, при движении вязкой жидкости только часть работы, совершенной массовыми и поверхностными силами, идет на изменение кинетической энергии, а остальная часть как механическая энергия теряется (рассеивается, диссирирует), превращаясь в тепло. Здесь  $D$  — энергия, которая рассеивается за единицу времени в единице объема. При движении вязкой жидкости происходит диссирипация механической энергии. Для идеальной жидкости  $D = 0$ , так как  $\mu = 0$ .

## ГЛАВА XIX

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Система уравнений несжимаемой вязкой жидкости, полученная ранее, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Отыскание точных решений этой системы существенно труднее, чем для идеальной жидкости. Почти все точные решения в каком-то смысле получены для одномерных течений.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОТЫСКАНИИ ОДНОМЕРНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Будем считать течение одномерным, если скорости параллельны некоторому направлению в пространстве; при этом в точках плоскости, перпендикулярной этому направлению, гидродинамические величины могут принимать различные значения. Выберем направление движения за направление оси  $x$ . Тогда

$$v_y = v_z = 0. \quad (1.1)$$

Выпишем систему уравнений вязкой жидкости, учитывая (1.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Из (1.2) следует, что  $v_x$  не зависит от  $x$ , из (1.4) — что  $p$  не зависит от  $y$  и  $z$ , т. е.

$$v_x = v_x(y, z, t), \quad (1.5)$$

$$p = p(x, t). \quad (1.6)$$

Учитывая (1.5), перепишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Левая часть (1.7) не зависит от  $x$ , следовательно,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  может зависеть только от времени:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(t), \quad p = f(t)x + f_1(t). \quad (1.8)$$

Таким образом, в одномерном движении давление является линейной функцией  $x$ . Функции  $f(t)$  и  $f_1(t)$  могут быть найдены, если в двух сечениях  $x_1$  и  $x_2$  задано давление  $p$ , а именно

$$p(x_1, t) = \mathcal{F}_1(t), \quad p(x_2, t) = \mathcal{F}_2(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mathcal{F}_2(t) - \mathcal{F}_1(t)}{x_2 - x_1} \equiv \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (1.9)$$

При заданном перепаде давлений скорость отыскивается из уравнения (1.7):

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) по виду совпадает с хорошо изученным уравнением теплопроводности. Неоднородное уравнение (1.10) может быть сведено к однородному заменой

$$v_x = \tilde{v}_x - \frac{1}{\rho} \int_0^t f(t) dt.$$

Для отыскания решения уравнения (1.10) должны быть заданы начальные и граничные условия. Одномерные движения могут осуществляться при течении жидкости в цилиндрических трубах (или вне их). Поэтому граничные условия записываются на контурах  $l_k$ , получаемых сечением цилиндра плоскостью  $x = \text{const}$ :

$$v_x|_{l_k} = u_k(t). \quad (1.11)$$

Здесь  $u_k(t)$  — скорость точек контура. Начальные условия имеют вид

$$v_x|_{t=t_0} = \mathcal{F}(y, z). \quad (1.12)$$

Задача упрощается, если течение установившееся. В этом случае перепад давлений постоянен, и уравнение (1.10) сводится к уравнению Пуассона

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (1.13)$$

Начальные условия отпадают, а граничные условия не зависят от времени:

$$v_x|_{l_k} = u_k. \quad (1.14)$$

В самом общем случае скорость  $v_x|_{l_k}$  может зависеть от точек контура  $v_x|_{l_k} = v_k(t, M)$ .

Особый случай одномерного течения представляет безнапорное движение жидкости, когда  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ,  $p = \text{const}$ . При этом вместо (1.10) имеем уравнение

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (1.15)$$

Если движение установившееся, то скорость находится как решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0, \quad (1.16)$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.14).

Заметим, что задача (1.16), (1.14) ( $u_k$  постоянны на контурах  $l_k$ ) эквивалентна задаче об отыскании функции тока  $\psi$  в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi|_{l_k} = u_k.$$

Отсюда следует, в частности, что для решения задачи (1.16), (1.14) можно использовать метод конформных отображений. Нетрудно показать, что сила  $f_k$ , действующая на контур  $l_k$  в вязкой жидкости, выражается через циркуляцию  $\Gamma$  соответствующего течения идеальной жидкости. Действительно,

$$f_k = \oint_{l_k} \tau_{nx} dS = \mu \oint_{l_k} \frac{\partial v_x}{\partial n} dS = \mu \oint_{l_k} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \mu \Gamma.$$

## § 2. ПРИМЕРЫ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Будем рассматривать безнапорное одномерное течение вязкой жидкости. В этом случае скорость  $v_x$  удовлетворяет уравнению (1.15). Предположим, что жидкость заполняет все пространство и что  $v_x$  зависит только от  $z$  и  $t$ . Тогда скорость  $v_x(z, t)$  должна быть найдена как решение уравнения

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad v = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.1)$$

Легко проверить, что функция  $\frac{1}{2\sqrt{\pi v t}} \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{4vt}\right\}$  при любом  $a$  удовлетворяет уравнению (2.1). Это фундаментальное решение одномерного уравнения теплопроводности. Так как (2.1) — линейное однородное уравнение, то и сумма решений также будет решением этого уравнения.

Общее решение уравнения (2.1) определяется формулой

$$v_x(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi v t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{4vt}\right\} F(a) da. \quad (2.2)$$

Введем в (2.2) новую переменную  $\xi = \frac{a-z}{2\sqrt{vt}}$ . Тогда равенство (2.2) приобретет следующий вид:

$$v_x(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} F(z + 2\xi\sqrt{vt}) d\xi. \quad (2.3)$$

В частности (если  $F$  непрерывна и ограничена), при  $t = 0$  будем иметь

$$v_x(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = F(z).$$

Следовательно, задавая в начальный момент распределение скорости

$$v_x|_{t=0} = v_x(z, 0) = F(z), \quad (2.4)$$

мы можем получить решение задачи (2.1), (2.4) по формуле (2.2) или (2.3).

Пример 1. Пусть в начальный момент в жидкости есть тангенциальный разрыв, т. е. при  $t = 0$

$$v_x(z, 0) = F(z) = \begin{cases} v_0, & z > 0, \\ -v_0, & z < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Такое распределение скоростей соответствует вихревому слою. Решение (2.3) позволяет проследить сглаживание разрыва скоростей (рассеивание вихревого слоя). Действительно, подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} v_x(z, t) &= -\frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \\ &= 2 \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{vt}}} e^{-\xi^2} d\xi = v_0 \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{где } \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Из формулы (2.6) видно, что при  $t > 0$  распределение скоростей непрерывно, т. е. разрыв, который имел место при  $t = 0$ , постепенно сглаживается. При  $t \rightarrow \infty$  и при любом  $z \neq 0$  скорость  $v_x(z, t) \rightarrow 0$ , причем  $v_x \sim v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{2\sqrt{vt}}$ . Последняя формула определяет скорость затухания разрыва. При любом положительном  $t$   $v_x(0, t) = 0$ .

Пример 2. Пусть над плоскостью  $x = 0$  находится неподвижная жидкость. При  $t = 0$  плоскость внезапно получает скорость  $v_0$  вдоль оси  $x$ . Что будет происходить с жидкостью? Решение этой задачи легко построить из решения (2.6). Действительно, положим

$$v_x(z, t) = v_0 \left( 1 - \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) \right) = v_0 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{vt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right). \quad (2.7)$$

Из предыдущего ясно, что функция (2.7) — решение уравнения (2.1) (поскольку  $v_0$  и  $\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right)$  — решения этого уравнения).

Кроме того, эта функция удовлетворяет граничным и начальным условиям. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{при } z > 0 \quad t \rightarrow 0, \quad v_x(z, t) \rightarrow 0, \\ \text{при } z = 0 \quad t > 0, \quad v_x(0, t) = v_0. \end{aligned}$$

Возьмем теперь произвольное положительное  $z$ . В момент  $t = 0$  скорость в точке с координатой  $z$  была равна нулю. Затем скорость будет возрастать. Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) \rightarrow 0$  и  $v_x(z, t) \rightarrow v_0$ . Это означает, что плоскость постепенно увлекает за собой всю жидкость.

### § 3. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Пусть пространство между двумя параллельными плоскостями  $y = \pm h$  заполнено вязкой жидкостью. Требуется отыскать все возможные одномерные установившиеся течения. Из физического смысла задачи следует, что течение плоское; примем, что  $v_x$  не зависит от  $z$ :  $v = v_x(y)$ . Уравнение (1.13) для нахождения скорости в этом случае примет вид

$$\frac{d^2v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

где  $\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$  — заданная постоянная.

Решение уравнения (3.1) должно удовлетворять граничным условиям на стенках (условиям прилипания), а именно, если  $u_1$  и  $u_2$  — скорости верхней и нижней стенок, то

$$v_x|_{y=h} = u_1, \quad v_x|_{y=-h} = u_2. \quad (3.2)$$

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$v_x = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2, \quad (3.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Определяя  $C_1$  и  $C_2$  на основании граничных условий (3.2), получим для  $v_x$  формулу

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (y^2 - h^2) + \frac{u_1 - u_2}{2h} y + \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (3.4)$$

В случае, если движение безнапорное, т. е.  $\frac{\Delta p}{\Delta x} = 0$ , имеем линейное распределение скоростей

$$v_x = \frac{u_1 - u_2}{2h} y + \frac{u_2 + u_1}{2}. \quad (3.5)$$

Остановимся на случае, когда обе стенки неподвижны. Тогда  $v_1 = v_2 = 0$ , и решение (3.4) примет вид

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (h^2 - y^2). \quad (3.6)$$

Выражение в скобках в силу  $|y| \leq h$  неотрицательно, так что жидкость всегда движется в направлении падения давления. Максимальное значение скорости  $v_x$  достигается при  $y = 0$ . Зависимость  $v_x = v_x(y)$  имеет вид параболы (рис. 53).

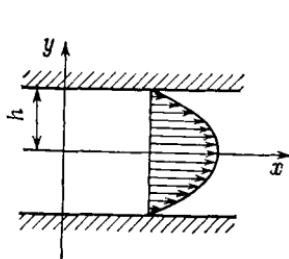


Рис. 53.

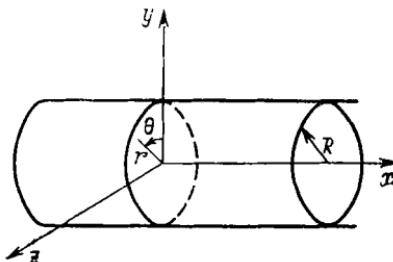


Рис. 54.

Подсчитаем расход жидкости через сечение между пластинами при толщине слоя вдоль оси  $z$ , равной единице:

$$Q = \iint_S v_x dS = \int_0^1 dz \int_{-h}^h v_x dy = -\frac{2}{3\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h^3, \quad (3.7)$$

т. е. расход прямо пропорционален падению давления, кубу расстояния между пластинками и обратно пропорционален коэффициенту вязкости.

