

С.С. ВЯЛОВ

**РЕОЛОГИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ГРУНТОВ**

С. С. ВЯЛОВ

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ



Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям «Промышленное и гражданское строительство» и «Гидрогеология и инженерная геология»



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

6C1
B99
УДК 624.131(075)

Рецензенты:

кафедра грунтоведения и инженерной геологии Московского государственного университета (зав. кафедрой — чл.-корр. Академии наук СССР, проф. Е. М. Сергеев);
докт. техн. наук проф. Г. А. Гениев.

Вялов С. С.

В99 Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие для строительных вузов.— М.: Высш. школа, 1978.— 447 с., ил.

В книге рассмотрены основные закономерности напряженно-деформированного состояния грунтов с учетом их реологических свойств (ползучести, длительной прочности), нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями, различия в сопротивлении деформированию при сжатии и растяжении и другими особенностями поведения грунтов под нагрузками.

На основе изучения физической сущности процесса рассмотрены также особенности деформирования грунтов при сложном напряженном состоянии в условиях ползучести и сформулировано обобщенное уравнение деформирования, учитывающее эти особенности.

В книге приведено большое количество экспериментальных данных, иллюстрирующих рассматриваемые закономерности. Помещены примеры обработки этих данных и решения инженерных задач.

30206—121
В 001(01)—78 114—78

6C1

ВВЕДЕНИЕ

Реология грунтов — раздел механики грунтов, в котором рассматривается образование и изменение во времени напряженно-деформированного состояния грунта. Включая слова «реологические основы» в название книги, автор, однако, вкладывает в них более широкий смысл, рассматривая термин «реология» как науку, изучающую, с одной стороны, образование и изменение напряженно-деформированного состояния тела, а с другой — особенности поведения этого тела, выходящие за рамки традиционных представлений теорий упругости и пластичности. Следуя акад Л. И. Седову («Механика сплошной среды», 1970), можно сказать, что задачей реологии является построение новых моделей, описывающих поведение среды, отличающейся от идеализированных тел. Грунты и являются именно такой средой.

Механика грунтов, как известно, занимается изучением и прогнозированием поведения грунтов под воздействием внешних или массовых сил. Для решения этих задач, с одной стороны, изучают физические особенности грунтов, являющиеся следствием условий их геологического формирования, а с другой — применяют математический аппарат механики сплошной среды. Однако в отличие от этой дисциплины, допускающей, что тела являются сплошными, механика грунтов рассматривает грунт как пористую дисперсную среду, способную необратимо изменять свой объем, т. е. уплотняться.

Современная механика грунтов базируется на следующих основных положениях:

1) зависимость между давлением и изменением объема грунта, т. е. изменением его пористости, а также между напряжением сдвига и изменением формы принимается прямо пропорциональной;

2) уплотнение грунта во времени (консолидация) происходит вследствие движения воды по порам грунта, причем это движение подчиняется законам фильтрации;

3) грунт, являясь дисперсной средой, обладает не только межчастичным сцеплением, но и внутренним трением; эти свойства и определяют сопротивление грунта разрушению.

Указанные выше исходные положения сыграли исключительно важную роль в развитии механики грунтов, дав возможность разработать теорию линейного деформирования грунтов, теорию фильтрационной консолидации, теорию предельного равновесия и на основе богатого математического аппарата этих теорий решать широкий круг инженерных задач.

Вместе с тем принятые положения в определенной степени схематизируют свойства грунтов; в действительности поведение их под нагрузкой значительно сложнее. Так, при деформировании глинистых грунтов весьма ощутимы временные эффекты — ползучесть, релаксация и снижение прочности при длительном воздействии нагрузок. Иными словами, глинистые грунты способны изменять свое напряженно-деформированное состояние во времени.

Другая особенность реальных грунтов — нелинейный характер зависимости между напряжением и деформацией, особенно деформацией, развивающейся во времени. Кроме того, следует учитывать, что такое кардинальное свойство грунта, как его внутреннее трение, проявляется не только в предельном состоянии, но и в допредельной стадии, влияя на характер развития деформации. Как будет показано в последующем, эта особенность деформирования грунта является следствием различий в его сопротивлении деформированию при сжатии и растяжении, что приводит к таким аномальным явлениям, как зависимость объемной деформации от напряжения сдвига (дилатансия) и сдвиговой деформации от всестороннего давления и т. д.

Таким образом, действительное поведение грунта под нагрузкой существенно отличается от схематизированных представлений. И хотя во многих случаях такая схематизация дает приемлемые для практики расчеты результаты, имеется целый ряд примеров, когда игнорирование указанных особенностей грунта в расчетах приводило к существенным расхождениям с натурой. К таким примерам относятся деформации сооружений в результате длительной ползучести, обрушение откосов и подпорных стенок из-за того, что в расчеты вводилась мгновенная, а не длительная прочность, существенное расхождение в значениях расчетной и фактической осадки вследствие учета ее нелинейности.

Учет особенностей деформирования грунтов даст возможность более точно изучить реальные свойства грунтов, чтобы приблизить теоретические прогнозы к реальному поведению грунтов.

Вследствие сказанного возникает необходимость рассмотреть и систематизировать указанные особенности поведения грунтов под нагрузкой. Это тем более необходимо, что изданные в 1972 г. Строительные нормы и правила (СНиП II-A.10—71 «Строительные конструкции и основания. Основные положения проектирования») требуют, чтобы «расчетные схемы и основные предпосылки расчета конструкций и оснований учитывали в необходимых случаях физическую нелинейность, пластические и реологические свойства материалов и грунтов». Указанным вопросам и посвящена настоящая книга.

В целях лучшего усвоения материала книги студентами в ней изложены кроме упомянутых сведений общие вопросы механики сплошной среды, включая некоторые известные положения механики грунтов. При этом автор стремился добиться оптимального сочетания этих положений и результатов новейших исследований в области реологии и механики грунтов (включая вопросы теории

нелинейного деформирования), которые могут представить интерес также для читателя с высокой подготовкой в данной отрасли науки. Соответственно материал, излагаемый в книге, распределен по главам по возрастающей степени сложности и новизны.

Включая в название книги слова «реологические основы», автор хотел лишь подчеркнуть то обстоятельство, что проблемы реологии оказывают большое влияние на общие положения механики грунтов.

При изложении основных представлений классической механики грунтов автор следовал работам Н. А. Цытовича «Механика грунтов» (1963, 1973)*, являющимся общепризнанным учебным курсом, а при рассмотрении вопросов физики грунтов — известной работе Е. М. Сергеева и его соавторов «Грунтоведение» (1971).

Содержание книги можно подразделить на три раздела. В первом из них, включающем гл. 1—4, рассмотрены исходные понятия и определения реологии, вопросы физики грунтов, положения теории напряжений и деформаций, а также такие кардинальные реологические свойства, как упругость, пластичность и вязкость.

Второй раздел, включающий гл. 5—10, посвящен рассмотрению собственно реологических процессов, протекающих в грунтах, — ползучести и длительной прочности с учетом нелинейного характера деформирования. При этом наряду с существующими феноменологическими теориями излагается новая кинетическая (физическая) теория деформирования и длительного разрушения.

В третьем разделе, включающем гл. 11—12, изложена обобщенная теория деформирования грунтов. Здесь рассмотрено различие в сопротивлении грунта растяжению и сжатию и формулируется обобщенное реологическое уравнение состояния, учитывающее взаимное влияние всех трех инвариантов тензора напряжения на деформацию формы и объема.

В гл. 13 приведены примеры решения некоторых задач механики грунтов на основе рассмотренной выше теории.

Автор с чувством глубокого удовлетворения отмечает плодотворность совместной работы по рассматриваемой проблеме с коллегами и сотрудниками руководимой им лаборатории механики мерзлых грунтов НИИ оснований Ю. К. Зарецким, С. Э. Городецким, Н. К. Пекарской, Р. В. Максмяк и др. Автор считает своим долгом выразить признательность рецензентам книги: докт. техн. наук, проф. Г. А. Гениеву и докт. геол.-мин. наук, проф. Р. С. Зиянгирову, а также зав. кафедрой грунтоведения и инженерной геологии МГУ чл.-корр. АН СССР проф. Е. М. Сергееву за ценные советы и замечания по рукописи и принести благодарность Т. П. Вяловой и М. Э. Слепаку за помощь в подготовке рукописи к изданию.

* В круглых скобках здесь и далее указывается год издания книг и статей упоминаемых авторов, в квадратных скобках — ссылки на список литературы в конце книги.

ГЛАВА 1

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ

§ 1.1. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ

Нелинейная связь между напряжением и деформацией. Под воздействием всестороннего давления грунт необратимо изменяет свой объем, под воздействием же сдвигающего напряжения минеральные частицы и их агрегаты взаимно смещаются, что приводит к изменению их формы.

В общем случае зависимость от нагрузки объемной и сдвиговой деформации является нелинейной (рис. 1.1). Сдвиговая деформация с ростом напряжения непрерывно нарастает, интенсивность же нарастания объемной деформации с ростом нагрузки уменьшается, а сама деформация стремится к какому-то пределу, при котором наступает предельное уплотнение грунта.

Действительный и аппроксимированный график осадки. Реальная зависимость между нагрузкой и осадкой фундамента отображается, как известно, некоторой кривой, на которой можно выделить две характерные точки. Первая точка соответствует критической нагрузке $p_{кр}$, при которой заканчивается фаза уплотнения грунта и возникает фаза сдвигов. Вторая характерная точка соответствует предельной нагрузке $p_{пр}$, при которой завершается полное развитие зоны предельного состояния и несущая способность основания исчерпывается.

Существующие методы расчета оснований исходят из предположения, что до достижения нагрузкой значения $p_{кр}$ (а точнее, близкого к нему значения расчетного сопротивления R) грунт можно рассматривать как линейно-деформируемую среду и применять к ней закон Гука. При достижении же нагрузкой значения $p_{пр}$ состояние грунта рассматривается теорией предельного равновесия и к грунту применяют закон предельного напряженного состояния Мора — Кулона.

Таким образом, реальная кривая «осадка — нагрузка» (рис. 1.2) аппроксимируется ломаной прямой Obc , что влечет за собой следующие допущения. Так, в допредельном состоянии мы рассматриваем не всю кривую Oac , а только ее отдельный участок Oa , ограниченный величиной $p_{кр}$.

Фактически же грунт до исчерпания своей несущей способности продолжает работать и в диапазоне нагрузок $p_{кр} \leq p \leq p_{пр}$.

который обычно исключают из рассмотрения. Между тем это исключение не только неосновательно, но и нелогично. Действительно, расчет для допредельного состояния исходит из ограничения величины осадки, которая не должна превышать заданного предельного значения $S \leq S_{\text{пр}}$. Но это предельное значение ни в какой степени не связано с величиной $p_{\text{кр}}$ — оно определяется допустимой деформацией сооружения, и нагрузка, вызывающая осадку $S_{\text{пр}}$, может быть как меньше, так и больше $p_{\text{кр}}$. Получается парадокс — расчет ведем по деформациям, но между тем ограничиваем

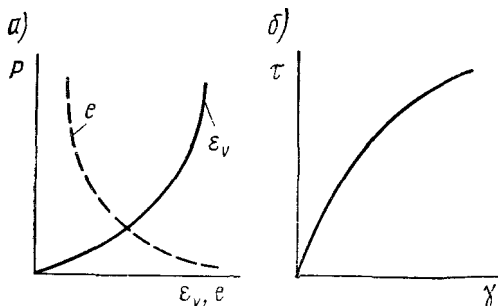


Рис. 1.1. Зависимость между напряжением и деформацией грунта:

a — объемная деформация; b — сдвиговая деформация

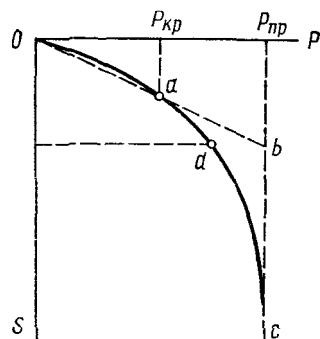


Рис. 1.2. Действительный и аппроксимированный график осадки

его величиной нагрузки, до достижения которой справедлива линейная связь между нагрузкой и осадкой. Очевидно, что учет нелинейного характера связи между нагрузкой и осадкой грунта даст возможность рассчитать осадку во всем диапазоне напряжений.

Аппроксимируя реальную кривую «осадка — нагрузка» ломаной линией (рис. 1.2), мы как бы разграничиваем условия работы грунта. Для участка Oa принимается модель тела Гука, свойства которого отображаются деформационными характеристиками. В этом случае такое кардинальное свойство, как внутреннее трение, игнорируется, хотя не подлежит сомнению тот факт, что сопротивление трению проявляется как в предельном, так и в допредельном состояниях. В этом можно легко убедиться, проведя простое испытание на сдвиг на обычном срезном приборе при сдвигающей нагрузке, меньшей предельной. Если такое испытание выполнить при различном нормальном напряжении, то можно показать, что с увеличением нормального напряжения деформация сдвига будет уменьшаться. В этом и сказывается проявление сопротивления трению.

Для участка bc предельного состояния принимают модель тела Мора — Кулона, свойства которого отображаются прочностными характеристиками, причем учитывается сопротивление трению.

Эти характеристики ни в какой степени не связывают с деформационными характеристиками, используемыми для оценки поведения грунта в допредельном состоянии, хотя корреляционная связь между прочностными и деформационными свойствами грунтов несомненна, поскольку и те и другие вызываются одними и теми же силами взаимодействия частиц грунта. Если при рассмотрении допредельного состояния определяют и поле напряжений, и поле деформаций, то, рассматривая предельное состояние, учитывают только напряжения, сводя задачу к нахождению предельной нагрузки $p_{пр}$; деформации же из рассмотрения исключаются. Однако во многих случаях требуется определить не только величину предельной нагрузки, но и деформации, ею вызываемые. Это нужно, например, при расчете грунтов с явно выраженными реологическими свойствами (пластичные глины, мерзлые грунты), для которых предельная нагрузка вызывает не потерю грунтом равновесия или быстрое обрушение, а только развитие незатухающей ползучести.

Одной из проблем реологии грунтов является разработка такой единой модели грунта, с помощью которой можно было бы описать процесс деформирования во всем диапазоне нагрузок, включая предельные, и в которой сопротивление трению учитывалось бы как в допредельном, так и в предельном состояниях, причем прочностные и деформативные характеристики были бы связаны между собой. При составлении указанной модели грунта нужно учитывать также временные эффекты, поскольку в процессе деформирования грунта проявляется вязкое сопротивление окруженных водными пленками частиц.

Различие в сопротивлении грунта сжатию и растяжению. Учет сопротивления грунта трению равнозначен учету различия в сопротивлении его сжатию и растяжению.

Действительно, параметры уравнения предельного состояния по Мору — Кулону — сцепление и угол внутреннего трения — являются параметрами касательной к кругам разрушающих напряжений при сжатии и растяжении, а угол наклона этой касательной, определяющий угол внутреннего трения, является следствием различия в сопротивлении грунта сжатию и растяжению.

В последующем будет показано, что аналогичные рассуждения справедливы и для допредельного состояния. При одном и том же значении сжимающей и растягивающей нагрузок деформация сжатия грунта будет меньше деформации растяжения, а следовательно, и модуль деформации его при сжатии будет больше модуля деформации при растяжении. Однако это обстоятельство обычно не учитывается и в расчеты в этом случае вводят модуль деформации сжатия.

Учет различия в деформировании грунта при сжатии и растяжении не только в предельном, но и в допредельном состоянии (или, что то же самое, учет сопротивления внутреннему трению) равносильно введению в уравнение состояния зависимости деформации сдвига от всестороннего давления, а деформации объема от напряжения сдвига.

Иными словами, в уравнении состояния нужно учитывать взаимное влияние всех инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций. Эти особенности деформирования грунта тоже должны найти отражение в обобщенной модели грунта, о которой шла речь выше.

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕОЛОГИИ

Реологические процессы. Реологические свойства тела проявляются в виде ползучести, релаксации и снижении прочности при длительном воздействии нагрузок.

Под ползучестью грунта мы подразумеваем процесс деформирования, развивающийся во времени даже при постоянной нагрузке. Способность деформироваться во времени присуща многим веществам — от коллоидных систем и полимеров до металлов и от суспензий до скальных пород. В принципе все реальные тела обладают свойством ползучести, но эти свойства проявляются в зависимости от промежутка времени, в течение которого ведут наблюдение за процессом деформирования, и от величины приложенной нагрузки и температуры. Так, течение жидкости можно наблюдать за очень короткие промежутки времени (секунды, минуты), льда — за несколько часов и суток, грунтов и металлов при высокой температуре — за сутки и месяцы, стекла — за столетия; в горных же породах, образующих земную кору, свойства течения проявляются лишь в масштабе геологических периодов времени.

Вследствие этого не удивительно, что наука, изучающая течение вещества, была названа реологией, что как бы подчеркивает справедливость известного выражения Гераклита «*παντα ρει*» (панта рей), что означает «все течет».

Наглядным примером течения твердых тел является изменение контура стен древних храмов в Мексике, очертания которых точно повторяют современный волнистый рельеф местности. Когда-то и этот рельеф и стены храмов, построенных ацтеками, были ровными. Но в течение последующих веков очертания местности менялись, а вслед за ней изгибались, не разрушаясь, стены.

Реологические явления в грунтах и горных породах наблюдаются повсеместно. Солифлюкция, селевые потоки, оползни, течение ледников и т. д. — все это реологические процессы, протекающие за промежутки времени от нескольких часов или суток до столетий.

Реологическими процессами объясняются и различные тектонические нарушения — складкообразование, изгибы пластов горных пород и т. п. Такие нарушения в ряде случаев вызываются медленным течением пород под воздействием гравитационного давления, длящегося весьма продолжительное время (тысячи и десятки тысяч лет).

Но еще чаще реологические процессы протекают в грунтах и горных породах во взаимодействии с инженерными сооружениями

и проявляются в сравнительно небольшие промежутки времени, соизмеримые со сроком службы этих сооружений.

Известны многочисленные факты длительных осадок и кренов сооружений вследствие ползучести глинистых грунтов основания, смещения по этой же причине подпорных стенок, нарушения устойчивости склонов и откосов и т. д. Ползучесть грунтов вызывает такое широко распространенное явление, как оползни, приносящие колоссальные убытки народному хозяйству.

Явление ползучести и связанное с ним перераспределение напряжений часто наблюдается в различного рода подземных сооружениях и выработках, проходимых в горных породах. Проявление горного давления, развитие оседания участков земной поверхности при строительстве тоннелей, потеря с течением времени устойчивости кровли подземных выработок, сдвиги толщ горных пород при разработке полезных ископаемых — все это не что иное, как проявление ползучести горных пород. В ярко выраженной форме ползучесть проявляется в вечномёрзлых грунтах, а также в льдогрунтовых защитных ограждениях, устраиваемых с помощью искусственного замораживания при проходке различных выработок в слабых грунтах.

Из этого далеко не полного перечня видно, что основные задачи механики грунтов и горных пород не могут решаться без учета реологических свойств грунтов. Требования расчета по предельным состояниям с учетом этих свойств можно сформулировать следующим образом. Расчет по предельному состоянию по деформациям должен заключаться в определении такой нагрузки, при которой деформации за заданный промежуток времени (например, за срок службы сооружения) не превзойдут предельно допускаемых значений.

Учитывая, что в процессе незатухающей ползучести снижается сопротивление грунта, расчет по предельному состоянию по несущей способности можно свести к определению такой нагрузки, при которой напряжения в грунте в заданный момент времени достигнут предела длительной прочности.

Задачи реологии. Реологией в узком смысле этого термина называют науку о течении вязких веществ. Однако в последние годы понятие «реология» придается более широкое толкование.

По классическим теориям упругости и пластичности напряженно-деформированное состояние тела вполне определяется величиной приложенной нагрузки и порядком ее приложения; если эта нагрузка не меняется, то остаются неизменными и возникшие в теле напряжения и деформации. В реальных телах напряженно-деформированное состояние изменяется во времени и зависит также от истории предшествующего загрузения. Соответственно соотношение между напряжением и деформацией не является однозначным, а изменяется, поскольку, если даже одна из этих величин — напряжения или деформация — остается постоянной, другая будет изменяться во времени.

Изучение закономерностей напряженно-деформированного со-

стояния и его изменения во времени и является основной задачей реологии.

Классическая теория упругости и пластичности, рассматривая простейшие идеализированные тела, принимает, что законы деформирования при сложном напряженном состоянии идентичны законам деформирования при простейших видах нагружения. Для многих же реальных тел связь между напряжением, деформацией и ее скоростью нелинейна и, кроме того, зависит от вида напряженного состояния и от режима нагружения. Рассмотрение этих вопросов, выходящих за рамки теории упругости и пластичности, также входит в задачу реологии. Иными словами, реология должна дать ответ на вопрос о том, какие напряжения и деформации возникают в данной точке при любом виде зависимостей между компонентами напряжений и деформаций и временем.

Наконец, если теории упругости и пластичности, являясь феноменологическими теориями, рассматривают макропроцессы, то реология изучает как макро-, так и микропроцессы, уделяя большое внимание физической сущности явлений.

Макро- и микрореология. Макрореология рассматривает внешние проявления процессов, происходящие в реальных телах, т. е. те явления (рост деформаций, напряжений), которые можно наблюдать с помощью обычных измерительных устройств. Макрореология не занимается изучением особенностей сложения тела, его структуры; она рассматривает тела как однородную сплошную среду, наделенную теми или иными идеализированными свойствами. Такими фундаментальными свойствами являются упругость, пластичность, вязкость и их сочетания.

Закономерности, связывающие поведение тела под внешними воздействиями с его свойствами устанавливают в макрореологии на основе феноменологического подхода (от греческого «феномен»). При таком подходе не учитывают физические процессы, происходящие в теле, а на основе макроэксперимента устанавливают математическое отображение внешнего проявления этих процессов. Поскольку макроскопические феноменологические теории базируются на опытных данных, то полученные с их помощью решения дают при определенных ограничениях вполне удовлетворительные совпадения с практикой, т. е. эти теории являются достаточно эффективным средством решения инженерных задач.

В то же время более общим подходом является установление закономерностей макропроцессов исходя из рассмотрения их физической сущности, т. е. из рассмотрения микропроцессов, происходящих в реальных телах. Эти вопросы изучает микрореология, которая рассматривает особенности строения и структуры тел, а также взаимосвязи элементарных частей, составляющих тело.

Реология (историческая справка). Реология — одна из старейших наук. Ее истоки обнаружены в Древнем Египте, где в 1540 г. до н. э. были изобретены водяные часы, измеряющие время по скорости вытекания жидкости из конического сосуда, причем было учтено изменение вязкости воды в холодное и теплое время дня.

Основы реологии как науки были заложены в XVI в. выводом закона Ньютона о пропорциональности между сопротивлением жидкости течению и скоростью сдвига, открытием закона Пуазейля и выводом уравнений Стокса.

Своим становлением реология обязана бурному развитию современной химической технологии, когда появились такие искусственные материалы, как полимеры, пластмассы, целлюлоза. Все эти материалы должны обладать заранее заданными свойствами, из которых важнейшими являются пластичность и вязкость. Изучение указанных свойств и вызвало начиная с конца XIX в. появление большого количества исследований в области реологии. В этот период появились работы Кельвина и Фойгта, предложивших уравнение вязкого деформирования твердого тела. Механическая модель этого тела позднее была предложена Пойнтингом (1902) и Бюргерсом (1935).

Окончательное оформление реологии как самостоятельной отрасли науки связано с именем Бингама. В 1922 г. вышла известная его книга «Текущность и пластичность», а в 1928 г. по его же инициативе было организовано реологическое общество; с этого времени и появился новый термин «реология». С тех пор было проведено большое количество исследований по реологии; многие из них обобщены в трехтомнике «Реология, теория и приложения» (1962), а также в трудах Рейнера, опубликовавшего ряд широко известных книг по реологии, большинство из которых переведено на русский язык («Десять лекций по теоретической реологии», 1947; «Деформация и течение. Введение в реологию», 1963; «Реология», 1965).

В Советском Союзе большие исследования по реологии коллоидных систем проведены М. П. Воларовичем и особенно П. А. Ребиндером, разработавшим новое направление в науке — физико-химическую механику, задачей которой является получение искусственных материалов с заранее заданными механическими свойствами и структурой.

Ползучесть. Наряду с изучением течения вязких сред начиная с XIX в. изучалось деформирование во времени твердых тел. Впервые развитие деформации твердого тела во времени было отмечено Виком в 1834 г. и Вебером в 1835 г. Проводя опыты по растяжению волокон кварцевого стекла и шелковых нитей, Вебер наблюдал, что вслед за мгновенной, упругой деформацией, возникающей сразу после приложения нагрузки, происходило дальнейшее удлинение волокна, развивающееся во времени. После же удаления нагрузки деформация восстанавливалась также во времени. Явление запаздывания развития деформации было названо упругим последствием.

Развивая работы Вебера, Кольрауш в 1847 г. показал, что измениться во времени может также напряжение, если сохранить постоянной возникшую деформацию. Это явление было названо им последствием напряжения. Позднее явление расслабления во времени напряжения, необходимого для поддержания постоян-

ной деформации, получило название релаксации напряжений. Теория релаксации была разработана Максвеллом и изложена в его известной книге «О динамической теории газов» (1868).

В первые десятилетия нашего века начали изучать поведение металлов при высокой температуре. Опыты показали, что в этих условиях металлы также обладают свойством текучести. Явление медленного течения твердых тел стали называть ползучестью от английского термина «крип» (сгеер).

Первая работа по изучению ползучести принадлежит, по-видимому, Андраде, описавшему опыты, обнаружившие ползучесть меди, свинца и стали. Последующее интенсивное изучение ползучести металлов привело к созданию новой отрасли механики сплошной среды — теории ползучести.

Наиболее полно современное состояние этой отрасли науки отражено в капитальной монографии Ю. Н. Работнова «Ползучесть элементов конструкций» (1966), а также в книгах И. И. Гольденבלата и Н. А. Николаенко «Теория ползучести строительных материалов и ее приложение» (1960), Л. М. Качанова «Теория ползучести» (1960), И. Н. Малинина «Прикладная теория пластичности и ползучести» (1968), А. Надаи «Пластичность и разрушение твердых тел» (т. I и II; 1954, 1969), И. А. Одингга и др. «Теория ползучести и длительной прочности металлов» (1959), А. Р. Ржаницина «Теория ползучести» (1968) и др.

Реология и теория ползучести. Рассмотрим общность и различие этих терминов. Теорией ползучести называют отрасль механики твердого тела, изучающую всю совокупность явлений, связанных с изменениями во времени напряженно-деформированного состояния тела. При таком определении задачи теории ползучести являются аналогичными задачам реологии. Но первый термин — «теория ползучести» — применяют в механике твердых тел, где он более привычен, тогда как второй термин — «реология» — чаще употребляют применительно к вязким средам.

В последние годы понятие «реология» начали толковать более широко и стали применять его для всех тел. Именно в таком широком смысле мы и будем употреблять термин «реология». Под термином же «ползучесть» будем подразумевать его непосредственное значение, т. е. процесс развития деформаций во времени, рассматривая этот процесс как одно из проявлений реологических свойств тела. Другими проявлениями реологических свойств являются релаксация напряжений и снижение во времени сопротивления разрушению.

Ползучесть и течение. Термин «течение» применительно к твердым телам заимствован из теории вязкой жидкости, где под ним подразумевается непрерывное и неограниченное изменение формы. Иными словами, течение есть деформация сдвига, протекающая во времени и развивающаяся с постоянной скоростью. Типичным примером может служить течение идеально вязкой (ньютоновой) жидкости. Впоследствии термин «течение» был распространен на процессы медленного развития деформации твердых тел.

Особенно часто используют термин «течение» применительно к вековым деформациям массивов горных пород, движению ледников и т. д. Широко применяется этот термин и в механике грунтов,

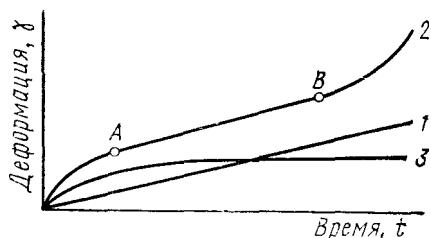


Рис. 1.3. Развитие деформаций тел во времени:

1 — вязкое течение; 2 — незатухающая ползучесть; 3 — затухающая ползучесть

где его часто употребляют как синоним термина «ползучесть». Но если под ползучестью подразумевать, как мы условились, все виды деформирования во времени, то, строго говоря, течение есть частный случай ползучести, относящийся к тому этапу этого процесса, в котором деформации развиваются с постоянной скоростью.

Существует также термин «пластическое течение». Применяемый в теории пластичности, он обозначает неограниченное развитие пластической деформации при достижении нагрузкой некоторого предела (предела текучести). Применительно к явлению ползучести под пластическим течением подразумевают вязкое течение, возникающее после превышения нагрузкой некоторого предела (называемого в данном случае бингамовым пределом пластичности); часто такое течение называют вязкопластическим.

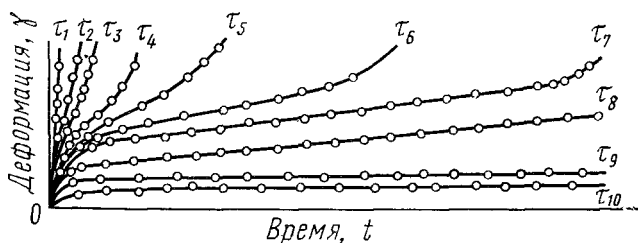


Рис. 1.4. Кривые ползучести грунта при различных постоянных нагрузках $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$

На рис. 1.3 изображен график развития деформаций во времени. Прямая 1, соответствующая развитию деформации с постоянной скоростью, отображает вязкое течение; кривая 3 — затухающую ползучесть с уменьшающейся скоростью; кривая 2 — незатухающую ползучесть.

На некотором участке *AB* кривой незатухающей ползучести скорость деформирования близка к постоянной; этот этап процесса иногда рассматривают по аналогии с прямой 1 как этап вязкопластического течения.

Виды кривых ползучести зависят от величины нагрузки.

На рис. 1.4 представлено семейство кривых ползучести. Каждой кривой на графике соответствует своя нагрузка, с увеличением которой величина и интенсивность нарастания деформаций возрастают; процесс ползучести из затухающего становится незатухающим, и грунт разрушается тем скорее, чем больше нагрузка.

§ 1.3. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО РЕОЛОГИИ ГРУНТОВ

Исследования по реологии мерзлых грунтов. Мерзлый грунт вследствие наличия в нем льда и незамерзшей воды можно рассматривать как классическое реологическое тело. Поэтому наиболее интенсивно и плодотворно вопросы реологии развивались именно в механике мерзлых грунтов.

Исследованиями Н. А. Цытовича и его сотрудников в 30-х годах было обнаружено наличие у мерзлых грунтов свойства текучести. В 1941—1948 гг. М.Н.Гольдштейн начал изучение длительной прочности мерзлых грунтов с применением к ним теории релаксации Максвелла — Шведова.

Исследования, проведенные в 1950—1955 гг. автором настоящей книги на Игарской мерзлотной станции, позволили установить, что мерзлым грунтам свойственны все проявления классической ползучести. В таких грунтах развиваются как затухающие (при малых нагрузках), так и незатухающие (при больших нагрузках) деформации, включающие в себя все типичные стадии ползучести: неустановившуюся ползучесть, пластично-вязкое течение и прогрессирующую ползучесть.

Этими исследованиями были установлены критерии длительного разрушения и показана необходимость введения в практику расчетов понятия «предел длительной прочности». Под этим термином подразумевается напряжение, до превышения которого разрушения не наступает, тогда как при его превышении развивается прогрессирующая ползучесть, приводящая к разрушению. Оказалось, что для мерзлых грунтов этот предел в 5—15 раз меньше сопротивления быстрому разрушению (условно-мгновенной прочности). Соответственно были внесены коренные изменения в значения расчетных характеристик прочности, используемые в нормах проектирования оснований и фундаментов на вечномерзлых грунтах; эти значения с небольшими изменениями сохранили свою силу до настоящего времени.

На основе указанных исследований были сформулированы основные положения реологии мерзлых грунтов (в общем справедливые и для грунтов немерзлых), изложенные в монографии С. С. Вялова «Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов» (1959). В последующем эти положения были развиты в других работах автора и его коллег, в том числе в книгах «Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений» (1962), «Методика определения характеристик ползучести, длительной прочности и сжимаемости мерзлых грунтов» (1966) и др.

Ряд работ по реологии мерзлых грунтов был опубликован в 1960—1970 гг. К. Ф. Войтковским, С. Э. Городецким, С. Е. Гречищевым, Ю. К. Зарецким, Н. К. Пекарской, Е. П. Шушериной и др. Большое внимание вопросам реологии мерзлых грунтов уделено в книге Н. А. Цытовича «Механика мерзлых грунтов» (1973).

Исследования по реологии глинистых грунтов. Хотя реология глинистых грунтов как самостоятельный раздел науки оформилась лишь в недавнее время, учету реологических свойств глинистых грунтов стали уделять внимание давно. В известной работе «Основания механики грунтов» (1925) К. Терцаги, приводя данные длительных испытаний глин, указывал, что у грунтов отчетливо проявляются свойства упругого последействия (этим термином обозначалась ползучесть).

Важность учета свойств текучести грунтов отмечал также Н. П. Пузыревский в книге «Фундаменты» (1934). Н. М. Герсегонов в книге «Основы динамики грунтовой массы» (1937) писал, что к грунту применимо условие текучести (Бингама), согласно которому «при достижении напряжением некоторой величины тело начинает непрерывно изменять свою форму (течь), переходя в вязкое состояние наподобие вязкой жидкости».

Исследования реологических свойств грунтов ведутся в двух направлениях. С одной стороны, изучается сдвиговая ползучесть, проявляющаяся в виде длительного смещения грунтовых массивов, подверженных действию сдвигающих нагрузок. Такие исследования связаны с решением проблемы долговременной устойчивости напорных плотин, откосов искусственных выемок, подпорных стенок и т. д. В особенности изучение сдвиговой ползучести было вызвано такой важной проблемой, как оползневые процессы естественных склонов.

С другой стороны, явление ползучести исследовалось применительно к развитию во времени объемных деформаций грунта, обусловленных ползучестью его скелета. Это явление служит причиной длительных осадок глинистых грунтов в основаниях сооружений.

Исследование грунтов как вязкопластических тел. В процессе изучения реологических свойств глинистых грунтов взгляды на эти свойства последовательно менялись.

На начальном этапе исследований к грунтам пытались применить ньютонов закон течения идеально вязкой жидкости. С таких позиций грунты рассматривались, например, М. Хворслевым, публикации которого (1937—1939) являются одними из первых обстоятельных печатных работ по ползучести грунтов. В этих трудах описаны результаты длительных испытаний на ползучесть глин на приборе кольцевого сдвига (кручение), предложенном этим автором и впоследствии получившем большое распространение.

Р. Хефели в своей совместной с С. Шерером публикации 1946 г. и в последующих работах, анализируя данные испытаний на ползучесть при кольцевом сдвиге, одноосном и трехосном сжатии, также применял к грунтам ньютонов закон вязкого течения, отме-

тив, однако, что в общем случае у грунтов зависимость между скоростью течения и напряжением нелинейна.

К этому же периоду относятся интересные опыты по изучению ползучести при одноосном сжатии А. Казагранде и Д. Уилсона (1950—1951), установивших факт разрушения глин в результате длительного течения.

Почти в самых первых исследованиях реологических свойств грунтов отмечалось, что грунт начинает течь не при любой нагрузке (как это имеет место у идеально вязкой жидкости), а только после того, как напряжение превысит некоторый предел. Это означало, что к грунтам в большей степени применима не теория идеально вязкой ньютоновой жидкости, а теория вязко-пластического течения Бингама.

Впервые такое предложение было высказано еще в 1937 г. Н. М. Герсевановым, соответствующая цитата из книги которого была приведена выше. Экспериментальное же доказательство применимости к грунтам закона Бингама впервые было дано Н. Н. Масловым, выполнившим еще в 1933—1936 гг. одно из первых испытаний глин на ползучесть при сдвиге (в связи с необходимостью прогнозирования долговременной устойчивости напорных сооружений Свирской ГЭС). В 1952 г. он предложил подразделять грунты на пластичные, подчиняющиеся закону вязкого течения Ньютона, и скрытопластичные, к которым можно применить закон вязкопластического течения Бингама.

Применимость для грунтов бингамова закона была показана также Е. Гезе и Тан Тьенг-Ки, которые выполнили опыты на скручивание полых цилиндров и изложили результаты исследований в докладе на II Международном конгрессе по реологии в Оксфорде (1953) и в ряде других публикаций.

Экспериментальные доказательства возможности применения к грунтам закона вязкопластического, бингамова течения были даны затем (1950—1960) в работах М. М. Берку, Г. В. Сорокиной, С. Н. Сотникова, И. Киселя и др.

Видоизмененный закон Бингама, учитывающий нелинейный характер зависимости между скоростью течения и напряжением, был предложен С. С. Вяловым (1959).

Однако следует учитывать, что теория вязкопластического течения описывает процесс установившегося течения, развивающегося с постоянной скоростью, тогда как у грунтов в процессе ползучести скорость течения изменяется (см. рис. 1.3); кроме того, этот процесс включает в себя не только вязкие, но и упругие деформации.

Вследствие этого к грунтам стали применять теорию упруговязкопластического деформирования, используя различные реологические модели. Одной из первых работ в этом направлении была экспериментальная работа Е. Гезе и Тан Тьенг-Ки, которые отметили наличие у грунтов пластических и вязких деформаций. Для описания процесса деформирования авторы использовали механическую модель Бюргерса. Впоследствии отображения закономерностей де-

формирования грунтов с помощью моделей были развиты другими авторами.

Закономерности вязкого деформирования (течения) были принесены в механику грунтов из теории вязких сред. Это и понятно, поскольку текучесть наиболее заметно проявляется у пластичных влажных грунтов, по своему характеру приближающихся к вязким средам. К тому же многим специалистам по инженерной геологии и грунтоведению концепции физикохимии дисперсных сред, базирующихся на теории вязкости, были ближе, чем другие концепции.

Дальнейшие исследования показали, что поведение грунтов под длительно действующими нагрузками более соответствует процессу ползучести твердых тел, поскольку в общем случае в грунтах развиваются все стадии, соответственные этому процессу: затухающая ползучесть, течение с примерно постоянной скоростью и прогрессирующее течение.

Такие данные были получены из опытов, проведенных в 1950—1970 гг. А. Казагранде и С. Уилсоном, С. С. Вяловым, М. Н. Гольдштейном, А. М. Скибицким, М. Саито и Х. Уезава, Т. Шибата и Р. Карубе, А. Бишопом и Г. Лавенбэри, И. Феда и Б. Каменевым, В. Лиамы Финном и другими с самыми различными грунтами — от пластичных до плотных глин, мерзлых грунтов и даже скальных пород.

Большие экспериментальные работы в этом направлении были выполнены С. Р. Месчаном, который обобщил результаты исследований в монографии «Ползучесть глинистых грунтов» (1967). Проблемам реологии грунтов посвящены также книги Ж. Фолькуе (1961), И. Киселя и Р. Лусика (1966).

С учетом реологических концепций написан двухтомник М. Н. Гольдштейна «Механические свойства грунтов» (1971, 1973). Соответствующее внимание уделено вопросам реологии в последних изданиях широко известного учебника Н. А. Цытовича «Механика грунтов» (1968, 1973).

Одновременно с изучением ползучести проводилось исследование долговременной устойчивости склонов и откосов, сыгравших важную роль в развитии реологии грунтов. Среди работ указанного направления можно отметить публикации К. Терцаги (1950), А. Скемптона (1969) и особенно монографии Н. Н. Маслова «Основы механики грунтов и инженерной геологии» (1968) и «Длительная устойчивость и деформация смещения подпорных стенок» (1968), Г. И. Тер-Степаняна «О длительной устойчивости склонов» (1961) и «Теория прогрессирующего разрушения в грунтовых скальных породах» (1975), Л. Шукле «Реологические проблемы механики грунтов» (1973).

Становление науки реологии грунтов. Как новое направление, реология грунтов стала формироваться начиная с III Международного конгресса по механике грунтов и фундаментостроению (Цюрих, 1953), на котором этой проблеме был посвящен ряд докладов и выступлений. В обобщающем докладе по ползучести грунтов,

снега и льда Р. Хефели подчеркнул мысль о том, что «будущее развитие механики грунтов неразрывно связано с успехами исследований ползучести, так как деформация ползучести открыто или скрыто действует во всех процессах, рассматриваемых в механике грунтов».

На последующих IV—VIII конгрессах (1957, 1961, 1965, 1969, 1973) количество докладов по реологии грунтов все более увеличивалось. Так, на VII конгрессе (Мехико, 1969) эти вопросы занимали существенную часть обзорного доклада Р. Скотта и И Хон-Йим Ко [51].

В 1964 г. в Гренобле был созван I Международный симпозиум по реологии грунтов, на котором был представлен ряд докладов по различным аспектам реологии [48]. В Советском Союзе — в 1966 г. в Ленинграде и в 1973 и 1976 гг. в Ереване — были проведены специальные симпозиумы по реологии грунтов. В 1966 и 1969 гг. в Днепропетровске проводились симпозиумы по реологии горных (скальных) пород.

Исследование процессов консолидации грунтов. Процесс развития во времени необратимой объемной деформации (уплотнения) грунта под нагрузкой, является одной из основных особенностей грунтовой системы. Можно сказать, что разработка К. Терцаги и Н. М. Герсевановым (в 1920—1930-х годах) теории консолидации (теории грунтовой массы) явились той базой, которая позволила выдвинуть механику грунтов (основы которой были заложены Кулоном еще в 80-х годах XVII в.) в ряд самостоятельных наук.

В начальный период разработки этой теории исследователи считали, что консолидация обуславливается отжатием свободной воды из пор грунта, причем движение воды подчиняется закону ламинарной фильтрации Дарси. Последующее развитие фильтрационной теории консолидации было направлено на учет ряда дополнительных факторов: переменной коэффициента фильтрации, сжимаемости растворенного в воде воздуха и т. д. Существенное развитие фильтрационная теория консолидации получила в конце 30-х — начале 40-х годов благодаря работам В. А. Флорина и М. Био, предложившим учитывать воздействие давления воды в порах грунта на его скелет в виде объемных сил.

Первичная и вторичная консолидация. В середине 30-х годов Х. Греем и К. Бьюсманом было установлено, что объемная деформация грунта происходит не только в результате отжатия воды, но и вследствие ползучести скелета грунта. Опытами Бьюсмана было показано, что процесс объемной ползучести развивается весьма длительное время и может быть описан логарифмическим законом. Отметим, что аналогичный закон был выведен несколько ранее, в 1934 г., Г. И. Покровским исходя из энергетических соображений.

Консолидация, вызванная фильтрацией поровой влаги, стала называться первичной, а вызванная ползучестью скелета грунта, — вторичной (рис. 1.5).

В начале 50-х годов В. А. Флорин разработал обобщенную теорию консолидации, в которой учитывал одновременное протекание первичной и вторичной консолидации, причем вторичная консолидация учитывалась в форме наследственной ползучести.

Другие теории, описывающие одновременное протекание первичной и вторичной консолидации, исходили из представления о вторичной консолидации как упруговязкой объемной деформации, отображаемой той или иной реологической моделью (Тейлор и Мерчанет, Тан Тьенг-Ки, Р. Гибсон и К. Ло и др.).

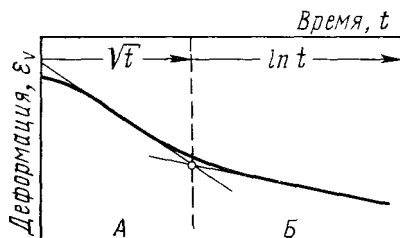


Рис. 1.5. Консолидация грунта по Б. Хайсену:

A — первичная; B — вторичная

Наиболее общая теория консолидации, учитывающая фильтрацию газосодержащей жидкости, наличие структурных связей, сказывающихся на величине начального порового давления и на характере рассеивания этого давления, была разработана Н. А. Цытовичем и его сотрудниками и изложена в книге «Прогноз скорости осадок оснований сооружений» (1967). На основе этих

положений, распространенных на модель объемных сил Био — Флорина, Ю. К. Зарецким в монографии «Теория консолидации грунтов» (1967), получившей широкое признание, было предложено общее решение трехмерной задачи и рассмотрена проблема консолидации в целом.

В 1973 г. вышла в русском переводе упоминавшаяся выше монография Л. Шукле, которая является наиболее обстоятельной работой по учету реологических свойств грунта в процессе консолидации, а также долговременной устойчивости склонов, откосов и подпорных стенок. В этой же книге изложен разработанный автором графоаналитический метод решения задач консолидации, названный им методом изотак (изотаксами автор называет кривые зависимости между коэффициентом пористости и эффективным давлением при постоянной скорости консолидации).

Исследования реологических свойств горных пород. Наряду с развитием реологии рыхлых горных пород в 30-х годах начались исследования ползучести скальных пород. Первые работы в этой области принадлежат, по-видимому, К. Штокке и Д. Григгсу, показавшим, что при нагрузках, составляющих от 12,5 до 80% от разрушающих, в песчаниках, аргиллитах и алевролитах развиваются деформации ползучести. В последующем наличие у скальных пород свойств ползучести было подтверждено исследованиями ряда других авторов.

Большие экспериментальные и теоретические исследования были проведены в Алма-Ате Ж. С. Ержановым и его сотрудниками. Результаты этих исследований изложены в книгах «Теория ползучести горных пород и ее приложения» (1964), «Ползучесть осадоч-

ных горных пород» (1970). Авторы рассмотрели само явление ползучести горных пород, применили полученные закономерности для решения некоторых горнотехнических задач (смещение горных пород, расчет неустановившегося горного давления в подземных выработках и т. п.) и для описания таких геофизических явлений, как процессы складкообразования в толще горных пород. Большие исследования по реологии горных пород проводятся также в Днепропетровском институте геотехнической механики В. Т. Глушко, М. И. Розовским и др.

Реология в геофизике. Отметим, что в не меньшей степени, чем к инженерным проблемам, реологический подход применяется при рассмотрении различных геофизических явлений. В этом отношении большой интерес представляет ряд задач, рассмотренных А. Надаи в его книге «Пластичность и разрушение твердых тел» (ч. II, 1969). К ним относятся задачи об опускании и последлениковом поднятии земной поверхности, о закономерностях движения континентов по гипотезе Вегенера, о выдавливании соляных куполов, о пластическом деформировании пластов горных пород и т. д.

Под воздействием обычных сжимающих нагрузок горные породы мало деформируются. Но при больших давлениях от веса вышележащей толщи и при сравнительно высокой температуре достаточно небольшой разницы между горизонтальными и вертикальными давлениями, чтобы при геологической длительности этого воздействия создать обстановку, при которой твердые горные породы могут течь.

Этим иногда объясняют, в частности, тот факт, что целые массивы древнейших образований лежат поверх пластов значительно более молодого геологического возраста (например, купола каменной соли в районе Мексиканского залива, в Северо-германской долине, под Альпами, вокруг Карпат и т. п.). Первоначально соль отлагалась при испарении отступающих частей моря горизонтальными пластами, а в дальнейшем эти пласты покрылись рыхлыми осадками, которые, уплотнившись, превратились в твердые породы. В отдельных же местах этой более тяжелой перекрывающей породы имеются какие-либо нарушения или слабые участки. Последних было достаточно, чтобы вызвать медленное течение соли и выдавливание ее на поверхность.

Реологическими процессами объясняются такие, например, явления, как последлениковый взброс в районе Великих озер в Канаде, возникновение альпийских покровов, образовавшихся в результате надвига древних пластов земной коры при их течении по складкам под действием собственного веса. Более того, предполагается, что все материковые массы, составляющие верхнюю оболочку Земли, находятся в состоянии медленного вязкого течения.

Опускание и поднятие земной поверхности в ледниковые и последлениковые периоды рассматриваются как процесс изгиба упруговязкой пластинки, плавающей на полужидком, но более плотном основании. Известная гипотеза Вегенера о том, что Африка и Южная Америка, Европа и Северная Америка раньше составляли

единый континент, но затем оторвались друг от друга (в результате возникновения под действием вращения Земли гигантской трещины), исходит из того, что отделение континентов обусловлено их дрейфом по вязким глубинным породам.

Подобные же вопросы были освещены в докладе Н. А. Цытовича о проблемах геомеханики, сделанном на VIII Международном конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению (Москва, 1973).

§ 1.4. ПРИМЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ СООРУЖЕНИЙ

Деформации плотин и мостов. В инженерной практике неоднократно наблюдались реологические процессы, приводившие к катастрофическим последствиям. Так, на II Международном конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению (Роттердам, 1948 г.) Р. Пек приводил данные обследования состояния подпорных стенок различного вида в США. Было обнаружено, что в результате длительной деформации откосов из числа обследованных сооружений 18% полностью разрушены, 53% находились в состоянии прогрессирующего смещения, 4% имели незначительные смещения вскоре после строительства и лишь у 11% сооружений смещения стабилизировались.

Известны случаи аварий двух плотин — Бузей и Гробуа во Франции. Первая из них высотой 22 м и длиной 520 м, возведенная на 6-метровом слое трещиноватого глинистого песчаника, через 11 лет после постройки (в 1895 г.) полностью разрушилась в результате нарастающего смещения, вызванного ползучестью грунта. Плотины Гробуа высотой 28,3 м и длиной 550 м, построенная в 1938 г. на плотных трещиноватых глинах слоем от 2 до 10 м, по этим же причинам сильно деформировалась.

Большое количество примеров деформации сооружений в результате ползучести грунтов было приведено на III конгрессе по механике грунтов. Р. Петерсон сообщил о ряде случаев обрушения откосов глинистых насыпей, вызванных развитием процессов ползучести, причем эти обрушения происходили в сроки от 6 месяцев до 4 лет после постройки. Е. Гезе рассказал о случае длительного смещения опор моста, основанных на 1,5-метровом слое глины и торфа.

В докладе Р. Хефели, Ч. Шерера и Г. Амберга описана деформация устоя железобетонного арочного виадука в Швейцарии вследствие ползучести глинистого грунта на склоне, где был расположен один из устоев (рис. 1.6). Смещение устоя началось сразу после строительства и развивалось с примерно постоянной скоростью 37 мм в год, достигнув за 13 лет величины 480 мм; осадка же в этот период составляла всего 14,9 мм. Течение захватило слой грунта мощностью 12 м. Мост был реконструирован.

Следует отметить, что деформация мостовых устоев вследствие ползучести — явление не редкое. А. А. Луга описывает случай, когда в результате ползучести полутвердых и твердых глинистых грун-

тов три устоя железнодорожного моста сместились в горизонтальном направлении на величину от 9,3 до 46 см за время с 1916 по 1954 г.

Известны случаи длительного смещения береговых мостов через Дунай в Будапеште, Рейхсбрюке и др.

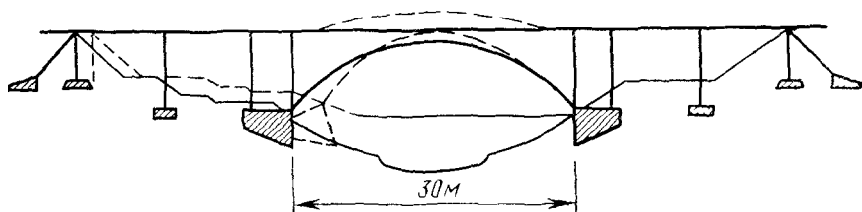


Рис. 1.6. Смещение линии устоя виадука в результате ползучести грунта в Швейцарии (показано пунктиром)

Деформации сооружений на лондонских глинах. Д. Хенкель на IV конгрессе по механике грунтов (Лондон, 1957) описал случай обрушения подпорных стенок вследствие ползучести откосов из трещиноватых глин. Эти глины — морского происхождения, сильно уплотненные под давлением 150—200-метрового слоя осадков, впоследствии удаленного в процессе эрозии. Глины имеют предел текучести $W_L = 70—90\%$, предел пластичности $W_p = 24—32\%$ и природную влажность, несколько превышающую W_p .

Одно из обрушений откоса 10-метровой выемки произошло на станции Норфолт. Выемку сделали в 1936 г., а в 1955 г. было обнаружено движение склона с появлением трещин в его верхней части, в том же году произошло обрушение откоса (рис. 1.7). Влажность в зоне скольжения оказалась равной 44%; выше и ниже этой зоны влажность составляла 30%.

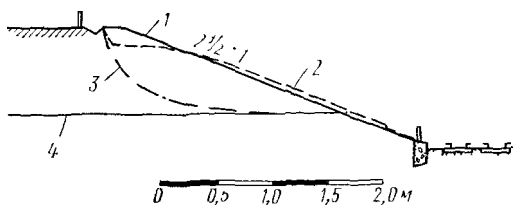


Рис. 1.7. Оползание откоса выемки в Норд-фолте:

1 — начальная поверхность откоса; 2 — поверхность откоса после сползания; 3 — поверхность скольжения; 4 — нижняя граница слоя коричневой лондонской глин

Откосы из лондонских глин обрушились также на станции Вуд Грин, где в 1893 г. была сделана выемка с устройством подпорной стенки высотой 4 м. В 1948 г., т. е. через 55 лет, было обнаружено, что стенка сместилась на 90 см и в ней появились трещины.

Другие случаи обрушения откосов из лондонских глин были описаны А. Скемптоном. Так, в 1941 г. в результате ползучести откоса обрушилась подпорная стенка в Кензал Грин, построенная в 1912 г. Скорость смещения составляла от 6 мм в год в начале наблюдений (1929 г.) до 457 мм в год перед разрушением. В 1949 г., через 49 лет

после строительства, было зарегистрировано обрушение откоса стенки в Садбери Хилл.

Другие случаи деформации откосов. На IV конгрессе по механике грунтов Пейнирсиоглу описал смещение подпорной стенки высотой 6,3 м, устроенной в районе Босфора на крутом склоне в девонских глинах. Оползание склона, подсеченного подпорной стенкой, и смещение самой стенки началось через два года после строительства и развивалось со скоростью 1 мм в сутки, что и привело к аварийному состоянию сооружения (рис. 1.8).

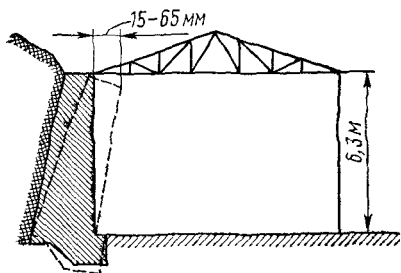


Рис. 1.8. Смещение подпорной стенки фабрики в районе Босфора вследствие ползучести грунта

Сложный случай деформации головного сооружения Дзора ГЭС в Армении вследствие медленного движения массива грунта, оползающего по склону, описан Г. И. Ломизе. Это сооружение сопрягалось с крутым откосом, сложенным 60-метровой толщей раздробленного андезито-дацитового навала. Навал подстилался туфами коренного залегания, поверхность которых имела уклон 8—9°, причем между навалом и коренными породами залегал пласт глинистого грунта элю-

виального происхождения. Вскоре после строительства началось оползание навала (со скоростью 2 см в год), в результате чего было сильно деформировано головное сооружение. Причиной смещения склона явилась деформация ползучести глинистого пласта.

Другой случай длительной деформации, обусловленный ползучестью грунтов, описанный С. С. Могилевской, произошел на Фархадской ГЭС. В числе сооружений станции, основанием которых служили лёссовидные пылеватые суглинки и супеси, был напорный бассейн с высокой фронтальной стенкой. Развитие процесса ползучести грунтов привело к смещению этой стенки за период с 1947 по 1966 г. на 140 мм, появлению в ней трещин, вследствие чего были проведены специальные восстановительные работы.

Деформации больверков (шпунтовых подпорных стенок). Некоторые из случаев работы шпунтовых подпорных стенок (больверков) на ползучих основаниях рассмотрел А. Я. Будин. На основе натурных исследований им было установлено, что указанные сооружения весьма чувствительны к деформациям ползучести оснований и неучет этих деформаций может привести к авариям. Влияние ползучести основания сказывается в том, что происходит релаксация реактивных напряжений в нижней зоне шпунтовой стенки, приводящая к увеличению изгибающего момента в шпунте.

А. Я. Будин провел наблюдения за поведением козлового и заанкеренных больверков (рис. 1.9) в Ленинграде, основанием которых служили мягкопластичная ленточная глина влажностью 36% и тугопластичный моренный суглинок влажностью 10,2%. Вследст-

вие ползучести основания произошло смещение верха козлового больверка. Развиваясь примерно с постоянной скоростью, это смещение достигло за 4,5 года 95 мм (рис. 1.10).

У анкерного больверка смещения были значительно меньшими (от 7 до 21,5 мм), но зато стал нарастать прогиб железобетонного

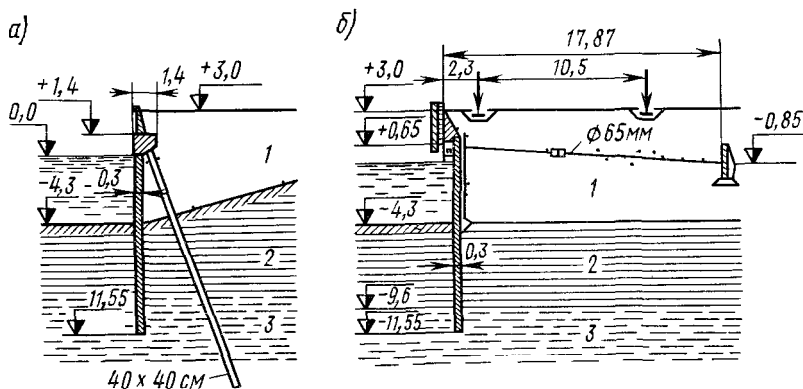


Рис 1.9 Шпунтовые подпорные стенки на глинистых основаниях (Ленинград)

а — козловая, б — анкерная, 1 — песчаная засыпка, 2 — глина, 3 — суглинок

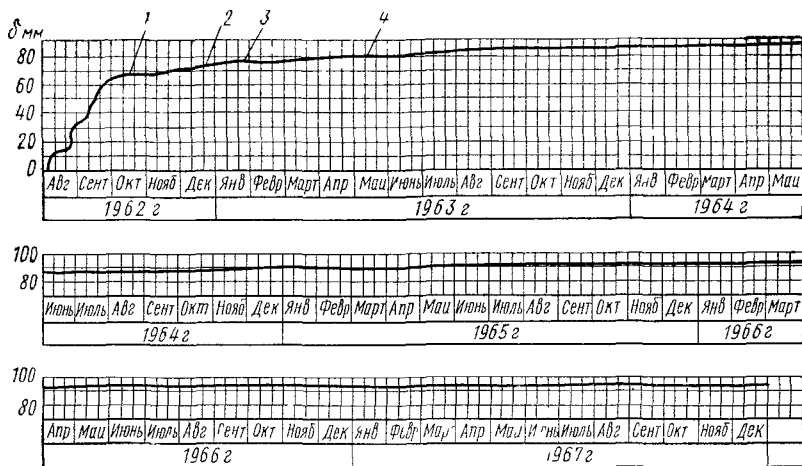


Рис 1.10 Смещение верха козловой шпунтовой стенки

1 — время окончания строительства, 2, 3, 4 — загрузки причала $p=0,16-0,42-0,5 \cdot 10^5$ Па

шпунта и, кроме того, возрастали во времени напряжения в анкерных тягах. В другом, аналогичном, случае прогиб свай из-за ползучести основания привел к разрушению больверка.

Пример регулирования процесса ползучести путем уменьшения величины нагрузки описал Г. А. Андреев в сборнике «Исследования реологических свойств грунтов» (1968). Причал, представляющий

собой железобетонную набережную на высоком свайном козловом ростверке с металлическим шпунтом, был возведен в 1960 г. на ленточных глинах, подстилаемых моренным суглинком.

Загрузка причала, доведенная до $1,67 \cdot 10^5$ Па, вызвала катастрофические деформации, выразившиеся в горизонтальном смещении стенки на 33 см и в осадке 13 см за 10 дней эксплуатации причала. В связи с этим нагрузка была уменьшена до $1,0 \cdot 10^5$ Па, что уменьшило интенсивность нарастания деформаций, но не привело к их



Рис. 1.11. Длительная осадка насыпи за счет выдавливания слоя глинистого грунта

прекращения. И только после уменьшения нагрузки до $0,6 \cdot 10^5$ Па деформации приняли затухающий характер и через 3 года стабилизировались. Общее горизонтальное смещение за 1960—1964 гг. составило 38 см, а максимальная осадка — 17 см.

Данный пример интересен тем, что подтверждает положение о различном характере

процесса ползучести — незатухающем и затухающем в зависимости от величины нагрузки.

Длительные осадки грунта под нагрузкой. Приведенные примеры иллюстрируют случаи деформации ползучести, вызванные сдвигающими горизонтальными силами. Наряду с этим известны случаи, когда катастрофические деформации ползучести вызывались вертикальными нагрузками. Имеются в виду, в частности, случаи длительной осадки сооружений вследствие выдавливания слоя глинистого грунта, подстилаемого несжимаемым (скальным) основанием.

В этих случаях глинистый слой работает подобно пластично-вязкой полосе, в которую вдавливаются пунсон, раздвигая этот слой в стороны. Пример такой осадки был приведен в докладе С. Мера и Т. Натаржана на V Международном конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению (Париж, 1961). Описывалась непрерывная осадка насыпи, возведенной на 6-метровом слое илистой глины, подстилаемой скальным основанием (рис. 1.11). Осадка, вызванная выдавливанием глины из-под насыпи, за 4 года достигла 120 см.

Лабораторные исследования показали, что незатухающие деформации ползучести данного грунта начинаются при сдвигающем напряжении, равном 0,6 от стандартной прочности (определяемой при быстром загрузении). При меньших напряжениях ползучесть имеет затухающий характер. Эта величина и принята в качестве предельной при реконструкции насыпи.

Можно считать вполне обоснованным мнение ряда ученых о том, что осадка знаменитой Пизанской башни вызвана ползучестью и выдавливанием глин, залегающих в виде линз в толще песчаного основания, хотя, по-видимому, здесь имеет место еще и вторичная консолидация. Как известно, строительство башни было начато

в 1174 г. и закончено в 1350 г. За это время величина осадки составила 50 см, после чего она продолжала нарастать в течение почти 600 лет со средней скоростью 2 мм в год; к настоящему времени величина осадки достигла 1,5 м при отклонении верха башни от вертикали (в результате неравномерной осадки) на 1,5 м.

Примеры длительной осадки глинистых илов, залегающих в основании земляных плотин Каховской ГЭС на Днепре, приведены Е. Е. Карпышевым и другими в сборнике «Инженерно-геологические свойства глинистых пород и процессы в них» (вып. II, МГУ, 1972). Эти илы имеют влажность 77% при пределе текучести 68%, но из-за наличия структурного сцепления находятся не в текучем, а в мягкопластичном состоянии. Сжимаемость илов при нагрузке $3,0 \cdot 10^5$ Па составляет от 150 до 200 мм/м. Залегая слоем толщиной от 1,0 до 4,0 м, и перекрываемые 8-метровой толщей мелкозернистого песка, илы осели на 970 мм при общей осадке основания, включая толщу песчано-гравийных отложений, 1120 мм. Эти осадки развивались в течение долгого времени — на отдельных участках они не закончились даже через 15 лет (рис. 1.12).

Деформации горных выработок. Одним из проявлений свойств ползучести горных пород является длительное смещение контура горных выработок под воздействием горного давления. На рис. 1.13 приведены данные натурных наблюдений Ж. С. Ержанова и его сотрудников за смещением контура штрека одной из угольных шахт Карагандинского бассейна. Штрек сечением в свету 14 м^2 был пройден в песчаниках на глубине 527 м от поверхности. Наблюдение за смещением горных пород проводилось в течение 264 сут. На рис. 1.13 показано смещение двух точек на контуре боков штрека, достигшее 5,5 и 8,2 мм. На кровле штрека смещение достигло за это время 25 мм.

О теоретических построениях моделей грунта и инженерной практике. Обобщенная реологическая модель грунта, о которой говорилось выше, учитывая ряд особенностей грунтовой системы, существенно сближает теоретические решения с поведением грунта в натуре. Однако могут возникнуть сомнения в целесообразности применения более сложной модели грунта по сравнению с существующей, поскольку при этом усложняются как сами решения задач, так и получение необходимых для этих решений параметров, что может не оправдать себя из-за большого разброса в значениях характеристик грунта.

Что касается усложнения решения задач, то при современных возможностях использования ЭВМ, применения номограмм, таблиц и т. д. эта проблема решается сравнительно просто. Учет же в исходных уравнениях большого количества факторов еще не означает, что их необходимо вводить все в решение инженерной задачи. Такой учет важен прежде всего для оценки степени влияния различных факторов: если влияние того или иного фактора окажется незначительным, им можно пренебречь. Но пренебрегать следует обоснованно, а не из-за незнания, приводящего к несоответствию расчетных данных фактическим. Именно для сближения этих дан-

ных и, следовательно, для более полного учета реальных свойств грунтов и необходимо применять обобщенное уравнение реологического состояния, которое после оценки степени влияния параметров, учитываемых им, можно упростить.

При этом возрастает роль эксперимента, особенно полевых

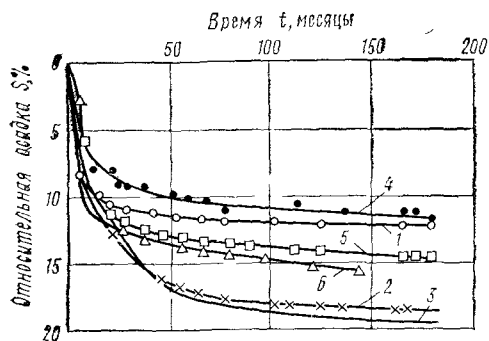


Рис. 1.12. Осадки толщи илов в основании плотины Каховской ГЭС:

Участки плотины	Правобережный			Левобережный		
	1	2	3	4	5	6
Показатели						
Нагрузка, 10^5 Па	1,62	2,72	3,10	1,95	2,62	3,10
Толщина слоя, мм	3,5	4,0	4,8	1,0	2,4	2,95

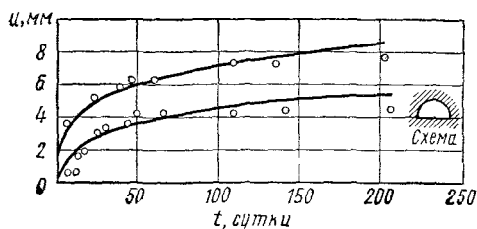


Рис. 1.13. Смещение горных пород на контуре штрека угольной шахты в г. Караганде

мых в теоретические расчеты характеристик, вряд ли можно быть абсолютно уверенным в том, что полученные на основании этих расчетов результаты будут всегда полностью совпадать с действительным поведением грунта. В этом смысле роль инженерной интуиции, основанной на практике, несомненно весьма велика. Вместе с тем правильность такой оценки будет несравненно выше и правомочней, если она базируется не на голом эмпиризме, а на учете действительных закономерностей деформирования и разрушения грунтов.

испытаний и наблюдений за поведением сооружений в натуре. Только такие исследования могут служить окончательным критерием для суждения о правомочности и достоверности как самой модели, так и получаемых решений. Точно так же, учитывая увеличение числа расчетных характеристик грунтов, необходима разработка более достоверных методов их определения, в первую очередь полевых методов. И, наконец, поскольку объектом нашего изучения являются естественные породы, свойства которых являлись следствием особенностей геологического формирования, учет этих особенностей является непременным условием достоверной оценки поведения грунтов, используемых как основание, среда или материал сооружений.

В заключение несколько замечаний об инженерной интуиции и аналитических расчетах. Имея дело с такой сложной, неоднородной средой, как грунт, и понимая всю неточность закладываемых

ГЛАВА 2

СТРУКТУРА И СТРУКТУРНЫЕ СВЯЗИ ГРУНТОВ

§ 2.1. СОСТАВ И СТРОЕНИЕ ГРУНТОВ

Структура грунтов и их механические свойства. Вопросам структуры и структурных связей грунтов посвящено большое количество исследований. Отсылая читателей для подробного ознакомления к соответствующим монографическим работам [36, 16, 26], ограничимся кратким обзором современных представлений по этим вопросам, знание которых необходимо для рассмотрения в последующих главах физических сторон теории деформирования грунтов.

Прежде всего подчеркнем, что именно структура и структурные связи определяют физическую сущность механических процессов в грунтах. Если указанные процессы рассматривать с позиций микрореологии, то вполне правомочно ввести понятие «структурная механика грунтов», которая должна изучать закономерности поведения грунта под нагрузкой исходя из органической связи механических свойств грунта с его структурой и ее изменениями в процессе деформирования.

Структурные связи в грунтах. Все горные породы представляют собой кристаллы или отдельные минеральные частицы, соединенные структурными связями, возникающими в процессе геологического формирования породы. По характеру этих связей выделяют породы с жесткими цементационными связями, к которым относятся массивно-кристаллические (магматические и метаморфические) породы, а также сцементированные осадочные, и породы без жестких связей, к которым относят рыхлые осадочные породы — связные (глинистые, лёссовые) и несвязные (крупнообломочные, песчаные).

Грунт как многокомпонентная система. В массивных кристаллических породах отдельные кристаллы соединены между собой по всей поверхности; эти породы являются однокомпонентными, и с позиций механики их можно рассматривать как твердые тела.

В рыхлых горных породах частицы контактируют лишь в отдельных точках, образуя пористую структуру, поры которой заполнены водой и воздухом. Глинистые грунты представляют собой трехкомпонентную систему, включающую в себя твердую, жидкую и газообразную составляющие. Отметим, что часто применяемый термин «трехфазная система» является с позиций термодинамики

не совсем корректным, поскольку под фазами следует подразумевать различные состояния одного и того же вещества. Например, равновесная система лед—вода—пар является по Гиббсу однокомпонентной трехфазной системой.

К несвязным грунтам, поскольку у них отдельные компоненты (минеральные зерна, вода, воздух) не связаны в единую систему, понятие «многокомпонентные системы» не применяют; их рассматривают как сыпучую среду.

Водонасыщенные глинистые грунты рассматривают как дисперсную систему, состоящую из сплошной среды (дисперсная среда) и расположенных в ней отдельных мелких частиц (дисперсное вещество). В водонасыщенных грунтах дисперсной средой является жидкая фаза, а дисперсным веществом — минеральные частицы (и пузырьки воздуха). Степень дисперсности определяется размером частиц. Частицы коллоидных размеров образуют коллоидный раствор. Если частицы грунта взаимно не связаны, а взвешены в воде, то такая система называется суспензией.

Коллоидные частицы могут слипаться и укрупняться; этот процесс называют коагуляцией; процесс распада агрегатов и крупных частиц на более мелкие называют диспергацией.

Элементы структуры грунта. Под элементами структуры грунта подразумевают [28] обособленную часть породы, имеющую ту или иную форму раздела с соседними частицами. У массивных скальных пород структурными элементами служат связанные между собой минеральные зерна или сцементированные обломки, у несвязных рыхлых пород — отдельные зерна, частицы и обломки, у связных глинистых пород — минеральные частицы, их пакеты и агрегаты, а также отдельные зерна. Отметим, что, строго говоря, эти элементы являются структурными элементами скелета грунта; в более общей трактовке к элементам структуры нужно отнести также адсорбированный воздух, монослой воды, поры и т. д.

Следует различать первичные элементы, к которым относят отдельные минеральные частицы и их пакеты, и вторичные элементы, к которым относят агрегаты.

Агрегирование является характерной особенностью глинистых грунтов. Чем меньше частицы, тем больше их удельная поверхность и, следовательно, больше молекулярные силы притяжения, под воздействием которых коллоидные и глинистые частицы слипаются друг с другом, образуя прочные ультра- (размером менее 0,002 мм) и микро- (0,002—0,1 мм) агрегаты. В свою очередь, ультра- и микроагрегаты образуют структурные соединения более высокого порядка — агрегаты (размером более 0,1 мм), их соединения — блоки и домены. Кроме того, различают полуагрегаты — пылеватые или песчаные частицы, окруженные пленкой из коллоидных частиц.

Если в несвязных грунтах преобладают первичные элементы, то в связных, глинистых грунтах — вторичные (за исключением, конечно, свежевыпавших осадков).

Структура и текстура грунтов. Размер, форма, характер поверхности, количественное соотношение слагающих грунт элементов и

характер их взаимной связи определяют структуру грунтов. Необходимо подчеркнуть, что включение в понятие «структура» характера межчастичных связей вполне правомерно; именно такое представление, а не узкое определение структуры, как только особенностей взаиморасположения частиц, отвечает современным представлениям о физико-химической сущности грунта [16, 36].

Текстуру грунта определяет пространственное расположение слагающих грунт элементов, причем размер элементов не играет роли.

Текстура может быть упорядоченной, характеризующейся определенной ориентацией структурных элементов относительно какой-либо из осей в пространстве, и беспорядочной, характеризующейся хаотическим расположением структурных элементов. Степень ориентации частиц определяется показателем C , равным отношению количества структурных элементов, ориентированных вдоль какой-либо оси, к количеству структурных элементов, перпендикулярных ей. Отклонение ориентации частиц от этой оси характеризуется углом α .

В зависимости от размеров структурных элементов различают микро-, мезо- и макроструктуру. Микроструктура характеризует сочетание минеральных частиц, ультра- и микроагрегатов размером менее 1—5 мкм. Пространственное расположение таких микроэлементов определяет микроструктуру.

Мезоструктура отображает пространственное расположение микроагрегатов, отдельных микроблоков, а также включений в виде пылеватых и песчаных зерен. Элементы мезоструктуры имеют от 1 до 5 мм и более.

Макроструктура характеризует особенности сложения грунтов, видимые невооруженным глазом. Размер макроструктурных элементов (блоков, зерен, обломков и т. д.) составляет от нескольких миллиметров до 1 м и более.

§ 2.2. КОМПОНЕНТЫ ГРУНТА

Твердая часть грунта состоит из минеральных частиц и их агрегатов, зерен и обломков различного химико-минералогического состава.

Все минералы горных пород имеют, как правило, кристаллическое строение, характеризующееся правильной формой кристаллической решетки. Минералы подразделяют на следующие группы: первичные силикаты, у которых преобладают ковалентные связи; простые соли с преобладанием ионных связей; глинистые минералы с несколькими видами связей без четкого преобладания какой-либо одной из них; органические вещества.

Силикаты являются главными порообразующими минералами магматических, метаморфических и ряда осадочных пород. Среди осадочных пород широко распространены простые соли — галоиды,

сульфаты, карбонаты. Их особенностью является водорастворимость, что обусловлено ионным типом внутрикристаллических связей.

Глинистые минералы, образовавшиеся преимущественно в процессе химического выветривания горных пород силикатной группы, отличаются высокой дисперсностью и слоисто-ленточным строением. Эти минералы являются главными компонентами дисперсных осадочных отложений. По своему кристаллохимическому строению глинистые минералы разделяют на каолиниты, монтмориллониты и гидрослюда; реже встречаются хлориты, вермикулиты и т. п.

Гранулометрический состав грунтов. Величины частиц, составляющих грунт, определяют обычно по их наименьшему размеру. К крупнообломочным относятся частицы размером более 2 мм (гравий, щебень, галька). Частицы размером от 2,0 до 0,05 мм называют песчаными, от 0,05 до 0,001 мм — пылеватыми, менее 0,001 мм — глинистыми. Глинистые частицы, размер которых менее 0,00025 мм, носят название коллоидов.

Количественное соотношение различных фракций характеризует гранулометрический состав; при определении этого состава учитывают только соотношение первичных элементов. Соотношение же, учитывающее как первичные, так и вторичные элементы, называют микроагрегатным составом.

Гранулометрический и микроагрегатный составы существенно различны. Например, для каолиновой глины содержание фракций размером менее 0,001 мм в первом случае составляет 35%, а во втором — 15%.

Глинисто-коллоидные частицы. Особенностью глинистых минералов являются их большая удельная поверхность, являющаяся следствием высокой дисперсности глинистых частиц, их гидрофильность и способность к адсорбции и ионному обмену.

Коллоидно-глинистые частицы являются наиболее активными компонентами дисперсных грунтов, и именно от них в основном зависят прочностные и деформативные свойства этих грунтов. Степень влияния глинисто-коллоидных частиц зависит от величины их удельной поверхности, последняя же, в свою очередь, зависит от минералогического состава частиц. Так, у монтмориллонита удельная поверхность составляет 800 м²/г, у иллита — 80 м²/г, тогда как у каолинита — 10 м²/г. Соответственно коллоидную активность (т. е. степень приближения свойств грунта к свойствам коллоидной системы) у монтмориллонита можно считать наибольшей, а у каолинита — наименьшей.

Органические вещества. Органические вещества содержатся в очень многих грунтах, не говоря уже о торфах и верхнем почвенном покрове. Наиболее распространены растительные остатки, которые встречаются как в неразложившемся, так и в разложившемся виде (гумус). Для органических веществ, особенно для гумуса, характерны высокая гидрофильность и активность в различных физико-химических процессах (окислительно-восстановительные и др.), протекающих в грунтах.

Наличие в грунте органических веществ существенно влияет на механические свойства грунта, увеличивая его пластичность, деформируемость и особенно объемную сжимаемость. В то же время гумус повышает водоустойчивость грунтов.

Вода в грунте. Влага в грунте может находиться в виде водяного пара, связанной (прочно и рыхло) и свободной воды (капиллярной и гравитационной). Кроме того, вода может быть в твердом состоянии (в мерзлых грунтах) и в кристаллизационном и химически связанном.

Вода, содержащаяся в грунте, обычно насыщена теми или иными солями, т. е. ее следует рассматривать как раствор. От химического состава этого раствора существенно зависят силы взаимодействия между частицами и, следовательно, прочность межчастичных связей.

Природа связанной воды весьма сложна. Основной особенностью этой воды является упорядоченность ориентации молекул по отношению к поверхности твердой частицы, которую вода обволакивает, причем степень ориентации молекулы уменьшается по мере удаления от частицы. На большом расстоянии ориентация молекул становится беспорядочной, чем и определяется переход воды из связанного состояния в свободное.

Свойства связанной воды существенно отличаются от свойств свободной воды, приближаясь к свойствам твердого тела. В частности, прочносвязанная вода характеризуется повышенной плотностью, равной 1,2—2,4 г/см³. Молекулы этой воды имеют значительно меньшую подвижность по сравнению со свободной водой. В результате этого прочносвязанная вода обладает свойством упругости и сопротивляется сдвигу; ее связность является достаточно высокой. Плотность рыхлосвязанной воды близка к плотности воды свободной, и по своим свойствам эти виды воды мало чем отличаются друг от друга.

Максимальное количество прочно связанной воды примерно соответствует величине максимальной гигроскопичности, поэтому прочносвязанную воду называют часто гигроскопической или адсорбционной. Суммарное содержание прочно- и рыхлосвязанной воды в грунте соответствует максимальной молекулярной влагоемкости грунта, т. е. количеству воды, удерживаемой силами поверхностного натяжения.

Общее содержание всех видов воды в грунте определяет его влажность: абсолютную W , если вес воды отнесен к весу сухой породы, или относительную (степень водонасыщения) S_r , если объем воды отнесен к объему пор.

Газы в грунтах находятся как в свободном, так и растворенном виде. Растворенные газы всегда содержатся в составе грунтовой воды; они влияют на структуру и свойства растворов и ошутимо реагируют на изменение температуры и давления.

Часть свободных газов может сообщаться с атмосферой (собственно свободные), часть же находится замкнутой в грунте (защемленные газы). Эти виды газов являются основными — они запол-

няют поры, трещины и т. п. В глинистых грунтах содержатся заземленные газы.

Пористость грунта является одной из важнейших структурных характеристик грунта. Величину пористости n определяют как отношение объема пустот к объему всего грунта. Коэффициент пористости e определяется отношением между объемами пор и твердых частиц.

А. К. Ларионов (1966) предложил выделять ультрамикropоры (размером менее 1 мкм), находящиеся между отдельными микро-частицами, между пакетами и в ультраагрегатах, межчастичные поры (размером от 1 до 100 мкм), находящиеся между крупными частицами и между агрегатами и внутри них, и крупные поры (размером более 100 мкм).

Ту часть пористости, за счет которой изменяется в основном объем грунта при его уплотнении, называют активной пористостью. Соотношение между активной и общей пористостью играет важную роль в оценке уплотняемости грунтов.

Следует также указать на наличие в грунте микро- и макротрещин, проходящих как между агрегатами, так и внутри них.

§ 2.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ И ЖИДКИМИ КОМПОНЕНТАМИ ГРУНТА

Электрическая природа взаимодействия твердых и жидких составляющих. Взаимодействие между твердыми и жидкими компонентами грунта имеет электрическую природу и проявляется в виде обменного ионного процесса. Напомним, что ионами называют атомы или их группы, обладающие избыточным или недостаточным (по сравнению с нейтральными атомами) количеством электронов.

Внутри твердой частицы ионы с различными знаками уравновешены. На поверхности же частицы такое равновесие не достигается, вследствие чего частица ведет себя как электрически заряженное тело. Поскольку диэлектрическая постоянная горных пород больше, чем воды, в соответствии с правилом Куэна поверхность материальных частиц дисперсного водонасыщенного грунта заряжена отрицательно. Теоретически заряд распространяется по всей поверхности частиц однородно, однако установлено, что кромки глинистых частиц заряжены положительно, т. е. имеют противоположный по знаку заряд по сравнению с плоскостями частицы.

Под действием электрического поля диполи воды вокруг частицы принимают ориентированное положение и притягиваются к поверхности частицы. Эта поверхность, будучи заряжена отрицательно, группирует вокруг себя положительно заряженные ионы (катионы) воды и лишь на некотором расстоянии от поверхности имеется небольшое число отрицательно заряженных ионов (анионов).

На рис. 2.1 показана схема распределения ионов в зависимости от расстояния до поверхности частицы по Т. В. Лэмбу (1958). С увеличением этого расстояния концентрация ионов уменьшается.

Ионный обмен. Между твердым и жидким компонентами грунта происходит обмен катионами, обусловленный разными знаками зарядов поверхности частицы и молекул слоя связанной воды. Положительно заряженные ионы (катионы) этого слоя притягиваются к отрицательно заряженной поверхности и вступают в реакцию обмена с расположенными на ней молекулами, вытесняя катионы из решетки частицы в жидкость. Отметим, что ионный обмен совершается не только на границе раздела (в диффузном слое), но и внутри частицы — в ее кристаллической решетке.

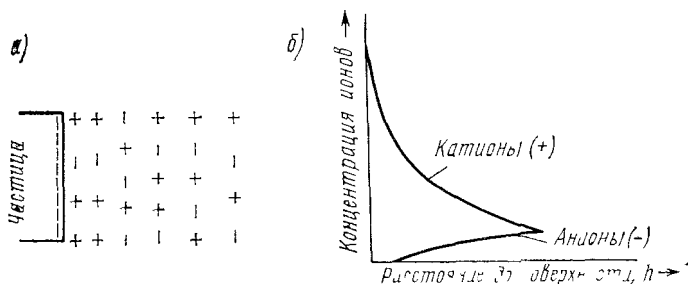


Рис. 21. Распределение ионов около поверхности минеральной частицы:

а — схема концентрации положительно и отрицательно заряженных ионов, *б* — график зависимости концентрации катионов и ионов от расстояния до поверхности частицы

Обменная способность грунтов (емкость поглощения) зависит от химико-минералогического состава глинистых частиц. У частиц каолинита, которые имеют жесткую кристаллическую решетку, возможность обмена ионами в межпакетном пространстве исключена, а обменные реакции протекают только по торцам частиц. Вследствие этого емкость поглощения составляет всего 3—15 мг-экв на 100 г. У иллита, частицы которого также имеют жесткую решетку, обмен ионами происходит и на внешних базальных плоскостях пакета, и емкость поглощения его соответственно повышается до 10—40 мг-экв на 100 г. У монтмориллонита вследствие подвижности кристаллической решетки ионный обмен идет, кроме того, и по базальным поверхностям внутри пакета, поэтому емкость поглощения этого минерала доходит до 80—150 мг-экв на 100 г.

Минеральная частица и гидратная оболочка. Коллоидная частица вместе с окружающей ее связанной водой образует мицеллу (рис. 2.2). Вблизи поверхности, где силы притяжения весьма велики (они доходят до сотен тысяч ньютонов* на 1 см²), молекулы воды прочно связаны с поверхностью частицы, образуя молекулярный, ориентированный слой, не участвующий в движении жидкости. Этот слой прочносвязанной (адсорбированной) воды пред-

* Единицы измерения в СИ и их соотношение с единицами других систем приведены в приложении.

ставляет собой граничную фазу и рассматривается как единое целое с минеральной частицей. Толщина граничной фазы соответствует толщине одной или нескольких молекул.

Более удаленные ориентированные молекулы рыхлосвязанной (лисорбированной) воды образуют диффузионный слой, который участвует в движении жидкости, обтекая при деформировании твердую частицу.

Адсорбированная и лисорбированная вода образуют двойной слой; толщина этого слоя составляет несколько сотен ангстрем ($1\text{Å} = 10^{-4} \text{ мкм} = 10^{-8} \text{ см}$).

За пределами двойного слоя, т. е. за пределами сил молекулярного притяжения, находится свободная вода. В целом гидратную оболочку, окружающую минеральные частицы, называют лиосферой.

Двойной электрический слой образуется вследствие наличия зарядов противоположного знака на поверхности твердой частицы (заряженной отрицательно) и в примыкающем к ней слое связанной воды, ионы которой имеют положительный заряд. Этот слой характеризуется электрическим потенциалом ψ (рис. 2.2), имеющим наибольшее значение ψ_0 у поверхности частицы и уменьшающимся по

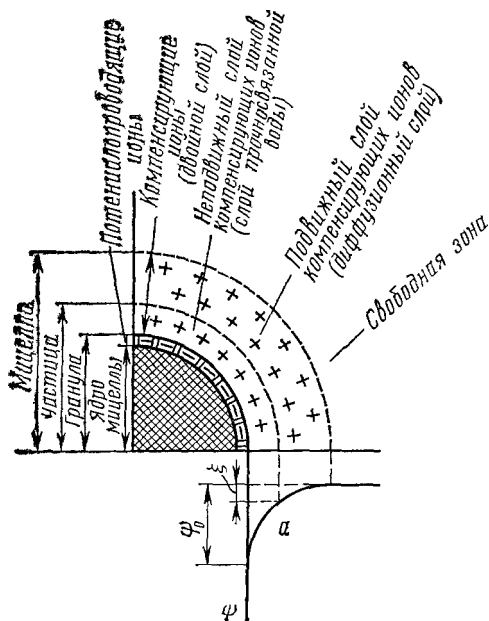


Рис. 2.2. Электромолекулярные силы минеральной частицы и гидратной оболочки

мере удаления от нее. Наименьшее значение потенциал имеет в свободной воде, где его величина определяется концентрацией электролита. Таким образом, достижение разностью потенциалов нулевого значения определяет границу между связанной и свободной водой.

Различают термодинамический и электрокинетический потенциалы. Первый — ψ — определяет суммарные силы связи любых слоев мицеллы. Второй — ξ — характеризует связи диффузного слоя воды; чем меньше этот слой, тем больше величина ξ .

Теория двойного электрического слоя разработана Гоу (в 1910 г.) и в последующем развита Чепменом (в 1913 г.), которые установили аналитически зависимость электрического потенциала от расстояния до поверхности частиц. Следует, однако, иметь в виду, что эта теория рассматривает взаимодействие отдельных

идеализированных частиц и поэтому применительно к реальным дисперсным грунтам можно говорить лишь о качественной картине.

О силах электромолекулярного притяжения. Эти силы, возникающие между минеральной частицей и связанной водой и обусловленные притяжением диполей воды к электрически заряженной поверхности, действуют нормально к этой поверхности и определяют сопротивление отрыву молекул воды от поверхности частицы. Вместе с тем на границе раздела твердой и жидкой фаз возникают касательные силы сопротивления движению воды вдоль поверхности частиц. Хотя эти силы значительно меньше сил отрыва, но они играют существенную роль в развитии реологических процессов.

Поскольку связь между минеральной частицей и водной оболочкой всегда слабее прочности непосредственного контакта, логичнее рассматривать гидратный слой не как цементирующую связь, а как своего рода связку между твердыми частицами. Влияние же адсорбированной воды сказывается косвенно: оно проявляется в изменении величины напряжения, передаваемого на прямые контакты.

§ 2.4. СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ ГРУНТА

Энергетические поля. В предыдущем параграфе было рассмотрено взаимодействие между твердой частицей и окружающей ее гидратной оболочкой. Требуется далее рассмотреть взаимодействие между самими твердыми частицами, разделенными водной пленкой.

Каждая такая частица находится под воздействием системы внешних и внутренних сил и возбуждаемых ими энергетических полей. К внешним относят поля, порождаемые приложенной нагрузкой и гравитационными силами. Внутренние поля возбуждаются межчастичными силами, источниками которых являются сами компоненты грунта. В общем случае выделяют следующие виды меж- и внутривчастичных сил: силы химической природы, молекулярные силы, ионно-электростатические силы, капиллярные электростатические (кулоновские) силы, магнитные.

Силы связи химической природы являются внутримолекулярными: они возникают внутри минеральных частиц и между кристаллами в кристаллических породах и рыхлых породах с цементационными жесткими связями. По своей прочности эти связи близки к прочности минеральных зерен. Все остальные виды сил связей являются межмолекулярными (межчастичными); они обуславливают связь между частицами в глинистых грунтах. Иногда эти связи называют водно-коллоидными. Прочность межчастичных связей значительно меньше внутримолекулярных связей. У сыпучих же грунтов эти связи вообще отсутствуют и прочность таких грунтов определяется лишь гравитационными силами.

Силы связи химической природы. Эти силы порождаются в результате электрического взаимодействия между атомами и могут быть ионными или ковалентными.

Характерными чертами внутримолекулярных сил являются значительная энергия связи (количество энергии, выделяющейся при образовании данной связи между атомами), достигающая 400—1250 Дж/моль (100—300 ккал/моль) *, и небольшой радиус эффективного действия, не превышающий 0,5—3,5 Å. Таким образом, эти силы являются близкодействующими.

К связям химической природы можно отнести также водородные связи; они возникают вследствие взаимодействия водорода, находящегося между двумя отрицательно заряженными атомами в водосодержащих соединениях (кристаллогидраты, лед). По своей природе эти связи близки к ионным.

Молекулярные силы, называемые силами Ван-дер-Ваальса — Лондона, обусловлены следующими тремя видами взаимодействия молекул: ориентационными, возникающими между полярными (осесимметричными) молекулами, индукционными, порождаемыми поляризацией недипольных молекул в поле, которые создаются дипольными молекулами, и дисперсионными, возникающими при взаимодействии электронов молекул. Принимается, что энергия U взаимодействия между двумя молекулами и сила взаимного притяжения между ними f равны:

$$U = \frac{s}{h^6}; \quad f = -\frac{dU}{dh} = -\frac{6s}{h^7}, \quad (2.1)$$

где h — расстояние между двумя молекулами; s — константа, зависящая от дипольного момента молекул, их поляризуемости, частоты колебаний и температуры.

Силы молекулярного взаимодействия возникают также и между двумя твердыми частицами. В этом случае они равны, по Е. М. Лифшицу, $f = B/h^n$, где $n=3$ при $h \leq \lambda$ и $n=4$ при $h > \lambda$ (λ — спектральная характеристика атомов взаимодействующих частиц).

Нужно учитывать, однако, что выражение (2.1) относится к взаимодействию двух отдельных молекул. В действительности же благодаря взаимному влиянию множества молекул суммарная сила взаимодействия двух смежных молекул определяется более сложной зависимостью.

Энергия связи, создаваемая молекулярными силами, значительно меньше энергии связи, создаваемой внутримолекулярными силами; она не превосходит 40 Дж/моль (9 ккал/моль). Расстояние же, на котором сказывается действие молекулярных сил, значительно больше, чем у внутримолекулярных, и составляет от нескольких (5—10) ангстрем до нескольких тысяч. Поэтому такие силы рассматриваются как дальнедействующие.

При очень малых расстояниях (меньше 1—2 Å) силы взаимодействия между соседними частицами из притягивающих становятся отталкивающими; обусловлены они борновским взаимодействием между электронными оболочками.

* Моль — единица количества вещества — есть число граммов вещества, равного его молекулярному весу.

Силы отталкивания увеличиваются с уменьшением расстояния между молекулами обратно пропорционально этому расстоянию в степени $n \geq 9$. Поскольку же у сил притяжения, согласно формуле (2.1), $n=7$, зависимость от расстояния у молекулярных сил отталкивания большая, чем у молекулярных сил притяжения.

Несмотря на сравнительно небольшую величину молекулярных сил, они играют существенную роль в формировании прочностных свойств глинистых осадков, особенно на начальных стадиях литогенеза — на стадии седиментогенеза, когда происходит коагуляция и образование осадков, а также на стадии диагенеза.

Таким образом, прочностные связи свежевыпавших осадков (или искусственных паст) обуславливаются в основном молекулярными, ван-дер-ваальсовыми силами. При дальнейшем же уплотнении глинистых осадков начинают превалировать силы ионно-электростатической природы.

Ионно-электростатические силы. В водонасыщенной глинистой породе минеральные частицы при взаимодействии с обменными катионами получают электрический заряд. Если к одной заряженной частице приблизить другую, то катионы будут взаимодействовать одновременно с двумя частицами и между последними образуется ионно-электростатическая связь. Эта связь проявляется при расстоянии между частицами в несколько ангстрем, и максимально она развивается в абсолютно сухой глинистой породе.

Капиллярные силы, впервые исследованные К. Терцаги, обусловлены капиллярным давлением, возникающим на границе раздела жидкой и газообразной компонент грунтовой системы (рис. 2.3). Величина капиллярных сил, которая может быть достаточно большой, определяется зависимостью

$$f = 2\pi r s, \quad (2.2)$$

где r — радиус частицы; s — поверхность натяжения жидкости.

Электростатические силы возникают в результате накопления на поверхности частиц электростатических зарядов. При разнозначно заряженных частицах они притягиваются, а при однозначно заряженных отталкиваются, т. е. происходит кулоновское взаимодействие зарядов. Величина электростатических сил невелика; энергия взаимодействия U и сила взаимодействия f равны соответственно:

$$U = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{h}, \quad f = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{h^2}, \quad (2.3)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость жидкой фазы, окружающей частицы; h — расстояние между частицами; q_1 и

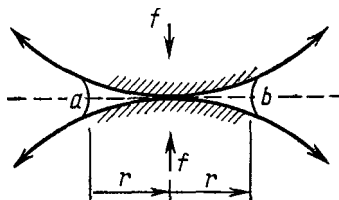


Рис. 2.3 Схема действия капиллярных сил

q_2 — величины зарядов частицы; при одноименных зарядах $f > 0$, а при разноименных $f < 0$.

Поскольку плоскости частиц заряжены отрицательно, а грани — положительно, при контакте плоскостей возникают электростатические силы отталкивания, а при контакте грани с плоскостью — силы притяжения. Электростатические силы проявляются на ранних стадиях литогенеза (в молодых глинистых осадках).

Магнитные силы. Исследованиями, проведенными в МГУ [36], было показано, что в тонкодисперсных системах наряду с рассмотренными выше силами могут возникнуть силы магнитного характера. Их возникновение связано с наличием в глинистых грунтах ферромагнетиков (гематита, гетита, гидрометита), образующих на поверхности глинистых частиц тонкие (0,05—0,5 мкм) пленки. Такие пленки обладают жесткими магнитными моментами, которые переносят коагуляционный эффект между частицами. Величина магнитных сил невелика, и она играет роль только на стадии седиментации.

Прочность связей. Рассмотренные выше силы, возбуждая энергетические поля, формируют связи между частицами дисперсной системы. Прочность этих связей варьируется в больших пределах (до 20 порядков) в зависимости от того, какой тип связи доминирует. При этом следует различать прочность одной связи (единичного контакта) и прочность грунтовой системы в целом. Соответствующие значения ее приведены в табл. 2.1, составленной В. И. Осиповым (МГУ).

Таблица 2.1

Прочность связей в глинистых грунтах

Вид связей	Прочность единичного контакта, 10 Н (дин)	Прочность структуры в целом, Па
Химические	До 10^2	$(1-10) \cdot 10^7$ (несколько сотен кГ/см ²)
Молекулярные (ван-дер-ваальсовы)	$10^{-4}-10^{-3}$	До 10^4 (до 0,1 кГ/см ²)
Ионно-электростатические	$10^{-3}-4 \cdot 10^{-1}$	До 10^6 (до 10 кГ/см ²)
Капиллярные	10^{-2}	До $4 \cdot 10^5$ (до 4 кГ/см ²)
Электростатические (кулоновы)	10^{-5}	$(1-10) \cdot 10^3$ (несколько Г/см ²)
Магнитные	10^{-10}	$(1-10) \cdot 10^2$ (доли Г/см ²)

Силы притяжения и отталкивания. Как было сказано, силы взаимодействия между частицами глинистого грунта могут вызывать как взаимное притяжение этих частиц, так и их отталкивание. Силами притяжения являются молекулярные, ван-дер-ваальсовы силы, если расстояние между молекулами более 1—2 Å, ионно-электростатические силы, капиллярные и электростатические (кулоновы), если частицы контактируют разнозначно с заряженными

поверхностями, а также магнитные и водородные силы. Силами отталкивания являются электростатические (кулоновы), возникающие при контакте однозначно заряженных поверхностей частиц, а также близкодействующие молекулярные (борновы) силы.

Силы расклинивания. Эти силы обусловлены наличием гидратных оболочек, окружающих минеральные частицы. Выше уже указывалось, что гидратная оболочка состоит из слоя прочно-связанной, адсорбированной воды и диффузионного слоя рыхло-связанной воды (см. рис. 2.1 и 2.2). В первом из них молекулы воды ориентированы, во втором — нет. Если контактирование частиц происходит так, что расстояние между поверхностями двух частиц в месте контакта не превышает размера слоя прочно-связанной воды, то возникает расклинивающее действие водной пленки. Этот эффект был установлен Б. В. Дерягиным. Сила расклинивания равна

$$f = A/h^3, \quad (2.4)$$

где $A = 10^{-9}$ Дж (10^{-2} эрг) — постоянная Ван-дер-Ваальса; h — расстояние между частицами.

Это выражение аналогично зависимости Лифшица для определения сил молекулярного притяжения, и, следовательно, расклинивающие силы подчиняются тому же закону, что и силы молекулярного взаимодействия.

Если частицы контактируют через диффузные слои, то расклинивающее действие водных пленок обусловлено, с одной стороны, электростатическими силами отталкивания, а с другой — осмотическими. Соответственно суммарная сила отталкивания будет равна

$$f_{от} = f_{эл} + f_{осм}, \quad (2.5)$$

где

$$f_{эл} = \epsilon E^2 / 8\pi^2; \quad f_{осм} = Re \theta (n_i - n_{\infty}). \quad (2.6)$$

В этих выражениях E — напряженность электростатического поля; Re — постоянная Рейнольдса; θ — абсолютная температура, К; n_i — концентрация ионов в связанной воде между частицами; n_{∞} — концентрация ионов в свободной воде.

Теория осмотического давления рассматривает условие равновесия двух твердых частиц, разделенных слоем жидкости. Понятие о расклинивающем действии слоя воды, по Б. В. Дерягину, исходит из рассмотрения условия равновесия жидкости, находящейся между твердыми частицами. Однако оба эти подхода дают идентичные результаты.

Набухание грунтов. Расклинивающее действие водной пленки на глинистые грунты приводит к их набуханию. Если расстояние между частицами не превышает двойной толщины слоя ориентированной воды, происходит лишь внутрикристаллическое набухание грунта. Такое влияние характерно для грунтов с влажностью меньше максимальной гигроскопической. Макронабухание же начинается при влажности, соответствующей нижнему пределу пластич-

ности, и развивается при увлажнении до степени, соответствующей верхнему пределу пластичности.

Исследования, проведенные А. А. Мустафаевым и его сотрудниками (1976), показали, что глинистый грунт набухает не сразу после его увлажнения, а с течением времени, аналогично явлению последействия. Это увеличение объема грунта от набухания оказывается значительно больше объема воды, поступившей в грунт при его увлажнении. Указанные данные свидетельствуют о том, что явление набухания вызвано не только механическим раздвижением глинистых частиц за счет увеличения толщины водной пленки, но и внутрикристаллическими объемными изменениями самих частиц при увлажнении.

§ 2.5. МЕЖЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗИ В ГРУНТЕ

Взаимодействие смежных частиц. Рассмотрим две взаимно параллельные частицы глинистого грунта, разделенные слоем воды толщиной h (рис. 2.4). Эти частицы находятся под воздействием притягивающих сил $f_{\text{пр}}$ и отталкивающих $f_{\text{от}}$. При этом силы отталкивания ионно-электростатической природы $f'_{\text{от}}$ действуют на расстояниях, больших некоторого расстояния $h_{\text{пр}}$, а при $h < h_{\text{пр}}$ возникают контактные, борновы силы отталкивания $f''_{\text{от}}$. Таким образом, частицы находятся под воздействием результирующей силы

$$F = f_{\text{от}} - f_{\text{пр}}, \quad (2.7)$$

где $f_{\text{от}} = f'_{\text{от}}$ при $h > h_{\text{пр}}$; $f_{\text{от}} = f'_{\text{от}} + f''_{\text{от}}$ при $h < h_{\text{пр}}$.

Если силы отталкивания больше сил притяжения, то результирующая сила имеет знак плюс, если меньше — минус. Соответственно зависимость от расстояния h результирующей силы F обуславливается соотношением составляющих $f_{\text{пр}}$ и $f_{\text{от}}$.

На рис. 2.4 изображены возможные виды такой зависимости (Нерпин и Чудновский [26]). Кривая 1 соответствует случаю, когда действуют только силы притяжения $F = f_{\text{пр}}$, а кривая 4 — когда действуют только силы отталкивания $F = f_{\text{от}}$. Кривые 2 и 3 соответствуют одновременному действию притягивающих и отталкивающих сил. Кривая 3 отображает случай, когда при любом расстоянии h преобладают силы отталкивания и результирующая сила остается положительной. Кривая 2 соответствует случаю, когда результирующая сила F меняет свой знак. На рисунке соответственно отмечены два экстремальных значения результирующей силы: $F_{\text{кр1}}$ и $F_{\text{кр2}}$.

Вид кривых «сила F — расстояние h » зависит от минералогической природы частиц и их химического состава. Так, кривая 1 характерна для каолина, пакеты частиц которого соприкасаются своими поверхностями с разноименными зарядами, вследствие чего возникают электростатические силы притяжения, добавляющиеся к ван-дер-ваальсовым силам.

Для монтмориллонита, пакеты которого связаны одноименными зарядами, характерны кривые, располагающиеся между кривыми 3 и 4. Для иллита характерны кривые, расположенные между кривыми 2 и 3. Концентрация электролита увеличивает силы отталкивания. Так, для морских отложений с большим содержанием электролита характерна кривая 4, для грунтов со слабой концентрацией солей в поровом растворе — кривая 2.

Условие равновесия частиц. Если две взаимно параллельные частицы находятся на некотором расстоянии h друг от друга, при котором результирующая сила взаимодействия F является отталкивающей, то равновесие частиц может быть обеспечено лишь при наличии внешней нагрузки $N = \sigma's$, где σ' — эффективное (передающееся на минеральные частицы) давление, s — площадь:

$$N - F = 0. \quad (2.8)$$

Если увеличить внешнюю силу на величину ΔN , то для установления нового состояния равновесия частицы должны сблизиться на расстояние Δh , а сила отталкивания увеличиться на величину ΔF . При сближении частиц будет выполнена работа $\Delta A = F \Delta h$, в результате чего изменится величина потенциальной энергии связи U между частицами. Кривые зависимости этой энергии от расстояния h между частицами аналогичны кривым, показанным на рис. 2.4.

Оценка величины сил взаимодействия. Е. Гезе [48] сделал попытку оценить межчастичные силы взаимодействия, рассматривая случай, когда частицы контактируют между собой по схеме «грань — плоскость» (см. схему б на рис. 2.5); при этом угол наклона одной частицы к другой $\alpha = 45^\circ$. В этом случае преобладают силы притяжения $F = f_{\text{пр}}$, причем $f_{\text{пр}}$ складывается из ван-дер-ваальсовых сил и отрицательных электростатических сил. Зависимость суммарной силы притяжения от расстояния h между торцом и гранью частицы отображается кривой вида 1 рис. 2.4, и в рассматриваемом случае ее можно описать выражением

$$F = -B \frac{\delta l}{h^4}, \quad (2.9)$$

где F — сила взаимодействия между частицами; B — коэффициент притяжения; δ — толщина частицы; l — ее единичная ширина.

Принимая $B = 10^{-24}$ Н·см², $\delta = 10^{-7}$ см, $l = 1$ см и $h = 10$ А, получим $F = -10^{-31} \cdot 10^{28} = -10^{-3}$ Н. Если же силу отнести не к единичной ширине 1 см, а к ширине одной частицы, приняв l равной 100—

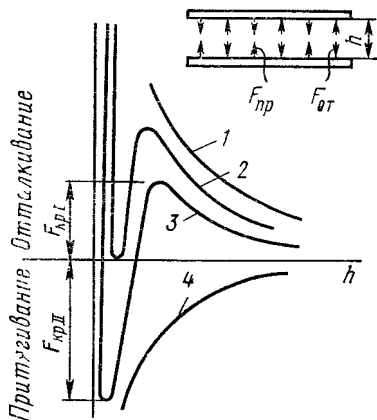


Рис. 2.4 Зависимость сил межчастичного взаимодействия F от расстояния h между частицами

1000 Å, то получим значение F , равное $10^{-9} \div 10^{-8}$ Н. Изменение расстояния h до 20 Å уменьшает силу F на 6,25% от ее значения при $h = 10$ Å.

Об оценке величины энергии связи. Рассмотренные выше силы взаимодействия между частицами грунта относятся к взаимодействию двух идеализированных частиц. Но даже при такой идеализации мы не можем теоретически вычислить результирующее значение силы взаимодействия F , поскольку составляющие этой силы имеют различную природу, исключая простое арифметическое суммирование. В действительности нужно рассматривать не отдельные частицы, а их совокупность, представленную как разрозненными, так и агрегированными группами частиц самого различного размера и очертания.

По-видимому, силы взаимодействия между частицами целесообразнее определять интегральным путем — как осредненную потенциальную энергию связи между условными статическими частицами $\langle U \rangle$, отнесенную к характерному элементарному объему грунта*. При этом возможно, что в первом приближении зависимость потенциальной энергии от среднестатистического расстояния между частицами следует попытаться описать феноменологической формулой вида

$$\langle U \rangle = \frac{a}{h^n} - \frac{b}{h^m}, \quad (2.10)$$

где первый член характеризует отталкивание, а второй — притяжение.

При другом способе оценки прочности межчастичных связей грунтовой системы определяют эту прочность R как произведение прочности единичного контакта F_i на количество контактов λ в единице объема грунтовой системы:

$$\langle R \rangle = \lambda F_i. \quad (2.11)$$

Например, если применить частицу в виде шара радиусом r , то $\lambda = 1/4r^2n^2$, где n — пористость.

Пределы изменения F_i составляют от 10^{-12} до 10^{-3} Н (от 10^{-7} до 10^2 дин). Зная из макроопыта величину R , можно приближенно оценить (с точностью до одного порядка) прочность единичного контакта и соответственно выяснить природу связей.

§ 2.6. СТРУКТУРА ГРУНТА

Типы структурных связей. Выше была рассмотрена электрическая природа связей между частицами грунта. Рассмотрим теперь зависимость этих связей от физико-химических условий формирования горных пород. С таких позиций структуры глинистых грунтов П. А. Ребиндер предложил подразделить на два основных типа:

* Знак $\langle \rangle$ означает осреднение энергии по характерному объему грунта, во много раз меньшему любого рассматриваемого объема грунта.

коагуляционно-тиксотропные и конденсационно-кристаллизационные.

Коагуляционно-тиксотропные структуры характеризуются водно-коллоидными связями, т. е. межчастичными связями молекулярно-ионно-электростатической природы, рассмотренными выше. Эти связи возникают в момент образования осадочных пород и поэтому их называют, исходя из диагенеза, первичным сцеплением. Такие связи в дисперсных грунтах проявляются при отложении глинистых осадков, еще не содержащих агрегаты и состоящих из первичных частиц, окруженных пленками связанной воды.

Поскольку толщина пленок, а соответственно и величина межмолекулярных сил, зависят от плотности грунта, то первичное сцепление повышается при уплотнении грунта. Эти связи мало прочны, они легкоподвижны и после разрыва восстанавливаются, т. е. способны к тиксотропному упрочнению. Типичным примером коагуляционно-тиксотропных структур является глиняная паста.

В конденсационно-кристаллизационных структурах частицы соединены непосредственно, без разделения их водной пленкой. Под конденсационными связями имеют в виду сухие контакты между частицами; такие контакты могут возникнуть при непосредственном сближении частиц в результате испарения влаги и пр.

Под кристаллизационными связями подразумевают химические связи, возникающие в процессе диагенеза в результате цементации; они являются жесткими и могут быть нарушены лишь при приложении достаточно большого напряжения; нарушенные кристаллизационные связи не восстанавливаются.

У кристаллических пород кристаллизационные связи возникают при остывании магмы и перекристаллизации при метаморфических процессах, т. е. с позиций диагенеза эти связи являются первичными. У осадочных пород кристаллические связи возникают на последующих стадиях развития в результате химических, физических, биохимических и других процессов. Поэтому в осадочных породах кристаллизационные связи являются, по классификации Н. Я. Денисова, вторичными.

По предложению автора [3], в мерзлых грунтах выделяется третий вид сцепления — льдоцементационное, обусловленное цементирующей связью между кристаллами льда и минеральными частицами, причем эта связь осуществляется через пленку незамерзшей воды. Сцепление цементации льдом зависит от температуры грунта и устраняется при его оттаивании.

Классификация грунтов по характеру их структурных связей. М. М. Горькова (1966), развивая классификацию П. А. Ребиндера, предложила подразделять структуры дисперсных грунтов в зависимости от степени их агрегированности, т. е. соотношения содержания частиц по данным гранулометрического и микроагрегатного анализов, поскольку именно этот показатель определяет характер взаимодействия частиц.

Стабилизационные структуры с частицами менее 1 мкм имеют коэффициент агрегированности, равный 1. Эти структуры образуются у тонкодисперсных пород при наличии на поверхности частиц гидрофильных стабилизаторов, препятствующих слипанию частиц. Наличие стабилизаторов приводит к увеличению адсорбционного слоя воды вокруг частиц и соответственно снижает прочность грунта. Стабилизационные структуры характерны для осадочных пород, образующихся в щелочной среде.

Коагуляционные структуры с частицами менее 2 мкм имеют коэффициент агрегированности, равный 4,5—5, и для частиц менее 5 мкм равный 1. Эти структуры характерны для пород, содержащих небольшое (до 1,5%) количество электролита, что приводит к структурной коагуляции и образованию структурного каркаса. Межчастичные связи у коагуляционной структуры значительно выше, чем у стабилизационной.

Пластифицированно-коагуляционные структуры характеризуются значением коэффициента коагуляции, не превышающим 3 для частиц менее 1 мкм, и коэффициентом 2 для частиц менее 5 мкм. Эти структуры образуются также в условиях коагуляционного структурообразования, но в присутствии пластифицирующих органических соединений (более 0,7%), в особенности карбонатов кальция (до 50%). Концентрация электролитов колеблется в широких пределах—от 0,3 до 10%.

Смешанные коагуляционно-кристаллизационные или коагуляционно-конденсационные структуры характеризуются значением коэффициента агрегированности от 6 до 38 для частиц менее 1 мкм и от 2 до 30—для частиц менее 5 мкм. Эти структуры имеют коагуляционно-цементные связи, обусловленные, как уже отмечалось, помимо межчастичных еще и внутримолекулярными силами химической природы. Подобные связи, отличающиеся большой прочностью, хрупкостью и водостойкостью, возникают при цементации пород аморфным кремнеземом, окислами железа и др.

§ 2.7. ТЕКСТУРА ГРУНТА

Взаиморасположение частиц. Глинистые частицы могут контактировать друг с другом самым различным способом—грань с гранью, грань с плоскостью и двумя плоскостями (рис. 2.5). В первом случае взаимодействуют поверхности с одноименными, положительными зарядами, во втором—с разноименными, в третьем—с одноименными отрицательными. Характер взаимодействия частиц в свежевыпавших осадках зависит от условия осаждения. Частицы коллоидных размеров, у которых собственный вес очень мал, под воздействием отталкивающих сил могут находиться долго во взвешенном состоянии, образуя рассеянную (диспергированную) систему с параллельным расположением частиц типа изображенного на рис. 2.6, а.

Если же вес частиц не настолько мал, чтобы они удерживались во взвешенном состоянии, то при падении частицы будут контактировать друг с другом, образуя систему (рис. 2.6, б) вида карточного домика (термин введен Розенквистом).

При оседании глинистых частиц достаточно большого размера (более 0,25 мкм) в спокойном водоеме образуется система, называемая (по М. М. Филатову) простой ячеистой. Присутствие в воде солей уменьшает величину отталкивающих сил и вызывает флокуляцию, т. е. укрупняет частицы под воздействием сил притяжения (хлопьеобразование). В отличие от коагуляции флокуляция возникает не в результате изменения двойного электрического слоя ионов на поверхности частиц, а вследствие слабой молекулярной связи частиц с жидкостью. Соответственно свежевыпавшие отложения в морской воде образуют хлопьевидную систему.

При оседании частиц большого размера (ил, пыль), когда вес частиц оказывается больше межчастичных сил, частицы не связываются и образуется зернистая система (рис. 2.6, д).

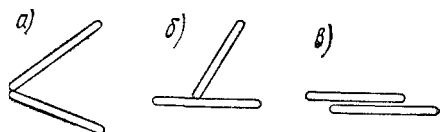


Рис. 2.5. Схемы контактов между частицами:

а — грань с гранью; б — грань с плоскостью;
в — плоскость с плоскостью

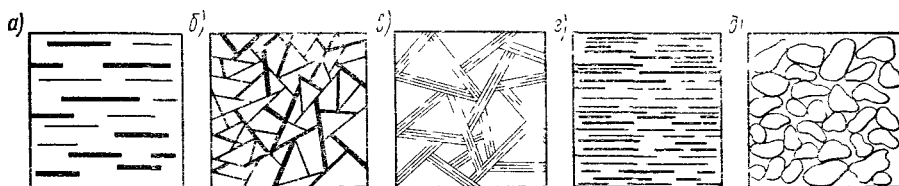


Рис. 2.6. Система взаимного расположения частиц:

а — рассеянная; б — флокуляционная («карточный домик»); в — агрегатно-флокуляционная («книжный домик»), г — плотная упорядоченная упаковка, д — зернистая

Схемы взаиморасположения частиц, изображенные на рис. 2.6, а, б, имеют скорее гипотетическое значение — во всяком случае для реальных грунтов они могут быть применены только к взвешенным, свежевыпавшим осадкам и суспензиям. Для подавляющего же большинства нормально уплотненных глинистых грунтов характерно агрегирование частиц. Поэтому правильнее говорить не о системе вида «карточный домик», а о системе вида «книжный домик» (рис. 2.6, в), так как контактируют между собой не отдельные частицы, а их агрегаты.

Формирование текстуры. Для свежевыпавших осадков в большинстве случаев характерна неупорядоченная микротекстура. Упорядоченная же текстура в естественных условиях является, как правило, вторичной. Образуется она из систем с беспорядочной

ориентацией под воздействием уплотняющего давления от все возрастающего собственного веса осадков.

Под воздействием этого давления происходит параллельная переупаковка частиц, если исходная структура была неупорядоченной, и более плотная упаковка частиц в том случае, когда исходная их ориентация была параллельной. Текстура образуется также в результате длительных сдвиговых деформаций грунта.

Микротекстура. Рассмотренные выше системы относятся к ультрамикротекстуре (кроме, конечно, схемы рис. 2.6, д), характеризую взаиморасположение отдельных глинисто-коллоидных частиц и их ультрамикрoагрегатов.

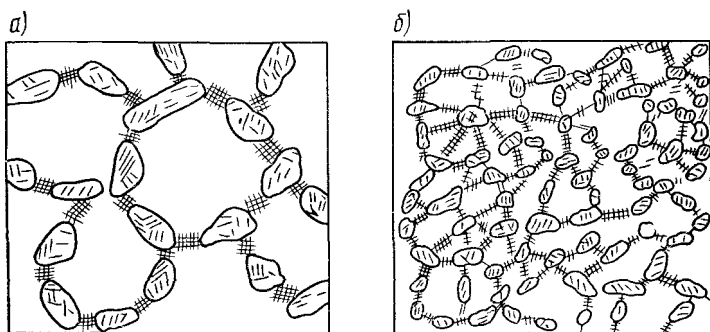


Рис. 2.7. Агрегированная хлопьевидно-ячеистая система глинистых грунтов:

а — морские отложения; б — пресноводные отложения

Но, как подчеркивалось, реальные глинистые грунты состоят из агрегатов и блоков различных размеров, между которыми находится глинистая масса. Поэтому в качестве структурных элементов ячеистой и хлопьевидной систем правильнее рассматривать не отдельные частицы, а их агрегаты, связанные между собой глинистой массой. Такие системы для морских и пресноводных отложений изображены на рис. 2.7. Морские отложения характеризуются более крупными агрегатами и крупными порами. Пресноводные отложения благодаря большим силам притяжения имеют сетку значительно меньших размеров.

Мезотекстура. При оценке мезотекстуры следует учитывать взаиморасположение как самих частиц, так и их агрегатов и блоков. Здесь возможны самые различные сочетания, к числу которых У. М. Райтбурд, А. М. Царева и В. В. Пономарев (1968) относят, например, следующие текстуры:

беспорядочную, если более 90% частиц и агрегатов расположены хаотически;

беспорядочную с элементами упорядоченности, когда в основной массе частиц и агрегатов 10—20% их имеет упорядоченную (аксиальную) ориентацию;

упорядоченную, когда более 90% частиц и агрегатов имеет аксиальную ориентацию;

послойно-упорядоченную, если грунт состоит из слоев, степень ориентации и угол отклонения в котором могут различаться.

Переориентация частиц при деформировании. Изменение первичной ориентации глинистых частиц происходит в результате деформирования грунта как в естественных, так и в лабораторных условиях.

Одни из первых исследований процесса переориентации глинистых частиц были проведены М. М. Филатовым в 1936 г., И. В. Поповым в 1944—1949 г., изучавшими оптическим методом изменения микротекстуры глин при сжатии, и Г. И. Тер-Степаняном, изучавшим в 1936 г. изменения микротекстуры при сдвиге.

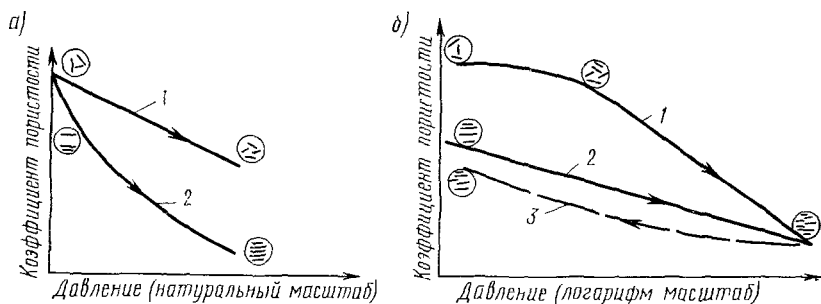


Рис 2.8 Изменение структуры грунта в процессе уплотнения

а — при низком и б — высоком давлении, 1 — образец с влажностью меньше оптимальной или образец с ненарушенной структурой, 2 — образец с влажностью выше оптимальной или образец из перемятой глины, 3 — кривая разгрузки для обоих образцов

В последующем исследованиями изменений микротекстуры глинистых грунтов при различных видах деформирования занимался ряд ученых как в СССР, так и за рубежом. К числу этих исследований следует отнести работы Г. К. Бондарика, Г. М. Березкиной, А. М. Царевой, С. С. Вялова, Р. В. Максимьяк и др., изложенные в сборниках «Современные методы изучения физико-механических свойств горных пород» (1968), «Вопросы инженерной геологии» (1970) и др. Из зарубежных исследований можно отметить работы А. Скемптона, Н. Моргенштерна и Дж. Чаленко и др.

Переориентация частиц при уплотнении грунта. Изменение текстуры глинистого грунта при уплотнении наглядно иллюстрируется по Т. Лэмбу схемой рис. 2.8.

Кривые 1 соответствуют искусственно приготовленным образцам, влажность которых была ниже оптимальной, и образцам ненарушенной структуры. Исходная структура этих образцов — резко неупорядоченная. Кривые 2 соответствуют искусственно приготовленным образцам, влажность которых была выше оптимальной, и образцам из перемятого грунта; исходная структура таких образ-

цов приближается к упорядоченной, с параллельной укладкой частиц.

При уплотнении под сравнительно небольшими нагрузками (рис. 2.8, а) в образцах типа 1 происходит частичная переориентация, однако полная параллельная упаковка частиц еще не достигается. В образцах типа 2, имеющих исходную ориентированную структуру, под воздействием нагрузки параллельно расположенные частицы укладываются более плотно. В случае воздействия боль-

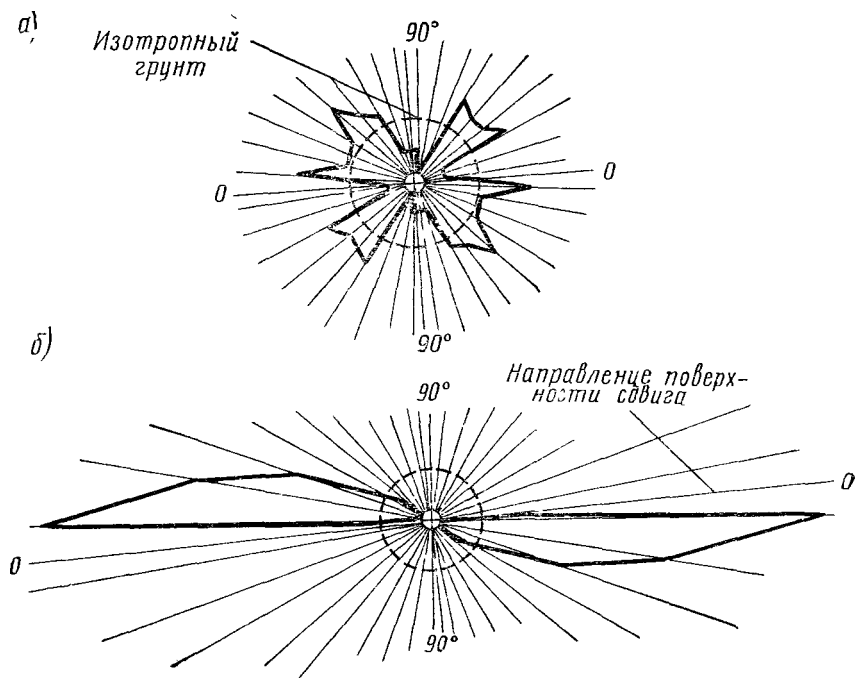


Рис. 2.9. Переориентация частиц глинистого грунта в результате деформации сдвига:

а — круговая диаграмма ориентировки частиц до сдвига; б — то же, после сдвига (данные А. Я. Туровской)

ших уплотняющих нагрузок указанные процессы происходят с большей интенсивностью. В частности, хаотическая структура в образцах типа 1 переходит полностью в ориентированную, так что при некотором значении давления разница в сложении образцов разных типов исчезает, — в обоих случаях частицы укладываются строго параллельно. Эта укладка почти не нарушается при разгрузке, лишь несколько увеличивается расстояние между частицами. Последнее означает, что процесс переориентации является необратимым.

Переориентация частиц в процессе сдвига грунта. В еще большей степени структура упорядочивается при

воздействию на грунт сдвигающих усилий. В этом случае частицы грунта ориентируются базисными плоскостями параллельно направлению сдвига.

Пример переориентации частиц показан на рис. 2.9, на котором изображены полученные М. Н. Гольдштейном и А. Я. Туровской (1964) круговые диаграммы ориентировки частиц каолиновой глины до и после испытания на сдвиг. Вытянутость диаграммы в направлении сдвига свидетельствует о том, что после деформирования частицы оказываются ориентированными в этом направлении.

Аналогичные изменения текстуры происходят в естественных условиях (в частности, в оползнях). Так, А. У. Скемpton в 1964 г. писал, что согласно микроструктурным исследованиям образцов глины из оползневой зоны плоскость естественного скольжения оползня

«состоит из непрерывных лент, внутри которых глинистые частицы... сильно ориентированы в направлении сдвига». Такие же данные получены и другими исследователями.

Переориентация частиц в зависимости от вида напряженного состояния грунтов. Обобщим результаты исследований, перечисленных выше. При деформировании грунта происходит перестройка его структуры и текстуры, заключающаяся в перекомпоновке частиц и в изменении их ориентации. Если в начале деформации частицы ориентированы хаотично или эта ориентация упорядочена, но не совпадает с направлением действия внешних сил, то в результате деформирования грунта частицы стремятся принять упорядоченное положение, что отвечает минимуму свободной энергии.

Такое изменение ориентации частиц происходит при любом виде деформирования (кроме равномерного всестороннего сжатия), но направление ориентации зависит от вида напряженного состояния (рис. 2.10). Так, при сжатии без возможности бокового расширения (компрессия) частицы ориентируются базисными плоскостями перпендикулярно действию нормального уплотняющего усилия. Переориентация начинается даже при сравнительно небольших нагрузках, а с их возрастанием степень ее увеличивается. При сдвиге частицы ориентируются параллельно направлению сдвига.

При одноосном сжатии (с возможностью бокового расширения) частицы вначале укладываются базисными плоскостями перпендикулярно действию силы, а затем по мере возрастания нагрузки и развития деформаций сдвига частицы поворачиваются в зоне сдвига в направлении действия максимальных касательных напряжений.

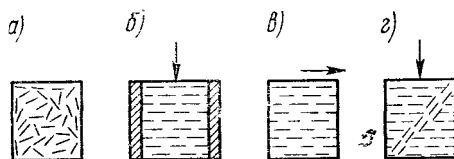


Рис. 2.10. Переориентация частиц грунта в зависимости от вида напряженного состояния:

a — исходное состояние; *б* — компрессия; *в* — сдвиг; *г* — одноосное сжатие

§ 2.8. АНИЗОТРОПИЯ ГРУНТА

Анизотропия механических свойств грунта. Упорядоченная структура грунтов с параллельной ориентацией частиц обуславливает анизотропию механических свойств грунтов — различие в сопротивлении деформированию и разрушению по отношению к осям координат. Следует различать деформационную и прочностную анизотропию. Деформационная анизотропия проявляется при всякой упорядоченности текстуры, будь эта упорядоченность общей или внутриагрегатной. Вопрос же об анизотропии прочности сложнее.

Опытами ряда исследователей показано, что прочность ориентированной глины при сдвиге параллельно слоистости будет меньше, чем при сдвиге перпендикулярно базальным поверхностям частиц. Так, по данным А. К. Ларионова (1968), для параллельно-слоистой торфяной глины (монтмориллоново-гидрослюдистого состава) предел длительной прочности в первом случае составил $7 \cdot 10^5$ Па (7 кГ/см²), а во втором — 10^6 Па (10 кГ/см²). По данным Моргенштерна и Чаленко (1967), сопротивление сдвигу каолиновой пасты с упорядоченной текстурой также оказалось меньше на 20% в том случае, когда сдвигающая сила действовала параллельно слоистости.

В то же время имеются и другие данные. Так, Л. Барден (1972) считает, что, хотя грунты с упорядоченной текстурой деформируются анизотропически, прочность их в зависимости от структуры может быть как анизотропической, так и изотропической. По мнению этого автора, глинистые грунты разрушаются вследствие ослабления сил притяжения между макроагрегатами и блоками, слагающими грунт. Следовательно, анизотропия прочности может быть только в тех случаях, когда макротекстура грунта упорядочена. Если же взаимное расположение блоков не упорядочено, грунт будет обладать изотропической прочностью даже при упорядоченности микротекстуры самих блоков. Так, в опытах с каолином, имеющим упорядоченную текстуру, были получены значения сцепления и трения, не зависящие от направления действия силы, тогда как деформации были анизотропическими.

Влияние ориентации частиц. Большинство исследователей (М. Н. Гольдштейн, А. К. Ларионов, Тан Тьенг-Ки, Лэмб, Скемптон и др.) считают, что грунты с ориентированной текстурой обладают меньшим сопротивлением сдвигу вдоль направления ориентации, поскольку в этом случае между двумя параллельными частицами действуют кулоновы силы отталкивания, тогда как при неупорядоченной текстуре при контактах с разноименными зарядами возникают силы притяжения. Считают также, что при параллельной укладке частиц увеличивается толщина пленки связанной воды, оказывающей расклинивающее действие на частицы.

Некоторые авторы стоят, однако, на противоположных позициях, высказывая предположение, что параллельная укладка частиц повышает прочность грунта, поскольку в этом случае увеличивается

площадь и число контактов между частицами. Такие результаты были получены, в частности, В. С. Шибаковой в МГУ (1972) на основании испытаний на сдвиг (на срезном приборе) искусственно приготовленных образцов каолина ($W=47\%$) и монтмориллонита ($W=86\%$) с хаотической и упорядоченной текстурой; в последнем случае грунт сдвигался в направлении ориентации частиц. Полученные значения сцепления c и угла внутреннего трения φ приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Результаты испытания на сдвиг глинистых паст ориентированной и неориентированной структуры

Грунт	Ориентированная структура		Неориентированная структура	
	$c, 10^5 \text{ Па}$	φ	$c, 10^5 \text{ Па}$	φ
Каолин	0,01	9	0,005	7,2
Монтмориллонит	0,09	7,4	0,20	2,7

Как видно из этой таблицы, у обоих грунтов угол трения φ оказался выше для ориентированной текстуры. Сцепление у монтмориллонита с такой текстурой оказалось меньше, чем с неориентированной; у каолина же в обоих случаях сцепление близко к нулю.

Испытания на сдвиг образцов иольдиевых глин ненарушенного сложения с различной текстурой дали следующие значения сопротивления сдвигу:

у грунта с блочно ориентированной текстурой ($W=72,5\%$) $\tau=0,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$;

у грунта с ориентированной текстурой ($W=93,5\%$) $\tau=0,22 \times 10^5 \text{ Па}$;

у грунта с хаотической текстурой ($W=94\%$) $\tau=0,17 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Таким образом, и в этом случае прочность глинистого грунта с ориентированной текстурой оказалась выше, чем грунта, текстура которого неориентированная.

Вместе с тем при сопоставлении прочности грунтов той и другой текстур следует помнить, что параллельная укладка частиц повышает плотность грунта, что сказывается и на его прочности. При этом если расстояние между параллельно расположенными частицами станет достаточно малым, то преобладать будут силы притяжения, которые могут в этом случае оказаться больше сил взаимодействия хаотически ориентированных частиц. Отсюда можно сделать предположение, что в рассматриваемых примерах дело, возможно, не в различии ориентации частиц, а в различии плотности грунта.

Различие в сопротивлении грунта сжатию и растяжению. Одной из основных особенностей грунтов является их различие в сопротивлении сжатию и растяжению, что сказывается как на прочностных, так и на деформационных свойствах грунтов; в дальней-

шем будет показано, что это существенно влияет на напряженно-деформированное состояние грунтового массива.

Природа указанной особенности состоит в следующем. Водно-коллоидные связи между частицами дисперсного грунта в значительно меньшей степени сопротивляются отрыву, чем сжатию: в последнем случае уменьшается толщина водных пленок, увеличивается количество контактов и возникают наиболее прочные «сухие» контакты, что влечет за собой включение в работу скелета грунта.

Все это повышает прочность грунта на сжатие и затрудняет его деформирование при данном виде нагружения.

На рис. 2.11 приведены данные испытаний на одноосное сжатие и растяжение искусственных образцов суглинка и глины различной влажности, проведенных в 1973 г. в Уральском политехническом институте В. В. Лушниковым и др. На графике показано соотношение модулей сжатия $E_{сж}$ и растяжения $E_{раст}$ при различной влажности.

Как видно, рассматриваемое отношение у суглинка больше, чем у глины, достигая в первом случае $E_{сж}/E_{раст}=4$, а во втором — 3. Это и понятно, поскольку

у суглинка межчастичные силы взаимодействия и соответственно сопротивление разрыву связей значительно меньше, чем у глины.

Очевидно, что с уменьшением связности различие в значениях модулей $E_{сж}$ и $E_{раст}$ будет возрастать; для несвязных, сыпучих грунтов соотношение $E_{сж}/E_{раст}$ достигнет бесконечности (поскольку у таких грунтов $E_{раст} \approx 0$).

Другой особенностью графика является увеличение отношения $E_{сж}/E_{раст}$ с повышением влажности грунта. Это тоже логично, так как с увеличением влажности возрастает толщина водных пленок и резко уменьшается сопротивление разрыву межчастичных связей. В пределе для суспензий $E_{сж}/E_{раст}$ также стремится к бесконечности, поскольку в этом случае $E_{раст} = 0$.

Отметим, что в данных опытах имеются различия не только в значениях модулей деформаций, но и в значениях предела пропорциональности: при сжатии он составлял $1,5—2,5 \cdot 10^5$ Па, а при растяжении — всего $0,2—0,5 \cdot 10^5$ Па, т. е. в первом случае был в 7,5 раза больше.

У кристаллических пород прочностные и деформационные свойства тоже различны при сжатии и растяжении, что объясняется наличием в этих породах микро- и макротрещин и других дефектов структуры.

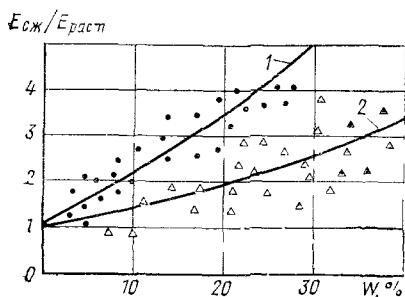


Рис. 2.11. Соотношение модулей деформаций при сжатии $E_{сж}$ и растяжении $E_{раст}$ в зависимости от влажности грунта:

1 — суглинок; 2 — глина (данные В. В. Лушников и др.)

ГЛАВА 3

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

§ 3.1. НАПРЯЖЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ В ТОЧКЕ

Грунт как сплошная среда. Конечной целью механики сплошной среды является математическое описание движения деформируемых тел.

Под понятием «сплошная среда» подразумевают модель такого материального тела (твердого, жидкого или газообразного), которое хотя и состоит из отдельных частиц — атомов, молекул, но заполняет часть пространства непрерывным (сплошным) образом. Непрерывность строения такого идеализированного тела сохраняется в процессе деформирования.

Гипотеза о непрерывности (континууме) материального тела позволяет, рассматривая напряжение и деформацию бесконечно малых объемов и используя аппарат дифференциального исчисления, переходить к изучению напряженно-деформированного состояния всего тела.

Грунт, по существу, является не сплошной, а дискретной средой, поскольку он представляет собой сочетание отдельных частиц, между которыми имеются свободные пространства, заполненные воздухом или водой. Поэтому реальной моделью грунта будет модель, статистически описывающая взаимодействие отдельных частиц с учетом физического вида связей между ними.

Попытки построения подобной модели грунта предпринимались некоторыми исследователями, например И. И. Кандауровым («Механика зернистых сред и ее применение в строительстве», 1966), Р. А. Мулером («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1962, № 4), которые рассматривали закономерность распределения напряжений в дискретной сыпучей среде, исходя из статистического анализа силового взаимодействия контактирующих и взаимопроникающих частиц.

Широкую известность получила модель Р. Роу (опубликованная в журнале «Proc. Roy. Soc», A269, 1962), описывающая деформирование среды, состоящей из шаров, на контакте между которыми действуют силы трения. Аналогичные и иные модели дискретной среды были предложены рядом других авторов. Однако создание новой, достаточно общей теории деформирования грунтов является делом будущего.

В настоящее время для описания закономерностей напряженно-деформированного состояния грунтов с успехом пользуются положениями механики сплошной среды. Применимость этих положений объясняется тем, что размеры структурных элементов грунта во много раз меньше самого малого из рассматриваемых грунтовых объемов.

Следует иметь в виду, что механика сплошной среды не рассматривает происходящие в реальных телах микропроцессы и не учитывает особенностей строения тела — эти вопросы относятся к задачам физической теории. Если же на основании рассмотрения микропроцессов будет установлена связь между напряжением и деформацией, то можно перейти к описанию макропроцессов, применяя положения механики сплошной среды.

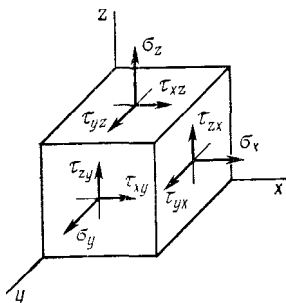


Рис. 3.1. Компоненты напряжения

В настоящей главе приведены основные формулы теории напряжений и деформаций сплошной среды; при этом особое внимание уделено сведениям, необходимым для рассмотрения в последующих главах вопросов сложного напряженно-деформированного состояния грунта.

Компоненты напряжений и деформаций. Напряженно-деформированное состояние среды в данной точке вполне определяется девятью компонентами напряжений и девятью компонентами деформаций на трех взаимно перпендикулярных площадках. Компонентами напряжений являются (рис. 3.1) три нормальных напряжения σ_x , σ_y , σ_z и три пары взаимно равных касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Компонентами деформаций служат три линейные деформации (относительные удлинения) ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z и три пары взаимно равных угловых деформаций (относительных сдвигов) $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Приведенные обозначения приняты в технической литературе. В механике сплошных сред более употребимы обозначения σ_{ij} и ϵ_{ij} , где $i, j = x, y, z$ или 1, 2, 3. Одинаковые значения индексов $i = j$ соответствуют нормальным напряжениям и деформациям, а различные значения $i \neq j$ — касательным напряжениям и деформациям. Соответственно вместо σ_x , σ_y , σ_z и ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z получим σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} и ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} или σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} и ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , а вместо τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} и γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} получим σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} и ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx} или σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} и ϵ_{12} , ϵ_{23} , ϵ_{31} . Хотя подобная запись более компактна, мы будем пользоваться привычными для инженеров обозначениями, принятыми в учебных пособиях для строительных вузов.

На рис. 3.2 показано деформированное состояние элементарного объема $dxdydz$, вызванное воздействием нормальных и касательных напряжений. Линейные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z характеризуют относительные удлинения ребер элементарного параллелепипеда. В механике грунтов обычно положительными линейными деформациями считаются укорочения, отрицательными — удлинения.

Относительные сдвиги $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ характеризуют изменение углов между гранями параллелепипеда. Считается, что положительному сдвигу соответствует уменьшение угла между положительным направлением осей, а отрицательному — его увеличение.

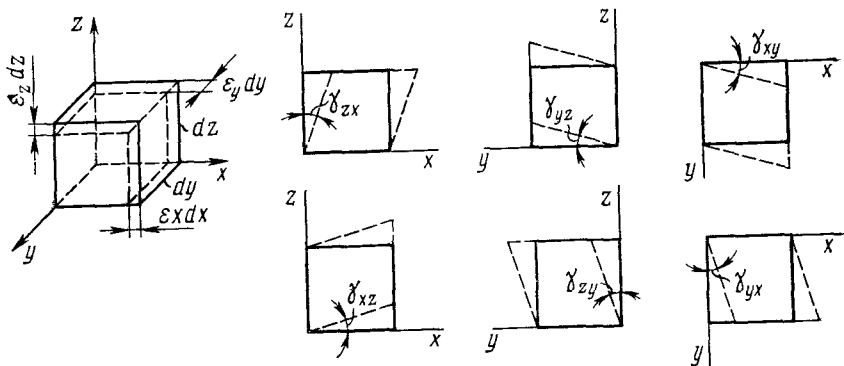


Рис. 3.2. Компоненты деформаций

Главные напряжения и главные деформации. Рассмотрим напряженное состояние в точке элементарного параллелепипеда, считая, что нам известны все девять компонентов напряжений, действующих по его граням.

Проведем через данную точку косую площадку с нормалью ν , произвольно наклоненную к граням параллелепипеда (рис. 3.3). Направляющие косинусов углов между нормалью ν и осями координат x , y и z обозначим $\cos(x, \nu) = l$, $\cos(y, \nu) = m$, $\cos(z, \nu) = n$, причем $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

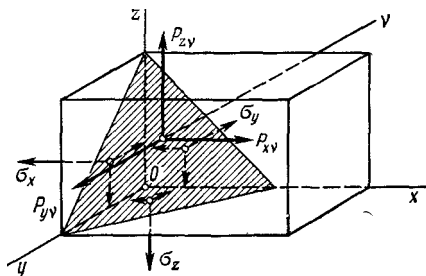


Рис. 3.3. Напряжения в данной точке

Рассматривая уравнение равновесия тетраэдра, получим значения составляющих напряжения на наклонной площадке:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полное напряжение, действующее на наклонной площадке, определится из выражения

$$p_\nu^2 = p_{x\nu}^2 + p_{y\nu}^2 + p_{z\nu}^2. \quad (3.1')$$

Разложив вектор полного напряжения на составляющие по нормали к площадке и по касательной к ней, можно вычислить нор-

мальные и касательные напряжения, действующие на рассматриваемой площадке. Нормальное напряжение будет равно

$$\sigma_v = p_x l + p_y m + p_z n,$$

или

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl. \quad (3.2)$$

Касательное напряжение определится из выражения

$$\sigma_v^2 + \tau_v^2 = p_v^2. \quad (3.3)$$

Очевидно, что из множества возможных положений произвольно проведенной площадки можно выбрать такое, при котором касательное напряжение было $\tau_v = 0$, а нормальное совпало по величине и направлению с полным напряжением $\sigma_v = p_v$. Через каждую точку можно провести по крайней мере три таких взаимно перпендикулярных площадки; их называют главными площадками, а оси этих площадок 1, 2, 3 — главными осями.

Соответственно нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называют главными нормальными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 , а линейные деформации на аналогичных площадках называются главными линейными деформациями ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 . Главные напряжения имеют наибольшее и наименьшее значения из всех значений напряжений в данной точке; обычно обозначение осей принимают такое, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Через любую точку можно также провести три таких площадки, на которых достигают наибольших значений не нормальные, а касательные напряжения. Эти напряжения называют главными касательными напряжениями:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.4)$$

Угловые деформации на подобных площадках (главные сдвиги) будут равны:

$$\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3; \quad \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1; \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (3.5)$$

Круги Мора. Очевидно, что при поворотах площадки значения нормальных и касательных напряжений будут меняться в зависимости от угла между нормалью n к площадке и главными осями 1, 2, 3. Эти значения в соответствии с выражениями (3.2) и (3.3) и при $n = v$ будут иметь следующий вид:

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \quad \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2,$$

где $l = \cos(1, n)$, $m = \cos(2, n)$, $n = \cos(3, n)$.

Принимая последовательно значения $\cos(1, n)$, $\cos(2, n)$ и $\cos(3, n)$ постоянными, можно построить три круга напряжений с центрами в точках $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$, $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ и радиусами $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$, $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ и $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Эти три круга (рис. 3.4) являются кругами Мора для пространственного напряженного состояния. Точки площадки, заключенной между большим и двумя маленькими кругами, определяют значения σ_n и τ_n при любом положении рассматриваемой площадки. Аналогичные круги можно построить для деформаций.

Напряжения и деформации на октаэдрической площадке. Площадку, проводимую через данную точку, можно расположить так, чтобы она была равно наклонена ко всем трем главным по напряжениям плоскостям (рис. 3.5). Такую площадку, обладающую некоторыми особыми свойствами, называют октаэдрической.

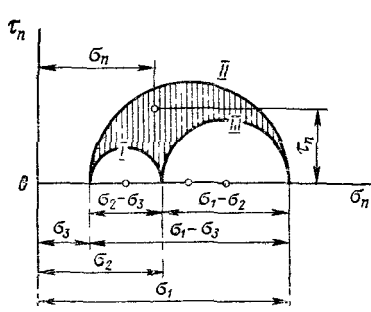


Рис. 3.4. Круги Мора

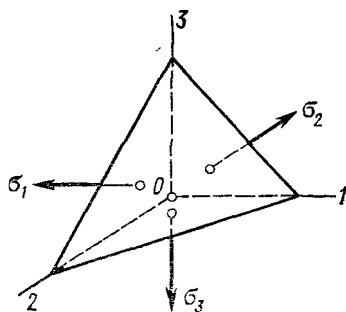


Рис. 3.5. Октаэдрическая площадка

Поскольку направляющие косинусы на октаэдрической площадке будут равны между собой ($l=m=n=1/\sqrt{3}$), то согласно формуле (3.1') полное напряжение на этой площадке будет равно

$$p_v^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (3.6)$$

Нормальное же и касательное напряжения в соответствии с формулами (3.2) и (3.3) будут равны:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \sqrt{p_v^2 + \sigma_{\text{окт}}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если компоненты напряжений отнести к системе x, y, z координат, то выражения (3.7) и (3.8) примут вид

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad (3.7')$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3.8')$$

Обычно $\sigma_{\text{окт}}$ называют октаэдрическим нормальным напряжением, а $\tau_{\text{окт}}$ — октаэдрическим касательным напряжением.

Через данную точку в теле можно провести площадку, которая будет равно наклонена ко всем трем плоскостям, главным по деформациям. В классической механике принимается, что эта площадка совпадает с октаэдрической площадкой по напряжениям; возможные отклонения от этого положения будут рассмотрены в последующем. Относительное удлинение, нормальное к октаэдрической площадке (октаэдрическое удлинение), будет равно

$$\varepsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad (3.9)$$

а угловая деформация на этой площадке, т. е. октаэдрическая угловая деформация, определится выражением

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{окт}} &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

§ 3.2. ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ И ОБЪЕМА

Изменение объема. Если к элементарному параллелепипеду приложить три взаимно равных сжимающих напряжения, то параллелепипед будет находиться в условиях всестороннего или гидростатического сжатия:

$$p = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z. \quad (3.11)$$

Касательные же напряжения в любой точке параллелепипеда будут равны нулю.

Приложенные нормальные напряжения вызовут относительные удлинения (укорочения) граней параллелепипеда $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$. Если первоначальный размер каждой из граней параллелепипеда принять равным единице (объем $V = 1 \times 1 \times 1$), то относительное изменение объема такого кубика будет равно

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = 1 - (1 - \varepsilon_x)(1 - \varepsilon_y)(1 - \varepsilon_z).$$

При удлинениях, которыми по сравнению с единицей можно пренебречь, приведенное выражение после его развертывания и отбрасывания малых второго и третьего порядков примет вид

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.12)$$

Таким образом, три взаимно равных относительных удлинения (укорочения), обусловленных воздействием всестороннего давления, вызывают объемную деформацию ε_V параллелепипеда, не изменяя его формы.

Изменение формы. Рассмотрим теперь действие касательных напряжений и вызываемых ими угловых деформаций. При углах сдвига, малых по сравнению с единицей, можно считать, что ребра параллелепипеда не получают удлинений и его деформация заключается только в скашивании и повороте. Такую деформацию, вызываемую действием пары взаимно равных касательных напряжений $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, называют простым сдвигом.

Если обозначить через α угол скашивания параллелепипеда под действием напряжения τ_{xy} , а через u — смещение вдоль оси (рис. 3.6, а), то угловая деформация может быть выражена как градиент смещения $\gamma_{yx} = \tan \alpha = (du/dy)$.

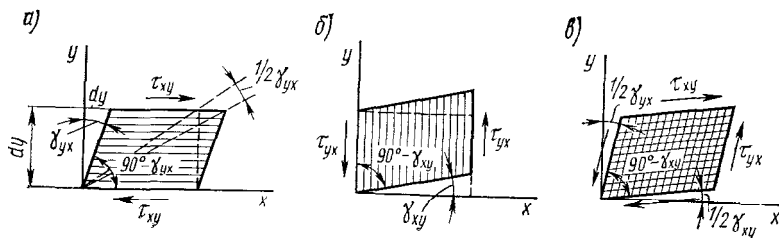


Рис. 3.6. Простой сдвиг (а, б) и его наложение (в), приводящее к чистому сдвигу

Поскольку эту величину рассматривают как бесконечно малую, можно считать $\gamma_{yx} \approx \alpha$. Отметим, что одновременно со скашиванием параллелепипеда получит вращение на угол $\gamma_{yx}/2$. Очевидно, что аналогичная угловая деформация произойдет под воздействием напряжения τ_{yx} (рис. 3.6, б).

Если наложить два простых сдвига с одинаковыми углами поворота $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ смежных ребер, то произойдет чистый сдвиг, т. е. изменится форма параллелепипеда без изменения объема и без поворота вокруг осей (рис. 3.6, в).

Чистый сдвиг можно также получить при приложении к параллелепипеду двух равных, но взаимно противоположных по знаку напряжений: $\sigma_1 = -\sigma_3$.

Таким образом, деформация тела заключается в изменении формы, вызванном воздействием касательных напряжений, и в изменении объема под воздействием всестороннего давления.

Такое подразделение деформаций имеет важное значение при анализе закономерностей деформирования, поскольку эти виды деформаций могут описываться разными законами. Так, и у упругих и у вязких тел объемная деформация прямо пропорциональна всестороннему давлению. Сопротивление же формоизменению у этих тел резко различно. У упругих тел их форма изменяется прямо пропорционально напряжению сдвига, вязкие же тела вообще не могут сохранять форму и сопротивляться сдвигу.

Деформации и смещения. Допустим, что в результате деформации тела точка M с координатами x, y, z переместилась в положение

ние M_1 , определяемое координатами $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ (рис. 3.7). Проекции полного вектора перемещения $\overrightarrow{MM_1}$, называемые компонентами смещения, обозначим через u_x , u_y , u_z (иногда компоненты смещения обозначают через u , v , w). Тогда полное смещение будет равно $\delta = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$; оно является непрерывной

функцией координат. Этому последнему условию отвечает гипотеза о сплошности строения тела.

Если вокруг точки M вырезать элементарный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, то его деформации можно выразить через смещения следующим образом:

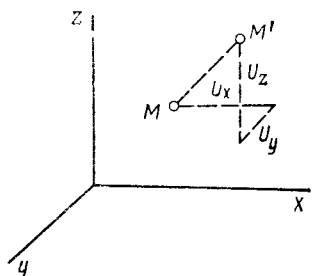


Рис. 3.7. Перемещение точки M деформируемого тела

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\ &\dots \dots \dots \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \right]. \quad (3.13) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В механике сплошной среды обычно рассматривают малые деформации, т. е. деформации, значительно меньшие единицы. В этом случае в формулах (3.13) можно пренебречь членами $\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2$, $\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$ и т. д. Тогда эти формулы примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Соотношения (3.13) и (3.14) соответствуют различным определениям деформации или, как их называют, мерам деформации. Так, соотношения (3.14) получаем, если меру деформации примем как относительное изменение длины ребра параллелепипеда. Относительное удлинение вдоль оси x будет равно

$$\epsilon_x = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\Delta l_0}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0}, \quad (3.15)$$

где $l_0 = dx$ — начальная длина ребра параллелепипеда, а l — его конечная длина.

Обозначив через u_x смещение параллелепипеда вдоль оси x , а через $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ — удлинение (абсолютное) его грани (с точностью до бесконечно малых первого порядка), получим $l = dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$, или $l = dx + du_x$.

Подставив эти значения в выражение (3.15), придем к выражению (3.14). Соотношения (3.14) называют уравнениями Коши, а определение деформаций, согласно выражению (3.15), — мерой деформации Коши. Обычно в механике сплошной среды рассматривают именно такие малые деформации.

Конечные деформации. Уравнения (3.13) называют уравнениями Грина, и им соответствует мера деформации (Грина) в виде

$$\epsilon_x^* = \left(1 - \frac{l}{l_0}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2\right].$$

(3.16)

При отбрасывании малых величин второго порядка это выражение переходит в (3.15).

Выражение (3.13) применяют для определения конечных деформаций, т. е. деформаций, величина которых сопоставима с единицей. Есть и другая, более часто употребляемая мера конечных деформаций — мера Генки.

Рассмотрим малый элемент тела длиной x . Изменение длины элемента будет dx , а относительное удлинение — dx/x . Тогда общая деформация тела будет равна сумме деформаций отдельных элементов

$$\epsilon_x^* = \int_{l_0}^l \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0},$$

(3.17)

где l_0 — начальная, а l — конечная длина всего тела.

Мера Грина и мера Генки. В. В. Новожилов (1951) показал, что для решения задач о конечных деформациях с использованием меры Грина компоненты деформаций определяются непосредственно выражениями (3.13), а компоненты напряжений, соответствующие этим деформациям, следует определять по формулам:

$$\sigma_x^* = \sigma_x \sqrt{\frac{(1 + 2\epsilon_x)(1 + 2\epsilon_z) - \gamma_{yz}^2}{1 + 2\epsilon_x}},$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \sqrt{\frac{(1 + 2\epsilon_y)(1 + 2\epsilon_z) - \gamma_{yz}^2}{1 + 2\epsilon_x}}.$$

(3.18)

Этот вариант хотя безупречен с математической стороны, но модули упругости G (сдвига) и k (объемной деформации), а также коэффициент Пуассона ν теряют свой физический смысл.

При использовании меры Генки напряжения будут иметь свои истинные значения, деформации же принимают в соответствии с выражением (3.17). Тогда упругие характеристики будут иметь вполне определенный физический смысл: $G = \tau_{\text{окт}} / \gamma_{\text{окт}}^*$; $k = \sigma_{\text{окт}} / \varepsilon_{\text{окт}}^*$.

Знак «*» показывает, что деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 , входящие в значения $\gamma_{\text{окт}}^*$ и $\varepsilon_{\text{окт}}^*$, являются конечными, определяемыми формулой (3.17). Значения же $\tau_{\text{окт}}$ и $\sigma_{\text{окт}}$ принимают по формулам (3.7) и (3.8).

Конечную объемную деформацию $\varepsilon_V^* = 3\varepsilon_{\text{окт}}^*$ можно также непосредственно определить выражением, аналогичным (3.17):

$$\varepsilon_V^* = \ln(V/V_0). \quad (3.19)$$

Действительно, рассматривая объемную деформацию кубика с начальной длиной ребер $l_{1(0)} = l_{2(0)} = l_{3(0)} = l_0$, которая после деформирования стала равна $l_1 = l_2 = l_3$, получим

$$\varepsilon_V^* = 3\varepsilon_{\text{окт}}^* = \ln \frac{l_1}{l_{1(0)}} + \ln \frac{l_2}{l_{2(0)}} + \ln \frac{l_3}{l_{3(0)}} = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right)^3 = \ln \frac{V}{V_0}.$$

Возможность суммирования логарифмических деформаций, дающая логарифмы суммарной деформации, является одним из преимуществ меры деформации по Генки.

§ 3.3. ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

Напряжения в точке. В механике сплошной среды широко применяют тензорный анализ, позволяющий записывать соотношения между всеми компонентами напряжений и деформаций в более компактной форме. Отсылая читателей для более подробного ознакомления к специальной литературе, например к книгам [13, 35], здесь приведем только основные понятия тензорного исчисления, которые будут использованы в последующем тексте.

Рассмотрим напряженное состояние в точке. Пусть на площадке ΔF в окрестности этой точки с нормалью ν действует сила ΔP_ν . Тогда напряжение в точке выражается вектором

$$p_\nu = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

Это напряжение можно разложить на три составляющие (параллельные осям координат), которые можно выразить в форме матрицы

$$p_\nu = \| p_{x\nu}, p_{y\nu}, p_{z\nu} \|.$$

Компоненты напряжений будут принимать различные значения при изменении направления ν . Если принять, что это направление

совпадает с направлением оси x , то компонентами напряжения $p_x = p_x$ будут нормальное σ_x и касательные τ_{xy} и τ_{xz} напряжения. Аналогично, $p_y = p_y$ раскладывается на напряжения σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} , а $p_z = p_z$ — на напряжения σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} .

Таким образом, на грани элементарного параллелепипеда с ребрами dx , dy и dz действуют напряжения:

$$\begin{aligned} p_x &= \parallel \sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \parallel, \\ p_y &= \parallel \tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \parallel, \\ p_z &= \parallel \tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z \parallel. \end{aligned}$$

Следовательно, напряженное состояние в точке определяется векторами p_x , p_y , p_z , которые в свою очередь раскладываются каждый на нормальную и две касательных компоненты.

Тензор напряжений. Рассмотренное выше напряженное состояние в точке тела можно охарактеризовать матрицей

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Величину T_σ , записанную в виде такой матрицы, называют тензором напряжений. Эта величина является тензором второго ранга, представляя собой совокупность величин $A_{ij}a_j$, которые обладают тем свойством, что если a — произвольный вектор, то $A_{ij}a_j$ и $A_{ii}a_i$, в свою очередь, являются составляющими вектора.

В матрице (3.20) нормальные напряжения расположены по диагонали, а одинаковые по величине касательные напряжения — симметрично относительно этой диагонали. Соответственно тензор напряжений (3.20) называется симметричным. Если этот тензор отнести к главным осям, то его записывают в виде матрицы

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.20')$$

Тензор деформаций и тензор скорости деформаций. Все предыдущие рассуждения можно повторить для деформаций и их скоростей. Тензор деформаций характеризуется матрицей

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Аналогично выражают тензор скорости деформаций:

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

где $\dot{\epsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{xy}$ — компоненты скоростей деформаций.

Напряженно-деформированное состояние в данной точке вполне определено, если известны тензор напряжений и тензор деформаций или тензор скорости деформаций.

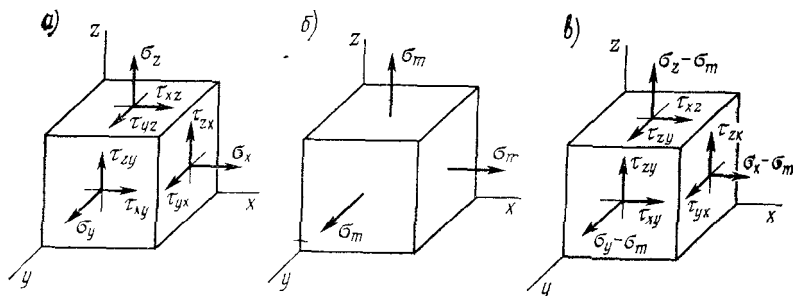


Рис. 3.8. Разложение тензора напряжений (а) на шаровой тензор (б) и девиатор (в)

Разложение тензора напряжений. Напряженное состояние в точке можно представить в виде суммы двух напряженных состояний (рис. 3.8). Первое из них возникает под воздействием трех пар одинаковых нормальных напряжений, равных средним значениям

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (3.23)$$

Величина σ_m , называемая средним нормальным напряжением, равна всестороннему (гидростатическому) давлению $\sigma_m = p$ и вызывает изменение только объема.

Вторая составляющая напряженного состояния вызывается касательными напряжениями $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и разностью между нормальными напряжениями и их средними значениями:

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m; \quad s_y = \sigma_y - \sigma_m; \quad s_z = \sigma_z - \sigma_m. \quad (3.24)$$

Это напряженное состояние может быть выражено также через главные напряжения: $s_1 = \sigma_1 - \sigma_m$; $s_2 = \sigma_2 - \sigma_m$; $s_3 = \sigma_3 - \sigma_m$.

Таким образом, напряжения s_x, s_y, s_z определяют, насколько данное напряженное состояние отклоняется от всестороннего рав-

номерного сжатия (или растяжения). Легко можно увидеть, что

$$s_x + s_y + s_z = s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad (3.25)$$

Это означает, что объемные деформации при втором напряженном состоянии равны нулю и воздействие напряжений s_x, s_y, s_z (или s_1, s_2, s_3) приводит лишь к изменению формы.

Тензор напряжений первого состояния называют шаровым тензором напряжений; его записывают в виде матрицы

$$T_{\sigma}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Тензор напряжений второго состояния, называемый девиатором напряжений, записывают в следующем виде:

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix}. \quad (3.27)$$

Таким образом, разложение напряженного состояния, которое было показано на рис. 3.8, равносильно разложению тензора напряжения на шаровой тензор и девиатор напряжений:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^{(0)} + D_{\sigma}. \quad (3.28)$$

Шаровой тензор напряжения вызывает изменение объема, а девиатор — изменение формы.

Разложение тензора деформаций. Деформированное состояние элемента объема можно также представить в виде суммы двух деформированных состояний. Одно из них вызывается тремя парами одинаковых линейных деформаций со средними значениями

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}. \quad (3.29)$$

Величину ϵ_m называют средней линейной деформацией. Очевидно, что форма элементарного параллелепипеда при воздействии ϵ_m не меняется, а величина ϵ_m характеризует лишь объемную деформацию $\epsilon_m = \epsilon_V/3$.

Второе деформированное состояние определяется угловыми деформациями $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ и разностью линейных деформаций:

$$e_x = \epsilon_x - \epsilon_m; \quad e_y = \epsilon_y - \epsilon_m; \quad e_z = \epsilon_z - \epsilon_m, \quad (3.30)$$

или

$$e_1 = \epsilon_1 - \epsilon_m; \quad e_2 = \epsilon_2 - \epsilon_m; \quad e_3 = \epsilon_3 - \epsilon_m, \quad (3.31)$$

определяющей, насколько данное деформированное состояние отклоняется от всестороннего равномерного сжатия (или растяжения).

Из выражения (3.30) следует, что

$$e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (3.32)$$

и соответственно $\varepsilon_V = 0$. Это значит, что при втором деформированном состоянии объем не изменяется и деформации заключаются лишь в изменении формы.

Описанное выше разложение деформированного состояния равносильно разложению тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор деформаций:

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D. \quad (3.33)$$

Шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций записывают в виде матриц, аналогичных матрицам (3.26) и (3.27). Шаровой тензор деформаций описывает изменение объема, а девиатор деформаций — изменение формы.

Разложение тензора скорости деформаций. Для определения скоростей деформаций можно применить формулы, аналогичные формулам (3.29) — (3.33). Величина

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z}{3} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3}{3} = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_V, \quad (3.34)$$

называемая средней скоростью линейной деформации, характеризует скорость объемной деформации.

Величины $\dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_m$ и т. д. (или $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_m$ и т. д.) и $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx}$ и т. д. определяют скорости деформации формы.

Соответственно тензор скорости деформаций можно разложить на шаровой тензор скорости деформаций и девиатор скорости деформаций:

$$T_\varepsilon^- = T_\varepsilon^{0-} + D_\varepsilon^-. \quad (3.35)$$

Величины T_ε^{0-} и D_ε^- записывают в виде матриц, аналогичных матрицам (3.26) и (3.27).

В приведенных выражениях скорости деформации обозначались символами $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ и т. д. Обычно точка над символом означает дифференцирование во времени и соответственно $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ можно, казалось бы, рассматривать как

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt}, \dots$$

Однако более точно величины $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\gamma}_{xy}, \dots$ следовало бы выражать через компоненты скоростей смещений.

Предположим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt перемещения некоторой точки тела по осям x, y, z возрастут на величины du_x, du_y, du_z . Тогда скорости этих перемещений будут равны:

$$v_x = \dot{u}_x = \frac{du_x}{dt}; \quad v_y = \dot{u}_y = \frac{du_y}{dt}; \quad v_z = \dot{u}_z = \frac{du_z}{dt}. \quad (3.36)$$

Скорости же относительных деформаций в соответствии с (3.14) имеют следующий вид.

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}; \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Подобная запись соответствует мере деформаций по Коши. В случае применения меры деформаций по Грину или Генки следует пользоваться формулами вида (3.13) и (3.17).

Другие обозначения компонентов напряжений и деформаций. Применения тензора напряжений, деформаций и скоростей деформаций в виде матриц, подобных (3.20), (3.21) и (3.22), можно заменить на более компактные записи, которыми часто пользуются в теории пластичности:

$$T_\sigma = \{\sigma_{ij}\}; \quad T_\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}; \quad T_{\dot{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\},$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Величины σ_{ij} , ε_{ij} и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ обозначают общие компоненты тензоров напряжения, деформации и скорости деформаций; отдельные компоненты тензоров получают заменой индексов i, j на 1, 2, 3.

Девидаторы напряжения, деформации и скорости деформации, определяемые по матрицам (3.27) и т. п., записывают при таком обозначении в виде

$$D_\sigma = \{s_{ij}\}; \quad D_\varepsilon = \{e_{ij}\}; \quad D_{\dot{\varepsilon}} = \{\dot{e}_{ij}\},$$

где s_{ij} , e_{ij} и $\dot{e}_{ij}$ — общие компоненты девидаторов напряжения, деформации и скорости деформаций; отдельные компоненты девидаторов получают заменой индексов i, j на 1, 2, 3.

Из равенств (3.28), (3.33) и (3.35) следует, что

$$\sigma_{ij} = 3\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = 3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}; \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = 3\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \dot{e}_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, равный $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а $\sigma_{kk} = \sigma_m/3$, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_m/3$ и $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_m/3$.

Забегая вперед, отметим, что инварианты тензора напряжений (3.39) в подобной записи определяют в виде следующих соотношений:

$$I_1(T) = \sigma_{ii}; \quad I_2(T) = \sigma_{ij}\sigma_{ji}/2; \quad I_3(T) = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}/3.$$

Инварианты девидатора напряжений (3.41) в этом случае будут иметь вид $I_1(D) = 0$; $I_2(D) = s_{ij}s_{ji}/2$; $I_3(D) = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$.

В аналогичной форме можно записать значения инвариантов тензоров и девидаторов деформаций и их скоростей.

§ 3.4. ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Инварианты тензора напряжений. При изучении напряженно-деформированного состояния тела обычно используют не сами тензоры, а их инварианты, т. е. такие комбинации компонентов тензора напряжений и тензора деформаций, которые не меняют своих значений при повороте осей.

Можно показать, что главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T)\sigma^2 - I_2(T)\sigma - I_3(T) \approx 0, \quad (3.38)$$

где I_1, I_2, I_3 — некоторые коэффициенты.

Поскольку главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не зависят от выбора осей координат, то и коэффициенты I_1, I_2, I_3 кубического уравнения также инвариантны. Их называют соответственно первым (линейным), вторым (квадратичным) и третьим (кубическим) инвариантами тензора напряжений и определяют следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m; \\ I_2(T) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1); \\ I_3(T) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (3.39)$$

По аналогии с выражениями (3.39) можно получить три инварианта шарового тензора напряжений:

$$\begin{aligned} I_1(T^0) &= 3\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(T^0) &= -3\sigma_m^2 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \\ I_3(T^0) &= \sigma_m^3 = \frac{1}{27}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3 \end{aligned} \quad (3.40)$$

и три инварианта девиатора напряжений, а именно:

$$\begin{aligned} I_1(D) &= s_1 + s_2 + s_3 = (\sigma_1 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m) \equiv 0; \\ I_2(D) &= -(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \\ I_3(D) &= s_1s_2s_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Величины $I_{1,2,3}(T)$, $I_{1,2,3}(T^0)$ и $I_{1,2,3}(D)$ можно также выразить через составляющие напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}$.

При анализе напряженно-деформированного состояния тела большую роль играют первый инвариант тензора напряжений и второй инвариант девиатора напряжений.

Как следует из выражений (3.39) и (3.40), первый инвариант тензора напряжений идентичен первому инварианту шарового

тензора напряжений и оба они тождественно равны утроенному значению среднего нормального напряжения:

$$I_1(T) = I_1(T^0) = 3\sigma_m.$$

В свою очередь, среднее нормальное напряжение идентично октаэдрическому нормальному напряжению: $\sigma_m = \sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Величину σ_m обычно и используют при анализе.

Что касается второго инварианта девиатора напряжений $I_2(D)$, то более удобно пользоваться не самим этим инвариантом, а некоторой величиной, пропорциональной корню квадратному из него и являющейся, таким образом, тоже инвариантной величиной; эту величину называют интенсивностью напряжений.

Интенсивность напряжений выражают соотношением

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{I_2(D)}, \quad (3.42)$$

называемым интенсивностью нормальных напряжений, или соотношением

$$\tau_i = \sqrt{I_2(D)}, \quad (3.43)$$

которое называют интенсивностью касательных напряжений. (Эту величину часто обозначают также через σ_i .)

Учитывая выражения (3.41), эти соотношения записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Сопоставляя значение $I_2(D)$, определяемое по формуле (3.41), со значением октаэдрического касательного напряжения $\tau_{\text{окт}}$, определяемым выражением (3.8), видим, что

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{I_2(D)}. \quad (3.46)$$

Как следует из выражений (3.42), (3.43) и (3.46), все три величины — интенсивность нормальных напряжений σ_i , интенсивность касательных напряжений τ_i и октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{\text{окт}}$ — с точностью до постоянного множителя равны корню квадратному из второго инварианта девиатора напряжений и раз-

личаются между собой только величиной этого множителя. Сказанное можно представить в виде равенства

$$I = k \sqrt{I_2(D)}, \quad (3.47)$$

где при $k = \sqrt{3}$ $I = \sigma_i$; при $k = 1$ $I = \tau_i$ и при $k = 2/\sqrt{6}$ $I = \tau_{\text{окт}}$.

Рассмотрим далее вопрос о практических преимуществах использования той или иной из перечисленных величин. Можно показать, что октаэдрическое касательное напряжение близко по величине наибольшему касательному напряжению в той же точке, т. е.

$$0,941 \tau_{\text{max}} > \tau_{\text{окт}} > 0,816 \tau_{\text{max}}, \quad (3.48)$$

где $\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

На практике мы редко можем определить, какие из главных напряжений будут иметь наибольшее и наименьшее значения, вследствие чего возможность пользования приведенным выражением ограничена. Поэтому применяют развернутую формулу (3.8)

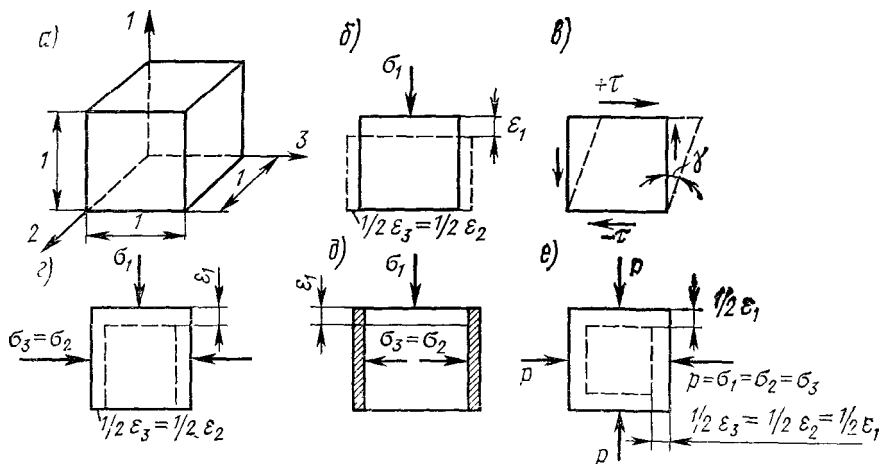


Рис. 3.9. Виды напряженного состояния:

а — обозначение главных осей; б — одноосное сжатие; в — сдвиг; г — трехосное несимметричное сжатие; д — сжатие без возможности бокового расширения (компрессия); е — всестороннее равномерное сжатие

или аналогичные ей формулы (3.44) или (3.45). Последним формулам в технической литературе отдают предпочтение, поскольку значения σ_i и τ_i совпадают с некоторыми видами простейшего напряженного состояния, что представляет определенное практическое удобство. Эти значения иногда называют обобщенными напряжениями.

Значения $\tau_{\text{окт}}$, σ_i и τ_i при различных напряженных состояниях. Рассмотрим, какие значения принимают обобщенные напряжения $\tau_{\text{окт}}$, σ_i и τ_i при различных, наиболее часто встречающихся при ла-

бораторных испытаниях напряженных состояниях. Такими состояниями являются следующие (рис 3.9)

1) одноосное сжатие:

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ и } \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu \epsilon_1.$$

Коэффициент поперечной деформации ν рассматривают здесь не как упругую константу, а как параметр, который в общем случае может быть переменным в зависимости от величины деформации. В условиях несжимаемости тела ($\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$) этот параметр $\nu = 0,5$,

2) чистый сдвиг.

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau; \sigma_2 = 0 \text{ и } \epsilon_1 = -\epsilon_3 = \frac{1}{2} \gamma; \epsilon_2 = 0;$$

3) осесимметричное трехосное сжатие.

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \text{ и } \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 < 0;$$

4) сжатие без возможности бокового расширения (компрессия)

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1 \text{ и } \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0;$$

5) всестороннее равномерное сжатие:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p \text{ и } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_V/3.$$

Подставив в выражения (3.8), (3.44) и (3.45) значения σ_1, σ_2 и σ_3 , характеризующие рассмотренные выше напряженные состояния, получим величины обобщенных напряжений $\tau_{\text{окт}}, \sigma_i$ и τ_i , описывающие эти состояния. Результаты сводим в табл. 3.1. В эту же таблицу внесены значения среднего нормального напряжения σ_m для указанных состояний. В нижней половине таблицы помещены значения обобщенных деформаций (которые рассматриваются далее).

Как видно из табл. 3.1, значение интенсивности нормальных напряжений σ_i равно напряжению одноосного сжатия, а значение интенсивности касательного напряжения τ_i — напряжению чистого сдвига. Поскольку сдвиг является основным видом сопротивления грунта, мы в дальнейшем будем пользоваться величиной τ_i .

Угол вида напряженного состояния и параметр Лоде. Рассмотрим третий инвариант девиатора напряжений $I_3(D)$. Эта величина играет существенную роль в механике сплошной среды, характеризуя вид напряженного состояния, что подробно будет рассмотрено в дальнейшем. Часто вместо самих значений I_3 используют другие инвариантные величины. Одну из них, ω_σ , называют углом вида напряженного состояния. Она связана с $I_3(D)$ зависимостью

$$-\cos 3\omega_\sigma = \frac{3\sqrt{3}I_3(D)}{2[I_2(D)]^{3/2}}. \quad (3.49)$$

Значения обобщенных напряжений и деформаций при различных видах напряженного состояния

Инвариантная характеристика		Вид напряженного состояния				
		одноосное сжатие	сдвиг	трехосное сжатие	компрессия	всестороннее сжатие
Напряжения	$I_2(D) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$	$\frac{1}{3} \sigma_1^2$	τ^2	$\frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)^2$	$\frac{1}{3} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \sigma_1^2$	0
	$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{I_2(D)}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \tau$	$\frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \sigma_1$	0
	$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{I_2(D)}$	σ_1	$\sqrt{3} \tau$	$\sigma_1 - \sigma_3$	$\frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_1$	0
	$\tau_i = \sqrt{I_2(D)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1$	τ	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_1$	0
	$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$	$\frac{\sigma_1}{3}$	0	$\frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \sigma_1$	p

Инвариантная характеристика		Вид напряженного состояния				
		одноосное сжатие	сдвиг	трехосное сжатие	компрессия	всестороннее сжатие
Деформации	$J_2(D) = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]$	$\frac{1}{3} (1 + \nu) 2\varepsilon_1^2; \left[\frac{3}{4} \varepsilon_1 \right]$	$\frac{1}{4} \gamma^2$	$\frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2$	$\frac{1}{3} \varepsilon_1^2$	0
	$\gamma_{\text{окт}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \sqrt{I_2(D)}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \nu) \varepsilon_1; [\sqrt{2}\varepsilon_1]$	$\frac{2}{3} \gamma$	$\frac{2\sqrt{2}}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$	$\frac{2\sqrt{2}}{3} \varepsilon_1$	0
	$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D)}$	$\frac{2}{3} (1 + \nu) \varepsilon_1; [\varepsilon_1]$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma$	$\frac{2}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$	$\frac{2}{3} \varepsilon_1$	0
	$\gamma_i = 2 \sqrt{I_2(D)}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} (1 + \nu) \varepsilon_1; [\sqrt{3}\varepsilon_1]$	γ	$\frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1$	0
	$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$	$\frac{1 - 2\nu}{3} \varepsilon_1; [0]$	0	$\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3}{3}$	$\frac{1}{3} \varepsilon_1$	$\frac{1}{3} \varepsilon_V$

Примечание. В квадратных скобках указаны значения обобщенных деформаций при $\nu = 0,5$.

Если величину ω_σ выразить через главные нормальные напряжения, то получим зависимость

$$\operatorname{tg} \omega_\sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{3}}{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}, \quad (3.50)$$

где $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Другой часто употребляемой инвариантной характеристикой напряженного состояния служит параметр Надаи — Лоде (для напряжений)

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (3.51)$$

Этот параметр связан с углом ω_σ зависимостью

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg} (\omega_\sigma + \pi/3). \quad (3.52)$$

При простейших напряженных состояниях параметр μ_σ и угол ω_σ принимают следующие значения: при одноосном сжатии ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и трехосном симметричном напряженном состоянии, когда $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 > 0$,

$$\mu_\sigma = -1; \quad \omega_\sigma = \pi/3; \quad (3.53)$$

в случае одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$) или при осесимметричном трехосном напряженном состоянии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$,

$$\mu_\sigma = +1; \quad \omega_\sigma = 0; \quad (3.54)$$

при чистом сдвиге, когда $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$ или когда $\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3) > 0$

$$\mu_\sigma = 0; \quad \omega_\sigma = \pi/6. \quad (3.55)$$

Таким образом, параметры μ_σ и ω_σ изменяются в пределах

$$-1 \leq \mu_\sigma \leq +1, \quad \frac{\pi}{3} \geq \omega_\sigma \geq 0. \quad (3.56)$$

Напряженные состояния являются подобными, если параметры μ_σ (или ω_σ) этих состояний равны. Сказанное легко проверить, построив круги напряжений для двух различных напряженных состояний. Если значения σ_1 , σ_2 , σ_3 для этих состояний будут таковы, что параметры μ_σ у них одинаковы, круги напряжений в обоих случаях окажутся взаимоподобными.