#### § 4. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим установившееся течение вязкой жидкости в круглой трубе радиуса  $R$  (рис. 54). Труба неподвижна, ось  $x$  совпадает с осью трубы. Для определения поля скоростей надо решить уравнение (1.13) при условии, что в любом поперечном сечении на контуре трубы  $y^2 + z^2 = R^2$  скорость равна нулю. Естественно ввести цилиндрические координаты. Переходя от координат  $y, z$  к координатам  $r, \theta$ , получим  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Исследуемое течение осесимметрично, поэтому  $v_x$  зависит лишь от  $r$ . Уравнение (1.13) при этом становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка,

Таким образом, задача свелась к решению уравнения

$$\frac{d^2v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad (4.1)$$

при условии

$$v_x|_{r=R} = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (4.3)$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} r \frac{dv_x}{dr} &= \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{r^2}{2} + C_1, \\ v_x &= \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Постоянную  $C_1$  следует положить равной нулю, так как иначе на оси трубы  $r = 0$  скорость будет неограниченной величиной, что не имеет физического смысла. Постоянную  $C_2$  находим из граничного условия (4.2):

$$\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{R^2}{4} + C_2 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{R^2}{4}. \quad (4.5)$$

Таким образом, для поля скоростей вязкой жидкости внутри трубы имеем формулу

$$v_x = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} (R^2 - r^2). \quad (4.6)$$

Формула (4.6) — формула Пуазейля.

Подсчитаем расход жидкости через поперечное сечение трубы:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R \int_0^{2\pi} v_x r d\theta dr = -2\pi \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} R^4. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, расход пропорционален падению давления, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален коэффициенту вязкости. Обычно интересуются падением давления  $\frac{\Delta p}{\Delta x}$  в зависимости от  $Q$ ,  $R$ ,  $\mu$ . Формула (4.7) используется также для экспериментального определения коэффициента вязкости.

Полученное решение (как и решение предыдущей задачи в § 3) не всегда хорошо согласуется с экспериментом. Оказывается, что качественная картина течения существенно зависит от безразмерного параметра  $Re$ , введенного Рейнольдсом. Числом Рейнольдса называют величину  $Re = \frac{vl}{\nu}$ ; где  $v$  и  $l$  — харак-

терные для данного течения скорость и размер. Для течений в трубах за характерную скорость принимают среднюю скорость

$$v_{cp} = \frac{Q}{\pi R^2} = - \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} R^2.$$

Если  $Re = \frac{v_{cp}R}{\nu} \leq 1000 \div 1100$ , то имеется хорошее совпадение теории с экспериментом. При  $Re \approx (1000 \div 1100)$  происходит резкое изменение картины течения. При небольших  $Re$  каждая частица жидкости движется по прямой, движение слоистое, спокойное. Такое течение называется *ламинарным*. При  $Re > 10^3$  каждая из частиц жидкости совершает хаотическое движение, течение перестает быть одномерным и стационарным. На среднюю скорость накладываются дополнительные составляющие, зависящие от времени и координат. Такое течение называется *турбулентным*.

Формулы (3.6), (4.6) справедливы только для ламинарных течений. Число  $Re$ , при котором происходит переход течения от ламинарного режима к турбулентному, называется *критическим числом Рейнольдса*. Цифра  $10^3$ , которая приводилась выше, относится к обычным технически гладким трубам. Однако на самом деле переход ламинарного режима в турбулентный — явление сложное. В частности, число  $Re_{kp}$  при специальных условиях может быть сильно увеличено. Рейнольдсом был проведен следующий опыт. Брались специальным образом подготовленные очень гладкие трубы с очень гладким входом. Жидкость подавалась в трубу из специальных баков, в которых она отстаивалась в течение 2—3 недель. Тогда критическое число  $Re$  возрастало до  $10^6$ . Таким образом, переход к турбулентному режиму существенно зависит от уровня начальных возмущений. Кроме того, существует и нижняя граница  $Re_{kp}^{min}$ . Если  $Re < Re_{kp}^{min}$ , то течение всегда ламинарное. Известно также, что задержка перехода к турбулентному режиму способствует добавление в жидкость молекул полимеров.

**Примечание.** Решение (4.4), полученное для осесимметричных течений в круглой трубе, содержит две произвольные постоянные. В этом решении равенство нулю постоянной  $C_2$  обеспечивало ограниченность скорости внутри трубы. Для случая осесимметричных установившихся течений жидкости внутри кольцевой трубы  $R_1^2 \leq y^2 + z^2 \leq R_2^2$  решение (4.4) также справедливо, только постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены из условий прилипания жидкости к каждой из стенок трубы  $R_1$  и  $R_2$ . В самом общем случае эти условия имеют вид

$$v|_{r=R_1} = v_1, \quad v|_{r=R_2} = v_2,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости, с которыми трубы движутся параллельно своей оси (оси  $x$ ). Если стенки труб неподвижны ( $v_1 = v_2 = 0$ ), то движение жидкости может иметь место только за счет

### § 3. ПАРАДОКС СТОКСА

Рассмотрим плоскую стационарную задачу. Систему уравнений (1.8) можно тогда записать в виде

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если использовать эти уравнения для получения решения задачи об обтекании кругового цилиндра, когда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} v_x|_{r=a} &= 0, \quad v_y|_{r=a} = 0, \\ v_x|_\infty &= V, \quad v_y|_\infty = 0, \quad p|_\infty = p_\infty, \end{aligned}$$

то оказывается, что такая задача вообще решения не имеет, так как невозможно удовлетворить одновременно условиям на теле и на бесконечности. Единственное решение задачи, удовлетворяющее условиям прилипания на теле, есть тождественный нуль. Такое же утверждение верно для произвольного цилиндра. Это — парадокс Стокса, а именно: если рассматривается обтекание цилиндра произвольной формы потоком вязкой жидкости, то уравнения Стокса для стационарной задачи в плоском случае решения не имеют. Возникает вопрос: справедливы ли те предположения, которые были использованы при переходе от уравнений Навье — Стокса к уравнениям Стокса. Для ответа на этот вопрос проверим, справедливы ли эти предположения в задаче об обтекании шара при том конкретном виде поля скоростей, которое мы имеем в этом случае. Если по формулам (2.4) вычислить члены, входящие в уравнения Навье — Стокса, и сравнить выброшенные члены  $v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$  и оставленные  $\text{grad } p$ ,  $\mu \Delta v$ ,

то окажется, что в некоторой окрестности сферы отброшенные члены действительно малы по сравнению с оставленными. Однако на больших расстояниях от сферы отброшенные члены много больше сохраненных. Следовательно, предположения Стокса заведомо неверны на больших расстояниях от тела. В связи с этим возникают следующие вопросы: не в этом ли состоит причина парадокса Стокса, нельзя ли усовершенствовать уравнения Стокса, сохранив линейность, но обеспечив корректность на больших расстояниях от тела.

Причина несуществования стационарного решения (парадокс Стокса) может быть в какой-то мере выяснена, если рассматри-

шается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а внешний — со скоростью  $\omega_2$ . Для решения задачи удобно ввести цилиндрические координаты  $r, \theta, x$  и записать в этих координатах систему уравнений вязкой жидкости. Для этого надо найти выражения  $\operatorname{div} \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ,  $\operatorname{grad} p$ ,  $\Delta \mathbf{v}$  в этой системе координат. Естественно предполагать, что скорость направлена по касательной к окружности  $r = \text{const}$  и зависит так же, как и давление, только от  $r$ , т. е.  $v_x = v_r = 0$ ,  $v_\theta = v(r)$ ,  $p = p(r)$ . Полученная система уравнений применимельно к рассматриваемой задаче, когда движение установившееся, принимает простой вид и позволяет сразу получить решение задачи в виде

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad p = p_1 + \int_{R_1}^r \frac{v^2(r)}{r} dr.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. Однако для решения рассматриваемой задачи мы используем другой путь.

Чтобы найти зависимости  $v = v(r)$ , запишем закон сохранения момента количества движения в слое  $R_1^2 \leq y^2 + z^2 \leq r^2$ ,  $r < R_2$  (рис. 55). Пусть  $\mathbf{M}$  — момент сил, действующих на этот слой. Поскольку течение плоское, вектор  $\mathbf{M}$  направлен по оси  $x$ . В силу стационарности движения имеем равенство  $M = 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_r$ , где  $\mathbf{M}_1$  — момент сил, действующих на внутренний цилиндр,  $\mathbf{M}_r$  — момент сил вязкого трения, приложенных к цилинду радиуса  $r$ . Величина этого вектора

$$M_r = \int_0^{2\pi} r (\tau_{r\theta} r d\theta) = r^2 \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} d\theta.$$

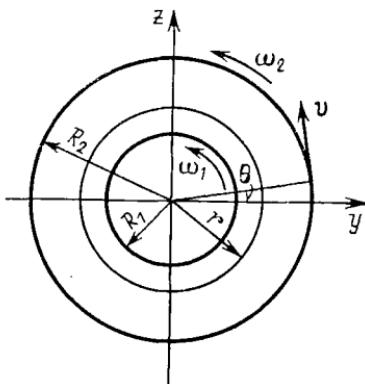


Рис. 55.

Здесь  $\tau_{r\theta}$  — проекция на ось  $\theta$  (т. е. на направление  $\mathbf{v}$ ) напряжения, действующего на площадку с нормалью  $\mathbf{r}$ . При наших предположениях оно зависит только от  $r$ , поэтому

$$M_r = \tau_{r\theta} 2\pi r^2.$$

Таким образом, закон сохранения момента дает равенство

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 + M_1 = 0. \quad (6.1)$$

Пусть угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $y$ . Очевидно, что

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = \tau_{yz}|_{z=0}.$$

Поскольку  $\tau_{r\theta}$  не зависит от  $\theta$ , последнее соотношение верно при всех  $\theta$ . Таким образом,

$$\tau_{r\theta} = \tau_{yz}|_{z=0} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=0}. \quad (6.2)$$

Далее имеем  $v_y = -v \sin \theta = -v \frac{z}{r}$ ,  $v_z = v \cos \theta = v \frac{y}{r}$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -v \frac{z}{r} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{v}{r}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} \Big|_{z=0} &= \frac{v}{r} + \left( \frac{d}{dr} \frac{v}{r} \right) \frac{y^2}{r} \Big|_{z=0} = \frac{v}{r} + r \left( \frac{d}{dr} \frac{v}{r} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Используя эти равенства, на основании (6.2) получим

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right). \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (6.1), получим уравнение для отыскания  $v$ :

$$M_1 + 2\pi r^3 \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) = 0. \quad (6.5)$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (6.6)$$

где  $C_2 = \frac{M_1}{4\pi\mu}$ . Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий

$$v|_{r=R_1} = \omega_1 R_1, \quad v|_{r=R_2} = \omega_2 R_2, \quad (6.7)$$

или, более подробно,

$$C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} = \omega_1 R_1, \quad C_1 R_2 + \frac{C_2}{R_2} = \omega_2 R_2. \quad (6.8)$$

Решая систему (6.8), получим

$$C_1 = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad C_2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (6.9)$$

Таким образом, распределение скоростей между соосными цилиндрами дается формулой

$$v = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r}. \quad (6.10)$$

Имея формулу (6.10), легко вычислить  $\tau_{r\theta}$  и  $M_r$ :

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) = -2\mu \frac{C_2}{r^2}, \quad M_r = \tau_{r\theta} 2\pi r^2 = -4\pi\mu C_2, \quad (6.11)$$

где  $C_2$  имеет вид (6.9).

Заметим также, что, измеряя в эксперименте  $M_r$ , можно определить вязкость.

Отметим частные случаи течения.

а) Оба цилиндра вращаются с одинаковой угловой скоростью:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Для этого случая из (6.10) получаем

$$v = \omega r.$$

Вязкая жидкость вращается как твердое тело с той же угловой скоростью.

б) Жидкость заполняет безграничное пространство вне цилиндра  $R_1 : R_1 = R$ ,  $\omega_1 = \omega$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $\omega_2 = 0$ . В этом случае

$$v = R_1^2 \frac{\omega}{r}.$$

в) Один из цилиндров неподвижен, например  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega$ . Тогда

$$v = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \omega r - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\omega}{r}.$$

## § 7. ПРИМЕР ПРОСТЕЙШЕГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Рассмотрим задачу. Пусть плоскость  $y = 0$  движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v_x = v_0$ . Жидкость, заполняющая полупространство  $y > 0$ , имеет при  $y \rightarrow \infty$  скорость  $v_x = v_\infty$ . Коэффициент вязкости  $\mu$  зависит от  $y$ :  $\mu = \mu(y)$ . Массовые силы отсутствуют. Посмотрим, имеет ли такая задача решение, и если имеет, то при каких условиях? Очевидно, следует принять, что

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0. \quad (7.1)$$

Выпишем систему уравнений движения сплошной среды в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right), \quad (7.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Для составляющих  $\tau_{ik}$  имеем равенство

$$\|\tau_{ik}\| = -pI + 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}\|. \quad (7.3)$$

При предположениях (7.1) достаточно рассмотреть только одно уравнение — проекцию уравнения движения на ось  $x$ , остальные три уравнения системы (7.2) удовлетворяются автоматически. Уравнение (7.2) в проекции на ось  $x$  дает

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{dv_x}{dy} \right) = 0. \quad (7.4)$$

Из (7.4) имеем  $\mu \frac{dv_x}{dy} = C_1$ . Отсюда

$$v_x = C_1 \int_0^y \frac{dy}{\mu(y)} + C_2. \quad (7.5)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяем из граничных условий

$$v_x|_{y=0} = v_0, \quad v_x|_{y=\infty} = v_\infty. \quad (7.6)$$

Из (7.5) и (7.6) получим

$$v_0 = C_2, \quad v_\infty = C_1 \int_0^\infty \frac{dy}{\mu(y)} + C_2.$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$v_x = \frac{v_\infty - v_0}{\int_0^\infty \frac{dy}{\mu(y)}} \int_0^y \frac{dy}{\mu(y)} + v_0. \quad (7.7)$$

Чтобы полученное решение имело смысл, надо, чтобы интеграл  $\int_0^\infty \frac{dy}{\mu(y)}$  был ограниченной величиной. Если  $\int_0^\infty \frac{dy}{\mu(y)} < \infty$ , то в полупространстве жидкость движется с распределением скоростей (7.7). Если интеграл расходится, то формула (7.7) дает для всех  $y$ :  $v_x = v_0$  — поставленная задача не имеет решения (например решения не будет, если  $\mu(y) = ky + \mu_0$ ).

## ГЛАВА XX

### ПОДОБИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе рассматривается подобие течений вязкой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, в предположении, что коэффициент вязкости  $\mu$  постоянен. Вопрос о подобии имеет значение и при рассмотрении теоретических вопросов, и особенно при экспериментальных исследованиях. В частности, нужно знать те условия, при выполнении которых результаты экспериментальных исследований над моделями можно переносить на реальные объекты.

#### § 1. СХОДСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ТОЧКИ

Рассмотрим два течения вязкой жидкости с разными коэффициентами вязкости около двух геометрически подобных тел.

Пусть  $a_1, a_2$  — характерные размеры первого и второго тел. Движение вязкой жидкости с коэффициентом вязкости  $v_1$  около первого тела будем описывать с помощью переменных  $x_1, y_1, z_1, t_1$ . Аналогично движение вязкой жидкости с коэффициентом вязкости  $v_2$  около второго тела будем описывать с помощью переменных  $x_2, y_2, z_2, t_2$ . Так как размерность коэффициента вязкости  $[v] = \frac{L^2}{T}$ , то величина  $\frac{a^2}{v}$  имеет размерность времени:  $\left[\frac{a^2}{v}\right] = T$ . Величины  $a_1$  и  $a_2$  определяют естественный линейный масштаб в первой и второй задачах, величины  $\frac{a_1^2}{v_1}$  и  $\frac{a_2^2}{v_2}$  могут быть приняты соответственно за масштабы времени. Имея это в виду, введем безразмерные координаты и время для каждого течения с помощью соотношений

$$\xi_i = \frac{x_i}{a_i}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{a_i}, \quad \zeta_i = \frac{z_i}{a_i}, \quad \tau_i = \frac{t_i}{a_i^2/v_i} \quad (i = 1, 2).$$

Сходственными пространственно-временными точками для двух течений около геометрически подобных тел будем называть точки  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1)$ , для которых безразмерные координаты и безразмерные времена одинаковы, т. е. точки, для которых

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2, \quad \tau_1 = \tau_2,$$

или, что то же самое,

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}, \quad \frac{y_1}{a_1} = \frac{y_2}{a_2}, \quad \frac{z_1}{a_1} = \frac{z_2}{a_2}, \quad \frac{v_1 t_1}{a_1^2} = \frac{v_2 t_2}{a_2^2}.$$

В безразмерных координатах рассматриваемые геометрически подобные тела будут иметь характерный размер, равный единице, и оба тела будут геометрически тождественны.

## § 2. ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Имеем систему уравнений вязкой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} &= g - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предположим, что вектор  $g$  массовых сил постоянен в пространстве и времени. Обозначим через  $a$  характерный размер рассматриваемого течения (например, хорду или размах крыла) и введем вместо  $x, y, z, t$  безразмерные координаты и время по формулам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad z = a\zeta, \quad t = \frac{a^2}{\nu} \tau. \quad (2.2)$$

Введем безразмерные функции

$$v = \frac{\nu}{a} u, \quad \frac{p}{\rho} = \left(\frac{\nu}{a}\right)^2 \Pi, \quad g = \frac{\nu^2}{a^3} \gamma. \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что величины  $u, \Pi, \gamma$  безразмерны, так как

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{\nu}{a}\right], \quad \left[\frac{p}{\rho}\right] = [v^2] = \left[\left(\frac{\nu}{a}\right)^2\right], \quad [g] = \left[\frac{L}{T^2}\right] = \left[\frac{\nu^2}{a^3}\right].$$

Будем теперь рассматривать  $u, \Pi, \gamma$  как функции безразмерных переменных  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Заменим в уравнениях (2.1) координаты  $x, y, z$  на  $\xi, \eta, \zeta$  и время  $t$  на  $\tau$  по формулам (2.2). Заменим в этих же уравнениях величины  $v, \frac{p}{\rho}$  и  $g$  на  $u, \Pi$  и  $\gamma$  по формулам (2.3). Сокращая на общий множитель  $\frac{\nu^2}{a^3}$ , из (2.1) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} + u_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \gamma - \operatorname{grad}' \Pi + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\operatorname{grad}' = i \frac{\partial}{\partial \xi} + j \frac{\partial}{\partial \eta} + k \frac{\partial}{\partial \zeta}$ .

Система (2.4) — система уравнений вязкой жидкости, записанная для безразмерных функций в безразмерных независимых переменных (безразмерная форма уравнений Навье — Стокса). Систему (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \gamma - \operatorname{grad}' \Pi + \Delta u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \quad (2.4')$$

имея в виду, что операторы  $\frac{d}{dt}$ ,  $\Delta$ ,  $\operatorname{div}$  относятся к переменным  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $t$ .

### § 3. ПОДОБИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ

Два течения вязкой жидкости (первое и второе) будем называть *подобными*, если значения соответственных гидродинамических величин, вычисленные для сходственных пространственно-временных точек, отличаются лишь некоторыми постоянными множителями. Эти множители могут быть разными для различных гидродинамических величин (один для скорости, другой для давления).

Пусть имеем два течения около геометрически подобных тел. Пусть они характеризуются величинами

$$\begin{aligned} a_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{v}^{(1)}, \frac{p_1}{\rho_1}, \\ a_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{g}_2, \mathbf{v}^{(2)}, \frac{p_2}{\rho_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для каждого из этих движений можем выписать безразмерную систему уравнений

$$\begin{aligned} u_x^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} + u_y^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta} + u_z^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \zeta} = \mathbf{v}_i - \operatorname{grad}' \Pi_i + \\ + \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial \zeta^2}, \\ \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решения систем (3.2), если иметь в виду внешние задачи об обтекании тел, должны удовлетворять условиям прилипания на границах  $S_1$  обтекаемых тел ( $S_1$  — поверхность тела с характерным размером, равным единице) и условиям на бесконечности

$$\mathbf{u}^{(i)}|_{S_1} = 0, \quad \mathbf{u}^{(i)}|_{\infty} = \mathbf{u}_{\infty}^{(i)}. \quad (3.3)$$

Так как безразмерные искомые величины  $\mathbf{u}^{(i)}$  и  $\Pi_i$  отличаются от размерных искомых величин постоянными множителями, то для подобия движений достаточно, чтобы в сходственных пространственно-временных точках имели место равенства

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \Pi_1 = \Pi_2. \quad (3.4)$$

Так как краевая задача об отыскании величин  $\mathbf{u}^{(i)}$  и  $\Pi_i$  ставится для одинаковых областей, для которых характерный размер равен единице, при одинаковых условиях на границе обтекаемых тел  $\mathbf{u}|_{S_1} = 0$ , для выполнения (3.4) достаточно, чтобы:

- 1) уравнения (3.2) для течения 1 ( $i = 1$ ) и для течения 2 ( $i = 2$ ) совпадали;

2) условия на бесконечности были одинаковы, т. е.

$$\mathbf{u}^{(1)}|_{\infty} = \mathbf{u}^{(2)}|_{\infty}, \quad (3.5)$$

ибо тогда обе краевые задачи будут тождественны.

Для совпадения уравнений необходимо, чтобы

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad (3.6)$$

что с учетом (2.3) дает следующее равенство:

$$\frac{\mathbf{g}_1 a_1^3}{\mathbf{v}_1^2} = \frac{\mathbf{g}_2 a_2^3}{\mathbf{v}_2^2}. \quad (3.7)$$

Условия (3.5), записанные в размерных величинах, приводят к соотношению

$$\frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} a_1}{\mathbf{v}_1} = \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(2)} a_2}{\mathbf{v}_2}. \quad (3.8)$$

Равенства (3.7) и (3.8) являются условиями, достаточными для подобия течений. Как видно, они носят векторный характер. Из этого следует, что для выполнения (3.7) необходимо, чтобы векторы  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  были параллельны:  $\mathbf{g}_1 \parallel \mathbf{g}_2$ ; для выполнения (3.8) — чтобы были параллельны скорости на бесконечности:  $\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} \parallel \mathbf{v}_{\infty}^{(2)}$ . Если считать, что эти условия параллельности выполнены, то из (3.7) и (3.8) получаем

$$\frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} a_1}{\mathbf{v}_1} = \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(2)} a_2}{\mathbf{v}_2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\mathbf{g}_1 a_1^3}{\mathbf{v}_1^2} = \frac{\mathbf{g}_2 a_2^3}{\mathbf{v}_2^2}. \quad (3.10)$$

Если (3.9) возвести в квадрат и разделить на (3.10), то будем иметь

$$\frac{(\mathbf{v}_{\infty}^{(1)})^2}{\mathbf{g}_1 a_1} = \frac{(\mathbf{v}_{\infty}^{(2)})^2}{\mathbf{g}_2 a_2}. \quad (3.11)$$

Условия (3.9), (3.11) эквивалентны условиям (3.9), (3.10).