В. В. Новожилов (1952) установил, что задание угла вида напряженного состояния ω_σ равносильно заданию соотношения между максимальным касательным напряжением $\tau_{\max}$ и интенсивностью касательных напряжений τ_* .

В заключение подчеркнем, что напряженное состояние в любой точке тела будет вполне определено, если для этой точки известны значения среднего нормального напряжения σ_m , интенсивности касательного напряжения τ_* и вид напряженного состояния, определяемый параметром μ_σ или углом ω_σ .

Геометрическая интерпретация. Дадим геометрическую интерпретацию напряженного состояния изотропного тела, отобразив это состояние в трехмерном пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 3.10, а).

Любая точка такого пространства M , имеющая координаты $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, изображает некоторое напряженное состояние, характеризуемое главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

На осях координат лежат точки, отображающие простое растяжение или сжатие вдоль этих осей, на координатных плоскостях расположены точки, отображающие плоские напряженные состоя-

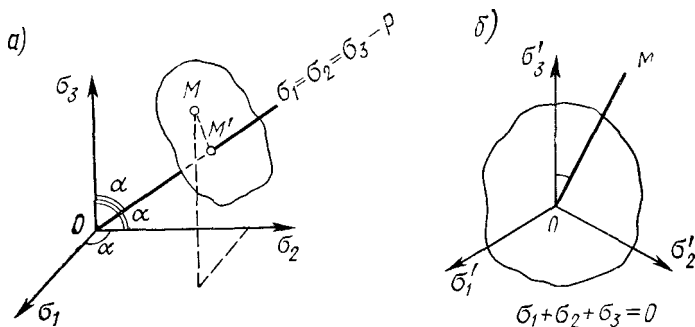


Рис. 3.10. Трехмерное пространство (а) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и девиаторная плоскость (б) $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

ния, начало же координат соответствует отсутствию напряжений в теле. Прямая, наклоненная под одинаковыми углами α ($\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$) ко всем трем осям координат (пространственная диагональ), определяет положение точек $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, соответствующих гидростатическому состоянию.

Для геометрической интерпретации значений σ_m и τ_i проведем через точку M плоскость, для которой пространственная диагональ (гидростатическая ось) будет нормалью. Точка M спроектируется вдоль этой плоскости на нормаль в виде точки M' . Расстояние от начала координат до точки M' на гидростатической оси будет равно

$$\overline{OM'} = \sqrt{3} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = I_1(T)/\sqrt{3} = \sqrt{3}\sigma_{\text{окт}} = \sqrt{3}\sigma_m.$$

Радиальное расстояние между точками M и M' в свою очередь равно $MM' = \sqrt{2} [I_2(D)]^{1/2} = \sqrt{3}\tau_{\text{окт}} = \sqrt{2}\tau_i$.

Таким образом, гидростатическая ось будет также осью октаэдрического нормального напряжения, а плоскость, к которой указанная ось является нормалью, будет октаэдрической плоскостью. Эту плоскость называют также девиаторной плоскостью, поскольку любой вектор, лежащий в данной плоскости, характеризует девиатор напряжений $I(D)$ какого-либо напряженного состояния $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Для геометрической интерпретации угла ω проведем девиаторную плоскость через начало координат $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (рис. 3.10, б), обозначив проекции осей σ_1 , σ_2 и σ_3 на эту плоскость через σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 .

Уравнение такой плоскости имеет вид $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Построив на данной плоскости проекцию расстояния MM' , получим, что линия $M'M = OM$ образует с осью $O\sigma'$ угол ω , значение которого равно

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{3} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3},$$

что соответствует выражению (3.50). Это означает, что угол ω есть угол вида напряженного состояния $\omega = \omega_\sigma$.

§ 3.5. ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ

Инварианты тензора деформаций. Все выкладки, приведенные в § 3.4 для инвариантов тензора напряжений, можно повторить для тензора деформаций. Так, три инварианта тензора деформаций (линейный, квадратичный и кубический) можно записать в виде, аналогичном выражениям (3.39):

$$\begin{aligned} J_1(T) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_m; \\ J_2(T) &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1); \\ J_3(T) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Инварианты шарового тензора деформаций будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} J_1(T^0) &= 3\varepsilon_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ J_2(T^0) &= -3\varepsilon_m^2 = -\frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2; \\ J_3(T^0) &= \varepsilon_m^3 = \frac{1}{27}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^3, \end{aligned} \quad (3.58)$$

а инварианты девиатора деформаций

$$\begin{aligned} J_1(D) &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_m) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_m) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_m) = 0; \\ J_2(D) &= \frac{1}{6}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]; \\ J_3(D) &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\varepsilon_2 - \varepsilon_m)(\varepsilon_3 - \varepsilon_m). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Первые инварианты в выражениях (3.57) и (3.58) определяют величину

$$J_1(T) = J_1(T^0) = 3\varepsilon_m, \quad (3.60)$$

где $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ — средняя линейная деформация, равная одной трети объемной деформации ε_V ; эта же величина равна отношению удлинению на октаэдрической площадке, т. е. $\varepsilon_m = \varepsilon_{\text{окт}} = \varepsilon_V/3$.

Интенсивность деформаций. В теории пластичности большое значение имеет второй инвариант девиатора деформаций $J_2(D)$, который является суммарной характеристикой изменения формы элемента тела. Однако обычно вместо $J_2(D)$ пользуются другими инвариантными величинами: интенсивностью линейных деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2(D)} \quad (3.61)$$

или интенсивностью угловых деформаций (интенсивностью деформаций сдвига)

$$\gamma_i = 2 \sqrt{J_2(D)}. \quad (3.62)$$

Используя второе из выражений (3.59), эти соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.63')$$

Сопоставляя значение $J_2(D)$, определяемое формулой (3.59), со значением октаэдрической угловой деформации $\gamma_{\text{окт}}$, определяемой по формуле (3.10), видим, что

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \sqrt{J_2(D)}. \quad (3.64)$$

Таким образом, все три величины $\gamma_{\text{окт}}$, ε_i и γ_i пропорциональны корню квадратному из второго инварианта девиатора деформаций:

$$J = k \sqrt{J_2(D)}. \quad (3.65)$$

Они отличаются друг от друга только значением постоянного множителя k : при $k=2/\sqrt{3}$ $J=\varepsilon_i$; при $k=2$ $J=\gamma_i$ и при $k=4/\sqrt{6}$ $J=\gamma_{\text{окт}}$.

Значения $\gamma_{\text{окт}}$, ε_i и γ_i при различных напряженных состояниях. Рассмотрим, какие значения принимают обобщенные деформации $\gamma_{\text{окт}}$, ε_i и γ_i при различных напряженных состояниях. Эти состояния и характеризующие их условия деформирования были описаны в § 3.4. Напомним, что там были рассмотрены случаи одноосного сжа-

тия, чистого сдвига, осесимметричного трехосного сжатия, компресси, всестороннего сжатия

Подставив значения деформаций для этих случаев в формулы (3 10), (3 63) и (3 63'), определим величины $\gamma_{\text{окт}}$, ϵ_1 и γ_1 и впишем их в приведенную ранее табл 3 1 В эту же таблицу внесем значение ϵ_m

Напомним, что параметр ν в приведенных в табл 3 2 формулах может быть переменной величиной, характеризую соотношение между вертикальной и поперечной деформациями при данной величине нагрузки и в данный момент времени, $\nu=0,5$ соответствует условию объемной несжимаемости тела

Как видно из табл 3 1, значение интенсивности линейных деформации ϵ_1 совпадает (при $\nu=0,5$) с деформацией одноосного сжатия, а значение интенсивности деформаций сдвига γ_1 — с деформацией чистого сдвига, в дальнейшем будем пользоваться величиной γ_1

Угол отклонения и параметр Лоде. Для характеристики вида деформированного состояния используют величину ω_e , называемую углом вида деформированного состояния Эта величина связана с третьим инвариантом девиатора деформаций зависимостью

$$-\cos 3\omega_e = \frac{3\sqrt{3}J_3(D)}{2[J_2(D)]^{3/2}}. \quad (3.66)$$

Величина ω_e и компоненты деформаций связаны выражением

$$\lg \omega_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} = \sqrt{3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3}, \quad (3.67)$$

где $e_{1,2,3} = \epsilon_{1,2,3} - \epsilon_m$, причем $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$.

Другой характеристикой вида деформированного состояния является параметр Лоде — Надаи, определяемый выражением

$$\mu_e = 3 \frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_1} = \frac{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3}. \quad (3.68)$$

Параметры ω_e и μ_e связаны между собой зависимостью

$$\mu_e = \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\omega_e + \pi/3). \quad (3.69)$$

Для простейших деформированных состояний параметры μ_e и ω_e имеют следующие значения

при одноосном сжатии ($\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu\epsilon_1$) и при осесимметричном трехосном сжатии, когда $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 < 0$,

$$\mu_e = -1, \quad \omega_e = -3, \quad (3.70)$$

в случае одноосного растяжения ($\epsilon_3 < 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\nu\epsilon_3$) и при осесимметричном деформировании, когда $\epsilon_1 = \epsilon_2 > 0$, а $\epsilon_3 < 0$,

$$\mu_e = 1, \quad \omega_e = 0; \quad (3.71)$$

при чистом сдвиге ($\epsilon_1 = -\epsilon_3 = \gamma/2$, $\epsilon_2 = 0$)

$$\mu_e = 0, \quad \omega_e = \pi/6. \quad (3.72)$$

Таким образом, параметры μ_ϵ и ω_ϵ изменяются в тех же пределах, что и параметры μ_σ и ω_σ :

$$-1 \leq \mu_\epsilon \leq +1, \quad \frac{\pi}{3} \geq \omega_\epsilon \geq 0. \quad (3.73)$$

Деформированные состояния являются подобными, если параметры μ_ϵ (или ω_ϵ) для них взаимно равны

В заключение подчеркнем, что деформированное состояние в данной точке тела будет вполне определенным, если для нее известны средняя линейная деформация ϵ_m , определяемая формулой (3 29), интенсивность деформаций сдвига $\dot{\gamma}_i$, определяемая формулой (3 63'), и вид деформированного состояния, определяемый параметром μ_ϵ или углом ω_ϵ .

Геометрическую интерпретацию деформированного состояния в трехмерном пространстве $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ можно сделать аналогично тому, как было показано на рис. 3 10, если в последнем оси σ_1, σ_2 и σ_3 заменить на ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 .

Инварианты тензора скорости деформаций. Все приведенные выше выражения для деформаций справедливы и для скоростей деформаций. Так, аналогично выражению (3 60), первые инварианты тензора скорости деформаций и шарового тензора скорости деформаций будут равны

$$\dot{J}_1(T) = \dot{J}_1(T^0) = 3\dot{\epsilon}_m, \quad (3.74)$$

где $\dot{\epsilon}_m$ — скорость средней линейной деформации, равная $\dot{\epsilon}_m = (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3)/3 = \dot{\epsilon}_V/3 = \dot{\epsilon}_{\text{окт}}$.

Обозначения $\dot{\epsilon}_m, \dot{\epsilon}_i, \dot{\gamma}_i$ приняты в целях идентификации символов. Строго же говоря интенсивность скоростей сдвига не равна полной производной от интенсивности деформаций сдвига, а является первой производной от интенсивности приращений деформаций сдвига, равенство $\dot{\gamma}_i = \frac{d\gamma_i}{dt}$ и т. д. справедливо лишь при совпадении главных осей девиаторов деформаций и девиатора скоростей деформаций

Скорость октаэдрической угловой деформации $\dot{\gamma}_{\text{окт}}$, интенсивность скорости линейных деформаций $\dot{\epsilon}_i$ и интенсивность скорости деформаций сдвига $\dot{\gamma}_i$ связаны со вторым инвариантом девиатора скорости деформаций $\dot{J}_2(D)$ зависимостью, аналогичной (3 65):

$$\dot{J} = k \sqrt{\dot{J}_2(D)}. \quad (3.75)$$

При $k=2/\sqrt{3}$ $\dot{J}=\dot{\epsilon}_i$, при $k=2$ $\dot{J}=\dot{\gamma}_i$ и при $k=4/\sqrt{6}$ $\dot{J}=\dot{\gamma}_{\text{окт}}$. В дальнейшем мы будем пользоваться величиной $\dot{\gamma}_i$ — интенсивностью скорости деформаций сдвига. Выпишем ее значение:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= \sqrt{\frac{2}{3} V (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} V (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{2}{3} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Для простейших деформированных состояний $\dot{\gamma}_{\text{окт}}$, $\dot{\gamma}_i$ и $\dot{\epsilon}_i$ принимают значения, аналогичные приведенным в табл. 3.1.

Для скоростей деформаций сохраняют также свои значения формулы вида (3.66) — (3.73), определяющие угол вида деформированного состояния ω_{ϵ} и параметр Лоде — Надаи μ_{ϵ} .

Связь главных напряжений с инвариантами. Решив соотношения (3.23), (3.44) и (3.51) относительно σ_1 , σ_2 и σ_3 , получим следующую связь между главными нормальными напряжениями и инвариантами σ_m , τ_i и μ_{σ} :

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \sigma_m \pm \frac{3 \mp \mu_{\sigma}}{3} \sqrt{\frac{3}{3 + \mu_{\sigma}^2}} \tau_i; \\ \sigma_2 &= \sigma_m + \frac{2\mu_{\sigma}}{3} \sqrt{\frac{3}{1 + \mu_{\sigma}^2}} \tau_i.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Аналогичным путем можно выразить главные деформации ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 или их скорости $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_3$ через инварианты ϵ_m , $\dot{\gamma}_i$, μ_{ϵ} или ϵ_m , $\dot{\gamma}_i$, μ_{ϵ} .

3.6. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Уравнения равновесия. Рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда (рис. 3.11) с длиной ребер dx , dy и dz , на невидимых гранях которого действуют силы $P_x = \sigma \, dy \, dz$, $T_{xy} = \tau_{xy} \, dy \, dz$

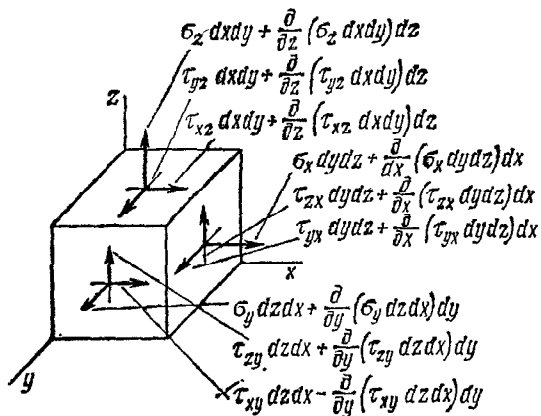


Рис. 3.11. Условия равновесия элементарного параллелепипеда

и $T_{xz} = \tau_{xz} \, dy \, dz$, а на видимых — $P_x + (\partial P_x / \partial y) \, dy$, $T_{xy} + (\partial T_{xy} / \partial x) \, dx$ и $T_{xz} + (\partial T_{xz} / \partial x) \, dx$; кроме того, действуют объемные (массовые) силы, проекции которых обозначим через X , Y , Z . Проецируя все действующие силы на соответствующие плоскости, получим следующие уравнения равновесия параллелепипеда:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.78}$$

В том случае, когда тело находится в движении, объемные силы будут включать в себя произведение массы на ускорение со знаком минус (даламберовы силы инерции), т. е.

$$X = \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right), \dots, \tag{3.79}$$

где ρ — плотность; $F_{x,y,z}$ — компоненты массовой силы, отнесенные к единице массы; $u_{x,y,z}$ — компоненты смещений.

Если тело находится в покое, то ускорения $(\partial^2 u_{x,y,z} / \partial t^2)$ равны нулю; при этом $X = \rho F_x$, $Y = \rho F_y$, $Z = \rho F_z$ представляют собой проекции объемных сил.

Граничные условия. При пользовании уравнениями равновесия необходимо знать соотношения между компонентами внешней нагрузки, приложенной к контуру тела, и компонентами внутренних напряжений на площадках, примыкающих к внешнему контуру. Эти соотношения называют граничными условиями.

Статические граничные условия определяются уравнениями (3.1), если величины $p_x v$, $p_y v$, $p_z v$ этих уравнений рассматривать как проекции внешних сил, действующих на единицу площади наружной поверхности тела, а величины l , m , n — как косинусы углов между нормалью к этой площадке v и осями координат.

Могут быть заданы и кинематические граничные условия — в этом случае задают компоненты смещений (или их скоростей). Наконец, могут быть заданы смешанные условия, когда на границе частично заданы нагрузки, а частично смещения.

Уравнения совместности. Уравнения совместности (или неразрывности) деформаций получают из уравнений (3.14) путем исключения из последних компонентов перемещений u_x , u_y , u_z :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}; \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2};
\end{aligned}
\tag{3.80}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Эти уравнения математически формулируют одно из основных положений механики сплошной среды — о сплошности деформируемого тела и непрерывности деформаций.

Если рассматривают не сами деформации, а их скорости, то условие совместности (3.80) также должно быть выполнено; в этом случае в уравнения (3.80) вместо компонентов деформаций нужно подставлять компоненты их скоростей ε_x , γ_{xy} и т. д.

Простое и сложное нагружение. Характер нагружения оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние тела, вследствие чего различают простое и сложное нагружение тела. Простым нагружением, по А. А. Ильюшину, называют такое, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально одному параметру. Если это условие не соблюдено, то нагружение называют сложным.

В частности, если напряженное состояние тела однородно (что возможно только при неучете массовых сил), то при возрастании внешних сил пропорционально одному параметру нагружение будет простым. Действительно, в этом случае деформированное состояние тоже будет однородным и уравнения равновесия (3.78) и совместности деформаций (3.80) будут тождественно выполненными. Соответственно при возрастании нагрузок по закону βP все компоненты девиатора напряжений ($\sigma_x - \sigma_m$), τ_{xy} и т. д. возрастут пропорционально множителю β . Заметим, что параметр β может быть временем, т. е. положение о простом загрузении справедливо и для возрастания нагрузки во времени.

А. А. Ильюшин показал, что простое нагружение возможно, например, при степенном законе связи между интенсивностями напряжений и деформаций $\tau_i = A \varepsilon_i^m$ (при условии несжимаемости). Но такое нагружение может иметь место и при других видах нелинейной связи между напряжениями и деформациями.

Условие простого нагружения существенно упрощает решение задач.

Активная и пассивная деформации. Различают активную деформацию, т. е. деформацию, возникающую в процессе нагружения тела, и пассивную, развивающуюся при разгрузке. Для простейших напряженных состояний эти понятия являются достаточно определенными.

При сложном же напряженном состоянии деформацию в каждый данный момент времени называют активной, если интенсивность касательных напряжений τ_i в этот момент превышает все предшествующие ее значения.

Если напряжение τ_i меньше хотя бы одного ее предшествующего значения, деформацию называют пассивной [13]. При актив-

ном деформировании возрастает как упругая, так и пластическая часть деформации, при пассивном же пластическая часть остается постоянной, а упругая уменьшается.

Таким образом, процессу нагрузки соответствует возрастание интенсивности напряжений $d\tau_i > 0$, процессу разгрузки — убывание интенсивности напряжений $d\tau_i < 0$; случай при $d\tau_i = 0$ соответствует так называемому нейтральному деформированию.

Если процесс деформирования включает в себя как изменение формы, так и изменение объема и если он протекает во времени, то активная деформация определяется условием

$$\frac{d\tau_i}{dt} > 0; \quad \frac{d\sigma_m}{dt} > 0$$

или

$$\frac{d\tau_i}{dt} \geq 0; \quad \frac{d\sigma_m}{dt} > 0.$$

Поскольку случай $d\tau_i = 0$ вносит некоторую неопределенность, то существует более строгий способ определения активной и пассивной деформаций [22], при котором тензор деформации T_e изображают в виде вектора в пространстве с шестью координатами. Процесс нагружения представляют как движение конца этого вектора по некоторой кривой, называемой путем деформации. Через каждую точку этого пространства, которой соответствует некоторая интенсивность деформаций сдвига γ_i , можно провести поверхность $\gamma_i = \text{const}$.

Если приращение dT_e образует острый угол с направлением нормали ν к этой поверхности и, следовательно, $d\gamma_i > 0$, то развивается дополнительная пластическая деформация, т. е. происходит процесс нагружения. Если же угол между dT_e и ν более $\pi/2$, происходит разгрузка. Наконец, когда вектор dT_e лежит в касательной плоскости к поверхности $\gamma_i = \text{const}$, происходит нейтральное деформирование.

Реологическое уравнение состояния тела. Три уравнения равновесия (3.78) и шесть уравнений совместности деформаций (3.80) содержат 15 неизвестных (6 компонент напряжения, 6 компонент деформации и 3 компоненты перемещения). Следовательно, для решения задач необходимо добавить еще 6 уравнений (если они не будут включать новые неизвестные).

Уравнения (3.78) и (3.80) справедливы для любой сплошной среды и не отражают ее физические свойства. Дополнительные 6 уравнений должны отобразить эти свойства, описав связь между шестью компонентами напряжений и шестью компонентами деформаций или их скоростей.

В общем виде эти уравнения можно записать как одно уравнение, устанавливающее связь между тензором напряжений и тензором деформации. Такое уравнение называется *уравнением состояния*.

При рассмотрении процессов, протекающих во времени, в указанное уравнение необходимо включить время (в явной или неявной форме). Такое уравнение называют *реологическим уравнением состояния*. Оно должно связывать между собой тензоры напряжения T_σ , деформации T_ϵ , скорости нагружения $T_{\dot{\epsilon}}$, скорости деформации $T_{\dot{\epsilon}}$ и время t :

$$R(T_\sigma, T_\epsilon, T_{\dot{\epsilon}}, T_{\dot{\epsilon}}, t) = 0. \quad (3.81)$$

В случае переменной влажности грунтов W и переменной температуры θ эти величины также должны входить в уравнение состояния.

В итоге имеем 3 уравнения равновесия, 6 уравнений неразрывности и 6 уравнений состояния. Уравнения равновесия являются статическими уравнениями механики сплошной среды, справедливыми для любой точки материального тела.

Уравнения совместности деформаций являются геометрическими уравнениями механики сплошной среды. Они отображают условие, что рассматриваемое тело является непрерывным, сплошным и остается таковым и после деформации. Уравнение состояния отображает (макроскопически) физические свойства тела.

Уравнения изменения формы и изменения объема тела. Как уже неоднократно подчеркивалось, при рассмотрении процесса деформирования какого-либо тела подразделяют изменение формы этого тела γ_i , вызываемое интенсивностью касательных напряжений τ_i , и изменение объема тела $\epsilon_m = \epsilon_v/3$ под воздействием среднего нормального (всестороннего) давления σ_m , причем изменения формы и объема могут описываться различными законами. Поэтому принято реологическое уравнение состояния представлять в виде двух уравнений:

$$R(\tau_i, \gamma_i, \dot{\tau}_i, \dot{\gamma}_i, t) = 0; \quad (3.82)$$

$$R^*(\sigma_m, \epsilon_m, \dot{\sigma}_m, \dot{\epsilon}_m, t) = 0. \quad (3.83)$$

В классической теории упругости и пластичности принимается, что эти два уравнения независимы друг от друга. Как будет показано далее, для грунтов это положение не является справедливым и оба уравнения оказываются взаимосвязанными.

§ 3.7. О ТЕОРИЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Теории деформирования определяют напряжения и деформации в точках тела при заданных граничных условиях. Для этого используют уравнения равновесия (3.78), уравнения совместности деформаций (3.80), реологические уравнения состояния (3.82) и (3.83).

Уравнение состояния в общем виде включает в себя функции, связывающие между собой компоненты напряжений, деформаций и их скоростей. Существует две теории, точнее, две группы теорий

пластичности. Одна из них — деформационная теория — рассматривает связь между компонентами напряжений и компонентами деформаций, другая, называемая теорией пластического течения, рассматривает не сами деформации, а их приращения.

Термин «течение» введен в связи с тем, что приращение пластических деформаций отождествляют с пластическим течением материала. Однако этот термин не следует связывать с развивающимся во времени вязким течением.

Обе теории пластичности время в явной форме не учитывают. Влияние временных эффектов рассматривается теорией ползучести, которая будет изложена далее.

Основные допущения теорий пластичности. Рассмотренные выше теории пластичности исходят из следующих основных допущений:

1) считают, что деформацию формы (или приращение этой деформации) вызывает девиатор напряжений и она не зависит от шарового тензора напряжений, деформация же объема (или ее приращение) вызывается шаровым тензором напряжений и не зависит от девиатора напряжений;

2) связь между компонентами напряжений и деформаций (или их приращений) остается неизменной при любом виде напряженного состояния;

3) напряженное и деформированное состояния тела принимают подобными.

О том, насколько справедливы указанные допущения для грунтов, будет рассмотрено в последующем.

Деформационная теория пластичности. Из группы деформационных теорий наиболее распространена теория малых упругопластических деформаций, развитая А. А. Ильюшиным. Допущения 1 и 2 в этой теории формулируются в виде зависимостей

$$\gamma_i = \varphi(\tau_i); \quad (3.84)$$

$$\varepsilon_m = \sigma_m/k. \quad (3.85)$$

Зависимость (3.84) отображает то условие, что интенсивность деформаций сдвига есть функция только интенсивности касательных напряжений. Зависимость же (3.85) отображает то условие, что объемная деформация есть функция лишь среднего нормального напряжения; полагают, что объемные изменения являются упругими и вид функции соответственно принимают линейным. При большом развитии пластических деформаций упругими объемными деформациями пренебрегают, и тогда условие (3.85) заменяется условием несжимаемости материала

$$\varepsilon_m = 0. \quad (3.86)$$

Поскольку γ_i есть вполне определенная функция τ_i и только τ_i , диаграмма зависимости между γ_i и τ_i (рис. 3.12) будет инвариантна относительно вида напряженного состояния, что и соответствует допущению 2. Это означает, что указанную диаграмму можно по-

лучить из любого испытания — на сдвиг, сжатие, растяжение, сложное напряженное состояние.

Во всех случаях после перехода от данных испытаний к обобщенным напряжениям τ_i и деформациям γ_i должен получаться идентичный вид диаграммы γ_i — τ_i . Например, если провести испытание тела на одноосное сжатие и построить диаграмму зависимости между σ_z и ϵ_z , то диаграмма в координатах τ_i — γ_i получится путем пересчета данных испытаний по табл. 3.1, т. е. $\tau_i = \sigma_z / \sqrt{3}$

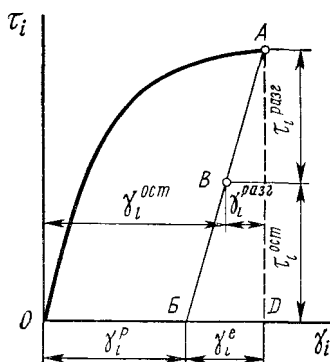


Рис. 3.12. Диаграмма деформирования

и $\gamma_i = 2\epsilon_z(1 + \nu)/\sqrt{3}$. Если же провести испытание на чистый сдвиг, то диаграммы τ — γ и τ_i — γ_i полностью совпадут.

Допущение 3 формулируют в виде соотношения

$$D_\epsilon = \chi D_\sigma, \quad (3.87)$$

которое означает, что девиатор деформаций пропорционален девиатору напряжений, причем коэффициент пропорциональности χ , называемый иногда модулем пластичности, есть некоторая функция инвариантов напряжений.

Из соотношения (3.87) следует, что

$$\frac{e_1}{s_1} = \frac{e_2}{s_2} = \frac{e_3}{s_3} = \chi; \quad \frac{\gamma_1}{\tau_1} = \frac{\gamma_2}{\tau_2} = \frac{\gamma_3}{\tau_3} = \chi, \quad (3.88)$$

где $e_1 = \epsilon_1 - \epsilon_m, \dots; s_1 = \sigma_1 - \sigma_m, \dots$

Соотношения (3.88) в свою очередь означают, что главные значения компонентов девиаторов напряжений и деформаций $s_{1,2,3}$ и $e_{1,2,3}$ пропорциональны между собой, а их направления совпадают; то же относится к главным касательным напряжениям и главным сдвигам $\tau_{1,2,3}$ и $\gamma_{1,2,3}$.

Соотношения (3.88) можно привести к виду

$$\frac{(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) + (\epsilon_2 - \epsilon_3)}{\epsilon_1 - \epsilon_3},$$

откуда следует, что принятые допущения равносильны условию

$$\mu_\sigma = \mu_\epsilon, \quad (3.89)$$

т. е. условию подобия напряженного и деформированного состояния тела.

Уравнения Генки. Соотношения (3.88) легко преобразовать в соотношения, устанавливающие связь между компонентами напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_m &= \chi (\sigma_x - \sigma_m); & \gamma_{xy} &= 2\chi \tau_{xy} \\ \epsilon_y - \epsilon_m &= \chi (\sigma_y - \sigma_m); & \gamma_{yz} &= 2\chi \tau_{yz} \\ \epsilon_z - \epsilon_m &= \chi (\sigma_z - \sigma_m); & \gamma_{zx} &= 2\chi \tau_{zx} \end{aligned} \quad (3.90)$$

В общем случае будем иметь $T_e = \chi T_\sigma$.

Эти соотношения, называемые уравнениями Генки, справедливы (при принятых исходных допущениях) для любого деформируемого тела. Для того чтобы они отражали физические свойства тела, необходимо из опытов получить вид функции χ . Эта функция будет равна

$$\chi = \frac{\gamma_i}{2\tau_i}, \quad (3.91)$$

что следует из подстановки в равенства (3.88) формул (3.45) и (3.63).

Упругие и пластические деформации. Если деформации упруги, $\chi = 1/2G$, где G — модуль сдвига. Тогда, учитывая, что $G = E/2(1 + \nu)$ и $\epsilon_m = \sigma_m/k$, где $k = E/(1 - 2\nu)$, уравнения (3.90) приводятся к известным уравнениям теории упругости:

$$\epsilon_x^e = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \dots; \gamma_{xy}^e = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \dots \quad (3.92)$$

Если деформации включают в себя и упругую и пластическую части, то

$$\chi = \frac{1}{2G} + \lambda, \quad (3.93)$$

где $\lambda = \gamma_i^p/2\tau_i$ — некоторая функция, характеризующая пластическую часть деформаций. Тогда соотношения (3.90) можно записать в виде

$$\epsilon_x = \epsilon_x^e + \epsilon_x^p; \dots; \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^e + \gamma_{xy}^p, \quad (3.94)$$

где индексы e и p означают упругую и пластическую части деформаций, причем ϵ_x^e и γ_{xy}^e определяются выражениями (3.92), а $\epsilon_x^p = \lambda(\sigma_x - \sigma_m)$ и $\gamma_{xy}^p = 2\lambda\tau_{xy}$.

Разгрузка. При разгрузке тела интенсивность деформаций сдвига убывает (рис. 3.12):

$$\gamma_i^{\text{раз}} = \gamma_i - \gamma_i^{\text{ост}},$$

где $\gamma_i^{\text{раз}}$ — деформация разгрузки; $\gamma_i^{\text{ост}}$ — остаточная деформация. Принимают, что в процессе разгрузки уменьшение интенсивности деформаций прямо пропорционально уменьшению интенсивности напряжений, т. е. $\tau_i^{\text{раз}} = G\gamma_i^{\text{раз}}$. Соответственно для процесса разгрузки справедливы соотношения (3.92).

Теория пластического течения. В этой теории, развитой Прандтлем и Рейсом, приращения деформаций рассматриваются как сумма приращений упругих (e) и пластических (p) деформаций:

$$d\gamma_i = d\gamma_i^e + d\gamma_i^p \quad \text{и} \quad d\epsilon_m = d\epsilon_m^e + d\epsilon_m^p. \quad (3.95)$$

Приращения упругих деформаций будут равны

$$d\gamma_i^e = \frac{1}{G} d\tau_i; \quad d\epsilon_m^e = \frac{1}{k} d\sigma_m, \quad (3.96)$$

устанавливающие связь между компонентами скоростей пластических деформаций и компонентами напряжений:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{2\tau_i} (\sigma_x - \sigma_m); & \dot{\gamma}_{xy}^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{\tau_i} \tau_{xy}; \\ \dot{\epsilon}_y^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{2\tau_i} (\sigma_y - \sigma_m); & \dot{\gamma}_{yz}^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{\tau_i} \tau_{yz}; \\ \dot{\epsilon}_z^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{2\tau_i} (\sigma_z - \sigma_m); & \dot{\gamma}_{zx}^p &= \frac{\dot{\gamma}_i^p}{\tau_i} \tau_{zx}.\end{aligned}\quad (3.102)$$

В общем виде можно записать $T_{\epsilon} = d\lambda T_{\sigma}$.

Хотя в уравнения (3.102) входят скорости деформаций, время в явном виде эти уравнения не учитывают, поскольку соотношения скоростей равносильны соотношениям приращений деформаций:

$$\frac{d\epsilon_x^p}{dt} : \frac{d\gamma_i^p}{dt} = d\epsilon_x^p : d\gamma_i^p \text{ и т. д.}$$

Пластический потенциал. Друкер и Прагер, обобщая теорию пластического течения, ввели понятие потенциала пластичности f , т. е. такой функции напряжения, частная производная от которой пропорциональна приращению пластической деформации:

$$d\gamma_i^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_i}. \quad (3.103)$$

Развернутый вид этого выражения следующий:

$$d\epsilon_x^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}; \dots; d\gamma_{xy}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}. \quad (3.104)$$

Если принять, как это сделал Мизес, что пластический потенциал совпадает с функцией нагружения, то выражения (3.104) будут эквивалентны вторым членам правой части равенств (3.101), определяющим пластическую деформацию. Тогда выражения (3.104) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = (\sigma_x - \sigma_m); \dots; \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 2\tau_{xy}, \dots \quad (3.105)$$

Отсюда следует, что частные производные от пластического потенциала равны (при принятом предположении) компонентам девиатора напряжений.

Рассмотренные закономерности называют ассоциированным законом течения, поскольку соотношение (3.103) при указанном выше допущении Мизеса связывается (ассоциируется) с законом пластического течения.

Пластический потенциал можно выразить также через интенсивность касательных напряжений. Для этого, используя выраже-

ние (3.45), следует определить значения $\partial \tau_i^2 / \partial \sigma_x, \dots$, и тогда из их сопоставления с соотношениями (3.105) получим

$$f = \tau_i^2. \quad (3.106)$$

Если в координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ построить (подобно рис. 3.10) поверхность $\tau_i^2 = \text{const}$, получим круговой цилиндр, ось которого перпендикулярна девiatorной плоскости, а вектор приращения пластической деформации направлен по радиусу этого цилиндра. Указанную поверхность называют поверхностью пластического потенциала. При ассоциированном законе течения предполагается, что эта поверхность совпадает по форме с поверхностью текучести (предельного состояния), которая будет рассмотрена в гл. 4 (см. рис. 4.4).

Сопоставление теорий пластичности. При простом напряженном состоянии решения, получаемые по деформационной теории и по теории пластического течения, совпадают. Для сложного напряженного состояния тела теория пластического течения ближе соответствует опытным данным, деформационная же теория, строго говоря, несправедлива. Но когда отклонения от условий простого нагружения не очень велики и, в частности, если путь деформирования, изображаемый в пространстве деформаций $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ некоторой линией, приближается к прямой, то разница в решениях по обеим теориям будет небольшая. Таким образом, теория пластического течения, оперирующая не самими деформациями, а ихращениями, более универсальна, тогда как деформационная теория более проста, а поэтому получила широкое применение для решения инженерных задач, в частности задач механики грунтов.

ГЛАВА 4

УПРУГОСТЬ, ПЛАСТИЧНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ



§ 4.1. УПРУГОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Идеализированные твердые и жидкие тела. В механике сплошной среды рассматривают идеализированные тела, наделенные теми или иными заданными свойствами. Крайними видами идеализированных тел является абсолютно твердое (недеформируемое) евклидово тело и идеальная паскалевская жидкость.

Реологическое уравнение состояния евклидова тела имеет следующий вид:

$$\gamma_i \equiv 0; \quad \varepsilon_m \equiv 0. \quad (4.1)$$

Идеальная паскалевская жидкость не способна сопротивляться сдвигу, но оказывает сопротивление всестороннему (гидростатическому) давлению, не испытывая при этом объемных деформаций. Реологическое уравнение состояния этой жидкости записывают в виде

$$\tau_i \equiv 0; \quad \varepsilon_m \equiv 0. \quad (4.2)$$

Все другие идеализированные тела лежат в пределах между абсолютно твердыми и идеально жидкими телами.

Упругость. Упругостью называют способность тела восстанавливать свою форму и объем (твердые тела) или только объем (жидкости, газы) после прекращения действия внешних сил. Соответственно под упругой деформацией понимают деформацию, полностью исчезающую после снятия нагрузки. Поскольку исчезновение деформации означает восстановление начальных размеров тела, такая деформация называется обратимой или восстанавливающейся.

В идеально упругом теле деформации возникают сразу же после приложения нагрузки и сразу же исчезают после ее снятия. Упругость твердых тел обусловлена наличием сил взаимодействия (притяжения и отталкивания) между атомами.

Упругие деформации могут быть как линейными, прямо пропорциональными напряжению, так и нелинейными (нелинейная упругость). Реологическое уравнение состояния идеально упругого линейно-деформируемого тела (тела Гука) имеет вид

$$\tau_i = G\gamma_i; \quad \sigma_m = k\varepsilon_m. \quad (4.3)$$

Зависимости (4.3) относятся к случаю сложного напряженного состояния, которое характеризуется интенсивностью касательных напряжений τ_i , интенсивностью деформаций сдвига γ_i , средним нормальным напряжением σ_m и средним относительным удлинением ϵ_m .

Поскольку в случае чистого сдвига будем иметь (согласно данным табл. 3.1) $\tau_i = \tau$ и $\gamma_i = \gamma$, первое из выражений (4.3) можно для этого случая представить в виде

$$\tau = G\gamma, \quad (4.3')$$

где τ и γ — касательное напряжение и угловая деформация при чистом сдвиге.

Соответственно последующие зависимости, записанные для сложного напряженного состояния, можно применять для случая чистого сдвига путем простой замены τ_i и γ_i на τ и γ .

Для одноосного сжатия — растяжения имеем (см. табл. 3.1) $\tau = \sigma_z/\sqrt{3}$ и $\gamma_i = \epsilon_z \cdot 2(1+\nu)/\sqrt{3}$, откуда $\sigma_z = 2G(1+\nu)\epsilon_z = E\epsilon_z$.

Второе из выражений (4.3) можно записать также в следующей форме:

$$p = k\epsilon_v/3, \quad (4.3'')$$

где $3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — всестороннее давление, а $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_m$ — объемная деформация.

Упругие константы. В приведенных выше выражениях G — модуль сдвига (модуль поперечной упругости); k — модуль объемной деформации. Эти параметры связаны между собой зависимостью

$$k = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{E}{1-2\nu}, \quad (4.4)$$

где $E = 2G(1+\nu)$ — модуль продольной упругости (модуль Юнга); $\nu = \epsilon_x/\epsilon_y$ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Параметр ν , в свою очередь, можно выразить через константы G и k , а именно: $\nu = (k - 2G)/2(G + k)$. Коэффициент ν изменяется в пределах от 0 до 0,5.

При $\nu = 0$ деформация происходит только по оси z ($\epsilon_x = 0$ и $k = E = 2G$), а при $\nu = 0,5$ происходит изменение формы без изменения объема (материал несжимаем); в этом случае $k \rightarrow \infty$ и $E = 3G$.

Константы G , E и k имеют размерность напряжений, константа же ν — безразмерная величина. Поскольку эти константы взаимно связаны, достаточно определить только любые две из них; остальные же два параметра можно вычислить. Иногда применяют так называемую константу Ляме, равную $\lambda = k - 2\nu/3$.

Значения модулей упругости для большинства реальных тел могут уменьшаться (релаксировать) под воздействием нагрузки, поэтому их величины зависят от скорости загрузки. Обычно различают статический модуль упругости, который определяют из ста-

тических испытаний со стандартной скоростью приложения нагрузки, и динамический модуль, соответствующий загрузению со скоростью, равной скорости распространения звука. Этот модуль всегда больше статического.

Для анизотропной среды модули упругости имеют различные значения: $E_x \neq E_y \neq E_z$ и $\nu_x \neq \nu_y \neq \nu_z$. Для грунтов в условиях естественного залегания типичен случай, при котором $E_z \neq E_x = E_y$.

Модули упругости горных пород. Значения статических модулей линейной деформации ($10^5 \text{ Па} = 1 \text{ кг/см}^2$) некоторых горных пород приведены ниже:

Гипс	1300	Базальт	до 9700
Песчаник	до 5000	Кварцит	до 10 000
	и выше		
Гранит	до 6000	Корунд	52 000
Известняк	до 8500	Магматические по-	
		роды	3000—13 000

Для грунтов константы E , G и k имеют несколько другой физический смысл, чем для упругих тел. В диапазоне небольшого изменения напряжений зависимость между нагрузкой и деформацией грунта можно принимать линейной и в этих пределах к грунтам, как это было предложено Н. М. Герсевановым, применим закон Гука (4.3). Однако даже при малом диапазоне напряжений деформации грунта не являются полностью обратимыми, а всегда содержат в себе остаточную часть. Поэтому закон (4.3) справедлив лишь для процесса нагружения, и его, в отличие от закона упругости, называют законом линейного деформирования. Соответственно параметры E , G и k называют модулями линейного деформирования.

Согласно строительным нормам и правилам, для расчетов рекомендуется принимать следующие нормативные значения модуля линейной деформации (в 10^5 Па):

Пески средние и крупные	от 300 до 500
Пески мелкие и пылеватые	от 110 до 480
Глинистые грунты	от 50 до 400

Если же значения E для грунтов выделить только для упругой восстанавливающейся части деформаций (например, полученной из испытания штампом с разгрузкой), то это значение существенно возрастет и составит по Д. Д. Баркану (в 10^5 Па):

Для песка среднезернистого	830
Для суглинков	от 310 до 2950
Для лёсса	от 1000 до 1300

Пластичность. Пластичностью называют свойство тел необратимо изменять, не разрушаясь, свою форму под действием внешних сил. У идеально пластического тела пластическое состояние наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ достигает некоторого предельного значения τ_s , называемого пределом текучести на сдвиг. При этом принимается, что в пластическом

состоянии материал несжимаем. Соответственно уравнение состояния записывается в этом случае в виде

$$\tau_{\max} = \tau_s = \text{const}; \quad \varepsilon_V = 0. \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) называют условием пластичности Треска — Сен-Венана.

Если тело не деформируется при напряжениях сдвига ниже предела текучести $\tau < \tau_s$, а при $\tau = \tau_s$ в нем развиваются неограниченные пластические деформации, то его называют жесткопластическим телом Сен-Венана (рис. 4.1, а). Если же тело при напряжениях ниже предела текучести $\tau < \tau_s$ деформируется упруго по закону Гука $\tau = G\gamma$, а при $\tau = \tau_s$ деформируется пластически, то его называют упругопластическим телом Прандтля (рис. 4.1, б).

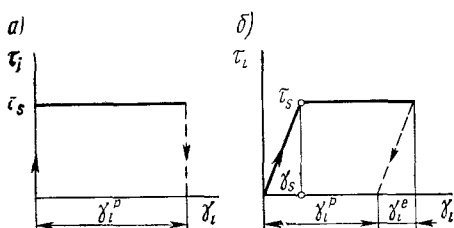


Рис. 4.1. Диаграмма деформирования тел:
а — жесткопластического; б — упругопластического

Напомним, что неограниченное пластическое деформирование при неизменяющейся нагрузке часто называют текучестью, очевидно, по аналогии с течением жидкости. Это понятие не идентично понятию вязкое течение, которое будет рассмотрено далее.

У жесткопластического тела деформация при разгрузке не восстанавливается и полностью является пластической $\gamma = \gamma^p$.

У упругопластического тела деформация при разгрузке восстанавливается частично; таким образом, общая деформация сдвига складывается из упругой (γ^e) и пластической (γ^p) частей:

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p. \quad (4.6)$$

§ 4.2. ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Теория предельного равновесия. Пластические деформации имеют особо большое значение для грунтов, поскольку развитие этих деформаций приводит к потере устойчивости и разрушению грунтового массива.

В зависимости от величины нагрузки на грунт различают два напряженных состояния: допредельное и предельное. Первое характеризуется вполне определенными деформациями, изменение которых может произойти или вследствие повышения уровня напряжений, или в результате временных эффектов (ползучести, консолидации). Второе состояние характеризуется достижением напряжениями такой критической комбинации, при которой устанавливается предельное равновесие между внешней нагрузкой и внутренними силами сопротивления грунта. В этом случае самое малое уве-

личение воздействующих на грунт сил приводит к потере им устойчивости, вызываемой разрушением связей между частицами, образованием сетки трещин и разрывов и развитием необратимых сдвигов вдоль поверхностей скольжения.

Под прочностью в широком смысле слова подразумевают свойство материала сопротивляться разрушению или развитию больших пластических деформаций, приводящих к недопустимым искажениям формы тела. Условие предельного напряженного состояния можно рассматривать как условие прочности сыпучесвязных тел, а условие пластичности — как условие прочности пластичных тел, хотя иногда все эти три термина рассматривают как синонимы.

Изучение предельного напряженного состояния связной среды составляет предмет теории предельного равновесия, основные положения которой были сформулированы К. Кулоном (1773), а затем развиты В. Ренкиным (1857), Л. Прандтлем (1920) и др. Строго математическое обобщение этой теории и общее решение широкого круга задач даны в работах В. В. Соколовского, В. Г. Березанцева и др.

Условие предельного состояния. Наступление предельного равновесия тела может быть вызвано различной комбинацией напряжений, в зависимости от которой различают условия предельного состояния или, как их иногда называют, теории прочности. Некоторые из них представляют только исторический интерес. Для грунтов и сыпучих сред применяют два основных условия (теории): условие Мора — Кулона, согласно которому предельное состояние наступает при определенном соотношении касательного и нормального напряжений, действующих на одной площадке, и условие Мизеса — Шлейхера, согласно которому предельное состояние наступает при определенном соотношении интенсивности касательных напряжений и среднего нормального напряжения.

Теория Мора — Кулона. Рассматривая предельное равновесие сыпучей среды, Кулон показал, что на площадках (с нормалью n) возможного скольжения наибольшее касательное напряжение τ_n прямо пропорционально нормальному напряжению σ_n :

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi, \quad (4.7)$$

где φ — угол внутреннего трения.

Для связной среды, обладающей как трением, так и сцеплением c , соотношение между τ_n и σ_n принимает вид

$$|\tau_n| = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = (\sigma_n + H) \operatorname{tg} \varphi, \quad (4.8)$$

где $H = c/\operatorname{tg} \varphi$ — сопротивление всестороннему растяжению.

В последующем Мором было обобщено условие Кулона (4.7) и Треска — Сен-Венана (7.5) и сформулировано новое условие: в предельном состоянии наибольшее касательное напряжение, действующее на площадке с нормалью n , есть определенная функция нормального напряжения, действующего на этой же площадке,

$$|\tau_n| = f(\sigma_n). \quad (4.9)$$

Уравнение (4.8), называемое условием Мора — Кулона, является частным случаем соотношения (4.9).

Элементарные площадки, на которых выполняется условие (4.9), называют площадками скольжения (хотя правильнее называть их площадками предельного равновесия); таких площадок две, они наклонены друг к другу под углом $\pm (\pi/2 - \varphi)$.

Диаграмма Мора для разрушающих напряжений. Наглядное представление о предельном напряженном состоянии

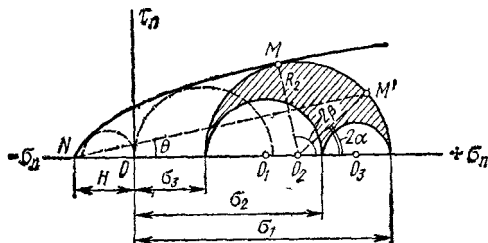


Рис. 4.2. Диаграмма Мора для предельных напряжений

в данной точке среды дает диаграмма Мора, построенная для разрушающих напряжений на плоскости $\tau_n - \sigma_n$ (рис. 4.2). Напряженное состояние на такой диаграмме будет описываться тремя кругами предельных напряжений с центрами $OO_1 = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$, $OO_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, $OO_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$.

Все точки, соответствующие напряжениям τ_n и σ_n на этой площадке, лежат внутри криволинейного треугольника (заштрихованного на диаграмме), ограниченного указанными полуокружностями, и не могут его пересекать.

Точки, лежащие на наибольшей предельной полуокружности (например, точка M'), соответствуют напряжениям τ_n' и σ_n' , действующим на площадке, отклоненной от главной площадки I на некоторый угол α .

Соотношение $\tau_n'/(H + \sigma_n') = \tan \theta$ определяет так называемый угол отклонения θ , составляемый полным напряжением p на данной площадке и нормалью n к ней.

Очевидно, что с изменением угла α будет меняться и угол отклонения θ ; он достигнет максимального значения для некоторой точки M , для которой $\alpha = \beta$. Очевидно, что для этой точки будет справедливо условие

$$\tan \theta_{\max} = \max \left| \frac{\tau_n}{H + \sigma_n} \right| = f, \quad (4.10)$$

где f — некоторая функция.

Указанное выражение возможно переписать в форме $|\tau_n| = f(H + \sigma_n)$, что равносильно условию (4.8). Таким образом, угол β определяет наклон площадки скольжения, а точка M соответствует предельным напряжениям τ_n и σ_n на этой площадке.

На диаграмме $\tau_n - \sigma_n$ можно провести бесчисленное множество семейств предельных полуокружностей, каждое из которых будет соответствовать различным значениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Огибающая наибольших кругов напряжения, касающаяся этих кругов в точках M ,

является предельной кривой, все точки которой удовлетворяют равенству (4.8).

В число полуокружностей, огибающей которых является предельная кривая, входят также полуокружности (пунктир на диаграмме), отображающие случаи одноосного сжатия и растяжения: $\sigma_1 \geq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Очевидно, при равенстве сопротивлений сжатию и растяжению огибающая кривая трансформируется в горизонтальную прямую. Если же сопротивление сжатию не равно сопротивлению растяжению, то огибающая всегда будет отличаться от горизонтальной прямой.

Условие Мора (4.8) не позволяет учитывать влияние промежуточного главного напряжения σ_2 . Действительно, согласно этому условию точка M , отображающая предельное состояние тела, лежит на большой полуокружности. Таким образом, условие (4.8) можно выразить требованием, чтобы радиус главного круга R_2 являлся функцией положения центра O_2 этого круга, т. е.

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right). \quad (4.11)$$

Как видно, промежуточное главное напряжение σ_2 в это условие не входит.

Если огибающую кривую (рис. 4.2) аппроксимировать наклонной прямой, то она будет соответствовать условию Мора — Кулона (4.9), которое для главных напряжений имеет вид

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2H}. \quad (4.12)$$

Это условие применяют для анализа связных грунтов, обладающих сцеплением и трением. Однако для реальных грунтов огибающая почти всегда в области малых, а тем более отрицательных значений σ_m имеет криволинейное очертание. Поэтому замена этого очертания наклонной прямой является определенным приближением; соответственно параметры c и φ , входящие в условие (4.9), следует рассматривать не как физические характеристики, а как параметры аппроксимированной диаграммы сдвига.

Для идеально сыпучего грунта, не обладающего сцеплением, соотношение (4.12) принимает вид

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \quad (4.13)$$

соответствующий уравнению Кулона (4.7).

Для идеально связных грунтов, обладающих только сцеплением и не обладающих трением, огибающая кривая (рис. 4.2) трансформируется в горизонтальную прямую, соответствующую условию Сен-Венана (4.5), которое для главных напряжений записывается в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c = 2\tau_s. \quad (4.14)$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом случае принимают, что пределы текучести на сжатие и растяжение равны между собой: $+\sigma_s = -\sigma_s = \sigma_s$. Соответственно величина σ_s связана по теории Сен-Венана с пределом текучести на сдвиг зависимостью

$$\tau_s = c = \sigma_s/2. \quad (4.15)$$

Нелинейная огибающая кругов предельных напряжений для грунтов может быть аппроксимирована, например, степенным уравнением

$$|\tau_n| = \tau_0 \left(1 + \frac{\sigma_n}{H}\right)^\lambda \quad (4.16)$$

или уравнением циклоиды

$$\sigma_n + H = \frac{1}{2} K (4\beta - \sin 4\beta); \quad \tau_n = \frac{1}{2} K (1 - \cos 4\beta), \quad (4.17)$$

где $1 \geq \lambda \geq 0,5$, τ_0 — сопротивление чистому сдвигу, а 2β — угол наклона нормали циклоиды к оси абсцисс ($\pi/2 \leq 2\beta \leq \pi$), K — диаметр образующей круга циклоиды.

Для описания огибающей можно использовать комбинацию циклоиды и прямой — криволинейный участок огибающей будет описываться выражением (4.15), а прямолинейный — выражением (4.9).

Теория Мизеса. Согласно этой теории, при предельном состоянии материала интенсивность касательных напряжений есть величина постоянная:

$$\tau_i = \tau_s = \text{const.} \quad (4.18)$$

Выражая величину τ_i через главные нормальные напряжения, получим следующий вид условия предельного напряженного состояния:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 6\tau_s^2. \quad (4.19)$$

Между τ_s и σ_s существует следующая связь:

$$\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}, \quad (4.20)$$

отличающаяся на постоянный множитель от условия (4.15) по теории Сен-Венана. Однако основным отличием условия Мизеса от условия Сен-Венана является то, что первое из них учитывает все три главных напряжения.

Обобщением условия (4.19) является условие Мизеса — Шлейхера, согласно которому при предельном состоянии материала интенсивность касательных напряжений есть некоторая функция от среднего нормального напряжения:

$$\tau_i = f(\sigma_m). \quad (4.21)$$

А. И. Боткин предложил для грунтов линейный вид этой зависимости

$$\tau_i = (H + \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi, \quad (4.22)$$

где $H = \tau_s / \operatorname{tg} \Psi$ и Ψ — параметры прямой $\tau_i - \sigma_m$, причем H можно рассматривать как предельное сопротивление всестороннему растяжению, а Ψ — как угол трения на октаэдрической площадке.

Соотношение (4.22) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ & = \sqrt{2/3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3H) \operatorname{tg} \Psi. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Энергетическое обоснование теории Мизеса. Бельтрами (1885) высказал предположение, что для разрушения твердого тела необходимо преодолеть молекулярные силы связи; для этого надо затратить определенную работу, которую и следует принимать в качестве критерия прочности.

Губер (1904) уточнил это условие, показав, что разрушение материала вызывает та часть работы, которая затрачивается только на формоизменение. Как будет показано далее, эта работа равна

$$A_D = \frac{\tau_i^2}{2G} = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Поскольку для случая одноосного сжатия — растяжения $A_D = \sigma_s^2 (1 + \nu) / E$, предыдущее выражение можно переписать в следующем виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\tau_s^2.$$

Учитывая зависимость (4.20), легко видеть, что это выражение совпадает с уравнением Мизеса (4.19). Поэтому указанное условие называют также условием Мизеса — Губера.

Изображение условий предельного состояния в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Условия предельного напряженного состояния можно геометрически изобразить в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (см. рис. 3.10) в виде предельной поверхности

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Условие предельного состояния Сен-Венана (4.14) отображается в этом пространстве в виде шестигранной призмы с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ (рис. 4.3, а). Пересечение призмы с девiatorной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ дает правильный шестиугольник с радиусами вписанной и описанной окружностей, равными соответственно

$$R_1 = \sqrt{2} \tau_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_s, \quad R_2 = 2 \frac{\sqrt{2}}{3} \tau_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s.$$

Условие Мора — Кулона (4.12) отображается в виде шестигранной пирамиды (рис. 4.4, а), вершина которой имеет координаты

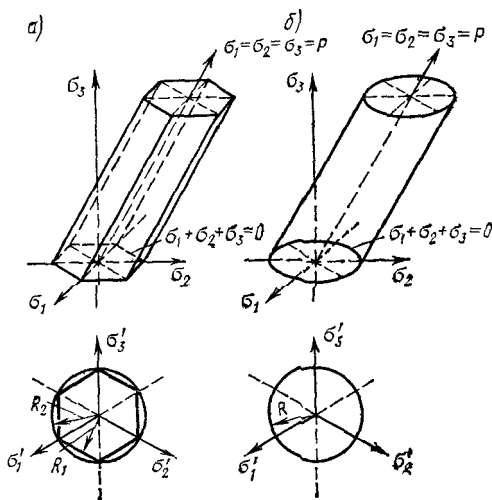


Рис. 4.3. Предельная поверхность $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и ее проекция на девиаторную плоскость $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$:
 а — для условия Сен-Венана, б — для условия Мизеса

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = H$, а проекция на девиаторную плоскость имеет вид шестиугольника, расстояние от центра которого до ближней и отдаленной вершин равно

$$R_{1,2} = \frac{2\sqrt{6}H \sin \varphi}{3 \pm \sin \varphi}.$$

Условие Мизеса (4.19) отобразится в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ круговым цилиндром с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (см. рис. 4.3, б). Пересечение этого цилиндра с девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ образует окружность радиусом

$$R = \sqrt{2} \tau_s = \sqrt{2/3} \sigma_s.$$

Условие Мизеса — Шлейхера — Боткина (+23) изображается в форме конуса (рис. 4.4, б) с вершиной $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = H$. Из рассмотрения схем а и б рис. 4.3 можно наглядно увидеть различие между условиями предельного состояния Сен-Венана и Мизеса, а из рассмотренных схем а и б рис. 4.4 — различие между условиями Мора — Кулона и Мизеса — Боткина. Как видно, окружность Мизеса описывает шестигранник Сен-Венана. Что же касается условий Мизеса — Боткина и Мора — Кулона, то разрушающие напряжения по Мизесу — Боткину будут больше (но только в области сжимающих напряжений), чем по Мору — Кулону.

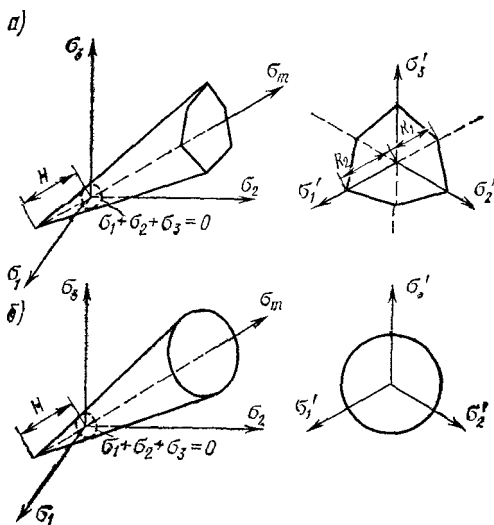


Рис. 4.4. Предельная поверхность $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и ее проекция на девиаторную плоскость $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.
 а — для условий Мора — Кулона, б — для условия Мизеса — Боткина

§ 4.3. НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ

Нелинейная деформация сдвига. Для многих тел, в том числе для грунтов, зависимость между напряжением и деформацией является нелинейной, для сложного напряженного состояния она записывается в форме

$$\tau_i = \varphi(\gamma_i). \quad (4.24)$$

Эта же форма записи сохраняется и для случая чистого сдвига:

$$\tau = \varphi(\gamma). \quad (4.24')$$

Иногда применяют выражение

$$\tau_i = G(\gamma_i) \gamma_i, \quad (4.25)$$

где величину $G(\gamma_i)$ рассматривают как переменный модуль сдвига, зависящий от деформации.

Если нелинейная деформация полностью обратима (рис. 4.5, а), то тело называют нелинейно-упругим. Однако в большинстве случаев нелинейные деформации восстанавливаются лишь частично и включают в себя как упругую, так и пластическую части, т. е. $\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^p$, где $\gamma_i^e = \tau_i/G$, а $\gamma_i^p = f(\tau_i)$.

Такое деформирование иногда называют пластическим деформированием с упрочнением. Последнее определение вытекает из того обстоятельства, что величина $d\tau_i/d\gamma_i > 0$ и для приращения деформации необходимо увеличить напряжение — материал по сравнению с идеально пластическим состоянием ($dG=0$) как бы упрочняется.

Нелинейная объемная деформация. Классическая

теория пластичности исходит из условия, что объемные деформации во всех случаях являются упругими, т. е. подчиняются закону (4.3) и полностью обратимы. Однако для грунтов объемные деформации оказываются нелинейными и частично необратимыми:

$$\sigma_m = \varphi^*(\epsilon_m) \text{ или } \sigma_m = k(\epsilon_m) \epsilon_m, \quad (4.26)$$

где $k(\epsilon_m)$ — переменный модуль объемной деформации. При этом полная объемная деформация складывается из обратимой и остаточной частей $\epsilon_m = \epsilon_m^e + \epsilon_m^p$. Кривая объемной деформации будет выпуклой к оси напряжений.

Физическая и геометрическая нелинейность. Изменяемость физических характеристик среды, например модуля упругости, коэффициента Пуассона или коэффициента вязкости, в зависимости от на-

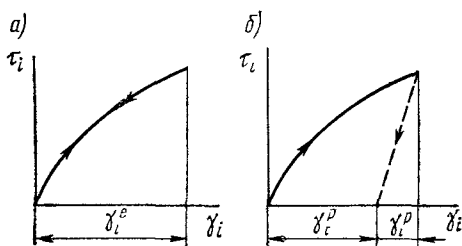


Рис. 4.5. Диаграмма деформаций нелинейно-деформируемого тела:

а — нелинейно-упругое; б — пластическое с упрочнением

пряжения, деформации или времени называется физической нелинейностью. Но и при постоянном значении этих характеристик могут наблюдаться нелинейные соотношения. Например, это будет при конечном значении деформаций, поскольку согласно формулам (3.16) и (3.17) связь между удлинениями и конечными деформациями нелинейная. Такой вид нелинейности называют геометрической нелинейностью.

Диаграмма «напряжение — деформация». График зависимости между напряжением и деформацией для реальных тел более сложен, чем идеализированные графики (рис. 4.1 или 4.5).

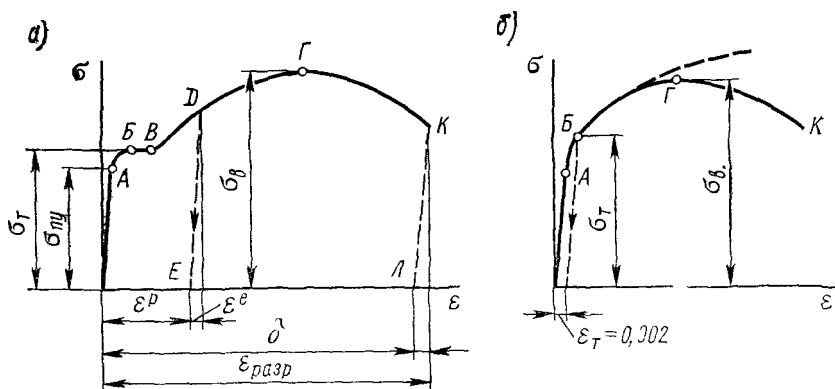


Рис. 4.6. Диаграмма «напряжение — деформация»
а — при растяжении, б — при сжатии

Типичные диаграммы деформирования твердых тел (металл) показаны на рис. 4.6. Диаграмма а относится к случаю растяжения. Начальный линейный участок ОА этой диаграммы характеризует упругое поведение тела, горизонтальная площадка ВВ соответствует пластическому течению, когда деформация развивается без увеличения напряжения, а участок ВГ характеризует пластическое упрочнение.

Точка А на графике соответствует пределу пропорциональности $\sigma_{пл}$, т. е. напряжению, за которым нарушается линейная связь между напряжением и деформацией.

Площадку ВВ называют площадкой текучести, а соответствующее ей напряжение — пределом текучести, обозначаемым σ_T или σ_s .

Наибольшее напряжение, которое может выдержать материал перед разрушением (точка Г), как известно, называется пределом прочности или временным сопротивлением σ_b . За этим пределом напряжение падает, что особенно заметно при испытании на растяжение, когда в образце образуется шейка, ослабляющая его сечение. В пределах $\sigma \leq \sigma_{пл}$ деформации восстановимы, при напряжениях же $\sigma > \sigma_{пл}$ разгрузка происходит по прямой DE и деформации восстановимы лишь частично — общая деформация состоит из упругой ϵ^e и остаточной ϵ^p частей.

Полную деформацию при разрушении $\epsilon_{\text{разр}}$ также можно разделить на упругую $\epsilon_{\text{разр}}^e$ и пластическую $\epsilon_{\text{разр}}^p = \delta$ части. По величине δ обычно оценивают пластичность материала.

Некоторые материалы (в частности, многие грунты) не имеют явно выраженной площадки текучести (рис. 4.6, б). В этом случае за условный предел текучести σ_T принимают напряжение, при котором пластическая (остаточная) деформация равна определенной величине, например для металлов $\epsilon_T = 0,002$.

Диаграмма сжатия. Для большинства однородных материалов принимают идентичные диаграммы деформирования для всех случаев нагружения, будь то растяжение, сжатие или сдвиг. Поэтому в общем случае диаграммы (рис. 4.6) будут справедливы и для сжатия. Для некоторых же материалов, в том числе для грунтов, диаграммы сжатия и растяжения бывают различными. Так, случаю сжатия в большей степени отвечает рис. 4.6, б, чем график а.

Образцы весьма пластичных, вязкоразрушающихся материалов (в частности, пластичных глин) могут не разрушаться в процессе сжатия, а лишь сплющиваться.

Диаграмма деформирования таких материалов не имеет экстремальной точки G , а характеризуется непрерывным возрастанием напряжений, как это показано пунктирной кривой на рис. 4.6, б. Для таких материалов пользуются понятием условного предела прочности, принимая под последним напряжение, при котором деформация достигла какой-либо определенной, достаточно большой величины. Для грунтов можно рекомендовать принять значение предельной деформации равным 20%.

Условные и истинные диаграммы растяжения — сжатия. Напряжение при испытаниях на растяжение — сжатие определяется как $\sigma = P/f_0$, где f_0 — начальная площадь поперечного сечения образца. Однако в процессе испытания начальная площадь меняется — уменьшается при растяжении (за счет образования шейки) и увеличивается при сжатии (за счет расплющивания). Поэтому диаграммы, построенные для этого значения напряжения, называют условными. Для построения истинной диаграммы необходимо учитывать изменение площади поперечного сечения образца, определяя напряжения как величину $\sigma_{\text{ист}} = P/(f_0 \pm \Delta f_0)$, где Δf_0 — приращение площади поперечного сечения. Это приращение определяют измерением поперечных деформаций или приближенно (в предположении, что при больших деформациях $\nu = 0,5$) по формуле

$$\Delta f = f_0 \frac{\epsilon}{1 + \epsilon},$$

где $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1$ (l_0 — начальная высота образца).

Истинную деформацию определяют по выражению $\epsilon = \ln(f/f_0)$ или $\epsilon = \int_{l_0}^l dl/l = \ln(l/l_0)$, где l_0 и l — начальная и текущая длина (высота) образца при растяжении — сжатии. Пренебрегая объем-

ными изменениями, имеем $Al = A_0 l_0$, т. е. оба приведенных выше значения истинной деформации идентичны.

Истинная кривая на диаграмме растяжения всегда проходит выше условной кривой, а истинная кривая сжатия — ниже. Соответственно истинный предел прочности в первом случае больше, а во втором меньше условного.

Поскольку при чистом сдвиге площадь поперечного сечения не изменяется, истинная и условная диаграммы в этом случае совпадают.

В большинстве случаев реальные диаграммы деформирования в целях их упрощения схематизируют, заменяя кривые, показанные на рис. 4.6,

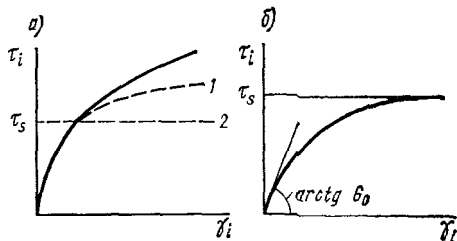


Рис. 4.7. Зависимости между напряжением и деформацией:

а — степенная; б — дробно-линейная

ломаными прямыми (линейное упрочнение), либо комбинацией прямой и кривой (нелинейное упрочнение), либо ломаными кривыми, либо, наконец, одной кривой.

Функция деформации Ильюшина. Уравнение нелинейного деформирования (4.24) иногда записывают в форме, предложен-

ной А. А. Ильюшиным,

$$\tau_i = G\gamma_i(1 - \omega), \quad (4.27)$$

где ω — безразмерная функция, показывающая, насколько кривая деформирования отклоняется от прямой. Эта функция изменяется в пределах $0 \leq \omega \leq 1$. Случай $\omega = 0$ соответствует упругой деформации, случай $\omega = 1$ — идеальной пластичности.

Степенная зависимость между напряжением и деформацией. Наиболее часто диаграмму нелинейного деформирования аппроксимируют единой кривой (рис. 4.7). Вид такой кривой описывается различными эмпирическими формулами. Наиболее применяема степенная зависимость (рис. 4.7, а), впервые предложенная Бахом,

$$\tau_i = A\gamma_i^m, \quad (4.28)$$

где A (Па) — коэффициент деформирования; $m \leq 1$ — коэффициент упрочнения.

В соответствии с данными табл. 3.1 зависимость (4.28) сохраняется для случая чистого сдвига:

$$\tau = A\gamma^m. \quad (4.29)$$

Она принимает следующий вид для одноосного сжатия — растяжения:

$$\sigma_z = A_z \epsilon_z^m, \quad (4.30)$$

где $A_z = 3^{\frac{1-m}{2}} [2(1+\nu)]^m A$, или $A_z = 3^{\frac{m+1}{2}} A$, если $\nu = 0,5$.

В этих выражениях параметр A есть модуль деформации при чистом сдвиге, а A_z — модуль деформации при одноосном сжатии (или растяжении).

Зависимости (4.28) — (4.29) можно также выразить в соответствии с формулой (4.8) через переменные модули деформации:

$$G(\gamma_i) = G(\gamma) = A\gamma_i^{m-1}; \quad E(\varepsilon_z) = A_z\varepsilon_z^{m-1}. \quad (4.31)$$

При этом между модулями $G(\gamma_i)$ и $E(\varepsilon_z)$ остается в силе соотношение (4.4):

$$E(\varepsilon_z) = 2G(\gamma_i) [1 + \nu]. \quad (4.32)$$

При $m=1$ имеем $G(\gamma_i) = \text{const}$ и зависимость (4.28) вырождается в закон Гука.

Строго говоря, степенная зависимость имеет ряд недостатков, которые отметил М. Рейнер (1963) при анализе закономерности течения вязких сред. Применительно к зависимостям (4.28) — (4.31) эти недостатки заключаются в следующем. Во-первых, безразмерной величине m не придан какой-либо физический смысл.

Во-вторых, производная $d\tau_i/d\gamma_i$ при $\gamma_i \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Это означает, что при $\gamma_i \rightarrow 0$ модуль деформации $G(\gamma_i) = d\tau_i/d\gamma_i \rightarrow \infty$, т. е. при отсутствии нагрузки тело не является деформируемым, но становится таковым при нагружении. При неограниченном же развитии деформации $\gamma_i \rightarrow \infty$ производная $d\tau_i/d\gamma_i$ не становится равной нулю, т. е. состояние текучести не наступает, и тело деформируется с неограниченным упрочнением. Такое поведение возможно только при вязком сжатии, но не при сдвиге и тем более не при растяжении.

Однако ввиду своей простоты и достаточно хорошего соответствия опытным данным для широкого круга материалов, включая грунты, степенная зависимость является наиболее употребимой для описания нелинейного деформирования. Конечно, при употреблении степенного закона следует всегда устанавливать диапазон его применимости.

Комбинированные степенные зависимости между напряжениями и деформациями. В целях расширения диапазона действия степенного закона его применяют иногда в комбинированном виде. Например, используют комбинацию линейной и степенной зависимостей

$$\gamma_i = \frac{\tau_i}{G} + \left(\frac{\tau_i}{A} \right)^{1/m}, \quad (4.33)$$

причем иногда полагают $1/m=2$.

Принимают также, что кривая «напряжение — деформация» описывается двумя степенными зависимостями с различными показателями степени (рис. 4.7, а, кривая 1):

при $\tau_i < \tau_s$

$$\tau_i = A_1\gamma_i^{m_1};$$

при $\tau_i > \tau_s$

$$\tau_i = A_2 \left[\frac{A_1}{A_2} \gamma_s^{m_1} + (\gamma_i - \gamma_s)^{m_2} \right] \approx A_2 \gamma_i^{m_2}, \quad (4.34)$$

где γ_s — деформация, соответствующая предельному напряжению τ_s .

Принимают также, что до достижения предела текучести тело деформируется нелинейно, а при достижении этого предела неограниченно течет (рис. 4.7, а, кривая 2):

при $\tau_i < \tau_s$

$$\tau_i = A \gamma_i^m; \quad (4.35)$$

при $\tau_i = \tau_s = \text{const}$ $\gamma_i \rightarrow \infty$.

Дробно-линейная зависимость. Достаточно распространенной является дробно-линейная (гиперболическая) зависимость между напряжениями и деформациями (рис. 4.7, б), предложенная в 1931 г. С. П. Тимошенко:

$$\tau_i = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i} \gamma_i, \quad (4.36)$$

где τ_s (Па) и G_0 (Па) — параметры, физический смысл которых разъясняется ниже. Представив формулу (4.36) в виде

$$\frac{\tau_i}{\gamma_i} = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i},$$

получим, что при $\tau_i \rightarrow 0$ отношение $(\tau_i/\gamma_i) \rightarrow G_0$. Таким образом, G_0 — начальный модуль сдвига, соответствующий бесконечно малой деформации.

Если теперь в выражении (4.36) принять $\gamma_i \rightarrow \infty$, то, раскрывая неопределенность, получим $\tau_i \rightarrow \tau_s$. Следовательно, τ_s есть предельное значение напряжения (предел текучести), которое достигается при неограниченном развитии деформации. Последнее допущение в ряде случаев достаточно приемлемо.

Зависимость (4.36), записанная для сложного напряженного состояния, сохраняет свой вид и для чистого сдвига:

$$\tau = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma} \gamma. \quad (4.37)$$

Для одноосного сжатия (или растяжения) зависимость (4.36) переписывается в форме

$$\sigma_z = \frac{E_0 \sigma_s}{\sigma_s + E_0 \varepsilon_z} \varepsilon_z, \quad (4.38)$$

где E_0 — начальный модуль сжатия, а σ_s — предел текучести (прочности) при сжатии. Эти параметры связаны с параметрами G_0 и τ_s известными зависимостями

$$E_0/G_0 = 2(1 + \nu_0) \text{ и } \sigma_s/\tau_s = \sqrt{3}.$$

Первая из этих зависимостей идентична соотношению модулей E и G линейного деформирования, что и понятно, учитывая рассмотренный выше смысл параметров G_0 и E_0 . Вторая из приведенных зависимостей идентична соотношению пределов текучести идеально пластичного тела, что также соответствует смыслу параметров σ_s и τ_s уравнения (4.37) и (4.38).

Если зависимости (4.36) — (4.38) выразить через переменные модули деформирования $\tau_i = G(\gamma_i)\gamma_i$ и $\sigma_z = E(\varepsilon_z)\varepsilon_z$, то последние будут иметь следующие значения:

$$G(\gamma_i) = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i}; \quad E(\varepsilon_z) = \frac{E_0 \sigma_s}{\sigma_s + E_0 \varepsilon} \quad (4.39)$$

При $\tau_s = \infty$ имеем $G(\gamma_i) = G_0$ и зависимость (4.36) переходит в закон Гука.

Таким образом, дробно-линейный закон (4.36) позволяет одной кривой описывать как допредельное, так и предельное (при $\tau_i \rightarrow \infty$), состояния материала, причем в этот закон входят как деформационные (G_0), так и прочностные (τ_s) характеристики.

Можно применить комбинации зависимостей (4.28) и (4.36), возведя величину γ_i (или τ_i) в формуле (4.36) в степень m .

Иные виды зависимостей. Кроме рассмотренных степенной и дробно-линейной зависимостей, описывающих связь между напряжением и деформацией, возможно применять и иные зависимости для аппроксимации вида функции $\varphi(\gamma_i)$. Например,

$$\varphi(\gamma_i) = a \operatorname{arthy} \gamma_i, \quad \varphi(\gamma_i) = b \operatorname{arsh} \gamma_i, \quad \varphi(\gamma_i) = \tau_s (1 - e^{-a \gamma_i}),$$

При этом во всех случаях следует помнить, что зависимости, полученные непосредственно из опыта, являются феноменологическими, поэтому выбор какой-либо из них в определенной степени субъективен. Критерием более точного выбора является, во-первых, лучшее соответствие эксперименту, во-вторых, более простой вид зависимости и, в-третьих, лучшее соответствие условиям рассматриваемой задачи и удобство пользования. Например, в ряде случаев для малого диапазона напряжений более подходящей оказывается зависимость (4.28), а для большого — (4.36).

В целом же степенную зависимость используют чаще (может быть, благодаря ее простоте), чем дробно-линейную, хотя у последней имеются определенные преимущества, рассмотренные выше.

Зависимость между напряжением и объемной деформацией. Нелинейное объемное деформирование описывается зависимостью

$$\sigma_m = \varphi^*(\varepsilon_m), \quad (4.40)$$

отображающей затухающий характер развития объемных деформаций ε_m с ростом всестороннего давления σ_m (рис. 4.8).

Степенной закон для объемных деформаций имеет вид

$$\sigma_m = D \varepsilon_m^{\kappa}, \quad (4.41)$$

где $\kappa \geq 1$.

Дробно-линейный закон принимает для объемных деформаций следующую форму:

$$\sigma_m = \frac{k_0 \varepsilon_s}{\varepsilon_s - \varepsilon_m} \varepsilon_m, \quad (4.42)$$

где k_0 — начальный (при $\varepsilon_m \rightarrow 0$) модуль объемного деформирования, а ε_s — предельное значение объемной деформации, достигаемое при $\sigma_m \rightarrow \infty$, когда материал приобретает предельную плотность.

Если выразить зависимости (4.41) и (4.42) через переменный модуль объемного деформирования $\sigma_m = k(\varepsilon_m) \varepsilon_m$, то этот модуль будет равен

$$k(\varepsilon_m) = A \varepsilon_m^{\kappa-1} \quad \text{и} \quad k(\varepsilon_m) = \frac{k_0 \varepsilon_s}{\varepsilon_s - \varepsilon_m}. \quad (4.43)$$

Можно применить также экспоненциальную зависимость, предложенную С. С. Григоряном (1950) и С. Р. Месчаном (1957),

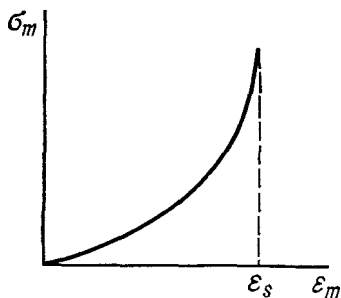
$$\varepsilon_m = \varepsilon_s (1 - e^{-b \sigma_m}). \quad (4.44)$$

Коэффициент поперечного расширения. Из равенства (4.4) следует, что между коэффициентом поперечного расширения ν и модулями сдвига и объемного деформирования существует зависимость

$$\nu = \left[\frac{k(\varepsilon_m)}{2G(\gamma_i)} - 1 \right] : \left[\frac{k(\varepsilon_m)}{G(\gamma_i)} + 1 \right]. \quad (4.45)$$

Как видно, коэффициент ν при нелинейном деформировании — величина переменная. Этот коэффициент принимает постоянное значение только в следующих случаях: когда материал несжимаем [$k(\varepsilon_m) = \infty$] и $\nu = 0,5$; если соотношение между модулями $k(\varepsilon_m)$ и $G(\gamma_i)$ остается постоянным во всем диапазоне напряжений. Это может быть в тех случаях, когда вид функций $\varphi(\gamma_i)$ и $\varphi(\varepsilon_m)$, описывающих деформацию сдвига и деформацию объема, идентичен. Например, если принять степенные зависимости (4.29) и (4.41), то ν будет постоянным только в случае, когда показатели степени в обеих зависимостях численно равны: $m = \kappa$.

Рис. 4.8. Диаграмма зависимости между всесторонним давлением σ_m и объемной деформацией ε_m



Следует, однако, учитывать, что для реальных материалов условие идентичности функций $\varphi(\gamma_i)$ и $\varphi^*(\varepsilon_m)$ невозможно выполнить вследствие разного характера крихов деформирования при сдвиге и при всестороннем сжатии, т. е. если $m \leq 1$, $\kappa \geq 1$. Поэтому указанное условие можно принимать лишь как допущение, упрощающее расчеты, но не как физический постулат.

§ 4.4. ВЯЗКОСТЬ

Идеально вязкая жидкость. Вязкостью называют свойство жидкостей (и газов) оказывать сопротивление при перемещении элементарных частиц по отношению друг к другу. Вязкость также называют внутренним трением [хотя некоторые ученые, в частности М. Рейнер, (1968, с. 39), считают применение указанного термина для обозначения вязкости ошибочным], подчеркивая этим то обстоятельство, что при взаимном перемещении двух слоев жидкости возникают силы трения.

В отличие от внутреннего внешним трением называют взаимодействие между твердыми телами, возникающее в месте их соприкосновения и препятствующее их относительному перемещению. Внешнее трение между двумя движущимися телами называют кинематическим, а между двумя неподвижными телами — трением покоя.

Трение покоя проявляется в том, что для относительного перемещения двух тел необходимо приложить внешнюю силу $F > F_0$, где F_0 — предельная сила трения покоя. Сила $F = fN$, где N — нормальная составляющая сила, а f — коэффициент трения скольжения, который можно представить в виде $f = \operatorname{tg} \varphi$ (φ — угол трения). Таким образом, применяемое в механике грунтов понятие «угол внутреннего трения» на самом деле следовало бы назвать углом внешнего трения.

Вязкость впервые была рассмотрена Ньютоном (1687), установившим, что сопротивление жидкости при течении, возникающее «из-за недостаточного проскальзывания частиц жидкости», пропорционально скорости сдвига, с которой эти частицы перемещаются относительно друг друга.

Вязкое течение возникает при любом напряжении сдвига, большем нуля, и развивается с постоянной скоростью $\dot{\gamma} = d\gamma/dt = \cos \alpha t$, причем эта скорость прямо пропорциональна напряжению сдвига (рис. 4.9); деформация вязкого течения полностью необратима. Жидкость, удовлетворяющая указанным условиям, называется идеально вязкой, ньютоновой жидкостью.

При всестороннем гидростатическом давлении вязкая жидкость ведет себя как идеально упругое тело и ее плотность меняется обратно пропорционально объему.

Закон Ньютона. Реологическое уравнение состояния для ньютоновской жидкости имеет следующий вид:

$$\tau_i = \eta \dot{\gamma}_i; \quad (4.46)$$

$$p = k \varepsilon_m, \quad (4.47)$$

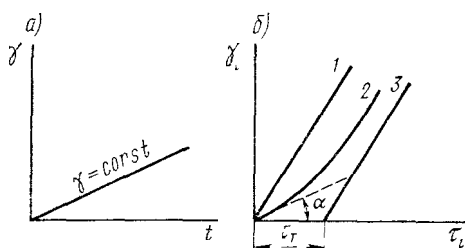


Рис. 4.9. Реологические кривые:

а — развитие течения вязкой жидкости во времени, *б* — зависимость между напряжением сдвига и скоростью течения; 1 — ньютонова вязкая жидкость; 2 — нелинейно-вязкая жидкость; 3 — бингамова пластично вязкая жидкость

где τ_i и $\dot{\gamma}_i$ — интенсивность касательных напряжений и интенсивность скорости деформации сдвига; $p = \sigma_m$ и $\epsilon_m = \epsilon_v/3$ — всестороннее давление, равное среднему нормальному давлению, и средняя деформация, равная $1/3$ объемной деформации; k — модуль объемной упругости; η — коэффициент вязкости (при сдвиге) или просто вязкость, единицей измерения которой является Н·с/м². В системе СГС единицей вязкости служит пуаз (П). Напомним, что 1 пуаз = = 1 дина·с/см², или 1 пуаз = 10⁻¹ Н·с/м² = 0,012 г·с/см² — в технических единицах.

Вязкость η называют также динамической вязкостью в отличие от кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$, где ρ — плотность жидкости (или газа); единица измерения ν — м²/с, или в системе СГС — стокс: 1 стокс = 10⁻⁴ м²/с.

При чистом сдвиге выражение (4.46) сохраняет свой вид:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}. \quad (4.48)$$

Величину, обратную вязкости, $\phi = 1/\eta$ называют текучестью. Напомним, что текучесть тела есть его способность при минимальном усилии неограниченно изменять свою форму без изменения объема.

При $k = \infty$ и $\eta = 0$ вязкая жидкость становится паскалевской жидкостью.

Вязкая жидкость способна сопротивляться сжатию (и растяжению); для этого случая выражение (4.46) получает вид

$$\sigma_z = \lambda \dot{\epsilon}_z, \quad (4.49)$$

где λ — коэффициент вязкости при сжатии (растяжении), иногда называемый коэффициентом Трутона.

Вывод уравнения течения. Рассмотрим плоское ламинарное течение вязкой жидкости, заключенной между двумя параллельными твердыми пластинками, одна из которых неподвижна, а другая перемещается под действием касательной силы F со скоростью v_0 (рис. 4.10).

Молекулы жидкости, ближайшие к сдвигаемой пластине, прилипают к ней и перемещаются с той же скоростью v_0 , увлекая за собой молекулы следующего слоя. Последние, в свою очередь, вовлекают в движение молекулы нижележащего слоя и т. д. Молекулы слоя, граничащего с нижней пластинкой, остаются неподвижными, как бы прилипают к ней.

Каждый слой жидкости сдвигается в плоскостях, параллельных пластинам (подобно сдвигу колоды карт), и движется со своей ско-

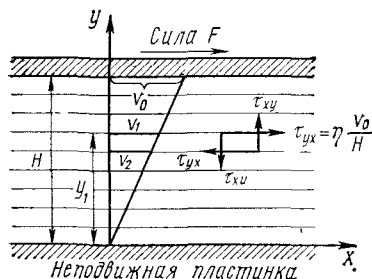


Рис. 4.10. Схема сил плоского ламинарного течения

ростью v_j , пропорциональной расстоянию от пластинки y_j . Таким образом, градиент скорости будет равен

$$\frac{v_j - v_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} = \frac{dv}{dy}.$$

Вследствие взаимодействия слоев жидкости между ними возникают напряжения сдвига τ (внутреннее трение), уравнивающие силу F , т. е. $\tau = F/s$, где s — площадь сдвига. Очевидно, что напряжение τ будет пропорционально градиенту скорости:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}. \quad (4.50)$$

Градиент скорости $\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{H}$ можно выразить как $\frac{1}{H} \left(\frac{du_0}{dt} \right)$, где u_0 — перемещение жидкости вдоль оси x . Принимая высоту H постоянной и учитывая, что $u_0/H = \gamma$, можно получить следующее выражение для градиента скорости:

$$\frac{1}{H} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{u_0}{H} \right) = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Иными словами, $\frac{dv}{dy} = \frac{d\gamma}{dt}$, т. е. соотношения (4.48) и (4.50) являются идентичными.

Из уравнения (4.48) виден физический смысл коэффициента вязкости η — это величина, численно равная силе трения между двумя слоями жидкости с площадью, равной единице, при градиенте скорости, равном единице.

Уравнения движения вязкой жидкости Навье — Стокса. Эти уравнения получают из уравнений (3.78) подстановкой в них условия (4.46), преобразованного к виду

$$\begin{aligned} \sigma_x - p &= 2\eta (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m), \dots; \\ \tau_{xy} &= \eta \dot{\gamma}_{xy}, \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

В этом случае уравнения (3.78) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} (\eta_v + \eta) \frac{\partial \epsilon_m}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} (\eta_v + \eta) \frac{\partial \epsilon_m}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} (\eta_v + \eta) \frac{\partial \epsilon_m}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $\epsilon_m = (1/3) (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$, η и η_v — сдвиговая и объемная вязкости; ρ — плотность; $v_{x,y,z}$ — компоненты скоростей смещений; p — дав-

ление; $F_{x,y,z}$ — проекции вектора внешней силы, отнесенные к единице массы жидкости. Понятия сдвиговой и объемной вязкости будут рассмотрены далее, в формулах (4.54) и (4.67).