Безразмерную величину  $Re = \frac{av}{v}$  называют *числом Рейнольдса*, безразмерную величину  $Fr = \frac{v^2}{ga}$  называют *числом Фруда*.

Таким образом, два установившихся течения около геометрически подобных тел будут подобны, если выполнены следующие четыре условия:

$$\begin{array}{ll} 1) \mathbf{v}_{\infty}^{(1)} \parallel \mathbf{v}_{\infty}^{(2)}, & 3) Re^{(1)} = Re^{(2)}, \\ 2) \mathbf{g}_1 \parallel \mathbf{g}_2, & 4) Fr^{(1)} = Fr^{(2)}, \end{array} \quad (3.12)$$

где числа  $Re$  и  $Fr$  вычисляются по скоростям на бесконечности. Обычно условия 1) и 2) подразумеваются выполненными, и тогда условия подобия записываются в виде

$$Re^{(1)} = Re^{(2)}, \quad Fr^{(1)} = Fr^{(2)}. \quad (3.13)$$

Заметим, что число  $Re$  содержит коэффициент  $v$ . Этот параметр подобия характерен для вязкой жидкости. В идеальной жидкости  $v = 0$  и  $Re = \infty$ . Подобие же по числу Фруда имеет смысл как для вязкой, так и для идеальной жидкости.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Пусть произведен опыт с моделью в аэродинамической трубе. Когда можно использовать данные этого эксперимента для реальных обтеканий? Предположим, что условия 1), 2) выполнены и  $g$  — поле силы тяжести. Пусть индексом 1 отмечаются величины, связанные с экспериментом в трубе. Тогда для подобия течений нужно выполнение равенств

$$\frac{a_1 v_\infty^{(1)}}{v_1} = \frac{a_2 v_\infty^{(2)}}{v_2}, \quad \frac{(v_\infty^{(1)})^2}{a_1 g_1} = \frac{(v_\infty^{(2)})^2}{a_2 g_2}. \quad (3.14)$$

Если оба эксперимента проводятся в условиях Земли, то  $g_1 = g_2 = g$ , если среда одна и та же (например, воздух), то, кроме того,  $v_1 = v_2$ . Тогда условия (3.14) перепишутся следующим образом:

$$a_1 v_\infty^{(1)} = a_2 v_\infty^{(2)}, \quad \frac{(v_\infty^{(1)})^2}{a_1} = \frac{(v_\infty^{(2)})^2}{a_2}.$$

Обычно размер модели  $a_1$  меньше размеров реального тела. Поэтому для выполнения первого условия необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $v_\infty^{(1)} > v_\infty^{(2)}$ , а для выполнения второго условия необходимо выполнение неравенства  $v_\infty^{(1)} < v_\infty^{(2)}$ . Таким образом, подобие по числам  $Re$  и  $Fr$  приводит к противоречивым условиям.

Один из возможных выходов из этой трудности связан с проведением экспериментов при высоких давлениях. Тогда за счет изменения плотности  $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_1 = v_1 < v_2$  в принципе можно добиться подобия по  $Re$  при  $v_\infty^{(1)} < v_\infty^{(2)}$ . Однако дело в том, что числа  $Re$  и  $Fr$  не во всех условиях одинаково существенны. При исследовании волновых процессов (в частности, качки корабля), когда существенно влияние силы тяжести, моделируют по числу Фруда. При исследовании силы сопротивления, наоборот, существенно влияние вязкости — моделируют по числу Рейнольдса.

Можно в уравнения (2.1) ввести вместо функции  $\frac{P}{\rho}$  функцию  $\pi$ :

$$\pi = -(g_x x + g_y y + g_z z) + \frac{P}{\rho}.$$

перепада давлений  $\left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \neq 0\right)$ . Безнапорное движение жидкости  $\left(\frac{\Delta p}{\Delta x} = 0\right)$  возможно если хотя бы одна из стенок перемещается.

### § 5. ТЕЧЕНИЕ В ТРУБЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим установившееся течение в бесконечно длинной неподвижной трубе с осью, направленной по оси  $x$ , сечением  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1$ . Скорость  $v_x$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad (5.1)$$

и граничному условию на контуре

$$v_x \Big|_{\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1} = 0. \quad (5.2)$$

Будем искать  $v_x$  в виде

$$v_x = A \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right). \quad (5.3)$$

При постоянном  $A$  функция (5.3) удовлетворяет условию приложения (5.2). Следовательно, достаточно подобрать постоянную  $A$  так, чтобы выполнялось равенство (5.1). Вычисляя производные функции (5.3) и подставляя их значения в уравнение (5.1), получим

$$-2A \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad A = -\frac{1}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right). \quad (5.4)$$

При  $a = b = r$  из (5.4) получим формулу (4.6) для круглой трубы. Соотношение (5.4) подтверждается экспериментом для ламинарных течений.

**З а м е ч а н и е.** Пусть имеется неподвижная цилиндрическая труба с контуром  $l$  в попечном сечении. Задача о течении жидкости в такой трубе сводится к интегрированию уравнения (1.13) с условием  $v|_l = 0$ . Такую задачу можно вообще решать для сечения любого вида.

### § 6. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  при отсутствии массовых сил. Направим ось  $x$  вдоль оси цилиндров. Предположим, что внутренний цилиндр вра-

шается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а внешний — со скоростью  $\omega_2$ . Для решения задачи удобно ввести цилиндрические координаты  $r, \theta, x$  и записать в этих координатах систему уравнений вязкой жидкости. Для этого надо найти выражения  $\operatorname{div} v, \frac{dv}{dt}, \operatorname{grad} p, \Delta v$  в этой системе координат. Естественно предполагать, что скорость направлена по касательной к окружности  $r = \text{const}$  и зависит так же, как и давление, только от  $r$ , т. е.  $v_x = v_r = 0, v_\theta = v(r), p = p(r)$ . Полученная система уравнений применительно к рассматриваемой задаче, когда движение установившееся, принимает простой вид и позволяет сразу получить решение задачи в виде

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad p = p_1 + \int_{R_1}^r \frac{v^2(r)}{r} dr.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. Однако для решения рассматриваемой задачи мы используем другой путь.

Чтобы найти зависимости  $v = v(r)$ , запишем закон сохранения момента количества движения в слое  $R_1^2 \leq y^2 + z^2 \leq r^2, r < R_2$  (рис. 55). Пусть  $\mathbf{M}$  — момент сил, действующих на этот слой. Поскольку течение плоское, вектор  $\mathbf{M}$  направлен по оси  $x$ . В силу стационарности движения имеем равенство  $M = 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_r$ , где  $\mathbf{M}_1$  — момент сил, действующих на внутренний цилиндр,  $\mathbf{M}_r$  — момент сил вязкого трения, приложенных к цилинду радиуса  $r$ . Величина этого вектора

$$M_r = \int_0^{2\pi} r (\tau_{r\theta} r d\theta) = r^2 \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} d\theta.$$

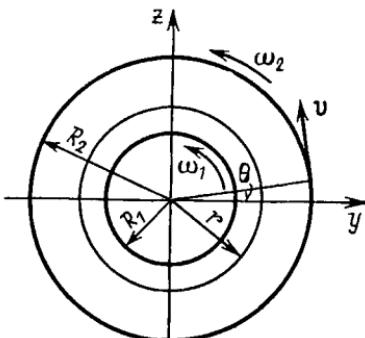


Рис. 55.

Здесь  $\tau_{r\theta}$  — проекция на ось  $\theta$  (т. е. на направление  $v$ ) напряжения, действующего на площадку с нормалью  $\mathbf{r}$ . При наших предположениях оно зависит только от  $r$ , поэтому

$$M_r = \tau_{r\theta} 2\pi r^2.$$

Таким образом, закон сохранения момента дает равенство

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 + M_1 = 0. \quad (6.1)$$

Пусть угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $y$ . Очевидно, что

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=0} = \tau_{yz}|_{z=0}.$$

Вектор  $\mathbf{C}$  называют вектором аэродинамических коэффициентов. Соответственно вводят аэродинамические коэффициенты  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ :

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \tilde{S}}, \quad C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \tilde{S}}, \quad C_z = \frac{R_z}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \tilde{S}}.$$

Если считать, что направление невозмущенного потока остается неизменным по отношению к направлению вектора массовых сил (т. е.  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  постоянны) и ориентация тела по отношению к потоку фиксирована (т. е. постоянны  $\alpha$  и  $\beta$ ), то для тела данной формы вектор  $\mathbf{C}$ , а следовательно, и аэродинамические коэффициенты  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  при любых скоростях и различных размерах тел зависят только от безразмерных параметров  $Re$  и  $Fr$ , т. е.

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(Re, Fr).$$

Если влиянием силы тяжести можно пренебречь, то коэффициенты  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  для данного тела будут функциями только числа Рейнольдса:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(Re).$$

Обычно принято вертикальную плоскость принимать за плоскость  $(x, y)$ , считая направления скорости  $v_\infty$  и оси  $x$  совпадающими. Тогда  $C_x$ ,  $C_y$  — соответственно коэффициенты сопротивления и подъемной силы,  $C_z$  — коэффициент боковой силы.

## ГЛАВА XXI

## ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Течениям идеальной жидкости отвечает число  $Re = \infty$ . Если числа Рейнольдса велики ( $Re \gg 1$ ), то можно ожидать, что течения вязкой жидкости близки к течениям идеальной. Это тем более вероятно, что решение задачи о потенциальном течении идеальной жидкости является точным решением уравнений вязкой жидкости. Однако, как было показано ранее, потенциальные решения не обеспечивают выполнения граничных условий на поверхности обтекаемого тела. Поэтому, если рассматривать обтекание некоторого тела, то следует ожидать, что течения вязкой жидкости при больших числах  $Re$  будут близки к течениям идеальной жидкости всюду, за исключением тонкого слоя



Рис. 56.

около границы. В этом тонком слое влияние вязкости существенно сказывается на распределении скорости. Гипотезу о существовании такого тонкого переходного слоя подтверждают и эксперименты. Этот тонкий слой принято называть *пограничным*.

Возникает вопрос, как определить его толщину? Конечно, толщина пограничного слоя — понятие очень условное. Практически толщиной пограничного слоя  $\delta(x)$  называют такое расстояние от поверхности тела, на котором касательные составляющие скорости вязкого и идеального течений жидкости отличаются на пренебрежимо малую величину.

Таким образом, область потока, обтекающего тело, можно разделить на две — область пограничного слоя (*I*) и область вне его (*II*) (рис. 56). В пограничном слое рассматривают движение вязкой жидкости в предположении, что отношение  $\delta/l \ll 1$  (*l* — характерный размер). Последнее соотношение позволяет значительно упростить уравнения движения вязкой жидкости. В области *II*, вне пограничного слоя, принимают, что течение совпадает с потенциальным течением идеальной жидкости.

Потенциальные течения хорошо изучены. Для какой же области решать задачу о течении идеальной жидкости? Строго говоря, следовало бы решать задачу об обтекании идеальной жидкостью тела с учетом влияния толщины пограничного слоя, но вследствие малой толщины этого слоя решают задачу об

обтекании тела идеальной жидкостью и полученное распределение скорости  $u = u_x$  на теле принимают за распределение касательной составляющей скорости на границе пограничного слоя.

Схему описания пограничного слоя предложил в 1904 г. Прандтль.