Левые части уравнений (4.52) можно записать в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \dots$$

Уравнения (4.52), называемые уравнениями Навье — Стокса, являются основными уравнениями гидродинамики вязкой жидкости. Если жидкость несжимаема, то $\epsilon_m = 0$ и третьи члены уравнений исчезают. При $\eta_v = \eta = 0$ уравнения (4.52) переходят в уравнения Эйлера для идеальной жидкости. К уравнениям (4.52) прибавляют уравнение состояния, связывающее давление с плотностью и температурой, и уравнение неразрывности.

Вязкость грунтов. Вязкость различных сред меняется в весьма большом диапазоне: от $1,8 \cdot 10^{-4}$ П для воздуха, 10^{-2} П для воды, $0,5$ — 10 П для различных масел и до $5 \cdot 10^{22}$ П для земной коры.

Что касается грунтов, то имеющиеся опытные данные по определению вязкости грунтов имеют разброс в значениях от 10^6 до 10^{17} П. Так, по данным Г. В. Сорокиной, пластическая вязкость слабого глинистого ила составляет 10^6 П, а по данным С. А. Роза — $(0,6-10) \cdot 10^{12}$ П.

Вязкость майкопских глин полутвердой консистенции была определена в пределах 10^{12} — 10^{14} П (по З. М. Карауловой), глины с влажностью 25% — $5 \cdot 10^{14}$ П (по Н. Я. Денисову). Для лёссовидных грунтов ($W=22\%$) С. Е. Могилевской было получено значение вязкости, равное $2 \cdot 10^{13}$ — $4 \cdot 10^{14}$ П.

Согласно опытам на скашивание, проведенным во ВНИИГе А. Н. Ермаковой и др., пластическая вязкость некоторых глин оказалась равной: у пасты из кембрийской глины ($W=24-27\%$) — от $1,5 \cdot 10^9$ до $8 \cdot 10^{12}$ П; у пасты из лангарского лёссовидного суглинки ($W=13-21\%$) — от $3,6 \cdot 10^{10}$ до $2,1 \cdot 10^{14}$ П; у пасты из хволинской глины ($W=38\%$) — от $1,5 \cdot 10^7$ до $1,8 \cdot 10^{10}$ П; у той же глины ненарушенного сложения ($W=30-40\%$) — от $6,8 \cdot 10^9$ до $2,8 \cdot 10^{12}$ П.

По данным исследований И. М. Горьковой, вязкость осадочных пород (в диапазоне малых нагрузок, когда течение происходит в условиях ненарушенной структуры грунтов) составляет: у песков пылеватых нарушенного сложения ($W=27-42\%$) — 10^7 П; у илов Черного моря и озерных глин ($W=48-106\%$) — 10^8 — 10^9 П; у илов Каспийского моря и послеледниковых морских глин ($W=49-70\%$) — 10^9 — 10^{10} П; у майкопских глин ($W=12-24\%$) — 10^{11} П; у юрских глин Москвы ($W=32-45\%$) — $(2,5-5,0) \cdot 10^{11}$ П.

Н. Н. Маслов (1968) на основе анализа опытных данных (собственных и других авторов) считает возможным принять следующие осредненные значения вязкости глинистых грунтов: мягкопластичной консистенции — 10^{10} — 10^{11} П; тугопластичной консистенции — 10^{12} — 10^{13} П; полутвердой консистенции — 10^{14} — 10^{15} П; твердой консистенции — 10^{15} — 10^{17} П.

Вязкость в быстропроисходящих крактовременных оползнях оценивается величиной 10^{11} П, а в медленно текущих откосах — от 10^{13} до 10^{14} П.

Значение вязкости (на стадии установившейся ползучести) у некоторых горных пород было получено по данным лабораторных опытов А. П. Максимова и других в следующих пределах: у глинистых сланцев — 10^{17} — 10^{18} П; у песчаников и песчано-глинистых сланцев — 10^{18} — 10^{19} П.

В реологических процессах, протекающих в земной коре в течение геологических периодов времени, значение вязкости оценивается в 10^{20} — 10^{25} П.

Вязкость льда. У льда в зависимости от его температуры, структуры и величины нагрузки вязкость варьируется в пределах от 10^{10} до 10^{15} П [2]. Однако натурные наблюдения ряда исследователей за движением ледников свидетельствуют о том, что у поликристаллического льда при температуре, близкой к 0° , разброс значительно уменьшается и значение вязкости составляет от $1,4 \cdot 10^{13}$ до $2,3 \cdot 10^{14}$ П (в среднем $6,5 \cdot 10^{13}$ П); по данным же Гефели, вязкость льда составляет $(1,7\text{—}2,5) \cdot 10^{14}$ П.

О методах определения вязкости грунтов. Большой разброс опытных значений вязкости для грунтов объясняется не только разнообразием их свойств, но и в не меньшей мере различием в методике определения коэффициента вязкости, да и в самом понимании этой величины. Дело в том, что определение вязкости как константы $\eta = \tau/\dot{\gamma}$ справедливо лишь для идеально вязкой, ньютоновой среды. Грунты же не подчиняются этому закону — у них зависимость между напряжением и скоростью течения нелинейна, а само течение вызывается не общей величиной напряжения τ , а разностью $\tau - \tau_t$ (где τ_t — предел текучести).

Соответственно коэффициент вязкости будет переменной величиной, зависящей от величины приложенной нагрузки. Вследствие того, что некоторые авторы не учитывают указанного обстоятельства, полученные ими данные носят случайный характер.

Точно так же следует иметь в виду, что понятие ньютоновой вязкости относится к процессу вязкого течения с постоянной скоростью. Грунты же, как и большинство реальных тел, деформируются с переменной скоростью, и только на некотором этапе деформирования скорость становится постоянной.

В соответствии с изложенным понятие ньютоновой вязкости можно применять лишь к этому участку. В остальных случаях вязкость следует рассматривать как переменную величину во времени, причем это изменение может достигать внушительной цифры — порядка тысячи раз. Так, если в начале процесса вязкость грунта равняется 10^9 — 10^{10} П, то к концу она достигает 10^{13} — 10^{14} П. В дальнейшем эти вопросы будут рассмотрены более подробно.

Наконец, надо учитывать саму методику определения вязкости. Некоторые авторы используют для таких определений стандартные срезные приборы. Однако эти приборы, широко применяемые для определения прочностных параметров, мало пригодны для исследо-

вания деформационных процессов — они дают грубые ошибки при определении вязкости. Во-первых, в этих приборах создается неоднородное напряженное состояние вследствие концентрации напряжений у краев образца, во-вторых, зона сдвига образца мала и является неопределенной, что не позволяет с достаточной точностью определить относительную деформацию сдвига γ .

К числу недостатков срезного прибора следует отнести переменность рабочей площади образца, ограниченность величины деформации и непостоянство размера зазора между верхней и нижней каретками. Более пригодны для этой цели приборы скашивания, хотя величина деформации в них ограничена и также создается неопределенное напряженное состояние.

Наиболее подходящими приборами для определения вязкости являются приборы для испытания на кручение, обеспечивающие проведение испытания в условиях чистого сдвига и позволяющие развивать практически неограниченные деформации без изменения рабочей площади образца. Для твердых и полутвердых грунтов можно применять приборы, в которых крутящий момент прикладывается к торцу цилиндрического образца, а для грунтов пластичной и текучей консистенции применимы вискозиметры той или иной конструкции (с двумя коаксиальными цилиндрами).

Для определения вязкости в условиях сложного напряженного состояния следует применять те же приборы на кручение, но с одновременным приложением вертикальной нагрузки или всестороннего давления (или и того и другого). Можно также применять приборы трехосного сжатия.

В заключение несколько замечаний об определении вязкости грунта путем погружения шарика. Вязкость в этом случае вычисляют по скорости внедрения в грунт шарика под действием собственного веса и приложенной нагрузки в соответствии с формулой Стокса:

$$\eta_{\text{ст}} = \frac{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{гр}}}{18\nu} d^2,$$

где $\rho_{\text{ш}}$ и $\rho_{\text{гр}}$ — плотность шарика с учетом приложенного груза и плотность грунта; d — диаметр шарика; ν — постоянная скорость погружения шарика в грунт, см/с.

Метод погружения шарика широко используют при исследовании вязких свойств жидкости, однако пользоваться этим методом для грунтов следует с большой осторожностью. Дело в том, что формула Стокса выведена для ньютоновой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости. Для нелинейной вязкой среды, каковой и является грунт, получаемые значения $\eta_{\text{ст}}$ будут зависеть от величины нагрузки на шарик. Этот метод не следует также применять к грунтам, обладающим пределом текучести (бингамова среда), поскольку в этом случае формула Стокса теряет силу.

Объемная вязкость. Как уже отмечалось, в классической механике сплошных сред постулируется положение о том, что у всех идеализированных тел, как твердых, так и жидких, объемные де-

формации возникают мгновенно и являются полностью обратимыми. Соответственно законы объемного деформирования (4.3) для упругого и (4.47) для вязкого тела являются идентичными. Однако реальные тела могут отступать от этого закона — их объемные деформации бывают частично необратимыми и развиваются во времени; в этом случае говорят о наличии у тел объемной вязкости.

В случае, когда тело обнаруживает как упругие, так и вязкие объемные деформации, уравнение объемного деформирования (4.47) имеет вид

$$p = k\varepsilon_m + \eta_V \dot{\varepsilon}_m, \quad (4.53)$$

где k — коэффициент объемной упругости; η_V — коэффициент объемной вязкости.

Если же с телом происходят только вязкие объемные деформации, уравнение объемного деформирования записывают в виде

$$p = \eta_V \dot{\varepsilon}_m. \quad (4.54)$$

Зависимость между коэффициентами вязкости сдвига η , сжатия (растяжения) λ и объемной вязкости η_V для тела, объемные деформации которого описываются формулой (4.54), определяют из выражения

$$\lambda = \frac{3\eta\eta_V}{\eta + \eta_V}. \quad (4.55)$$

Коэффициент поперечной деформации вязкого течения. Поскольку этот коэффициент относится к непрерывно нарастающим необратимым деформациям, то по своей физической сущности он отличается от коэффициента Пуассона, характеризующего упругие свойства тела. Формально же оба коэффициента можно считать идентичными, если рассматривать их как отношение поперечной деформации к продольной. В соответствии с таким определением коэффициент поперечной деформации вязкого течения ν_B определится выражением

$$\nu_B = \dot{\varepsilon}_x / \dot{\varepsilon}_z. \quad (4.56)$$

Очевидно, что коэффициент ν_B вязкого течения является постоянной величиной лишь в том случае, когда скорости поперечной и продольной деформаций постоянны или изменяются во времени по одному и тому же закону.

Если зависимость (4.55) между параметрами вязкого течения выразить через коэффициент ν_B , получим соотношение, аналогичное (4.4):

$$\eta_V = \frac{\lambda}{1 - 2\nu_B} = 2\eta \frac{1 + \nu_B}{1 - 2\nu_B}. \quad (4.57)$$

При отсутствии объемной вязкости ($\eta_V = \infty$) коэффициент ν_B становится равным 0,5 и выражение (4.57) принимает вид $\lambda = 3\eta$.

§ 4.5. НЕЛИНЕЙНАЯ ВЯЗКОСТЬ И БИНГАМОВО ТЕЧЕНИЕ

Нелинейная вязкость. Многие реальные вязкие тела отступают от ньютонова закона (4.46) течения идеально вязкой жидкости. Это отступление, называемое аномальной вязкостью, проявляется в виде переменности коэффициента вязкости η в зависимости от величины нагрузки и времени ее действия.

Зависимость параметра η от нагрузки равносильна нелинейной зависимости между скоростью течения $\dot{\gamma}_i$ и напряжением τ_i (см. кривую 2 на рис. 4.9, б). Такой вид течения называют нелинейной вязкостью, а тело, его обнаруживающее, — нелинейно-вязким телом или неньютоновой жидкостью.

Реологическое уравнение состояния нелинейно-вязкого тела можно записать в виде

$$\tau_i = \varphi(\dot{\gamma}_i) \text{ или } \dot{\gamma}_i = f(\tau_i). \quad (4.58)$$

Это выражение остается справедливым и для чистого сдвига:

$$\tau = \varphi(\dot{\gamma}) \text{ или } \dot{\gamma} = f(\tau). \quad (4.58')$$

Отметим, что объемную вязкость также можно выразить нелинейной зависимостью

$$\sigma_m = \varphi^*(\dot{\epsilon}_m) \text{ или } \dot{\epsilon}_m = f^*(\sigma_m). \quad (4.59)$$

Нелинейный закон (4.58) можно записать в виде

$$\tau_i = \eta(\tau_i) \dot{\gamma}_i, \quad (4.60)$$

где $\eta(\tau_i)$ — переменный коэффициент вязкости, зависящий от величины напряжения; его обратную величину (коэффициент текучести) $\varphi = 1/\eta$ определяют как тангенс угла α наклона кривой 2 к оси абсцисс (см. рис. 4.9, б) с учетом масштаба графика.

С возрастанием напряжения текучесть φ увеличивается, а вязкость уменьшается, меняясь в пределах $\eta_0 \geq \eta(\tau) \geq \eta_m$, где η_0 — начальная, максимальная, вязкость при $\tau_i \rightarrow 0$, а η_m — конечная, минимальная, вязкость при $\tau_i \rightarrow \infty$.

Зависимость между скоростью течения и напряжением. Рассмотрим возможные виды зависимости (4.60). Чаще всего применяют степенную зависимость, установленную для жидких сред де Вале и независимо от него Оствальдом, а для твердых сред — Нортаном и Бейли,

$$\dot{\gamma}_i = a \tau_i^{1/m}, \quad (4.61)$$

или в более корректной форме

$$\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}^* \left(\frac{\tau_i}{\tau^*} \right)^{1/m}, \quad (4.61')$$

где $m \leq 1$, a, τ^* , $\dot{\gamma}^*$ — параметры, причем τ^* вводят для соблюдения размерности и его можно принять равным единице.

Степенную зависимость (4.61) можно записать в более сложной форме:

$$\dot{\gamma}_i = a\tau_i + b\tau_i^{1/m}, \quad (4.62)$$

где иногда принимают $1/m=2$, или в форме

$$\dot{\gamma}_i = a\tau_i + b\tau_i^2 + c\tau_i^3. \quad (4.63)$$

Широко принято представлять зависимость между напряжением и скоростью течения в виде следующих соотношений, физический смысл которых будет рассмотрен в дальнейшем:

$$\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}^* \operatorname{sh} \frac{\tau_i}{\tau^*}; \quad (4.64)$$

$$\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}^* e^{\tau_i/\tau^*}, \quad (4.65)$$

ричем (4.65) есть частный случай (4.64), поскольку при $\tau_i/\tau^* \gg \ln h(\tau_i/\tau^*) \approx (1/2) \exp(\tau_i/\tau^*)$.

Зависимости (4.61), (4.64) и (4.65) можно представить в форме (4.60), если считать, что коэффициент вязкости равен соответственно:

$$\eta(\tau) = \left[\frac{\dot{\gamma}^*}{\tau^*} \left(\frac{\tau_i}{\tau^*} \right)^{\frac{1-m}{m}} \right]^{-1}; \quad (4.66)$$

$$\eta(\tau) = \left[\frac{\dot{\gamma}^*}{\tau_i} \operatorname{sh} \frac{\tau_i}{\tau^*} \right]^{-1}; \quad (4.66')$$

$$\eta(\tau) = \left[\frac{\dot{\gamma}^*}{\tau_i} e^{\tau_i/\tau^*} \right]^{-1}. \quad (4.66'')$$

Структурная вязкость. Оствальд, одним из первых исследовавший аномально вязкие среды, пришел к выводу, что от закона ньютонова течения отступают среды, обладающие структурой. Это объясняется изменением структуры в процессе течения, в результате чего меняется и их вязкость. Соответственно переменную вязкость стали называть структурной вязкостью.

На рис. 4.9, б реологическая кривая (т. е. кривая зависимости между τ и $\dot{\gamma}$) для нелинейно-вязкого тела изображена в виде плавной кривой, не имеющей перегибов. Это справедливо лишь для некоторого диапазона напряжений. В общем же виде реологические кривые для неньютоновой жидкости имеют точки перегиба, как это показано на рис. 4.11.

П. А. Ребиндер и Н. М. Михайлов подразделили структурированные среды на жидко- и твердообразные. У жидкообразных сред процесс течения возникает при любом напряжении, но в отличие от ньютоновой жидкости они обладают двумя критическими точками, соответствующими критическим напряжениям τ_r и τ_f (рис. 4.11, а).

При малых напряжениях сдвига $\tau < \tau_r$ реологическая кривая близка к прямой, т. е. течение вначале, до точки a , развивается с постоянной, максимальной вязкостью η_0 ; затем следует криволинейный участок ab , имеющий точку b перегиба. В пределах этого криволинейного участка вязкость является переменной $\eta = \eta(\tau)$ и называется эффективной вязкостью.

При больших напряжениях $\tau > \tau_f$ реологическая кривая вновь приближается к прямой (точка $в$) и течение происходит с постоянной минимальной вязкостью η_f . Вязкость η_0 соответствует ненару-

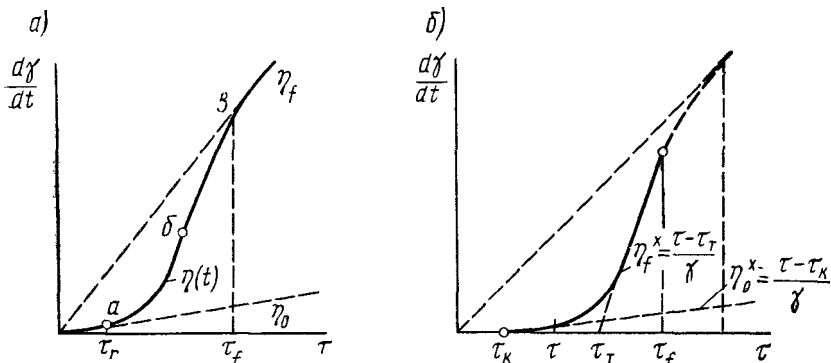


Рис 4.11 Реологические кривые жидкообразных (а) и твердых (б) тел

шенной структуре, не изменяющейся в процессе течения; соответственно это течение происходит по закону Ньютона. Вязкость η_f соответствует предельно разрушенной структуре, когда влияние структурных изменений уже перестает сказываться и течение вновь становится ньютоновым, но уже с минимальной вязкостью.

У твердообразных сред (рис. 4.11, б) течение возникает только после превышения некоторого предела τ_k . До этого предела деформации являются или чисто упругими, или протекают с малой скоростью, которой можно пренебречь. В остальном же реологическая кривая твердообразной среды аналогична кривой жидкообразной среды, она как бы только сдвинута по оси абсцисс на величину τ_k .

Участок этой кривой в пределах $\tau_k < \tau < \tau_r$ можно рассматривать как линейный с постоянной вязкостью (называемой шведовой) $\eta_0^* = (\tau - \tau_k) / \dot{\gamma}$.

При $\tau > \tau_r$ начинается разрушение структуры и вязкость становится переменной.

Процесс разрушения завершается либо течением предельно разрушенной структуры с наименьшей вязкостью, либо разрывом сплошности.

Можно ввести еще второй предел τ_r , принимая, что в интервале $\tau_r < \tau < \tau_f$ кривая аппроксимируется прямой и течение происходит при постоянной вязкости $\eta_f^* = (\tau - \tau_r) / \dot{\gamma}$. Очевидно, что подобную же аппроксимацию можно принять и для кривой $\frac{d\gamma}{dt} - \tau$ рис. 4.11, а).

Вязкопластичность. Реологическую кривую твердообразного тела (рис. 4.11, б) схематически можно представить в виде прямой $\mathcal{Z}$ (см. рис. 4.9, б). Это означает, что указанное тело начинает течь только тогда, когда напряжение превзойдет предел текучести τ_t (иногда называемый также предельным напряжением сдвига).

Такое отступление от закона Ньютона было установлено Бингамом при изучении вязкого течения масляных красок и суспензий глин. Масляная краска является, как известно, дисперсией частиц красителя в масле. Краски должны отвечать двум требованиям: легко наноситься на окрашиваемую поверхность (обладать как можно большей текучестью) и в то же время не стекать с вертикальной окрашенной поверхности, т. е. обладать большой вязкостью.

Если исходить из представления о суспензии как о ньютоновой жидкости, то эти два условия находятся в противоречии. Бингам и Грин в своей работе 1919 г., заложившей основы реологии, показали, что краски, удовлетворяя одновременно двум указанным требованиям, являются принципиально новым телом, а именно вязкопластическим телом.

Авторы ввели понятие о вязкопластической модели, именуемой в настоящее время телом Бингама.

Уравнение течения бингамова тела записывается в следующем виде:

$$\tau_i = \tau_t + \eta_{пл} \dot{\gamma}_i, \quad (4.67)$$

где $\eta_{пл}$ — коэффициент пластической вязкости, или просто пластическая вязкость.

Отметим, что к аналогичному виду можно привести уравнение Шведова, предложенное им в 1890 г. (оно будет рассмотрено в следующем параграфе); поэтому зависимость (4.67) часто называют законом Шведова — Бингама.

В более общем виде уравнения состояния бингамова тела записывают в следующей форме:

$$\tau_i = G\gamma_i \quad \text{при} \quad \tau_i < \tau_t; \quad (4.68)$$

$$\tau_i = \tau_t + \eta_{пл} \dot{\gamma}_i \quad \text{при} \quad \tau_i \geq \tau_t;$$

$$p = k \varepsilon_m.$$

Такая запись означает, что при напряжениях, меньших предельного значения τ_t , тело деформируется упруго по закону Гука, а по достижении этого предела оно начинает течь с постоянной скоростью, пропорциональной избытку напряжения $(\tau_i - \tau_t)$. Объемные же деформации являются упругими, причем частным случаем является условие несжимаемости $k = \infty$.

Как видно, первый член τ_t уравнений (4.68) аналогичен условию пластичности Сен-Венана (4.5) для твердого тела; второй же член характеризует вязкое ньютоново течение (4.46). Таким образом, уравнение (4.68) описывает поведение комбинированного тела,

обладающего свойствами идеальной пластичности и идеальной вязкости. Напомним, что течение такого тела называют пластическим, подчеркивая этим термином аналогию с пластическим деформированием, возникающим при достижении напряжением предельного значения.

Реологическая кривая бингамова тела показана на рис. 4.9, б (кривая 3). Из этого графика хорошо видна разница между коэффициентами η и $\eta_{пл}$. Коэффициент η — танген угла наклона прямой 1, исходящей из начала координат, тогда как $\eta_{пл}$ есть тангенс угла наклона прямой 3, отсекающей на оси абсцисс отрезок $\tau_i = \tau_t$.

Если для бингамова течения формально определять коэффициент вязкости как величину $\eta = \tau_i / \dot{\gamma}_i$, то эта величина будет переменной, поскольку переменным является угол α наклона прямой, соединяющей центр осей координат с данной точкой на бингамовой прямой. Такую вязкость называют кажущейся вязкостью (η').

При $\tau_t = 0$ бингамово тело переходит в ньютонову жидкость, при $\eta_{пл} = 0$ — в упругопластическое тело Сен-Венана, а в случае $G \rightarrow \infty$ — в жесткопластическое тело Прандтля.

§ 4.6. ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ

Упруговязкость. Упругость, вязкость и пластичность являются кардинальными реологическими свойствами сплошной среды. Идеализированные тела, наделенные этими свойствами, были рассмотрены выше. Они сведены в схему, представленную на рис. 4.12. Графики а, б и в этой схемы относятся к твердым телам; графики г, д, е — к вязким.

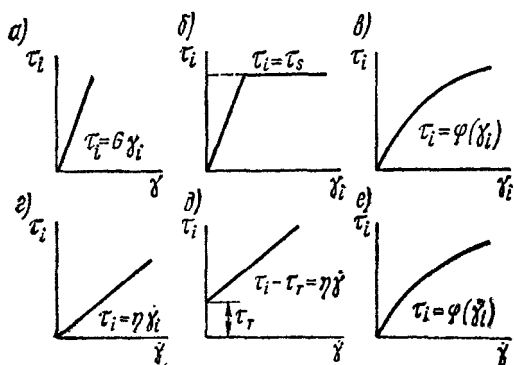


Рис. 4.12. Диаграмма деформирования тел:
а — упругого; б — упругопластического; в — нелинейно-упругого; г — вязкого; д — вязкопластического; е — нелинейно-вязкого

Поведение под нагрузкой твердых тел характеризуется зависимостью между напряжением и деформацией. У вязких же тел деформация нарастает во времени и зависимость «напряжение — деформация» теряет свою однозначность. Поведение под нагрузкой таких тел характеризуется зависимостью между напряжением и скоростью деформации.

Следует обратить внимание на аналогию между диаграммами деформирования для твердых и вязких тел, что позволяет применить решения теории упругости и теории пластичности для задач о вязком течении — линейном в первом случае и нелинейном во вто-

ром. Указанные решения можно использовать (при определенных ограничениях) формальным путем — простой заменой деформации γ_i на ее скорость $\dot{\gamma}_i$.

Упругость является характерным свойством твердых тел, вязкость — жидких. Однако многие реальные материалы обладают обоими этими свойствами. Такие тела называют упруговязкими. Упругость этих тел проявляется в восстановлении деформаций после разгрузки, вязкость — в том, что деформации после загрузки развиваются во времени.

Типичным проявлением упруговязких свойств является упругое последействие. Однако у многих тел во времени развиваются не

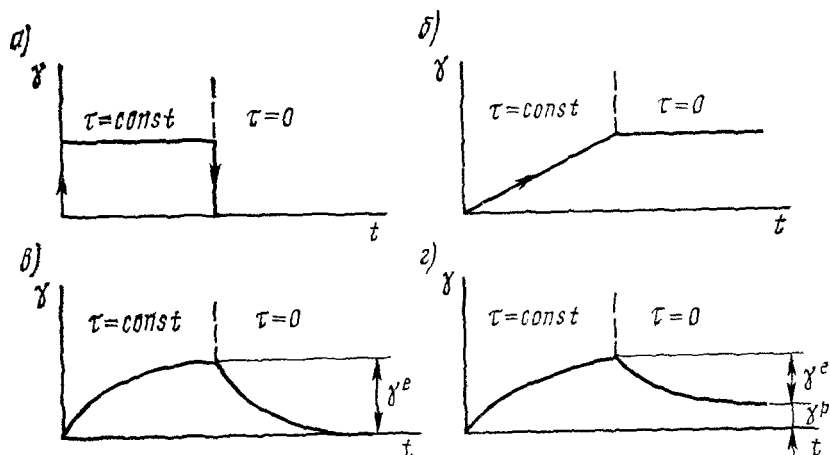


Рис. 4.13. Развитие деформации во времени при нагрузке ($\tau = \text{const}$) и разгрузке ($\tau = 0$) в телах:

а — в идеально упругом; б — идеально вязком; в — упруговязком; г — упруговязкопластическом теле

только восстанавливающиеся (упругие), но и остаточные (пластические) деформации; такой процесс называют пластическим последействием, а тело, в котором он развивается, — упруговязкопластическим.

Напомним, что упругопластическими и вязкопластическими телами называются тела, в которых до превышения предельного напряжения происходят только упругие или вязкие деформации, а при достижении этого предела возникает пластическое течение.

На рис. 4.13 изображено развитие деформаций во времени для различных тел. Деформация упругого тела (график а) возникает и восстанавливается мгновенно, не изменяясь во времени. Деформация вязкого тела (график б) нарастает во времени непрерывно с постоянной скоростью; после разгрузки она не восстанавливается.

Деформация упруговязкого тела (график в) развивается во времени, но является затухающей, возрастая со все уменьшающейся скоростью; после разгрузки деформация полностью восстанавливается также во времени. Деформация упругопластического тела

(график 2) развивается во времени, но носит незатухающий характер и восстанавливается лишь частично

Уравнение последействия Кельвина. Реологическое уравнение состояния упруговязкой среды (рис. 4.13, в) было рассмотрено Кельвином в известной работе «Об упругости и вязкости металлов» и почти одновременно с ним Фойхтом. Это уравнение имеет вид

$$\tau_i = G\gamma_i + \eta\dot{\gamma}_i, \quad (4.69)$$

где G — модуль упругости сдвига, а η — коэффициент вязкости.

Решая уравнение (4.69) относительно γ_i (при $\tau_i = \text{const}$), получим

$$\gamma_i = \frac{\tau_i}{G} (1 - e^{-t/T_p}), \quad (4.70)$$

где $T_p = \eta/G$ — время последействия.

Выражение (4.70) описывает процесс запаздывания развития упругой деформации (последействие). В начальный момент времени деформации нет, а при $t \rightarrow \infty$ она достигает своего предельного значения $\gamma_i = \tau_i/G = \gamma_{i(\infty)}$. При разгрузке деформация восстанавливается по закону

$$\gamma_i = \gamma_{i(0)} e^{-t/T_p} \quad (4.71)$$

и полностью исчезает при $t \rightarrow \infty$.

Явление запаздывания деформаций Кельвин рассматривал как проявление в твердом теле сил внутреннего трения (вязкости). Он писал, что «в упругом твердом теле существует молекулярное трение, которое с должным основанием можно назвать вязкостью твердого тела, поскольку, выражая внутреннее сопротивление изменению формы и завися от скорости изменения, оно должно быть того же класса, что и молекулярное трение жидкости, которое называют вязкостью».

Примером такого тела, по Кельвину, является упругая пористая среда, поры которой заполнены вязкой жидкостью. Именно такой средой и является глинистый грунт, поэтому вполне логично, что К. Терцаги и Н. М. Герсегованов применили модели кельвинова тела для отображения процесса консолидации глины.

Релаксация. Другое проявление упруговязких свойств тела заключается в релаксации (расслаблении) напряжений.

Предположим, что мы испытываем балку из упруговязкого материала на изгиб (рис. 4.14). Под воздействием постоянной силы F в балке возникает прогиб f , развивающийся во времени по некоторому закону $f(t)$, т. е. по законам последействия. Если мы захотим, чтобы начиная с некоторого момента времени, принимая его за нулевой отсчет $t=0$, нарастание прогиба прекратилось и он сохранял постоянное значение $f_0 = \text{const}$, то очевидно, что для этого надо было бы уменьшать силу F по некоторому закону $F(t)$. Уменьшение во времени напряжения, необходимого для поддержания постоянной деформации, и называется релаксацией напряжения (от латинского «relaxatio» — ослабление).

Релаксация является следствием перераспределения упругой и пластической деформаций. Действительно, суммарная деформация упруговязкого тела складывается из упругой (e) и вязкой, остаточной (p) частей.

$$\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^p.$$

Поскольку деформации γ_i^p возрастает во времени, то для соблюдения условия $\gamma_{i(0)} = \text{const}$ должно уменьшаться γ_i^e ; Учитывая, что $\gamma_i^e = \tau_i / G$, указанное условие принимает вид

$$\gamma_{i(0)} = \tau_i / G + \gamma_i^p = \text{const}. \quad (4.72)$$

Отсюда следует, что постоянство деформаций $\gamma_{i(0)} = \text{const}$ обеспечивается за счет уменьшения во времени напряжения $\tau_i = \tau_i(t)$.

Испытания на релаксацию заключаются в задании образцу некоторой начальной деформации $\gamma_{i(0)}$, которой соответствует начальное напряжение $\tau_{i(0)}$. Затем, когда эта деформация тем или иным путем сохраняется постоянной, измеряют напряжение, изменяющееся во времени.

Уравнение релаксации Максвелла. Рассматривая динамику газов и объясняя их вязкость релаксацией упругих напряжений, Максвелл писал, что в релаксирующей среде упругая сила τ , вызвавшая деформацию γ , «не остается постоянной, а будет иметь тенденцию к исчезновению со скоростью $d\tau/dt$, зависящей от силы и от природы материала» («О динамической теории газов», 1868).

Явления последействия и релаксации в последующем изучались Томпсоном, написавшим об этом явлении специальную главу в книге «Приложение динамики к физике и химии» (1874), и Больцманом (1876); последний разработал математическую теорию последействия деформаций и напряжений, учитывающую предшествующую историю нагружения. Теория Больцмана была впоследствии положена в основу теории наследственных сред, разработанной Вольтеррой (1931).

С позиции статистической физики релаксацию можно рассматривать как процесс установления статистического равновесия в физической системе, когда микроскопические величины, характеризующие состояние системы (напряжения), асимптотически приближаются к своим равновесным значениям.

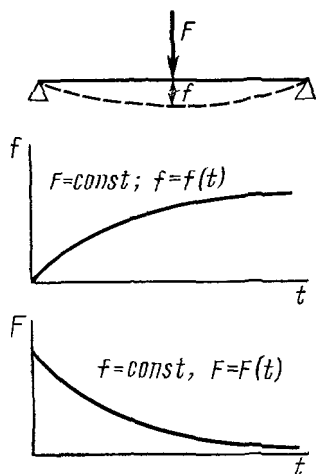


Рис 4.14 Кривые последействия и релаксации

Уравнение релаксирующего упруговязкого (максвеллова) тела имеет вид

$$\dot{\gamma}_t = \frac{1}{\eta} \tau_t + \frac{1}{G} \dot{\tau}_t. \quad (4.73)$$

Приняв в этом уравнении деформацию постоянной $\gamma_t = \gamma_{t(0)} = \text{const}$, получим закон релаксации Максвелла

$$\tau_t = \tau_{t(0)} e^{-t/T_r}, \quad (4.74)$$

где $\tau_{t(0)} = G\gamma_{t(0)}$ — начальное напряжение; $T_r = \eta/G$ — время (период) релаксации.

Как видно, у максвеллова тела при $t \rightarrow \infty$ напряжение падает до нуля. Позднее (1890) Ф. Н. Шведов на примере желатины обнаружил аномалию вязкости и упругость формы у некоторых жидких сред, показав, что у них расслабление напряжения происходит не до нуля, а до некоторой конечной величины $\tau_{i(k)}$. Соответственно он предложил поправку к уравнению Максвелла (4.74), которое, по Шведову, принимает форму

$$\tau_t = \tau_{i(k)} + [\tau_{i(0)} - \tau_{i(k)}] e^{-t/T_r}. \quad (4.75)$$

Отсюда уравнение состояния тела Шведова получит вид

$$\dot{\gamma}_t = \frac{1}{\eta} [\tau_t - \tau_{i(k)}] + \frac{1}{G} \dot{\tau}_t. \quad (4.76)$$

При $\gamma_t = \text{const}$ это уравнение переходит в уравнение релаксации (4.75), а при $\tau_t = \text{const}$ — в уравнение пластично-вязкого течения Бингама (4.67), если принять $\tau_{i(k)} = \tau_t$.

Параметры T_r (время релаксации) и T_p (время последействия) формально равны одному и тому же значению η/G . Однако по своей физической сущности эти параметры существенно различны.

Упруговязкое последедействующее тело Кельвина (4.69) можно рассматривать как упругое твердое тело, обладающее свойством вязкости. Свойством же релаксации это тело не обладает, и при $\gamma_t = \text{const}$ закон (4.69) трансформируется в закон упругости Гука.

Упруговязкое тело Максвелла (4.73) можно рассматривать как вязкую жидкость, обладающую упругими свойствами. Свойствами же последействия это тело не обладает и при $\tau_t = \text{const}$ течет с постоянной скоростью, поскольку при $\tau_t = \text{const}$ закон (4.73) трансформируется в закон идеально вязкой жидкости Ньютона.

Время релаксации T_r является одним из наиболее важных реологических параметров. Для определения формального значения этого параметра рассмотрим момент времени, равный $t = T_r$. Для этого случая уравнение (4.74) принимает вид $\tau_t = \tau_{t(0)}/e$. Отсюда следует определение времени релаксации T_r как такого времени, за которое напряжение τ_t уменьшится в $e = 2,718$ раза по отношению к своему начальному значению $\tau_{t(0)}$ (рис. 4.15).

По своей физической сущности время релаксации соответствует так называемому времени оседлой жизни молекул в положении временного равновесия. Иными словами, время релаксации определяет «подвижность» материала.

У жидкостей время «оседлой жизни» молекул в миллион раз меньше, чем у твердых кристаллических тел. Поэтому чем меньше величина T_r , тем в большей степени материал приближается к жидкости, и, наоборот, чем больше T_r , тем более твердообразным является тело.

Вообще же все реальные тела обладают упругими (характерными для твердых тел) и вязкими (характерными для жидкости) свойствами. Только проявление этих свойств зависит от времени воздействия нагрузки (или от времени наблюдения), точнее, от соотношения этого времени и времени релаксации. Действительно, представим формулу (4.73) в следующем виде:

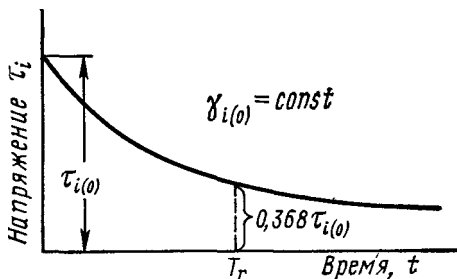


Рис. 4.15. Кривая релаксации напряжения

$$\gamma_i = \frac{\tau_i}{G} + \frac{1}{GT_r} \int_0^t \tau_i dt \quad \text{или} \quad \tau_i = \eta \dot{\gamma}_i - T_r \dot{\tau}_i.$$

Если время наблюдения значительно меньше времени релаксации $t \ll T_0$, то тело ведет себя как твердое тело Гука: $\gamma_i = \tau_i/G$. Если же время $t \gg T_r$, у тела проявляются свойства ньютоновой жидкости: $\tau_i = \eta \dot{\gamma}_i$. Так, у горных пород, формирующих земную кору, время релаксации изменяется тысячелетиями (например, у известняка $T_r = 10^{10}$ с), у стекла — столетиями, у льда — сотнями секунд, у воздуха — $1,96 \cdot 10^{-10}$ с, у воды — 10^{-11} с.

Соответственно если к воде приложить силу, действующую в течение времени, меньшем 10^{-11} с, то у нее будут проявляться упругие свойства. И, наоборот, горные породы под воздействием давления способны за геологические периоды времени развивать вязкое течение, проявление которого достоверно установлено геологией. Характерным материалом с этой точки зрения является лед.

Время релаксации льда составляет 10^2 — 10^3 с, и в пределах этого времени лед ведет себя как упругое тело, например он хрупко разрушается при быстром ударе. При большем же времени воздействия нагрузки лед течет подобно вязкой жидкости, как это происходит в ледниках. Аналогичное поведение — хрупкое разрушение при быстром приложении нагрузки и вязкое течение при длительном воздействии нагрузки — отчетливо наблюдается у мерзлых грунтов.

Аккумуляция напряжений. Допустим, что после загрузки упруговязкого тела мы разгрузим его. Деформация при этом будет во времени восстанавливаться (см. рис. 4.13, в).

Затем прервем процесс восстановления деформации, приняв этот момент времени за нулевой отсчет $t=0$, и потребуем, чтобы было сохранено некоторое постоянное значение восстанавливающейся деформации: $\gamma_0^e = \text{const}$. Очевидно, для этого потребуется приложить какое-то напряжение τ^e , задерживающее восстановление деформации, и увеличивать его во времени по некоторому закону $\tau^e = \tau^e(t)$. Накапливание напряжения во времени, необходимого для поддержания постоянной восстанавливающейся деформации, и называют аккумуляцией напряжения. Как видно, этот процесс является как бы обратным по отношению к релаксации и соотносится с последним как прямое (при загрузке) и обратное (при разгрузке) последствие.

§ 4.7. УПРУГОПЛАСТИЧНО-ВЯЗКИЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ

Грунт как упругопластично-вязкая среда. Грунт следует рассматривать как нелинейную упругопластично-вязкую сжимаемую среду. Нелинейность проявляется в изменении интенсивности нарастания деформаций с увеличением напряжения, упругость — в наличии у грунта восстанавливающихся деформаций, пластичность — в развитии необратимой деформации, вязкость — в способности развивать деформации во времени. Необратимые деформации проявляются как при сдвиге грунта, так и при деформации его объема.

Деформации сдвига грунта являются следствием взаимного смещения и перекомпоновки минеральных частиц, окруженных гидратной оболочкой. Объемные деформации являются следствием перекомпоновки и более плотной укладки частиц с соответствующим изменением объема пор и количества свободной воды и газа, а также изменением размера мицелл и самих частиц.

Обратимые деформации грунта. Упругие деформации сдвига грунта происходят вследствие соответствующих деформаций скелета (изгиба чешуйчатых минеральных частиц и пр.) и обратимых смещений минеральных частиц.

Обратимые объемные деформации в первую очередь являются следствием изменения размера мицелл (вносящим особо большой вклад в объемные деформации), объемных деформаций скелета и обратимых объемных изменений заземленных пузырьков газа.

При увеличении нагрузки частицы сближаются и уменьшается толщина водной пленки. При снятии нагрузки силы отталкивания раздвигают частицы, чем и обусловливается восстанавливающаяся часть объемной деформации. Очевидно, что обратимые объемные деформации возможны лишь в пределах таких нагрузок, при которых вследствие уменьшения расстояния между частицами проявляются отталкивающие силы.

Имеется ряд экспериментальных доказательств обратимого сжатия мицелл. Так, Т. Лэмб в своей статье в журнале «Proc. ASMS» (v. 91, 1958) приводит данные опытов, в которых после ряда повторных загрузок — разгрузок иллитовых и монтмориллонитовых образцов — получена полностью обратимая компрессионная кривая; при изменении состава раствора (добавления соли) характер этой кривой менялся.

Обратимая компрессионная кривая была получена Лэмбом также путем изменения температуры грунта: с ее повышением толщина водной пленки уменьшалась, а с понижением — увеличивалась.

Оба эти факта находятся в хорошем соответствии с теорией двойного слоя, которая, как уже говорилось, хотя и не дает для грунта количественного соответствия, но может качественно объяснить ряд явлений.

В последнее время появились высказывания, согласно которым упругие деформации грунта происходят не только вследствие изменения толщины водных пленок, но и упругих деформаций самого скелета грунта. Так, А. К. Ларионов, проводя опыты на компрессию водонасыщенного и высушенного при 150°C грунта, получил, что у сухого грунта упругие деформации не уменьшились, а в некоторых опытах даже возросли.

При изучении упругих деформаций следует различать поведение грунтов с водно-коллоидными и кристаллизационными связями.

Поскольку водно-коллоидные связи, возникающие в результате воздействия электрических межчастичных сил, зависят от расстояния между частицами, то после снятия нагрузки эти связи восстанавливаются. Однако ввиду малой прочности водно-коллоидных связей даже небольшие нагрузки вызывают наряду с обратимыми невосстанавливающимися деформациями, сопровождаемые перекомпоновкой частиц. Поэтому у грунтов с водно-коллоидными связями доля упругих деформаций невелика; она повышается с увеличением плотности грунта и достигает значительной величины лишь у сильно уплотненных грунтов.

Кристаллизационные связи являются жесткими и при разрушении не восстанавливаются. Поэтому у грунтов с такими связями обратимые деформации возникают лишь при нагрузках, не вызывающих разрушения. Соответственно при небольших нагрузках доля упругих деформаций у грунтов с кристаллизационными связями может быть достаточно ощутимой.

Необратимые деформации являются следствием необратимого смещения частиц и их перекомпоновки. Необратимые изменения объема связаны с перекомпоновкой частиц и изменением пористости с отжатием свободной воды и воздуха. Необратимые деформации возникают тогда, когда напряжение превышает некоторый предел и структурные связи нарушаются. При этом сами деформации также сопровождаются изменением структуры. Поэтому их часто называют структурными деформациями.

ют роль адсорбционные силы. Необратимые вязкие деформации называют просто течением.

До последнего времени многие авторы считали, что вязкие деформации грунта возникают вследствие движения водной пленки, протекающего во времени. В частности, полагали, что вязкая объемная деформация вызывается перемещением молекул адсорбированной воды от контактов в сторону пор или наоборот; именно поэтому для такой деформации применяют определение «адсорбционная».

В то же время имеется иная, по нашему мнению, более правильная точка зрения, согласно которой водная пленка сама непосредственно не перемещается, а играет роль смазки. Смещение частиц, окруженных пленкой связанной воды, сопровождается скольжением молекулы воды, связанной с одной частицей, по молекуле, связанной с другой частицей. При этом количество влаги увеличивается: в результате поворота частиц расстояние между ними становится большим и в эти места подтягивается влага.

При объемной ползучести перекомпоновка частиц и их скольжение (по водной пленке) приводят к изменению расстояния между частицами и выталкиванию из места контактов некоторого количества воды.

Следует отметить, что вязкие деформации присущи не только грунтам с водно-коллоидными связями, но и грунтам и горным породам с цементационными кристаллизационными связями, включая полускальные и скальные породы, глинистые грунты, высушенные до воздушно-сухого состояния и др. Вопрос этот подробнее будет рассмотрен ниже.

§ 4.8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Некоторые понятия термодинамики. Как известно, все физические процессы, происходящие в природе, связаны с обменом энергии между данной термодинамической системой и соседними системами или внешним полем. Система находится в термодинамическом равновесии, если в ней прекращаются какие-либо макроскопические изменения; для нарушения равновесия необходимо внешнее воздействие на систему.

Всякое изменение термодинамического состояния системы есть термодинамический процесс. Этот процесс называется равновесным, если система непрерывно проходит ряд равновесных состояний, и неравновесным, когда система проходит через ряд неравновесных состояний.

Равновесный процесс может протекать и в обратном направлении, в этом случае его называют обратимым. Равновесный процесс может быть как обратимым, так и необратимым. Неравновесный процесс всегда необратим.

Процесс линейно-упругого деформирования тела будет равновесным и обратимым. Таким же является и процесс нелинейно-упругого (см. рис. 4.5, а) деформирования, тогда как нелинейная

упругопластическая деформация (см. рис. 4.5, б) будет хотя и равновесным, но необратимым процессом. Вязкое деформирование является и неравновесным и необратимым процессом.

Работа деформаций. Внешние силы, действующие на тело и вызывающие его деформирование, совершают некоторую работу. Поскольку эту работу обычно относят к единице объема тела, то говорят о работе напряжений, вызвавших данную деформацию, или просто об удельной работе (плотности работы) деформаций. Приращение удельной работы деформаций определится выражением

$$\delta A = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad (4.77)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций ($i, j = x, y, z$).

Элементарная работа здесь обозначена через δA , а не через dA , поскольку в общем случае она не является полным дифференциалом. Удельная работа деформаций будет равна

$$A = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (4.78)$$

Удельная мощность напряжений, необходимая для деформирования, определится выражением

$$N = \frac{\delta A}{\delta t} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.79)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скорости деформации.

Работа деформации A и мощность $N = \dot{A}$, вызвавшая эти деформации, складываются из работы деформации объема A_V и работы деформации формы A_D и мощностей N_V и N_D соответственно:

$$A = A_V + A_D; \quad (4.80)$$

$$N = \dot{A}_V + \dot{A}_D = N_V + N_D. \quad (4.81)$$

Учитывая, что работы объемной деформации и деформации формы равняются:

$$A_V = \int_0^{\varepsilon_m} \sigma_m d\varepsilon_m; \quad A_D = \int_0^{\gamma_l} \tau_l d\gamma_l, \quad (4.82)$$

получим, что общая работа деформаций равна

$$A = \int_0^{\varepsilon_m} \sigma_m d\varepsilon_m + \int_0^{\gamma_l} \tau_l d\gamma_l. \quad (4.83)$$

Работа упругой деформации. Работу деформации упругого тела при его нагружении определяют путем подстановки в выражения (4.83) зависимостей (4.3). В результате этого получим:

$$A_V^e = k \int_0^{\varepsilon_m} \varepsilon_m d\varepsilon_m = \frac{k\varepsilon_m^2}{2} = \frac{\sigma_m^2}{2k}; \quad (4.84)$$

$$A_D^e = G \int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon_i d\varepsilon_i = \frac{G\gamma_i^2}{2} = \frac{\tau_i^2}{2G}. \quad (4.85)$$

При разгрузке деформация восстановится, т. е. элементарные частицы вернуться в свое исходное положение, не встречая сопротивления внешних сил, совершая свободные колебания. При этом будет совершена работа, аналогичная работе при нагрузке, но с обратным знаком:

$$A_V^{(-e)} = \int_{\varepsilon_m}^0 \sigma_m d\varepsilon_m = -\frac{\sigma_m^2}{2k}; \quad A_D^{(-e)} = \int_{\gamma_i}^0 \tau_i d\gamma_i = -\frac{\tau_i^2}{2G}. \quad (4.86)$$

Отсюда общая работа деформации упругого тела за цикл «нагрузка — разгрузка» равна нулю. Очевидно, что такой же результат получим в том случае, если происходит хотя и нелинейная, но полностью обратимая деформация (см. рис. 4.5, а). Действительно, в этом случае работа деформации формы при нагрузке будет равна по абсолютной величине, но противоположна по знаку:

$$A_D^{(+e)} = \int_0^{\gamma_i} \varphi(\gamma_i) d\gamma_i; \quad A_D^{(-e)} = \int_{\gamma_i}^0 \varphi(\gamma_i) d\gamma_i = - \int_0^{\gamma_i} \varphi(\gamma_i) d\gamma_i. \quad (4.87)$$

Таким образом, работа внешних сил, затрачиваемая на упругую деформацию (безразлично, линейную или нелинейную) тела в процессе его загрузки, накапливается в нем за счет преобразования кинетической энергии в потенциальную. Эта энергия полностью возвращается при разгрузке, преобразуясь в кинетическую энергию движения элементарных частиц при восстановлении деформаций. Напомним, что кинетическая энергия тела является мерой его механического движения, а потенциальная энергия есть энергия, зависящая только от взаимного расположения взаимодействующих элементарных частиц этого тела.

Графически работу деформаций изображают площадью *abc* диаграммы «напряжение — деформация» (рис. 4.16). В случае нелинейной деформации эта работа $A = \int_0^{\gamma_i} \tau_i d\gamma_i$ не равна величине

не $\Phi = \int_0^{\tau_i} \gamma_i d\tau_i$, называемой дополнительной работой (площадь *Oab* на рис. 4.16); при линейном законе деформирования $A = \Phi$.

Для описания процесса упругого деформирования иногда используют понятие упругого потенциала Π . Этот потенциал определяют из соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (4.88)$$

вытекающего из условия, что для упругого тела (именно для упругого) приращение работы есть полный дифференциал.

Работа необратимой деформации. Работу такой деформации определяют, учитывая соотношения (4.7) и (4.9), исходя из следующих выражений:

$$A_B^p = \int_0^{\varepsilon_m^p} \varphi^*(\varepsilon_m^p) d\varepsilon_m^p; \quad A_D^p = \int_0^{\gamma_i^p} \varphi(\gamma_i^p) d\gamma_i^p. \quad (4.89)$$

Эти выражения аналогичны выражениям для работы нелинейной упругой деформации (4.87) с той разницей, что они справедливы лишь для процесса нагружения. При разгрузке же работа будет равна нулю. Таким образом, энергия, затрачиваемая на необратимое деформирование, не накапливается в теле, а полностью рассеивается, превращаясь во внутреннюю энергию хаотического (теплового) движения частиц. Соответственно работу необратимой деформации называют работой диссипации; она всегда положительна.

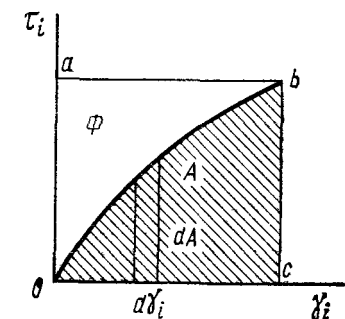


Рис. 4.16. Работа, затрачиваемая на деформирование тела

Для процесса вязкого деформирования, при котором мы имеем дело не

с деформациями, а с их скоростями, целесообразно оперировать не с работой, а с мощностью

$$N = \delta A / \delta t = F (dr/dt), \quad (4.90)$$

где F — сила; dr — перемещение; dt — промежуток времени, за который совершена работа $\delta A = F dr$.

Поскольку вязкие деформации необратимы, энергия вязкого деформирования, так же, как и пластического, не накапливается в теле, а диссипирует — рассеивается.

Энергия диссипации. При пластическом деформировании диссипация энергии, не завися от скорости деформации, обусловлена сухим, кулоновым трением. При вязком же деформировании диссипация энергии пропорциональна скорости течения и связана с вязким внутренним трением.

В обоих случаях энергия диссипации, рассеиваясь в теле, затрачивается, во-первых, на его нагревание, переходя в тепловую энергию, а во-вторых, она приводит к необратимым изменениям струк-

туры тела. Такая перестройка направлена на расслабление материала, элементарные частицы которого стремятся занять положение, соответствующее минимуму свободной и поверхностной энергии.

Работа упругопластической деформации. Работа деформаций грунта будет складываться из упругой и диссипированной работы, каждая из которых включает в себя работу объемного и сдвигового деформирования:

$$dA = dA^e + dA^p = (dA_v^e + dA_D^e) + (dA_v^p + dA_D^p), \quad (4.91)$$

$$\text{или } dA = \sigma_m (d\varepsilon_m^e + d\varepsilon_m^p) + \tau_i (d\gamma_i^e + d\gamma_i^p).$$

Например, работа упругопластических деформаций определится выражением

$$A = A_v + A_D^e + A_D^p = \frac{\sigma_m^2}{2k} + \frac{\tau_i^2}{2G} + \int_0^{\tau_i^p} \varphi(\gamma_i^p) d\gamma_i^p, \quad (4.92)$$

где первый член правой части отображает работу объемной (упругой) деформации, а второй и третий члены — работу сдвиговой (упругой и пластической) деформации.

Это выражение представляет собой запись в энергетической форме уравнения деформационной теории пластичности (теории малых упругопластических деформаций), рассмотренной в гл. 3.

Уравнение теории течения в энергетической форме имеет вид

$$N = \dot{A} = \dot{A}_v + \dot{A}_D^e + \dot{A}_D^p. \quad (4.93)$$

Термодинамическое описание процесса деформирования. В соответствии с первым законом термодинамики приращение плотности внутренней энергии dE и приращение работы деформаций $\delta A = \delta A_v + \delta A_D$ равняются количеству тепла δQ , полученному телом в процессе деформирования,

$$\delta Q = dE + \delta A. \quad (4.94)$$

Согласно второму закону термодинамики,

$$\delta Q \leq \Theta dS, \quad (4.95)$$

где Θ — абсолютная температура, К; S — энтропия, Дж/К, т. е. количество тепла Q , Дж, сообщенное системе при бесконечно малом квазистатическом изменении ее состояния в обратимом процессе, отнесенное к абсолютной температуре (при необратимом процессе приращение энтропии включает в себя величину рассеяния). Подставив (4.95) в (4.94), получим соотношение

$$\Theta dS \geq dE + (\delta A_v + \delta A_D), \quad (4.96)$$

из которого следует, что приращение внутренней энергии зависит от объемной и сдвиговой деформаций и от температуры. Знак ра-

венства (4.96) относится только к обратимым процессам, знак $>$ — к необратимым.

Поскольку dE — полный дифференциал, можно показать, что

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_m} \delta \varepsilon_m + \frac{\partial E}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i + \frac{\partial E}{\partial \Theta} \delta \Theta. \quad (4.97)$$

Подставляя это соотношение в выражение (4.96), получим [9]

$$\Theta dS \geq \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_m} - \sigma_m \right) \delta \varepsilon_m + \left(\frac{\partial E}{\partial \gamma_i} - \tau_i \right) \delta \gamma_i + \frac{\partial E}{\partial \Theta} \delta \Theta. \quad (4.98)$$

При этом следует помнить, что деформации ε_m и γ_i включают в себя обратимые и необратимые части: $\varepsilon_m = \varepsilon_m^e + \varepsilon_m^p$ и $\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^p$.

Соответственно приращение энтропии можно рассматривать как сумму $dS = dS^e + dS^p$, где dS^e — прирост энтропии извне, а dS^p — прирост энтропии внутри тела за счет перехода кинетической энергии необратимого деформирования в тепловую. Иными словами, необратимая деформация увеличивает энтропию. Если необратимые деформации отсутствуют, то $dS = dS^e$, т. е. прироста энтропии внутри тела нет и неравенство (4.98) переходит в равенство, как это и следует из смысла второго начала термодинамики.

Отметим, что применение законов термодинамики к описанию процессов деформирования позволяет сформулировать законы этих процессов в наиболее общей форме. Конкретизацию же зависимостей, входящих в эти законы, нужно устанавливать на основе микро- и макроопытов.

Термодинамические потенциалы. Для исследования термодинамических процессов используют характеристические функции, именуемые термодинамическими потенциалами. Это энтропия S , свободная энергия F , термодинамический потенциал Гиббса Φ и тепловая функция (энтальпия) H . Значение S было определено выше; значение других потенциалов определяется следующими выражениями:

$$F = E - \Theta S; \quad \Phi = E - \Theta S - pV; \quad H = E + pV, \quad (4.99)$$

где p — давление; V — объем.

Физический смысл термодинамических потенциалов поясняется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_S; \quad \Theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{\varepsilon_{ij}}; \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\Theta}; \\ S &= \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_{\varepsilon_{ij}} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \right)_{\sigma_{ij}}; \quad \varepsilon_{ij} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{\Theta}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

где индексы при скобках указывают на постоянство соответствующих величин.

Например, компоненты тензора напряжений σ_{ij} при постоянстве энтропии S (адиабатический процесс) определяются производны-

ми от внутренней энергии по компонентам тензора деформаций, а при постоянстве температуры (изотермический процесс) — производными от свободной энергии по компонентам тензора деформаций.

Из приведенных соотношений можно получить выражения, поясняющие термодинамический смысл инвариантов тензора напряжений I_1, I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3 \frac{\partial F}{\partial J_1} + 2J_1 \frac{\partial F}{\partial J_2} = 3 \frac{\partial E}{\partial J_1} + 2J_1 \frac{\partial E}{\partial J_2} ; \\
 I_2 &= 3 \left(\frac{\partial F}{\partial J_1} \right)^2 + 4J_1 \left(\frac{\partial F}{\partial J_1} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial J_2} \right) + 4J_2 \left(\frac{\partial F}{\partial J_2} \right)^2 = 3 \left(\frac{\partial E}{\partial J_1} \right)^2 + \\
 &\quad + 4J_1 \left(\frac{\partial E}{\partial J_1} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial J_2} \right) + 4J_2 \left(\frac{\partial E}{\partial J_2} \right)^2 . \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

В аналогичной форме можно записать связь между инвариантами тензора деформаций J_1 и J_2 и потенциалами H и Φ .

ГЛАВА 5 ПОЛЗУЧЕСТЬ ГРУНТОВ *

§ 5.1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Затухающая и незатухающая ползучесть. Как уже указывалось, процесс ползучести может протекать с уменьшающейся или с возрастающей скоростью — в первом случае его называют процессом затухающей ползучести, во втором — незатухающей (рис. 5.1).

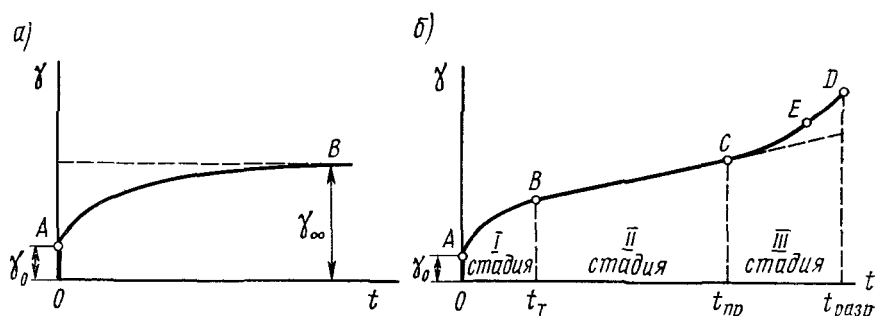


Рис. 5.1. Кривые изменения во времени деформации:
а — затухающая ползучесть, б — незатухающая ползучесть

В обоих случаях деформация складывается из условно-мгновенной деформации γ_0 , возникающей сразу после приложения нагрузки, и деформации, развивающейся во времени:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma(t). \quad (5.1)$$

Для процесса затухающей ползучести деформация $\gamma(t)$, отображаемая участком AB (рис. 5.1, а), развивается с уменьшающейся скоростью, стремящейся к нулю: $d\gamma/dt \rightarrow 0$. Соответственно значение деформации $\gamma(t)$ стремится к некоторому конечному значению $\gamma_\infty = \text{const}$, зависящему от величины нагрузки.

Незатухающая ползучесть включает в себя помимо условно-

* Обозначения в гл. 5 и 6 относятся к деформациям и напряжениям сдвига, однако все рассмотренные закономерности остаются справедливыми и для интенсивностей деформаций сдвига $\dot{\gamma}$, их скоростей $\dot{\gamma}$, и интенсивностей касательных напряжений τ .

мгновенной деформации три стадии: I — стадию затухающей, не установившейся ползучести (участок *AB*), II — стадию установившегося течения (участок *BC*) и III — стадию прогрессирующего течения (участок *CD*). На I стадии деформация развивается с уменьшающейся скоростью; на II стадии скорость деформации, достигнув минимального значения, становится примерно постоянной: $\dot{\gamma} = \text{const}$; эту стадию иногда называют стадией вязкопластического течения. На III стадии скорость деформации начинает возрастать, что и приводит к разрушению (хрупкому или вязкому) грунта. Эту стадию иногда называют стадией разрушения.

Строго говоря, III стадию следует подразделить на два этапа: первый (участок *CE*), на котором развивающаяся пластическая деформация еще не вызывает собственно разрушения, и второй (участок *ED*), который связан с интенсивным развитием микротрещин и катастрофически быстрым нарастанием деформации, приводящим к разрушению. Вводить подобное подразделение в принципе целесообразно потому, что первый из указанных этапов у некоторых грунтов может развиваться весьма длительное время, не исчерпывая их несущей способности.

Часто, однако, встречается процесс ползучести, при котором деформации нарастают с непрерывно уменьшающейся скоростью, но не стабилизируются, а неограниченно нарастают т. е. $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, а $\gamma \rightarrow \infty$. Такой процесс, иногда называемый «вековым», можно отнести к незатухающей ползучести, хотя некоторые авторы, наоборот, называют его затухающим.

В общем же следует отметить, что выделение отдельных стадий ползучести, как и подразделение процесса на затухающий и незатухающий, является условным, поскольку оно во многом зависит от продолжительности наблюдения и точности измерения. Деформации, которые мы сочтем стабилизовавшимися, при более длительном наблюдении могут нарастать, а деформации, рассматривающиеся как течение с постоянной скоростью, могут в действительности или медленно затухать, или, наоборот, развиваться с возрастающей скоростью. Однако такое подразделение, широко применяемое в теории ползучести, весьма удобно для практических целей и в целом оправдано, поскольку все перечисленные стадии в той или иной степени наблюдаются у реальных тел, в частности у грунтов.

Продолжительность и удельная роль той или иной стадии ползучести зависят от вида грунта и величины нагрузки, что хорошо иллюстрируется приведенным ранее рис. 1.4, на котором изображено семейство кривых ползучести грунта при различных значениях сдвигающей нагрузки. Чем больше нагрузка, тем менее продолжительна II стадия и тем скорее наступает III, разрушающая стадия. При очень большой нагрузке эта стадия развивается почти сразу после загрузки и кривая ползучести принимает S-образную форму. При средних значениях нагрузок все три стадии ползучести выражены достаточно четко.

В некотором малом диапазоне средних нагрузок и для некоторых видов испытаний пластично-вязкое течение может непрерывно развиваться без перехода в III, разрушающую стадию. Наконец, при малых нагрузках, не превышающих некоторого предела, II и III стадии не развиваются и процесс носит затухающий характер. Соответственно во всех этих случаях будет различно и время перехода из одной стадии в другую: t_T — начало стадии установившегося пластично-вязкого течения, t_{TP} — переход в стадию прогрессирующего течения и t_{Paz} — время разрушения (рис. 5.1).

Схематизация кривой ползучести. Полную деформацию, развивающуюся во времени, можно представить в виде суммы:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_I \int_0^{t_T} + \gamma_{II} \int_{t_T}^{t_{TP}} + \gamma_{III} \int_{t_{TP}}^{t_{Paz}}, \quad (5.2)$$

где γ_0 — условно-мгновенная деформация, которая, строго говоря, развивается со скоростью звука, но практически ее измеряют за некоторый конечный отрезок времени, хотя и относят к $t=0$; γ_I — затухающая деформация, развивающаяся в период $0 < t \leq t_T$; γ_{II} — деформация установившегося течения, развивающаяся в период $t_T < t \leq t_{TP}$; γ_{III} — прогрессирующая деформация, развивающаяся в период $t_{TP} < t \leq t_{Paz}$.

Запись в форме (5.2) означает, что каждая из перечисленных деформаций развивается лишь в определенном интервале времени и суммируется последовательно. Однако переменность значений t_T , t_{TP} , t_{Paz} (зависящих от величины напряжения) существенно осложняет возможность практического использования записи процесса деформирования в форме (5.2).

Более удобно представить общую деформацию в виде суммы деформаций соответствующих стадий, исходя из допущения, что все эти деформации развиваются одновременно:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_I + \gamma_{II} + \gamma_{III}. \quad (5.3)$$

Соответственно кривая общей деформации определяется суммированием ординат трех кривых (рис. 5.2). Отметим, что при таком допущении суммарная кривая не будет иметь строго линейного участка. Но поскольку при малых значениях времени основной вклад в процесс ползучести вносит затухающая деформация γ_I , при средних — установившаяся γ_{II} , а при больших — прогрессирующая γ_{III} , общий вид суммарной кривой достаточно хорошо отображает действительность.

В большинстве случаев работа грунта на III стадии является нежелательной. Поэтому прогрессирующую деформацию γ_{III} из рассмотрения обычно исключают и общую деформацию ползучести рассматривают (по Андраде) в виде суммы мгновенной, затухающей и пластично-вязкой деформаций:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_I + \gamma_{II}. \quad (5.3')$$

Естественно, что в процессе затухающей ползучести $\dot{\gamma}_{II}=0$ и деформация описывается выражением $\gamma=\gamma_0+\gamma_I$.

В некоторых случаях незатухающую ползучесть в целях упрощения принимают в виде суммы деформации установившегося течения $\dot{\gamma}_{II}$ и условно-начальной деформации γ^0 , включающей в себя собственно мгновенную деформацию γ_0 и затухающую деформацию γ_I , спроектированную на ось ординат (рис. 5.2, б): $\gamma=\gamma^0+\dot{\gamma}_{II}$. Такой прием возможен, если время развития затухающей деформации невелико и в основном процесс протекает во II стадии. Можно и

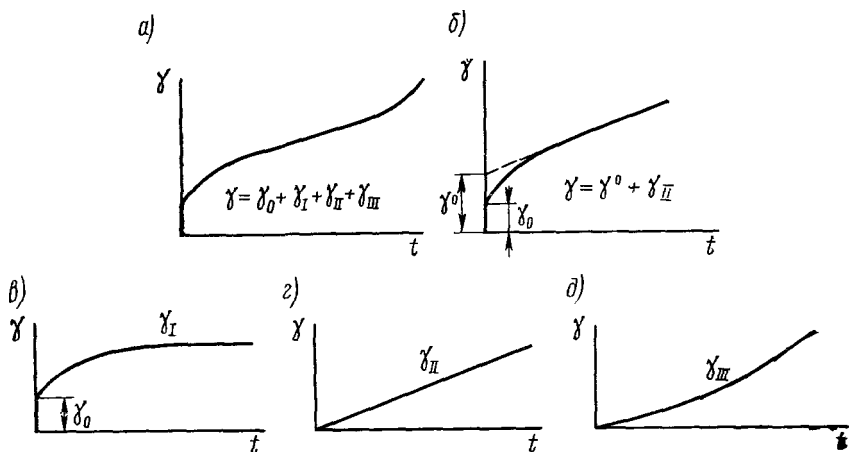


Рис. 5.2. Деформация незатухающей (а) и затухающей (б) ползучести как сумма составляющих:

в — затухающей (γ_I); в — установившейся ($\dot{\gamma}_{II}$); д — прогрессирующей ($\dot{\gamma}_{III}$) деформации

далее упростить этот прием путем представления деформации как суммы только мгновенной деформации и деформации течения: $\gamma=\gamma_0+\dot{\gamma}_{II}$.

Восстанавливающаяся и остаточная деформации. При разгрузке образца грунта в любой момент времени деформация частично восстанавливается (рис. 5.3). Начальная, условно-мгновенная деформация γ_0 восстанавливается сразу же после снятия нагрузки, что происходит полностью или частично. В первом случае начальная деформация является чисто упругой $\gamma_0=\gamma^e$ и соответственно участок 0—2 кривой загрузки (рис. 5.3, а) равен участку 3—4 кривой разгрузки.

Во втором случае начальная деформация складывается из упругой (участок 0—1) и пластической (участок 1—2) частей: $\gamma_0=\gamma_0^e+\gamma_0^p$; соответственно после разгрузки восстанавливается только упругая часть деформации γ_0^e .

Деформация $\dot{\gamma}_{II}$ затухающей стадии восстанавливается во времени, но лишь частично (участок 4—5 кривой), т. е. состоит из

деформации упругого γ^e (отрезок 5—6) и пластического последствия γ^p (отрезок 5—7): $\gamma_I = \gamma_I^e + \gamma^p$.

Деформации на стадиях II и III — установившегося и прогрессирующего течения — являются пластическими и полностью необратимы: $\gamma_{II} = \gamma_{II}^p$ и $\gamma_{III} = \gamma_{III}^p$.

Соответственно в выражении (5.3) члены γ_0 и γ_I включают в себя восстанавливающиеся и необратимые части, а члены γ_{II} и

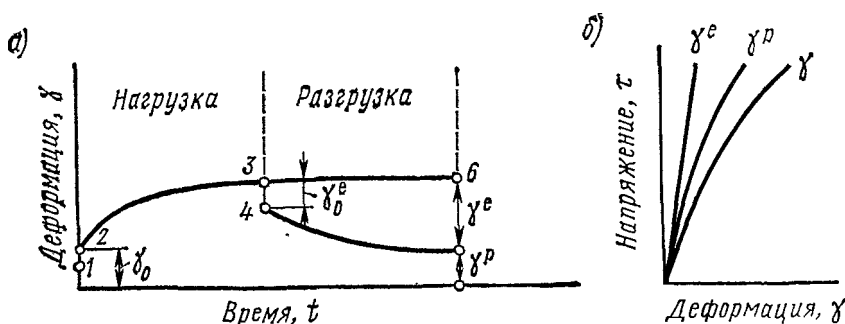


Рис. 5.3. Разделение деформации на восстанавливающуюся γ^e и остаточную γ^p части:

а — на кривой ползучести; б — на диаграмме «напряжение — деформация»

γ_{III} — только необратимые. В целом же суммарная деформация ползучести в любой момент времени t складывается из восстанавливающейся и остаточной частей:

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p. \quad (5.4)$$

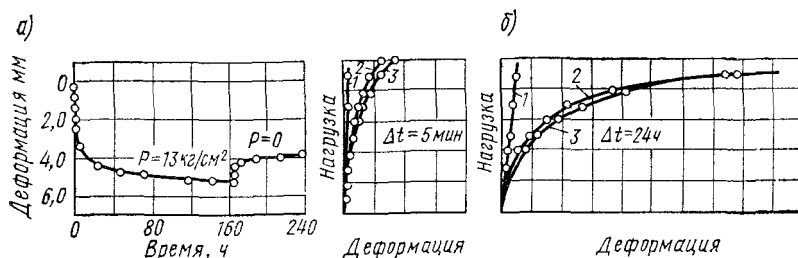


Рис. 5.4. Испытание тела на вдавливание штампа:

а — с разгрузкой; б — разделение суммарной деформации 3 на восстанавливающуюся 1 и остаточную 2 части при разной продолжительности испытания

На рис. 5.4 изображены данные испытаний автора книги по вдавливанию штампа в плотную ленточную глину. На графике а показана кривая развития во времени осадки для цикла «нагрузка — разгрузка», а на графике б — диаграмма «напряжение — деформация», полученная из испытаний при загрузке ступенями с

различной продолжительностью Δt выдерживания каждой ступени. Как видно, с увеличением Δt нарастают как суммарная деформация, так и ее восстанавливающаяся и необратимая составляющие.

§ 5.2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ, ДЕФОРМАЦИЕЙ И ВРЕМЕНЕМ

Закономерность ползучести. Закономерность ползучести можно записать в виде зависимости между скоростью деформаций $\dot{\gamma}$ или самой деформацией γ , напряжением τ и временем t :

$$\dot{\gamma} = f_1(\tau, t); \quad \gamma = f_2(\tau, t) \quad (5.5)$$

$$\tau = \varphi_1(\dot{\gamma}, t); \quad \tau = \varphi_2(\gamma, t). \quad (5.6)$$

Соотношения (5.5) отображаются семейством кривых $\dot{\gamma}-t$ или $\gamma-t$ для различных значений напряжения τ , а соотношения (5.6) — семейством кривых $\tau-\dot{\gamma}$ или $\tau-\gamma$ для различных моментов времени t . Кривые $\gamma-t$ для разных τ называют кривыми ползучести, а кривые $\tau-\gamma$ для разных t — изохронными кривыми; их получают путем перестройки кривых ползучести (рис. 5.5). Отметим, что изохронная кривая при $t=0$ есть кривая мгновенного деформирования, а изохронная кривая при $t \rightarrow \infty$ — кривая для стабилизированных деформаций; такая кривая, естественно, существует только в случае затухающей ползучести.

Зависимость между напряжением и деформацией. Возможны три типа изохронных кривых $\tau-\gamma$:

1) кривые не подобны между собой (рис. 5.6, а) и каждая из них описывается своей функцией $\tau = \varphi_3(\gamma)$;

2) кривые подобны между собой и описываются одной и той же функцией $\tau = \varphi(\gamma)$, за исключением кривой мгновенной деформации $t=0$, которая описывается функцией $\tau = \varphi_0(\gamma)$ (рис. 5.6, б);

3) все кривые для любого момента времени $0 \leq t$ взаимоподобны; такие кривые описываются одной функцией $\tau = \varphi(\gamma)$ (рис. 5.6, в).

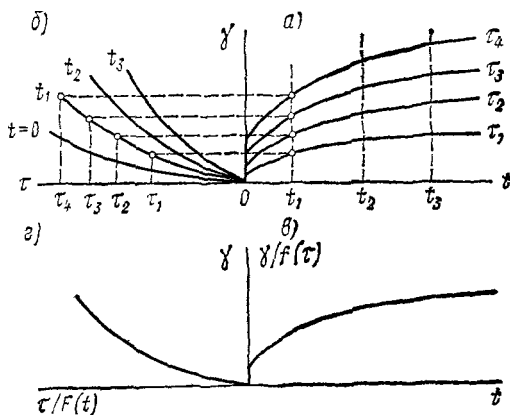


Рис. 5.5. Кривые ползучести (а), изохронные кривые (б) и приведение их к единым кривым (в)

Подобие изохронных кривых и кривых ползучести. Условие подобия изохронных кривых записывают в виде соотношения

$$\varphi(\gamma) = \tau \psi(t). \quad (5.7)$$

Условие же подобия самих кривых ползучести записывают в виде

$$\gamma = f(\tau) \Phi(t). \quad (5.8)$$

В этих выражения $\varphi(\gamma)$ и $f(\tau)$ — функции, связывающие напряжения и деформации в любой момент времени, а $\psi(t)$ и $\Phi(t)$ — функции времени; функцию $\Phi(t)$ называют также функцией ползучести.

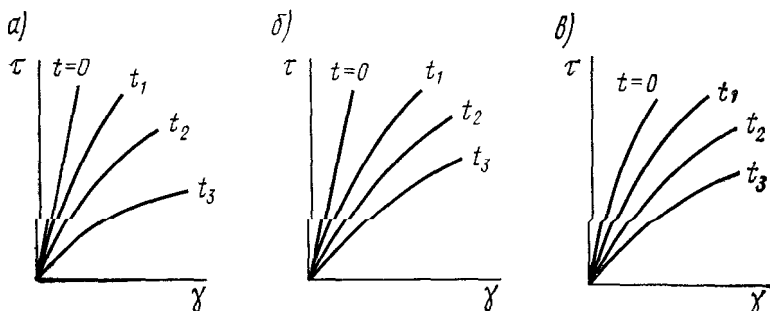


Рис. 5.6. Кривые зависимости между напряжением и деформацией в различные моменты времени

а — кривые не подобны; б — кривые подобны для всех моментов времени t , кроме $t=0$, в — кривые подобны для всех $t, t > 0$

Функции $\Phi(t)$ и $\psi(t)$ нужно выбирать такими, чтобы при $t=0$ они определяли мгновенную деформацию, т. е. $\Phi(0) = \psi(0) = 1$; при неучете этой деформации будем иметь $\Phi(0) = \psi(0) = 0$.

Если вместо деформации рассматривать ее скорость, то соотношения (5.7) и (5.8) примут следующий вид:

$$\varphi(\dot{\gamma}) = \tau K(t); \quad \dot{\gamma} = f(\tau) \kappa(t), \quad (5.9)$$

где функции времени K и κ связаны с функциями Φ и ψ следующими зависимостями:

$$\psi(t) = 1 + \int_0^t K(t) dt; \quad \Phi(t) = 1 + \int_0^t \kappa(t) dt. \quad (5.10)$$

Если кривые ползучести или изохронные кривые подобны, то семейство таких кривых можно свести к единой, инвариантной кривой. Для этого кривые ползучести следует построить в координатах $\gamma/f(t) - t$ (см. рис. 5.5, а), а изохронные кривые в координатах $\tau/F(t) - \gamma$, где $F(t) = 1/\psi(t)$ (см. рис. 5.5, в).

Истинное подобие кривых ползучести и изохронных кривых достигается не всегда. Вследствие большого разброса опытных данных, неизбежного при испытании на ползучесть любых материалов, а тем более грунтов (у металлов такой разброс в пределах 20% не считается чрезмерно большим), нет необходимости очень точно аналитически описывать кривые ползучести. Поэтому в большинстве случаев целесообразнее использовать такие аппроксимирующие зависимости, которые будут более удобны для практических расчетов, если они дают, конечно, удовлетворительное совпадение с натурой. Поэтому предположение о подобии кривых следует принимать во всех случаях, когда это не сопряжено с существенным искажением результатов экспериментов.

Функция деформации $\varphi(\gamma)$. Рассмотрим вид функции $\varphi(\gamma)$ для данного момента времени t_j . Если у традиционных материалов пластические деформации развиваются только после достижения предела текучести, то у грунтов упругие и пластические деформации проявляются одновременно почти с самого начала загрузки. Поэтому в соответствии с выражением (5.4) связь между напряжением и деформацией можно описать двучленной формулой

$$\gamma = \tau/G + f(\tau), \quad (5.11)$$

где первый член характеризует упругую, а второй — пластическую часть деформации.

Однако упругая деформация сравнительно мало отражается на виде суммарной кривой $\tau-\gamma$, поэтому последняя может быть описана одночленной нелинейной зависимостью $\gamma = f(\tau)$ или $\tau = \varphi(\gamma)$.

Вид указанных зависимостей был рассмотрен в § 4.3. Для грунтов наиболее употребительны степенная функция (4.29) и дробно-линейная (4.36).

Функция времени. Хотя в общем случае функцию времени в соответствии с (5.3) следует принимать как сумму нескольких функций, обычно в целях упрощения стараются применять одночленное выражение, справедливое для небольшого диапазона напряжений. При этом для описания затухающего и незатухающего процессов используют различные виды функций.

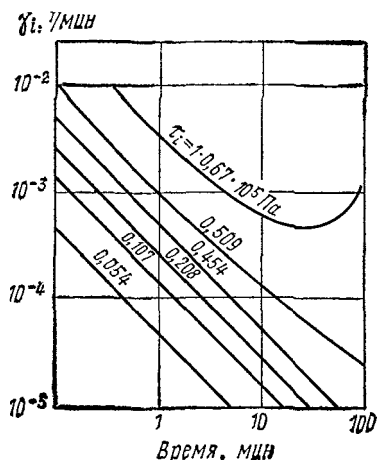
Поскольку виды функций выбирают феноменологическим путем, имеется большое количество выражений, предложенных различными авторами. Наиболее распространены степенная, логарифмическая и дробно-линейная зависимости. Автором книги предложен универсальный вид функции времени, из которого в частных случаях получают перечисленные выше зависимости.

Исходя из соотношения (5.9), принимаем значение функции времени $K(t)$ в виде

$$K(t) = \left(\frac{T_2}{T_1 + t} \right)^n. \quad (5.12)$$

Применимость этой функции к грунтам подтверждается хорошим выпрямлением опытных кривых при построении их в координатах $\ln \gamma - \ln t$. Примеры таких графиков для различных значений

напряжения τ , построенных по данным Муроямы и Шиботы (опубликованным в сб. «Механика грунтов и фундаментостроение». Стройиздат, 1966), приведены на рис. 5.7. Как видно, только в одном случае при очень больших напряжениях было отступление от зависимости (5.12). Отметим, что параллельность полученных прямых свидетельствует о постоянстве показателя степени n (определяемого углом наклона этих прямых).



Частные случаи формулы (5.12). В зависимости от значения показателя степени n из формулы (5.12) можно получить, учитывая соотношение (5.10), следующие выражения для функции ползучести:

Рис. 5.7. Изменение скорости деформации во времени при различных значениях интенсивности касательных напряжений τ_t . Испытания на трехосное сжатие в условиях:

а — открытой; б — закрытой системы (аллювиальная глина, опыты Муроямы и Шиботы)

при $n=1-\alpha$ (где $0 < \alpha \leq 1$, $n < 1$) и $T_1=0$, $T_2=(\alpha\delta/T^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\psi(t) = 1 + \delta \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha; \quad (5.13)$$

при $n=1$ и $T_1=0$, $T_2=(\alpha\delta/T^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\psi(t) = 1 + \delta \ln \frac{t+T}{T}; \quad (5.14)$$

при $n=2$ и $T_1=T$, $T_2=[T(\delta-1)]^{1/2}$

$$\psi(t) = \frac{T + \delta t}{T + t} = 1 + (\delta - 1) \frac{t}{T + t}. \quad (5.15)$$

§ 5.3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Общий вид уравнения. В этой главе мы рассмотрим уравнение, описывающее развитие во времени сдвиговой деформации при постоянном напряжении. Это уравнение записывают обычно или в форме (5.7), или в форме (5.8).

Напомним, что соотношение (5.8) описывает взаимоподобные кривые ползучести, а соотношение (5.7) — взаимоподобные изохронные кривые. Эти соотношения не адекватны, они совпадают только в некоторых случаях, которые будут рассмотрены далее.

Таким образом, для выявления закономерности ползучести необходимо из опыта установить по изохронным кривым вид функции $\varphi(\gamma)$ или $f(\tau)$, а по кривым ползучести — $\psi(t)$ или $\Phi(t)$. Возможные виды этих функций были приведены ранее, здесь же рассмотрим их сочетания.

Степенная зависимость. Наиболее употребительно сочетание степенных функций (4.29) и (5.13). При подстановке этих функций в соотношение (5.7) получим

$$\gamma^m = \frac{\tau}{A_0} \left[1 + \delta \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right]; \quad (5.16)$$

если же исходить из соотношения (5.8), то будем иметь

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \left[1 + \bar{\delta} \left(\frac{t}{T} \right)^\beta \right]. \quad (5.17)$$

Здесь A_0 — модуль мгновенного ($t=0$) деформирования, Па; δ , $0 < m \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ ($\alpha \neq \beta$) — безразмерные величины; для грунтов $m=0,2 \div 1$, $\beta=0,5 \div 1$; T — произвольная величина (час), которую можно принять равной единице.

Первые члены в (5.16) и (5.17) отображают мгновенную деформацию $\gamma_0 = (\tau/A_0)^{1/m}$. Если эту деформацию не учитывать, то оба выражения (5.16) и (5.17) примут единый вид

$$\gamma = \left(\frac{\delta T}{A_n} \right)^{1/m} \left(\frac{t}{T} \right)^\beta = \gamma_n^* t^\beta, \quad (5.18)$$

где $\beta = \alpha/m \leq 1$; $\bar{\delta} = \delta T^m$; $\gamma_n^* = \gamma_n \delta^{1/m} T^{-\beta}$; $\gamma_n = (\tau/A_n)^{1/m}$ и A_n — начальная деформация и начальный модуль деформирования соответствующие моменту времени $t_n = T \delta^{-1/\alpha}$, близкому к нулю.

Выражение (5.18) соответствует такому упоминаемому выше случаю, когда и кривые ползучести и изохронные кривые подобны и соотношения (5.7) и (5.8) приводят к идентичным результатам. Если же одни из указанных кривых не будут подобны, то показатели степени будут переменными: $m = m(t)$ или $\beta = \beta(\tau)$.

Уравнения вида (5.16) — (5.18) описывают процесс ползучести, при котором скорость деформации $\dot{\gamma}$ уменьшается, стремясь к нулю (при $t \rightarrow \infty$), тогда как сама деформация неограниченно возрастает: $\gamma \rightarrow \infty$ (при $t \rightarrow \infty$).

Уравнения этого вида широко применяют в теории ползучести металлов и других материалов, а также грунтов и горных пород.

Основным преимуществом степенных зависимостей (5.16) — (5.18) является их сравнительная простота и большая универсальность: эти зависимости оказываются применимыми для самых различных видов грунтов — от текучих и пластичных грунтов до плотных глин, от мерзлых грунтов и льда до полускальных и скальных пород.

Логарифмическая зависимость. Если вид функций $\varphi(\gamma)$ и $\psi(t)$ принять в соответствии с выражениями (4.29) и (5.14),

то, подставив их в соотношение (5.7), получим следующее уравнение ползучести:

$$\gamma^m = \frac{\tau}{A_0} \left[1 + \delta \ln \frac{t+T}{T} \right]. \quad (5.19)$$

Если же исходить из соотношения (5.8), то получим

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \left[1 + \bar{\delta} \ln \frac{t+T}{T} \right]. \quad (5.20)$$

Значения A_0 , δ , $\bar{\delta}$, T в (5.19) — (5.20) те же, что и в выражениях (5.16) и (5.17).

В тех случаях, когда мгновенную деформацию $\gamma_0 = (\tau/A_0)^{1/m}$ не учитывают, выражения (5.19) и (5.20) примут следующий вид:

$$\gamma^m = (\gamma_n^*)^m \ln \frac{t+T}{T}; \quad \gamma = \gamma_n^* \ln \frac{t+T}{T}. \quad (5.21)$$

В этих формулах $\delta = \bar{\delta}^m$; $\gamma_n^* = \gamma_n \delta^{1/m}$, причем $\gamma_n = (\tau/A_n)^{1/m}$ и A_n соответствуют начальному моменту времени $t_n = (e^{1/\delta} - 1)T$.

Как видно, уравнения (5.21) не идентичны, что вытекает из различия соотношений (5.7) и (5.8).

Уравнения (5.19) — (5.21), как и уравнения (5.16) — (5.18), описывают процесс ползучести, при котором скорость деформации $\dot{\gamma}$ уменьшается, стремясь к нулю (при $t \rightarrow \infty$), тогда как сама деформация γ неограниченно возрастает, стремясь к бесконечности (при $t \rightarrow \infty$). Однако выражения (5.19) — (5.21) отображают менее интенсивное нарастание деформаций по сравнению с выражениями (5.16) — (5.18), поскольку согласно (5.19) — (5.21) это нарастание происходит по логарифмическому закону, а согласно (5.16) — (5.18) — по степенному.

При малых α и для средних значений t выражения (5.16) — (5.18) и (5.19) — (5.21) дают близкие результаты, поскольку в этом случае $t^\alpha = \exp(\alpha \ln t) \approx 1 + \alpha \ln t$.

Зависимость вида (5.19) — (5.21) впервые была применена (К. Бьюсманом и Г. И. Покровским) для описания процесса длительной («вековой») осадки грунтов; затем ее стали широко применять для описания процесса вторичной консолидации грунтов (о чем подробнее будет сказано в гл. 8).

Позднее была показана применимость логарифмического закона (5.19) — (5.21) для описания процесса сдвиговой ползучести. Эту зависимость применяли также для коллоидных систем, торфов, пластмасс и даже металлов.

Дробно-линейная зависимость. Если функции $\varphi(\gamma)$ и $\psi(t)$ принять в виде (4.36) и (5.15), то, подставив эти выражения в соотношение (5.7) и решив его относительно γ , получим

$$\gamma = \frac{\tau(T + \delta t)}{G_0 [T(1 - \tau/\tau_s) + t(1 - \delta\tau/\tau_s)]} \quad (5.22)$$

или, если решить это уравнение относительно напряжения τ , то

$$\tau = \frac{\gamma G_0 (T + t)}{(T + \delta t) (1 + \gamma G_0 / \tau_s)} . \quad (5.22')$$

Если же не учитывать начальную деформацию, то

$$\gamma = \frac{\tau_{\delta_H} t}{G_{0(H)} [T + t (1 - \delta_H \tau / \tau_{s(H)})]} . \quad (5.23)$$

В этих выражениях G_0 (Па), τ_s (Па), T (ч), $\delta > 1$ (безразмерная величина) и $G_{0(H)}$, $\tau_{s(H)}$, δ_H — параметры, смысл которых будет рассмотрен ниже.

Положив в (5.22) $t=0$, получим значение мгновенной деформации

$$\gamma_0 = \frac{\tau}{G_0 (1 - \tau / \tau_s)} . \quad (5.24)$$

Приняв $t=\infty$, получим значение конечной, стабилизированной деформации

$$\gamma_\infty = \frac{\delta \tau}{G_0 (1 - \delta \tau / \tau_s)} . \quad (5.24')$$

С учетом этих выражений формулу (5.22) можно представить в виде

$$\gamma = \frac{\gamma_\infty (T + \delta t)}{T \gamma_\infty / \gamma_0 + \delta t} = \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \frac{t}{T^* + t} , \quad (5.25)$$

где

$$T^* = \frac{1}{\delta} \frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} T = \frac{1}{\delta} \frac{\tau_s - \tau}{\tau_s / \delta - \tau} T .$$

На рис. 5.8 показаны изохронные кривые и кривые ползучести, соответствующие формуле (5.22). Изохронная кривая при $t=0$ описывается уравнением (5.24), при $t=\infty$ — уравнением (5.24'), при $0 < t < \infty$ — уравнением (5.22).

Параметры G_0 и τ_s есть параметры изохронной кривой для мгновенной деформации ($t=0$): параметр G_0 соответствует тангенсу угла наклона касательной к кривой $\tau-\gamma_0$ в точке $\gamma_0=0$, а τ_s есть ордината асимптоты (при $\gamma_0 \rightarrow \infty$) указанной кривой; этот параметр соответствует пределу текучести при быстром нагружении.

Каждой изохронной кривой (при $t=t_j$) соответствует свое значение $G_{0(j)}$ и $\tau_{s(j)}$. Кривой $t \rightarrow \infty$, т. е. кривой для конечной, стабилизированной деформации γ_∞ , соответствуют значения $G_0/\delta = G_\infty$ и $\tau_s/\delta = \tau_\infty$. Таким образом, параметр δ определяется соотношением $\delta = G_0/G_\infty = \tau_s/\tau_\infty$. В последующем будет показано, что $\tau_s = \tau_0$ — условно-мгновенная, а τ_s/δ — предельно-длительная прочность.

Если начальной деформацией пренебрегают, то в качестве параметров уравнения принимают параметры $G_{0(H)}$ и $\tau_{s(H)}$ изохронной кривой для некоторого момента времени t_H , близкого к началу; именно эти значения вводят в формулу (5.23).

Кривые ползучести, описываемые выражением (5.22), в зависимости от величины напряжения τ имеют различный вид (рис. 5.8, б). При малых напряжениях $\tau < \tau_\infty$ эти кривые имеют затухающий характер, при $t \rightarrow \infty$ скорость деформации $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, а сама деформация принимает конечное значение, определяемое формулой (5.24).

При напряжении $\tau = \tau_\infty$ возникает неограниченное течение с постоянной скоростью $\dot{\gamma} = \delta \tau_s / G_0 T$. При больших напряжениях $\tau_\infty < \tau < \tau_s$ деформации развиваются с непрерывно возрастающей скоростью и в моменты времени $t_s = T(\tau_s - \tau) / (\delta \tau - \tau_s)$ принимают

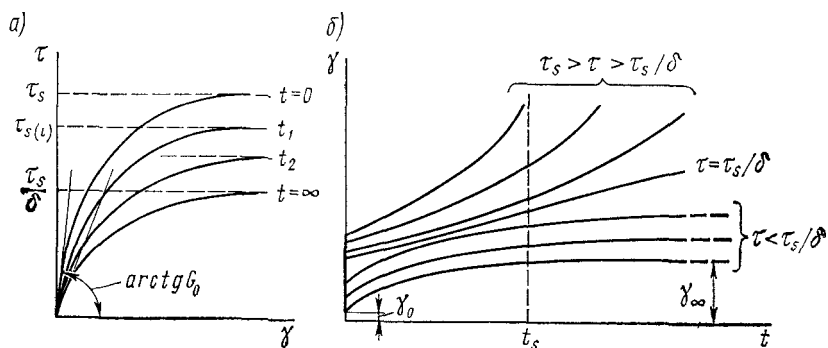


Рис. 5.8. Изохронные кривые (а) и кривые ползучести (б), соответствующие формуле (5.22)

бесконечно большое значение $\gamma \rightarrow \infty$. При напряжении $\tau = \tau_s$ неограниченное развитие деформации ($\gamma \rightarrow \infty$) происходит сразу при приложении нагрузки ($t_s = 0$).

Отметим, что частным случаем формулы (5.22) будет линейная связь между напряжением и деформацией при дробно-линейной связи между деформацией и временем:

$$\gamma = \frac{\tau (T + \delta t)}{G_0 (T + t)}. \quad (5.26)$$

В некоторых же случаях в формулах (5.22) — (5.23), наоборот, нелинейную связь между напряжением и деформацией приходится усиливать, принимая левую часть этих формул в виде γ^m .

Дробно-линейная зависимость вида (5.22) впервые была применена для металлов И. А. Одингом, а для грунтов в форме (5.26) — А. А. Ничипоровичем.

Обобщенная функция времени (5.12). Как видно, функция времени (5.12) является достаточно универсальной и описывает различные по своему характеру процессы ползучести — от прогрессирующего до затухающего. Отметим, что помимо выражения (5.22) можно уравнение затухающей ползучести получить в иной форме, если в (5.12) положить $n > 1$. Тогда, приняв в (5.12) $n = 1 + \alpha > 1$, $T_1 = 1$, $\delta = T_2^{1+\alpha} / \alpha$ и подставив полученное значение

$K(t) = \kappa(t)$ в соотношение (5.8), после интегрирования этого соотношения при граничном условии $t = \infty$, $\gamma = \gamma_\infty$ получим следующее выражение:

$$\gamma = \gamma_\infty - (\gamma_\infty - \gamma_0)(1 + t)^{-\alpha}, \quad (5.27)$$

где $\gamma_0 = (\tau/A_0)^{1/m}$; $\gamma_\infty = \gamma_0(1 + \delta)$.

Придавая в формуле (5.12) различные значения показателя степени n , следует помнить, что каждое из них справедливо лишь в определенном диапазоне напряжений. Если же рассматривать большой диапазон напряжений, то лучшее совпадение с опытом дает представление процесса ползучести как суммы затухающей деформации и установившегося течения (5.3). В этом выражении член $(\gamma_0 + \gamma_I)$ определяют по одной из рассмотренных выше формул (5.16) — (5.28), а член γ_{II} принимают равным $\gamma_{II} = f(\tau)t$, т. е.

$$\gamma = f_I(\tau)\psi(t) + f_{II}(\tau)t. \quad (5.28)$$

Экспоненциальная зависимость. Для описания процесса затухающей ползучести применяют также экспоненциальный закон вида

$$\gamma = \gamma_\infty - (\gamma_\infty - \gamma_0)e^{-t/T}, \quad (5.29)$$

где $\gamma_0 = \tau/G_0$; $\gamma_\infty = \tau/G_\infty$, причем G_0 и G_∞ — начальный и предельно-длительный модули сдвига.

Если принять $\gamma_0 = 0$, получим

$$\gamma = \gamma_\infty(1 - e^{-t/T}). \quad (5.30)$$

Иногда применяют более сложный закон, принимая по Кольраушу показатель степени в (5.29) и (5.30) в виде $(t/T)^\alpha$.

Как будет показано в гл. 7, уравнение (5.29) можно вывести, исходя из теории упруговязкого деформирования; поскольку эта теория была одной из первых теорий реологии, то уравнение (5.29) получило широкое распространение. Экспоненциальную функцию времени стали использовать также в теории наследственной ползучести, в частности для бетонов (Г. Н. Маслов, Н. Х. Арутюнян и др.), откуда она заимствована теорией ползучести грунтов (В. А. Флорин и др.). Однако опыты показали, что экспоненциальная зависимость вида (5.29) плохо согласуется с данными экспериментов, что подробнее будет показано в гл. 6. Там же дается оценка всех формул, рассмотренных выше.

§ 5.4. УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ

Общий вид уравнения течения. Ранее говорилось, что закономерность ползучести можно выразить, рассматривая либо саму деформацию, либо ее скорость. В последнем случае реологическое уравнение состояния принимают в форме второго из соотношений (5.9). При этом, если доминирует II, установившаяся стадия ползучести с постоянной скоростью (например, при течении склонов и

откосов, деформировании грунтов текучей консистенции), рассматривают только эту стадию (см. схему рис. 5.1, б). Тогда в уравнении (5.9) следует положить $\dot{\gamma} = \text{const}$, приняв $K(t) = \kappa(t) = \text{const}$, что приведет к уравнению течения (4.58').

$$\tau = \varphi(\dot{\gamma}) \text{ или } \dot{\gamma} = f(\tau). \quad (5.31)$$

Виды функции $f(\tau)$ были рассмотрены в § 4.5.

Закономерность пластично-вязкого течения грунтов. Рассматривая вопрос применимости к грунтам уравнения течения (5.31), следует прежде всего выяснить, происходит ли у грунтов течение с постоянной скоростью при любом значении нагрузки или она начинается только после превышения некоторого предельного значения напряжения — предела текучести τ_t .

На рис. 5.9 изображены графики зависимости между скоростью установившегося течения и напряжением, полученные различными авторами по данным испытаний самых различных грунтов. Графики а, б, в относятся к опытам И. М. Горьковой (опубликованы в книге «Структурные и деформационные особенности осадочных пород», 1965), заключавшимся в испытании на сдвиг при кручении слабых грунтов — от пльвунов и илов до глин текучей или близкой к ней консистенции. График 2 относится к опытам Н. К. Пекарской и С. С. Вялова [38], заключавшимся в испытании на сдвиг при кручении образцов глины пластичной консистенции, а графики д—к — к опытам С. С. Бабицкой и М. Н. Гольдштейна (сб. «Вопросы геотехники», 1962), заключавшимся в испытании на одноосное сжатие образцов глины полутвердой консистенции. Наконец, график е (опыты Е. П. Шушеринной) [4] получен по данным испытаний на одноосное сжатие мерзлого грунта при различной температуре.

Несмотря на столь большое разнообразие грунтов — от текучих до твердых, кривые зависимости между скоростью течения и напряжением имеют общий характер — они аналогичны реологической кривой для твердообразного тела (см. рис. 4.11, б).

Схематизируя полученные кривые, как это показано на графике д, у грунтов можно выделить три критических значения напряжения.

Первое критическое напряжение есть условный предел упругости τ_k , до достижения которого течение не возникает, хотя деформация может быть не только упругой, но и пластической, необратимой. Вообще говоря, можно выделить предел $\tau_e < \tau_k$, до достижения которого деформация будет чисто упругой, но ввиду малости этого предела его практически (для статических задач) нет смысла учитывать. У неструктурированных грунтов — преимущественно с водно-коллоидными связями — предел τ_k будет весьма мал и для таких грунтов можно принять схему жидкообразного тела (см. рис. 4.11, а), полагая $\tau_k = 0$.

Второе критическое напряжение есть условный предел текучести τ_t . До превышения этого предела деформации ползучести хотя и могут развиваться, но протекают они с очень малой скоростью

или имеют затухающий характер, при этом структура грунта не разрушается. В случае превышения предела τ_T разрушается структура грунта и скорость течения его резко возрастает на несколько порядков.

Третье критическое напряжение τ_f соответствует полному разрушению структуры. При этом и у структурированных и у неструктурированных грунтов зависимость между скоростью течения и

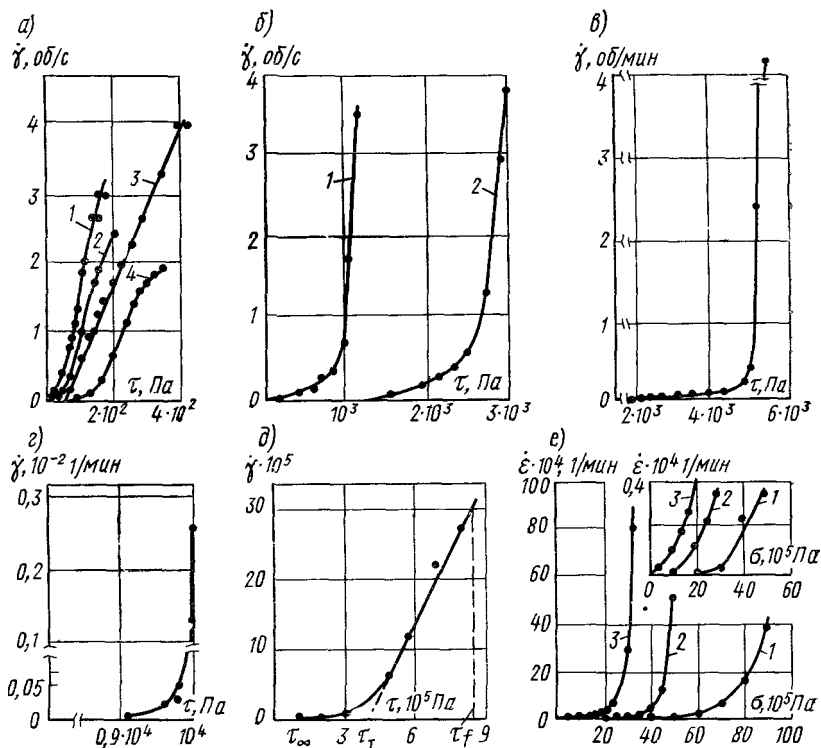


Рис. 5.9. Кривые зависимости между скоростью установившегося течения и напряжением для различных грунтов:

a — плавунные грунты (1 — пески салехардской свиты, $W=34\%$; 2 — последенниковая глина, $W=65\%$; 3 — пески нижеволжские, $W=33\%$; 4 — последенниковая глина, $W=54\%$); *б* — илы (1 — ил черноморский, $W=126\%$, 2 — то же, $W=54\%$); *в* — паста хвалинской глины, $W=92\%$; *г* — юрская глина пластичная, $W=32\%$; *д* — спандиловая глина полутвердая; *е* — мерзлый грунт, супесь пылеватая, $W=26\%$; температура: 1 — 20° ; 2 — 10° ; 3 — 5° C

напряжением является нелинейной, причем основная нелинейность проявляется при переходе от больших скоростей к малым.

В целом закономерность пластично-вязкого течения грунтов можно описать зависимостью вида [3]

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_{пл}} \left(\frac{\tau - \tau_\infty}{\tau^*} \right)^{1/m}, \quad (5.32)$$

где $\eta_{пл}$ — приведенный коэффициент пластической вязкости, отнесенный к единичному напряжению; τ^* — параметр, имеющий размерность напряжения и принимаемый равным $\tau^* = 1$; $m \leq 1$, τ_∞ — предельно длительное сопротивление, которое можно принять равным $\tau_\infty \cong \tau_k$ (см. рис. 4.11, б).

Участок кривой $\dot{\gamma} - \tau$ в пределах $\tau_t \leq \tau \leq \tau_f$ можно аппроксимировать отрезком прямой, как это показано на рис. 5.9, д. Тогда в диапазоне указанных напряжений процесс течения грунта описывается законом Бингама (4.67)

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_t}{\eta_{пл}}, \quad (5.33)$$

где $\eta_{пл}$ — коэффициент пластической вязкости. Однако надо помнить, что применять к грунтам закон Бингама можно лишь при определенных условиях: во-первых, только в пределах интервала

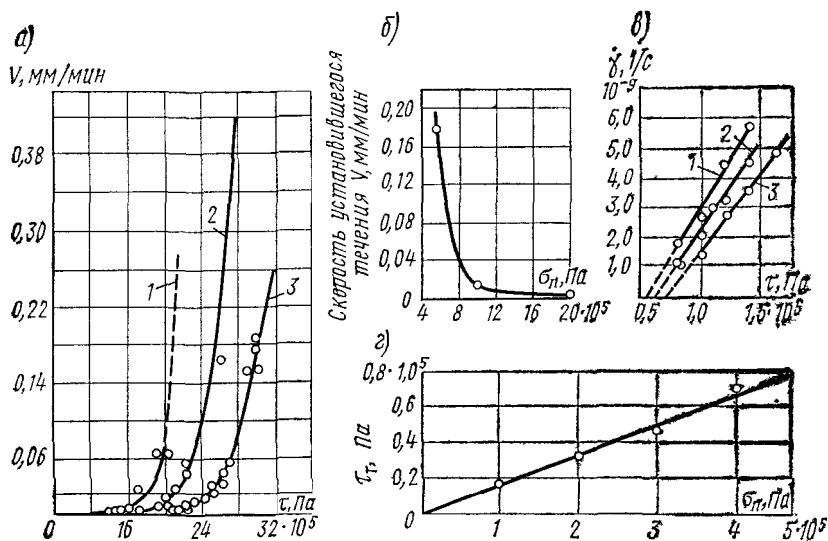


Рис. 5.10. Влияние нормального напряжения σ_n на процесс течения:

а — данные испытаний мерзлого грунта, супесь пылеватая, $W=26\%$, температура -10° при различных значениях σ_n ; реологические кривые при σ_n , равном: 1 — $6 \cdot 10^5$; 2 — $10 \cdot 10^5$; 3 — $20 \cdot 10^5$ Па; б — то же, зависимость между скоростью течения и σ_n ; в — данные испытаний битуминозной глины при σ_n , равном: 1 — $2 \cdot 10^5$; 2 — $3 \cdot 10^5$; 3 — $5 \cdot 10^5$ Па; г — зависимость предела текучести τ_t от σ_n для пасты кембрийской глины

времени $t_t \leq t \leq t_{пр}$, когда развивается II, установившаяся стадия ползучести с примерно постоянной скоростью, и, во-вторых, только в диапазоне напряжений $\tau_t \leq \tau \leq \tau_f$.

Влияние нормального напряжения. Ползучесть при сложном напряженном состоянии будет рассмотрена в последующем. Здесь же отметим, что если течение происходит при одновре-

менном воздействии нормального напряжения σ_n , то величина σ_n будет существенно сказываться на интенсивности процесса деформирования.

Такое влияние, впервые установленное Н. Н. Масловым (1955), наглядно иллюстрируется рис. 5.10, где показаны результаты испытаний на сдвиг при различных значениях σ_n мерзлого грунта (см.: Н. К. Пекарская. Прочность мерзлых грунтов при сдвиге в зависимости от текстуры, 1963), пластичной глины (по данным Н. Н. Маслова [19]), пасты кембрийской глины (по Б. Ф. Рельтову [14]). Как видно, кривые зависимости между скоростью течения и напряжением (графики а и в) при различных σ_n существенно различны, причем с увеличением σ_n скорость течения уменьшается (график б). С изменением σ_n соответственно изменяются и критические напряжения τ_k и τ_t . С определенной степенью приближения можно принять, что зависимость между τ_t и σ_n является линейной (график г):

$$\tau_t = \tau_0 + f\sigma_n, \quad (5.34)$$

где τ_0 — предел текучести при чистом сдвиге; f — коэффициент трения при течении.

В этом случае сопротивление грунта сдвигу в процессе течения, учитывая выражение (5.31), по исследованиям автора [3] будет равно

$$\tau = \tau_0 + f\sigma_n + \eta_{пл}\dot{\gamma}. \quad (5.35)$$

При $\dot{\gamma} = 0$ это выражение переходит в условие Кулона, а при $f = 0$ — в условие Бингама.

О пороге ползучести. Согласно концепции Н. Н. Маслова [19], сопротивление глинистого грунта сдвигу определяется следующей зависимостью:

$$\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_W + \Sigma_W + c_c, \quad (5.36)$$

где φ_W — «истинный» угол внутреннего трения, зависящий от влажности грунта W ; Σ_W — связность водно-коллоидной природы, зависящая от W ; этот вид связей характерен для пластичных глинистых грунтов; c_c — структурное сцепление, обусловленное кристаллизационными, жесткими связями; оно характерно для цементированных пород.

Ползучесть развивается, если соблюдается условие

$$\sigma_n \operatorname{tg} \varphi_W + c_c < \tau < \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_W + \Sigma_W + c_c.$$

Отсюда предельное напряжение, при котором возникает ползучесть, названное Н. Н. Масловым порогом ползучести, будет равно

$$\tau_{lim} = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_W + c_c. \quad (5.37)$$

Это выражение относится к грунтам, названным автором скрытопластичным. У пластичных грунтов $\varphi_W = 0$, $c_c = 0$ и соответственно $\tau_{lim} = 0$, т. е. ползучесть возникает при любом, самом малом на-

пряжении τ . Такая трактовка представляется нам вполне логичной. Однако при применении понятия «порог ползучести» следует оговорить, какого рода деформации ползучести не будут развиваться при $\tau < \tau_{\text{lim}}$ — любые временные или только незатухающие. Нам представляется, что в качестве τ_{lim} следует принимать такое напряжение, до превышения которого временные деформации или стабилизируются, или вообще отсутствуют.

Нелинейно-вязкое течение грунта. Вернемся к реологической кривой рис. 5.9, *д*. Как видно из этого графика, значение предельно-длительного сопротивления $\tau_{\infty} = \tau_K$ определяется точкой пересечения кривой $\dot{\gamma} - \tau$ с осью напряжений. Однако эта кривая во многих случаях подходит к оси абсцисс очень полого, вследствие чего значением τ_K при аналитическом описании кривой можно пренебречь. Соответственно выражение (5.32), если положить в нем $1/\eta_{\text{пл}} = \dot{\gamma}^*$, перейдет в уравнение нелинейно-вязкого течения (4.61')

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^* (\tau/\tau^*)^{1/m}. \quad (5.38)$$

Уравнение (5.38) широко используют для описания установившегося течения металлов при высокой температуре, пластмасс и многих других материалов. Его часто применяют к грунтам, особенно мерзлым и в наибольшей степени — ко льду. Другим весьма распространенным выражением является соотношение (4.64)

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^* \text{sh}(\tau/\tau^*). \quad (5.39)$$

Рассмотрим эти выражения. Гиперболическая функция (5.39) имеет следующие особенности. При малых значениях аргумента $x \ll 1$ функция $\text{sh } x \approx x$, а при больших $x \gg 1$ функция $\text{sh } x \approx (1/2)e^x$. Первое приближение получается из разложения в ряд

$$\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{3!} + \dots$$

и ограничения при $x \ll 1$ первым членом ряда. Второе приближение получается, если пренебречь при $x \gg 1$ величиной e^{-x} в выражении $\text{sh} = (1/2)(e^x - e^{-x})$. Таким образом, при малых напряжениях $\tau/\tau^* \ll 1$ соотношение (5.39) можно принимать в виде линейной зависимости

$$\dot{\gamma} = \tau \frac{\dot{\gamma}^*}{\tau^*} = \tau/G, \quad (5.40)$$

а при больших $\tau/\tau^* \gg 1$ это соотношение получает вид

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^* e^{\tau/\tau^*}. \quad (5.41)$$

Различие между формулами (5.38), (5.39), (5.40) и (5.41) можно наглядно выявить при графическом отображении этих зависимостей в координатах $\tau/\tau^* - \ln \dot{\gamma}$ (рис. 5.11). В этих координатах спрямляется только экспоненциальная зависимость (5.41) (прямая

2). Уклон прямой определяет величину τ^* согласно соотношению $\tau^* = d\tau/d \ln \dot{\gamma}$, параметр же $\dot{\gamma}^*$ определяется из выражения $\ln \dot{\gamma}^* = -\ln 2\dot{\gamma} - \tau/\tau^*$.

Зависимость $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^* = \text{sh}(\tau/\tau^*)$ спрямляется лишь при $\tau/\tau^* > 1,3$, начиная совпадать с этого значения с экспоненциальной формулой (кривая 1). Это значит, что при $\tau/\tau^* > 1,3$ (а практически при $\tau/\tau^* \approx 1$) формулу (5.39) можно заменить формулой (5.41). Начиная же с $\tau/\tau^* \leq 1$ по формуле (5.41) получается отклонение от опытных данных; при $\tau/\tau^* = 0$ получаем $\dot{\gamma} = 0,5\dot{\gamma}^*$, что не соответствует действительности (должно быть $\dot{\gamma} = 0$). Однако, учитывая, что в реальных условиях τ/τ^* всегда больше 1, экспоненциальная зависимость (5.41) для описания поведения грунтов является вполне приемлемой.

Отметим, что значение $\tau/\tau^* = 1,3$ можно рассматривать как своего рода критическое относительное напряжение. До превышения этого значения грунт течет по линейному закону, свидетельствующему о малых изменениях его структуры. При $\tau/\tau^* = 1,3$ возникает нелинейное течение с изменениями структуры грунта. Иными словами, величину $\tau/\tau^* = 1,3$ можно рассматривать как условный предел текучести τ_t/τ^* .

Степенная зависимость (5.38) была подробно рассмотрена в § 5.3. Отметим, что при не очень больших значениях m (например, при $m = 0,35$, для которого построена кривая 3 на рис. 5.11) степенная кривая не очень сильно отличается от гиперболической кривой 1 и экспоненциальной 2. При больших же значениях m , в частности при $m = 1$, кривая 4 существенно отклоняется от кривой 1, совпадая с ней только при $0 < \tau/\tau^* < 1$, поскольку в этом интервале напряжений $\text{sh}(\tau/\tau^*) \approx \tau/\tau^*$.

Изменение скорости деформации во времени. Выше были приведены уравнения течения для установившейся стадии ползучести с постоянной скоростью деформации. Если же рассматривать весь процесс ползучести грунтов, то надо учитывать изменение скорости деформации во времени.

Опытные данные, характеризующие эти изменения, приведены на рис. 5.12; данные получены из испытаний различных грунтов: бентонита, ила и каолинита (см.: Н. А. Цытович и др. Сб. «Слабые глинистые грунты», 1965), лёссовидных суглинка и глины

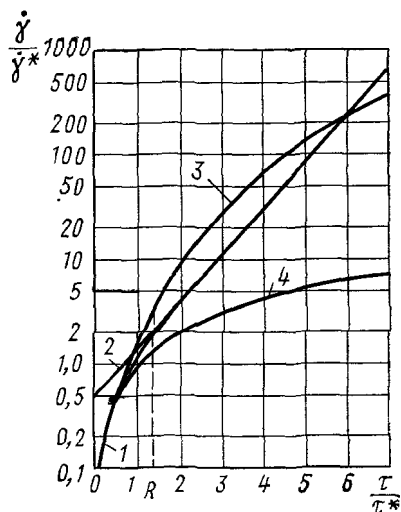


Рис. 5.11. Зависимость между скоростью деформации $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^*$ и напряжением τ/τ^* :

1 — $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^* = \text{sh}(\tau/\tau^*)$; 2 — $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^* = 0,5 e^{\tau/\tau^*}$; 3, 4 — $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^* = (\tau/\tau^*)^n$ (3 — при $n = 0,5$; 4 — при $n = 1$)

(Н. Н. Маслов и К. Т. Коджаманов, ж. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 4, 1970) и мерзлой супеси (С. С. Вялов [3]).

Графики *а* и *б* отображают процесс затухающей ползучести, скорость деформации в этих опытах непрерывно уменьшалась. Кривые же *в* дают наглядное представление о динамике процесса на всех стадиях деформирования. При нагрузке, немного меньшей предела текучести ($\tau/\tau_T=0,9$), процесс деформирования имел затухающий характер и скорость деформации асимптотически стремилась к нулю (кривая 1). При нагрузке $\tau/\tau_T=1,15$ процесс носил

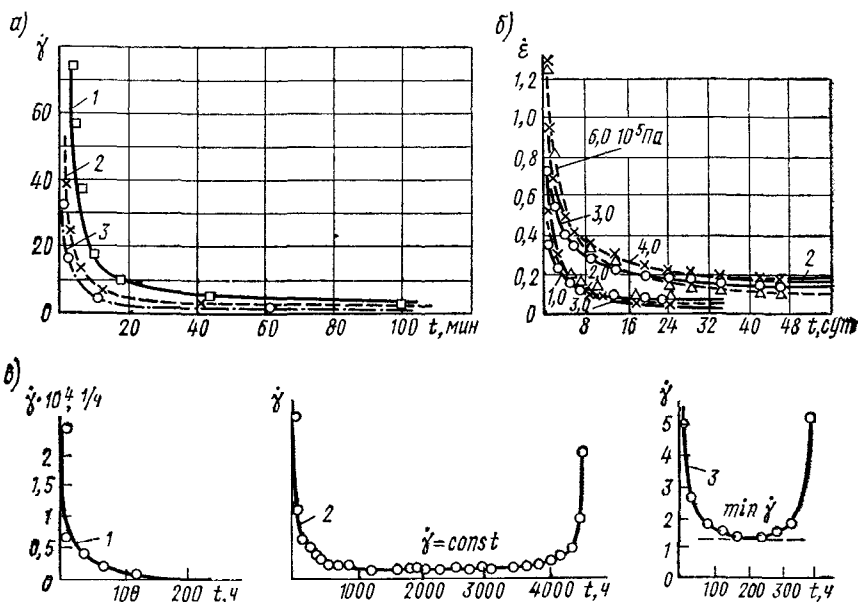


Рис. 5.12. Изменение скорости деформации во времени при постоянных нагрузках: *а* — испытания на сдвиг (1 — бетонит, паста, $W=106\%$, $e=2,6$; 2 — ил речной, $W=53\%$, $e=1,4$; 3 — каолинит, паста, $W=50\%$, $e=1,3$); *б* — испытание на сжатие под различными нагрузками (1 — лессовидный суглинок, $W=8\%$, $e=0,58$; 2 — четвертичная глина, $W=12\%$, $e=0,84$); *в* — испытание на сдвиг супеси мерзлой, $W=28\%$, $\theta = -0,4^\circ \text{C}$; нагрузка. 1 — $\tau=1,3 \cdot 10^5$; 2 — $1,5 \cdot 10^5$; 3 — $1,7 \cdot 10^5$ Па

незатухающий характер с отчетливо выраженными всеми тремя стадиями ползучести — неустановившейся, установившейся и прогрессирующей. Наконец, при нагрузке $\tau/\tau_T=1,3$ I стадия перешла в III, практически минуя стадию установившегося течения (кривая 3).

Уравнение течения с учетом переменной скорости деформации. Изменение во времени скорости деформации учитывают введением в реологическое уравнение состояния (5.9) функции времени $K(t)$. Принимая эту функцию в виде (5.12) при $T_1=0$, $T_2=T$ и учитывая соотношение (5.38), получим следующее уравнение течения:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^* \left(\frac{\tau}{\tau^*} \right)^{1/m} \left(\frac{t}{T} \right)^{-n}, \quad (5.42)$$

где $n \leq 1$, а τ^* и T можно принять равными единице.

Интегрирование уравнения (5.42) дает в зависимости от величины n рассмотренные выше выражения (5.17), (5.20) и (5.27).

Изменение коэффициента вязкости во времени. Изменение во времени скорости деформации можно объяснить изменением в процессе деформирования вязких свойств тела. Соответственно соотношение (5.9) можно записать в виде

$$\dot{\gamma} = \frac{f(\tau)}{\eta(t)}, \quad (5.43)$$

где $\eta(t)$ — переменный во времени коэффициент вязкости.

В частности, применительно к выражению (5.42) этот коэффициент будет равен $\eta(t) = (t/T)^n$, или в более корректной форме

$\eta(t) = \eta_0 \left(\frac{t+T}{T} \right)^n$, где η_0 — начальная (при $t=0$) вязкость. Указанные значения $\eta(t)$ в предположении $n=1$ были исследованы Н. Я. Хархута и В. М. Иевлевым [41], установившими, что в зависимости от типа грунта (от рыхлых до плотных глин) $\eta(t)$ варьируется от $3 \cdot 10^7$ до $140 \cdot 10^7$ П, параметр же T для всех грунтов относительно постоянен и равен 0,5 с.

Другим возможным видом изменяющегося во времени коэффициента вязкости является предложенная Б. Персоном и Н. Н. Масловым [19] экспоненциальная зависимость

$$\eta(t) = \eta_\infty - (\eta_\infty - \eta_0) e^{-t/T}, \quad (5.44)$$

где η_0 и η_∞ — начальное (при $t=0$) и конечное (при $t=\infty$) значения коэффициента вязкости, причем $\eta_\infty \gg \eta_0$, T — параметр (часы), определяемый соотношением

$$T = t / \ln \left(\frac{\eta_\infty - \eta_0}{\eta_\infty - \eta} \right).$$

Оба этих автора принимали линейный вид функции $f(\tau)$, причем Н. Н. Маслов сочетает зависимость (5.43) с условием Бингама и выражает эту зависимость в следующей форме:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta\tau}{\eta_\infty - (\eta_\infty - \eta_0) e^{-t/T}}, \quad (5.45)$$

где $\Delta\tau = \tau - \tau_{lim}$, а τ_{lim} — порог ползучести.

Уравнение деформирования, получаемое путем интегрирования выражения (5.45), имеет вид

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\Delta\tau}{\eta_\infty} \left[t + T \ln \frac{\eta_\infty - (\eta_\infty - \eta_0) e^{-t/T}}{\eta_0} \right]. \quad (5.46)$$

Как следует из выражения (5.45), скорость деформации, начальное значение которой равно $\dot{\gamma} = \Delta\tau/\eta_0$, уменьшается во времени, асимптотически приближаясь к нулю.

тотически приближаясь к конечному постоянному значению $\dot{\gamma}_{\infty} = \Delta\tau/\eta_{\infty}$. Соответственно деформация ползучести, определяемая формулой (5.46), возрастает во времени (со все уменьшающейся скоростью) и при $t=\infty$ переходит в установившееся течение с постоянной скоростью $\dot{\gamma}_{\infty} = \text{const}$.

Отметим, что все приведенные выше уравнения, включая (5.45), являются феноменологическими, поскольку в них закономерности изменения вязкости грунта во времени получены из рассмотрения не физической сущности процесса, а эмпирическим путем.

§ 5.5. ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ

Кривые ползучести грунтов. Проведенные различными авторами эксперименты свидетельствуют о том, что для большинства грунтов типичны классические кривые ползучести, изображенные на рис. 5.1, т. е. кривые, имеющие затухающий характер при малых напряжениях и незатухающий при больших. При этом на кривых незатухающей ползучести, как правило, можно проследить все три стадии деформирования — неустановившуюся, установившуюся и прогрессирующую. Такой вид кривых ползучести типичен для самых различных глинистых грунтов — от текучей до твердой консистенции независимо от вида испытаний — на сдвиг, одноосное и трехосное сжатие и т. д.

Кривые ползучести пластичных глин. На рис. 5.13 приведены результаты испытаний на ползучесть пластичных глин.

График *a* (данные Н. К. Пекарской и С. С. Вялова, 1965) относится к опытам с искусственными образцами юрской глины батбайосского горизонта. Этот грунт отличается высокой дисперсностью и пластичностью, фракций менее 0,005 мм в них содержится 56%, а влажность составляет $W=32\%$ при $W_L=48\%$ и $W_P=26\%$. Испытания проводились на чистый сдвиг (кручение полых цилиндрических образцов без обоймы) под постоянными сдвигающими нагрузками, составляющими определенную долю от условно-мгновенной прочности τ_s , т. е. сопротивления, определяемого при быстром (0,5—1 мин) загрузении; эта величина равнялась $\tau_s = 0,167 \cdot 10^5$ Па. При нагрузках $\tau \leq 0,575\tau_s$ деформации были затухающими, а при $\tau \geq 0,575\tau_s$ возникала незатухающая ползучесть, заканчивающаяся разрушением. Интересно отметить, что переход от затухающей к незатухающей ползучести был вызван увеличением напряжений всего на $\Delta\tau = 0,015\tau_s = 0,025 \cdot 10^5$ Па.

На рис. 5.13, *б* представлены данные опытов С. Муроямы и Т. Шиботы (сб. «Механика грунтов и фундаментостроение», 1966), проведенных с ненарушенными образцами аллювиальной пластичной глины г. Осака ($W=65\%$, $W_L=63$ —83%, степень водонасыщения 100%). Испытания образцов глины проводились на сжатие под постоянными нагрузками, составляющими от 0,9 до $0,63\tau_s$, где $\tau_s = 0,9 \cdot 10^5$ Па. Все нагрузки вызвали незатухающую ползучесть с отчетливо выраженными тремя стадиями деформирования.

На рис. 5.13, в приведены данные испытаний глинистого грунта на сдвиг на срезном приборе, выполненные О. Г. Диасамидзе [19]. Сдвигающая нагрузка составляла от 40 до 55% от τ_s . При напряжении $\tau = 0,4\tau_s$ деформация имела затухающий характер, при $\tau > 0,4\tau_s$ развилось пластично-вязкое течение, переходящее в прогрессирующую стадию, заканчивающуюся разрушением.

Данные испытаний лёссового грунта ненарушенного сложения, выполненных С. К. Алиевым (сб. «Вопросы механики грунтов», Баку, 1972), приведены на рис. 5.13, г. Лёсс в естественном состоя-

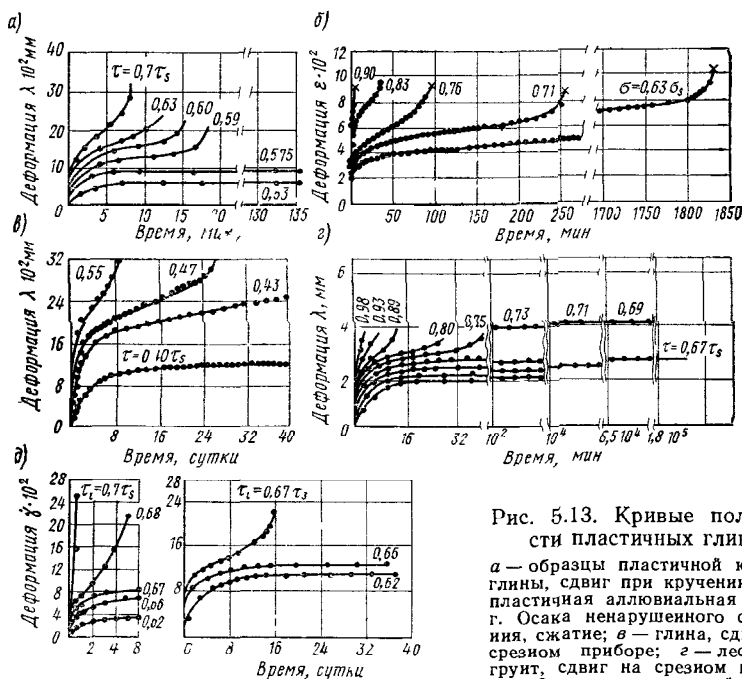


Рис. 5.13. Кривые ползучести пластичных глин:

а — образцы пластичной юрской глины, сдвиг при кручении; б — пластичная аллювиальная глина г. Осака ненарушенного сложения, сжатие; в — глина, сдвиг на срезном приборе; г — лёссовый грунт, сдвиг на срезном приборе, д — ил уплотнённый, трехосное сжатие

нии имел влажность $W = 9,3\%$ при $W_L = 31,2\%$ и $W_p = 20,8\%$. Перед испытанием грунт замачивался до полного водонасыщения и затем уплотнялся под нагрузкой $\sigma_n = 1,0 \cdot 10^5$ Па (до стабилизации). Испытание проводилось на срезном приборе под водой при $\sigma_n = 1,0 - 2,0 - 3,0 \cdot 10^5$ Па и различных сдвигающих нагрузках $\tau = \text{const}$. На графике г приведены данные опытов только при $\sigma_n = 1,0 \cdot 10^5$ Па; значение τ_s в этом случае составляло $0,75 \cdot 10^5$ Па. Как видно, незатухающая ползучесть развивалась при $\tau > 0,73\tau_s$, при $\tau < 0,73\tau_s$ деформация имела затухающий характер.

Наконец, на рис. 5.13, д отображены данные испытаний на трехосное сжатие, проведенные Г. В. Сорокиной и А. С. Строгановым [38] с уплотненным илом (нарушенной структуры). Истый грунт, имеющий в природном состоянии $W_L = 120\%$ и $W_p = 51\%$ при содер-

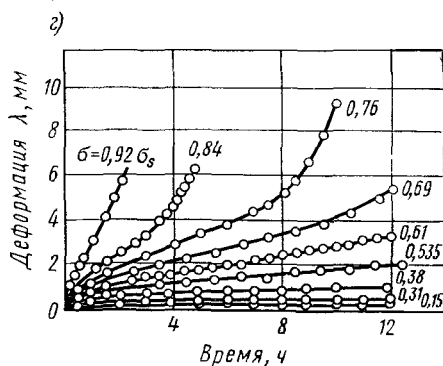
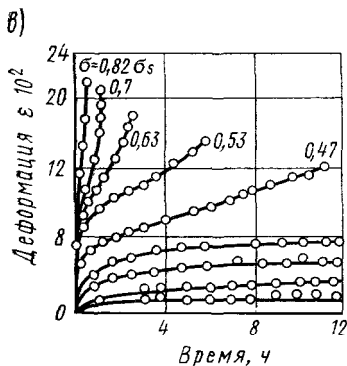
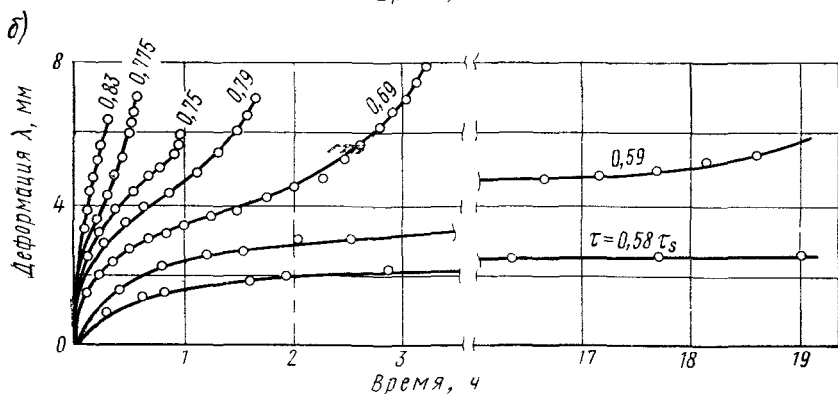
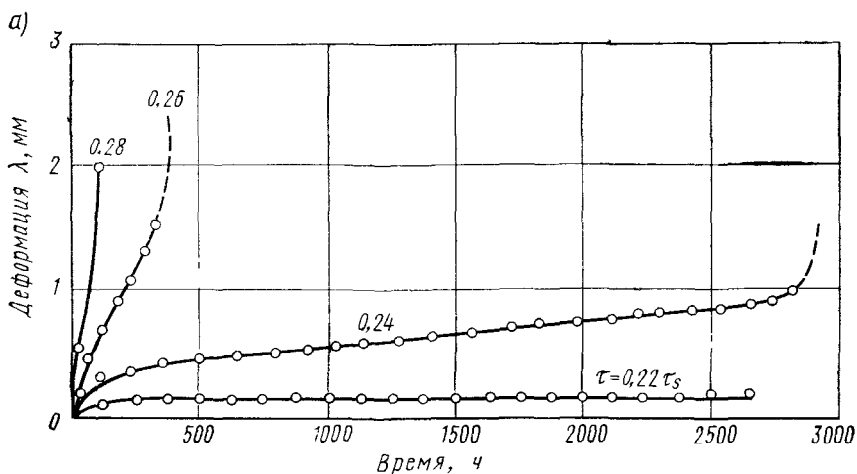


Рис. 5.14. Кривые ползучести мерзлых грунтов:

а — суглинок $\theta = -0.4^\circ \text{C}$, сдвиг вдоль замороженного цилиндрического стержня, б — супесь келловейская $\theta = -10^\circ \text{C}$, сдвиг на срезном приборе; в — супесь келловейская, $\theta = -20^\circ \text{C}$, одноосное сжатие, г — глина бат-байосса $\theta = -20^\circ \text{C}$, одноосное сжатие

жании гумуса до 9%, уплотнялся под нагрузками от 0,25 до $3,0 \times 10^5$ Па. После этого его испытывали на ползучесть при различных значениях интенсивности напряжений τ_i , но при постоянном значении среднего нормального напряжения σ_m . На графике *б* приведены данные испытаний при $\sigma_m = 1,0 \cdot 10^5$ Па. Значения τ_i принимались как доля условно-мгновенной прочности τ_s , равной для данного случая $1,16 \cdot 10^5$ Па. Как и в предыдущих примерах, при трехосном сжатии ползучесть илистого грунта в зависимости от величины девиатора напряжения (точнее, от соотношения девиатора напряжения и всестороннего давления) имеет как затухающий, так и незатухающий характер, причем в последнем случае установившееся течение переходит в прогрессирующую стадию.

Кривые ползучести мерзлых грунтов. На рис. 5.14 представлены данные испытаний мерзлых грунтов, проведенные с грунтами различного состава и при различном виде загрузки [3, 4].

На рис. 5.14, *а* изображены результаты испытаний [3] на сдвиг мерзлого суглинка ($W = 38\%$, $\theta = -0,4^\circ \text{C}$) вдоль замороженного стержня (моделирование работы свай в мерзлом грунте) под постоянными нагрузками, составляющими определенную долю от условно-мгновенной прочности τ_s . Для данных опытов эта величина, определенная при загрузении в течение 3 с, оказалась равной $\tau_s = 4,6 \cdot 10^5$ Па.

На графике *б* представлены данные испытаний Н. К. Пекарской [4] келловейской супеси ($W = 26\%$, $\theta = -10^\circ \text{C}$) на сдвиг на срезовом приборе при нормальном напряжении $\sigma_n = 20 \cdot 10^5$ Па. Условно-мгновенное сопротивление сдвигу, определенное за 2-минутное испытание, составило $\tau_s = 36,2 \cdot 10^5$ Па.

На рис. 5.14, *в, г* изображены данные испытаний С. Э. Городецкого и Е. П. Шушеринной [4] на одноосное сжатие келловейской супеси и плотной глины бат-байосса ($W = 22\%$, $\theta = -20^\circ \text{C}$). Условно-мгновенная прочность, соответствующая 20-минутному испытанию, равнялась $\sigma_s = 128 \cdot 10^5$ Па для супеси и $\sigma_s = 65,5 \cdot 10^5$ Па для глины.

У мерзлых грунтов все три стадии ползучести выражены весьма четко. Так же четок переход от затухающей к незатухающей ползучести, причем граница, разделяющая эти два процесса, соответствует напряжению, равному в опытах *б, в, г* 30—50% от условно-мгновенной прочности и 24% — в опыте *а*. Отметим, что в опытах на растяжение мерзлых грунтов незатухающая ползучесть начала развиваться при нагрузках, составляющих всего 8—10% от условно-мгновенной прочности.

Особенностью деформирования мерзлого грунта является длительность I, неустановившейся стадии, которая может составлять сотни часов. Переход в прогрессирующую стадию деформирования происходит плавно, а сама стадия развивается длительное время, измеряемое сотнями (и даже тысячами) часов. Так, согласно опытным данным, показанным на рис. 5.12, *в*, продолжительность каждой из стадий при общей длительности процесса 4735 ч составляла:

первой стадии — около 1000 ч, второй — 3000 ч и третьей (до момента разрушения) — 735 ч.

Величины же деформации в каждой из стадии (по данным опытов, показанных на рис. 5.14, б) соотносились следующим образом. Если принять общую деформацию к моменту начала прогрессирующего течения за 100%, то доля мгновенной деформации составляет 2—7%, деформации затухающей ползучести (I стадия) — 49—73% и деформации установившегося течения — 25—44%.

Установившееся и прогрессирующее течение грунтов. Из приведенных выше данных следует, что во многих случаях возникновение

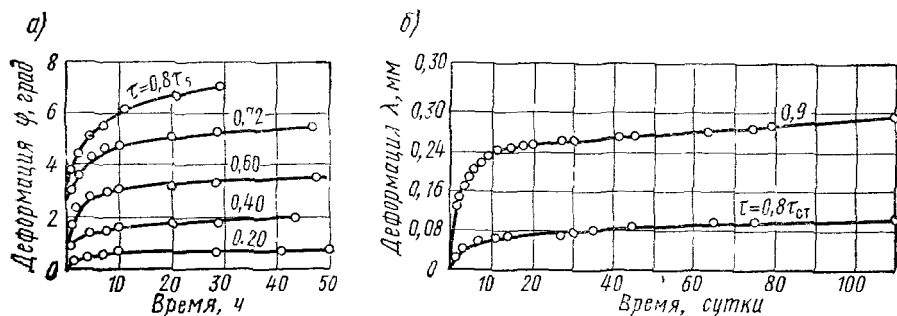


Рис. 5.15. Установившееся течение:

а — пластичная иллитовая глина нарушенного сложения, сдвиг при кручении; б — пластичная глина нарушенного сложения, испытание на приборе кольцевого сдвига

незатухающей ползучести грунтов приводит к прогрессирующему течению с возрастающей скоростью. Однако встречаются случаи, когда стадия установившегося течения с постоянной скоростью развивается весьма долго, не переходя в прогрессирующее течение. Такие результаты были получены в опытах Гезе и Тана, Месчяна и др. Опыты Гезе и Тана (1954), результаты которых опубликованы в Трудах II Международной конференции по реологии (Лондон, 1954), являются одними из первых испытаний грунтов на ползучесть. Они были проведены с искусственными образцами иллитовой глины пластичной консистенции (фракций $<0,002$ мм — 50%, $W = 47,5\%$ при $W_L = 93,5\%$ и $W_p = 27,4\%$) и заключались в скручивании полых цилиндрических образцов. Сдвигающая нагрузка составляла от 20 до 80% от кратковременной (10 мин) разрушающей τ_s . Почти при всех значениях нагрузки скоро (через 5—10 ч) устанавливалось течение с постоянной скоростью.

Опыты С. Р. Месчяна [22], результаты которых показаны на рис. 5.15, б, проводились в течение значительно большего периода времени — до 110 дней. Эти опыты выполнялись с образцами суглинки ($W = 26,5$, $W_L = 31,3\%$, $W_p = 18,6\%$) на приборе кольцевого сдвига при одновременном воздействии крутящего момента и осевого давления ($\sigma_z = 2 \cdot 10^5$ Па). Величина сдвигающего напряжения составляла 0,8 и 0,9 от «стандартной» прочности $\tau_{ст}$. Под последней подразумевается прочность, определенная по стандартной

(ГОСТ 12248—66) методике медленного среза с выдерживанием каждой ступени нагрузки до условной стабилизации деформации. Продолжительность такого испытания составляет 1—8 дней. Определенная таким образом прочность оказалась на 20% ниже условно-мгновенной.

В описываемых опытах было получено, что при $\tau < \tau_{ст}$ деформация ползучести протекает или в затухающей, или в установившейся стадиях. На основе подобных данных некоторые авторы высказывали сомнение в существовании прогрессирующей стадии вообще, считая, что ускорение деформации, отмечаемое в других опытах, вызывается условиями экспериментов — уменьшением рабочего сечения образца, концентрацией напряжения и т. д.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Еще на основании первых опытов с мерзлыми грунтами (опубликованных в «Докладах АН СССР, т. 104, № 6, 1955) автор этой книги высказал утверждение о том, что развитие прогрессирующей ползучести ведет к разрушению — хрупкому с нарушению сплошности, или вязкому, с потерей устойчивости. Причем утверждалось, что этот процесс обусловлен самими свойствами грунта, а не условиями опыта.

Действительно, предположение о большом влиянии условий испытаний лишено оснований хотя бы потому, что прогрессирующая стадия, как это следует из рис. 5.13 и 5.14 и других опытных данных, наступает при самых различных видах испытаний. К ним относятся и такие, при которых площадь рабочего сечения образца не меняется (кручение цилиндрических образцов) и даже увеличивается, как это происходит при испытании на одноосное сжатие.

Физические причины, вызывающие увеличение скорости деформаций и разрушение грунта в процессе ползучести при неизменном напряжении, будут объяснены далее на основе изучения микроструктуры грунта. Здесь же только отметим, что в процессе ползучести грунт одновременно и упрочняется и расслабляется, причем последнее происходит из-за нарушения структурных связей, образования микротрещин и пр.

Стадия установившегося течения возникает тогда, когда нарушение и восстановление межчастичных связей взаимно компенсируются. У слабоструктурированных грунтовых систем такое состояние может продолжаться неограниченно долго. У структурированных грунтов с жесткими связями в конце концов начнет превалировать одно из этих явлений, в результате чего деформации будут затухать или развиваться с возрастающей скоростью. Превалирование расслабления над упрочнением и приводит к возникновению прогрессирующего течения и разрушению грунта.

Отметим, что началу прогрессирующего течения может препятствовать проведение опытов в условиях стесненной деформации. Именно к последнему случаю относятся испытания в приборах кольцевого сдвига (рис. 5.15, б), в которых образцы заключают в жесткие обоймы или защищают набором металлических колец по внутренней и внешней боковым поверхностям. При такой конструкции прибора исключается возможность бокового расширения образ-

цов. Развитие же прогрессирующего течения связано с явлением дилатансии — увеличением объема образца при воздействии сдвиговых усилий, что, в свою очередь, обусловлено развитием микротрещин. Создание условий, устраняющих эти явления, и препятствует возникновению прогрессирующего течения.

Сказанное подтверждается сопоставительными испытаниями С. Р. Месяна на кручение цилиндрических образцов грунта, кото-

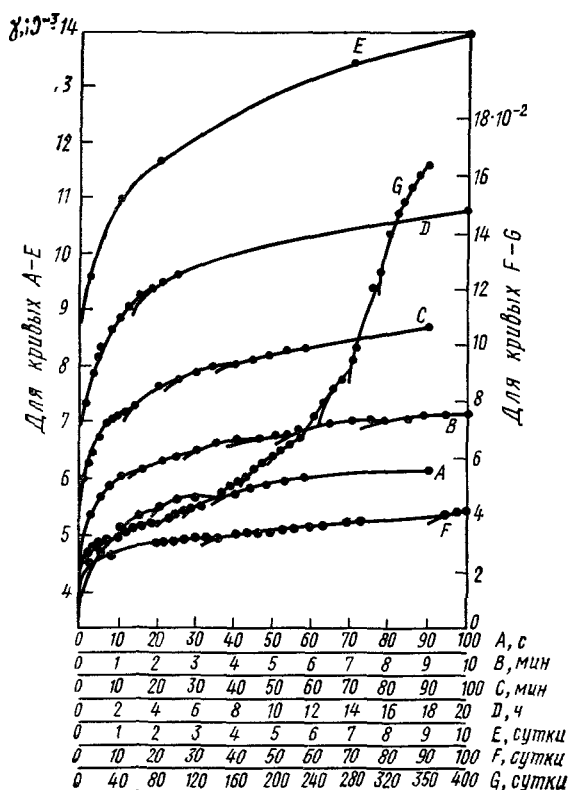


Рис. 5.16. Кривая ползучести диатомитовой глины в различном масштабе времени. Испытания на кольцевой сдвиг; $\sigma_z = 1 \cdot 10^5$ Па, $\tau = 0,4 \times 10^5$ Па (опыты Г. И. Тер-Степаняна)

рые в одном случае были защищены от возможности бокового расширения с помощью набора колец (играющих роль обоймы), а в другом не защищены. В первом случае в течение долгого времени развивалось течение грунта с постоянной скоростью, во втором оно перешло в стадию прогрессирующего течения и закончилось разрушением.

При оценке вида кривых ползучести важную роль играет масштаб времени. В качестве интересного примера можно привести

данные испытаний Г. И. Тер-Степаняна, опубликованные в 1973 г. [74] и представленные на рис. 5.16. Данные относятся к опыту, выполненному на приборе кольцевого сдвига с образцом диатомитовой глины нарушенной структуры из озерной толщи верхнемелового возраста ($W=81,6\%$, $W_L=117\%$, $W_p=58,5\%$, $\gamma=1,5$ г/см³).

Испытание продолжалось около 350 дней, но кривые ползучести на графике изображены в различном масштабе. Кривая *A* относится к начальному интервалу времени — 90 с, кривая *B* — к интервалу 10 мин, кривая *C* — 100 мин и т. д.; последняя кривая *G* отображает процесс испытания за все 350 дней.

Если рассматривать кривую для каждого интервала времени в отдельности, то можно выделить участки затухающего деформирования (до 10—20 дней), и установившегося течения (после 25—30 дней — кривая *F*). Но если оценивать кривую *G* в целом, то придем к вы-

воду о непрерывном начиная с $t=25$ —30 дней возрастании скорости деформирования, причем этот рост происходит скачками, что объясняется перестройкой структуры грунта.

Отсюда следует вывод, о котором было сказано раньше, что определение характера деформирования на основании кратковременных наблюдений может привести к ошибкам.

Вопрос о свойстве грунтов течь с истинно постоянной скоростью требует длительных и весьма тщательных исследований. Ниже мы покажем, что у плотных глин и скальных пород эта стадия может отсутствовать. У пластичных же грунтов можно принимать для практических расчетов, что существует такой интервал нагрузок, в пределах которого деформация в течение долгого времени развивается с мало меняющейся скоростью и эту скорость можно рассматривать как постоянную.

Вместе с тем наблюдения в натуре свидетельствуют, что установившееся течение, по-видимому, переходит со временем в прогрессирующее.

В качестве наиболее характерного примера приведем описанный А. Скемптоном [56] случай долговременной ползучести и обрушения подпорной стенки в Кензал Грин. Эта стенка была построена в 1912 г. для укрепления откоса выемки в плотных трещиноватых лондонских глинах ($W=33\%$, $W_L=83\%$, $W_p=30\%$); в результате оползания откоса стенка обрушивалась дважды — в 1929 и в 1941 гг. Скорость смещения откоса в течение нескольких первых лет после восстановления стенки в 1929 г. составляла 0,6 см в год, но затем стала постепенно увеличиваться и перед разрушением общее перемещение достигло 46 см (рис. 5.17).



Рис. 5.17. Данные наблюдений за смещением подпорной стенки в Кензал Грин (Англия) в результате длительного прогрессирующего течения грунта

Обратным пересчетом было установлено, что напряжение сдвига, действующее в плоскости обрушения откоса, равнялось $\tau = 0,19 \times 10^5$ Па, тогда как пиковое сопротивление (при одинаковом значении $\sigma_n = 0,39 \cdot 10^5$ Па) составляло 0,3, а остаточное $0,11 \cdot 10^5$ Па; таким образом, действующее напряжение равнялось 63% от пиковой (кратковременной) прочности.

Кривые ползучести плотных глин. Рассмотрим характер процесса ползучести у очень плотных, сильно структурированных глин. На рис. 5.18, а изображены данные опытов А. М. Скибицкого, опубликованные в 1957 г. [39], с байделлит-монтмориллоновой третичной глиной ненарушенного сложения, взятой с глубины 50 м.

Глина содержит до 37% пылеватых и 62% глинистых фракций, причем в составе последних — до 70% коллоидных частиц; естественная влажность ее $W = 34\%$, что совпадает с пределом пластичности $W_p = 34,5\%$ при пределе текучести $W_L = 73,5\%$. Испытания проводились на срезном приборе при $\sigma_n = 7 \cdot 10^5$ Па. Напряжение сдвига задавалось в долях от кратковременной (1 ч) прочности, составляющей $\tau_s = 2,75 \cdot 10^5$ Па.

При продолжительности испытания до 2,5 мес деформации при сдвиговых нагрузках $\tau = 0,3 - 0,7 \tau_s$ имели затухающий характер и к концу испытания стабилизировались. Напряжение же $\tau = 0,9 \tau_s$ привело через 32 дня к разрушению, причем этому предшествовала затухающая (по логарифмическому закону) деформация и разрушение наступило без перехода в стадию установившегося течения. Разрушение, носившее хрупкий характер, произошло весьма быстро.

Аналогичные результаты были получены в интересных опытах А. Бишоп и Г. Лавенбери [47], продолжавшихся 3,5 года (рис. 5.18, б). Испытывались ненарушенные образцы трещиноватой лондонской глины, представляющей собой сильно переуплотненные (величина природной уплотняющей нагрузки оценивалась в $30 \cdot 10^5$ Па) отложения эоцена. Глинистых фракций содержалось 58%, естественная влажность была $W = 29,3\%$ при $W_p = 29\%$ и $W_L = 76\%$. Испытания проводились на приборе трехосного сжатия (с возможностью дренирования) при различных значениях $\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_3$ и при постоянном значении $\sigma_3 = \sigma_2 = 1,41 \cdot 10^5$ Па.

Предварительно по данным стандартных испытаний продолжительностью 5 дней определялась кратковременная (пиковая) прочность, которая оказалась равной $\sigma_{1(s)} = \max(\sigma_1 - \sigma_3) = 2,27 \cdot 10^5$ Па. Испытания на ползучесть осуществлялись при значениях σ_1 , составлявших определенный процент от $\max(\sigma_1 - \sigma_3)$. На графике указаны наибольшие и наименьшие значения σ_1 по данным шести повторных испытаний.

При всех значениях нагрузки деформация ползучести носила затухающий (по логарифмическому закону) характер. Однако при нагрузках, составляющих 90—106% (в среднем 100%) и 80—94% (в среднем 89%), деформация закончилась разрушением образца. В первом случае оно произошло через 2 дня после загрузки, а во втором — через 1250 дней, причем за это время скорость деформирования несколько колебалась. В обоих случаях разрушению

предшествовала явно выраженная прогрессирующая стадия. Установившееся течение, как и в опытах, представленных на рис. 5.18, а, здесь отсутствовало.

Кривые ползучести полускальных и слабых скальных пород. Отсутствие стадии установившегося течения является отличитель-

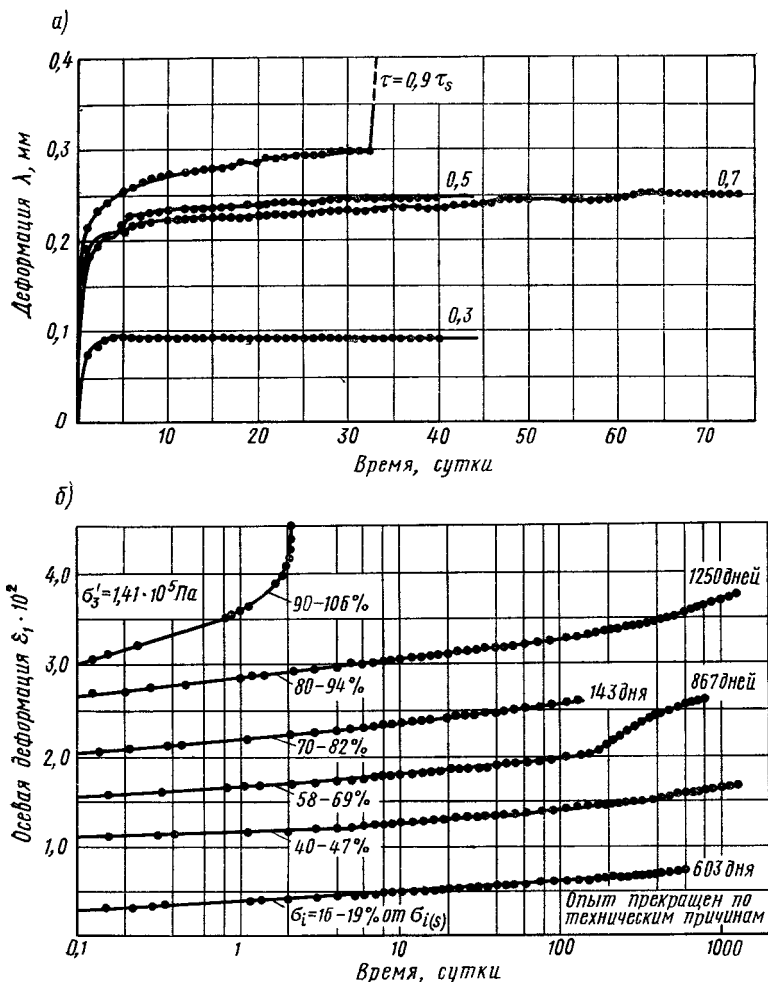


Рис. 5.18. Кривые ползучести плотных глин:

а — третичная — монтмориллонитовая глина ненарушенной структуры ($W=33\%$, $W_p=34.4\%$), испытанная на срезном приборе; б — трехосное сжатие с возможностью дренажирования лондонской глины эоцена ненарушенной структуры ($W=29.3\%$, $W_p=29\%$)

ным признаком деформирования у большинства полускальных и скальных пород (вне зависимости от длительности испытания). Деформация этих грунтов хотя и протекает в стадии затухающей пол-

зучести, но она может заканчиваться разрушением при нагрузках, близких к мгновенной прочности.

Данные о ползучести горных, полускальных и скальных пород накоплены сейчас в достаточно большом объеме [21]. На рис. 5.19

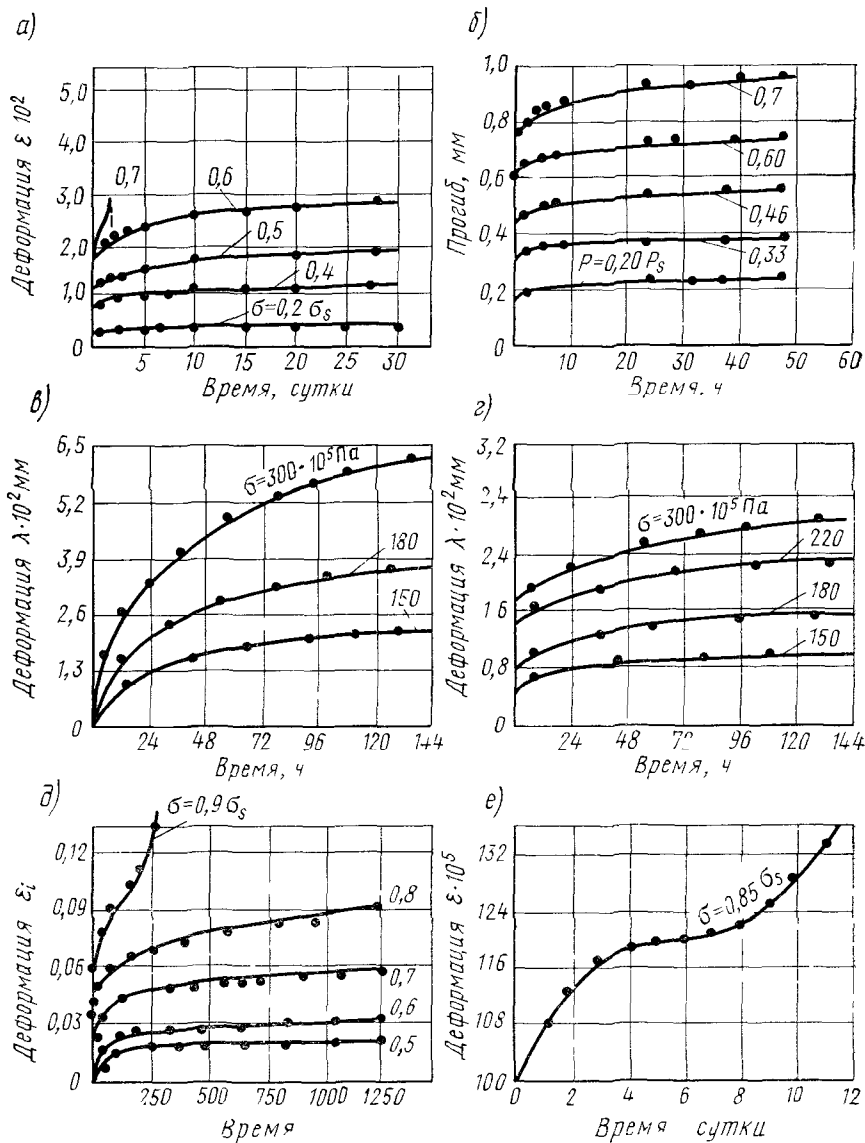


Рис. 5.19. Кривые ползучести полускальных и слабых скальных пород:

а — одноосное сжатие алевроитового мергеля; б — изгиб балочных образцов алевролита; в — одноосное сжатие мелкозернистого песчаника в водонасыщенном состоянии; г — то же, в воздушно-сухом состоянии; д — одноосное сжатие среднекристаллической каменной соли; е — одноосное сжатие песчаника

представлены некоторые из кривых ползучести, взятые из работ Ж. С. Ержанова и сборника «Проблемы реологии горных пород» (1970).

На рис. 5.19, а приведены данные испытаний Ю. М. Карташовым алевроитового мергеля ($W=26\%$, $\rho=1,89$ г/см³), который можно рассматривать и как слабую полускальную породу, и как очень плотную глину. Испытания проводились на одноосное сжатие под нагрузками, составляющими от 0,2 до 0,7 от условно-мгновенной прочности, равной $\sigma_s=30 \cdot 10^5$ Па. При нагрузках, составляющих до $0,6\sigma_s$, деформации стабилизировались. При нагрузке же $\sigma_z=0,7\sigma_s$ произошло быстрое разрушение.

Ж. С. Ержановым были проведены испытания на ползучесть алевролита ($\rho=2,61$ г/см², $W=0,69\%$). Испытания заключались в изгибе образцов-балочек $20 \times 20 \times 160$ мм под нагрузками, составляющими от 20 до 73% от мгновенно-разрушающей. Во всех случаях деформация ползучести имела затухающий характер (рис. 5.19, б), причем величина этой деформации, накопившейся за 48 ч, составляла до 340% от условно-мгновенной упругой деформации.

Отметим, что для аргиллита деформация ползучести составила до 320% от упругой деформации, а для песчаника — до 40%. По данным В. Т. Глушко и других авторов, деформация ползучести различных песчаников составляет от 8 до 44% от упругой деформации. Обратимая деформация после разгрузки образцов, также развивавшаяся во времени, во всех случаях не превышала 8% от полной деформации образца.

Эти цифры свидетельствуют о большой роли ползучести в процессе деформирования горных пород. Как в этих, так и в других опытах зависимость между деформацией и напряжением, если последнее не превышает 50—75% от разрушающего, являлась линейной.

Аналогичная картина наблюдалась и в опытах Н. Ф. Ренжигалова, результаты которых опубликованы в сборнике [14]. Испытания заключались в одноосном сжатии алевролита, аргиллита и мелкозернистого песчаника с глинистым цементом (до 15%). Данные испытаний песчаника в водонасыщенном и воздушносухом состоянии приведены на рис. 5.19, в, г. Деформации во всех случаях носили затухающий характер, но для водонасыщенных образцов оказались примерно в два раза большими.

У некоторых скальных пород процесс разрушения при ползучести происходит не сразу; ему, как и у дисперсных грунтов, предшествует прогрессирующая стадия.

На рис. 5.19, д одна из кривых ползучести отображает эту стадию. Кривая получена Е. М. Шифаренко и Е. С. Оксенкуром [38] по данным испытания на одноосное сжатие среднекристаллической каменной соли. Нагрузки, составляющие от 0,5 до 0,8 от условно-мгновенной прочности, вызвали затухающие деформации, нагрузка же, равная $\sigma_z=0,9\sigma_s$ (кривая построена для этого случая), привела за 250 ч к разрушению образца.

Характер развития стадии разрушения иллюстрируется также кривой ползучести на рис. 5.19, е, где представлены данные испытаний В. Т. Глушко (сб. «Проблемы реологии горных пород», 1970) песчаника из Донбасса с глинистым цементом под нагрузкой, составляющей 0,85 от мгновенно-разрушающей, величина которой равнялась $\sigma_s = 200 \cdot 10^5$ Па.

Из приведенных данных следует, что у полускальных и даже некоторых скальных пород разрушению предшествует III, прогрессирующая стадия, которая может развиваться до 10 сут и более. Очевидно, это свойственно горным породам, у которых цементирующее вещество представлено вязким материалом (например, у песчаника с глинистым цементом) или у которых сам кристаллический материал (например, каменная соль) обладает реологическими свойствами.

§ 5.6. ОБЩНОСТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ

Зависимость реологических свойств грунтов от характера структурных связей. Рассмотренные выше данные свидетельствуют о том, что всем грунтам, начиная от слабых глинистых и кончая скальными, свойственны общие реологические закономерности.

В зависимости от величины нагрузки, типа грунта и вида напряженного состояния могут развиваться затухающая ползучесть, заканчивающаяся стабилизацией деформации, «вековая» ползучесть, при которой скорость деформации затухает, тогда как сама деформация неограниченно нарастает, не приводя, однако, к разрушению, условно-установившаяся ползучесть в виде пластично-вязкого течения и, наконец, прогрессирующая ползучесть, приводящая к разрушению. Превалирование той или иной стадии ползучести и их удельная роль существенно зависят от типа грунта.

Н. К. Пекарская [38], проделавшая интересный анализ закономерностей поведения грунтов в зависимости от характера структурных связей, установила, что именно вид этих связей и определяет в первую очередь характер процесса деформирования. Так, пластичным глинам с преимущественными водно-коллоидными связями (коагуляционные структуры) свойственны все стадии деформирования, характерные для классической кривой ползучести. При этом чем пластичнее грунт, тем скорее наступает стадия установившегося течения и тем большую роль она играет в процессе деформирования; у грунтов текучей консистенции эта стадия является доминирующей, и эти грунты по своим свойствам приближаются к вязкой жидкости. Стадия прогрессирующего течения у пластичных грунтов с водно-коллоидными связями возникает при нагрузках, составляющих 40—70% от кратковременной прочности, и развивается длительное время, заканчиваясь разрушением, как правило, вязким.

У плотных глинистых грунтов со смешанными коагуляционными и кристаллизационными связями преобладает стадия затухающего деформирования. Прогрессирующая стадия возникает при нагруз-

ках, составляющих 70—80% и более от кратковременной прочности, причем переход от затухающего к прогрессирующему деформированию наблюдается в большинстве случаев без стадии установившегося течения. При этом относительная продолжительность прогрессирующей стадии невелика, а разрушение бывает преимущественно хрупким.

Аналогичные закономерности характерны и для полускальных и слабых скальных пород с кристаллизационными связями. Однако для этих пород определяющую роль играет характер цементирующих связей. Если цементное вещество обладает выраженными реологическими свойствами, то эти свойства будут проявляться и у всей породы в целом.

Типичным примером такой породы является мерзлый грунт, у которого роль цементирующего вещества играет лед — материал, представляющий собой образец классического нелинейно-вязкого тела. Соответственно поведение мерзлого грунта отображается типичными кривыми ползучести со всеми стадиями, свойственными этому процессу для классических ползучих сред, и с переходом в прогрессирующую стадию при нагрузках, величина которых может составлять всего 10—25% от мгновенной прочности. Отметим, что у металлов при высокой температуре незатухающая ползучесть, как правило, начинается под воздействием самой малой нагрузки.

Другим примером скальной породы с вязким цементирующим веществом служат песчаники с глинистым цементом. Вязкие свойства глинистого цемента выражены, однако, в значительно меньшей степени, чем у льда. Поэтому у такой породы доминирует стадия затухающего деформирования, тогда как установившаяся стадия или невелика, или вообще отсутствует. Прогрессирующая стадия в таких песчаниках возникает лишь при очень больших нагрузках.

Породы, цементирующее вещество у которых обладает малыми вязкими свойствами, приближаются по своему поведению к хрупким телам. Однако здесь надо учитывать свойства самих кристаллов породы. Известно, что для кристаллов с преимущественно ковалентными связями пластические деформации, обусловленные скольжением атомных слоев монокристалла, затруднены; для таких кристаллов характерны только упругие деформации и хрупкое разрушение.

Кристаллы с ионными связями ведут себя хрупко при быстром приложении нагрузок, но обнаруживают вязкие свойства при длительном воздействии нагрузок. Примером является каменная соль, свойства ползучести которой были установлены еще в опытах Вейнберга в 1903 г.

В заключение отметим, что для всех рассмотренных грунтов развивающиеся во времени деформации играют основную роль — они значительно превышают мгновенные деформации — в одних случаях в несколько (2—10) раз, а в других в десятки и сотни раз.

Ползучесть скелета грунта. Ползучесть глинистых грунтов является следствием не только наличия водных пленок, окружающих твердые частицы. Конечно, эти пленки, обладающие явно выражен-

ными вязкими свойствами, существенно способствуют развитию реологических процессов в водонасыщенных дисперсных грунтах с водно-коллоидными связями. Однако и конденсационные связи между минеральными частицами при «сухом» контакте, обусловленные межмолекулярными силами ближнего действия, оказывают вязкое сопротивление смещению частиц. Соответственно грунты с таким видом связей тоже обладают свойствами ползучести.

На рис. 5.20 представлены результаты опытов Л. Шукле [74], проводившим испытания на компрессию образцов сухой глины,

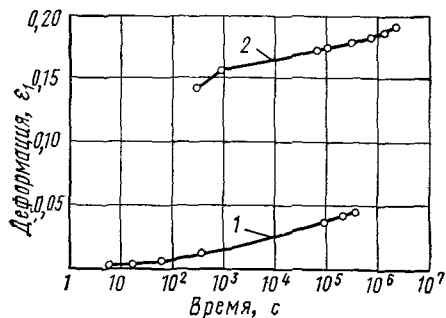


Рис. 5.20. Кривые ползучести высушенного глинистого грунта при сжатии в одометре без возможности бокового расширения:

1 — в высушенном состоянии; 2 — после увлажнения

размельченной до состояния порошка (62% пылеватых частиц и 37% частиц крупностью меньше 0,002 мм, $e=2,83$), а затем испытывавшим эти же образцы после их полного увлажнения.

Результаты испытаний под одной из ступеней нагрузок $\Delta\sigma=0,27—0,5 \cdot 10^5$ Па, показанные на рис. 5.20, свидетельствуют, что и в увлажненных, и в воздушно-сухих образцах деформация развивалась во времени, причем это развитие происходило по логарифмическому закону.

Аналогичные результаты были получены А. Сингхом и Дж. Митчеллом [55], проводивших испытания на трехосные сжатия иллитовой глины, как увлажненной до $W=34\%$, так и высушенной до воздушно-сухого состояния. Испытания проводились под различными нагрузками $\sigma_1—\sigma_3$ (при $\sigma_3=\text{const}$), составлявшими определенную долю от кратковременной прочности. В обоих случаях (увлажненный и высушенный грунт) развивалась ощутимая ползучесть. В частности, при нагрузке $\sigma_1—\sigma_3$, составлявшей 60% от кратковременной прочности, деформация не прекратилась даже после 24 ч испытания.

Обращает на себя внимание тот факт, что в обоих опытах (как с глинным порошком, так и с иллитовой глиной) деформации ползучести увлажненных и высушенных образцов развивались по одному и тому же закону: в первом случае — по логарифмическому, а во втором — по степенному. При этом, хотя абсолютная величина деформации увлажненного грунта была значительно больше, чем у сухого, интенсивность ее развития у обоих образцов примерно одинакова — прямые $\varepsilon_z—\ln t$ на рис. 5.20 имеют почти один и тот же уклон.

Из сказанного следует, что свойства ползучести у дисперсных грунтов обусловлены вязким сопротивлением как дальнедействующих сил двойного слоя, развивающихся между частицами, окружен-

ными пленками связанной воды, так и сил ближнего действия, развивающихся в местах непосредственного контакта частиц. При этом закономерность развития ползучести у грунтов как с коагуляционными, так и с конденсационными связями, а также у грунтов с кристаллизационными связями можно описать одной общей зависимостью, например зависимостью вида (5.42).

$$\dot{\gamma} = A \left(\frac{t}{T} \right)^{-n},$$

причем параметр n для одного и того же грунта в увлажненном и высушенном состоянии будет одним и тем же. Это свидетельствует об общем характере реологических процессов в грунтах.

Ползучесть песка. На

рис. 5.21 приведены результаты испытания Л. Шукле [46] сухого мелкозернистого песка (частицы $< 0,06$ мм — 1%, 0,06—0,2 мм — 50%, 0,2—0,6 мм — 49%, начальная пористость $e = 0,8896$) на одноосное сжатие без возможности бокового расширения под постоянными нагрузками. На графике показана кривая деформирования под ступенью нагрузки $\Delta\sigma = 1 - 2 \cdot 10^5$ Па

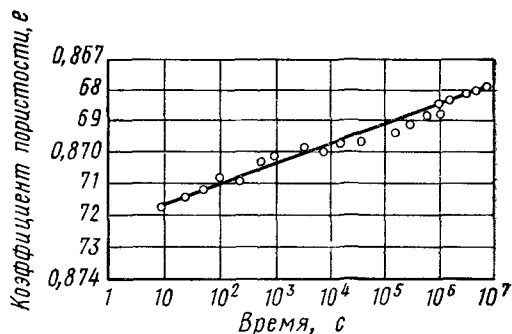


Рис. 5.21. Кривые ползучести сухого мелкозернистого песка, сжатие в одометре без возможности бокового расширения (Шукле, 1973)

Как видно, песок тоже обладает свойством ползучести — деформация уплотнения у него развивается во времени, подчиняясь логарифмическому закону. Аналогичные результаты для водонасыщенного мелкозернистого песка получены в опытах Е. Нонвейллера.

Свойство текучести песка известно из повседневной практики — вытекание песка из отверстия под действием гравитационных сил (песчаные часы), движение барханов в пустыне и т. д. Песок представляет собой как бы крупномасштабную модель хаотически расположенных и слабо между собой связанных молекул жидкости и аналогично ей подчиняется статистическому закону вязкого течения. Но, конечно, этот процесс протекает у песка в значительно менее выраженной форме, чем у дисперсных грунтов.

Ползучесть грунтов при сжатии и растяжении. В гл. 2 было показано, что грунты по-разному сопротивляются деформированию при сжатии и растяжении. Эта особенность грунтов проявляется и при ползучести.

На рис. 5.22 представлены результаты опытов С. Е. Гречищева, опубликованные в сборнике [28]. Эти опыты заключались в испытании на ползучесть при одноосном сжатии и растяжении образцов мерзлого суглинка ($\bar{W} = 29 - 33\%$, $\theta = -3^\circ \text{C}$), выдерживаемых под

постоянными и ступенчато возрастающими нагрузками до возникновения течения с постоянной скоростью. На графике изображены кривые, характеризующие зависимость между этой скоростью и напряжением. Как видно, кривые сжатия и растяжения существенно различны. Хотя обе кривые можно описать одним и тем же уравнением

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{\lambda} (\sigma_z - \sigma_\infty)^{1/m}, \quad (5.47)$$

но значения коэффициента пластической вязкости λ и предельного напряжения σ_∞ для случаев сжатия и растяжения будут различны.

Аналогичные результаты были получены и для мерзлого песка ($W=18-24\%$, $\theta=-3^\circ\text{C}$). Интересно отметить, что параллельные опыты на чистый сдвиг (кручение полых цилиндрических образцов) этого же песка дали результаты, почти совпадающие с данными испытаний на растяжение и соответственно существенно отличающиеся от результатов испытаний на сжатие. Значения параметров уравнения

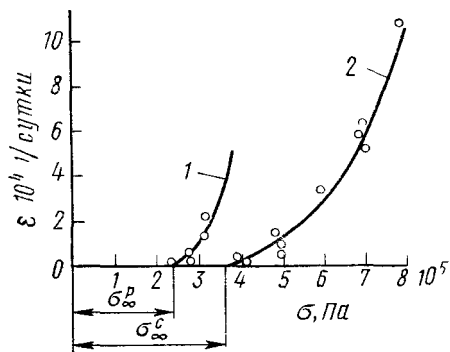


Рис 5.22. Реологические кривые при растяжении (1) и сжатии (2) суглинка мерзлого $\theta = -3^\circ$ (опыты С. Е. Гречищева)

(5.47) приведены в табл. 5.1, причем σ_∞ указаны в 10^5 Па.

Таблица 5.1

Опытные значения параметров уравнения (5.47)

Грунт	Сжатие			Растяжение			Сдвиг		
	σ_∞	λ	$1/m$	σ_∞	λ	$1/m$	τ_∞	η	$1/m$
Мерзлый песок	6,5	0,4	1,0	1,8	0,10	1,0	1,7	0,05	1,0
Мерзлый суглинок	3,6	1,2	1,64	2,5	0,67	1,69	—	—	—

Отметим, что показатель степени $1/m$ для случаев сжатия, растяжения и сдвига оказался одинаковым, что указывает на подобие реологических кривых для этих случаев.

Исходя из формулы (4.22), можно установить связь между предельным сопротивлением сдвигу τ_∞ , сжатию σ_∞^c и растяжению σ_∞^p . Для этого подставим в формулу (4.22) значения τ_i и σ_m для случаев сжатия и растяжения (см. табл. 3.1), а именно: $\tau_i^c = (1/\sqrt{3}) \sigma_z^c$, $\tau_i^p = (1/\sqrt{3}) \sigma_z^p$ и $\sigma_m^c = (1/3) \sigma_z^c$, $\sigma_m^p = -(1/3) \sigma_z^p$.

Тогда получим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{tg} \Psi}{3}\right) \sigma_{\infty}^c = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\operatorname{tg} \Psi}{3}\right) \sigma_{\infty}^p = \tau_{\infty},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma_{\infty}^p &= \frac{3\tau_{\infty}}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \Psi}; \quad \sigma_{\infty}^c = \frac{3\tau_{\infty}}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \Psi}; \\ \operatorname{tg} \Psi &= \frac{\sqrt{3}(\sigma_{\infty}^c - \sigma_{\infty}^p)}{\sigma_{\infty}^c + \sigma_{\infty}^p}; \quad \tau_{\infty} = \frac{2\sigma_{\infty}^c \sigma_{\infty}^p}{\sqrt{3}(\sigma_{\infty}^c + \sigma_{\infty}^p)}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Внося выражения (5.48) в формулу (5.47), можем установить связь между коэффициентами пластической вязкости при сдвиге η , сжатии λ^c и растяжении λ^p :

$$\begin{aligned} \lambda^p &= \frac{3^{\frac{2+m}{2m}}}{(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \Psi)^{1/m}} \eta; \quad \lambda^c = \frac{3^{\frac{2+m}{2m}}}{(\sqrt{3} - \operatorname{tg} \Psi)^{1/m}} \eta; \\ \eta &= \frac{2^{1/m} \lambda^c \lambda^p}{3^{\frac{1+m}{2m}} [(\lambda^c)^m + (\lambda^p)^m]^{1/m}}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Такая сравнительно простая форма связи справедлива при $m^c = m^p = m^{c,p} = m$.

Приведенные данные относились к стадии установившегося течения. Возникает вопрос: а каково будет соотношение между деформациями и их скоростями при сдвиге, сжатии и растяжении в течение всего процесса деформирования, включая и стадию неустановившейся ползучести? Иными словами, будут ли подобны функции времени $\Phi(t)$ и $K(t)$ из выражений (5.8) и (5.9).

Если исходить из уравнения (5.47), как это сделано в упомянутой ранее работе С. Е. Гречищева, считая, однако, что параметры λ и σ_{∞} являются переменными во времени, получим:

$$\begin{aligned} \lambda^{c,p}(t) &= \frac{1}{K^{c,p}(t)} = \frac{\lambda_0^{c,p}}{1 + \xi_1^{c,p}(t)}; \quad \eta(t) = \frac{1}{K^{c,p}(t)} = \frac{\tau_0}{1 + \xi_1^{c,p}(t)}; \\ \sigma_{\infty}^{c,p}(t) &= \frac{\sigma_{\infty}^{c,p}}{1 + \xi_2^{c,p}(t)}; \quad \tau_{\infty}(t) = \frac{\tau_{\infty}}{1 + \xi_2^{c,p}(t)}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

где $\xi(0)=0$; $\sigma_{\infty}(0)=\sigma_{\infty}$; $\tau_{\infty}(0)=\tau_{\infty}$.

Если функции времени $\xi(t)$ для всех видов нагружения равны между собой:

$$\xi_{1,2}^c(t) = \xi_{1,2}^p(t) = \xi_{1,2}^{c,p}(t) = \xi(t), \quad (5.51)$$

то между коэффициентами вязкости будет существовать следующая связь:

$$\lambda^{c,p} = \frac{3^{\frac{2+m}{2m}} \eta_0}{(\sqrt{3} \mp \operatorname{tg} \psi)^{1/m} [1 + \xi(t)]}, \quad (5.52)$$

причем $\left[\frac{\lambda^c(t)}{\lambda^p(t)} \right]^m = \alpha = \text{const.}$

Опыты показали, что для мерзлого песка (для которого $m=1$) условие (5.51) соблюдается. Для мерзлой же супеси значение α изменяется в следующих пределах: $\alpha=1,1$ при $t=1$ сут, $\alpha=1,25$ при $t=5$ сут и $\alpha=1,4$ при $t=\infty$. Это свидетельствует о несоблюдении для ряда грунтов условия (5.51). Однако существенное упрощение закономерности деформирования, вносимое этим условием, может во многих случаях оправдать указанное допущение.

Продольная и поперечная деформации ползучести. Как это было указано при анализе формулы (4.45), коэффициент поперечного расширения $\nu = \epsilon_x / \epsilon_z$ в условиях нелинейного деформирования будет постоянной величиной только в тех случаях, когда закономерности деформирования при сдвиге и при всестороннем сжатии описываются одними и теми же функциями.

Было показано также, что в условиях вязкого течения коэффициент поперечного расширения $\nu = \dot{\epsilon}_x / \dot{\epsilon}_z$ будет постоянным, если коэффициенты вязкости при сдвиге и при объемной деформации остаются в процессе течения постоянными или меняются во времени по одному и тому же закону. Это условие соблюдается, если соотношение между скоростями продольной и поперечной деформации в процессе течения остается постоянным.