## § 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Будем считать, что  $Re \gg 1$ . Упростим уравнения движения вязкой жидкости применительно к пограничному слою, пользуясь тем, что  $\delta/l \ll 1$ . Течение жидкости предполагаем ламинарным.

Рассмотрим задачу об обтекании некоторого контура плоским потоком вязкой жидкости. Положение точки в пограничном слое можно определить, задавая длину  $x$  дуги, отсчитываемую от точки разветвления потока, и расстояние  $y$  по нормали от контура. Так как толщина пограничного слоя весьма мала по сравнению с радиусом кривизны, то, пренебрегая кривизной контура, можно в пределах слоя рассматривать  $x$  и  $y$  как прямоугольные декартовы координаты. Если внешних сил нет, то движение жидкости описывается системой уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \Delta v_x; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \Delta v_y; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

Будем рассматривать течение внутри слоя  $0 \leqslant y \leqslant \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — толщина пограничного слоя. Займемся оценкой членов, входящих в уравнения (1.1)–(1.3), предполагая, что

$$\frac{\delta}{l} \ll 1. \quad (1.4)$$

Составляющая  $v_x$  на внешней границе пограничного слоя имеет порядок  $V$ , где  $V$  — скорость на бесконечности. Предположим, что это справедливо во всем пограничном слое, т. е.

$$v_x = O(V). \quad (1.5)$$

При изменении  $x$  от нуля до  $l$  скорость меняется на величину порядка  $V$ , поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V}{l}\right), \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{V}{l^2}\right). \quad (1.6)$$

При изменении  $y$  от 0 до  $\delta$  скорость  $v_x$  меняется от нуля (на стенке) до величины порядка  $V$ , поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{V}{\delta}\right), \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V}{\delta^2}\right). \quad (1.7)$$

В силу предположения (1.4)  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ , поэтому уравнение (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (1.8)$$

Оценим порядок членов в левой части уравнения (1.8). В силу (1.5), (1.6) имеем

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V^2}{l}\right).$$

Порядок величины  $v_y$  можно оценить, используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V}{l}\right), \quad v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = O\left(\frac{V\delta}{l}\right).$$

Следовательно,

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{V\delta}{l} \frac{V}{\delta}\right) = O\left(\frac{V^2}{l}\right).$$

Если дополнительно предположить, что рассматриваются только такие нестационарные течения, для которых  $\frac{\partial v_x}{\partial t}$  имеет тот же порядок  $O\left(\frac{V^2}{l}\right)$  или меньше, то левая часть уравнения  $\frac{dv_x}{dt}$  имеет порядок  $O\left(\frac{V^2}{l}\right)$ .

Прандтль предположил, что в пограничном слое силы инерции и силы вязкого трения одного порядка. Принимая это предположение, получим, что

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V^2}{l}\right)$$

или, учитывая (1.7),

$$O\left(v \frac{V}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{V^2}{l}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = O\left(\frac{v}{Vl}\right), \quad \frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right). \quad (1.9)$$

Относительная толщина пограничного слоя обратно пропорциональна  $\sqrt{Re}$  (так называемый первый результат теории пограничного слоя). Чем больше число  $Re$ , тем тоньше пограничный слой.

Для оценки члена  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  используем следующие соображения. На внешней границе пограничного слоя при уставившемся течении справедлив интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O \left( \frac{V^2}{l} \right). \quad (1.10)$$

Этот результат мы имеем и из уравнения (1.8).

Рассмотрим теперь уравнение (1.2). Имеем

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = O \left( V \frac{V \delta}{l} \frac{1}{l} \right) = O \left( \frac{\delta}{l} \frac{V^2}{l} \right), \quad v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = O \left( \frac{\delta}{l} \frac{V^2}{l} \right),$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = O \left( \frac{V}{l^2} \frac{\delta}{l} \right), \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = O \left( \frac{V}{l \delta} \right). \quad (1.11)$$

Очевидно, в  $\Delta v_y$  слагаемое  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$  можно отбросить по сравнению с  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ . Воспользовавшись оценкой (1.9), получим

$$v \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = O \left( v \frac{V}{l \delta} \right) = O \left( \frac{v}{l V} \frac{l}{\delta} \frac{V^2}{l} \right) = O \left( \frac{\delta}{l} \frac{V^2}{l} \right). \quad (1.12)$$

Из (1.11), (1.12) и уравнения (1.2) следует, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O \left( \frac{\delta}{l} \frac{V^2}{l} \right). \quad (1.13)$$

Из сравнения (1.13) с (1.10) следует, что в пограничном слое

$$O \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\delta}{l} O \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Таким образом, давление по оси  $y$  меняется существенно медленнее, чем по оси  $x$ , поэтому уравнение (1.2) можно заменить уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad p = p(x, t). \quad (1.14)$$

Давление поперек пограничного слоя не меняется.

Система уравнений вязкой жидкости содержит еще уравнение неразрывности. Оно остается без изменений.

Уравнения (1.8), (1.3), (1.14) образуют систему уравнений пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Последнее из уравнений (1.15) означает, что давление через пограничный слой по нормали передается без изменения. Так как вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной, давление может быть взято из решения уравнений идеальной жидкости. Но так как пограничный слой тонок, то можно считать, что во всем пограничном слое зависимость давления  $p$  от  $x$  и  $t$  такая же, как в идеальной жидкости. Тогда два первых уравнения (1.15) можно рассматривать как систему уравнений пограничного слоя для функций  $v_x$  и  $v_y$ , в которых  $\frac{\partial p}{\partial x}$  — известная функция, найденная из решения задачи обтекания тела потоком идеальной жидкости.

Если течение установившееся, то вне пограничного слоя (идеальная жидкость) справедлив интеграл Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (1.16)$$

Если  $u = U$  — скорость на внешней границе пограничного слоя, то в силу того, что  $\frac{\partial p}{\partial x}$  не изменяется поперек пограничного слоя (не зависит от  $y$ ), уравнения пограничного слоя с учетом (1.16) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Так как, в частности, при  $y = 0$   $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y=0}$ , то за функцию  $U$  может быть взято решение уравнений идеальной жидкости при  $y = 0$ . При этом  $U = U_x$  и зависит только от  $x$ . Искомые функции  $v_x$ ,  $v_y$  нужно находить как решение уравнений (1.17) при следующих граничных условиях:

1) на теле при  $0 \leq x \leq l$  (условия прилипания)

$$v_x|_{y=0} = 0, \quad v_y|_{y=0} = 0; \quad (1.18)$$

2) на внешней границе пограничного слоя

$$v_x = (1 - e) U(x), \quad (1.19)$$

где  $e$  — заданная малая величина.

Фактически ввиду неопределенности границы пограничного слоя ( $\delta(x)$  неизвестна) соотношение (1.19) не является граничным условием, так как в нем  $v_x = v_x(x, \delta(x))$ , где  $\delta(x)$  неизвестна.

Поэтому граничные условия несколько видоизменяют. Во-первых, решения системы (1.17) можно найти только при заданном значении  $v_x$  при  $x = 0$ . Во-вторых, условие на границе пограничного слоя заменяют условием при  $y \rightarrow \infty$  исходя из

предположения, что внутри пограничного слоя  $v_x$  быстро стремится к предельным значениям при удалении от тела. Таким образом, вместо условий (1.18), (1.19) получают условия:

- 1) при  $0 \leq x \leq l$   $v_x|_{y=0} = 0$ ,  $v_y|_{y=0} = 0$ ,
  - 2)  $v_x|_{\substack{y>0 \\ x=0}} = U(0)$ ,
  - 3)  $v_x|_{\substack{y \rightarrow \infty \\ 0 \leq x \leq l}} = U(x)$ .
- (1.20)

Имея распределение скоростей в пограничном слое, т. е. найдя решение уравнений (1.17), удовлетворяющее условиям (1.20), можно найти внешнюю границу пограничного слоя  $\delta(x)$ , используя (1.19):

$$v_x(x, \delta) = (1 - \varepsilon) U(x). \quad (1.21)$$

## § 2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ОКОЛО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

Пусть пластина  $0 \leq x < \infty$  обтекается потоком со скоростью  $V$ , направленной по оси  $x$ . Требуется найти течение в пограничном слое (рис. 57).

Берем уравнения теории пограничного слоя для случая установившегося движения

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рис. 57.

В этих уравнениях  $p = p(x)$  — известное давление в потоке идеальной жидкости на внешней границе пограничного слоя или (из-за тонкости пограничного слоя) известное давление на обтекаемом контуре в потоке идеальной жидкости.

Рассматриваемая нами пластинка не возмущает потока идеальной жидкости. Поэтому

$$p = p(x) = p_\infty = \text{const.}$$

Следовательно, нужно интегрировать уравнения

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этих уравнений нужно найти  $v_x$  и  $v_y$ . Искомые  $v_x$  и  $v_y$  являются решением системы уравнений (2.2), удовлетворяющим краевым условиям

$$\begin{aligned} v_x|_{\substack{y=0, x>0}} &= 0, \\ v_y|_{\substack{y=0, x>0}} &= 0, \\ v_x|_{\substack{y=\delta(x), x \geq 0}} &= V. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условие на внешней границе пограничного слоя (при  $y = \delta(x)$ ) можно заменить условием при  $y = \infty$ ,  $x \geq 0$  и при  $x = 0$ ,  $y > 0$ . Поэтому будем интегрировать уравнения (2.2) при условиях

$$\begin{aligned} v_x|_{y=0, x>0} &= 0, \quad v_y|_{y=0, x>0} = 0, \\ v_x|_{x=0, y>0} &= V, \\ v_x|_{y=\infty, x\geq 0} &= V. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из первого уравнения (2.2) имеем

$$v_y = \frac{v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y}}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение (2.2), получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y}} = 0. \quad (2.6)$$

Вместо системы уравнений (2.2) можно интегрировать уравнение в частных производных третьего порядка (2.6).

Сформулируем граничные условия для уравнения (2.6). Эти условия должны содержать лишь функцию  $v_x$ . Из равенства (2.5) следует, что для выполнения условия  $v_y = 0$  при  $y = 0$ ,  $x > 0$  должен обращаться в нуль числитель в (2.5) (предполагаем, что  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$ ). Но так как при  $y = 0$ ,  $x > 0$  и  $v_x = 0$ , то это означает, что

$$\left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{y=0, x>0} = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, уравнение (2.6) нужно решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} v_x|_{y=0, x>0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{y=0, x>0} = 0, \\ v_x|_{x=0, y>0} &= V, \\ v_x|_{y=\infty, x>0} &= V. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Прандтль заметил, что решение уравнения (2.6) можно искать в виде

$$v_x = \mathcal{F} \left( \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right). \quad (2.9)$$

Если положим

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (2.10)$$

и условимся обозначать штрихом дифференцирование по  $\xi$ , то

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{F}'(\xi) \left[ -\frac{1}{\sqrt{2v}} \left( -\frac{1}{2} \right) yx^{-\frac{3}{2}} \right],$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \mathcal{F}'(\xi) \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mathcal{F}''(\xi) \frac{1}{2vx}.$$

Подставляя эти равенства в (2.6), получим для  $\mathcal{F}(\xi)$  следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\mathcal{F}'\mathcal{F}''' - (\mathcal{F}'')^2 + \mathcal{F}\mathcal{F}'^2 = 0. \quad (2.11)$$

Для того чтобы  $v_x$  в виде (2.9) было решением уравнения (2.6) при условиях (2.8), нужно найти решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.11), удовлетворяющее условиям  $\mathcal{F}(0) = 0$ ,  $\mathcal{F}''(0) = 0$ ,  $\mathcal{F}(\infty) = V$ . (2.12)

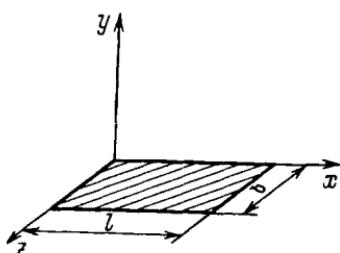


Рис. 58.