Все сказанное остается справедливым и при оценке коэффициента ν в условиях ползучести. Очевидно, что этот коэффициент можно выразить с помощью зависимостей (5.8) и (5.9) как

$$\nu = \frac{f(\sigma_x) \Phi_x(t)}{f(\sigma_z) \Phi_z(t)} = \frac{f(\sigma_x) \kappa_x(t)}{f(\sigma_z) \kappa_z(t)}. \quad (5.53)$$

Коэффициент ν будет постоянным только в том случае, если и функции напряжения $f(\sigma)$ и функции времени $\Phi(t)$ или $\kappa(t)$ для продольных (z) и поперечных (x) деформаций будут идентичными, например если и те, и другие деформации можно описать зависимостью (5.18) с одними и теми же значениями показателей степени.

Рассмотрим, что же происходит в действительности. В интересных опытах Е. П. Шушериной (сб. «Мерзлотные исследования», вып. V, МГУ, 1966) исследовалась ползучесть при одноосном сжатии мерзлой супеси ($W=26\%$, $\gamma=1,81$ г/см³) и плотной глины батбайосса ($W=23\%$, $\gamma=2,07$ г/см³) при температуре -5 , -10 и -20°C с замером продольной и поперечной деформаций.

Опыты показали, что во всех случаях продольная и поперечная деформации развивались по различным законам. Соответственно

коэффициент поперечной деформации ν изменялся во времени и в зависимости от величины действующего напряжения.

На рис. 5.23 представлены результаты одного из испытаний. Как видно, коэффициент ν существенно изменяется, причем это изменение начинается в начальный период, в стадии неустановившегося течения, но особенно значительно происходит в стадии прогрессирующего течения. Изменение коэффициента ν становится тем большим, чем выше действующее напряжение

В стадии установившегося течения значение ν остается примерно постоянным, но зависит от величины нагрузки. В целом же коэффициент меняется в следующих пределах: для мерзлой супеси — от 0,18 в начале процесса до 0,77 в конце его и для мерзлой глины соответственно от 0,14 до 0,73.

Аналогичные результаты были получены в упоминавшихся выше опытах С. Е. Гречищева с мерзлым песком и мерзлым суглинком. Замеры скорости продольных и поперечных деформаций дали значения ν в пределах от 0,31 в первые сутки процесса до 0,53 в пятые сутки для суглинка и от 0,37 в первые сутки до 0,55 в пятые сутки для песка.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что коэффициент ν может быть больше 0,5. Это объясняется следующим обстоятельством. Поскольку объемная деформация выражается соотношением

$$\varepsilon_v = \varepsilon_z(1 - 2\nu), \quad (5.54)$$

то величина $\nu > 0,5$ означает приращение объемной деформации, т. е. увеличение объема. Это увеличение непосредственно было за-

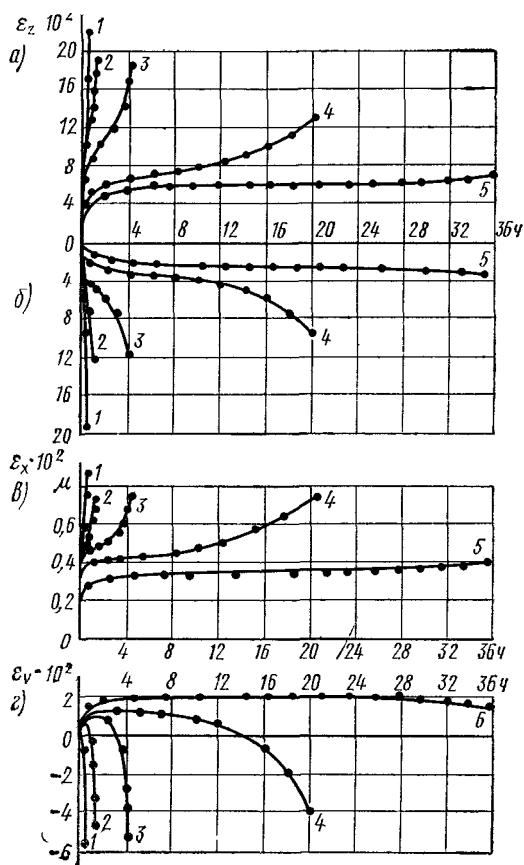


Рис 5.23 Продольная (а), поперечная (б) и объемная (г) деформации и изменение коэффициента поперечной деформации (в) при ползучести (опыты Е. П. Шушерин) Супесь мерзлая $\theta = -5^\circ \text{C}$ Одноосное сжатие при $1 - \sigma_2 = 40 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $2 - 35$, $3 - 30$, $4 - 25$, $5 - 22,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$

фиксировано в рассмотренных опытах (рис. 5.23). Е. П. Шушерина совершенно правильно объяснила такое увеличение развитием микротрещин в грунте в стадии прогрессирующего течения.

Следует заметить, что формула (5.54) справедлива для малых деформаций, для больших же $\varepsilon_v = 1 - (v\varepsilon_z + 1)^2 \cdot (1 - \varepsilon_z)$ и в этом случае знак ε_v будет зависеть как от значения v , так и от величины ε_z .

В первых разделах данной главы был приведен ряд эмпирических формул. В следующей же главе на основе сопоставления с опытными данными будут рассмотрены преимущества и недостатки этих формул и даны рекомендации по их выбору.

ГЛАВА 6

МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

§ 6.1. ИСПЫТАНИЯ ГРУНТОВ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

Особенности проведения опытов на ползучесть. В естественных условиях реологические процессы в грунтах развиваются десятки и сотни лет. В лабораторных же условиях мы ограничены техническими возможностями и можем проводить опыты в течение нескольких часов и дней, реже — месяцев и совсем редко — лет.

Вследствие этого приходится данные кратковременных испытаний грунтов экстраполировать на длительные отрезки времени. Естественно, что к такой экстраполяции надо подходить очень осторожно. На примере построения кривых в различном масштабе времени (см. рис. 5.16) мы показали, как легко можно ошибиться, приняв затухающую деформацию за установившееся течение. Методика проведения опытов на ползучесть изложена в работах [5, 23] и др. Ниже изложены вопросы техники обработки опытных данных.

Оценка реологических свойств грунта по данным испытаний на ползучесть заключается в выборе эмпирического уравнения ползучести и в определении параметров этого уравнения. Применяя принятое уравнение ползучести при известных из опытов параметрах, можно прогнозировать поведение грунта, используемого как основание или как материал сооружения, во времени. Естественно, что экстраполяция данных лабораторных испытаний на сроки, которые на несколько порядков превышают продолжительность испытания, требует тщательной обработки и анализа этих данных.

Постоянные и ступенчато-возрастающие нагрузки. Испытания грунта на ползучесть обычно проводят или с серией образцов, к каждому из которых прикладывают постоянную (но различную для каждого образца) нагрузку, или один образец загружают нагрузкой, увеличиваемой ступенями, выдерживаемыми в течение некоторого интервала времени Δt . Этот интервал принимают или постоянным для всех ступеней, или таким, чтобы на каждой ступени нагрузки в стадии затухающей ползучести деформации достигли условной стабилизации.

По результатам испытаний строят семейство кривых ползучести и соответствующее им семейство изохронных кривых (см. рис. 5.5).

Для испытаний грунтов под постоянными нагрузками требуется проводить опыты с семейством образцов-близнецов. Поскольку

полная идентичность нескольких образцов, особенно если речь идет об образцах грунта естественного сложения, не может быть достигнута, при таком виде испытания неизбежен большой разброс получаемых данных. Однако при испытании под постоянными нагрузками исключается влияние режима загрузки и результаты опытов получаются более достоверными.

Испытания грунтов под ступенчато-возрастающими нагрузками

имеют то преимущество, что их проводят с одним образцом и соответственно получают меньший разброс опытных точек. Однако проведение таких испытаний требует большой затраты времени, поскольку сумма Δt для всех ступеней получается в этом случае весьма внушительной, особенно если опыты доводятся до стабилизации деформации. Другим недостатком испытания со ступенчатым нагружением является влияние предшествующей ступени нагрузки на деформацию последующей ступени вследствие упрочнения грунта в процессе деформирования.

Закон наложения. Для однородной изотропной среды теоретически считается справедливым закон наложения деформаций Больцмана. Это означает, что деформацию ползучести от действия некоторой переменной во времени нагрузки можно определить путем суммирования деформаций, вызванных действием элементарных приращений напряжения.

Пусть нагрузка тела происходит ступенями (рис. 6.1), причем нагрузки $\Delta \tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ нарастают в моменты времени $v_1, v_2, v_3, \dots$ и соответственно интервалы времени действия каждой ступени равны $\Delta t_j = v_j - v_{j-1}$. Таким образом, нагрузка $\Delta \tau_1 = \tau_1$ действовала на тело в течение времени $T_1 = t$, приращение нагрузки $\Delta \tau_2 = \tau_2 - \tau_1$ действовало в течение $T_2 = t - v_1$, приращение $\Delta \tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ — в течение $T_j = t - v_{j-1}$.

Согласно закону наложения, деформация от действия разности напряжений $\tau_m - \tau_1$ будет равна сумме приращений деформаций от действия приращений $\Delta \tau_j$:

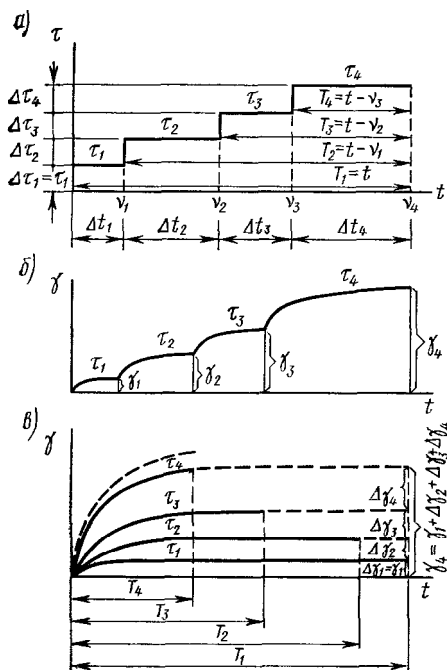


Рис. 6.1. Закон наложения:

а — ступени нагрузок; б — ступенчато-возрастающая деформация; в — суммирование деформации

$$\gamma_m = \gamma_1 + \sum_1^m \Delta\gamma_l(T_j). \quad (6.1)$$

Например, деформация от напряжения τ_4 равна $\gamma_4 = \gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3 + \Delta\gamma_4$.

Для грунтов деформация от приращения напряжения оказывается, однако, меньшей, чем деформация, вызванная равной по величине постоянной нагрузкой, действующей в течение этого же времени T_j (пунктир на рис. 6.1, в). Как показали исследования автора и Н. К. Пекарской [14], это обстоятельство вызывается тем, что каждая нагрузка предшествующей ступени упрочняет грунт, а последующая ступень вызывает меньшую деформацию, чем следует из закона суммирования (6.1).

Учитывая сказанное, испытания при различных постоянных нагрузках с точки зрения чистоты результатов следует считать предпочтительными. В то же время в натурных условиях грунт загружается постепенно, и когда это обстоятельство нужно учитывать, то испытание следует производить при ступенчатом нагружении, принимая достаточно большой интервал времени.

§ 6.2. ВЫБОР ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Статистическая обработка опытных данных. При проведении испытаний грунтов и определении их характеристик получается большой разброс опытных данных, что связано с неоднородностью грунтов, нарушением их естественного сложения и изменением свойств при отборе образцов и погрешностью самих опытов. Этот разброс столь велик, что различие в значениях полученных данных в пределах 10—20% считается удовлетворительным и даже хорошим совпадением, а в 5% — маловероятным. Поэтому обработку опытных данных следует вести методами математической статистики. Отсылая для более детального ознакомления с этими методами к специальной литературе (см., например, И. С. Комаров. Накопление и обработка информации при инженерно-геологических исследованиях, 1972), приведем некоторые основные формулы и определения.

Если на основании ряда повторных определений с одинаковой степенью точности получено n значений некоторой величины A , то, полагая, что ошибки величины A подчинены нормальному закону распределения Гаусса, можем считать, что наиболее вероятным значением A будет среднее арифметическое

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_1^n A_j. \quad (6.2)$$

Отклонение каждого данного значения A_j от среднего арифметического обозначим $\varepsilon_j = A_j - A_{\text{ср}}$. Тогда среднее квадратическое

отклонение (стандарт) отдельного испытания будет равно

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}{n-1}}, \quad (6.3)$$

а простая ошибка равна

$$\eta_A = \frac{\sum_{j=1}^n |\varepsilon_j|}{\sqrt{n(n-1)}} = \sigma_A \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (6.4)$$

При обработке опытных данных вычисляют среднее арифметическое (или среднее взвешенное) $A_{\text{ср}}$ и по формуле (6.3) определяют среднее квадратическое отклонение σ_A отдельных величин, характеризующее разброс точек. Иногда в целях контроля определяют по формуле (6.4) простую ошибку η_A и сопоставляют значения σ_A , вычисленные по формулам (6.3) и (6.4); совпадение полученных значений σ_A свидетельствует о подчинении найденных значений A_j нормальному закону распределения.

Значения среднего квадратического отклонения σ_j , определенные по формуле (6.3), относятся к оценке отдельных значений A_j . Окончательную же точность результатов измерений обычно характеризуют средним квадратическим отклонением σ от среднего арифметического значения $A_{\text{ср}}$:

$$\sigma = \frac{\sigma_A}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}{n(n-1)}}. \quad (6.5)$$

Для оценки относительной ошибки пользуются отношением

$$v = \frac{\sigma}{A_{\text{ср}}}, \quad (6.6)$$

называемым коэффициентом вариации.

Истинное значение определяемого показателя $A_{\text{ист}}$ лежит в пределах некоторого интервала, называемого доверительным; границы этого интервала — доверительные границы — зависят от ошибки σ и доверительной вероятности α , т. е. вероятности того, что истинное значение показателя A не выходит за пределы данного интервала:

$$A_{\text{ист}} = A_{\text{ср}} \pm t_{\alpha} \sigma, \quad (6.7)$$

где t_{α} — коэффициент, зависящий от заданного значения α и числа определений n ; значения t_{α} приведены в любом курсе математической статистики.

Нормативные и расчетные характеристики грунта. Основными показателями механических свойств грунтов являются, согласно

СНиП II—15—74, нормативные значения прочностных и деформационных характеристик. Под нормативным значением какой-либо характеристики понимают среднее арифметическое значение повторных определений этой характеристики $A^H = A_{\text{ср}}$. В то же время расчет оснований производится с использованием расчетных характеристик грунтов:

$$A = \frac{A^H}{K_r}, \quad (6.8)$$

где $K_r = 1/(1 \pm \rho)$ — коэффициент безопасности; ρ — показатель точности оценки среднего значения характеристики A , равный $\rho = v t_\alpha$, где v — коэффициент вариации, определяемый формулой (6.6); t_α — коэффициент, объясненный в формуле (6.7). Подставив значение ρ в (6.8), приходим к формуле (6.7).

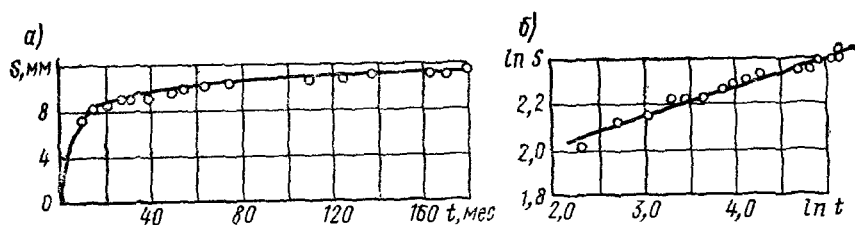


Рис. 6.2. Выравнивание кривой $y=f(x)$ путем перестроения ее в координатах Y, X . Данные наблюдений за осадкой илистого грунта в основании площадки

Отметим, что знак (плюс или минус) при вычислении коэффициента безопасности K_r принимают таким, чтобы расчетное значение показателя шло «в запас». При этом доверительная вероятность расчетных значений прочностных характеристик принимается согласно СНиП II—15—74 $\alpha=0,95$ — при расчетах оснований по несущей способности и $\alpha=0,85$ — при расчетах оснований по деформациям.

Метод выравнивания кривых. Выбор того или иного из рассмотренных в гл. 5 уравнений ползучести сводится к тому, чтобы на основании опытных данных подобрать эмпирическую формулу, которая лучше всего описывает опытную кривую.

Для этой цели обычно применяют метод выравнивания опытной кривой, заключающийся в построении графика в таких координатах, в которых рассматриваемая кривая преобразуется в прямую. Так, если имеется некоторая нелинейная зависимость

$$y = f(x), \quad (6.9)$$

то для ее преобразования в уравнение прямой надо ввести новые переменные X, Y , отвечающие условиям

$$X = \varphi_1(x, y); Y = \varphi_2(x, y), \quad (6.10)$$

и подобрать функции φ_1 и φ_2 так, чтобы величины X и Y были связаны линейной зависимостью. Тогда в системе координат (X, Y) получим прямую, уравнение которой имеет вид (рис. 6.2)

$$Y = BX + D. \quad (6.11)$$

Очевидно, что прямую (6.11) нужно провести так, чтобы она проходила возможно ближе к экспериментальным точкам, нанесенным на график в координатах (6.10). Это условие будет выполнено, если сумма квадратов отклонений ϵ_j экспериментальных точек от прямой по вертикали будет наименьшей, т. е. $\sum_1^n \epsilon_j^2$ — минимум.

В этом случае и с учетом нормального (гауссовского) закона распределения ошибок параметры B и D находят из совместного решения двух уравнений, называемых нормальными:

$$nD + B \sum_1^n X_j = \sum_1^n Y_j; \quad D \sum_1^n X_j + B \sum_1^n X_j^2 = \sum_1^n X_j Y_j,$$

где n — число экспериментальных точек.

Из решения этого уравнения легко определить значения параметров B и D :

$$B = \frac{n \sum_1^n X_j Y_j - \sum_1^n Y_j \sum_1^n X_j}{n \sum_1^n X_j^2 - \left(\sum_1^n X_j \right)^2};$$

$$D = \frac{\sum_1^n Y_j \sum_1^n X_j^2 - \sum_1^n X_j \sum_1^n X_j Y_j}{n \sum_1^n X_j^2 - \left(\sum_1^n X_j \right)^2} = \frac{\sum_1^n Y_j - B \sum_1^n X_j}{n}. \quad (6.12)$$

Поскольку в формулы (6.12) входят разности больших чисел, вычисления надо вести с большой степенью точности, избегая округления результатов промежуточных подсчетов.

Коэффициент корреляции. Прямая $Y-X$, получающаяся на рис. 6.2, б, соответствует средним значениям $Y_{\text{ср}}$ и $X_{\text{ср}}$. Ее называют линией регрессии, а уравнение (6.11) — уравнением регрессии. Тангенс угла наклона прямой $Y-X$ определяет с учетом масштаба графика параметр B , а отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат, — параметр D .

Если установить доверительные пределы для $Y_{\text{ср}}$, то по ним можно определить так называемую доверительную область, в которой с заданной вероятностью лежит линия истинной регрессии.

Теснота связи линейной корреляции (6.11) характеризуется коэффициентом корреляции

$$r = \frac{n \sum_1^n X_j Y_j - \sum_1^n X_j \sum_1^n Y_j}{\sqrt{\left[n \sum_1^n X_j - \left(\sum_1^n X_j \right)^2 \right] \left[n \sum_1^n Y_j^2 - \left(\sum_1^n Y_j \right)^2 \right]}}. \quad (6.13)$$

При $r > 0,8$ связь считается сильной, при $r < 0,8$ — слабой.

Многочленная функция. При обработке опытных данных в качестве аппроксимирующей функции $y=f(x)$ можно помимо рассмотренных в гл. 5 функций принимать также многочлен

$$y = a + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n, \quad (6.14)$$

где параметры $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ определяют по опытным данным.

Обычно ограничиваются первыми тремя членами уравнения

$$y = a + b_1 x + b_2 x^2. \quad (6.15)$$

В этом случае обрабатывать опытные данные можно рассмотренным выше методом выравнивания, приводя (6.15) к виду

$$Y = (b_1 + b_2 x_1) + b_2 x, \quad (6.16)$$

где $Y = (y - y_1)/(x - x_1)$; x_1, y_1 — координаты произвольной точки на кривой (6.15). Определив из (6.16) значения b_1 и b_2 , параметр a

вычисляем из уравнения $\sum y = b_1 \sum x^2 + b_2 \sum x + na$, где n —

число опытных точек.

Последовательность обработки опытных данных. Приведя принятое исходное уравнение (6.9) к линейному виду (6.11), по формулам (6.12) вычислим параметры B и D . Затем по формуле (6.13) определим коэффициент корреляции r , значение которого оценивает степень достоверности принятой линейной аппроксимации (6.11).

Далее, по вычисленным значениям параметров B и D линейного уравнения (6.11) находим обратным пересчетом соотношений (6.10) параметры исходного уравнения (6.9).

Следующим этапом является проверка степени точности исходного уравнения (6.9). Обозначим отношение экспериментального значения y_i к вычисленному через $y_{i(\text{эксн})}/y_{i(\text{выч})} = y_i^*$. Среднее

значение этой величины равно $y_{\text{ср}}^* = \frac{1}{n} \sum_1^n y_i^*$.

При идеальном совпадении всех экспериментальных и вычисленных точек получим $y_{\text{ср}}^* = 1$. Следовательно, отклонение данного значения y_i^* от среднего арифметического $y_{\text{ср}}^*$ определится разностью

$$\varepsilon_j = y_i^* - y_{\text{ср}}^* = \frac{y_{i(\text{эксн})}}{y_{i(\text{выч})}} - 1 = \frac{y_{i(\text{эксн})} - y_{i(\text{выч})}}{y_{i(\text{эксн})}}. \quad (6.17)$$

Среднюю квадратическую ошибку σ_A одного определения y^*_i вычисляем по формуле (6.3), а среднюю квадратическую ошибку σ среднего значения $y^*_{\text{ср}}$ — по формуле (6.5). При этом знаменатель под корнем при вычислении σ_A следует принимать равным $n-2$. Далее по формуле (6.6) вычисляем коэффициент вариации v .

Чем меньше коэффициент v и чем больше коэффициент r , тем лучшее совпадение с опытными данными дает принятое исходное уравнение (6.9).

Далее переходим к определению расчетных значений параметров исходного уравнения (6.9). Для этого вначале по формуле (6.7) найдем доверительные пределы, внутри которых лежат истинные значения параметров линейного уравнения (6.11) при заданной доверительной вероятности α :

$$B_{\text{ист}} = B_{\text{выч}} \pm t_{\alpha} \sigma_B; \quad D_{\text{ист}} = D_{\text{выч}} \pm t_{\alpha} \sigma_D, \quad (6.18)$$

где $B_{\text{выч}}$ и $D_{\text{выч}}$ — значения параметров, вычисленные по формуле (6.12) и имеющие смысл средних значений $B_{\text{выч}} = B_{\text{ср}}$, $D_{\text{выч}} = D_{\text{ср}}$; t_{α} — коэффициент, зависящий от заданного значения α и от числа степеней свободы $n-2$; значения t_{α} приведены, например, в СНиП II-15-74; σ_B и σ_D — средние квадратические отклонения, равные:

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum_1^n X_j^2 - \left(\sum_1^n X_j \right)^2}}; \quad \sigma_D = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_1^n X_j^2}{n \sum_1^n X_j - \left(\sum_1^n X_j \right)^2}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_1^n [Y_{j(\text{выч})} - Y_{j(\text{эксп})}]^2}{n-2}}, \quad (6.19)$$

где σ_y — среднее квадратическое отклонение экспериментальных значений $Y_{i(\text{эксп})}$ от их средних (вычисленных) значений $Y_{j(\text{выч})}$, равных $Y_{i(\text{выч})} = D_{\text{выч}} + B_{\text{выч}} X_j$.

§ 6.3. ПРИМЕРЫ ПОДБОРА ФОРМУЛ

Исходные данные примера. Рассмотрим примеры подбора эмпирических формул применительно к данным наблюдений, изображенным на рис. 1.12. Напомним, что эти данные относятся к осадкам основания плотины Каховской ГЭС, причем в приводимых примерах мы будем аппроксимировать опытную кривую только для одного из значений нагрузки (кривая 4, $p = 1,95 \cdot 10^5$ Па). При этом поскольку начальная осадка на графике рис. 1.12 не отражена, будем исходить из формул, полученных для случая $S_0 = 0$.

Пример 1. Рассмотрим аппроксимацию опытной кривой рис. 1.12 формулой вида (5.18)

$$S = S_n^* t^\beta, \quad (6.20)$$

где $S_n^* = S_n \bar{\delta}$, $S_n = (p/A_n)^{1/m}$; время t имеет смысл безразмерной величины t/T , $T = 1$.

Прологарифмировав выражение (6.20) $\ln S = \ln S_n^* + \beta \ln t$ и обозначив $Y = \ln S$, $X = \ln t$, $D = \ln S_n^*$, $B = \beta$, приведем это выражение к линейному виду (6.11). Обработанные данные сводим в табл. 6.1*; графическая интерпретация представлена на приведении ранее рис. 6.2.

Т а б л и ц а 6.1

Обработка опытных данных по формуле (6.20)

№ точек	t , м-сяны	S , см	$X = \ln t$	$Y = \ln S$	X^2	Y^2	XY	$S_{\text{выч}}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10	7,5	2,303	2,015	5,304	4,060	4,640	7,83	-0,0421	0,00166
2	15	8,4	2,708	2,128	7,333	4,528	5,762	8,25	0,0182	0,00033
3	21	8,5	3,045	2,140	9,272	4,580	6,516	8,61	-0,0128	0,00016
4	28	9,1	3,332	2,208	11,102	4,875	7,357	8,93	0,0190	0,00038
5	32	9,2	3,466	2,219	12,013	4,924	7,691	9,08	0,0132	0,00017
6	40	9,3	3,689	2,230	13,609	4,973	8,226	9,35	-0,0053	0,00003
7	50	9,6	3,912	2,262	15,304	5,117	8,849	9,61	-0,0010	0
8	54	9,9	3,989	2,292	15,212	5,253	9,143	9,71	0,0196	0,00038
9	64	10,2	4,159	2,323	17,297	5,396	9,661	9,92	0,0282	0,00080
10	75	10,4	4,318	2,342	18,645	5,485	10,112	10,13	0,0267	0,00071
11	112	10,4	4,719	2,342	22,269	5,485	11,052	10,64	-0,0446	0,00051
12	125	10,6	4,829	2,361	23,319	5,574	11,401	10,79	-0,0176	0,00031
13	137	10,9	4,921	2,389	24,216	5,707	11,756	10,92	-0,0018	0
14	164	11,0	5,101	2,398	26,020	5,750	12,232	11,18	-0,0161	0,00026
15	173	11,0	5,154	2,398	26,564	5,750	12,359	11,26	-0,0231	0,00053
16	180	11,5	5,194	2,443	26,977	5,968	12,689	11,32	0,0159	0,00025
$\Sigma =$			64,839	36,490	275,156	83,425	149,446		0,2832	0,00657

Исходные данные натурных наблюдений приведены в графах 1, 2, 3 табл. 6.1 (значения осадки S даны в сантиметрах, а не в процентах к толщине сжимаемого слоя, как это было сделано на рис. 1.12).

Значения параметров B и D согласно формулам (6.12) будут равны:

$$B = \frac{16 \cdot 149,446 - 64,839 \cdot 36,490}{16 \cdot 275,156 - (64,839)^2} = 0,1268;$$

$$D = \frac{36,490 \cdot 275,156 - 64,839 \cdot 149,446}{16 \cdot 275,156 - 64,839^2} = 1,767.$$

Сопоставив вычисленное значение D с подсчетом по второму из равенств формулы (6.12): $(36,490 - 0,1268 \times 64,839)/16 = 1,767$, убеждаемся в правильности вычислений.

* Подсчеты для примеров выполнены инж. С. М. Тихомировым.

Пользуясь формулой (6.13), вычислим коэффициент корреляции:

$$r = \frac{16 \cdot 149,446 - 64,839 \cdot 36,490}{\sqrt{(16 \cdot 275,156 - 64,839^2)(16 \cdot 183,425 - 36,490^2)}} = 0,986.$$

Как видно, показатель корреляции достаточно высок. Теперь по известным значениям B и D вычисляем параметры формулы (6.20):

$$\beta = B = 0,127; S_H^* = e^D = e^{1,767} = 5,85.$$

Таким образом, формула (6.17) будет иметь вид

$$S = 5,85t^{0,127}, \quad (6.21)$$

где t — в месяцах, S — в сантиметрах.

Вычисленные по формуле (6.21) значения осадки $S_{выч}$ приведены в графе 9 табл. 6.1. Если по этой формуле подсчитать значения осадок для более продолжительного времени, чем период наблюдений, то такая экстраполяция даст для $t=600$ мес (50 лет) $S=13,2$ см и для $t=1200$ мес (100 лет) $S=14,4$ см. Учитывая, что фактическая осадка за период наблюдений (180 мес) составляла $S=11,5$ см, полученные значения S_{600} и S_{1200} являются правдоподобными.

Оценим теперь точность аппроксимации опытных данных рассматриваемой формулой. Для каждого опытного значения S , определяем по формуле (6.17) отклонение от среднего $\varepsilon_j = (S_j - S_{выч})/S_{выч}$ и квадрат этого отклонения, записывая подсчеты в графы 10 и 11 табл. 6.1. По формуле (6.3) определяем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0,00657}{14}} = 0,0217.$$

Поскольку отклонение ε , мы определяли как безразмерную величину, то σ_A при таком толковании не будет иметь размерности.

Пользуясь формулой (6.6) и помня, что в нашем случае $A_{ср}=1$, определим далее коэффициент вариации, являющийся показателем точности аппроксимации опытных данных:

$$v = \frac{\sigma_A}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{0,0217}{\sqrt{16}} = 0,0054.$$

Как видно, точность аппроксимации опытных данных формулой (6.20) более чем удовлетворительна.

Значения параметров S_H^* и β , входящие в формулу (6.21), являются средними (нормативными) значениями. Вычислим теперь их расчетные значения. Для этого определим вначале по формуле (6.19) средние квадратические отклонения σ_B и σ_D значений параметров B и D .

Вспомогательная величина σ_y будет равна

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{0,0067}{16-2}} = 0,0022, \text{ где } 0,0067 = \sum_{j=1}^{16} [Y_{j(выч)} - Y_{j(эксн)}]^2.$$

(Значения $Y_{выч} = D_{выч} + B_{выч}X$, в табл. 6.1 не приведены.) Отсюда получим:

$$\sigma_B = 0,0022 \sqrt{\frac{16}{16 \cdot 275,156 - 64,839^2}} = 0,0006;$$

$$\sigma_D = 0,0022 \sqrt{\frac{275,156}{198,370}} = 0,0024.$$

Коэффициент t_α входящий в формулу (6.7), определяем по таблице СНиП II—15—74. Принимая доверительную вероятность $\alpha=0,85$ при числе степеней свободы $n-2=14$, имеем $t_\alpha = 1,08$. Тогда согласно (6.7) получим:

$$B_{\text{ист}} = 0,1268 \pm 1,08 \cdot 0,0006 = 0,1271 \pm 0,001;$$

$$D_{\text{ист}} = 1,767 \pm 1,08 \cdot 0,0024 = 1,767 \pm 0,003.$$

Соответственно расчетные значения параметров S_n^* и β аппроксимирующего уравнения (6.20) будут равны

$$S_n^* = e^{1,767 \pm 0,003} \text{ и } \beta = 0,127 \pm 0,001.$$

Пример 2. Рассмотрим аппроксимацию опытной кривой рис. 1.12 с помощью формулы вида (5.21)

$$S = S_n^* \ln(t + 1), \quad (6.22)$$

где $S_n^* = S_n \delta^{1/m}$; $S_n = (p/A_n)^{1/m}$; t имеет смысл безразмерной величины: $t = t/T$, где $T = 1$.

Приведем формулу (6.22) к линейному виду (6.11), положив $Y=S$, $X=\ln(t+1)$, $B=S_n^*$, $D=0$. Сведя все вычисления в табл. 6.2, определим по формуле (6.12) значение коэффициента:

$$B = \frac{16 \cdot 656,093 - 157,5 \cdot 65,17}{16 \cdot 277,211 - 4247,129^2} = 1,239.$$

Таблица 6.2

Обработка опытных данных по формуле (6.23)

№ точек	t , мес.	S , см	$X=\ln(t+1)$	$Y=S$	XY	X^2	Y^2	$S_{\text{выч}}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1	10	7,5	2,395	7,5	17,962	5,736	56,25	7,76	-0,0335	0,00112
2	15	8,4	2,769	8,4	23,260	7,667	70,56	8,23	+0,0207	0,00043
3	21	8,5	3,087	8,5	26,240	9,530	72,25	8,62	-0,0139	0,00019
4	28	9,1	3,363	9,1	30,603	11,310	82,81	8,96	0,0156	0,00024
5	32	9,2	3,492	9,2	32,126	12,194	84,64	9,12	0,0088	0,00008
6	40	9,3	3,710	9,3	34,503	13,764	86,49	9,39	-0,0096	0,00009
7	50	9,6	3,928	9,6	37,709	15,429	92,16	9,66	-0,0062	0,00004
8	54	9,9	4,003	9,9	39,630	16,024	98,01	9,76	0,0143	0,00021
9	64	10,2	4,170	10,2	42,534	17,389	104,04	9,96	0,0241	0,00058
10	75	10,4	4,326	10,4	44,990	18,714	108,16	10,16	0,0236	0,00056
11	112	10,4	4,723	10,4	49,119	22,307	108,16	10,65	-0,0235	0,00055
12	125	10,6	4,830	10,6	51,198	23,329	112,36	10,78	-0,0167	0,00028
13	137	10,9	4,923	10,9	53,661	24,236	118,81	10,90	0	0
14	164	11,0	5,102	11,0	56,122	26,030	121,00	11,20	-0,107	0,00011
15	173	11,0	5,156	11,0	56,716	26,584	121,00	11,19	-0,0170	0,00029
16	180	11,5	5,193	11,5	59,720	26,967	132,25	11,23	0,0240	0,00058
$\Sigma =$			65,170	157,5	656,093	277,211	1568,95		0,2622	0,00535

Коэффициент D по смыслу формулы (6.22) должен быть равен 0. Однако подсчеты показывают, что

$$D = \frac{157,5 - 1,239 \cdot 65,17}{16} = 4,797.$$

Это означает, что для данного опыта формулу (6.22) следует написать в виде

$$S = S_H^* \ln \frac{t+1}{T}, \quad (6.23)$$

где $S_H^* = S_0 / \ln \frac{1}{T}$, $S_0 = D$. Отсюда $T = e^{-S_0/S_H^*}$ или в нашем случае $T = \exp\left(\frac{-4,797}{1,239}\right) = 0,021$ мес.

Различие между формулами (6.22) и (6.23), а также подобной им формулой

$$S = S_H^* \ln t \quad (6.24)$$

заключается в следующем. При $t=0$ по формуле (6.22) получаем $S_0=0$, по формуле (6.23) $S_0=S_H^* \ln(1/T)$ и по формуле (6.24) $S_0=-\infty$. Нулевое значение осадки $S=0$ по формулам (6.23) и (6.24) получим соответственно при $t=-1$ и $t=1$.

Таким образом, формула (6.22) будет иметь вид

$$S = 4,8 + 1,24 \ln(t+1), \quad (6.25)$$

где t — в месяцах, S — в сантиметрах.

Вычисленные по этой формуле значения осадки $S_{\text{выч}}$ приведены в табл. 6.2. Экстраполяция для 600 и 1200 мес дает $S_{600}=12,7$ см и $S_{1200}=13,6$ см, что достаточно логично.

Определим теперь показатели точности аппроксимации.

Коэффициент корреляции согласно (6.13) равен

$$r = \frac{14,576}{11,765 \cdot 18,559} = 0,986.$$

Среднее квадратическое отклонение согласно (6.3) составляет

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{0,00535}{14}} = 0,0195,$$

а коэффициент вариации согласно (6.6) будет равен

$$v = \frac{0,0195}{\sqrt{16}} = 0,0049.$$

Расчетные значения параметров формулы (6.25) определяют аналогично тому, как было показано в предыдущем примере.

Пример 3. Рассмотрим аппроксимацию опытной кривой рис. 1.12 формулой вида (5.25)

$$S = S_\infty \frac{t}{T^* + t}, \quad (6.26)$$

где $T^* = T/[1 - \delta_H p/p_{s(\infty)}]$.

Преобразуем эту формулу к линейному виду (6.11), положив

$$Y = t/S, \quad X = t, \quad D = T^*/S_\infty, \quad B = 1/S_\infty.$$

Сведя все подсчеты в табл. 6.3, определим по формуле (6.12) значения коэффициентов $B=0,0864$ и $D=0,713$.

Обработка опытных данных по формуле (6.26)

№ точек	t , мес.	S , см	$X=t$	$Y = \frac{t}{S}$	Y^2	XY	$S_{\text{выч}}$	ϵ_f	ϵ_f^2
1	10	7,5	10	1,333	1,777	13,330	6,34	0,1830	0,03348
2	15	8,4	15	1,786	3,190	26,790	7,50	0,1200	0,01440
3	21	8,5	21	2,471	6,106	51,891	8,31	0,0229	0,00052
4	28	9,1	28	3,077	9,468	86,156	8,94	0,0179	0,00032
5	32	9,2	32	3,478	12,096	111,296	9,20	0	0
6	40	9,3	40	4,301	18,499	172,040	9,59	-0,0302	0,00091
7	50	9,6	50	5,208	27,123	260,400	9,93	-0,0332	0,00110
8	54	9,9	54	5,455	29,757	294,570	10,04	-0,0139	0,00019
9	64	10,2	64	6,275	39,376	401,600	10,25	-0,0049	0,00002
10	75	10,4	75	7,212	52,013	540,900	10,43	-0,0029	0,00001
11	112	10,4	112	10,769	115,971	1206,128	10,86	-0,0353	0,00124
12	125	10,6	125	11,792	139,051	1474,000	10,92	-0,0239	0,00057
13	137	10,9	137	12,569	157,980	1721,953	11,02	-0,0018	0
14	164	11,0	164	14,909	222,278	2445,076	11,05	-0,0018	0
15	173	11,0	173	15,652	247,339	2720,771	11,07	-0,0045	0,00002
16	180	11,5	180	15,652	244,985	2817,360		0,5350	0,00151
$\Sigma =$			1280,0	122,014	1327,009	14344,261		0,5350	0,05429

Параметры формулы (6.26) соответственно будут равны:

$$S_{\infty} = \frac{1}{B} = \frac{1}{0,0864} = 11,57 \text{ см}; T^* = D; S_{\infty} = 0,713 \cdot 11,57 = 8,25 \text{ мес.}$$

Вычисленные значения $S_{\text{выч}}$ приведены в табл. 6.3. Для 600 и 1200 мес эти значения будут равны 11,4 и 11,55 см, т. е. близки к величине $S_{180} = 11,6$ см.

Определим показатели точности аппроксимации. Коэффициент корреляции, определяемый по (6.13), получается весьма высоким: $r = 0,999$.

Среднее квадратическое отклонение согласно (6.3) составит

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{0,0543}{14}} = 0,0622,$$

откуда коэффициент вариации согласно (6.6) будет равен

$$v = \frac{0,0622}{\sqrt{16}} = 0,156.$$

Пример 4. Рассмотрим аппроксимацию опытной кривой рис. 1.12 формулой вида (5.30)

$$S = S_{\infty} (1 - e^{-t/T}). \quad (6.27)$$

Эта формула приводится к линейному виду (6.11), если принять

$$Y = \ln \frac{S_{\infty}}{S_{\infty} - S}, \quad X = t, \quad B = 1/T, \quad D = 0.$$

Если считать, что последнее измеренное значение S есть стабилизовавшаяся осадка $S_{\infty} = 11,5$ см, то можем вычислить значения Y . Такие вычисления сведены

Обработка опытных данных по формуле (6.27)

№ точек	t , мес.	S , см	$X=t$	$Y=\ln \frac{S_{\infty}}{S_{\infty}-S}$	Y^2	XY	$S_{\text{выч}}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1	10	7,5	10	1,055	1,113	10,550	8,39	-0,1061	0,01125
2	15	8,4	15	1,309	1,713	19,635	8,57	-0,0198	0,00039
3	21	8,5	21	1,342	1,801	28,182	8,77	-0,0308	0,00095
4	28	9,1	28	1,565	2,449	43,820	9,00	0,0111	0,00012
5	32	9,2	32	1,608	2,586	51,456	9,11	0,0099	0,00010
6	40	9,3	40	1,652	2,729	66,080	9,33	-0,0032	0,00001
7	50	9,6	50	1,799	3,236	89,950	9,57	0,0031	0,00001
8	54	9,9	54	1,970	3,881	106,38	9,66	0,0248	0,00062
9	64	10,2	64	2,177	4,739	139,328	9,87	0,0334	0,00112
10	75	10,4	75	2,344	5,494	175,800	10,07	0,0320	0,00107
11	112	10,4	112	2,344	5,434	262,528	10,58	-0,0170	0,00029
12	125	10,6	125	2,545	6,477	318,125	10,71	-0,0103	0,00011
13	137	10,9	137	2,950	8,702	404,150	10,82	0,0074	0,00005
14	164	11,0	164	3,132	9,809	513,648	11,00	0	0
15	173	11,0	173	3,132	9,809	541,836	11,05	-0,0045	0,00002
16	180	11,5	180				11,09		
$\Sigma =$				1100	30,924	70,034	2771,468	0,3142	0,01611

в табл. 6.4. Далее по формуле (6.12) определяем значения коэффициента $B=0,0119$, откуда $T=84$ мес.

Коэффициент D мы приняли равным нулю. Однако проверка по формуле (6.12) показала, что этот коэффициент $D=1,189$. Это означает, что для данного опыта формула (6.27) имеет вид

$$S = S_{\infty} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{T} - D \right) \right]. \quad (6.28)$$

При $t=0$ получим $S_0 = S_{\infty}(1 - e^{-D})$, откуда $D = \ln \frac{S_{\infty}}{S_{\infty} - S_0}$. Нулевое значение S может быть лишь при $t = -TD < 0$. Следовательно, формулу (6.27) можно записать в виде

$$S = 11,5 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{84} - 1,19 \right) \right].$$

Для нулевого момента времени получим $S_0 = 11,5 (1 - e^{1,19}) = 8,00$ см, что неправдоподобно, поскольку фактическая осадка достигла значения 7,5 см только через 10 мес. Значения S , соответствующие 600 и 1200 мес, равны $S_{600} \approx S_{1200} \approx S_{\infty} = 11,5$ см. Вычисляем показатели точности аппроксимации. Коэффициент корреляции будет согласно (6.13) равен $r=0,976$. Среднее квадратическое отклонение согласно (6.3) составит $\sigma_A = \sqrt{0,01611/14} = 0,0352$. Отсюда коэффициент вариации согласно (6.6) будет равен

$$v = \frac{0,0352}{\sqrt{16}} = 0,0088.$$

Показатели точности при аппроксимации опытных точек формулой (6.27) получены, казалось бы, вполне удовлетворительными. Однако начальное и конеч-

ное значения S при этой аппроксимации являются маловероятными: при $t=0$ имеем явно завышенную осадку, а при $t=\infty$ — заниженную.

Если же считать, что конечная осадка S_∞ неизвестна и ее нужно определить, то поступаем следующим путем. Обозначив $z=e^{-\beta t}$, преобразуем уравнение (6.27) к виду

$$S = S_\infty (1 - z). \quad (6.29)$$

Тогда, выбрав на оси абсцисс две произвольных точки t_1 и $t_2=2t_1$ и определив соответствующие им ординаты S_1 и S_2 , составим два уравнения: $S_1=S_\infty(1-z_1)$ и $S_2=S_\infty(1-z_1^2)$ — и найдем из них $z_1=(S_2-S_1)/S_1$. Отсюда

$$S_\infty = \frac{S_1}{1 - z_1}. \quad (6.30)$$

Приняв в нашем примере $t_1=40$ мес и $t_2=2t_1=80$ мес, чему соответствует $S_1=9,3$ см и $S_2=10,3$ см, получим $z_1=(S_2-S_1)/S_1=0,107$, откуда

$$S_\infty = \frac{S_1}{1 - z_1} = \frac{9,3}{0,893} = 10,4 \text{ см.} \quad (6.31)$$

Если принять другие значения t_1 и t_2 (например, $t_1=10$ мес и $t_2=20$ мес, чему соответствует $S_1=7,5$ см и $S_2=8,45$ см), получим $z_1=0,126$, откуда $S_\infty=7,5/0,874=8,58$ см.

Как видно, полученные значения конечной осадки оказались существенно заниженными — меньшими, чем фактическая осадка через 180 месяцев (равная $S_{180}=11,5$ см), и, главное, каждый выбранным точкам t_1 и t_2 соответствуют свои значения S_∞ . Все это свидетельствует о плохой применимости формулы (6.27) для аппроксимации опытных данных рассматриваемого примера.

§ 6.4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОДСЧЕТОВ

Сводные данные. Результаты статистической обработки опытных данных по формулам (6.20), (6.23), (6.26) и (6.27) приведены в табл. 6.5, а аналитические кривые, построенные по этим формулам, показаны на рис. 6.3.

Таблица 6.5

Результаты обработки опытных данных при аппроксимации их различными формулами

№ формул	Вид формулы	Вычисленные значения осадки, см для моментов времени, мес.					Показатели точности аппроксимации	
		0	180	600	1200	∞	σ	r
(6.20)	$S = S_n^* t^\beta$	0	11,3	13,2	14,4	∞	0,54	0,986
(6.23)	$S = S_n^* \ln \frac{t+1}{T}$	4,8	11,2	12,7	13,6	∞	0,49	0,986
(6.26)	$S = S_\infty \frac{t}{t+T}$	0	11,1	11,4	11,55	11,6	1,56	0,999
(6.27)	$S = S_\infty [1 - \exp(-\frac{t}{T} - D)]$	8,0	11,1	11,5	11,5	11,5	0,88	0,976

Анализ опытных данных. Из приведенных выше примеров можно сделать несколько выводов. Прежде всего следует отметить малоприемлемые результаты применения экспоненциальной формулы (6.27), по которой получается большое расхождение в значениях осадки для начального этапа процесса. Кроме того, эта формула не дает единственного решения для определения конечной осадки S_{∞} . Поэтому формула (6.27) не рекомендуется для широкого применения, ее использование в отдельных случаях должно быть экспериментально обосновано.

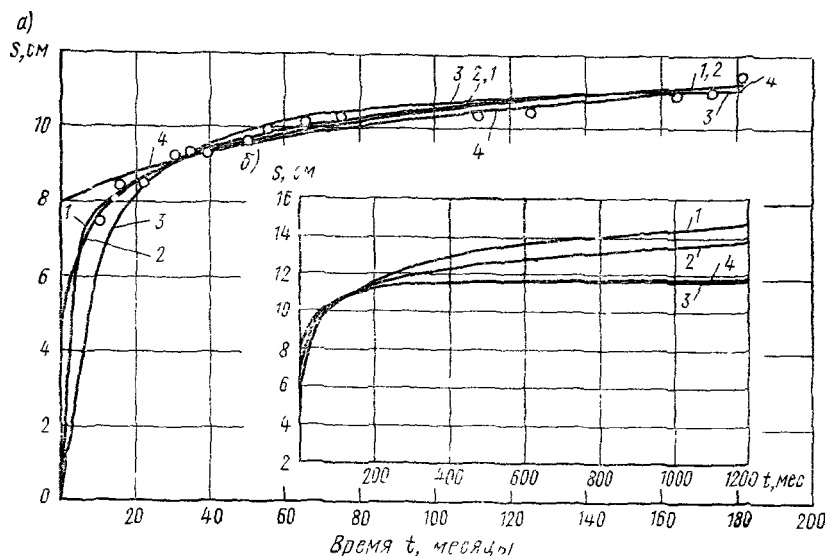


Рис. 6.3. Аппроксимация опытных значений осадки основания плотины Каховской ГЭС с помощью различных формул:

1 — формула (6.20) $S = S_{\infty}^* \frac{t}{t + T}$; 2 — формула (6.23) $S = S_{\infty}^* \ln \left(\frac{t + 1}{T} \right)$; 3 — формула (6.26)

$S = S_{\infty}^* \frac{t}{t + T}$; 4 — формула (6.27) $S = S_{\infty}^* \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{T} + c \right)} \right]$; а — аппроксимация фактических данных (точки); б — экстраполяция аналитических кривых на период 100 лет

Отметим, что расхождение опытных данных и результатов вычислений по формуле (6.27) было получено в большом количестве опытов других авторов с различными слабыми скальными породами — алевролитом, аргиллитом, песчаниками [11], мерзлыми грунтами [3], лёссами, тогда как по степенной формуле (6.20) в этих случаях получается хорошее совпадение с экспериментом.

Переходя к оценке степенной зависимости (6.20), логарифмической (6.23) и дробно-линейной (6.26), следует отметить, что все они дали взаимно близкие результаты, удовлетворительно совпадающие с опытными данными. Показатели точности аппроксимации по этим формулам тоже вполне удовлетворительны, причем у формул (6.20) и (6.23) коэффициент вариации несколько лучше,

чем у формулы (6.26). Большая точность аппроксимации по формулам (6.20) и (6.23) особенно проявляется на начальной стадии процесса — кривые на участке от 0 до 30 мес, построенные по этим формулам, точнее соответствуют опытным точкам (рис. 6.3, а).

Заметное расхождение между результатами подсчета по трем указанным формулам наблюдается при экстраполяции этих подсчетов за пределы наблюдений. Результаты такой экстраполяции на длительный период времени (до 100 лет) показаны на рис. 6.3, б. Конечная осадка, а также осадка за 180 мес, подсчитанные по формуле (6.26), различаются очень незначительно (11,6 и 11,1 см).

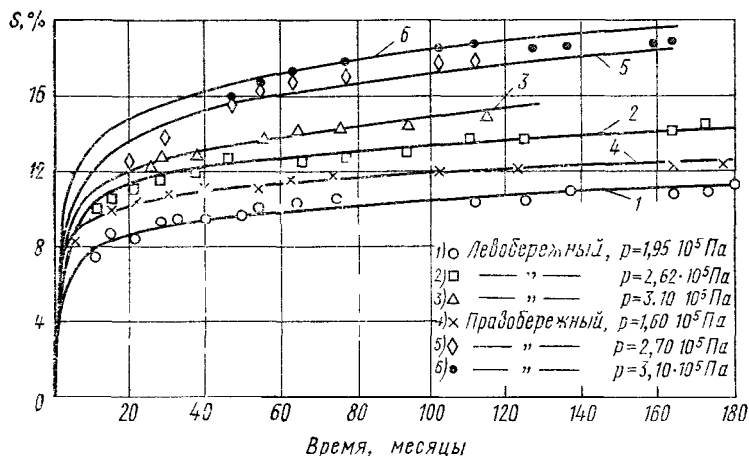


Рис. 6.4 Сопоставление опытных и вычисленных по форм. (6.20) значений осадок. Точки 1—6 по данным наблюдений за осадками плотины Каховской ГЭС [% к толщине слоя сжимаемого грунта (ила), подстилаемого коренными породами]

Это означает, что по дробно-линейной формуле (6.26) получается быстрое затухание осадки. Степенная же и логарифмическая формулы (6.20) и (6.23) характеризуют непрерывную, хотя и медленно нарастающую осадку, причем по формуле (6.23) осадка нарастает с несколько меньшей интенсивностью. Таким образом, формулу (6.26) целесообразно применять к случаям, когда деформация имеет явно затухающий характер, а формулы (6.20) и (6.23) — для случаев, когда деформации имеют «вековой» характер. Подчеркнем, однако, что при умеренных нагрузках, когда нет явно выраженного установившегося течения, по всем трем формулам не получается больших расхождений даже при экстраполяции на большие отрезки времени. Так, в рассматриваемом примере рассчитанные значения осадки для $t=100$ лет по формулам (6.20), (6.23) и (6.26) получаются равными соответственно 14,4, 13,6 и 11,55 см, т. е. максимальное расхождение составляет 33%. При

этом подсчет по формулам (6.20) и (6.23), давая большие значения осадки, идет «в запас» устойчивости основания.

В заключение сопоставим опытные данные и результаты вычислений по формулам (6.20) и (6.26) (рис. 6.4 и 6.5). Опытные данные относятся к наблюдениям за осадками той же плотины Каховской ГЭС, но для различных нагрузок и разных участков плотины (см. рис. 1.12).

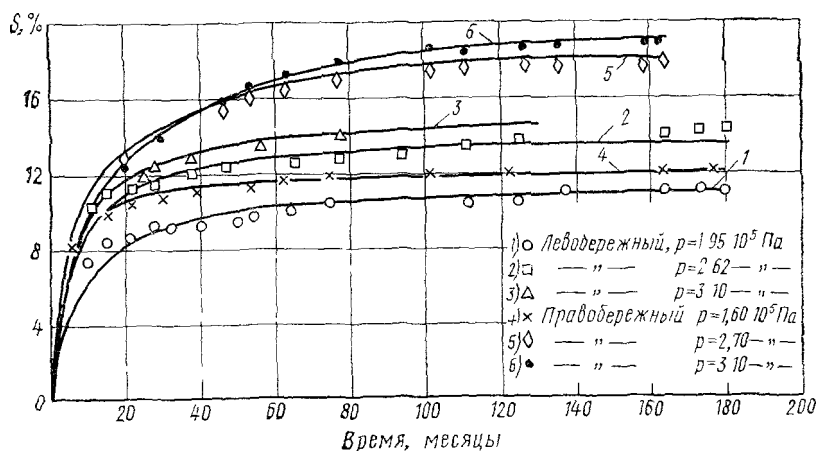


Рис. 6.5. Сопоставление опытных значений осадок и вычисленных по формуле

$$S = S_{\infty} \frac{t}{t + T} \quad (\text{см. рис. 6.4})$$

Результаты этого сопоставления подтверждают сказанное выше — подсчеты по обеим формулам дают удовлетворительное совпадение с опытными данными, но для начального отрезка опытной кривой несколько лучшее соответствие для подсчетов получается по степенной формуле.

§ 6.5. ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ КРИВЫХ

Обработка изохронных кривых и кривых ползучести. В приведенных выше примерах рассмотрена методика обработки опытных данных, относящихся к испытаниям под одной постоянной нагрузкой. Полный же комплекс испытаний включает в себя испытания под различными нагрузками, в результате чего получают семейство кривых ползучести и семейство изохронных кривых (см. рис. 5.5). Рассмотрим способы обработки таких кривых и возможность их описания уравнениями вида (5.16), (5.20) и (5.22), используя приведенные выше приемы выравнивания опытных кривых.

Обработка опытных данных по степенной формуле. Степенная зависимость отображается формулами (5.16) — (5.18), имеющими соответственно следующий вид:

$$\gamma^m = \frac{\tau}{A_0} \left[1 + \left(\frac{t}{T^*} \right)^\alpha \right]; \quad (6.32)$$

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \left[1 + \left(\frac{t}{T^*} \right)^\beta \right]; \quad (6.33)$$

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_n} \right)^{1/m} \left(\frac{t}{T^*} \right)^\beta \quad (\text{при } \gamma_0 = 0). \quad (6.34)$$

Здесь $T^* = \delta^{-1/\alpha} T$ в (6.32), $T^* = \delta^{-1/\beta} T$ в (6.33); $T = 1$.

Рассмотрим сначала методику обработки опытных данных по формуле (6.34). Преобразуем эту формулу к виду

$$\ln \gamma = \frac{1}{m} \ln \frac{\tau}{A_n} + \beta \ln \frac{t}{T^*}. \quad (6.35)$$

Положив $Y = \ln \gamma$, $X = \ln t$, $B = \beta$, $D(\tau) = \ln \left[\left(\frac{1}{T^*} \right)^\beta \left(\frac{\tau}{A_n} \right)^{1/m} \right]$, получим линейное уравнение вида (6.11) $Y = BX + D(\tau)$.

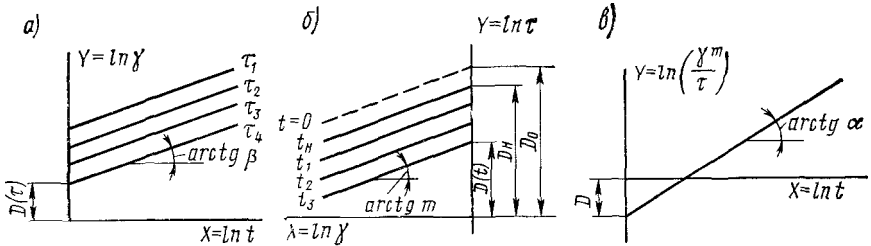


Рис 6.6 Обработка опытных данных с использованием формул (6.32)–(6.34)

Соответственно, перестроив кривые ползучести $\gamma-t$ в координатах X, Y , получим семейство прямых (рис. 6.6, а), каждая из которых отвечает своему значению напряжения $\tau = \text{const}$. Тангенсы углов наклона прямых определяют значения параметра β ; одинаковые величины этих углов для всех прямых свидетельствуют о подобии кривых ползучести.

Положив теперь в уравнении (6.11) $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, $B = m$, $D(t) = -\ln \left[\frac{1}{A_n} \left(\frac{t}{T^*} \right)^{\beta m} \right]$, перестроим изохронные кривые $\tau-t$ в координатах X, Y . В результате получим семейство прямых для различных моментов времени t (рис. 6.6, б). Тангенсы углов наклона прямых определяют параметр m с учетом масштаба графика; одинаковые величины этих углов свидетельствуют о подобии изохронных кривых. Отрезок же, отсекаемый прямой для $t = t_n$, определит величину $D_n = \ln A_n$, откуда находим значение параметра $A_n = e^{D_n}$. Зная A_n и β , вычислим величину T^* из выражения $D(t) = -\ln \left[\frac{1}{A_n} \left(\frac{t}{T^*} \right)^{\beta m} \right]$.

Эта величина для всех значений t должна быть постоянной.

Для окончательной проверки применимости формулы (6.34) построим обобщенный график (рис. 6.6, в), который получим, если в уравнении (6.11) положим $Y = \ln(\gamma^m/\tau)$, $X = \ln t$, $B = \alpha$ и $D = -\ln[A_n(T^*)^\alpha]$

Все опытные точки должны лечь на прямую, построенную в указанных обобщенных координатах X , Y , чем подтверждается достоверность формулы (6.34). Найденные параметры B и D этой обобщенной прямой используем для контроля полученных ранее из графиков рис. 6.6, а, б значений A_n , m , $\alpha = m\beta$. Отметим, что можно обойтись построением только двух графиков — б и в.

Углы наклона прямых на рис. 6.6, а, б могут оказаться различными. Это будет означать, что параметры m и α не постоянны, а зависят от времени $m = m(t)$ и от напряжения $\alpha = \alpha(\tau)$.

Если необходимо учитывать мгновенную деформацию, то следует проверить применимость формулы (6.32) или (6.33) и выбрать ту из них, которая обеспечивает лучшее совпадение с опытными данными.

Для обработки опытных данных в соответствии с формулой (6.32) следует положить $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, $B = m$, $D(t) = -\ln \left\{ \frac{1}{A_0} \left[1 + \left(\frac{t}{T^*} \right)^\alpha \right] \right\}$.

Тогда опытные точки должны лечь на прямые графика рис. 6.6, б, причем отрезок на оси ординат, отсекаемый прямой $t=0$ (пунктирная прямая на графике), определит величину $D_0 = \ln A_0$. Отсюда находим значение параметра $A_0 = e^{D_0}$; параметр m по-прежнему определится тангенсом угла наклона прямых.

Для построения обобщенного графика следует положить $Y = \ln \left(\frac{\gamma^m}{\tau} - \frac{1}{A_0} \right)$, $X = \ln t$, $B = \alpha$, $D = -\ln[A_0(T^*)^\alpha]$.

Тогда опытные точки для всех кривых ползучести должны лечь на одну прямую, аналогичную прямой рис. 6.6, в. По углу наклона этой прямой определяем параметр α , а по отрезку, отсекаемому на оси ординат, — величину D , откуда находим параметр T^* .

Для обработки опытных данных в соответствии с формулой (6.33) эту формулу следует преобразовать к линейному виду, приняв $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, $B = m$, $D(t) = m \ln \left\{ \left(\frac{1}{A_0} \right)^{1/m} \left[1 + \left(\frac{t}{T^*} \right)^\beta \right] \right\}$.

Опытные точки наносим на рис. 6.6, б. Обобщенный график получим, положив $Y = \ln(\gamma/\tau^{1/m}) - 1/A_0^{1/m}$, $X = \ln t$, $B = \beta$, $D = -\ln[A_0^{1/m}(T^*)^\beta]$.

Обработка опытных данных по логарифмической формуле. Логарифмическая зависимость отображается формулами (5.19) и (5.20):

$$\gamma^m = \frac{\tau}{A_0} \left(1 + \delta \ln \frac{t + T}{T} \right); \quad (6.35)$$

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \left(1 + \delta \ln \frac{t+T}{T} \right), \quad (6.37)$$

где T — произвольный момент времени (например, $T=1$).

Изохронные кривые, соответствующие формуле (6.36), выравняются, если положить $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, $B = m$, $D(t) = -\ln \left[\frac{1}{A_0} \left(1 + \delta \ln \frac{t+T}{T} \right) \right]$.

Из построенного в этих координатах графика (рис. 6.7, а) определим параметры m и $A_0 = e^{D_0}$.

Далее, положив $Y = \gamma^m / \tau$, $X = \ln [(t+T)/T]$, $B = A_0^{-1} \delta$, $D = A_0^{-1}$, построим обобщенный график (рис. 6.7, б), на котором семейство кривых ползучести трансформируется в единую прямую. Из этого графика определим параметр $\delta = BA_0$.

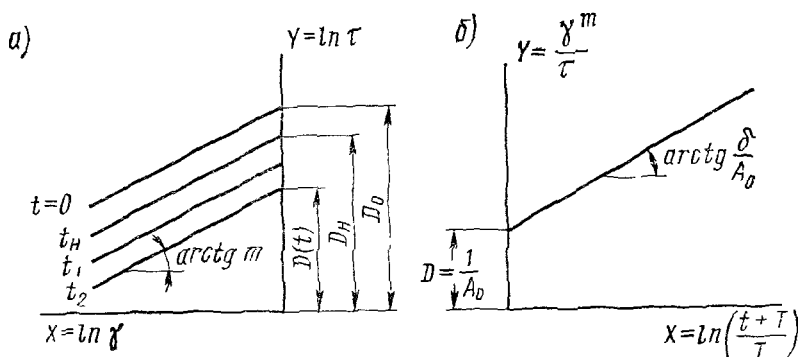


Рис 6.7. Обработка опытных данных и сопоставление их с формулой (6.36)

Если мгновенными деформациями пренебрегать, то в соответствии с формулой (5.21) изохронные кривые можно выравнять, положив по-прежнему $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, $B = m$, но $D(t) = -\ln \left[\frac{1}{A_n} \ln \frac{t+T}{T} \right]$. Тогда $A_n = e^{D_n}$.

Кривые же ползучести трансформируются в обобщенную прямую, если принять $Y = \gamma^m / \tau$, $X = \ln [(t+T)/T]$, $B = \delta / A_n$, $D = 0$.

Для проверки формулы (6.37) изохронные кривые по-прежнему выравняем в координатах $Y = \ln \tau$, $X = \ln \gamma$, но параметр D будет в этом случае равен $D = -m \ln \left[\left(\frac{1}{A_0} \right)^{1/m} \left(1 + \delta \ln \frac{t+T}{T} \right) \right]$, откуда $A_0 = e^{D_0}$.

Обобщенный график получим, приняв $Y = \gamma / \tau^{1/m}$, $X = \ln [(t+T)/T]$, $B = \delta / A_0^{1/m}$, $D = 1 / A_0^{1/m}$.

Вопрос о том, какую из двух формул — (6.36) или (6.37) — следует применить, решаем с учетом лучшего соответствия опытных точек обобщенному графику. Отметим, что при $m=1$ обе формулы становятся идентичными.

Обработка опытных данных по дробно-линейной формуле. Дробно-линейная зависимость отображается формулой (5.22)

$$\gamma = \frac{\tau(T + \delta t)}{G_0[T(1 - \tau/\tau_s) + t(1 - \delta\tau/\tau_s)]} = \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \frac{t}{T^* + t}, \quad (6.38)$$

где γ_0 и γ_∞ — мгновенная и конечная деформации, определяемые по формулам (5.24) и (5.24'), а $T^* = \gamma_\infty T / \delta \gamma_0$.

Схематический вид кривых, описываемых формулой (6.38), изображен на рис. 5.8. Изохронные кривые, изображенные на этой схеме, выравниваются, если преобразовать формулу (6.38) к виду

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{G_0(T + t)}{T + \delta t} - \frac{G_0}{\tau_s} \tau. \quad (6.39)$$

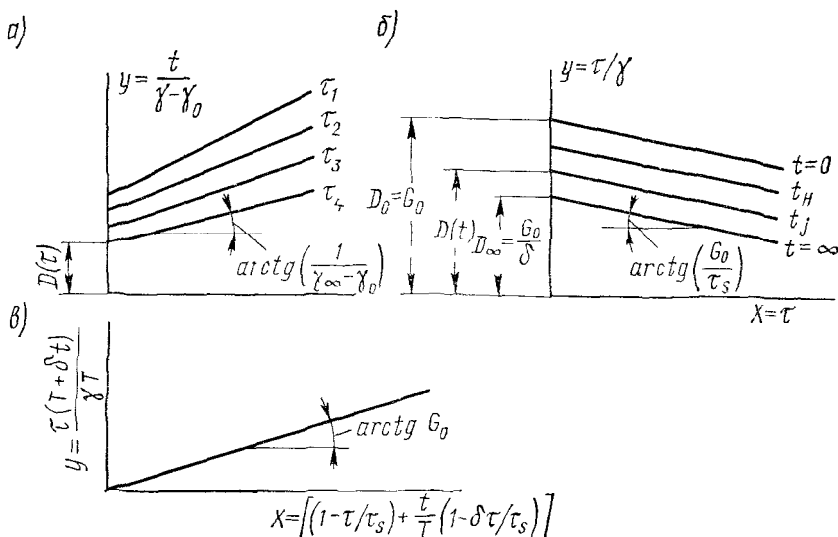


Рис. 6.8. Обработка опытных данных и сопоставление их с результатами, полученными по формуле (6.38)

Тогда, положив $Y = \tau/\gamma$, $X = \tau$, $B = -G_0/\tau_s$, $D(t) = [G_0(T + t)] : (T + \delta t)$ и построив указанные кривые в координатах X , Y , получим семейство прямых (рис. 6.8) с одним и тем же углом наклона, тангенс которого равен величине $G_0/\tau_s = \text{const}$.

Отрезки, отсекаемые прямыми на оси ординат, равны значениям D . Эти значения соответствуют разным моментам времени t и меняются от величины $D_0 = G_0$ при $t = 0$ до $D_\infty = G_0/\delta$ при $t = \infty$.

Кривые ползучести можно выравнивать, если преобразовать формулу (6.38) к виду

$$\frac{t}{\gamma - \gamma_0} = \frac{T^*}{\gamma_\infty - \gamma_0} + \frac{1}{\gamma_\infty - \gamma_0} t. \quad (6.40)$$

Для этого нужно положить $Y=t/(\gamma-\gamma_0)$, $X=t$, $B=1/(\gamma_\infty-\gamma_0)$, $D(\tau)=T^*/(\gamma_\infty-\gamma_0)$ и построить кривые в координатах X , Y .

По тангенсам углов наклона этих прямых определяем величину B , откуда вычисляем значения конечной деформации: $\gamma_\infty=(1/B)-\gamma_0$. Отрезки, отсекаемые прямыми на оси ординат, определяют величины $D(\tau)$, откуда находим значения $T^*=D(\tau)(\gamma_\infty-\gamma_0)$.

Таким образом, из графиков на рис. 6.8, а, б определяем конечную, стабилизированную деформацию γ_∞ и параметры уравнения (6.38): G_0 , δ , τ_s и $T=T^*\delta\gamma_0/\gamma_\infty$.

Для контроля правильности определения этих параметров можно сопоставить вычисленные значения $D_j=[G_0(T+t)]:(T+\delta t_j)$ со значениями этой величины, определенными как отрезки прямых рис. 6.8, б для соответствующих моментов времени.

Окончательно решаем вопрос о применимости формулы (6.38) путем построения обобщенного графика в координатах

$$Y=\frac{\tau(T+\delta t)}{\gamma T}; \quad X=\left[(1-\tau/\tau_s)+\frac{t}{T}(1-\delta\tau/\tau_s)\right]. \quad (6.41)$$

Все опытные точки (для любых τ и t), нанесенные на график в этих координатах, должны лечь на одну прямую $Y=BX$, где $B=G_0$ (рис. 6.8, в).

Если мгновенную деформацию не учитывать, обработка опытных данных несколько упростится. В этом случае следует принимать $D=G_{0(n)}(T+t)/(\delta_n t)$, $B=G_{0(n)}/\tau_{s(n)}$, где индексы «н» означают, что параметры относятся к изохронной кривой для момента времени $t=t_n>0$, например $t_n=1$ (рис. 6.8).

Для построения же обобщенного графика следует принять $Y=\tau t/\gamma$, $X=t[1-\delta_n\tau/\tau_{s(n)}]$, $D=TG_{0(n)}/\delta_n$, $B=G_{0(n)}/\delta_n$.

Оценка эмпирических формул. В настоящей главе рассмотрен ряд формул, описывающих процесс деформирования во времени, и показаны способы проверки их соответствия опытным данным. При этом мы сознательно старались охватить большое количество формул, приведя те из них, которые сравнительно часто используются на практике. Такой подход, несмотря на некоторую перегруженность материала, наиболее целесообразен, поскольку любую из феноменологических формул, если они подтверждаются опытными данными, можно использовать, но, конечно, в определенных пределах. Задача заключается в том, чтобы уметь выбрать ту формулу, которая наиболее подходит для данного конкретного случая.

Из сказанного, однако, не следует, что при обработке опытных материалов и выборе уравнения деформирования грунта необходимо сопоставлять большое количество эмпирических формул. Достаточно ограничиться наиболее простыми и ходовыми. Такими являются степенная, логарифмическая и дробно-линейная формулы. При этом выбрать одну из них можно на основе анализа скорости деформирования грунта.

Анализ скорости деформирования грунта. В гл. 5 было показано, что степенное, логарифмическое и дробно-линейное уравнения

ползучести можно получить из обобщенной функции скорости деформирования (5.12). Приняв условно $K(t) = \kappa(t)$ и положив

$$\kappa(t) = \left(\frac{T_2}{T_1 + t} \right)^n, \quad (6.42)$$

определим в зависимости от значения параметров n и T закономерность развития деформации во времени. Напомним, что при $n < 1$, $T_1 = 0$, $T_2 \neq 0$ получаем степенное уравнение, при $n = 1$, $T_1 = 0$, $T_2 \neq 0$ — логарифмическое, а при $n = 2$, $T_1 \neq 0$, $T_2 \neq 0$ — дробно-линейное.

Запишем уравнение кривых $\gamma-t$ в виде

$$\dot{\gamma} = A \kappa(t), \quad (6.43)$$

где $A = f(\tau) = \text{const}$, и будем выпрямлять эти кривые в соответствующих координатах.

Так, положив в (6.42) $T_1 = 0$, $T_2 = T$, запишем (6.43) в виде

$$\dot{\gamma} = A \left(\frac{t}{T} \right)^{-n}. \quad (6.44)$$

Обозначив $Y = \ln \dot{\gamma}$, $X = \ln t$, $B = -n$, построим график $Y-X$ для различных τ и определим значение n . Если кривые будут выпрямлены и $n \neq 1$, то справедливым является степенное уравнение ползучести, если же $n = 1$ — то логарифмическое.

Для проверки применимости дробно-линейного уравнения ползучести следует представить (6.43) в виде

$$\dot{\gamma} = A \frac{T}{(t + T)^2} \quad (6.45)$$

и преобразовать его к линейному виду, положив $Y = \dot{\gamma}^{-0.5}$, $X = t$, $B = (AT)^{-0.5}$.

ГЛАВА 7

ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ



§ 7.1. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО УПРУГОВЯЗКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Уравнение состояния. Теория линейного упруговязкого деформирования — одна из первых реологических теорий — исходит из рассмотрения совместного проявления упругих и вязких свойств тела. Впервые уравнение упруговязкости было сформулировано Максвеллом для описания явления релаксации, затем Кельвин и Фойгт предложили уравнения последействия.

Уравнения линейной упруговязкости подробно рассмотрены в работах М. Рейнера [32, 33], А. Р. Ржаницина [34], А. Ю. Ишлинского и др. В общем виде такое уравнение, постулированное Хоэнемзер и Прагером, имеет вид

$$\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \dot{\tau} = \beta_1 \gamma + \beta_2 \dot{\gamma}, \quad (7.1)$$

где $\alpha_0 = -\tau_T$ — предельное напряжение сдвига по Бингаму; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = T_r = \eta/G_0$ — время релаксации; $\beta_2 = \eta$ — коэффициент вязкости; $\beta_1 = G_\infty$, причем G_0 и G_∞ — мгновенное и предельно-длительное значения модуля сдвига.

Реологические уравнения состояния связывают напряжение, деформацию, ее скорость и время (в явной или неявной форме). Вид связи определяется той или иной принятой гипотезой, в зависимости от которой и различают теории ползучести.

Механические модели. В теории линейной упруговязкости широко распространен метод модельного отображения реологических свойств тела, исходящий из представления, что эти свойства определяются сочетанием упругих, вязких и пластических характеристик (рис. 7.1).

Упругие свойства тел отображают моделью в виде упругого элемента — пружины, подчиняющегося закону Гука $\tau = G\gamma$ и обозначаемого символом N . Вязкие свойства тел отображают моделью в виде цилиндра, наполненного жидкостью, в которую погружается дырчатый поршень, причем скорость погружения описывается законом Ньютона $\tau = \eta\dot{\gamma}$; этот элемент обозначают символом N . Пластические свойства отображаются элементом сухого трения, подчиняющимся закону Сен-Венана $\tau = \tau_T$, где $\tau_T = \tau_s$ — напряжение,

до превышения которого деформация не возникает; этот элемент обозначают символом SV.

Последовательное соединение указанных элементов обозначают через тире (например, H—N), а параллельное — вертикальной чертой (например, H|N).

Очевидно, что указанные три элемента можно соединять в самых различных сочетаниях; эти сочетания и будут описывать различные проявления упруговязких свойств тела. Модельные представления свойств тела, подкупающие своей наглядностью и простотой, получили широкое распространение. И нет, пожалуй, ни одной книги по вопросам реологии, в которой не приводились бы механические модели упруговязких тел.

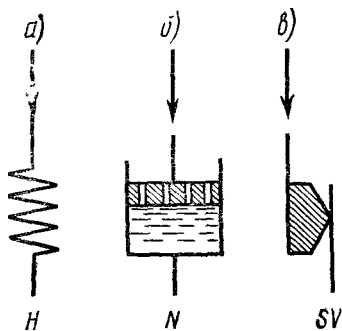


Рис. 7.1. Механические модели:
а — упругого тела Гука; б — вязкого тела Ньютона; в — пластичного тела Сен-Венана

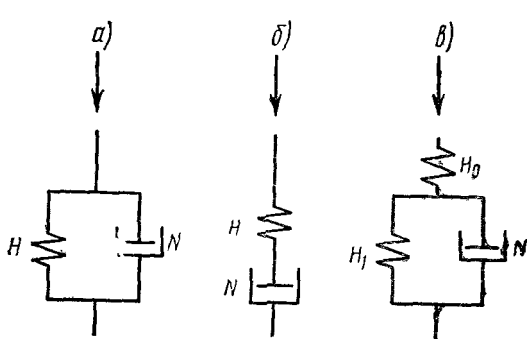


Рис. 7.2. Модели упруговязких тел:
а — Кельвина — Фойгта; б — Максвелла; в — обобщенного упруговязкого тела

Вместе с тем многочисленные опыты с различными материалами показали, что модельные представления и вытекающие из них уравнения деформирования не дают хорошего совпадения с действительным поведением этих материалов. Это и естественно, поскольку никакие модели — ни в их простейшем виде, ни в виде самых сложных комбинаций, к которым прибегают некоторые авторы, — не могут отобразить реальные свойства тела.

Если же использовать модели для рассмотрения только качественной стороны процесса, то, учитывая наглядность этого метода, он может представить определенный интерес. Исходя из этих соображений, а также для полноты представлений о реологических теориях в их историческом развитии ниже помещаем обзор модельных представлений.

Тело Кельвина — Фойгта. Соединяя параллельно упругий и вязкий элементы, получим модель тела Кельвина, обозначаемую буквой К (рис. 7.2, а):

$$K = H | N. \quad (7.2)$$

Реологическое уравнение состояния этого тела (иногда называемого телом Кельвина — Фойгта) можно вывести, составив уравнение модели

$$\tau = \tau^H + \tau^N, \quad (7.3)$$

где τ^H и τ^N — напряжения в упругом (гуковом) и вязком (ньютоновом) элементах.

Подставив значения $\tau^H = G_\infty \gamma$ и $\tau^N = \eta \dot{\gamma}$ в это равенство, получим рассмотренное ранее уравнение деформирования (4.69)

$$\tau = G_\infty \gamma + \eta \dot{\gamma}. \quad (7.4)$$

Это выражение является частным случаем уравнения (7.1) (при $\tau_t = T_r = 0$). При постоянном напряжении $\tau = \text{const}$ зависимость (7.4) после его интегрирования принимает вид

$$\gamma = C e^{-\frac{G_\infty}{\eta} t} + \frac{1}{G_\infty} \tau. \quad (7.5)$$

Произвольную постоянную C определяют из начальных условий: при $t=0$ деформация $\gamma=0$, откуда $C = -\tau/G_\infty$. Тогда получим закономерность изменения деформации во времени

$$\gamma = \frac{\tau}{G_\infty} \left(1 - e^{-\frac{G_\infty}{\eta} t} \right), \quad (7.6)$$

соответствующую рассмотренному ранее уравнению упругого последствия (4.70).

Уравнение описывает возрастание деформации (рис. 7.3, а) от нуля до конечного, стабилизированного значения $\gamma_\infty = \tau/G_\infty$. Вследствие этого параметр G_∞ следует рассматривать как предельно-длительный модуль упругости (сдвига).

Величину $\eta/G_\infty = T_p$ называют временем последствия или временем запаздывания деформации.

При постоянной деформации $\gamma = \text{const}$ напряжение, как следует из уравнения (7.4), остается постоянным, равным $\tau = G_\infty \gamma$ (рис. 7.3, а). Поэтому тело Кельвина — Фойгта можно назвать телом, обладающим свойством последствия, но не проявляющим свойства релаксации.

Тело Максвелла. Соединив упругий и вязкий элементы последовательно, получим модель тела Максвелла, обозначаемую буквой М (рис. 7.3, б):

$$M = H - N. \quad (7.7)$$

Реологическое уравнение состояния этого тела можно вывести, составив уравнение модели

$$\gamma = \gamma^H + \gamma^N, \quad (7.8)$$

где γ^H и γ^N — деформации упругого и вязкого элементов.

Приняв $\gamma^H = \tau/G_0$ и $\dot{\gamma}^N = \tau/\eta$ и продифференцировав приведенное выше равенство, получим рассмотренное ранее уравнение (4.73).

$$\tau + T_r \dot{\tau} = \eta \dot{\gamma}, \quad (7.9)$$

где $T_r = \eta/G_0$ — время релаксации. Это выражение является частным случаем уравнения (7.1) при $\tau_t = G_\infty = 0$.

При постоянной деформации $\gamma = \text{const}$ решение уравнения (7.9) при начальном условии $t=0$ $\tau = \tau_0$ приводит к рассмотренному ранее уравнению релаксации (4.74)

$$\tau = \tau_0 e^{-t/T_r}. \quad (7.10)$$

Согласно уравнению (7.10), напряжение расслабляется во времени от начального значения τ_0 до нуля (рис. 7.3, б). Таким образом, параметр G_0 в этом уравнении следует рассматривать как начальный, условно-мгновенный модуль упругости (сдвига).

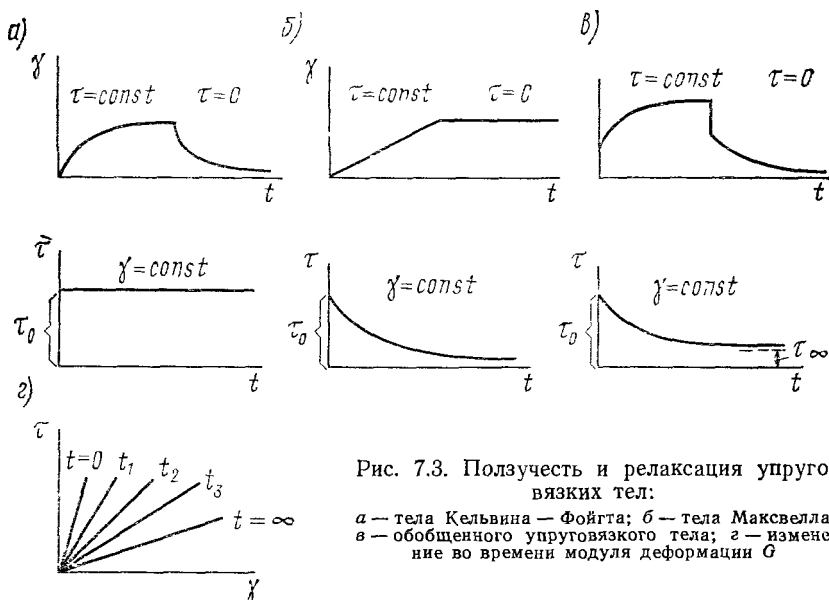


Рис. 7.3. Ползучесть и релаксация упруговязких тел:

а — тела Кельвина — Фойгта; б — тела Максвелла; в — обобщенного упруговязкого тела; г — изменение во времени модуля деформации G

При постоянном напряжении $\tau = \text{const}$ выражение (7.9) переходит в уравнение Ньютона $\dot{\gamma} = \tau/\eta$, соответствующее непрерывному нарастанию деформации с постоянной скоростью (рис. 7.3, б). Поэтому тело Максвелла можно считать телом, обладающим свойством релаксации, но не проявляющим свойства последействия.

Обобщенное упруговязкое тело. Каждая из рассмотренных выше моделей Максвелла и Кельвина — Фойгта отображает только одну из сторон процесса упруговязкого деформирования — либо последействие, либо релаксацию.

Уравнение Хоэнмэзер и Прагера (7.1) является более общим — оно описывает одновременное протекание обоих указанных процессов. Свойства тела, описываемого этим уравнением, можно отобразить сочетанием моделей Максвелла и Кельвина — Фойгта (рис. 7.2, в):

$$HP = H_0 + (H_1 | N) = H - K. \quad (7.11)$$

Обозначим модули упругости элементов Гука H_0 и H_1 через G_0 и G_1 соответственно, а коэффициент вязкости ньютонова элемента N — через η . Тогда напряжения в этих элементах будут равны: $\tau_0^H = G_0 \dot{\gamma}_0^H$, $\tau_1^H = G_1 \dot{\gamma}_1^H$, $\tau^N = \eta \dot{\gamma}^N$, где индекс H относится к элементам Гука, а N — к ньютоновым.

Уравнения системы будут иметь следующий вид:

$$\tau = \tau_0^H = \tau_1^H + \tau^N; \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0^H + \dot{\gamma}_1^H; \quad \dot{\gamma}_1^H = \dot{\gamma}^N.$$

Подставив в эти равенства значения $\tau_0^H = G_0 \dot{\gamma}_0^H$, $\tau_1^H = G_1 \dot{\gamma}_1^H$, $\tau^N = \eta \dot{\gamma}^N$, после соответствующих преобразований получим

$$\frac{G_1 + G_0}{G_0} \tau + \frac{\eta}{G_0} \dot{\tau} = G_1 \dot{\gamma} + \eta \dot{\gamma}.$$

Положив в этом равенстве

$$G_\infty = \frac{G_1 G_0}{G_1 + G_0}; \quad T_r = \frac{\eta}{G_0 + G_1}, \quad (7.12)$$

получим уравнение деформирования в виде

$$\tau + T_r \dot{\tau} = G_\infty \dot{\gamma} + G_0 T_r \dot{\gamma}, \quad (7.13)$$

которое при $\tau = 0$ совпадает с уравнением (7.1).

При постоянной нагрузке $\tau = \text{const}$ решение уравнения (7.13) дает

$$\dot{\gamma} = \exp\left(-\frac{G_\infty}{G_0} \frac{1}{T_r} t\right) + \frac{1}{G_\infty} \tau. \quad (7.14)$$

Отсюда при начальном условии $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$ при $t = 0$ получим уравнение упругого последействия в следующем виде:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{G_\infty} - \tau \left(\frac{1}{G_\infty} - \frac{1}{G_0} \right) e^{-t/T_r}, \quad (7.15)$$

где $T_r = (G_0/G_\infty) T_r$.

Для $t = 0$ по этому уравнению имеем $\dot{\gamma}_0 = \tau/G_0$, а для $t = \infty$ получим $\dot{\gamma}_\infty = \tau/G_\infty$. Соответственно (рис. 7.3, в) выражение (7.15) можно переписать в форме

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_\infty - (\dot{\gamma}_\infty - \dot{\gamma}_0) e^{-t/T_r}. \quad (7.16)$$

Отсюда становится ясным смысл начального G_0 и конечного G_∞ модулей деформации: первый определяет связь между напряжением

и мгновенной деформацией γ_0 , а второй — между напряжением и конечной, стабилизированной деформацией γ_∞ (рис. 7.3, з).

Для случая разгрузки $\tau=0$ уравнение (7.13) дает следующее решение:

$$\gamma = \left[\gamma_0 - \frac{\tau_0}{G_0} \right] \exp \left(-\frac{t-t_0}{T_p} \right), \quad (7.17)$$

где t_0 — момент разгрузки, а τ_0 и γ_0 — напряжение и деформация, соответствующие этому моменту.

При постоянной деформации $\gamma = \text{const}$ уравнение (7.13) описывает релаксацию напряжений (рис. 7.3, в):

$$\tau = G_\infty \gamma + (G_0 - G_\infty) \gamma e^{-t/T_r} = \tau_\infty + (\tau_0 - \tau_\infty) e^{-t/T_r}, \quad (7.18)$$

где τ_0 — начальное значение напряжения (при $t=0$), а τ_∞ — конечное (при $t=\infty$).

Таким образом, обобщенное уравнение (7.13) описывает как процесс упругого последствия, так и процесс релаксации, причем в отличие от (7.4) уравнение (7.13) учитывает мгновенную деформацию, а в отличие от уравнения (7.9) предусматривает падение напряжения не до нуля, а до некоторой конечной величины.

Тела Бингама и Шведова. Уругопластическое тело Прандтля (см. рис. 4.1, б) моделируется последовательным соединением элемента Сен-Венана и упругого эле-

Рис. 7.4. Модели уругопластических и пластично-вязких тел:

а — тело Прандтля, б — тело Бингама; в — тело Шведова

мента Гука. Эта модель показывает, что при напряжениях $\tau < \tau_T$ развивается упругая деформация $\gamma = \tau/G$, а при $\tau = \tau_T$ возникает неограниченная деформация $\gamma \rightarrow \infty$.

Модель пластично-вязкого тела Бингама состоит из упругого H , вязкого N и сен-венанова SV элементов (рис. 7.4, б):

$$B = H - (N \mid SV). \quad (7.19)$$

Закономерность деформирования тела Бингама получается из условия $\tau = \tau^H + \tau_T$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \tau &= G\gamma & \text{при } \tau < \tau_T; \\ \tau - \tau_T &= \eta_{пл} \dot{\gamma} & \text{при } \tau \geq \tau_T, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где G — модуль упругости элемента Гука; η — коэффициент вязкости ньютонова элемента; τ_T — предельное сопротивление сдвигу сен-венанова элемента. Эти выражения соответствуют рассмотренной ранее формуле (4.68).

Модель другого пластично-вязкого тела получается путем соединения двух упругих элементов H_0 и H_1 с вязким N и сен-венановым SV элементами (рис. 7 4, в) Это тело называют телом Шведова

$$SW = H_0 - [(H_1 - N) | SV] = H_0 - (M | SV) \quad (7.21)$$

Уравнение деформирования тела Шведова соответствует рассмотренной ранее формуле (4.76)

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_r}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G}. \quad (7.22)$$

Комбинированные модели. Кроме рассмотренных имеется еще ряд моделей, в которых так или иначе комбинируют упругие, вязкие и сен-венановы элементы Так, модель Пойнтинга — Томсона PT представляет собой параллельное соединение элементов Гука и Максвелла $PT = H | M$, модель Лесерсича L — последовательное соединение элементов Ньютона и Кельвина $L = N - K$, модель Джеффриса J — параллельное соединение элементов Ньютона и Максвелла $J = N | M$, модель Бюргерса Bu — последовательное соединение моделей Максвелла и Кельвина $Bu = M - K$ Отметим, что по модели Джеффриса, уравнение которой имеет вид

$$\tau + \tau_{r(1)}\tau = \eta(\dot{\gamma} + T_{r(2)}\gamma); \quad (7.23)$$

при $\tau = \text{const}$ имеем

$$\gamma = \gamma_0 + A [1 - e^{-t/T_{r(2)}}] + \frac{\tau}{\eta} t. \quad (7.24)$$

Эта модель была предложена для описания поведения земной коры При этом принималось, что время релаксации горных пород $T_r = 10^8$ с, а вязкость $\eta \approx 5 \times 10^{20}$ П

Многоэлементные модели Вследствие значительного расхождения между действительными свойствами реальных тел и их модельным отображением некоторые авторы начали применять более сложные модели, составленные из большого числа упругих и вязких элементов Эти элементы имеют различные упругие G_i и вязкие η_i характеристики, суммарное проявление которых и определяет макроповедение тела Например, такую модель можно получить последовательным соединением моделей Кельвина или параллельным соединением моделей Максвелла Некоторые из указанных моделей будут рассмотрены в гл. 8 при описании процесса консолидации грунтов

В общем случае дифференциальное уравнение (7.1) для моделей с большим (но конечным) числом элементов (при $\alpha_0 = 0$) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 \tau + \alpha_2 \frac{d\tau}{dt} + \alpha_3 \frac{d^2\tau}{dt^2} + \dots + \alpha_{n+1} \frac{d^n \tau}{dt^n} = \\ = \beta_1 \gamma + \beta_2 \frac{d\gamma}{dt} + \beta_3 \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \dots + \beta_{n+1} \frac{d^n \gamma}{dt^n}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Очевидно, что при $\alpha_3 = \dots = \alpha_{n+1} = \beta_3 = \dots = \beta_{n+1} = 0$ это уравнение переходит в уравнение (7.13).

Интегральная форма уравнения деформирования. Вернемся к уравнению деформирования (7.13). Решения этого уравнения при $\tau = \text{const}$ или $\gamma = \text{const}$ были рассмотрены ранее. Приведем сейчас общие решения при изменяющихся во времени по любому закону напряжениях $\tau(t)$ и деформациях $\gamma(t)$.

В этом случае при решении дифференциального уравнения (7.13) относительно деформации получим выражение

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\beta_1}{\beta_2} t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_0^t \left[\tau(v) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \dot{\tau}(v) \right] e^{-\frac{\beta_1}{\beta_2} (t-v)} dv. \quad (7.26)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\gamma = \frac{1}{G_0} \left[\tau(t) + \int_0^t \tau(v) K(t-v) dv \right], \quad (7.27)$$

где $K(t-v) = \frac{G_0 - G_\infty}{G_\infty T_p} e^{-\frac{(t-v)}{T_p}}$ — есть ядро интегральной зависимости (7.27), а $G_\infty = \beta_1/\alpha_1$, $G_0 = \beta_2/\alpha_2$, $T_p = \beta_2/\beta_1 = T_r G_0/G_\infty$, $T_r = \alpha_2/\alpha_1$.

Решая уравнение (7.13) относительно напряжения, получим

$$\tau = G_0 \left[\gamma(t) - \int_0^t \gamma(v) R(t-v) dv \right], \quad (7.28)$$

где $R(t-v) = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0^2 T_r} e^{-\frac{(t-v)}{T_r}}$ — ядро интегральной зависимости (7.28).

Построим теперь обобщенную модель, состоящую из некоторого конечного числа n моделей, каждая из которых имеет свои значения параметров G_j и η_j . Тогда K и R выразятся суммой приведенных выше экспоненциальных зависимостей; при бесконечно большом количестве элементов суммирование заменится интегрированием.

§ 7.2. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРУНТА

Модели, отображающие консолидацию грунтов. В механике грунтов было сделано много попыток отобразить с помощью механических моделей процессы деформирования грунтов.

Первой такой моделью является классическая модель Терцаги — Герсеванова, описывающая процесс консолидации водонасыщенного грунта. В традиционном виде эта модель изображается как цилиндр, заполненный вязкой жидкостью, в которую погружается дырчатый поршень, соединенный с упругой пружиной (рис. 7.5, а).

Жидкость в цилиндре моделирует поровую воду, отверстие в поршне — капилляры грунта, а пружина — скелет грунта. Считается, что нагрузка p передается вначале на воду и только по мере погружения поршня начинает восприниматься пружиной, перераспределяясь между жидкостью в цилиндре (поровое давление u) и упругой пружиной (эффективное напряжение σ').

Процесс заканчивается, когда нагрузка полностью передается на пружину $\sigma' = p$ и последняя прекратит сжиматься. Поскольку поршень и пружина соединены параллельно, то описываемая модель идентична модели Кельвина — Фойгта, изображенной на рис. 7.2, а.

Последующие модификации модели Терцаги сводились к учету вторичной консолидации. По теории Д. Тейлора, процесс консолидации грунта можно отобразить моделью, состоящей из модели Кельвина, помещенной в цилиндр с жидкостью (рис. 7.5, б). Поскольку

здесь модель Кельвина отображает поведение скелета грунта, тем самым последний наделяется упруговязкими свойствами, т. е. способностью к вторичной консолидации.

П. Анагности несколько усложнил эту модель, добавив еще один упругий элемент и получив, таким образом, две модели: модель Кельвина, описывающую шаровую часть тензора деформации, и модель Максвелла, описывающую девиаторную часть тензора.

Тан Тьенг-Ки, впервые привлекая реологические модели для описания поведения грунтов, использовал модель Пойнтинга — Томпсона, помещенную в цилиндр с жидкостью; модель эта изображена на рис. 7.5, в. В модели Р. Гибсона и К. Ло, изображенной на рис. 7.5, г, скелет грунта отображается моделью Хоэнмэзер — Прагера. Эта же модель соответствует теории консолидации грунтов В. А. Флорина.

На примере указанной модели рассмотрим отображение первичной и вторичной консолидации. Эффективное напряжение в начальный момент времени передается на упругий элемент N_2 и вязкий элемент N . По мере погружения поршня в большой цилиндр и перераспределения давления между поровой водой и скелетом грунта эффективное напряжение все увеличивается и наряду со сжатием пружины N_2 начинает сжиматься пружина N_1 .

Когда эффективное напряжение достигает полного значения $\sigma' = p$, сжатие пружины N_2 закончится и соответственно закончится первичная консолидация. Дальнейший процесс будет происходить

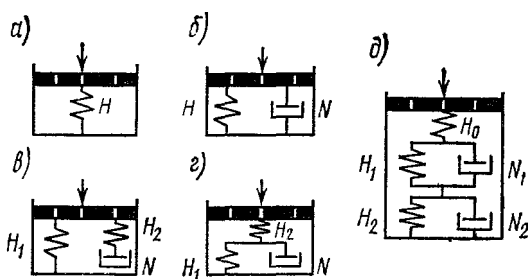


Рис. 7.5. Механические модели, отображающие процесс консолидации грунта:

а — Терцаги — Герсеванова; б — Тейлора; в — Тана; г — Гибсона — Ло; д — Ло

под воздействием полного напряжения p , воспринимаемого упругим элементом H_1 и вязким элементом N ; этот процесс соответствует вторичной консолидации.

Впоследствии К. Ло усложнил модель, подключив к ней кельвинов элемент, соединенный с рассмотренной моделью последовательно через сен-венанов элемент; этот элемент отображает структурную прочность грунта.

Некоторые исследователи для лучшего отображения процесса консолидации грунта пытались использовать многокомпонентные модели. Так, Р. Шиффман предложил модель, состоящую из нескольких (двух или трех) последовательно соединенных кельвиновых элементов (рис. 7.5, δ).

Таким образом, все механические модели, с помощью которых отображается процесс консолидации водонасыщенного грунта, исходят из представления о перераспределении давления между поровой водой и грунтовым скелетом. При этом поровая вода отображается во всех случаях с помощью внешнего цилиндра с жидкостью, а грунтовой скелет — той или иной комбинацией упругих и вязких элементов. Именно включение вязкого элемента позволяет отображать вязкое сопротивление грунтового скелета, обуславливающее вторичную консолидацию.

Различные комбинации упругих и вязких элементов, не являясь принципиальными, позволяют отобразить лишь те или иные особенности процесса. Отметим, что если из всех рассмотренных моделей убрать внешние цилиндры, то модели станут описывать процесс консолидации неводонасыщенного грунта, у которого вся нагрузка с самого начала воспринимается грунтовым скелетом.

Модели, отображающие сдвиговую ползучесть. Для отображения процесса сдвиговой ползучести грунта следует применять модели, которые могут описывать как затухающее, так и незатухающее деформирование.

Такая модель, предложенная автором книги [3], получена путем последовательного соединения модели Хюэнмзера — Прагера и модели Бингама (рис. 7.6, a). Уравнение деформирования в этом случае выводят путем суммирования деформаций из условия $\gamma^{HP} + \gamma^B$, где γ^{HP} — деформация модели Хюэнмзера — Прагера; γ^B — деформация модели Бингама.

При воздействии постоянной нагрузки $\tau = \text{const}$ значение γ^{HP} определяют по формуле (7.15), а γ^B — по формуле (7.20). Тогда при напряжении $\tau < \tau_r$ будем иметь

$$\gamma = \frac{\tau}{G_\infty} - \tau \left(\frac{1}{G_\infty} - \frac{1}{G_0} \right) e^{-t/T_p}, \quad (7.29)$$

а при напряжении $\tau \geq \tau_r$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_\infty} - \tau \left(\frac{1}{G_\infty} - \frac{1}{G_0} \right) e^{-t/T_p} + \frac{\tau - \tau_r}{\eta_{пл}} t. \quad (7.30)$$

Здесь G_0 и G_∞ — начальный и конечный модули сдвига; T_p — время последствия (затухания деформаций); $\eta_{пл}$ — коэффициент пластической (бингамовой) вязкости.

Таким образом, при напряжениях $\tau < \tau_t$ модель описывает затухающую ползучесть, а при $\tau \geq \tau_t$ — незатухающую, включающую в себя деформацию упругого последствия и вязкопластическое течение грунта. При разгрузке восстанавливаются мгновенная деформация и деформация упругого последствия; деформация пластично-вязкого течения необратима.

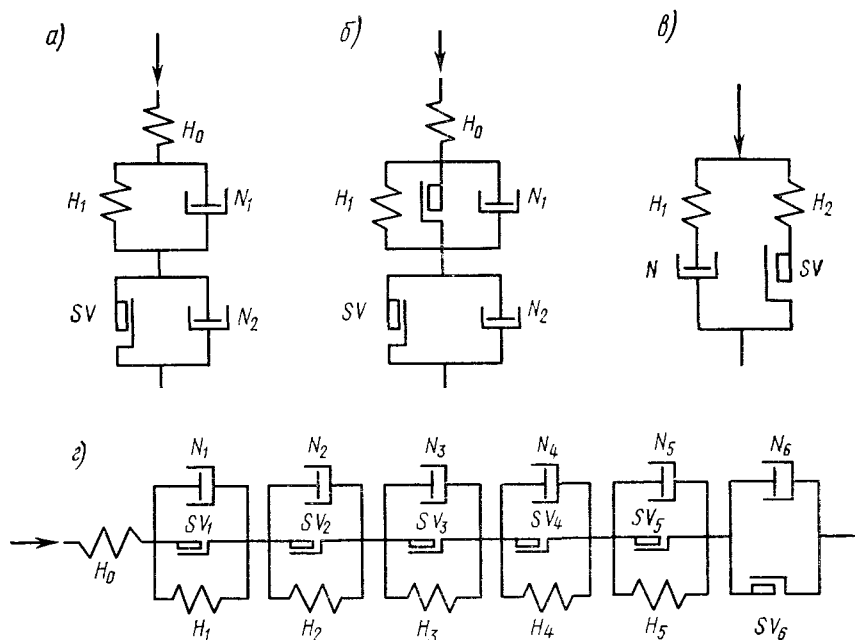


Рис. 7.6. Механические модели, отображающие процесс сдвиговой ползучести: а — Вялова; б — Гольдштейна; в — Киселя — Фолькуе; г — Феддера и Бредза

Если в модель рис. 7.6, а добавить еще один сен-венанов элемент, то получим модель, предложенную М. Н. Гольдштейном (рис. 7.6, б), которая предполагает наличие у грунта двух предельных напряжений: предела пропорциональности SV_1 , до превышения которого возможны только упругие деформации, и предела текучести SV_2 , по превышении которого возникает пластично-вязкое течение.

Если в модели ограничиться одним вязким элементом, можно получить модель типа шведовой, как это показано на рис. 7.6, в. Такая модель была предложена для грунта И. Киселем [53]. Модель отображает упругое последствие при $\tau < \tau_t$ и максвеллово течение при $\tau \geq \tau_t$. Идентичную модель предложил Дж. Фолькуе [48] для описания консолидации неводонасыщенного грунта. Эту же модель,

но с добавлением еще одной пружины за сен-венановым элементом Фолькуе использовал для отображения процесса консолидации переуплотненного грунта.

Наконец, можно составить модель грунта из сочетания нескольких различных моделей. Такая модель по Д. Феддеру и Х. Бредзу изображена на рис. 7.6, г.

Механические модели грунта с переменной вязкостью. Во всех рассмотренных выше моделях вязкость грунта, отображаемая ньютоновым элементом N , принималась постоянной. Однако в некоторых моделях учитывалось изменение вязкости в зависимости от нагрузки. Такая модель (рис. 7.7, а) была предложена С. Мураемой

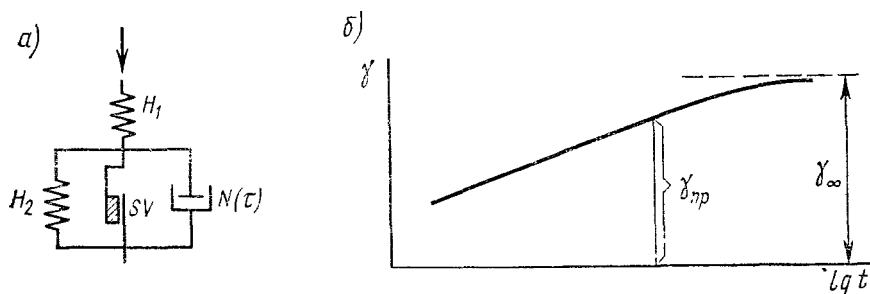


Рис. 7.7. Модель Мураемы и Шиботы, учитывающая переменную вязкость грунта: а — модель; б — кривая ползучести

и Т. Шиботой (сб. «Механика грунтов и фундаментостроение». Стройиздат, 1966). Используя исходные представления физической теории скоростей деформирования Эйринга (которая будет рассмотрена в последующем), авторы считали, что вязкость связанной воды в грунте можно выразить следующей нелинейной зависимостью:

$$\eta = \frac{\tau_N}{A(\tau - \tau_r) \operatorname{sh} \left(\frac{B\tau_N}{\tau - \tau_r} \right)}; \quad (7.31)$$

этой переменной вязкостью η и наделяется ньютонов элемент $N(\tau)$.

Уравнение модели получим из условий $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ и $\tau = \tau_1 = \tau_2$, где индекс 1 относится к упругому элементу H_1 , а индекс 2 — к упругому H_2 и соединенному с ним нелинейно-вязкому $N(\tau)$ элементам. Отсюда получим следующее уравнение деформирования: когда деформация не превышает значения $\gamma \leq \gamma_{\text{пр}} = \gamma_0 + (\tau - \tau_r)(2B - 1)/2BG_2$, где $\gamma_0 = \tau/G_1$, то эта деформация развивается во времени по логарифмическому закону

$$\gamma = \frac{\tau}{G_1} + \frac{\tau - \tau_r}{G_2} + \frac{\tau - \tau_r}{2G_2} \lg \left(\frac{AB}{2} G_2 t \right). \quad (7.32)$$

Если же деформация превышает указанный выше предел $\gamma \geq \gamma_{\text{пр}}$, то деформация развивается во времени по более сложному

закону; при этом в пределе при $t \rightarrow \infty$ деформация примет конечное значение

$$\gamma_{\infty} = \frac{\tau}{G_1} + \frac{\tau - \tau_T}{G_2}. \quad (7.32')$$

Как видно, согласно модели Муроямы в отличие от традиционных моделей получаем логарифмический, а не экспоненциальный закон деформирования. Соответствующая кривая ползучести представлена на рис. 7.7, б.

Модели грунта, исходящие из предположения, что упругие элементы подчиняются закону Гука, а вязкие являются нелинейными, определяемыми исходя из теории Эйринга, были предложены также Христинсоном, Абдель Хади и др. Эти модели отличаются от модели Муроямы иной комбинацией упругих и вязких элементов.

Попытку получить модель, отображающую структурные процессы в грунте при его деформировании, сделал А. Я. Будин («Тонкие подпорные стенки» 1974). В предложенной им модели нагрузка передается через упругий элемент H , последовательно соединенный с вязким элементом N и некоторым нелинейно-деформируемым структурным элементом S (рис. 7.8). Последний обладает той особенностью, что отображает изменение ориентации частиц грунта в процессе деформирования, в соответствии с чем изменяется и скорость деформации; изменение ориентации моделируется перекашивающимся устройством структурного элемента.

Вязкий элемент подчиняется закону Ньютона $\tau_N = \eta \dot{\gamma}_N$. Деформация структурного элемента описывается нелинейной зависимостью

$$\gamma_s = \gamma^* \operatorname{th}(\tau_s t / \eta_s),$$

где $\gamma^* = \gamma^p / \sin v_s$, причем γ^p — относительный сдвиг, отвечающий полному завершению перекомпоновки структуры; v_s — предельный угол перекашивания структурного элемента S . В модель включены также два сен-венановых (точнее — кулоновых) элемента SV_1 и SV_2 с пределами текучести $\tau_{T(1)}$ и $\tau_{T(2)}$.

Уравнение модели получено из условия $\gamma = \gamma_s + \gamma^N$ и $\tau = \tau_s = \tau^N$. При нагрузке $\tau < \tau_{T(1)}$ ползучесть вообще отсутствует; при $\tau > \tau_{T(1)}$ развивается затухающая ползучесть, связанная с переориентацией частиц грунта:

$$\gamma = \gamma^* \operatorname{tg} \left\{ [(\tau - \tau_{T(1)}) t] \frac{1}{\eta_s} \right\}. \quad (7.32'')$$

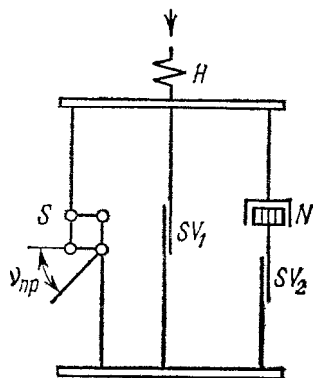


Рис. 7.8. Модель Будина, учитывающая структурные изменения грунта

Затухающая ползучесть, описываемая этим выражением, прекращается по завершении переориентации частиц ($v=v_{np}$) и дальнейшее деформирование может происходить в виде установившегося течения

$$\tau = \tau_{\tau(2)} + \tau_{\tau(1)} + \eta \dot{\gamma} \quad (7.33)$$

при условии, что $\tau_{\tau(1)} < \tau < [\tau_{\tau(1)} + \tau_{\tau(2)}]$.

Заключение. В заключение еще раз подчеркнем, что механические модели могут дать схематизированное и лишь качественное отображение реальных реологических процессов, происходящих в грунтах. Количественного же соответствия с опытными данными модели, как правило, не дают. Одной из причин такого несоответствия является то обстоятельство, что большинство уравнений, выведенных на основе моделей, приводят только к экспоненциальному виду кривых ползучести, что вытекает из самого вида исходного дифференциального уравнения (7.13).

§ 7.3. ТЕОРИЯ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Линейно-наследственная ползучесть. В предыдущем параграфе было показано, что дифференциальное уравнение деформирования (7.1) можно заменить интегральными соотношениями (7.27) и (7.28) с ядрами $K(t-v)$ и $R(t-v)$ в виде экспоненциальных функций или сумм этих функций. Однако заранее заданный (экспоненциальный) вид уравнения деформирования резко ограничивает пределы его применения. В то же время интегральное уравнение деформирования можно получить более общим путем, причем в этих случаях ядра $K(t-v)$ и $R(t-v)$ могут иметь любой вид в соответствии с опытными данными для конкретного материала.

Такую форму закона деформирования называют законом наследственной ползучести Больцмана — Вольтерры. В основу вывода этого закона положен принцип суперпозиции (наложения), согласно которому деформация в какой-либо момент времени t , вызванная нагрузками, приложенными в предшествующие моменты v , равна сумме деформаций, которые развились бы ко времени t , когда каждая из нагрузок действовала бы независимо от других. Иными словами, деформация в данный момент зависит не только от величины напряжения, действующего в этот момент, но и от истории предшествующего деформирования, как бы наследуя влияние действующего ранее напряжения. Отсюда произошло и название теории.

Пусть в момент времени v к телу приложена нагрузка $\tau(v)$, действующая в течение небольшого интервала времени Δv и вызвавшая деформацию $\gamma(v)$. Деформация в произвольный момент времени $t > v$ будет пропорциональна напряжению $\tau(v)$, длительности его действия Δv и некоторой функции $K(t-v)$, зависящей от свойств тела и от промежутка времени $t-v$, прошедшего с момента v приложения нагрузки по момент t , для которого определяется деформация $\gamma(t)$. Если, кроме того, в рассматриваемый момент t на тело

действует изменяющееся во времени напряжение $\tau(t)$, то оно вызовет мгновенную деформацию $\gamma = \tau(t)/G_0$, где G_0 — мгновенный модуль упругости. Исходя из сказанного, полная деформация в момент времени $t > v$ будет равна

$$\gamma = \frac{\tau(t)}{G_0} + \frac{1}{G_0} \tau(v) K(t-v) \Delta v.$$

Если тело подверглось в разные моменты v , воздействию различных напряжений $\tau(v_j)$, действовавших в течение различных промежутков времени Δv_j , то общая деформация в момент t определится согласно принципу наложения суммированием деформаций от воздействия каждого напряжения $\tau(v_j)$. При непрерывном нагружении суммирование заменяют интегрированием, в результате чего получим уравнение ползучести, аналогичное (7.27):

$$\gamma = \frac{1}{G_0} \left[\tau(t) + \int_0^t K(t-v) \tau(v) dv \right]. \quad (7.34)$$

Первый член правой части этого уравнения отображает мгновенную деформацию γ_0 , возникающую в момент t под воздействием изменяющегося во времени напряжения $\tau(t)$, а второй член — развивающуюся во времени деформацию, вызванную переменным во времени напряжением $\tau(v)$.

Решая интегральное уравнение (7.34) относительно напряжения, получают уравнение релаксации, аналогичное (7.28):

$$\tau = G_0 \left[\gamma(t) - \int_0^t R(t-v) \gamma(v) dv \right]. \quad (7.35)$$

Первый член правой части этого уравнения отображает начальное напряжение в момент t , вызванное изменяющейся во времени деформацией $\gamma(t)$, а второй — падение напряжения во времени при изменяющейся деформации $\gamma(v)$.

Соотношения (7.34) и (7.35) являются интегральными уравнениями Вольтерры второго рода. Соотношение (7.35) есть решение уравнения (7.34) относительно τ , и, наоборот, соотношение (7.34) — решение уравнения (7.35) относительно γ .

Ядра интегральных уравнений $K(t-v)$ и $R(t-v)$ есть функции двух переменных: t и v . При этом функция $R(t-v)$ — ядро релаксации — является резольвентой ядра $K(t-v)$ и, наоборот, функция $K(t-v)$ — ядро ползучести — является резольвентой ядра $R(t-v)$. Следовательно, достаточно определить одну из этих функций. Разрешность K и R — $1/\chi$.

Нулевое значение нижнего предела интегрирования в соотношениях (7.34) и (7.35) соответствует началу отсчета от момента нагружения тела, исходя из условия, что в этот момент напряжения и деформации в теле отсутствуют. Если же в момент приложения нагрузки тело находилось в некотором напряженно-деформированном состоянии (что, вообще говоря, имеет место в горных породах),

то нижние пределы интегрирования в соотношениях (7.34) и (7.35) надо принять равными $-\infty$.

При постоянной нагрузке $\tau = \text{const}$ уравнение (7.34) принимает вид

$$\gamma = \frac{\tau}{G_0} \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right], \quad (7.36)$$

а при постоянной деформации $\gamma = \text{const}$ уравнение (7.35) имеет форму

$$\tau = G_0 \gamma \left[1 - \int_0^t R(t) dt \right]. \quad (7.37)$$

Ядра интегрального уравнения. Продифференцировав соотношения (7.36) и (7.37), получим:

$$\frac{1}{G_0} K(t) = \bar{K}(t) = \frac{1}{\tau} \frac{d\gamma}{dt}; \quad G_0 R(t) = \bar{R}(t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\tau}{dt}. \quad (7.38)$$

Следовательно, ядро $\bar{K}(t)$ есть функция, характеризующая изменение во времени скорости деформирования при единичном напряжении $\tau = 1$, а ядро $\bar{R}$ — функция, характеризующая изменение во времени напряжения, необходимого для поддержания постоянной деформации $\gamma = 1$.

Отсюда вытекает простой способ определения функций $\bar{K}(t)$ и $\bar{R}(t)$ на основе опытных данных. Функция $\bar{K}(t)$ характеризует изменение во времени скорости ползучести при единичной нагрузке, а функция $\bar{R}(t)$ — изменение во времени скорости релаксации при единичной деформации.

Функции $K(t)$ и $R(t)$ обладают следующими свойствами: при затухающей ползучести $K(0) = R(0) = \infty$, при $K(\infty) = R(\infty) = 0$. Соответственно интегралы уравнений (7.36) и (7.37) при $t = \infty$ имеют конечные значения. Так, из (7.36) следует, что при $t = \infty$ получим

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = (G_0 - G_{\infty})/G_{\infty},$$

где $G_{\infty} = \tau/\gamma_{\infty}$ — модуль конечной деформации.

При незатухающей ползучести, переходящей при $t \rightarrow \infty$ в течение с постоянной скоростью, $K(\infty) = \text{const}$ и $\int_0^{\infty} K(t) dt = \infty$.

Интегральные уравнения являются весьма универсальными и при соответствующем выборе функций $K(t)$ и $R(t)$ можно получить все рассмотренные выше зависимости упруговязкого закона деформирования.

Нелинейная наследственная ползучесть. Выше мы рассматривали уравнения наследственной ползучести при линейной связи между

напряжением и деформацией. Теория нелинейной наследственной ползучести, разработанная Ю. Н. Работновым, позволяет учитывать нелинейную зависимость между τ и γ . Для этого в интегральные соотношения (7.14) и (7.15) вводятся не сами деформации и напряжения, а их функции $\varphi(\gamma)$ или $f(\tau)$, определяющие вид связи между τ и γ . В зависимости от характера изохронных кривых могут быть три рассмотренных ранее случая (см. рис. 5.6), для которых, как показал М. И. Розовский (см. «Журнал технической физики», вып. 2, 1951, вып. 13, 1955), справедливы следующие соотношения:

1) изохронные кривые τ — γ для различных моментов времени не подобны между собой, каждая из них описывается своим законом $\varphi_2(\gamma)$. Интегральные соотношения имеют для этого случая следующий вид:

$$\gamma = f_0[\tau(t)] + \int_0^t Q(\tau, t-v) dv; \quad \tau = \varphi_0[\gamma(t)] - \int_0^t R(\gamma, t-v) dv. \quad (7.39)$$

Здесь $f_0(\tau) = \gamma_0$ и $\varphi_0(\gamma) = \tau_0$ — начальные деформация и напряжение, $Q(\tau, t-v)$ и $R(\gamma, t-v)$ — ядра интегральных уравнений, являющиеся функцией как времени $t-v$, так и напряжения τ или деформации γ ;

2) изохронные кривые τ — γ подобны для всех моментов времени, за исключением начального. Соответственно функции $\varphi(\gamma)$ и $f(\tau)$ имеют два значения: $\varphi_0(\gamma)$ и $f_0(\tau)$ при $t=0$ и $\varphi(\gamma)$ и $f(\tau)$ при $t>0$.

Интегральные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma = f_0[\tau(t)] + \int_0^t Q(t-v) f[\tau(v)] dv; \quad \tau = \varphi_0[\gamma(t)] - \\ - \int_0^t R(t-v) \varphi[\gamma(v)] dv; \end{aligned} \quad (7.40)$$

3) все изохронные кривые τ — γ для любого момента времени, включая начальный $0 \leq t \leq \infty$, являются взаимоподобными и описываются единой функцией $\varphi(\gamma)$ и $f(\tau)$. Тогда по Ю. Н. Работнову уравнение релаксации имеет вид

$$\tau = \varphi[\gamma(t)] - \int_0^t R(t-v) \varphi[\gamma(v)] dv, \quad (7.41)$$

а уравнение ползучести

$$\varphi(\gamma) = \tau(t) + \int_0^t K(t-\tau) \tau(v) dv, \quad (7.42)$$

или при подобии кривых ползучести

$$\gamma = f[\tau(t)] + \int_0^t Q(t-v) f[\tau(v)] dv. \quad (7.43)$$

При $\tau = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$ эти соотношения принимают следующий вид:

$$\varphi(\gamma) = \tau \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right]; \quad \gamma = f(\tau) \left[1 + \int_0^t Q(t) dt \right]; \quad (7.44)$$

$$\tau = \varphi(\gamma) \left[1 - \int_0^t R(t) dt \right]. \quad (7.45)$$

Соотношение (7.43) можно записать в виде $\gamma = \gamma_0 \bar{Q}(t)$, где $\bar{Q} = 1 + \int_0^t Q(t) d\tau$. Следовательно, решение задач ползучести (как линейных, так и нелинейных) можно получить (при некоторых ограничениях) в виде решений теории линейной или нелинейной упругости, которые рассматриваются как решения для условно-мгновенного состояния; фактор же времени учитывают умножением деформации на функцию времени $\bar{Q}(t)$.

Ядра интегральных уравнений $R(t)$ и $K(t)$ в соотношениях (7.41) — (7.45) являются взаимными резольвентами:

$$K(t) = \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \varphi(\gamma); \quad R(t) = - \frac{1}{\varphi(\gamma)} \frac{d\tau}{dt}. \quad (7.46)$$

Ядро $Q(t)$ не является резольвентой $R(t)$; его выражают формулой

$$Q(t) = \frac{1}{f(\tau)} \frac{d\gamma}{dt} = K(t) \frac{\tau}{f(\tau)} \frac{1}{\varphi'(\gamma)}. \quad (7.47)$$

Например, при степенном виде функций $\varphi(\gamma) = A_0 \gamma^m$ и $f(\tau) = (\tau/A_0)^{1/m}$ получим следующие значения ядер:

$$K(t) = \frac{A_0 m \gamma^{m-1}}{\tau} \frac{d\gamma}{dt}; \quad Q(t) = \left(\frac{A_0}{\tau} \right)^{1/m} \frac{d\gamma}{dt}; \quad R(t) = - \frac{1}{A_0 \gamma^m} \frac{d\tau}{dt}.$$

Хотя вид функции $K(t)$ несколько сложнее функции $Q(t)$, но пользование соотношением (7.42) иногда бывает более удобным.

Отметим, что вместо функций K, R, Q можно пользоваться функциями $\bar{K}, \bar{R}, \bar{Q}$, значения которых при степенной связи между τ и γ будут равны:

$$\bar{K}(t) = \frac{K(t)}{A_0} = \frac{m \gamma^{m-1}}{\tau} \frac{d\gamma}{dt}; \quad \bar{R}(t) = A_0 R(t) = - \frac{1}{\gamma^m} \frac{d\tau}{dt};$$

$$\bar{Q}(t) = \frac{Q(t)}{A_0^{1/m}} = \left(\frac{1}{\tau} \right)^m \frac{d\gamma}{dt}.$$

Применение уравнений ползучести в форме (7.41) — (7.43) значительно упрощает решения задач, поэтому там, где можно допустить хотя бы с большим приближением условие подобия изохронных кривых или кривых ползучести, следует пользоваться этими уравнениями.

Связь между ядрами $K(t, v)$ и $R(t, v)$. Покажем связь между ядрами $K(t, v)$ и $R(t, v)$, используя для этого преобразования, приведенные в работе [34]. Подставив в (7.34) соотношение (7.35), получим интегральное уравнение вида

$$K(t) - R(t) = \int_0^t R(v) K(t-v) dv, \quad (7.48)$$

причем

$$\int_0^t R(\lambda) K(t-v) dv = \int_0^t R(t-v) K(v) dv.$$

Для решения уравнения (7.48) применим преобразование Лапласа:

$$K^*(\lambda) = \int_0^\infty K(\rho) e^{-\lambda \rho} d\rho; \quad R^*(\lambda) = \int_0^\infty R(\rho) e^{-\lambda \rho} d\rho, \quad (7.49)$$

где $\rho = t - v$.

Напомним, что $K^*(\lambda)$ и $R^*(\lambda)$ называют односторонними изображениями функций $K(\rho)$ и $R(\rho)$, а сами функции $K(\rho)$ и $R(\rho)$ — оригиналами изображений $K^*(\lambda)$ и $R^*(\lambda)$, причем эти функции находят обратным преобразованием:

$$f(\rho) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} f^*(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda. \quad (7.50)$$

С учетом (7.49) равенство (7.48) можно записать в следующем виде:

$$K^*(\lambda) - R^*(\lambda) = R^*(\lambda) K^*(\lambda),$$

откуда

$$R^*(\lambda) = \frac{K^*(\lambda)}{1 + K^*(\lambda)}. \quad (7.51)$$

Следовательно, для нахождения вида ядра $R(t, v)$ по известному значению ядра $K(t, v)$ (и наоборот) необходимо по формуле (7.49) определить изображение $K^*(\lambda)$, затем по формуле (7.51) вычислить изображение $R^*(\lambda)$ и далее по формуле (7.50) найти оригинал $R(\rho)$.

Так, если изображение ядра $K(\rho)$ имеет вид

$$K^*(\lambda) = \frac{M\Gamma(\alpha)}{(T\lambda)^\alpha} \quad \text{или} \quad K^*(\lambda) = \frac{a}{\lambda + \beta},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция аргумента α , то оригинал равен соответственно

$$K(t-v) = \frac{M}{T} \left(\frac{t-v}{T} \right)^{\alpha-1} \quad \text{или} \quad K(t-v) = ae^{-\beta(t-v)}.$$

§ 7.4. ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Поскольку вид ядра $K(t, \nu)$ устанавливаются на основе опытных данных, то очевидно, что в качестве этого ядра можно использовать рассмотренные в гл. 5 функции ползучести. Однако все эти функции можно обобщить в виде одного из двух комбинированных ядер.

Комбинированное степенное ядро. Такой вид ядра, предложенный автором, соответствует функции времени (5.21), т. е. определяется выражением

$$K(t - \nu) = \left[\frac{T_2}{T_1 + (t - \nu)} \right]^n. \quad (7.52)$$

В зависимости от значения показателя степени n соотношение (7.52) будет давать частные случаи, рассмотренные ниже.

Степенное ядро интегрального уравнения. При $n = 1 - \alpha$, где $\alpha < 1$; при $T_1 = 0$, $T_2 = (M/T^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ соотношение (7.52) принимает вид степенного ядра Дюффинга — Абеля:

$$K(t - \nu) = \frac{M}{T} \left(\frac{t - \nu}{T} \right)^{\alpha-1}. \quad (7.53)$$

Если это ядро представить в виде (7.42), приняв $\varphi(\nu) = A_0 \nu^m$, то получим

$$\nu^m = \frac{1}{A_0} \left[\tau(t) + \frac{M}{T^\alpha} \int_0^t \frac{\nu(\nu) d\nu}{(t - \nu)^{1-\alpha}} \right]. \quad (7.54)$$

При $\tau = \text{const}$ и при $M = \alpha \delta$ соотношение (7.54) переходит в (5.16).

Резольвента ядра (7.53) имеет вид

$$R(t - \nu) = \frac{1}{t - \nu} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{[M\Gamma(\alpha)]^j}{\Gamma(j\alpha)} \left(\frac{t - \nu}{T} \right)^{j\alpha}, \quad (7.55)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Приблизительно, как показал М. И. Розовский, можно принимать

$$\int_0^t R(t - \nu) d\nu \simeq 1 - \exp \left[-\frac{t^\alpha M}{T^\alpha} \Gamma(\alpha) \right]. \quad (7.56)$$

Гиперболическое ядро. При $n = 1$, $T_1 = T$, $T_2 = \delta$ соотношение (7.52) переходит в гиперболическое ядро Больцмана:

$$K(t - \nu) = \delta [T + (t - \nu)]^{-1}. \quad (7.57)$$

Если это ядро подставить в (7.42), приняв $\varphi(\gamma) = A_0 \gamma^m$, получим

$$\gamma^m = \frac{1}{A_0} \left[\tau(t) + \delta \int_0^t \frac{\tau(v) dv}{T + (t-v)} \right], \quad (7.58)$$

что при $\tau = \text{const}$ дает зависимость (5.19).

Д р о б н о - л и н е й н о е я д р о. При $n=2$, $T_1=T$, $T_2=[T(\delta-1)]^{1/2}$ соотношение (7.52) принимает вид дробно-линейного ядра, предложенного Ю. К. Зарецким:

$$K(t-v) = \frac{T(\delta-1)}{[T + (t-v)]^2}. \quad (7.59)$$

Если это ядро подставить в (7.42), приняв функцию $\varphi(\gamma)$ в виде дробно-линейной зависимости (4.37), то получим

$$\frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma} \gamma = \tau(t) + T(\delta-1) \int_0^t \frac{\tau(v) dv}{[T + (t-v)]^2}. \quad (7.60)$$

При $\tau = \text{const}$ выражение (7.60), решенное относительно γ , переходит в (5.22).

Как видно, ядра (7.53) и (7.57) отображают процессы незатухающей ползучести (точнее, процесс, характеризующийся неограниченным нарастанием деформации, хотя и с уменьшающейся скоростью), а ядро (7.59) — процесс затухающей стабилизирующейся ползучести. Если же в (7.52) положить $n=0$, $T_2=(1/\eta)^{1/n}$, то получим ядро в виде

$$K(t-v) = \frac{1}{\eta} = \text{const}, \quad (7.61)$$

описывающее ньютоново течение с постоянной скоростью.

Комбинированное экспоненциально-степенное ядро. Такой вид ядра, предложенный А. Р. Ржанициным и примененный к мерзлым грунтам С. С. Вяловым, получен путем комбинации экспоненциальной и степенной функций:

$$K(t-v) = (t-v)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-v)} N. \quad (7.62)$$

При $\beta > 0$ ядро описывает затухающую (стабилизирующуюся) ползучесть, при $\beta < 0$ — незатухающую и при $\beta = 0$ — установившееся течение.

Ядро уравнения (7.62) целесообразно использовать, приняв $Q = K$ и $f(\tau) = \tau^{1/m}$. Тогда при $\tau = \text{const}$ получим из (7.44)

$$\gamma = \gamma_0 + N \frac{\tau^{1/m}}{\beta^\alpha} \Gamma(\beta t, \alpha), \quad (7.63)$$

где $\Gamma(\beta t, \alpha) = \int_0^{\beta t} e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ — неполная гамма-функция. Для конеч-

ной, стабилизированной деформации $\Gamma(\beta t, \alpha)$ переходит в полную гамма-функцию $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$.

Экспериментальные и вычисленные по формуле (7.62) значения скорости осадки при вдавливании шарикового штампа в мерзлый грунт (супель, $\theta = -0,4^\circ$) дали весьма хорошее совпадение [3], которое представлено на рис. 7.9.

Резольвента ядра (7.62) имеет следующий вид:

$$R(t-v) = \frac{e^{-\beta(t-v)}}{t-v} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{[aM\Gamma(\alpha)]^j}{\Gamma(j\alpha)} \left(\frac{t-v}{T}\right)^{j\alpha}, \quad (7.64)$$

где $M = \frac{1}{a} NT^\alpha$.

Частный случай (экспоненциальное ядро). Частным случаем ядра (7.62) будет случай при $\alpha=1$, когда ядро можно выразить в виде экспоненциальной функции

$$K(t-v) = Ne^{-\beta(t-v)}, \quad (7.65)$$

а резольвенту — в виде функции

$$R(t-v) = Ne^{-(N+\beta)(t-v)}. \quad (7.66)$$

Эти ядра совпадают с выражениями (7.27) и (7.28), полученными из дифференциального уравнения (7.13). Они описывают процесс затухающего деформирования.

Экспоненциальный вид ядра K и резольвенты R существенно упрощают математическую сторону решения задач, вследствие чего ядра (7.65) и (7.66) часто используется в практических подсчетах.

Однако выше было показано, что ядро в виде экспоненциальной функции плохо соответствует эксперименту.

Лучшее совпадение дает ядро в виде суммы экспоненциальных функций:

$$K(t-v) = \sum_{j=1}^n N_j e^{-\beta_j(t-v)}, \quad (7.67)$$

в котором часто ограничиваются двумя членами:

$$K(t-v) = N_1 e^{-\beta_1(t-v)} + N_2 e^{-\beta_2(t-v)}. \quad (7.68)$$

Однако из-за сложности определения большого количества параметров в (7.67) и даже в (7.68) применение этих ядер ограничено.

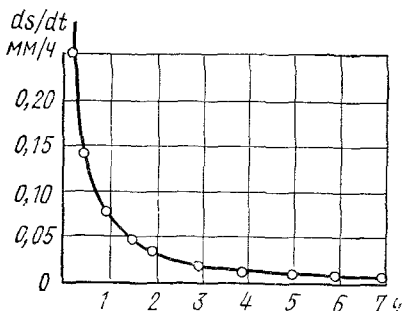


Рис. 7.9. Проверка применимости ядра по формуле (7.62):

точки — опытные значения скорости осадки при вдавливании шарикового штампа в мерзлую супесь (с температурой $-0,4^\circ \text{C}$), сплошная кривая — аналитические подсчеты по формуле (7.62)

Двучленное ядро. Рассматривая процесс как сумму затухающей ползучести γ_I и установившегося течения γ_{II} (см. рис. 5.2), ядро интегрального уравнения можно записать в виде двучлена, причем удобнее оперировать с ядром Q :

$$Q(t-v) = Q_I(t-v) + Q_{II},$$

где $Q_{II} = \text{const}$.

Приняв, например,

$$Q_I = \frac{\alpha \delta}{T} \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha-1}, \quad Q_{II} = \left(\frac{v}{A_0} \right)^{-1/m_1} \left(\frac{v - \tau_r}{\eta_{пл}} \right)^{1/m_2} t$$

и подставив эти выражения в (7.44), получим

$$\gamma = \left(\frac{v}{A_0} \right)^{1/m_1} \left[1 + \delta \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha} \right] + \frac{(v - \tau_r)^{1/m_2}}{\eta_{пл}} t, \quad (7.69)$$

где частными случаями будут $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. Аналогично можем получить формулу γ в виде

$$\gamma = \left(\frac{v}{A_0} \right)^{1/m_1} \left[1 + \delta \ln \frac{t+T}{T} \right] + \frac{(v - \tau_r)^{1/m_2}}{\eta_{пл}} t. \quad (7.70)$$

Такие выражения более универсальны, чем одночленные, однако определения расчетных параметров (число которых увеличивается) и само решение задач резко усложняются, что ограничивает практическое использование этих ядер в виде двучленных функций.

Ядро с переменной вязкостью. Представление ядра интегрального уравнения в виде функции времени t есть не что иное, как косвенный учет изменения вязкости во времени. Переменную вязкость можно учесть также непосредственно введением в ядро значения $\eta(t)$, например в виде функции

$$Q(t-v) = \frac{1}{\eta_{\infty} - (\eta_{\infty} - \eta_0) e^{-(t-v)/T}}. \quad (7.71)$$

Подставив это выражение в уравнение (7.44), при $f(\tau) = \tau$ получим зависимость (5.46).

Ядра с переменными параметрами. Параметры, входящие во все рассмотренные выше ядра $K(t, v)$, являются константами. В то же время у ряда материалов физические свойства изменяются во времени. Типичным представителем таких материалов является бетон, прочностные и реологические свойства которого зависят от его возраста. Учет изменения физико-механических свойств во времени в ряде случаев имеет существенное значение и для грунтов. Это относится к тиксотропному упрочнению, изменению влажности-плотности в результате уплотнения, изменению во времени температуры мерзлых грунтов и т. д.

Теория ползучести, учитывающая изменение свойств материала во времени и названная теорией ползучести стареющих материалов

(теорией упругоползучих тел), была разработана Г. Н. Масловым и Н. Х. Арутюняном [1] применительно к бетону. Для грунтов эту теорию впервые применили А. В. Флорин [40], С. Р. Месчян [23] и др. При линейном законе интегральное уравнение стареющего материала записывают в виде

$$\gamma = \frac{1}{G(t)} \left[\tau(t) + \int_{v_1}^t \tau(v) K(t, v) dv \right], \quad (7.72)$$

где v_1 — возраст материала, в котором произошло нагружение; $G(t)$ — модуль сдвига, изменяющийся в зависимости от возраста материала, так что $\tau(t)/G(t)$ — упругомгновенная деформация в момент t . Ядро $K(t, v)$ принимают равным

$$K(t, v) = -\frac{1}{G(v)} \frac{\partial}{\partial v} \delta(t, v); \quad (7.73)$$

$$\delta(t, v) = \frac{1}{G(v)} + C(t, v). \quad (7.74)$$

В этом выражении $\delta(t, v)$ — полная деформация от единичной нагрузки $\tau=1$, а $C(t, v)$ — мера ползучести, т. е. деформация ползучести в момент t от единичной нагрузки τ , приложенной в момент времени v ; очевидно, что $C(v, v)=0$. По Н. Х. Арутюняну, ядро уравнения (7.72) имеет следующий вид:

$$K(t, v) = G_{\infty} (1 - be^{-av}) \left[\frac{\alpha be^{-av}}{G_{\infty} (1 - be^{-av})^2} + \frac{T}{v^2} + \right. \\ \left. + \left(C_{\infty} \beta + \frac{T\beta}{v} - \frac{T}{v^2} \right) e^{-\beta(t-v)} \right]. \quad (7.75)$$

Как видно, выражение, определяющее ядро стареющего материала, получается весьма сложным, что затрудняет его использование в инженерной практике. Поэтому применять теорию стареющих материалов к грунтам следует только в тех случаях, когда это явление в достаточно сильной степени будет сказываться на процессе деформирования. При этом следует стремиться к упрощению приведенных зависимостей. Например, можно пренебречь изменением модуля мгновенных деформаций, приняв $b=0$, или вообще не учитывать мгновенную деформацию. Можно также принять более простой вид функции $C(t, v)$.

Рассмотрим, например, простейший случай учета переменной температуры мерзлого грунта. Будем исходить из интегрального уравнения (7.42) при $\gamma_0=0$, $\varphi(\gamma)=A_n \gamma^m$, $K(t, v)=\alpha \delta (1-v)^{a-1}$. Тогда

$$\gamma^m = \int_0^t \frac{\alpha \delta}{A_n} \tau(v) (t-v)^{a-1} dv. \quad (7.76)$$

Опыты С. Э. Городецкого [4] (1962) показывают, что параметры m и α от температуры мерзлого грунта не зависят, тогда как величина A/δ является функцией температуры:

$$A/\delta = \bar{a} + \bar{b}\theta^n, \quad (7.77)$$

где θ — температура, °С (без знака минуса).

Считая, что температура изменяется во времени по некоторому закону $\theta(v)$ и подставив (7.77) в (7.76), получим

$$\gamma^m = \int_0^t \frac{\alpha \tau(v)}{\bar{a} + \bar{b}[\theta(v)]^n} (t-v)^{\alpha-1} dv. \quad (7.78)$$

Применение теории наследственной ползучести к грунтам. Сложный вид уравнений теории наследственной ползучести типа (7.74) послужил, по-видимому, причиной критического отношения некоторых исследователей к целесообразности использования этой теории в механике грунтов вообще. Однако следует иметь в виду, что такой сложный вид уравнений вовсе не является обязательным для наследственной теории.

Эта теория просто позволяет учитывать ряд факторов (наследование предшествующего нагружения, переменность нагрузок, разгрузку, старение материалов и т. д.). И, конечно, чем большее количество факторов будет учитываться, тем больше надо вводить параметров и тем сложнее получится исходное уравнение. Если же такие факторы не учитывать, то уравнения наследственной теории приводятся к весьма простому виду. Например, при постоянстве нагрузок уравнения этой теории совпадают с простейшими эмпирическими уравнениями, рассмотренными в гл. 5.

Возможность усложнения этих уравнений при необходимости учета ряда дополнительных факторов является положительной стороной наследственной теории. Вместе с тем следует предостеречь от чрезмерного желания учесть как можно больше различных факторов и составить всеобъемлющее уравнение деформирования. Такое стремление приводит к излишне сложным формулам с большим количеством параметров, определение которых лежит за пределами реальных возможностей.

§ 7.5. ТЕХНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Уравнения технических теорий ползучести. Если в рассмотренных выше теориях ползучести реологические уравнения состояния имели дифференциальную или интегральную форму, то в технических теориях эти уравнения связывают деформацию, ее скорость и время непосредственно, в явной форме. Соответственно реологическое уравнение состояния записывают либо в виде связи между деформацией, напряжением и временем:

$$\gamma = f(\tau, t), \quad (7.79)$$

либо в виде связи между скоростью деформации, напряжением и временем:

$$\dot{\gamma} = f(\tau, t), \quad (7.80)$$

либо в виде связи между скоростью деформации, напряжением и самой деформацией:

$$\dot{\gamma} = f(\tau, \gamma). \quad (7.81)$$

Первое уравнение состояния соответствует так называемой теории старения, второе — теории течения и третье — теории упрочнения. В соотношениях (7.79) и (7.80) время входит в явном виде, что, вообще говоря, является недостатком теории старения и течения, а в соотношении (7.81) — в неявном.

Теория старения. Согласно этой теории, сформулированной Зодербергом в 1936 г., общая деформация рассматривается как сумма упругой деформации γ^e и деформации ползучести (крипа) γ^c , что приводит соотношение (7.79) к виду

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^c = \frac{\tau}{G} + f(\tau) \Phi'(t). \quad (7.82)$$

Уравнение релаксации получается из решения (7.82) относительно τ при $\gamma = \gamma_0 = \tau_0/G = \text{const}$:

$$\tau = \tau_0 - G f(\tau) \Phi'(t). \quad (7.83)$$

Функция $\Phi'(t)$, характеризующая замедление роста деформации во времени, по существу, отображает изменение во времени свойства материала, его «старение». Эта особенность поведения материала и отображена в названии теории. Ее не следует смешивать с явлением старения в физике твердых тел, а также с теорией наследственного старения, рассмотренной выше.

Весьма удобный для расчетов вариант теории старения, предложенный Ю. Н. Работновым [29], основан на рассмотрении изохронных кривых (см. рис. 5.6). Если эти кривые подобны, то уравнение состояния имеет вид

$$\varphi(\gamma) = \tau \psi(t). \quad (7.84)$$

Функцию ползучести $\psi(t)$ принимают такой, чтобы $\psi(0) = 1$; следовательно, функция $\varphi(\gamma)$ описывает изохронную кривую при $t = 0$. Релаксация напряжений описывается зависимостью

$$\tau = \varphi(\gamma) F(t), \quad (7.85)$$

где $F(t) = 1/\psi(t)$.

Как видно, форма уравнения состояния по теории старения (7.84) идентична формуле (5.7). Однако если формула (5.7) отображает лишь факт подобия изохронных кривых, описывая вид этих кривых для данного опыта, то уравнение (7.84) устанавливает связь между деформацией, временем и нагрузкой при любом их сочетании, отображая при этом как процесс ползучести, так

и процесс релаксации. Уравнения теории старения подробно рассмотрены и развиты Н. Н. Малининым [21].

Поверхность в координатах τ , γ , t . Уравнение состояния (7.79) теории старения можно записать как $F(\tau, \gamma, t) = 0$ и графически отобразить в виде трехмерной поверхности (τ, γ, t) . Проекция сечений этой поверхности на плоскости τ — γ , γ — t , τ — t дадут соответственно изохронные кривые, кривые ползучести и кривые релаксации (рис. 7.10).

Графически кривые ползучести и кривые релаксации можно построить по изохронным кривым. Кривые ползучести строят по точкам пересечения изохронных кривых прямой $\tau_j = \text{const}$, а кривые релаксации — по точкам пересечения изохронных кривых прямой $\gamma_j = \text{const}$.

Кривые релаксации можно построить также непосредственно по кривым ползучести, для чего последние следует пересечь прямой $\gamma_j = \text{const}$; точки пересечения этой прямой с кривыми γ — t для разных τ определяют значения точек кривой релаксации τ — t . И наоборот, рассекая кривые релаксации прямой $\tau_j = \text{const}$, можем по точкам пересечения кривых τ — t при разных γ построить кривую ползучести γ — t .

Вид функций $\varphi(\gamma)$ и $\psi(t)$ уравнения состояния (7.84) может быть различным. Наиболее употребительны благодаря хорошему соответствию с опытными данными рассмотренные выше формулы (4.29) и (4.37) для функции $\varphi(\gamma)$ и (5.13), (5.14), (5.15) для функции $\psi(t)$. В этих случаях уравнения ползучести получим в виде выражений (5.16), (5.19) и (5.22). Уравнения релаксации получим, решив согласно (7.85) выражения (5.16), (5.19), (5.22) относительно τ .

Значения τ и γ , входящие в эти уравнения, можно принимать переменными, но с определенными ограничениями, которые будут рассмотрены далее.

Параметрический вид уравнения теории старения. При степенном виде функции $\varphi(\gamma) = A_0$ удобна форма записи деформирования уравнения (7.84), предложенная автором [3]:

$$\tau = A(t) \gamma^m, \quad (7.86)$$

где $A(t)$ — коэффициент деформации, рассматриваемый как переменная во времени величина; при $t=0$ имеем $A(0) = A_0$.

Удобство формулы (7.86) заключается в том, что в качестве функции ползучести используется коэффициент деформации. Это позволяет при решении задач ползучести учитывать фактор времени как в функциональной, так и в параметрической форме. В последнем случае мы можем величину параметра $A(t_j)$ определить

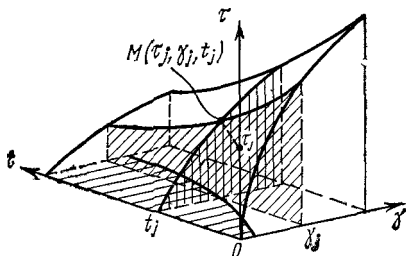


Рис. 7.10. Поверхность (τ, γ, t) по теории старения

непосредственно по изохронной кривой для заданного момента времени t_j .

Этот прием особенно удобен, когда не исследуют развитие деформации в течение всего срока работы грунта, а определяют ее значение в какой-либо конкретный момент времени. Кроме того, запись в форме (7.86) упрощает обработку опытных данных, позволяя определять функции времени непосредственно по изохронным кривым. В этом случае формулу (7.86) приводят к линейному виду

$$\ln \tau = m \ln \gamma + \ln [A(t)].$$

Соответственно этому, когда опытные точки нанесены на график в координатах $\ln \gamma - \ln \tau$, как это

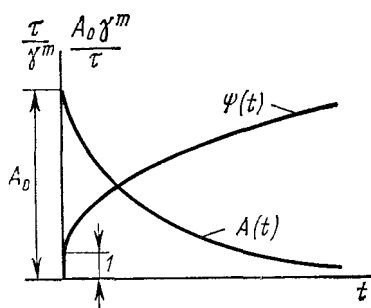


Рис. 7.11. Функция ползучести $\psi(t)$ и коэффициент деформации $A(t)$

показано на рис. 6.6, б, получим семейство прямых, по углу наклона которых определяем параметр m , а по отрезкам, отсекаемым прямым на оси ординат, — величину $A(t)$. Графическое изображение этой функции получаем, построив кривую в координатах $\tau/\gamma^m - t$ рис. 7.11). Дальнейшая обработка сводится к подбору эмпирической формулы для описания полученной кривой $A(t)$.

При степенном законе нарастания деформации во времени параметр $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \frac{1}{\frac{1}{A_0} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha}, \quad (7.87)$$

где $T=1$, $\xi=A_0/\delta$.

График этой функции выпрямляется, если выражение (7.87) представить в виде

$$\ln \left[\frac{1}{A(t)} - \frac{1}{A_0} \right] = \ln \frac{1}{\xi} + \alpha \ln t.$$

Из сопоставления выражений (7.87) и (5.13) видна связь между коэффициентом деформации $A(t)$ и функцией ползучести $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \frac{A_0}{A(t)}. \quad (7.88)$$

Пределы применимости теории старения. Говоря об учете в уравнении теории старения переменной нагрузки, следует иметь в виду, что при таком учете мы делаем существенное допущение. Действительно, согласно этой теории, деформация γ в момент времени t_j не зависит от величины нагрузки в моменты, пред-

шествующие t_j . Однако в случае убывающей нагрузки такое допущение приводит к явно неправдоподобному результату. Так, например, при уменьшении нагрузки на величину $\Delta\tau$ деформация должна бы также уменьшиться на величину $\Delta f(\gamma)$, а при падении напряжения до нуля деформация становится равной нулю, что неверно. Поэтому теория старения может применяться только в случаях, когда нагрузки являются постоянными или возрастают медленно и монотонно.

Теория течения. По этой теории, предложенной Дейвенпортом и и детально разработанной Л. М. Качановым [15], принимают, что полная скорость деформации складывается из скорости упругой деформации и скорости деформации ползучести:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^c. \quad (7.89)$$

Принимая $\dot{\gamma}^e = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt}$ и $\dot{\gamma}^c = f(\tau) \kappa(t)$, получим

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \kappa(t) + \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt}. \quad (7.90)$$

При затухающей ползучести $\kappa(\infty) = 0$, при незатухающей $\kappa(\infty) = \infty$, при установившемся течении с постоянной скоростью $\kappa(\infty) = \kappa_\infty = \text{const}$.

Уравнение (7.90) обобщает уравнение Максвелла (7.9), в которое превращается (7.90) при $f(\tau) = \tau$ и $\kappa(t) = 1/\eta = \text{const}$.

Название «теория течения» принято исходя из аналогии уравнения этой теории с уравнением вязкого течения, хотя в отличие от последнего теория течения рассматривает переменную во времени скорость деформирования. Не следует смешивать название этой теории с аналогичным названием, принятым для одной из теорий пластичности (см. гл. 3); сходство указанных теорий лишь в том, что они обе оперируют не с деформациями, а с их скоростями.

Уравнение ползучести получают путем интегрирования (7.90), а уравнение релаксации — путем его решения относительно τ при $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$.

При $\tau = \text{const}$ уравнение (7.90) совпадает по форме с соотношением (5.9). Различие заключается в том, что соотношение (5.9) описывает лишь вид кривых скоростей ползучести, тогда как уравнение теории течения (7.90) устанавливает связь между скоростью течения, временем и переменной во времени же нагрузкой, описывая как процесс ползучести, так и процесс релаксации.

Поверхность в координатах τ, γ, t . Уравнение состояния по теории течения (7.80), которое можно записать как $F(\tau, \gamma, t) = 0$, графически отображается в виде трехмерной поверхности (τ, γ, t) . Проекция сечения этой поверхности на плоскости $\tau-\gamma, \gamma-t, \tau-t$ отобразятся в виде кривых «напряжение — скорость деформации» (реологические кривые) для разных $\tau = \text{const}$, кривых изменения скоростей деформации для разных t и кривых релаксации (рис. 7.12).

Вид функции $f(\tau)$ принимают согласно формулам (4.61), (4.64) и (4.65), подобно рассмотренным ранее; функция же $\kappa(t)$ может быть принята аналогичной функции (5.12).

Если принять $f(\tau) = (\tau/A_0)^{1/m}$, то уравнение (7.90) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \kappa(t) + \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt}, \quad (7.91)$$

а уравнение релаксации запишется в форме

$$\tau = \tau_0 \left[1 + \frac{1-m}{m} G \frac{\tau_0^{m-1}}{A_0^{1/m}} \Phi(t) \right]^{-\frac{m}{1-m}}, \quad (7.92)$$

где $\Phi(t) = \int_0^t \kappa(t) dt$.

Пределы применимости теории течения. Уравне-

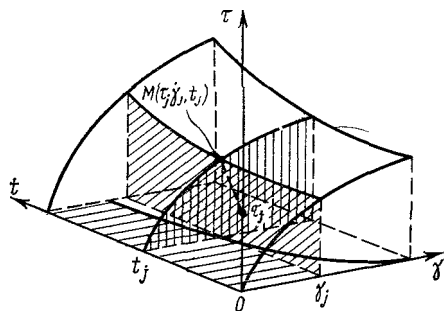


Рис. 7.12. Поверхность $(\tau, \dot{\gamma}, t)$ по теории течения

ние теории течения, так же как и теории старения, включает время в явной форме, вследствие чего эту теорию иногда называют второй теорией старения. Поэтому уравнение указанной теории неинвариантно относительно изменения начала отсчета времени, и этим уравнением рекомендуется пользоваться лишь при плавно изменяющихся нагрузках.

Теория упрочнения. Согласно этой теории, предложенной Надаи и Дейвенпортом, связь

между скоростью деформации ползучести, напряжением и самой деформацией выражают в виде соотношения

$$\dot{\gamma} = \frac{f(\tau)}{\varphi(\gamma)}. \quad (7.93)$$

Из этого соотношения следует, что с ростом деформации ее скорость уменьшается, тело как бы упрочняется, откуда и произошло название этой теории.

Уравнение состояния теории упрочнения (7.81), которое можно записать в форме $\Phi(\tau, \dot{\gamma}, \gamma) = 0$, равнозначной представлению о существовании трехмерной поверхности $(\tau, \dot{\gamma}, \gamma)$. Подчеркнем еще раз, что в выражение (7.81) время в явной форме не входит.

Вид функций, входящих в (7.39), может быть различным. Ю. Н. Работнов и Ф. С. Чуриков предложили принимать $\varphi(\gamma) = \gamma^a$, $f(\tau) = ae^{\tau/b}$, откуда

$$\tau = b \ln \frac{\dot{\gamma} \gamma^a}{a} \text{ при } (\dot{\gamma} \gamma^a) > a, \quad (7.94)$$

$$\tau = 0 \quad \text{при } (\dot{\gamma} \gamma^a) \leq a. \quad (7.95)$$

При $\tau = \text{const}$ получим

$$\gamma = [a(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha+1}} \exp \left[\frac{\tau}{b(\alpha + 1)} \right] t^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (7.96)$$

По Дэвису, $\varphi(\gamma) = \gamma^\alpha$ и $f(\tau) = a\tau^\beta$, в результате чего уравнение (7.93) принимает вид

$$\dot{\gamma} \gamma^\alpha = a\tau^\beta. \quad (7.97)$$

Уравнение ползучести получают интегрированием этого равенства:

$$\int_0^t \gamma^\alpha d\gamma = \int_0^t a\tau^\beta dt. \quad (7.98)$$

При $\tau = \text{const}$ и при условии, что $\gamma^c = 0$ при $t = 0$, получим

$$\gamma = [a(\alpha + 1)\tau^\beta t]^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (7.99)$$

Уравнение релаксации, соответствующее уравнению ползучести (7.93) при $\varphi(\gamma) = \gamma^\alpha$, получают подстановкой в него значения $\gamma = \tau_0/G - \tau/G$. После интегрирования полученного выражения при начальном условии $\tau = \tau_0$ при $t = 0$ получают следующее решение:

$$t = \frac{1}{G^{\alpha+1}} \int_{\tau}^{\tau_0} [\tau_0 - \tau]^\alpha \frac{d\tau}{f(\tau)}. \quad (7.100)$$

Связь между функциями времени по различным теориям. Отметим прежде всего, что при постоянной нагрузке все рассмотренные теории приводят к идентичным результатам. (Решения теории упруговязкого деформирования будут совпадать с решениями по другим теориям только в случае, если функции времени, входящие в уравнения этих теорий, будут иметь экспоненциальный вид.)

Соответственно этому функции времени, входящие в уравнения по указанным теориям, связаны между собой определенными зависимостями:

$$\Phi(t) = 1 + \int_0^t \kappa(t) dt = 1 + \int_0^t Q(t) dt, \quad \psi(t) = 1 + \int_0^t K(t) dt. \quad (7.101)$$

Функция же $A(t)$ из уравнения (7.86) связана с функцией $K(t)$ зависимостью

$$A(t) = \frac{A_0}{\psi(t)} = \frac{A_0}{1 + \int_0^t K(t) dt}. \quad (7.102)$$

Учет разгрузки. Процесс разгрузки можно описать теорией наследственной ползучести.

Допустим, что нагрузка действовала на тело в течение времени от $t=0$ до $t=t_1$ и за это время в нем накопилась деформация $\gamma(t_1)$. Затем произошла разгрузка, и требуется определить величину восстановившейся за период времени от t_1 до t_2 деформации $\gamma^e(t_2)$. Очевидно, что эта величина будет равна (см. рис. 5.3)

$$\gamma^e(t_2) = \gamma(t_1) - \gamma^p - \gamma^p(t_2),$$

где γ^p — невосстановившаяся деформация к моменту t_2 .

Поскольку при разгрузке можно принять линейную связь между напряжением и восстанавливающейся деформацией, ее значение будет равно

$$\gamma^e(t_2) = \frac{\tau}{G} [\tilde{K}(t_1) + \tilde{K}(t_2) - \tilde{K}(t_1 + t_2)], \quad (7.103)$$

где $\tilde{K}(t) = \int_0^t K(t) dt$.

Экспериментальная проверка теорий ползучести. Такую проверку можно выполнить двумя путями. Во-первых, можно провести

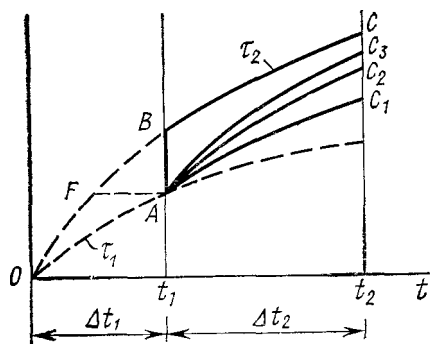


Рис. 7.13. Кривые ползучести при ступенчатом нагружении, построенные по теории старения (C_1), теории течения (C_2), теории наследственной ползучести (C_3)

сопоставительные опыты на ползучесть и релаксацию и, установив закономерность любого из этих процессов, определить аналитически по уравнениям той или иной теории закономерность другого процесса, сравнив его с опытными данными. Для большинства материалов кривые релаксации, построенные по теории старения, лежат выше экспериментальных кривых, по теории течения — ниже, а по теории упрочнения ближе всего соответствуют данным экспериментов.

Во-вторых, можно провести опыты при ступенчато-возрастающей нагрузке и, обработав последние по той или иной теории, сопоставить результаты вычислений с опытными кривыми. Методика опытных данных [21] описана ниже.

Пусть испытания грунта ведут при ступенчато-возрастающих напряжениях $\tau_1, \tau_2, \dots$ (рис. 7.13), прикладываемых в моменты времени $t_1, t_2, \dots$ и действующих в течение произвольных интервалов времени $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$. На первой ступени нагрузки τ_1 все теории (ста-

рения, течения, упрочнения и наследственной ползучести), естественно, приводят к одной и той же кривой ползучести OA .

После приложения второй ступени напряжения τ_2 деформация согласно теории старения мгновенно должна увеличиваться на величину AB и дальше возрастать по тому закону, по которому она развивалась бы, если бы напряжение τ_2 действовало начиная от момента $t=0$; кривая ползучести при второй ступени нагрузки показана на рис. 7.13 отрезком кривой BC .

По теории течения, с возрастанием напряжения от τ_1 до τ_2 увеличивается скорость деформации; в момент t_1 она становится равной той скорости $\dot{\gamma}_2$, которая была бы в этот момент, если бы напряжение τ_2 действовало от $t=0$; иными словами, скорость $\dot{\gamma}_2$ в момент t_2 определяется углом наклона касательной к кривой ползучести OB в точке B . Отсюда кривую ползучести второй ступени по теории течения можно получить (кривая AC_1), если кривую BC опустить параллельно самой себе вниз до совпадения точки B с точкой A .

По теории упрочнения, при возрастании напряжения от τ_1 до τ_2 скорость деформации тела будет обусловлена как напряжением τ_2 , так и деформацией, накопленной к моменту t_1 . Эта скорость определится углом наклона касательной к кривой ползучести от τ_2 в точке F , лежащей на пересечении горизонтальной прямой, проведенной через точку A , и кривой OB . Соответственно кривая ползучести при второй ступени нагрузки AC_2 представляет собой часть кривой ползучести при τ_2 , передвинутую параллельно самой себе так, что точка F совпадает с точкой A .

По теории наследственной ползучести, при возрастании напряжения от τ_1 до τ_2 следует учитывать как изменение скорости деформации тела, так и величину деформации, накопленной от воздействия предшествующего напряжения τ_1 . Соответственно кривую ползучести при второй ступени нагрузки AC_3 можно получить, если отложить вверх от кривой AC_1 ординаты, равные разности ординат кривой AB и кривой OA . Иными словами, отрезки C_1C_3 и AB должны быть равны между собой.

Таким образом, получаем следующий вид кривых ползучести: по теории старения — кривая $OABC$, по теории течения — кривая OAC_1 , по теории упрочнения — кривая OAC_2 , по теории наследственной ползучести — кривая OAC_3 . Аналогичные построения выполняются и для последующих ступеней нагрузок.

Говоря о результатах испытания грунтов при ступенчатом загружении, следует еще раз обратить внимание на то, что эти результаты чаще всего не совпадают с данными испытаний под постоянной нагрузкой — кривые ползучести при ступенчатом загружении, как правило, лежат ниже кривой для $\tau = \text{const}$. Мы отмечали (см. рис. 6.1), что это является следствием повышения сопротивления грунта — его упрочнения в процессе деформирования.

Опыты С. Р. Месчяна [39] показали, что кривые, построенные по теории старения и теории наследственной ползучести, лежат

несколько выше опытных точек, а построенные по теории упрочнения, наоборот, ниже, но близко к опытным данным. В целом же расхождение между кривыми, построенными по различным теориям и опытным данным, оказалось не очень большим. Поэтому все рассмотренные теории можно применять для анализа деформаций в грунтах.

Отметим, что данные ступенчатого нагружения можно обработать и иным путем. Вначале из испытания под постоянной нагрузкой (например, первой ступени) следует определить параметры уравнения деформирования; они должны быть общими для всех теорий.

Рассматривая далее процесс ступенчатого нагружения как нагружение с равномерным возрастанием нагрузки $\tau(t) = vt$, где $v = \Delta\tau/\Delta t$, следует подставить это значение $\tau(t)$ в уравнения деформирования различных теорий и вычислить аналитически закон нарастания деформации. Лучшее совпадение вычисленных и опытных значений будет свидетельствовать о преимуществе той или иной теории.

Пределы применимости различных теорий ползучести. Поскольку все рассмотренные теории ползучести (кроме теории упруго-вязкого деформирования) позволяют получить более или менее удовлетворительное совпадение с данными испытаний, выбор той или иной теории применительно к задачам механики грунтов определяется прежде всего условиями задачи. Если задана постоянная или плавно- и слабоменяющаяся нагрузка, целесообразнее пользоваться простейшими теориями — теорией старения или теорией течения. При этом последнюю теорию предпочтительнее применять в тех случаях, когда целесообразно оперировать со скоростями деформаций, например при рассмотрении процессов течения склонов и откосов и т. д.

Преимущество этих теорий, особенно теории старения, заключается в их простоте и в том, что в расчетах используют первичные кривые ползучести, на основании которых составляют уравнение деформирования и которые отображают в конечном виде все сложные микропроцессы, которые происходят при деформировании грунтов.

Однако при воздействиях существенно изменяющихся во времени нагрузок, в случае необходимости учета разгрузки в условиях сложного (по Ильюшину) нагружения, а также при изменяющихся свойствах грунта следует пользоваться теорией наследственной ползучести.

Что касается теории упрочнения, то она, по-видимому, является наиболее перспективной, хотя и несколько сложнее других. Однако в настоящее время еще не накоплено достаточно опытных данных о закономерностях деформирования грунтов применительно к этой теории.

Уравнение состояния, соответствующее той или иной теории ползучести, рассматривается как физическое уравнение, входящее в систему уравнений теории пластичности (3.78), (3.80) и (3.82) —

(3.83). При использовании теории старения и теории наследственной ползучести применяют уравнения деформационной теории пластичности (3.90), а в случае использования теории течения — уравнения пластического течения (3.102).

§ 7.6. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ

О физических теориях деформирования. Ниже излагается теория течения вязких сред, основанная на анализе движения элементарных частиц (молекул, атомов) в силовом поле. Эта теория была сформулирована Я. И. Френкелем (1945) применительно к течению идеальной, ньютоновой жидкости. Г. Эйринг (1948) разработал так называемую теорию скоростей процессов, исходящую из аналогичных физических представлений, и вывел уравнение течения неньютоновой среды.

Тепловое движение твердых и жидких тел. Как известно, кристаллические твердые тела характеризуются упорядоченным расположением близлежащих атомов и периодической повторяемостью такого расположения на больших расстояниях, т. е. у этих тел наблюдается ближний и дальний порядок. В жидких же телах упорядоченно расположены лишь близлежащие молекулы, т. е. у этих тел наблюдается ближний порядок.

Упорядоченность и твердых и жидких тел, однако, не является идеальной. В кристаллической решетке твердого тела имеются несовершенства, дефекты в виде отсутствия атома в узле решетки или, наоборот, вклинивания лишнего атома в пространство между узлами. Узел решетки с отсутствующими атомами называется вакансией или (по Френкелю) «дыркой», а вклинившийся в междоузлие атом — дислоцированным. Дефекты же, обусловленные указанными несовершенствами кристаллической решетки или нарушениями правильного чередования атомных плоскостей, называются дислокациями. Пластическая деформация твердого тела обусловлена перемещением дислокаций, а ползучесть — накоплением во времени этих перемещений.

Дефектами структуры жидкости являются не занятые молекулами пустоты, размеры которых соизмеримы с размерами молекул. Эти пустоты способны спонтанно расширяться и закрываться в одном месте, возникая в другом, т. е. как бы перемещаться аналогично перемещению дырок в кристаллической решетке твердого тела. Иными словами, молекулы жидкости непрерывно перемещаются, находясь в тепловом движении. Совершая колебательные движения с частотой $1/t_0$ около положения равновесия, молекулы через некоторое время $t \gg t_0$ перемещаются в новое положение равновесия и продолжают колебаться вокруг него; это перемещение молекул происходит скачками. При отсутствии силового воздействия скачки возможны во всех направлениях и движение частиц не имеет направленного характера. При действии же напряжения в течение $t > t_0$ возникает направленное перемещение частиц. Это перемещение молекул и рассматривается как течение.

Таким образом, течение жидкостей и ползучесть твердых тел имеют одну природу — и то и другое является внешним проявлением направленного движения элементарных частиц (молекул, атомов) из-за наличия дефектов в строении тел. Но поскольку связи между молекулами жидкости значительно слабее, чем между атомами в кристаллической решетке твердого тела, то подвижность первых во много раз больше. Соответственно течение у жидкости возникает при воздействии самой незначительной нагрузки и протекает с большей скоростью, чем у твердого тела.

Энергия активации. Рассмотрим движение единичной молекулы в силовом поле. Это поле можно представить как совокупность потенциальных ям, которые разделены между собой пере-

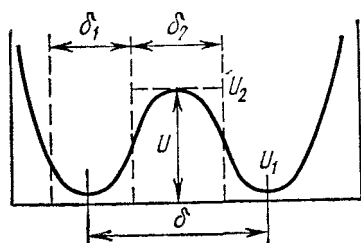


Рис. 7.14. Схема силового поля

валами; расстояние между ямами δ соизмеримо с расстояниями между соседними частицами (рис. 7.14). Устойчивое положение частицы всегда связано с минимумом потенциальной энергии. Этой энергией U_1 будет обладать молекула, находящаяся в потенциальной яме. Молекула же, находящаяся на вершине перевала, обладает максимальной энергией U_2 . Следовательно, для

того чтобы молекула могла перескочить из одной ямы в другую, она должна за некоторое время t_0 приобрести кинетическую энергию $U = U_2 - U_1$.

Перескочив за время t_0 на расстояние δ в другую яму, молекула отдает приобретенную энергию U окружающим частицам и вновь застревает в новой яме, где остается на некоторое время t . Энергия молекулы U равна в этом случае высоте потенциального барьера, который она должна преодолеть. Эту энергию называют энергией активации; она обусловлена связью молекулы с соседними частицами и определяется работой, затрачиваемой молекулой на то, чтобы раздвинуть окружающие молекулы и перейти в соседнее положение.

Закон распределения Больцмана. Для установления закономерности поведения среды, состоящей из множества частиц (атомов, молекул), применяют методы статистической физики. Это позволяет описать макропроцессы на основании данных о законах движения отдельных частиц микроструктуры. Так, распределение элементарных частиц по величине их энергии в силовом поле при тепловом равновесии описывается законом распределения Больцмана

$$N = N_0 e^{-U/k\Theta}, \quad (7.104)$$

где U — энергия активации, Дж; Θ — абсолютная температура, К; N — среднее число активированных частиц в единице объема; N_0 — число активированных частиц при $\Theta \rightarrow 0$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К =

$= 3,29 \cdot 10^{-24}$ кал/К — постоянная Больцмана. Эта постоянная устанавливает связь между энтропией S системы и термодинамической вероятностью p данного макросостояния системы $S = -k \ln p$.

Закон Больцмана можно рассматривать как закон вероятности, определяющий относительное количество частиц, потенциальная энергия которых U_j заключена в пределах $U \leq U_j \leq (U + \Delta U)$.

Молекулярно-кинетическая теория вязкости. Принимая, что среднее время пребывания частицы в состоянии равновесия t_s обратно пропорционально числу активированных частиц N , из (7.104) получим

$$t_s = t_0 e^{U/k\Theta}, \quad (7.105)$$

где t_0 — период колебания молекулы около временного положения равновесия. Можно показать, что время t_s соответствует времени релаксации T_r , которое является временем «оседлой жизни» молекул.

Величину, обратную t_s , называют подвижностью частиц $q = \delta^2/6k\Theta t_s$; она характеризует беспорядочное тепловое (броуново) движение молекул, причем связь этого движения с диффузией определяется соотношением $q = D/k\Theta$, где D — коэффициент диффузии.

Рассматривая ньютонову схему плоскопараллельного движения двух слоев жидкости (см. рис. 4.10) и принимая, что молекулы перескакивают через энергетический барьер под воздействием сдвигающей силы $F = \tau \delta^2$, где τ — сила, действующая на одну частицу площадью δ^2 , скорость движения жидкости можно выразить с помощью соотношения $v = qF$.

Учитывая, что согласно (4.50) $dv/dy = v/\delta = \tau/\eta$, получим следующее выражение для коэффициента вязкости:

$$\eta = Ae^{U/k\Theta}, \quad (7.106)$$

где $A = 6k\Theta t_0/V$; $V = \delta^3$ — молекулярный объем. Обычно принимают, что $A = \text{const}$, поскольку этот параметр зависит от Θ в значительно меньшей степени, чем множитель $e^{U/k\Theta}$.

Выражение (7.106), полученное Я. И. Френкелем (1945)*, раскрывает физическую сущность коэффициента вязкости, зависящего от энергии активации, температуры и размера частиц. При этом предполагается, что размеры частиц δ' , δ'' , δ''' сопоставимы с расстоянием δ между соседними частицами $\delta' = \delta'' = \delta''' \approx \delta$.

Теория течения неньютоновой среды. Эту теорию, разработанную Г. Эйрингом, называют теорией скоростей процессов, вследствие того что она исходит из анализа абсолютных скоростей химических реакций, уравнение которых по Авенариусу имеет вид, аналогичный (7.105).

* Отметим, что Я. И. Френкелем дан также другой вариант вывода формулы вязкости, отличающийся от (7.106) на величину постоянного множителя.

Формула (7.105) отражает беспорядочное движение молекул, равно возможное в любом направлении, формула же (7.106) выведена из предположения, что молекулы под воздействием внешней силы движутся упорядоченно. Однако приложение внешней силы к телу не изменяет величину энергии активации, чем и обуславливается независимость коэффициента вязкости идеальной ньютоновой жидкости от этой силы. У структурированной же неньютоновой среды энергия активации будет изменяться при приложении силы.

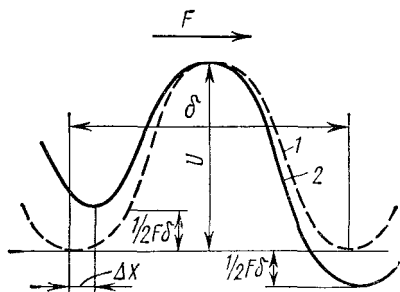


Рис. 7.15. Влияние сдвигающей силы на энергетический барьер:

1 — при отсутствии силы F ; 2 — при наличии силы F

Действительно, молекулы такой среды, перемещающиеся под воздействием силы F из потенциальной ямы на вершину барьера (рис. 7.15), совершают работу, $\delta F/2$. Это означает, что они приобретают дополнительную энергию $U^* = \delta F/2$, на величину которой уменьшится высота энергетического барьера. Следовательно, энергия активации, необходимая для движения, становится равной $U = U_0 - U^* = U_0 - \delta F/2$.

Очевидно, что при движении в обратном направлении высота барьера увеличится на величину $U = U_0 + \delta F/2$.

Если обозначить число «перескоков» молекулы через энергетический барьер за 1 с в том и другом направлении через $\vec{j}_s$ и $\overleftarrow{j}_s$, то скорость движения жидкости будет равна разности: $\dot{\gamma} = \vec{j}_s - \overleftarrow{j}_s$. В свою очередь число «перескоков» j_s можно рассматривать как удельную скорость движения частиц, обратно пропорциональную времени t_s нахождения этих частиц в положении равновесия:

$$j_s = j_0 e^{-U/k\theta}, \quad (7.107)$$

где $j_0 = X/t_0 = Xk\theta/h$; $h = 16,625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; X — коэффициент концентрации частиц, определяющий число перемещающихся молекул.

Подставив в выражение (7.107) значения $U = U_0 \pm \delta F/2$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = \vec{j}_s - \overleftarrow{j}_s &= j_0 \left[\exp \left(-\frac{U_0 - \frac{1}{2} \delta F}{k\theta} \right) - \exp \left(-\frac{U_0 + \frac{1}{2} \delta F}{k\theta} \right) \right] = \\ &= j_0 e^{-U_0/k\theta} (e^{\delta F/k\theta} - e^{-\delta F/k\theta}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $e^x - e^{-x} = 2 \operatorname{sh} x$, окончательно получим

$$\dot{\gamma} = 2j_0 e^{-U_0/k\theta} \operatorname{sh} \frac{\tau V}{2k\theta}, \quad (7.108)$$

где $j_0 = Xk\theta/h$ — удельная скорость колебания молекулы около временного положения равновесия, 1/с; X — функция концентрации

молекул; k — постоянная Больцмана, Дж/К; h — постоянная Планка, Дж·с; Θ — абсолютная температура, К; U_0 — энергия активации, сообщаемая одной молекуле, 1/Дж; V — молекулярный объем, см³; δ — среднее расстояние между последовательными положениями равновесия молекул, см; $\tau = F/\delta^2$ — сила, действующая на единицу площади, Па.

Если обозначить $\tau^* = 2k\Theta/V$, $\dot{\gamma}^* = 2j_0 e^{-U_0/k\Theta}$, формула (7.108) получит вид, аналогичный (4.64):

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^* \operatorname{sh} \left(\frac{\tau}{\tau^*} \right). \quad (7.109)$$

Формула (7.108) описывает нелинейное течение, характерное для структурированных, неньютоновых жидкостей, оказывающих увеличивающееся с ростом напряжения сопротивление сдвигу. Вязкость такой жидкости является переменной величиной и может быть выражена формулой (4.66). (Иногда энергию активации относят не к одной молекуле, а к одному молю. В этом случае величина $U_0/k\Theta$ принимает значение $\bar{U}_0/R\Theta$, где $R = k/N = 8,31 \cdot 10^{-3}$ Дж/(кмоль·К) — газовая постоянная, $N = 6,02 \cdot 10^{26}$ кмоль⁻¹ — число Авогадро, $\bar{U}_0 = UN$ Дж/моль.)

Частные случаи формулы (7.108). Если приложенное напряжение настолько мало, что $\tau V \ll 2k\Theta$, то, учитывая, что при $x \ll 1$ справедливо приближение $\operatorname{sh} x \approx x$, формула (7.108) примет вид, соответствующий ньютонову закону течения:

$$\dot{\gamma} = \tau j_0 \frac{V}{k\Theta} e^{-U_0/k\Theta}. \quad (7.110)$$

Значение коэффициента вязкости в этом выражении равно

$$\eta = \frac{k\Theta}{j_0 V} e^{U_0/k\Theta}, \quad (7.111)$$

что совпадает с формулой (7.106) Френкеля, отличаясь от последней лишь величиной постоянного множителя A .

Для тех сред, течение которых происходит под воздействием достаточно больших напряжений, когда $\tau V/2k\Theta \gg 1$, формула (7.108), учитывая, что при $x \gg 1$ справедливо приближение $\operatorname{sh} x \simeq \frac{1}{2} e^x$, примет вид

$$\dot{\gamma} = j_0 e^{-U_0/k\Theta} e^{\tau V/2k\Theta} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^* e^{\tau/\tau^*}. \quad (7.112)$$

Анализ функций (7.109) и (7.112) был проведен в § 5.4 (см. рис. 5.11), где было показано, что приближение (7.112) вполне приемлемо при $\tau/\tau^* \geq 1,3$; даже при $\tau/\tau^* = 1,0$ оно дает небольшие расхождения.

Формула (7.112) и ее варианты широко применяют для описания процессов установившегося течения самых различных материалов — от вязких жидкостей и дисперсных систем до пластмасс и металлов. При этом, рассматривая течение как проявление сум-

марного воздействия различных механизмов деформирования, Казман (1941) предложил выражать зависимость (7.112) в виде суммы n -го количества физических характеристик.

Молекулярно-кинетическая теория разрушения. Молекулярно-кинетические представления применяют также для описания процесса длительного разрушения твердых тел [30]. Согласно этим представлениям, твердое тело разрушается под воздействием внешней силы в результате разрыва межатомных связей. При этом внешняя сила сама этих разрывов не вызывает, но активирует термофлуктуационный процесс, приводящий к разрыву связей между соседними атомами.

Напомним, что под флуктуацией понимают отклонение энергии атома от среднего значения. Вероятность флуктуации подчиняется закону распределения Больцмана. Если обозначить энергию атома в момент флуктуации через $E_{\text{фл}}$, то среднее время $t_{\text{фл}}$ между двумя последовательными флуктуациями будет выражаться зависимостью, аналогичной (7.105), а именно: $t_{\text{фл}} = t_0 \exp(E_{\text{фл}}/k\Theta)$, где t_0 — период тепловых колебаний атома, равный $t_0 = 10^{-13}$ с.

Таким образом, согласно кинетической теории прочности, твердые тела разрушаются в результате последовательного распада межатомных связей и постепенного нарушения сплошности. Соответственно принимают, что время до разрушения t_p (долговечность материала) определяется тем же выражением, что и время флуктуации, т. е.

$$t_p = t_0 e^{U_p(\tau)/k\Theta}, \quad (7.113)$$

где $U_p(\tau)$ — энергия активации разрыва напряженной связи между двумя атомами, зависящая от величины напряжения τ , причем $U_p \geq E_{\text{фл}}$.

Течение дисперсных сред. Н. В. Михайлов и П. А. Ребиндер (1955) применили молекулярно-кинетические схемы Френкеля — Эйринга к дисперсным системам. Ими было принято, что коллоидные частицы, образующие пространственную структурную сетку, ведут себя аналогично молекулам жидкости. Однако закономерность поведения дисперсной среды несколько отличается от зависимости (7.108).

Согласно (7.108), связь между скоростью течения $\dot{\gamma}$ и напряжением τ отображается плавной кривой рис. 4.9, б, тогда как у кристаллов, характеризующих реальные структурированные среды, имеются перегибы, как было показано на рис. 4.11.