Уравнение (2.11) не интегрируется в квадратурах, а применение численных методов более просто, когда условия поставлены на одном конце интервала.

Имея в виду решение задачи (2.11), (2.12), решим сначала вспомогательную задачу. Именно найдем сначала функцию  $\mathcal{F}_1(\xi)$ , являющуюся решением уравнения (2.11) и удовлетворяющую условиям

$$\mathcal{F}_1(0) = 0, \quad \mathcal{F}'_1(0) = 1, \quad \mathcal{F}''_1(0) = 0. \quad (2.13)$$

Задача (2.11), (2.13) есть задача Коши для уравнения (2.11) при начальных данных (2.13). Задачу Коши сравнительно легко решать численными методами. Можно показать, что решение задачи (2.11), (2.13) — ограниченная функция, имеющая конечный предел на бесконечности. Функция  $\mathcal{F}_1(\xi)$  фактически была построена. Считаем, что  $\mathcal{F}_1(\xi)$  нам известна и, в частности, известна постоянная  $C$  такая, что

$$\mathcal{F}_1(\infty) = C. \quad (2.14)$$

Имея  $\mathcal{F}_1(\xi)$ , построим функцию  $\mathcal{F}(\xi)$ . Пусть  $k$  — некоторая постоянная. Прямой подстановкой в уравнение (2.11) можно убедиться в том, что функция

$$\mathcal{F}(\xi) = k^2 \mathcal{F}_1(k\xi) \quad (2.15)$$

является решением уравнения (2.11), если  $\mathcal{F}_1(\xi)$  является его решением. Поэтому, имея  $\mathcal{F}_1(\xi)$ , мы одновременно имеем одно-

параметрическое семейство решений уравнения (2.11), зависящее от параметра  $k$  и определяемое формулой (2.15).

Подберем  $k$  так, чтобы функция  $\mathcal{F}(\xi)$ , определенная (2.15), была решением нужной нам задачи (2.11), (2.12). Уравнение (2.11) выполнено. Из условий (2.13), по которым строилась  $\mathcal{F}_1(\xi)$ , функция  $\mathcal{F}(\xi)$  при любом  $k$  удовлетворяет первому и второму из условий (2.12). Поэтому нужно выбрать  $k$  так, чтобы было выполнено третье из условий (2.12). Записывая его, имеем

$$k^2 \mathcal{F}_1(\infty) = V,$$

или с учетом (2.14)  $k^2 C = V$ :

$$k = \sqrt{\frac{V}{C}}.$$

Следовательно,

$$v_x = \frac{V}{C} \mathcal{F}_1 \left( \sqrt{\frac{V}{C}} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \quad (2.16)$$

есть решение поставленной задачи. В нем функция  $\mathcal{F}_1$  и константа  $C$  известны.

Предположим теперь, что решение (2.16) для полубесконечной пластины можно использовать для приближенного вычисления сопротивления  $R_x$  пластины конечной длины  $l$  и ширины  $b$  (рис. 58). Очевидно,

$$R_x = 2 \int_0^b dz \int_0^l \tau_{yx} \Big|_{y=0} dx = 2b \int_0^l \tau_{yx} \Big|_{y=0} dx. \quad (2.17)$$

Коэффициент 2 в (2.17) введен из-за того, что учитываем две стороны пластины. Имеем

$$\tau_{yx} \Big|_{y=0} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (2.18)$$

С учетом (2.16) и (2.13) получим

$$\begin{aligned} \tau_{yx} \Big|_{y=0} &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{V}{C} \mathcal{F}_1 \left( \sqrt{\frac{V}{C}} \frac{y}{\sqrt{2\nu x}} \right) \right] \Big|_{y=0} = \\ &= \mu \left( \frac{V}{C} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2\nu x}} \mathcal{F}'_1(0) = \mu \left( \frac{V}{C} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.17), найдем сопротивление пластины

$$R_x = 2b \left( \frac{V}{C} \right)^{3/2} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{C^{3/2}} \rho \sqrt{\nu} V^{3/2} b \sqrt{l}, \quad (2.20)$$

ибо  $\mu = \rho\nu$ .

Вычислим теперь коэффициент сопротивления  $C_x$ . По определению

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}. \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.21) вместо  $R_x$  его выражение (2.20) и учитывая, что в нашем случае  $S = bl$ , получим

$$C_x = \frac{4\sqrt{2}}{C^{3/2}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{Vl}} = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{C}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (2.22)$$

где  $\frac{V}{v} = Re$  — число Рейнольдса.

Расчеты показывают, что  $4\sqrt{2} \left(\frac{1}{C}\right)^{3/2} \approx 1,328$ . Таким образом,

$$C_x = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}. \quad (2.23)$$

При больших числах  $Re$  коэффициент сопротивления пластиинки обратно пропорционален  $\sqrt{Re}$ . Формула (2.23) хорошо подтверждается экспериментом для чисел Рейнольдса  $Re \leq 3 \cdot 10^5$ . При больших значениях  $Re$  данные эксперимента сильно отличаются от значений, даваемых формулой (2.23). Граница  $3 \cdot 10^5$  условна, ее можно увеличить, если очень хорошо полировать пластиину. Эксперименты показывают, что на некотором расстоянии от передней кромки ламинарный пограничный слой начинает переходить в турбулентный. Этот переход и приводит к нарушению картины, предписываемой формулой (2.23).

Вычислим теперь толщину пограничного слоя, положив в (1.21) величину  $\epsilon = 0,005$ . Имея для  $v_x$  формулу (2.16), можем написать

$$\frac{V}{C} \mathcal{F}_1 \left( \sqrt{\frac{V}{C}} \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{\delta(x)}{\sqrt{x}} \right) = 0,995V.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\delta(x) = 5,6 \sqrt{\frac{vx}{V}}. \quad (2.24)$$

Формула (2.24) также дает возможность понять, почему формула (2.16) неверна при больших  $Re$  (или  $l$ ). Толщина пограничного слоя растет с ростом  $x$ , и при очень больших  $x$  нарушаются предположения теории пограничного слоя. Формула (2.24) хорошо согласуется с экспериментом в ламинарной области.

**З а м е ч а н и е.** Часто используют местное число  $Re(x)$ , которое можно определить равенством  $Re(x) = \frac{Vx}{v}$ . Тогда

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5,6}{\sqrt{Re(x)}}.$$

## ГЛАВА XXII

## ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В предыдущих главах было выяснено, что для установившегося течения вязкой жидкости существенно значение числа Рейнольдса, причем при отсутствии массовых сил ( $g = 0$ ) число  $Re$  является единственным параметром, характеризующим с точностью до подобия рассматриваемое течение. Поэтому когда не удается найти точное решение задачи, в общем случае разывают приближенные методы, соответствующие тем или иным предположениям относительно числа Рейнольдса. Такие приближенные методы развиты в предположении, что  $Re \gg 1$  и  $Re \ll 1$ .

Ранее исследовался случай больших чисел  $Re$ . В данной главе мы будем рассматривать течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса  $Re \ll 1$ . Это означает, что к рассматриваемому виду относятся медленные движения вязкой жидкости, движения жидкости с большой вязкостью, движения малых тел в сравнительно вязких жидкостях.

### § 1. УРАВНЕНИЯ СТОКСА

Для получения уравнений движения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса будем исходить из общей системы уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем рассматривать внешнюю задачу. Пусть характерный размер обтекаемого тела  $a$ , а скорость на бесконечности  $\mathbf{v}|_{\infty} = \mathbf{V}$ . Введем безразмерные независимые переменные и безразмерные искомые функции

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{\nu}{a^2} t, \\ \mathbf{u} &= \frac{a}{\nu} \mathbf{v}, \quad \Pi = \left(\frac{a}{\nu}\right)^2 \frac{p}{\rho}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

После перехода к новым независимым переменным и новым искомым функциям получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} &= -\operatorname{grad} \Pi + \Delta \mathbf{u}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При этом искомая функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности условию  $u_\infty = \text{Re}$ . Модуль искомой величины  $|u| = |u| = \frac{av}{v}$  по существу является местным (вычисленным в данном месте) числом Рейнольдса. Предположение о малости чисел Рейнольдса означает, что

$$|u| = \left| \frac{av}{v} \right| \ll 1,$$

или

$$|u_x| \ll 1, \quad |u_y| \ll 1, \quad |u_z| \ll 1. \quad (1.4)$$

Поскольку безразмерная скорость и ее компоненты  $u_x, u_y, u_z$  меняются на величины порядка их самих на расстояниях порядка единицы (характерного размера), то в этих течениях наряду с (1.4) имеем

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \right| \ll 1. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что произведения вида

$$u_i \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l}$$

являются величинами второго порядка малости. Пренебрегая в уравнении (1.3) величинами второго порядка малости по сравнению с величинами первого порядка малости, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\text{grad } \Pi + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) есть уравнения движения вязкой жидкости при малых числах  $\text{Re}$ , записанные в безразмерном виде. Если теперь в уравнениях (1.6) снова вернуться к размерным величинам, то будем иметь систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнения (1.7) — уравнения Стокса для движения вязкой жидкости при малых числах  $\text{Re}$ . Иногда их называют уравнениями Стокса для медленных движений. В случае установившихся движений они имеют вид

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \text{grad } p, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Системы (1.7) и (1.8) отличаются от исходных уравнений (1.1), в частности, тем, что они линейны, поэтому строить их решение гораздо проще. Благодаря этому они решены во многих частных случаях.

## § 2. ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Пусть сфера  $r = a$  обтекается установившимся потоком, скорость которого  $\mathbf{V}$  на бесконечности направлена параллельно оси  $x$ . Чтобы решить задачу об обтекании сферы при малых числах  $Re$ , нужно найти решение системы (1.8), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\text{на сфере } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (r = a): \quad \mathbf{v} |_{r=a} = 0,$$

или

$$v_x |_{r=a} = 0, \quad v_y |_{r=a} = 0, \quad v_z |_{r=a} = 0, \quad (2.1)$$

на бесконечности:

$$v_x |_{\infty} = V, \quad v_y |_{\infty} = 0, \quad v_z |_{\infty} = 0, \quad p |_{\infty} = p_{\infty}. \quad (2.2)$$

Вообще говоря, решение можно получить разными способами. Наиболее естественным является следующий ход решения задачи. Вводят сферические координаты  $r, \theta, \lambda$  и записывают систему уравнений и граничные условия для  $v_r, v_{\theta}, v_{\lambda}$  и  $p$ . Из условий симметрии следует, что

$$v_{\lambda} = 0, \quad v_r = v_r(r, \theta), \quad v_{\theta} = v_{\theta}(r, \theta), \quad p = p(r, \theta).$$

Решение задачи отыскивают в виде

$$v_r = f(r) \cos \theta, \quad v_{\theta} = g(r) \sin \theta, \quad p = \mu h(r) \cos \theta. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.8), получают для неизвестных функций  $f(r), g(r), h(r)$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрируя эту систему уравнений и учитывая граничные условия, находят функции  $f(r), g(r), h(r)$ , а следовательно, и решение (2.3). Это решение (мы его выпишем для  $v_x, v_y, v_z$ ) будет иметь вид

$$\begin{aligned} v_x &= V \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{Vax^2}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ v_y &= - \frac{3}{4} \frac{Vaxy}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ v_z &= - \frac{3}{4} \frac{Vaxz}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ p &= p_{\infty} - \frac{3}{2} \mu \frac{Vax}{r^3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Можно доказать, что функции (2.4) — единственное решение задачи.

Имея распределение давления и скоростей около сферы, можно вычислить силу сопротивления  $R_x$ , а следовательно, и коэффициент сопротивления  $C_x$  сферы. Главный вектор сил

$$\mathbf{R} = \iint_S \tau_n dS.$$

Формула Коши для  $\tau_n$  для точек поверхности сферы  $r = a$  может быть записана в виде

$$\tau_n = \tau_x \cos(\hat{n}, \hat{x}) + \tau_y \cos(\hat{n}, \hat{y}) + \tau_z \cos(\hat{n}, \hat{z}) = \tau_x \frac{x}{a} + \tau_y \frac{y}{a} + \tau_z \frac{z}{a}.$$

Соответственно проекции вектора  $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} R_x &= \iint_S \tau_{nx} dS = \iint_S \left( \frac{x}{a} \tau_{xx} + \frac{y}{a} \tau_{yx} + \frac{z}{a} \tau_{zx} \right) dS, \\ R_y &= \iint_S \tau_{ny} dS, \quad R_z = \iint_S \tau_{nz} dS. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Компоненты тензора напряжений могут быть вычислены с использованием решения (2.4) по известным формулам

$$\tau_{lk} = -p\delta_{lk} + \mu \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), после вычисления получим  $R_y = R_z = 0$ ,

$$R_x = 6\pi\mu a V. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) — известная формула Стокса для сопротивления сферы при малых числах  $Re$ . Сила сопротивления сферы пропорциональна вязкости  $\mu$ , радиусу сферы  $a$ , скорости  $V$ . Коэффициент сопротивления сферы при малых числах  $Re$

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi a^2} = 12 \frac{V}{Va} = \frac{12}{Re}. \quad (2.8)$$

(При больших  $Re$  имеем пограничный слой,  $C_x \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ , при еще больших  $Re$  с хорошей точностью  $C_x$  постоянен.) Решение (2.4) и формулы (2.7), (2.8) хорошо подтверждаются экспериментом до чисел  $Re < \frac{1}{2}$  (решение получено в предположении  $Re \ll 1$ ) Формула Стокса имеет большое применение.

### § 3. ПАРАДОКС СТОКСА

Рассмотрим плоскую стационарную задачу. Систему уравнений (18) можно тогда записать в виде

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если использовать эти уравнения для получения решения задачи об обтекании кругового цилиндра, когда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} v_x|_{r=a} &= 0, \quad v_y|_{r=a} = 0, \\ v_x|_{\infty} &= V, \quad v_y|_{\infty} = 0, \quad p|_{\infty} = p_{\infty}, \end{aligned}$$

то оказывается, что такая задача вообще решения не имеет, так как невозможно удовлетворить одновременно условиям на теле и на бесконечности. Единственное решение задачи, удовлетворяющее условиям прилипания на теле, есть тождественный нуль. Такое же утверждение верно для произвольного цилиндра. Это — парадокс Стокса, а именно если рассматривается обтекание цилиндра произвольной формы потоком вязкой жидкости, то уравнения Стокса для стационарной задачи в плоском случае решения не имеют. Возникает вопрос: справедливы ли те предположения, которые были использованы при переходе от уравнений Навье — Стокса к уравнениям Стокса. Для ответа на этот вопрос проверим, справедливы ли эти предположения к задаче об обтекании шара при том конкретном виде поля скоростей, которое мы имеем в этом случае. Если по формулам (2.4) вычислить члены, входящие в уравнения Навье — Стокса, и сравнить выброшенные члены  $v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$  и оставленные  $\operatorname{grad} p$ ,  $\mu \Delta v$ ,

то окажется, что в некоторой окрестности сферы отброшенные члены действительно малы по сравнению с оставленными. Однако на больших расстояниях от сферы отброшенные члены много больше сохранившихся. Следовательно, предположения Стокса заведомо неверны на больших расстояниях от тела. В связи с этим возникают следующие вопросы: не в этом ли состоит причина парадокса Стокса, нельзя ли усовершенствовать уравнения Стокса, сохранив линейность, но обеспечив корректность, на больших расстояниях от тела?

Причина несуществования стационарного решения (парадокс Стокса) может быть в какой-то мере выяснена, если рассматри-

вать нестационарную задачу обтекания цилиндра потоком жидкости, который в начальный момент на бесконечности параллелен, и изучить поведение поля скоростей при  $t$ , стремящемся к бесконечности. Рассматривая эту задачу для кругового цилиндра, Б. Русанов установил, что для любой точки  $A$  в потоке, как угодно удаленной от цилиндра, скорость жидкости при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю как  $\frac{\text{const}}{\ln t}$ . Следовательно, цилиндр останавливает жидкость, находящуюся первоначально в движении. Это эквивалентно тому, что если цилиндр движется поступательно со скоростью  $V(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_0 = \text{const} \neq 0$ , то в системе координат, связанной с цилиндром, скорость жидкости в любой заданной точке будет при  $t \rightarrow \infty$  стремиться к  $V_0$ , т. е. цилиндр увлекает за собой жидкость. Аналогичный результат верен для движущейся плоскости, как это было показано в § 2 главы XIX, но будет неверен в трехмерном пространстве для тела конечных размеров.

#### § 4. УРАВНЕНИЯ ОЗИНА

Наша задача — получить решение, справедливоое и на больших расстояниях от тела. Будем исходить из системы уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

и следующих условий на бесконечности:

$$v_x|_\infty = V, \quad v_y|_\infty = v_z|_\infty = 0.$$

Представим  $v_x, v_y, v_z$  в следующем виде:

$$v_x = V + v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (4.2)$$

и будем считать в точках, далеких от сферы  $v'_x, v'_y, v'_z$ , малыми вместе со своими производными по сравнению со скоростью  $V$ . Подставим (4.2) в (4.1) и, пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + V \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}', \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения (4.3) — уравнения для течений вязкой жидкости при малых числах  $Re$  (для медленных движений) — Озин предло-

жил использовать вместо уравнений Стокса. Эти уравнения, так же как и уравнения Стокса, линейны. В точках, удаленных от сферы, отброшенные члены не превосходят оставленных. Вблизи сферы уравнения Стокса (1.7) и уравнения (4.3) имеют одну и ту же точность. С помощью этих уравнений решались задачи об обтекании сферы, эллипсоида и круглого цилиндра. Формула для силы сопротивления сферы подтверждается экспериментом при  $Re < 1$ . В задаче об обтекании цилиндра не возникает парадокса Стокса.

### *РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА*

1. Коchin Н. Е., Кибель И. Я., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., 1963, Т. I, 584 с.; т. II, 728 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1973. 847 с.
3. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., 1964. 655 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М., 1976, т. I — 536 с.; т. II — 576 с.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики. М., 1966. 418 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабата** 109  
— Пуассона 110
- Бернулли интеграл** см. Интеграл Бернулли
- Вектор** 18  
— сил 105  
— момента 105  
— потока тепла 68
- Вихревая линия** см. Линия вихревая
- Вихреисточник** 140
- Вихрь** 139  
— присоединенный 236  
— свободный 236
- Градиент функции**  $\varphi$  23
- Движение(я) (гечение(я)) адиабатическое** 108  
— безвихревое 119  
— ламинарное 257  
— неуставновившееся 14  
— плоское 42, 130  
— подобные 265  
— потенциальное 119  
— турбулентное 257  
— установившееся 13, 41, 130
- Диада** 20
- Диполь** 138, 189
- Дирихле задача** см. Задача Дирихле
- Жидкость бароклинная** 98, 104  
— баротропная 98  
— вязкая 71  
— идеальная 70, 108  
— несжимаемая 42, 79, 121, 130  
— сжимаемая 79, 122
- Жуковского профиль** см. Профиль Жуковского  
— силы см. Сила Жуковского
- Задача Дирихле** 133, 172  
— Коши 15, 16, 17, 278  
— Неймана 131, 172
- Интеграл Бернулли** 112  
— Лагранжа 120  
— Эйлера — Бернулли 121
- Источник (сток)** 136, 187
- Коши задача** см. Задача Коши
- Коэффицент вязкости** 72  
— — динамический 76  
— — кинематический 76  
— Ламе 45  
— подъемной силы 156, 160  
— сопротивления 156, 279
- Критическая скорость** см. Скорость критическая
- Крыло конечного размаха** 233  
— тонкое 174

- Лагранжа интеграл** см. Интеграл Лагранжа  
**Ламе коэффициент** см. Коэффициент Ламе  
**Лапласа уравнение** см. Уравнение Лапласа  
**Линия вихревая** 33  
 — тока 15
- Маха число** см. Число Маха  
**Момент диполя** 138, 190  
 — главный 105  
 — количества движения 57, 60  
 — — — орбитальный 57  
 — — — полный 57
- Навье — Стокса уравнение** см. Уравнение Навье — Стокса  
**Неймана задача** см. Задача Неймана
- Поверхность тока** 16  
**Пограничный слой** см. Слой пограничный  
**Поляра крыла** 242  
**Постулат Чаплыгина — Жуковского** 150  
**Потенциал комплексный** 134  
 — скоростей 119, 130, 201  
 — скоростей 119
- Производная индивидуальная** 12  
 — местная (локальная) 12  
**Профиль Жуковского** 163  
 — тонкий 174  
**Псевдотензор** 23
- Рейнольдса число** см. Число Рейнольдса
- Спла(ы) Жуковского** 156  
 — массовые 49  
 — поверхностные 49  
 — подъемная 156  
 — сопротивления 156
- Скорость** 7  
 — комплексная  
 — критическая 113  
 — объемного расширения жидкости (дивергенция) 34  
**Слой пограничный** 271  
**Стокса уравнение** см. Уравнение Стокса
- Тензор второго ранга** 19  
 — единичный 20  
 — напряжений 53  
 — первого ранга 18  
 — скоростей деформаций 29  
 — — — в главных осях 30
- Течение плоское** 130  
**Траектория частицы** 15
- Уравнение(я) движения сплошной среды в напряжениях** 55  
 — Лапласа 97, 121  
 — Навье — Стокса 88  
 — пограничного слоя 274  
 — Стокса 282  
 — Эйлера 81  
 — — в форме Громеки — Лэмба 118
- Фруда число** см. Число Фруда  
**Функции гармонические** 97  
 — тока 132
- Циркуляция** 33, 139, 150, 154, 219
- Число Маха** 123, 128  
 — Рейнольдса 256, 257, 266  
 — — критическое 257  
 — Фруда 266
- Эйлера — Бернулли интеграл** см. Интеграл Эйлера — Бернулли  
**Эйлера уравнение** см. Уравнение Эйлера  
**Энтальпия** 113  
 — торможения 113

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
1. Основные положения . . . . .	—
2. Понятие физически бесконечно малого объема и схема сплошной среды . . . . .	6
3. Некоторые основные величины . . . . .	7
4. Основные свойства жидкости . . . . .	8

### ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

#### Глава I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

§ 1. Переменные Лагранжа и Эйлера . . . . .	9
§ 2. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно . . . . .	10
§ 3. Индивидуальная и местная производные . . . . .	11
§ 4. Установившееся и неустановившееся движения . . . . .	13
§ 5. Скорости и ускорения . . . . .	14
§ 6. Траектории, линии тока, критические точки . . . . .	15
§ 7. Некоторые замечания о тензорах . . . . .	17
§ 8. Скорости и перемещения точек бесконечно малого объема сплошной среды . . . . .	25
§ 9. Тензор скоростей деформаций и его инварианты . . . . .	29
§ 10. Смысъ компонент тензора скоростей деформаций . . . . .	31
§ 11. Смысъ компонент вихря скорости . . . . .	32
§ 12. Вихревые линии, вихревые трубки . . . . .	33
§ 13. Циркуляция скорости . . . . .	—
§ 14. Скорость объемного расширения жидкости . . . . .	34
§ 15. Некоторые формулы дифференцирования объемных интегралов . . . . .	35

#### Глава II. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАСС

§ 1. Интегральная запись закона сохранения масс . . . . .	39
§ 2. Дифференциальная запись закона сохранения масс в переменных Эйлера (уравнение неразрывности в переменных Эйлера) . . . . .	40
§ 3. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа . . . . .	42
§ 4. Уравнение неразрывности в криволинейных координатах . . . . .	44

## Глава III. ЗАКОН КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Силы массовые и поверхностные . . . . .	49
§ 2. Интегральная запись закона количества движения . . . . .	50
§ 3. Формула Коши . . . . .	51
§ 4. Тензор напряжений . . . . .	53
§ 5. Дифференциальная запись закона количества движения . . . . .	54

## Глава IV. ЗАКОН МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Интегральная запись закона момента количества движения . . . . .	57
§ 2. Дифференциальная запись закона момента количества движения . . . . .	60

## Глава V. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

§ 1. Внутренняя энергия . . . . .	63
§ 2. Полная энергия . . . . .	64
§ 3. Интегральная запись закона сохранения энергии . . . . .	—
§ 4. Некоторые преобразования интегральной записи закона сохранения энергии . . . . .	67
§ 5. Вектор потока тепла . . . . .	68
§ 6. Дифференциальная запись закона сохранения энергии . . . . .	69

## Глава VI. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ СРЕД

§ 1. Идеальная жидкость и тензор напряжений для нее . . . . .	70
§ 2. Вязкая (ニュтоновская) жидкость и тензор напряженний для нее . . . . .	71
§ 3. Нетеплопроводная жидкость . . . . .	77
§ 4. Жидкость, подчиняющаяся закону теплопроводности Фурье . . . . .	78
§ 5. Несжимаемая жидкость . . . . .	79
§ 6. Сжимаемая жидкость . . . . .	—

## Глава VII. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЕ

§ 1. Система уравнений гидромеханики идеальной нетеплопроводной жидкости . . . . .	81
§ 2. Постановка задач об отыскании установившихся течений идеальной нетеплопроводной жидкости . . . . .	83
§ 3. Постановка задач об отыскании неустановившихся течений идеальной нетеплопроводной жидкости . . . . .	84

## Глава VIII. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЕ

§ 1. Общая система уравнений гидромеханики вязкой жидкости . . . . .	86
§ 2. Система уравнений гидромеханики однородной несжимаемой вязкой жидкости . . . . .	87
§ 3. Постановка задач об отыскании течений вязкой теплопроводной жидкости . . . . .	90

## ЧАСТЬ II. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

## Глава IX. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Уравнения равновесия . . . . .	93
§ 2. Условие для сил . . . . .	94
§ 3. Условия на поверхности раздела двух жидкостей . . . . .	95
§ 4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости . . . . .	96
§ 5. Равновесие баротропной жидкости . . . . .	98

§ 6. Общий случай равновесия жидкости в консервативном силовом поле . . . . .	99
§ 7. Общие формулы для главного вектора и главного момента сил давлений . . . . .	105
§ 8. Закон Архимеда . . . . .	106

### ЧАСТЬ III. ГИДРОМЕХАНИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

#### Глава X. ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Адиабата . . . . .	108
§ 2. Интеграл Бернулли . . . . .	111
§ 3. Интеграл Бернулли в случае движения газа с усложненной термодинамикой . . . . .	113
§ 4. Два примера на применение интеграла Бернулли . . . . .	115
§ 5. Уравнения Эйлера в форме Громеки — Лэмба . . . . .	118
§ 6. Потенциальные, или безвихревые, движения . . . . .	119
§ 7. Интеграл Лагранжа . . . . .	120
§ 8. Интеграл Эйлера — Бернулли . . . . .	121
§ 9. Уравнения для потенциала скоростей . . . . .	—

#### Глава XI. ОБОБЩЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Система уравнений . . . . .	125
§ 2. Движение несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения . . . . .	127
§ 3. Движение сжимаемой жидкости в трубе переменного сечения. Сопло Лаваля . . . . .	128

#### Глава XII. ПЛОСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Система уравнений . . . . .	130
§ 2. Потенциал скоростей . . . . .	131
§ 3. Функция тока . . . . .	—
§ 4. Комплексный потенциал и комплексная скорость . . . . .	133
§ 5. Примеры простейших течений . . . . .	135
§ 6. Потенциальное обтекание кругового цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости . . . . .	140
§ 7. Метод конформных отображений . . . . .	146
§ 8. Обтекание эллиптического цилиндра . . . . .	148
§ 9. Постулат Чаплыгина — Жуковского . . . . .	149
§ 10. Формулы Чаплыгина — Блазиуса . . . . .	151
§ 11. Интеграл от комплексной скорости . . . . .	154
§ 12. Теорема Жуковского . . . . .	155
§ 13. Формула для момента . . . . .	157
§ 14. Обтекание пластинки . . . . .	158
§ 15. Обтекание профилей Жуковского . . . . .	161
§ 16. Обтекание произвольного профиля. Метод Нужина . . . . .	167
§ 17. Некоторые общие замечания о плоских потенциальных движениях идеальной несжимаемой жидкости . . . . .	172

#### Глава XIII. ТЕОРИЯ ТОНКОГО КРЫЛА

§ 1. Понятие тонкого крыла и условия обтекания для тонкого профиля . . . . .	174
§ 2. Решение задачи об обтекании тонкого профиля методом тригонометрических рядов . . . . .	177
§ 3. Решение задачи об обтекании профиля с нулевой толщиной . . . . .	179
§ 4. Решение задачи о бесциркуляционном обтекании тонкого симметричного профиля . . . . .	182
§ 5. Решение задачи об обтекании произвольного тонкого профиля . . . . .	184

## Глава XIV. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Источники в пространстве . . . . .	187
§ 2. Диполь в пространстве . . . . .	189
§ 3. Обтекание сферы . . . . .	190
§ 4. Функция тока для осесимметричных течений . . . . .	192
§ 5. Продольное обтекание тела вращения. Метод источников и стоков . . . . .	196
§ 6. Поперечное обтекание тела вращения . . . . .	198
§ 7. Общий случай обтекания тела вращения . . . . .	200

## Глава XV. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

§ 1. Общий вид потенциала скоростей . . . . .	201
§ 2. Поведение потенциала скоростей в окрестности бесконечно удаленной точки . . . . .	203
§ 3. Расчет гидродинамических реакций при движении тела . . . . .	205
§ 4. Уравнения движения твердого тела в жидкости . . . . .	208

## Глава XVI. ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Теорема Томсона . . . . .	215
§ 2. Теорема Лагранжа . . . . .	217
§ 3. Теоремы Гельмгольца . . . . .	218
§ 4. О возникновении вихрей . . . . .	221
§ 5. Уравнения для вихря . . . . .	223
§ 6. Определение вектора скорости по вихрю и дивергенции . . . . .	224
§ 7. Скорости, индуцируемые вихревой нитью . . . . .	228
§ 8. Прямолинейная вихревая нить . . . . .	230
§ 9. Вихревой слой . . . . .	231

## Глава XVII. ТЕОРИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

§ 1. Математическая постановка задачи об обтекании крыла конечного размаха с задней острой кромкой. Основные предположения теории крыла конечного размаха . . . . .	233
§ 2. Вихревая система крыла и основные формулы . . . . .	235
§ 3. Крыло с эллиптическим распределением циркуляции . . . . .	240
§ 4. Парабола индуктивного сопротивления и пересчет крыла с одного удлинения на другое . . . . .	241
§ 5. Определение циркуляции $\Gamma(z)$ в теории крыла конечного размаха . . . . .	243

## ЧАСТЬ IV. ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### Глава XVIII. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Основные уравнения . . . . .	245
§ 2. Необратимость движения вязкой жидкости . . . . .	246
§ 3. Завихренность течений вязкой несжимаемой жидкости . . . . .	247
§ 4. Диссиляция механической энергии в вязкой жидкости . . . . .	248

### Глава XIX. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Постановка задачи об отыскании одномерных течений вязкой жидкости . . . . .	250
§ 2. Примеры одномерных нестационарных течений вязкой жидкости . . . . .	252
§ 3. Установившееся движение между двумя параллельными плоскостями . . . . .	254
§ 4. Движение вязкой жидкости в круглой трубе . . . . .	255
§ 5. Течение в трубе эллиптического сечения . . . . .	258

§ 6. Движение вязкой жидкости между двумя вращающимися со- осными цилиндрами . . . . .	258
§ 7. Пример простейшего установившегося движения вязкой жид- кости с переменной вязкостью . . . . .	261

## Глава XX. ПОДОБИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Сходственные пространственно-временные точки . . . . .	263
§ 2. Запись уравнений гидромеханики вязкой жидкости в безраз- мерном виде . . . . .	264
§ 3. Подобие установившихся течений . . . . .	265
§ 4. Общие выражения для сил и аэродинамических коэффи- циентов . . . . .	268

## Глава XXI. ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИ- САХ РЕЙНОЛЬДСА

§ 1. Основные предположения и система уравнений пограничного слоя . . . . .	272
§ 2. Пограничный слой около полубесконечной пластинки . . . . .	276

## Глава XXII. ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

§ 1. Уравнения Стокса . . . . .	281
§ 2. Оттекание сферы при малых числах Рейнольдса . . . . .	283
§ 3. Парадокс Стокса . . . . .	285
§ 4. Уравнения Озина . . . . .	286
Рекомендуемая литература . . . . .	288
Предметный указатель . . . . .	289

ИВ № 520

*Валландер Сергей Васильевич*

**Лекции по гидроаэромеханике**

Редактор З. И. Царькова. Художественный редактор А. Г. Голубев.

Техн. редактор Е. Г. Учаева.

Корректоры Е. К. Терентьева, С. К. Школьник.

---

Сдано в набор 14.02.78. Подписано в печать 24.08.78.

мат бум. 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 3. Уч.-изд. л. 14,72. Печ. л. 18,5.

Гарнитура литературная. Печать высокая.

Тираж 3424 экз. Заказ № 1031. Цена 1 р. 06 к.

Издательство ЛГУ имени А. А. Жданова, 199164, Ленинград, В-164,  
Университетская наб., 7/9.

---

ена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени  
нии Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета  
истров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
198052, Ленинград, Л-52, Извайловский проспект, 29.