Рассматривая эффективную вязкость $\eta(\tau)$ как итоговую характеристику процессов разрушения и восстановления структуры, эти авторы предложили следующее выражение:

$$\eta(\tau) = \eta_m + (\eta_0 - \eta_m) \frac{\tau/\tau^*}{\text{sh}(\tau/\tau^*)}, \quad (7.114)$$

где η_0 и $\eta_m = \eta_\infty$ — наибольшее при $t \rightarrow 0$ и наименьшее при $t \rightarrow \infty$ значения вязкости. При $\tau/\tau^* \ll 1$ получим $\eta(\tau) \simeq \eta_0$, где η определяют по выражению (7.111).

Применение теории скоростей к грунтам. В § 7.2 мы отмечали, что теория скоростей Эйринга была использована Муроямой и Шибатой, Христинсоном и другими учеными при составлении механических моделей грунта. Эти авторы вязкое поведение грунта объясняли «перескоками» молекул воды в связях между твердыми частицами грунта. Исходя из этого, к вязким элементам модели они применяли уравнение вида (7.108), тогда как для упругих по-прежнему использовали закон Гука.

Однако в отличие от уравнения Эйринга, по предположению Муроямы и Шибаты, количество активируемых молекул зависит от того, превосходит или нет действующее напряжение предел текучести τ_t .

Интересную попытку применения больцманова закона распределения для описания смещения грунтовых частиц и построения на этой основе уравнения деформирования грунта сделал М. Н. Гольдштейн в докладе на V Международном конгрессе по механике грунтов (1961).

Другие исследователи (Андерслэнд и Аккили, Митчелл, Кампанелла и Сингх) применяли к грунтам формулу (7.108) непосредственно, считая, что деформации грунта обуславливаются «перескоками» молекул межчастичных связей грунта на участках контактов между минеральными частицами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Ползучесть грунта как термоактивированный процесс. Изложенные представления дают возможность рассматривать процесс ползучести грунта как термоактивированный. Применяя к грунтам уравнение течения Эйринга (7.108), Дж. Митчелл и его соавторы [53, 58] с этих позиций исследовали такие вопросы, как величина энергии активации у грунтов, влияние температуры на процесс деформирования грунта, прочность и количество межчастичных связей и др.

Для анализа результатов испытания грунтов на ползучесть на приборе трехосного сжатия ими была использована зависимость скорости течения от температуры грунта, в виде (7.112), а также выражение

$$\ln \frac{\dot{\gamma}}{\Theta} = \ln \frac{kX}{h} - \frac{U_0 - 0,5V\tau}{k} \frac{1}{\Theta}, \quad (7.115)$$

которое получено логарифмированием (7.112). Авторы показали, что опытные точки хорошо ложатся на прямую, построенную в координатах $\ln(\dot{\gamma}/\Theta) - 1/\Theta$. Угол наклона этой прямой определяет с учетом масштаба графика величину энергии активации, равную

$$\frac{1}{k} (U_0 - 0,5V\tau) = \frac{d \ln(\dot{\gamma}/\Theta)}{d(1/\Theta)}.$$

Для исследуемых грунтов (иллита водонасыщенного нарушенной структуры $W=30-43\%$, иллита высушенного до воздушно-сухого состояния, морского ила ненарушенного сложения, $W=$

=69,5—74% и сухого песка) величина энергии активации U составляет 25—40 ккал/моль ($105 \cdot 10^3$ — $168 \cdot 10^3$ Дж/моль). Примерно такие же величины U (от 23 до 32 ккал/моль) были получены некоторыми другими авторами для ненарушенной и нарушенной озерной глины (Христинсон и Ву) и аллювиальной глины с влажностью 58—92% (Мурояма и Шибата). Для мерзлого же грунта, по данным Андерслэнда и Аккили, $U=94$ ккал/моль. Для сопоставления приведем имеющиеся в литературе значения U , ккал/моль, для различных веществ: воды — 4—5, пластмассы — 7—14, льда — 20—28, грунтов — 23—40, металла — 50, бетона — 54, мерзлого грунта — 90—95.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что величина энергии активации, отнесенная к одному молю, оказалась не зависящей от влажности грунта. Более того, она примерно одинакова у водонасыщенного грунта (иллит, $W=30$ —43%) и у этого же грунта, высушенного до воздушно-сухого состояния ($W=1\%$); в первом случае $U=23$ —40 ккал/моль, во втором $U=37$ ккал/моль. Такого же порядка (25 ккал/моль) значение U было получено для сухого песка.

Указанное обстоятельство, а также достаточно высокое значение U у грунтов дали основание Митчеллу предположить, что межчастичные связи в грунте обусловлены контактными силами, действующими между твердыми частицами. Число таких контактов зависит от толщины пленок связанной воды (в чем и проявляется ее влияние на прочность межчастичных связей), а число связей в контактах зависит от величины эффективного уплотняющего давления.

По этому вопросу имеется и другая точка зрения. Так, Р. Пуш в докладе на VII Международном конгрессе по реологии (Швеция, 1976) отмечал, что напряженное состояние грунтового скелета весьма неоднородно — в нем всегда имеются ослабленные места, где и происходит разрушение структуры. Вследствие этого энергия разрушения оказывается значительно меньше подсчитанной Митчеллом исходя из допущения о равномерном ее распределении. По подсчетам Р. Пуша она составляет примерно 10 ккал/моль, что примерно соответствует энергии водородных связей. Отсюда делается вывод, что в основном сдвигу сопротивляются не сухие контакты, а водная пленка.

Вместе с тем не следует преувеличивать роль водородных связей и тем более сводить процесс деформирования грунта к движению водной пленки. В действительности этот процесс вызывается смещением отдельных частиц и их агрегатов по разделяющей их пленке связанной воды. Сопротивление же смещению оказывают силы взаимосвязи между частицами, разделенными пленками воды.

Несмотря на большую пользу анализа поведения грунтов, выполненного на основе уравнения Эйринга (7.108), стоит вопрос о правомочности применения этого уравнения для описания процесса ползучести грунта в целом. Действительно, это уравнение приме-

нимо лишь для стадии установившегося течения, тогда как ползучесть грунта развивается с переменной скоростью.

Это обстоятельство отмечалось также Митчеллом и его соавторами [58] (1969), которые нашли необходимым ввести в уравнение (7.108) эмпирическую функцию времени. Неприемлемость уравнения Эйринга для описания ползучести грунтов вполне объяснима, так как оно было выведено применительно к процессу течения вязкой жидкости, у которой перемещение элементарных частиц не сопровождается структурными изменениями — оно происходит непрерывно и в одном режиме. Деформирование же грунтов развивается прежде всего в результате смещения самих минеральных частиц, что вызывает существенные структурные изменения грунта. Поэтому применять положения кинетической теории для анализа грунтов возможно только исходя из учета указанных особенностей их деформирования. Такая теория изложена в гл. 10.

ГЛАВА 8

ТЕОРИЯ КОНСОЛИДАЦИИ ГРУНТОВ

§ 8.1. ОБЪЕМНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ

Эффективные и нейтральные напряжения. Давление, передаваемое на водонасыщенный грунт, как говорилось, распределяется между водой, содержащейся в его порах, и грунтовым скелетом, т. е. минеральными частицами, окруженными пленкой воды и связанными между собой в единый каркас. Напряжение, возникающее в поровой воде, является гидростатическим, оно не вызывает заметного сжатия скелета грунта и не влияет на сопротивление грунта сдвигу.

Величину избыточного по сравнению с атмосферным напряжения в поровой воде называют нейтральным давлением и обозначают u или p_w . Значение его может быть как положительным, так и отрицательным. Если нейтральное давление положительно, то по Терцаги его называют поровым давлением воды.

Сжимающее напряжение, возникающее в грунтовом скелете, называют эффективным давлением и обозначают σ' или p' . В результате перераспределения давления в процессе консолидации между поровой водой и грунтовым скелетом величины σ' и u изменяются во времени, но сумма их при постоянной внешней нагрузке всегда постоянна; для полностью водонасыщенного грунта (в условиях одномерной задачи) она равна

$$\sigma_z = \sigma'_z + u = \text{const.} \quad (8.1)$$

Для неполностью водонасыщенного грунта по Бишопу имеем

$$\sigma'_z = \sigma_z - [u_w + (1 - \kappa)(u_a - u_w)], \quad (8.1')$$

где u_w — давление в поровой воде; u_a — давление воздуха в порах грунта; κ — коэффициент, определяемый опытным путем. При полной водонасыщенности (практически при $G > 90\%$) $\kappa = 1$ и зависимость (8.1') переходит в (8.1).

Для сложного напряженного состояния зависимость (8.1) имеет вид

$$T = T_{\sigma'} + T_u, \quad (8.2)$$

где $T_{\sigma'}$ — тензор эффективных напряжений; T_u — тензор нейтральных напряжений.

Тензор $T_{\sigma'}$ в свою очередь можно разложить на шаровой тензор эффективных напряжений $T_{\sigma'}^0$, вызывающий объемную деформацию скелета грунта, и девиатор эффективных напряжений $D_{\sigma'}$, вызывающий сдвиговую деформацию:

$$T_{\sigma'} = T_{\sigma'}^0 + D_{\sigma'}. \quad (8.3)$$

Тензор нейтральных напряжений T_u создает лишь напор в поровой воде, не вызывая сдвига, т. е. является шаровым тензором $T_u = T_u^0$.

Объемные деформации ползучести. Объемные деформации скелета, вызываемые шаровым тензором эффективных напряжений $T_{\sigma'}^0$, т. е. средним эффективным напряжением $\sigma'_m = (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)/3$, в общем случае развиваются во времени, включают в себя восстанавливающуюся и остаточную части и являются нелинейными.

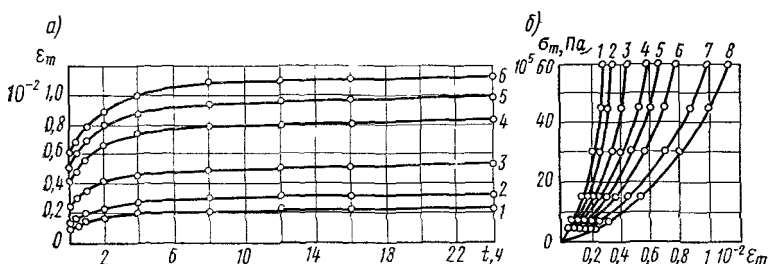


Рис. 8.1. Кривые объемной ползучести мерзлого грунта (супесь, $W=26\%$, $\theta=-10^\circ\text{C}$) при всестороннем сжатии:

a — кривые объемной ползучести $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ при $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, равном: 1 — 5; 2 — 7,5; 3 — 15; 4 — 30; 5 — 45; 6 — 60×10^5 Па; б — кривые зависимости между ε_m и σ_m для моментов времени: 1 — 30 с; 2 — 1 мин; 3 — 5 мин; 4 — 15 мин; 5 — 30 мин; 6 — 1 ч; 7 — 4 ч; 8 — 24 ч

Объемные деформации скелета грунта развиваются во времени вследствие вязкого сопротивления межчастичных связей. Поскольку такие деформации не связаны с отжатием свободной, поровой воды, то в наиболее чистом виде они проявляются в сильно уплотненных грунтах, жидкой фазой в которых является связанная вода.

Более того, как было показано ранее, деформации ползучести скелета грунта могут развиваться даже в грунтах, находящихся в воздушно-сухом состоянии (см. рис. 5.20). Объемные деформации, не связанные с фильтрацией влаги, наблюдаются также у мерзлых грунтов, вода в которых находится только в твердом (лед) и прочносвязанном состоянии (незамерзшая вода). Так, в опытах на компрессионное сжатие мерзлых грунтов автором в [3] было получено, что объемная деформация, развивающаяся при нагрузке $\sigma_z = 20 \cdot 10^5$ Па в течение более 3000 ч составила от 5% при $\theta = -1,4^\circ\text{C}$ и до 11% при $\theta = -0,3^\circ\text{C}$, причем половина этих деформаций являлась остаточной, а половина — восстанавливающейся.

Некоторые данные об объемных деформациях ползучести мерзлых грунтов приведены на рис. 8.1, где изображены кривые ползу-

чести и изохронные кривые, полученные в опытах С. Э. Городецкого (1969) на трехосное сжатие таких грунтов в условиях всестороннего давления $\sigma_m = \text{const}$. Данные свидетельствуют о нелинейном характере связи между объемными деформациями $\epsilon_m = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)/3$ и всесторонним давлением $\sigma_m = \sigma'_m$.

В качестве примера объемной ползучести сильноуплотненных грунтов на рис. 8.2 приведены данные испытаний Л. Шифмана, опубликованные в сборнике [51]. Эти испытания выполнялись с

образцами переуплотненной бostonской голубой глины ($W_L = 33\%$, $W_p = 18\%$) в одометре и на приборе трехосного сжатия, причем в последнем случае — в условиях всестороннего давления $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$. На графике изображены спрямленные в полулогарифмическом масштабе кривые изменения пористости e во времени (при $\sigma_1 = 2,4 \cdot 10^5$ Па). Интересно, что при трехосном сжатии наблюдался переход процесса ползучести в стадию прогрессирующего течения ($t > 90$ дней), причем этому соответствовала перемена знака объемного де-

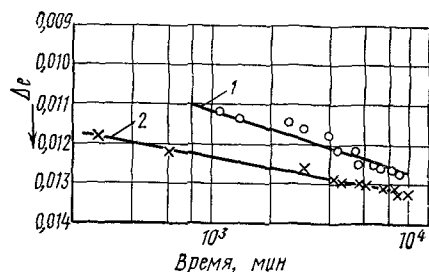


Рис. 8.2. Кривые объемной ползучести переуплотненной глины:

1 — испытание в одометре при $\sigma_1 = \text{const}$;
2 — на приборе трехосного сжатия при $\sigma_m = \text{const}$

формирования, что хорошо согласуется с рассмотренными ранее данными (см. рис. 5.23).

Отметим, что при испытаниях сильноуплотненных глин, у которых вода находится в связанном состоянии, все объемные деформации можно рассматривать как объемную ползучесть. У нормально уплотненных, а тем более недоуплотненных, грунтов объемные деформации вызываются как ползучестью скелета грунта, так и фильтрацией влаги. Проявление фильтрационного процесса в основном сказывается в начальном периоде испытаний, ползучесть же скелета — в последующем, когда большая часть влаги будет отжата, признаком чего является рассеивание порового давления и его падения до нуля.

Уравнения объемной ползучести. Это уравнение по аналогии с соотношением (5.8) можно записать в виде

$$\epsilon_m = f^*(\sigma'_m) \Phi^*(t), \quad (8.4)$$

где $f^*(\sigma'_m)$ — функция, характеризующая связь между средним нормальным эффективным напряжением σ'_m и средней линейной деформацией ϵ_m ; $\Phi^*(t)$ — функция объемной ползучести.

Кривая зависимости между σ'_m и ϵ_m (см. рис. 4.8) в отличие от кривой сдвигового деформирования вогнута к оси напряжений, поскольку с ростом σ'_m объемная деформация стремится к некоторому пределу ϵ_s , соответствующему максимальному уплотнению.

Однако этот предел достигается лишь при весьма большом всестороннем давлении.

Функции $f(\sigma'_m)$ в соответствии с формулами (4.41), (4.42), (4.44) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_m = \left(\frac{\sigma'_m}{D} \right)^{1/\alpha}; \quad \alpha \geq 1; \quad (8.5)$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma'_m \varepsilon_s}{k_0 \varepsilon_s + \sigma'_m}; \quad (8.6)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_s (1 - e^{-b \sigma'_m}). \quad (8.7)$$

Кривые, соответствующие формулам (8.6) и (8.7), имеют асимптоты $\varepsilon_m \rightarrow \varepsilon_s$ при $\sigma'_m \rightarrow \infty$. Кривая (8.5) такой асимптоты не имеет, но при не очень больших напряжениях достаточно хорошо соответствует опытным данным.

При малых напряжениях нелинейность объемных деформаций проявляется в небольшой степени и связь между σ'_m и ε_m можно принимать линейную. Во всяком случае, линейная аппроксимация в большей степени применима к объемным деформациям, чем к сдвиговым, поэтому вполне оправдан прием, при котором в целях упрощения задачи сдвиговую деформацию принимают нелинейной, а объемную — линейной.

Развитие во времени объемной деформации носит затухающий характер — деформация с течением времени стремится к конечной стабилизированной величине. Возможные виды функции объемной ползучести $\Phi^*(t)$ соответствуют формулам (5.13), (5.14) и (5.15).

Для описания объемной ползучести можно применять любую из рассмотренных в гл. 7 теорий ползучести, причем соображения, высказанные по поводу этих теорий, остаются в силе и для объемных деформаций.

Соотношение объемных и сдвиговых деформаций. На рис. 8.3 представлены данные опытов Коизуми и Ито, опубликованные в сборнике [51]. Опыты заключались в испытании грунта на трехосное сжатие при постоянных значениях среднего нормального σ_m

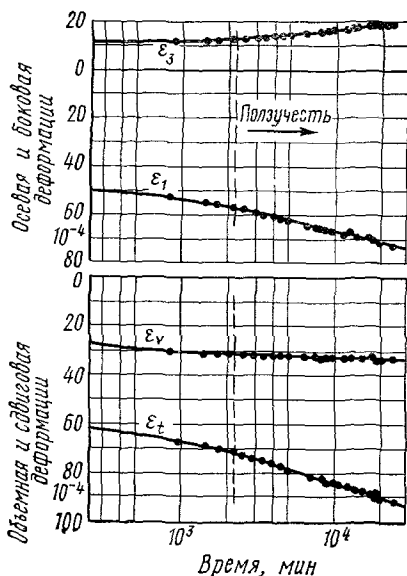


Рис. 8.3. Кривые объемной и сдвиговой ползучести водонасыщенной глины при трехосном сжатии ($\sigma_m = 0,27 \times 10^5$ Па; $\tau_1 = 1,85 \cdot 10^5$ Па)

и сдвигового τ_i напряжений. Опыты проводились с водонасыщенной глиной ($W=120\%$, $W_L=136\%$, $W_p=81\%$). На верхнем графике изображены осевая ϵ_1 и радиальная ϵ_3 деформации образца, а на нижнем — объемная $\epsilon_v = (\epsilon_1 + 2\epsilon_3)/3$ и сдвиговая $\epsilon_t = \gamma_t = \epsilon_1 - \epsilon_3$. Как видно, через $4 \cdot 10^3$ мин после начала испытания фильтрационный процесс закончился и стала развиваться ползучесть скелета грунта.

Кривые объемной и сдвиговой ползучести достаточно хорошо спрямляются в полулогарифмических координатах, что позволяет описать обе кривые логарифмическими функциями вида

$$\Phi(t) = a \ln(t/T), \quad (8.8)$$

но с различными значениями параметров a и T . Это означает, что кривые объемной и сдвиговой ползучести в данном случае не взаимно подобны.

Вопрос о подобии кривых ползучести и изохронных кривых для объемных и сдвиговых деформаций имеет весьма важное значение, поскольку от этого зависит, будет ли постоянным коэффициент поперечного расширения ν , входящий в исходные уравнения любой неоднотонной задачи.

Коэффициент поперечного расширения. В гл. 5, анализируя формулу (5.53), мы указывали на то, что постоянство коэффициента ν соблюдается при условии идентичности функций $f(\sigma)$ и $\Phi(t)$ для продольной и поперечной деформаций. Это же условие справедливо и по отношению к функциям $\tilde{f}$ и Φ для объемных и сдвиговых деформаций.

Таким образом, коэффициент ν является постоянной величиной, если соблюдено условие

$$\frac{f(\tau_i) \Phi(t)}{f^*(\sigma'_m) \Phi^*(t)} = \text{const}, \quad (8.9)$$

где функции $\tilde{f}$ и Φ относятся к сдвиговым деформациям, а $\tilde{f}^*$ и Φ^* — к объемным.

В общем случае условие (8.9) для грунтов выполнить невозможно. Действительно, вид функций $\Phi(\gamma_i)$ и $\Phi(\epsilon_m)$ (если они нелинейные) не может быть одинаковым, поскольку с ростом напряжения $\gamma_i \rightarrow \infty$, а $\epsilon_m \rightarrow \text{const}$ (см. рис. 1.2).

Функции $\Phi(t)$ и $\Phi^*(t)$ также будут различаться, хотя бы потому, что сдвиговая ползучесть может быть как затухающей, так и незатухающей, а объемная — только затухающей. Тем не менее, учитывая, что переменность параметра ν существенно усложняет все расчеты, следует стремиться удовлетворить, хотя бы в порядке приближения, условие (8.9). Применительно к функции напряжений $\tilde{f}$ это является возможным в диапазоне малых изменений нагрузки, поскольку в этом случае зависимости $\tau_i - \gamma_i$ и $\sigma'_m - \epsilon_m$ можно с определенным приближением описать функцией одного вида.

Функции ползучести $\Phi(t)$ и $\Phi^*(t)$ также можно принять идентичными при не очень больших напряжениях, когда процесс сдви-

говой ползучести имеет затухающий характер. Учитывая большой разброс в значениях характеристик грунта в естественных условиях, подобного рода допущения являются целесообразными.

Наконец, в некоторых случаях можно сделать и другое, большее допущение — об отсутствии объемных деформаций скелета грунта вообще (условие несжимаемости) или о том, что такие деформации только упруги.

§ 8.2. ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ ГРУНТА

Уравнение консолидации Терцаги — Герсеванова. Теория фильтрационной консолидации грунтов Терцаги — Герсеванова основывается на предположении о том, что шаровой тензор эффективных напряжений T_0^0 вызывает лишь упругую объемную деформацию скелета, а процесс консолидации обусловлен отжатием поровой влаги под воздействием тензора порового давления T_u , причем это отжатие происходит по закону фильтрации Дарси. Грунт в этой теории рассматривают как полностью водонасыщенный (грунтовая масса), сжатие жидкой фазы не учитывают, а объемные деформации скелета принимают прямо пропорциональными эффективному давлению.

Уравнение консолидации при таких допущениях имеет для одномерной задачи вид

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial z^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial e}{\partial t} = a C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (8.10)$$

где $C_v = k_\phi / a_0 \gamma_w$ — коэффициент консолидации грунта ($\text{см}^2/\text{ч}$); $a_0 = a / (1 + e_{\text{ср}})$ — коэффициент относительной сжимаемости грунта (Па^{-1}); $a = \Delta e / \Delta \sigma$ — коэффициент компрессионной сжимаемости грунта (Па^{-1}); k_ϕ — коэффициент фильтрации поровой влаги ($\text{см}/\text{ч}$); e и $e_{\text{ср}}$ — переменное во времени и среднее (рассматриваемое как постоянное) значения коэффициента пористости; σ'_z и u — эффективное и нейтральное (поровое) давление, (Па); t — время.

Вывод уравнения (8.10) из рассмотрения механической модели. Вывод уравнения (8.10) общеизвестен (см., например, книгу Н. А. Цытовича, 1973). Здесь мы покажем только, что это уравнение можно также получить из рассмотрения механических моделей, в частности многоэлементной модели, составленной из комбинации большого числа элементов типа кельвиновых.

Рассмотрим многоэлементную модель грунта (рис. 8.4), для чего соединим упругие элементы последовательно и так, чтобы они образовывали единый упругий стержень длиной h , моделирующий ске-

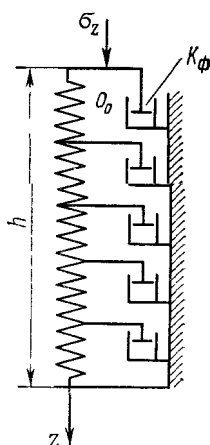


Рис. 8.4. Многоэлементная модель, отображающая первичную консолидацию грунта

лет грунта. Примем, что упругие элементы подчиняются закону

$$\varepsilon_z = a_0 \sigma'_z, \quad (8.11)$$

где ε_z — относительная деформация элемента.

К упругим элементам подсоединим параллельно цилиндры с жидкостью, в которые входят дырчатые поршни. Жидкость в цилиндре моделирует поровую воду грунта, отверстия в поршне — капилляры в нем. Процесс погружения поршня, моделирующий процесс фильтрации поровой воды, подчиняется закону

$$v = k_\phi i, \quad (8.12)$$

где v — скорость фильтрации; $i = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z}$ — гидравлический градиент; $H = u/\gamma_w$ — напор.

Таким образом, элемент, моделирующий поровую воду, будет подобен элементу Ньютона в реологических моделях (см. рис. 7.1) с той, однако, разницей, что перемещение поршня подчиняется не закону вязкого течения Ньютона, а закону фильтрации Дарси.

Принимаем, что параметры a_0 и k_ϕ соотношений (8.11) и (8.12) одинаковы для каждого из элементов модели, что соответствует однородной грунтовой толще. Если необходимо учесть неоднородность этой толщи, каждому из элементов следует придать различное значение этих параметров.

Как следует из модели, общая нагрузка σ_z сначала воспринимается вязкими элементами, а затем (по мере сжатия пружин) перераспределяется между упругими элементами, куда передается часть давления σ'_z , и вязкими, куда передается часть давления u . Если бы потребовалось учесть передачу с самого начала нагрузки на скелет, то к верху модели следовало подключить упругий элемент, на который и передавалась бы нагрузка σ'_z .

По принятой схеме в каждом кельвиновом элементе действует одно и то же напряжение σ_z , что соответствует принятому при выводе уравнения (8.10) положению о постоянстве величины σ_z по глубине грунтовой толщи в условиях одномерной задачи. Тогда деформация сжатия упругого стержня будет равна

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = a_0 \sigma'_z, \quad (a)$$

где w — перемещение точек упругого стержня вдоль оси z .

С другой стороны, скорость перемещения дырчатого поршня каждого из вязких элементов, учитывая соотношение (8.12), равна

$$v_\phi = \frac{\partial w}{\partial t} = -k_\phi \frac{u^*}{\gamma_w}, \quad (б)$$

где $u^* = \Delta u / \Delta z$ — давление, отнесенное к единице длины модели.

Дифференциальное условие равновесия участка Δz упругого стержня модели запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + u^* = 0. \quad (в)$$

Подставив сюда выражения (а) и (б), получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k_\Phi}{a_0 \gamma_w} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (г)$$

После дифференцирования по z и подстановки выражения (а) получим формулу (8.10).

Степень консолидации. Осадка уплотнения достигает конечного, стабилизированного значения $S = S_\infty$ при $t = \infty$ и $\sigma'_z = \sigma_z$. Отношение осадки S в любой момент времени к стабилизированной осадке S_∞ называют степенью консолидации

$$U = \frac{S}{S_\infty}. \quad (8.13)$$

Для одномерной задачи (сжатие слоя грунта толщиной $2h$ при двусторонней фильтрации) значение U , получаемое из решения уравнения (8.10), будет, как известно, равно [42]

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(e^{-Nt} + \frac{1}{9} e^{-9Nt} + \frac{1}{25} e^{-25Nt} + \dots \right), \quad (8.14)$$

или приближенно

$$U \simeq 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-Nt}, \quad (8.15)$$

где $N = \pi^2 C_v / 4h^2$.

Уравнения консолидации и последствия. Сопоставим уравнение консолидации (8.15), записав его в виде

$$S = S_\infty \left(1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-Nt} \right), \quad (8.16)$$

и уравнение упруго-вязкого деформирования (последствия) (7.6), записав последнее в форме

$$S = S_\infty (1 - e^{-t/T_p}). \quad (8.17)$$

Как видно, оба уравнения являются идентичными по форме — и то и другое описывают затухание деформации по экспоненциальному закону. Это и понятно, поскольку оба выражения выведены из уравнения модели одного вида — модели Кельвина — Фойгта.

Вместе с тем между формулами (8.16) и (8.17) имеется принципиальное различие. Показатель степени в уравнении последствия (8.17) t/T_p от толщины сжимаемого слоя h не зависит, соответственно с чем не зависит от h и значение относительной деформации S/S_∞ .

Показатель же степени Nt в уравнении консолидации (8.16), будучи зависимым от длины пути фильтрации, есть функция h . Соответственно степень консолидации S/S_∞ оказывается зависимой от толщины сжимаемой толщии грунта h .

Указанное обстоятельство позволяет при лабораторных испытаниях грунта установить, с каким процессом — фильтрацией или ползучестью — мы имеем дело. Для этого следует провести опыты с образцами различной высоты, и если получаемые результаты не зависят от h , то имеет место процесс ползучести, а если зависят — то процесс консолидации (или оба этих процесса вместе).

Дальнейшее развитие фильтрационной теории. При дальнейшем развитии фильтрационной теории (В. А. Флорин, Н. А. Цытович, Д. Е. Польшин, Н. Н. Веригин и др.) в уравнении (8.10) учитывались дополнительные факторы, влияющие на процесс консолидации. Решались также задачи, включая трехмерные, с различными граничными условиями.

Было показано, что внешняя нагрузка в начальный момент может не полностью передаваться на поровую воду, а будет распределяться между водой и скелетом грунта. Это объясняется наличием по Н. А. Цытовичу [42] у грунтов структурной прочности $\sigma_{стр} = \sigma(1 - \beta_0)$, где $\beta_0 = u_0/\sigma$ — коэффициент начального порового давления; u_0 — начальное поровое давление.

Коэффициент β_0 изменяется в пределах $0 \leq \beta_0 \leq 1$. При $\beta_0 = 1$ имеем, что в момент $t = 0$ все давление воспринимает вода: $u = u_0 = \sigma$. При $\beta_0 = 0$ $u = u_0 = 0$ и все давление воспринимает скелет грунта.

Другим фактором, влияющим на процесс консолидации и также обусловленным структурными связями грунта, является начальный градиент напора (Н. Н. Павловский, С. А. Роза) i_0 , уравновешивающий силы поверхностного натяжения пленочной воды. Миграция поровой воды происходит лишь тогда, когда гидравлический градиент превысит величину i_0 . Соответственно скорость фильтрации будет равна $v_{ср} = k_f(i - i_0)$, где

$$i_0 = - \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u_0}{\partial z}.$$

В отличие от принятого ранее допущения о несжимаемости поровой воды было установлено, что эта вода, содержащая, как правило, пузырьки воздуха и растворенные газы, может изменять свой объем, что характеризуется коэффициентом сжимаемости поровой воды α_w .

Имеются, кроме того, предложения (В. А. Флорин, Л. Шукле) об учете нелинейной связи между напряжением и деформацией и изменяемости коэффициента фильтрации и начального градиента напора в процессе консолидации.

Метод объемных сил. В. А. Флорин и М. Био предложили рассматривать процесс фильтрационной консолидации по так называемому методу «объемных сил». В этом методе учитывают взаимодействие между жидкой и твердой фазами грунта; при этом силы, возникающие при взаимодействии, отображают в виде объемных

(массовых) сил, обусловленных уменьшением веса скелета грунта в результате взвешивания под воздействием порового давления. Связь между напряжениями и деформациями принимают линейной, причем учитывается сжимаемость поровой воды. Перераспределение внешнего давления между поровой водой и грунтовым скелетом принимают в соответствии с фильтрационной теорией Терзаги.

Теория «объемных сил», получившая распространение, была развита в работах Тана, Манделя и др.

§ 8.3. ПЕРВИЧНАЯ И ВТОРИЧНАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ ГРУНТА

«Вековая» ползучесть грунта. Мы уже говорили, что для описания процесса вторичной консолидации грунта Бьюсман в 1936 г. применил логарифмическую функцию вида (5.14)

$$S = ph (\alpha' + \alpha'' \lg t), \quad (8.18)$$

где α' — единичная осадка (при $p=1$ и $h=1$), обусловленная первичной консолидацией; α'' — единичная осадка, возникающая в результате развития вторичной консолидации за период времени $t > 1$; p , h , t — нагрузка, толщина сжимаемого слоя и время ($t > 1$).

Иногда, чтобы разделить первичную и вторичную осадку, формулу (8.18) записывают в виде

$$S = ph \left(\alpha' + \alpha'' \lg \frac{t}{t'} \right), \quad (8.18')$$

где t' — время завершения первичной консолидации.

На II Международном конгрессе по механике грунтов и фундаментостроению (Роттердам, 1948) Сроисом были проведены исследования значений параметров α' и α'' . Они оказались связанными между собой зависимостью $\alpha'' = 10\alpha'$ и нелинейно зависящими от нагрузки: при $p = 1-2-4 \cdot 10^5$ Па значения α' равнялись 0,081—0,105—0,128.

Формула (8.18) исходит из линейной связи между осадкой S и нагрузкой p и описывает, как это и свойственно логарифмическому закону, медленное и неограниченное нарастание осадки, что и обусловило название этой формулы «закон вековой осадки».

Эта формула выведена в предположении, что вторичная консолидация начинается только после окончания первичной. Такое предположение не вполне соответствует природе процесса, поскольку в действительности и первичная и вторичная консолидация протекают одновременно. Учитывая, однако, что в начальном этапе процесса превалирует фильтрационный механизм уплотнения, а в последующем — вязкий и что разделять процесс удобно для обработки опытных данных, такое допущение может быть оправдано. Считается, что этап вторичной консолидации начинается тогда, когда кривая «осадка — время», построенная в логарифмическом масштабе, начнет спрямляться (рис. 8.3).

Ряд исследователей (Казагранде, Тейлор, Бринч Хансен) предложили специальные приемы для определения момента перехода от первичной консолидации ко вторичной. В частности, было установлено, что закон первичной консолидации (8.15) в пределах до $U \approx 60\%$ можно заменить степенной зависимостью

$$U = \left(\frac{4C_v}{\pi h^2} t \right)^{0,5}. \quad (8.19)$$

Соответственно можно находить (Тейлор, Хансен) момент перехода от первичной к вторичной консолидации по графику осадки, построенному в комбинированных координатах $S - (t^{1/2}; \lg t)$ (см. рис. 1.5).

Степенная зависимость t^n с показателем степени $n \neq 0,5$ в последующем была применена для описания также и вторичной консолидации. Так, Хансенom и С. Инаном в докладе на VIII Международном конгрессе по механике грунтов [55] предложена формула, учитывающая как степенной характер изменения пористости во времени, так и степенную зависимость между пористостью и нагрузкой:

$$e_j = e_0 \left\{ 1 + \frac{\sigma'(t_j)}{\sigma'_0} \left[\int_0^{t_j} \left(\frac{\sigma'(t)}{\sigma'(t_j)} \right)^b \frac{dt}{t_0} \right]^c \right\}^{-a}, \quad (8.20)$$

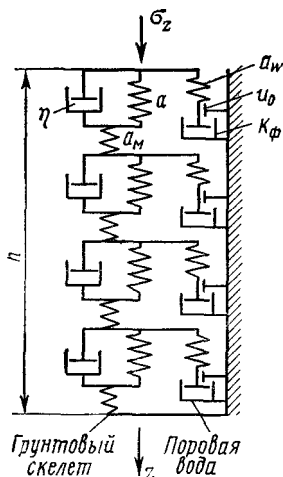


Рис. 8.5. Многоэлементная модель, отображающая первичную и вторичную консолидацию грунта

где e_0 и e_j — значения коэффициента пористости в начальный ($t=0$) и в рассматриваемый ($t=t_j$) моменты времени; $\sigma'(t)$ — эффективное давление, изменяющееся в пределах от 0 до $\sigma'(t_j)$ при

$0 \leq t \leq t_j$; σ'_0 — константа (Па), связанная с e_0 зависимостью $\sigma'_0 = ne_0^4$; t_0 — произвольно выбранное значение времени, например $t_0 = 1$ сут; $c < 0,05$, $a < 0,3$, $b > 10$ — параметры.

Вторичная консолидация грунта как наследственная ползучесть.

В. А. Флорин [40] предложил описать вторичную консолидацию грунта с помощью уравнения (7.72) наследственной ползучести в интерпретации Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна с использованием экспоненциального ядра. Объемная деформация скелета грунта при этом определяется выражением

$$e_0 - e_j = \sigma'_z \{ a_{\text{мгн}} + a_{\text{вт}} [1 - \exp(-\beta(t - v_1))] \} + \int_{v_1}^t \frac{\partial \sigma'_z}{\partial v} \{ a_{\text{мгн}} + a_{\text{вт}} [1 - \exp(-\beta(t - v))] \} dv, \quad (8.21)$$

где e_0 и e_j — коэффициенты пористости в начальный ($t=0$) и в рассматриваемый моменты времени; $a_{\text{мгн}}$ и $a_{\text{вт}}$ — коэффициенты мгновенного и вторичного уплотнения скелета грунта.

Совместное рассмотрение уравнения фильтрационной консолидации (8.10) и уравнения ползучести скелета грунта (8.21) даст возможность решить задачу о линейном уплотнении грунта с учетом первичной и вторичной консолидации. При этом представляется возможным учитывать сжимаемость поровой воды, а также самих минеральных частиц, наличие начального градиента напора, влияние структурной прочности и старения материала, переменность коэффициента фильтрации, влияние заземленного воздуха и пр.

Механическая модель, учитывающая первичную и вторичную консолидации. Для учета в механической модели вторичной консолидации грунта в эту модель помимо фильтрационных элементов вводят вязкие, ньютоновы элементы, которые подключаются к упругим элементам, моделирующим грунтовый скелет. В результате скелет наделяется не только упругими, но и вязкими свойствами. Такая модель (рис. 8.5), предложенная автором книги, представляет собой комбинацию модели, изображенной на рис. 8.4, и дополнительных вязких элементов.

Все упруговязкие элементы, каждый из которых представляет собой модель Кельвина — Фойгта, соединены между собой последовательно, образуя сочетание модели типа рис. 7.2, в. Эта модель отображает грунтовый скелет. Считая, что параметры всех повторяющихся элементов модели одинаковы, что соответствует однородной по глубине грунтовой толще, уравнение деформирования скелета грунта будет иметь вид, соответствующий формуле (7.27):

$$\epsilon = a'_0 \left[\sigma'(t) + \int_0^t \sigma'(\nu) K(t-\nu) d\nu \right], \quad (8.22)$$

где $\sigma'(t)$ — переменное во времени эффективное давление, а

$$K(t-\nu) = \bar{a}_0 e^{-\frac{1}{T_p}(t-\nu)}, \quad (8.23)$$

где $\bar{a} = (a'_0 - a''_0) / (a'_0 T_p)$; a' и a'' — мгновенное (при $t=0$) и конечное (при $t=\infty$) значения коэффициента относительной сжимаемости; T_p — время последействия.

Модель, учитывающая поровую воду, состоит из фильтрационных элементов и подключенных к ним по типу максвелловой модели упругих элементов с коэффициентом сжимаемости a_w , моделирующих сжимаемость поровой воды. К стержню поршня подключен элемент сухого трения, который моделирует начальное поровое давление u_0 , обуславливающее начальный градиент напора

$$i_0 = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u_0}{\partial z}.$$

Поршень может начать смещаться только тогда, когда давление в поровой воде превысит величину u_0 . Таким образом, закономер-

ность деформирования упругого и фильтрационного элементов модели будет определяться соотношениями

$$\varepsilon = a_w u; \quad v_{cp} = -\frac{k_\phi}{\gamma_w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad \bar{u} = u - u_0.$$

Рассматривая перемещения точек модели и составляя, как это делалось для модели на рис. 8.4, дифференциальное условие равновесия, получим уравнение деформирования

$$\frac{\partial e}{\partial t} + a_w e_{cp} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k_\phi \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u - u_0), \quad (8.24)$$

где обозначения приняты те же, что и в формуле (8.10).

Подставив в (8.24) уравнение деформирования скелета грунта (при $\varepsilon = \Delta e$), получим закономерность уплотнения грунта с учетом первичной и вторичной консолидации, сжимаемости жидкой фазы и наличия начального порового давления.

Выведенное с помощью модели уравнение (8.24) совпадает с аналитическим решением, полученным ранее В. А. Флориным [40].

Различные механические модели грунта, позволяющие отображать те или иные стороны процесса консолидации, были рассмотрены в § 2.7. Отметим, что с помощью многоэлементных моделей типа, приведенных на рис. 8.5, можно в отличие от обычных моделей получить уравнение деформирования скелета грунта в интегральной форме, соответствующей теории наследственной ползучести.

Подробный анализ теорий консолидации сделан в монографии Л. Шукле [46]. Обзоры исследований по консолидации даны также в докладах Х. Пурушасба на VII и М. И. Горбунова-Посадова и Ю. К. Зарецкого на VIII Международных конгрессах по механике грунтов и фундаментостроению [39, 55].

Новейшие теории консолидации грунта. Н. А. Цытович и З. Г. Тер-Мартirosян [44] предложили следующую форму записи закономерности развития осадки уплотнения:

$$S = ph (a_0^f U^f + a_0^c U^c), \quad (8.25)$$

где a_0^f и a_0^c — коэффициенты относительной сжимаемости при первичной и вторичной консолидации; U^f и U^c — степень первичной и вторичной консолидации.

Таким образом, в выражении (8.25) осадку уплотнения подразделяют на осадку вследствие фильтрации и вследствие ползучести. Первая часть осадки определяется решением (8.14), вторая часть — решением уравнения деформирования грунтового скелета.

Отметим, что разделять осадку на первичную и вторичную можно только для одномерной задачи. При пространственном напряженно-деформированном состоянии грунтового массива в различных его точках время окончания фильтрационного процесса будет различным и установить границу между первичной и вторичной консолидацией не представляется возможным.

Ю. К. Зарецкий [12] предложил обобщение модели «объемных сил» Био — Флорина на случай пространственного напряженного состояния грунта с учетом одновременного протекания (по линейному закону) первичной и вторичной консолидации и изменения во времени напряжений в любой точке массива, а также неполной передачи внешнего давления на воду в начальный момент. Решение этой задачи сводится к следующей системе уравнений:

$$\bar{G}(\Delta w_j) + \frac{1}{3}(\bar{G} + \bar{k})(w_{k,kj}) = -\frac{1}{\beta_0}(u_j) \quad (k, j=1, 2, 3); \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{k,k}) + \frac{3}{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial t} = 3\bar{C}_v \Delta u,$$

где $\bar{G}$, $\bar{k}$, β_0 , $\bar{C}_v$ — переменные во времени модуль сдвига, модуль объемной деформации, коэффициент начального порового давления и коэффициент консолидации соответственно, $\sigma_{kk} = 3\sigma_m$ — сумма главных напряжений, w — перемещения. Запятая между индексами k, j обозначает дифференцирование по переменной j :

$A_{k,j} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$; запись $A_{k,jj}$ обозначает сумму $A_{k,11} + A_{k,22} + A_{k,33} = \Delta A_k$,

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа.

Первая группа соотношений (8.26) выражает условие равновесия в перемещениях w . Вторая группа описывает движение жидкости в деформируемой среде.

Для одномерной задачи решение уравнений (8.26) получаем в следующей форме:

$$S = ha'_0 p \left[1 + \int_0^t K(t-v) dv - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \bar{\Psi}_m(t) \right], \quad (8.27)$$

где первый член правой части отображает мгновенную осадку, второй — осадку за счет ползучести скелета грунта, третий — осадку, вызываемую фильтрацией влаги с учетом взаимодействия жидкой и твердой составляющих грунтовой среды. Эта функция определяется выражением

$$\bar{\Psi}_m(t) = \Psi_m(t) + \int_0^t K(t-v) \Psi_m(v) dv, \quad (8.28)$$

где $\Psi_m(t) = \exp\left(-\frac{m\pi}{h} C_v t\right)$ — функция, характеризующая осадку за счет фильтрации, причем $\Psi(0) = 1$, $\Psi(\infty) = 0$.

Вид ядра $K(t, v)$ принят экспоненциальным в соответствии с формулой (7.62).

Время консолидации. Поскольку время фильтрационной консолидации зависит от толщины сжимаемого слоя грунта, то между

временем t_1 и t_2 консолидации слоев толщиной h_1 и h_2 имеет место соотношение

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^n. \quad (8.29)$$

Если процесс уплотнения имеет чисто фильтрационный характер, то согласно формуле (8.15) $n=2$. Если же наблюдается только одна ползучесть грунта, то $n=0$. Поскольку в реальных грунтах, как правило, протекают оба процесса, то обычно показатель степени n имеет значение $0 < n < 2$. Это обстоятельство было отмечено Н. Н. Масловым еще в 1950 г. В другой же его работе (1972) было установлено, что n зависит от физических характеристик грунта — числа пластичности и консистенции:

$$n = \rho \ln I_L + v; \quad n = a I_p + b,$$

где I_L — показатель консистенции; ρ , v , a , b — параметры. Так, $n \rightarrow 2$ для грунтов текучей консистенции, $n \approx 1,5$ — для грунтов тугопластичной консистенции и $n \rightarrow 0$ — для грунтов полутвердой и твердой консистенции.

Тот факт, что показатель степени n может принимать значения $0 \leq n \leq 2$ в зависимости от физических свойств грунта, характеризуя этим соотношение между первичной и вторичной консолидацией, вытекает также из теоретических решений задачи [44].

ГЛАВА 9

ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ГРУНТОВ



§ 9.1. ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ

Долговечность и длительная прочность. С явлением ползучести связано такое свойство тела, как его долговечность. Под этим термином подразумевают сопротивление тел разрушению при длительном воздействии нагрузок, иначе говоря, длительную прочность.

Ранее уже неоднократно подчеркивалось, что развитие незатухающей ползучести грунта вызывает прогрессирующее течение с возрастающей скоростью, заканчивающееся хрупким или вязким разрушением. Таким образом, длительное разрушение грунта происходит под действием напряжения, величина которого может быть меньше значения прочности при кратковременном нагружении. При этом чем меньше приложенное напряжение, тем за более длительное время происходит разрушение.

Если испытывать образец материала, обладающего свойствами ползучести, быстро загружая его вплоть до разрушения, то мы определим так называемую условно-мгновенную прочность. Это понятие близко к понятию «временное сопротивление».

Если к идентичному образцу приложить нагрузку, несколько меньшую условно-мгновенной, то она тоже вызовет его разрушение, но уже не сразу, а через какое-то время. Так будет происходить и при других, еще меньших нагрузках до тех пор, пока при очередной нагрузке деформация не станет затухающей. Уменьшение величины разрушающего напряжения с увеличением времени до разрушения и есть проявление процесса снижения прочности.

Кривая длительной прочности. График снижения прочности можно получить перестройкой кривых ползучести. Пусть на основании испытаний образцов под нагрузками $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$ построено семейство кривых незатухающей ползучести и определено время $t_1 < t_2 < t_3$, за которое разрушался каждый из образцов (рис. 9.1).

Построим по этим данным график, спроектировав на ось абсцисс значения времени до разрушения $t_1, t_2, t_3, \dots$ и отложив по оси ординат значения соответствующих разрушающих напряжений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. В результате получим кривую, отображающую зависимость между разрушающим напряжением и временем до разрушения; эту кривую называют кривой длительной прочности.

Соответственно следует различить следующие значения прочности:

условно-мгновенную прочность τ_0 (или R_0), т. е. наибольшую прочность, характеризующую сопротивление материала быстрому разрушению; она определяется начальной ($t=0$) ординатой кривой длительной прочности;

длительную прочность $\tau(t)$ [или $R(t)$], определяемую напряжением, которое вызывает разрушение материала за заданный промежуток времени; эту величину отображают текущей координатой кривой длительной прочности;

предел длительной прочности τ_∞ (или R_∞), соответствующий напряжению, до превышения которого деформация имеет затухающий характер и разрушение не происходит при любом практически наблюдаемом времени воздействия нагрузки;

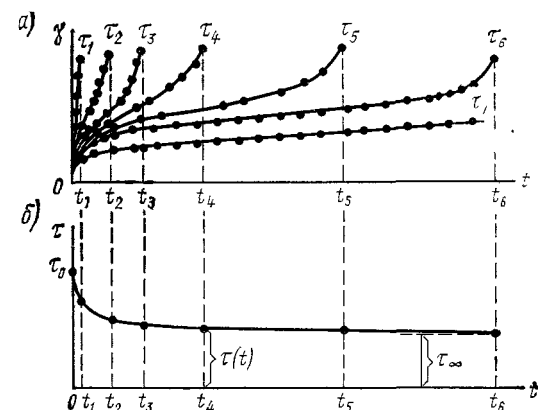


Рис. 9.1. Кривые ползучести грунта (а) и кривая длительной прочности (б)

при превышении же τ_∞ возникает незатухающая ползучесть, приводящая с течением времени к разрушению. Этот предел отображается асимптотой кривой длительной прочности.

У некоторых материалов незатухающая ползучесть, приводящая к разрушению, возникает при любых напряжениях, отличных от нуля. У таких материалов $\tau_\infty=0$ и кривая длительной прочности асимптотически приближается к оси абсцисс.

О критериях разрушения грунта. Поскольку развитие незатухающей ползучести приводит к разрушению, сам факт перехода от затухающего деформирования к установившемуся течению (точка В кривой на рис. 9.2, а) и тем более переход в стадию прогрессирующего течения (точка С) свидетельствует о потенциальной возможности разрушения. Соответственно моменты t_t и $t_{пр}$ перехода из I стадии ползучести во II и из II в III являются критическими точками. Достижение же деформациями значений γ_t , $\gamma_{пр}$, отвечающих этим точкам, а также деформации γ_r , соответствующей моменту разрушения t_r , можно рассматривать как критерии длительного разрушения. Впоследствии мы рассмотрим более общий критерий, исходящий из оценки микроструктурных изменений грунта. Однако сейчас будем исходить из указанных выше предположений.

Таким образом, можно отметить три критических состояния в процессе незатухающей ползучести. Первое состояние, характеризваемое достижением деформацией значения $\gamma=\gamma_t$, соответствует воз-

никновению установившегося течения и определяет потенциальную возможность последующего разрушения. Второе критическое состояние, характеризуемое достижением деформацией значения $\gamma = \gamma_{пр}$, отвечает переходу в стадию прогрессирующего течения и предсказывает близкое наступление разрушения.

Третье критическое состояние, характеризуемое достижением деформацией значения $\gamma = \gamma_r$, соответствует моменту разрушения.

Все эти критические состояния наступают при любом напряжении τ , превышающем предел длительной прочности τ_∞ . Однако время t_t , $t_{пр}$ и t_r достижения деформацией значений γ_t , $\gamma_{пр}$ и γ_r зависит от величины напряжения, увеличиваясь с уменьшением последнего. Зависимость между напряжением τ и временем t_t , $t_{пр}$, t_r можно отобразить кривыми, как показано на рис. 9.2, б. Все три кривые имеют общую асимптоту τ_∞ .

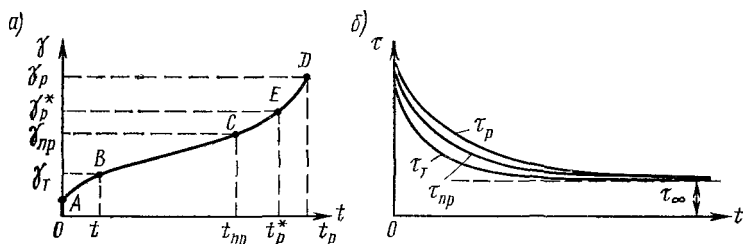


Рис. 9.2. Критические точки на кривой ползучести грунта (а) и соответствующие им кривые длительной прочности (б)

Хрупкое и вязкое разрушение. Разрушение грунта в зависимости от его типа, а также от режима и вида загрузки может быть хрупким или вязким. Хрупкое разрушение, проявляющееся в виде скола, происходит при относительно небольшом развитии деформации. Вязкому разрушению предшествует развитие больших деформаций, приводящих к образованию шейки в образце при испытании на растяжение или к сплющиванию образца (образованию «бочки») без нарушения сплошности при испытании на сжатие. Хрупкое разрушение свойственно скальным и полускальным породам, плотным глинам и мерзлым грунтам при низкой температуре. Вязкое разрушение характерно для пластичных грунтов, в том числе мерзлых при температуре, близкой к 0° .

Если при хрупком разрушении момент разрушения фиксируется достаточно четко, то при вязком такой четкости нет и за время разрушения принимают время, соответствующее неограниченному возрастанию скорости деформирования $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$. Если же и этот момент определить трудно, в качестве условного критерия разрушения принимают достижение деформацией некоторого значения $\gamma_r^* = k\gamma_{пр}$, где можно принять $k = 1,5$; время достижения деформацией этого значения обозначается через t_r^* . Наконец, с определенным запасом в качестве критерия вязкого разрушения можно принять второе

критическое состояние, т. е. начало стадии прогрессирующего течения $\gamma = \gamma_{\text{пр}}$.

Вне зависимости от выбранного критерия разрушения в расчетах оснований на длительное воздействие нагрузок обычно исходят из условия, чтобы действующие напряжения не превышали предела длительной прочности τ_{∞} , т. е. чтобы в грунте не возникли деформации незатухающей ползучести. Однако в некоторых случаях мы можем допустить развитие деформаций течения при условии, чтобы деформация за заданный период времени (например, за срок эксплуатации сооружения) не превышала предельно допускаемой величины $\gamma \leq \gamma_{\text{доп}}$.

Напряжение $\tau_{\text{плз}}$, при котором деформация за расчетный период времени $t_{\text{плз}}$ достигает заданной величины $\gamma = \gamma_{\text{доп}}$, называют пределом ползучести. (Этот предел не следует смешивать с понятием «порог ползучести»). Зависимость между $\tau_{\text{плз}}$ и $t_{\text{плз}}$ отображают кривой, аналогичной кривой длительной прочности.

Понятие длительной прочности, естественно, лишено смысла для тех материалов, у которых ползучесть развивается в виде непрерывного течения без перехода в стадию разрушения. К таким материалам относятся, в частности, разжиженные грунты, суспензии и т. п. Понятие же «предел ползучести» применимо и к таким материалам.

Снижение прочности грунта в процессе его ползучести. Факт снижения прочности в результате ползучести наблюдается у широкого круга материалов — у металлов, дерева, бетона, пластмасс и т. д., и этой проблеме посвящено большое количество исследований.

В начальный период исследований этот факт ставился, однако, под сомнение, а возникновение прогрессирующего течения и разрушение образца при нагрузках, меньших временного сопротивления, пытались объяснить условиями опыта — уменьшением поперечного сечения образца в результате образования шейки при испытаниях на растяжение. Позже было показано, что длительное разрушение является закономерным физическим процессом, свойственным всем материалам, обладающим ползучестью. Этот процесс, имеющий кинетическую природу, связан с внутрикристаллическим течением (при вязком разрушении) и межкристаллическим (при хрупком разрушении), а также с образованием микротрещин.

Изучая вопрос о длительной прочности грунтов, некоторые исследователи полагали, что прогрессирующая стадия вызывается условиями опыта, и если такие условия исключить, то деформация ползучести будет развиваться неограниченно долго, не приводя к разрушению. Однако многочисленные исследования показали, что длительное разрушение грунтов не зависит от условий опыта и наблюдается у самых различных грунтов и при самых разных видах испытаний, включая испытание на сжатие, когда площадь сечения образца не только не уменьшается, но даже увеличивается.

Дискуссионным был также вопрос о том, по отношению к какой исходной величине следует рассматривать снижение прочности.

Некоторые авторы сопоставляли длительную прочность не с условно-мгновенным сопротивлением, как это принято, а со значением так называемой стандартной прочности, под которой имеется в виду прочность грунта, определяемая по стандартной методике медленного нагружения.

Такая методика, регламентированная ГОСТ 12248—66, предусматривает нагружение образца ступенями с их выдержкой до условной стабилизации деформаций при общей продолжительности испытания от 1 до 8 ч. В дальнейшем будет показано, что в основном прочность снижается именно в такой период времени. Поэтому сравнивая длительную и стандартную прочность, авторы, не получив ощутимой разницы, пришли к неверному выводу о том, что у грунтов прочность в процессе ползучести не снижается. Вопрос о соотношении стандартной и длительной прочности будет рассмотрен в § 9.8. Здесь же отметим, что эталоном для оценки снижения прочности во времени должна служить условно-мгновенная прочность, определяющая наибольшее сопротивление грунта разрушению.

§ 9.2. ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ

Длительная прочность мерзлых грунтов. Первые исследования длительной прочности грунтов были выполнены в 40-х годах М. Н. Гольдштейном применительно к силам смерзания грунтов. В 50-х гг. автор этой книги, проводя в Игарке комплексное изучение длительного сопротивления мерзлых грунтов при различных видах нагружения, установил основные закономерности длительной их прочности [3]. Позднее вопросы длительной прочности мерзлых грунтов исследовались в бив. Институте мерзлотоведения АН СССР и НИИ оснований [4, 5], на кафедре мерзлотоведения МГУ, в Институте мерзлотоведения АН СССР (Якутск), в Красноярском ПромстройНИИпроекте, во Всесоюзном научно-исследовательском институте № 1, а также в ряде организаций за рубежом.

Большое внимание, уделяемое проблеме длительной прочности в механике мерзлых грунтов, вполне объяснимо. Лед, являющийся одним из компонентов этих грунтов, обладает достаточно высоким сопротивлением быстрому разрушению, но имеет свойство течь при любой нагрузке и не обладает пределом длительной прочности. Соответственно прочность во времени у мерзлых грунтов снижается в весьма большой степени, и длительная прочность оказывается меньше мгновенной от 2 до 15 раз.

Кривые снижения прочности мерзлых грунтов. Ниже рассмотрены кривые длительной прочности мерзлых грунтов, полученные в опытах автора и сотрудников [3, 4] и показанные на рис. 9.3 и 9.4. На рис. 9.3, *а* изображены данные испытаний на сдвиг вдоль боковой поверхности модели фундамента (прочность смерзания), а на рис. 9.3, *б* — данные испытаний на разрыв образцов — «восьмерок». На рис. 9.4 приведены данные испытаний грунтов на одноосное сжатие. Опыты проводились под постоянными нагрузками и их результаты обрабатывались по схеме рис. 9.1.

Обращает на себя внимание прежде всего весьма большое снижение длительной прочности по отношению к мгновенной, что, как уже говорилось, является характерной особенностью мерзлых грунтов. Величина этого снижения зависит от типа грунта, его льдисто-

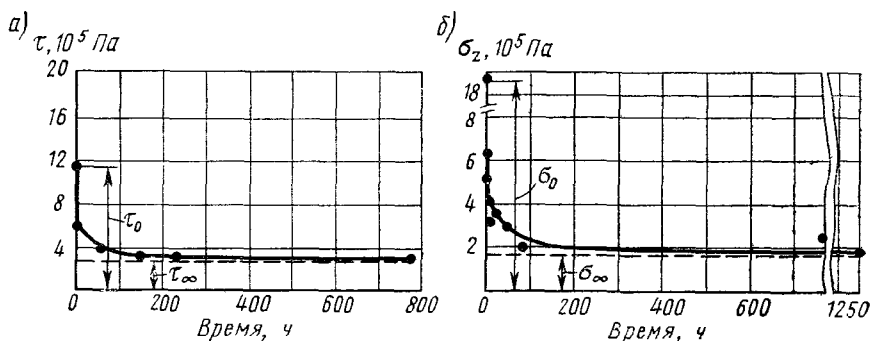


Рис. 9.3. Кривые длительной прочности мерзлых грунтов: а — испытание на сдвиг супеси ($\theta = -3,6^\circ \text{C}$); б — испытание на разрыв супеси ($\theta = -4,2^\circ \text{C}$) (опыты С. С. Вялова)

сти-влажности и температуры и в наибольшей степени от вида напряженного состояния.

Меньше всего прочность снижается при сжатии, хотя и в этом случае для мерзлых грунтов это снижение достаточно велико (отношение σ_∞/σ_0 составляет 0,6—0,3). В несколько большей степени снижается прочность смерзания — в этом случае отношение τ_∞/τ_0 равно 0,4—0,15. Наибольшее же снижение прочности у мерзлых грунтов наблюдалось при испытаниях на разрыв: отношение σ_∞/σ_0 достигает в этом случае 0,08—0,06, т. е. прочность снижается в 12—15 раз.

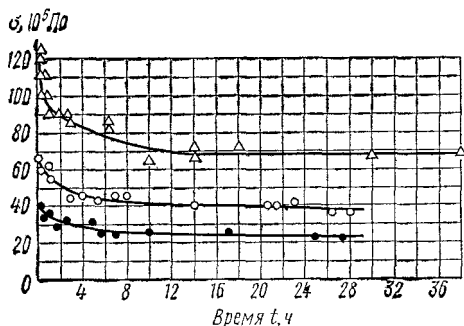


Рис. 9.4. Кривые длительного сопротивления мерзлой супеси келловейской сжатию при температуре:

1 — 20° ; 2 — -10° ; 3 — -5°C (опыты Е. П. Шумеринной и С. С. Вялова)

Длительность процесса снижения прочности также является характерной особенностью мерзлых грунтов — в ряде опытов образцы разрушались через 250—350 дней после загрузки. Однако в основном прочность снижалась на начальной стадии процесса, а затем интенсивность снижения резко замедлялась.

Так, доля снижения прочности на сдвиг τ/τ_0 , если принять отношение τ_∞/τ_0 за 100%, составляет: за первые 30 мин — 60%, за первый час — 70% и за первые 8 ч — 80%.

Длительная прочность глинистых грунтов. Одни из первых экспериментальных исследований длительной прочности глинистых грунтов (не мерзлых) были проведены А. Казагранде и С. Уилсоном («Geotechnique», 1951, № 2). Заклучались они в испытаниях на одноосное сжатие образцов различных глин и глинистых сланцев под различными постоянными нагрузками.

Эти испытания показали, что в результате ползучести образцы разрушались при нагрузках, составляющих от 80 до 40% (а в отдельных случаях и до 25%) от кратковременной (за 1 мин) прочности, причем время до разрушения доходило до 30 дней. Особенно снижается прочность у сланцеватых глин из зоны оползней Панамского канала. Это позволило А. Казагранде выявить причину внезапного обрушения, произошедшего через несколько лет после окончания строительства откосов этого канала вследствие снижения прочности грунта, не учтенного при расчете устойчивости откосов.

Другие примеры подобных обрушений были приведены в гл. 1. К ним можно добавить сообщение Е. Гезе и Тан Тьенг-Ки на III Международном конгрессе по механике грунтов (Цюрих, 1953) о разрушении через два года после строительства опор одного моста, давление на которые было определено на основании быстрых испытаний без учета снижения прочности грунта [55]. С этого времени, заявил Е. Гезе, он стал проводить исследования с позиций реологии. К подобным же выводам пришел Хефели, сделавший доклад на том же конгрессе [55].

Обстоятельные исследования длительной прочности грунта, проведенные в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта М. Н. Гольдштейном с сотрудниками (сб. «Вопросы геотехники», 1962, № 5), подтвердили применимость к грунтам классической схемы (см. рис. 9.1) снижения прочности в результате ползучести.

Испытаниями на ползучесть различных глин в условиях одноосного и трехосного сжатия было установлено, что длительное разрушение образцов происходило при нагрузках, составляющих от 90 до 45% от условно-мгновенной прочности σ_0 , под которой имелось в виду сопротивление разрушению при загрузении ступенями, с выдержкой каждой ступени в течение 5 с при общей продолжительности испытания 50—60 с. Так, при испытании иллитовой глины под нагрузками, составляющими 90—80—70—60% от мгновенной, разрушение наступило соответственно через 23 и 151 мин, 3,5 и 77 сут соответственно. При меньших значениях нагрузки деформации затухали и разрушения грунта не наступало. Значение предела длительной прочности при сжатии для полиминеральной тощей глины, монтмориллонитовой, иллитовой и плотной кинельской равнялось $\sigma_\infty = (0,45 \div 0,8) \sigma_0$.

Аналогичные результаты получили другие исследователи при испытании на срез различных глинистых грунтов (Г. Л. Фисенко, 1964) и лёссов (С. Е. Могилевская, 1960). Так, под нагрузками, составляющими 70 и 80% от кратковременной прочности, разруше-

ние образцов произошло через 20 и 90 дней, а отношение τ_{∞}/τ_0 составляло 0,5—0,85.

Плотные глины. Прочность плотных грунтов снижается, хотя и в меньшей степени, чем у пластичных глин. Так, по опытам Г. П. Степаненко [14] с бурыми и пестрыми каолиново-монтмориллонитово-гидрослюдистыми глинами твердой и полутвердой консистенции ненарушенного сложения предельно-длительное сопротивление срезу и одноосному сжатию оказалось равным в среднем 0,9 от кратковременной прочности для бурой глины ($W=$

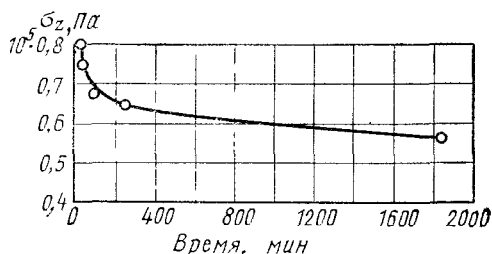


Рис. 9.5. Кривая длительной прочности пластичной глины, $W=65\%$. Испытание на одноосное сжатие (по данным опытов Муроямы и Шиботы)

$=20-30\%$) и 0,7 для пестрой глины ($W=16-28\%$). В отдельных же опытах прочность снижалась до 50%. Кратковременная прочность в этих опытах определялась из испытаний под ступенчато-возрастающей нагрузкой при продолжительности выдерживания каждой ступени 1 мин.

В опытах А. М. Скибицкого, опубликованных в Трудах IV Международ-

ного конгресса по механике грунтов (1957), было получено, что предел длительной прочности на сдвиг составляет 70—75% от кратковременной прочности при загрузке в течение 1 ч для полутвердых нижнемеловых глин, 60—70% — для тугопластичных кипельских глин и 90% — для твердой бейделлит-монтмориллонитовой третичной глины ($W=34\%$ при $W_p=34,5\%$).

Кривые снижения прочности глинистых грунтов. На рис. 9.5 изображена кривая длительной прочности пластичной глины, построенная по данным испытания на ползучесть при одноосном сжатии, показанным на рис. 5.13, б. При общем соотношении $\sigma_{\infty}/\sigma_0=0,6$ процесс снижения прочности протекает у этих грунтов весьма интенсивно и заканчивается относительно быстро. Этот процесс можно, так же как и у мерзлых грунтов, подразделить на две стадии — начальную с весьма интенсивным снижением прочности и последующую с плавным и медленным снижением.

Указанные стадии более четко выделяются на кривых длительной прочности, построенных в двойных логарифмических координатах; перелом прямой $\lg \tau - \lg t$ соответствует границе стадий.

Кривую длительной прочности удобно также строить в координатах «относительная прочность τ/τ_0 — логарифм времени $\lg t$ ». Помимо удобства логарифмической шкалы времени такой график позволяет оценивать интенсивность снижения прочности в виде процента этого снижения на единицу логарифма времени, т. е. $(\Delta\tau/\tau_0) : (\Delta \lg t)$.

На рис. 9.6 в указанном масштабе представлены сводные дан-

ные описанных выше испытаний А. Қазагранде и С. Уилсона при одноосном сжатии. При общем снижении прочности σ_∞/σ_0 (за σ_0 принимают данные 1-минутного испытания, а за σ_∞ — 30-дневного) от 0,8 до 0,55 величина $(\Delta\sigma/\sigma_0) : (\Delta \lg t)$ составила от 4,5 до 9%.

Длительная прочность текучих глин и глинистых растворов. Все приведенные примеры относились к испытаниям пластичных и плотных глин. Рассмотрим длительную прочность глин текучей консистенции. Хотя в принципе в легкоподвижных, слабоструктурированных грунтах могут развиваться неогра-

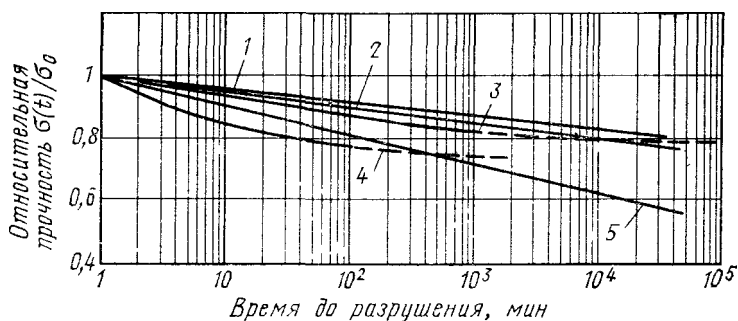


Рис. 9.6. Кривые длительной прочности при одноосном сжатии различных грунтов:

1 — глина Мехико-Сити; 2 — глина Кембриджа; 3 — глинистый сланец Берно; 4 — гумбо р. Миссисипи; 5 — бентонит Оахе

ниченные деформации течения с постоянной скоростью, опыты показывают, что даже в глинистых суспензиях, если они обладают определенной структурированностью, это течение со временем переходит в прогрессирующую стадию, приводящую к вязкому разрушению.

Снижение прочности таких грунтов было проанализировано Н. К. Пекарской на основе ряда опытных данных. В частности, показательны данные опытов Е. И. Кабахидзе и соавторов с 4- % ной суспензией бентонитовой глины, опубликованные в «Коллоидном журнале» (№ 1, 1957).

Испытания на сдвиг этой суспензии показали, что при нагрузках от 5,9 до 16 Па (5,9—16 дин/см²) развивалось течение с постоянной скоростью (порядка 10^{-8} — 10^{-9} 1/с). При нагрузках же больше 16 Па (до 26,8 Па включительно) это течение переходило в прогрессирующую стадию и заканчивалось разрушением структуры. За критерий разрушения принималось неограниченное возрастание скорости деформирования: $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$.

Соответствующая кривая длительной прочности суспензии показана на рис. 9.7. Отношение τ_∞/τ_0 оказалось равным 0,6, т. е. находится в тех же пределах, что и у пластичных глин. Однако процессы

снижения прочности у раствора протекают значительно интенсивнее — продолжительность всего процесса ограничивается 2—3 ч.

В свете рассмотренных данных нельзя признать правильным существующее мнение о том, что прочность снижается лишь у грунтов с жесткими связями. Как видно, прочность снижается и у искусственно приготовленных паст, у которых связи имеют преимущественно водно-коллоидный, а не цементационный характер, и даже у суспензий, у которых жесткие связи отсутствуют.

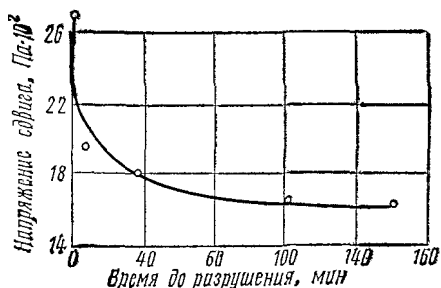


Рис. 9.7. Кривая длительной прочности суспензии бентонитовой глины

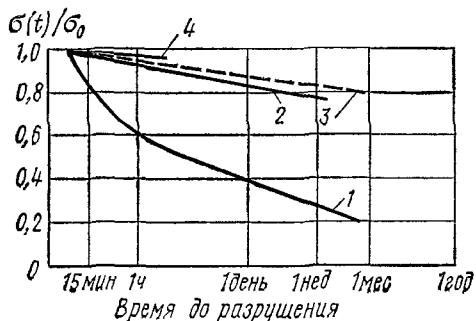


Рис. 9.8. Кривые длительной прочности глин при трехосном сжатии (недренированные испытания):

1 — глина из Форнебу, Осло; 2 — лондонская глина; 3 — кембриджская глина (Массачусетс, США, дренированные испытания); 4 — уилдская глина

кой, нормально-уплотненной форнебской глины из Осло (Бьерум и др.), коричневой лондонской (Скемpton и Ля-Рошель), кембриджской (Казагранде и Уилсон), перематой уилдской (Бишоп и Хенкель). Испытания проводились в приборе трехосного сжатия, причем все опыты выполнялись по «закрытой» системе и только последний — по «открытой».

Как видно по кривой 4, при дренированных испытаниях падение прочности оказалось наименьшим, составляя около 3,5% на каждый отрезок времени. Это объясняется тем, что при дренированных

Дренированные и недренированные испытания. Поскольку снижение прочности грунтов вызывается явлением ползучести, опыты на длительную прочность ведут обычно в таких условиях, когда развивается именно это явление, а фильтрационное уплотнение исключено и плотность-влажность грунта остается в процессе испытания неизменной. Таким условиям отвечают испытания на чистый сдвиг или на трехосное сжатие без дренирования (по «закрытой» схеме).

На рис. 9.8 показан сопоставительный график, построенный по приведенным в докладе А. Скемптона (на VII Международном конгрессе по механике грунтов в Мехико, 1969 [55]) данным о результатах недренированных и дренированных испытаний на длительную прочность различных глин: мягкой, нормально-уплотненной форнебской глины из Осло (Бьерум

испытаниях происходит уплотнение грунта, в результате чего он упрочняется, что и уменьшает эффект снижения прочности. Прочность же грунта при недренированных испытаниях снижалась от 5% (кривая 3) до 14% (кривая 1) на единицы логарифма t . Общее снижение прочности за 1 мес в последнем опыте достигло величины $\sigma/\sigma_0=0,2$, редко встречающейся в опытах с глинами. Такое большое снижение прочности объясняется ростом порового давления и соответственно уменьшением эффективных напряжений.

Вопрос о поровом давлении в процессе ползучести без дренирования представляет большой интерес, поскольку от того, остается ли это давление постоянным или изменяется во времени, в существенной степени зависит интенсивность снижения прочности. Данные же по этому вопросу противоречивы. Д. Коте и Дж. Макрости (ASTM, STP, № 36, 1963) при исследовании глин «Лида» установили, что деформация ползучести приводит к разрушению глины без ощутимого изменения давления в поровой воде.

С другой стороны, Шибата и Карубе [55], испытывая искусственно приготовленные образцы глины на трехосное сжатие по «закрытой» схеме и доведя опыты до разрушения, получили, что поровое давление в процессе ползучести повышается на 25—30%. О повышении порового давления при испытании по «закрытой» схеме свидетельствуют также опыты А. Бишопа и Д. Хенкеля.

В опытах М. Н. Гольдштейна испытания на ползучесть грунта (длительностью 1—3 мес) в условиях «закрытой» схемы привели, как и в описанных выше случаях, к снижению прочности в 1,5—3 раза, тогда как при испытаниях в условиях «открытой» системы прочность грунта вообще не снижалась.

Эти данные подтверждают высказанное мнение о том, что испытания на длительную прочность в условиях трехосного сжатия должны выполняться по «закрытой» схеме и что эти испытания должны быть достаточно длительными; кратковременные опыты могут привести к существенному завышению прочности. Если же нас интересует длительная прочность дренированного грунта, то соответствующие испытания следует вести после окончания процесса его уплотнения.

Длительная прочность полускальных и скальных грунтов. Исследования показали, что способностью снижать в результате ползучести свою прочность обладают даже полускальные и скальные грунты. Это видно, например, из данных, представленных на рис. 5.19, согласно которым мергель, песчаник и каменная соль разрушались при нагрузках, меньших кратковременной прочности. В опытах на ползучесть при одноосном сжатии, проведенных во ВНИМИ с образцами силванита (калийная соль), А. Н. Ставригин [14] получил, что нагрузка, составляющая 85—70—60% от кратковременной прочности, вызвала разрушение за 1,4—4,4—34 сут соответственно, тогда как меньшие нагрузки (50 и 30%) приводили лишь к затухающему деформированию.

Согласно этим данным, для силванита имеем $\sigma_\infty=0,55\sigma_0$. Подобная же закономерность — разрушение при нагрузках, составля-

ющих 78 и 55% от кратковременной прочности соответственно через 49 и 174 дня, — наблюдалась С. Г. Авершиным (1970) и другими исследователями и для каменной соли.

Снижение прочности горных пород отмечается и в натуральных условиях, в горных выработках. В докладах на Всесоюзном симпозиуме по проблемам реологии горных пород (Киев, 1969) отмечалось, что в некоторых междуканальных целиках, простоявших после отработки смежных камер от 12 до 24 мес, прочность породы снижалась на 30—60% по отношению к первоначальной, в результате чего целики теряли устойчивость.

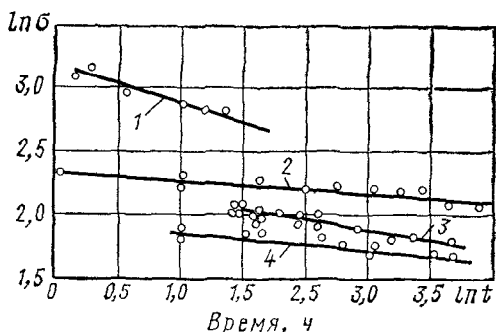


Рис 9.9 Кривые длительной прочности горных пород.

1 — одноосное сжатие известняка, 2 — изгиб песчаника, 3 — изгиб сланца, 4 — изгиб угля

На рис. 9.9 изображены кривые длительной прочности известняков (испытание на сжатие), песчаников, сланцев и каменного угля (испытание на изгиб), приведенные в статье В. Г. Артемьева и В. Л. Водопьянова (сб. «Проблемы реологии горных пород», Киев, 1970). Эти данные наглядно подтверждают факт снижения прочности в процессе ползучести у скальных пород.

Некоторые выводы. Процесс снижения прочности непременно сопутствует процессу незатухающей ползучести (его физическая сущность будет рассмотрена позже) у всех грунтов, начиная от текучих и кончая скальными. Однако интенсивность снижения прочности существенно зависит от типа грунта и его плотности-влажности. Хотя приведенные выше данные о величинах соотношения τ_{∞}/τ_0 трудно сопоставимы, поскольку все исследователи определяли τ_0 при различной скорости загрузки, все же можно оценить пределы изменения этого отношения для основных видов горных пород.

У льда прочность снижается весьма медленно, но безгранично и в пределе $\tau_{\infty}/\tau_0 = 0$.

У мерзлых грунтов процесс снижения прочности тоже протекает медленно, но быстрее, чем у льда, а соотношение τ_{∞}/τ_0 составляет 0,15—0,5.

У пластичных глинистых грунтов прочность снижается сравнительно быстро, а отношение τ_{∞}/τ_0 колеблется в пределах от 0,2 до 0,6. У плотных глин это отношение повышается до 0,5—0,8 и даже до 0,9.

У скальных и полускальных пород в зависимости от вязких свойств как цементационных связей, так и самих кристаллов отношение τ_{∞}/τ_0 варьируется преимущественно в пределах 0,6—0,8.

Интенсивность снижения прочности зависит также от вида напряженного состояния. При сжатии прочность снижается в меньшей степени по отношению к условно-мгновенной, чем при сдвиге и тем более при растяжении.

При сложном напряженном состоянии грунтов интенсивность снижения прочности соответственно зависит от соотношения девиаторной и шаровой частей тензора напряжений: чем больше среднее нормальное напряжение σ_m , тем в меньшей степени снижается прочность. В пределе в условиях всестороннего давления вопрос о длительной прочности лишен смысла.

Натурные данные. Снижение прочности грунтов в процессе ползучести наблюдается также и в натуре. В гл. 1 уже приводились примеры обрушения откосов выемок, устроенных в лондонских плотных трещиноватых глинах моренного происхождения в результате снижения прочности этих грунтов. Указывалось, что обрушения происходили через 13—54 года после устройства выемок и возведения подпорных стенок.

Как показал Д. Хенкель в докладе на IV Международном конгрессе по механике грунтов (Лондон, 1957), коэффициент устойчивости подпорных стенок при значениях $c' = 0,125 \cdot 10^5$ Па и $\phi' = 20^\circ$, определенных из испытаний на трехосное сжатие, составлял от 1,18 до 1,35 [55]. Полагая, что в момент разрушения коэффициент устойчивости был равен 1, Хенкель определил обратным пересчетом, каково было сопротивление сдвигу в момент потери равновесия. Исходя из предположения о том, что сопротивление сдвигу снижается только за счет сцепления, а трение остается постоянным, он установил величину снижения сцепления грунта в моменты обрушения соответствующих объектов; эти данные приведены в табл. 9.1.

Т а б л и ц а 9.1

Объект	Время до разрушения, годы	Величина сцепления	
		$\cdot 10^5$ Па	%
Лабораторные опыты	Часы	0,125	100
Уэмбли Хилл	13	0,083	66,5
Аксбридж	29	0,067	46
Норфолт	35	0,043	35
Вуд Грин	54	0,057	55

Как видно, наблюдается типичное снижение прочности грунтов во времени.

Другие случаи обрушения откосов выемок в тех же лондонских глинах (в Норфолте, Кензал Грине и Садбери Хилл) были рассмотрены А. Скемптоном [59]; кривая длительного смещения одной из подпорных стенок в Кензал Грин была приведена на рис. 5.17 как иллюстрация развития стадии прогрессирующего течения в натуральных условиях.

Обратным пересчетом А. Скемптон определил величину нормальной и касательной составляющих эффективного напряжения, дей-

ствующих в плоскости скольжения в момент обрушения. Используя эти данные, Л. Шукле [46] проделал интересный анализ, вычислив величину сопротивления сдвигу грунта в моменты обрушения (при одинаковом для всех примеров значениях нормального напряжения $\sigma = 0,35 \cdot 10^5$ Па).

Таблица 9.1а

Объект	Время до разрушения, годы	Сопротивление сдвигу	
		10^5 Па	%
Лабораторные опыты	Часы	0,283	100
Норфолт	19	0,179	63
Кензал Грин	29	0,167	59
Садбери Хилл	49	0,134	47
Природные склоны	∞	0,100	35

В результате этих подсчетов были получены данные, аналогичные приведенным данным Хенкеля, но без использования предположения о постоянстве угла внутреннего трения. Вычисленные данные о сопротивлении

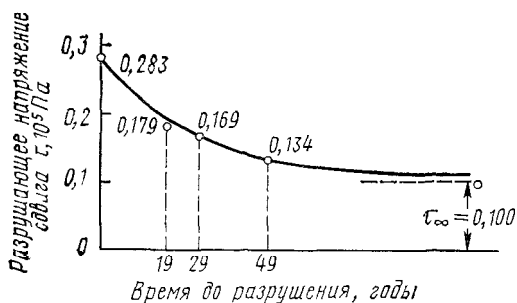


Рис. 9.10. Кривая снижения сопротивления сдвигу в натурных условиях (по Л. Шукле)

сдвигу в момент обрушения были сопоставлены с данными кратковременных лабораторных испытаний. Кроме того, на основании обследования природных склонов было установлено, что средний угол уклона их равен 16° . Приняв этот уклон в качестве предельного, обеспечивающего долговременную устойчи-

вость откосов, Л. Шукле обратным пересчетом установил предельное сопротивление сдвигу. Указанные подсчеты сведены в табл. 9.1а.

Кривая длительной прочности, построенная по этим данным, приведена на рис. 9.10. Как видно, кривая по своему характеру аналогична кривым снижения прочности, полученным при лабораторных испытаниях и рассмотренным выше. В последующем будет показано, что эта кривая описывается тем же законом, что и кривые, полученные при лабораторных испытаниях. Отметим также, что отношение $\tau_\infty/\tau_0 = 0,35$, полученное из натурных наблюдений, совпадает с данными лабораторных опытов.

Приведенный пример со всей очевидностью подтверждает необходимость учета снижения прочности в результате ползучести грунтовых массивов при оценке их устойчивости и необходимости введения в расчеты предельно-длительного, а не кратковременного значения прочности, с тем чтобы установить действительный коэффициент безопасности.

§ 9.3. СНИЖЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ГРУНТОВ СДВИГУ

Влияние нормального напряжения на длительное сопротивление сдвигу. Вопрос о длительной прочности в условиях сложного напряженного состояния будет изложен ниже. Здесь же рассмотрим простейший случай — зависимость длительного сопротивления сдвига от величины эффективного нормального напряжения σ_n' или в общем случае от величины полного напряжения σ_n , поскольку мы рассматриваем процессы ползучести, когда фильтрационные явления исключены (или закончены) и все давление воспринимается скелетом грунта.

Эта зависимость наглядно иллюстрируется схемой рис. 9.11 — с увеличением σ_n развитие деформации ползучести тормозится и разрушение грунта при одном и том же сдвигающем напряжении τ наступает через большее время (рис. 9.11, а). Следовательно, если проводить испытания на ползучесть с тремя группами образцов при различных значениях нормального напряжения $\sigma_n' > \sigma_n'' > \sigma_n'''$ для каждой группы, то получим три семейства кривых ползучести и отвечающие им три кривых длительной прочности (рис. 9.11, б). Кривая длительной прочности для наибольшего нормального напряжения σ_n' будет расположена сверху других и соответственно значения t_0 и t_∞ будут иметь для этого случая наибольшие значения.

Если кривые длительной прочности перестроить в координатах $\tau - \sigma_n$ и аппроксимировать полученную зависимость прямой, то на диаграмме сдвига будем иметь семейство прямых $\tau - \sigma_n$ для разных t (рис. 9.11, в). Эти прямые характеризуют сопротивление сдвигу грунта в различные моменты времени: от $t=0$ (мгновенное сопротивление) до $t=\infty$ (предельно-длительное сопротивление).

Условие длительной прочности грунта. Условие прочности Мора — Кулона (4.8) с учетом снижения сопротивления

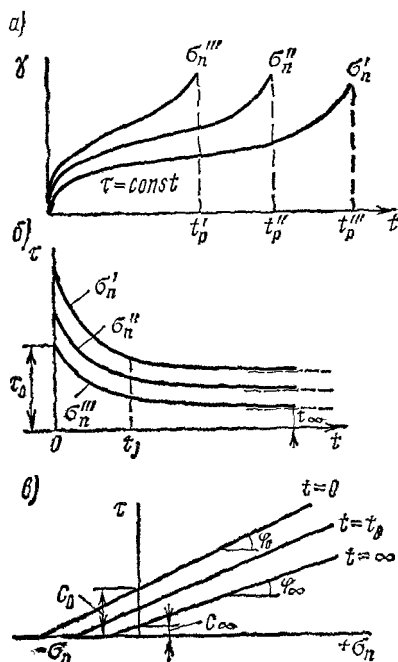


Рис. 9.11. Длительное сопротивление глин сдвигу:

а — кривые ползучести при $\tau = const$ и при различных значениях нормального напряжения $\sigma_n' > \sigma_n'' > \sigma_n'''$; б — кривые снижения сопротивления сдвигу при различных σ_n ; в — диаграмма сдвига для различных моментов времени

грунта во времени имеет форму [3]

$$\tau = c(t) + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi(t), \quad (9.1)$$

где $c(t)$ и $\varphi(t)$ — переменные во времени сцепление и угол внутреннего трения (рис. 9.11).

Значения $c(t)$ и $\varphi(t)$ изменяются от условно-мгновенных c_0 и φ_0 до предельно-длительных c_∞ и φ_∞ (рис. 9.12), соответственно с чем сопротивление сдвигу τ будет иметь наибольшее условно-мгновенное значение и наименьшее — предельно-длительное

$$\tau_0 = c_0 + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_0; \quad \tau_\infty = c_\infty + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_\infty. \quad (9.2)$$

Опыты показывают, что если сцепление грунта изменяется во

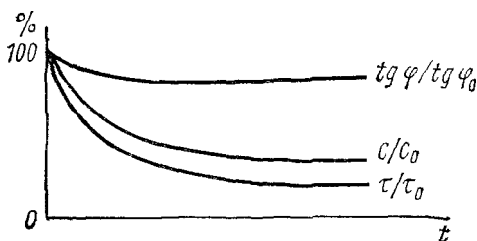


Рис. 9.12 Снижение во времени сопротивления глины сдвигу $\tau(t)$, сцепления $c(t)$ и внутреннего трения $\varphi(t)$ (% по отношению к условно-мгновенным значениям)

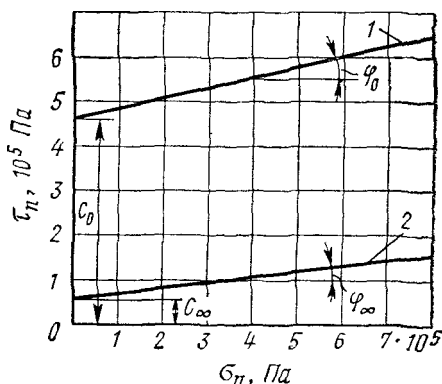


Рис 9.13 Диаграмма мгновенного (1) и предельно-длительного (2) сопротивления сдвигу, суглинка мерзлого $\theta = -0,3^\circ \text{C}$ (опыты С С Вялова)

времени весьма существенно, то угол трения меняется мало, и в ряде случаев его даже можно рассматривать как постоянную величину.

Опытные данные. На рис. 9.13 представлены диаграммы сдвига для условно-мгновенного τ_0 и предельно-длительного τ_∞ сопротивлений, полученные автором книги еще в 1950 г. [3] при испытании пластично-мерзлого грунта (суглинок, $\theta = -0,3^\circ$) на срезном приборе. Из этого графика видно, что прочность грунта изменяется во времени в основном за счет уменьшения сил сцепления, тогда как угол трения изменился в значительно меньшей степени; так, в данном примере $c_\infty/c_0 = 0,145$, тогда как $\operatorname{tg} \varphi_\infty/\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,7$.

Рассмотрим далее огибающие кругов разрушающих напряжений, построенные по данным комплексных испытаний на сжатие, разрыв и чистый сдвиг. Такие диаграммы, полученные Н. К. Пекар-

ской [4] для мерзлой супеси при $\theta = -10^\circ$, приведены на рис. 9.14. В этом случае также получено семейство огибающих для различных

моментов времени, причем эти огибающие оказались криволинейными. Соответственно в общем случае условие длительной прочности можно записать в виде

$$\tau = f(\sigma_n, t). \quad (9.3)$$

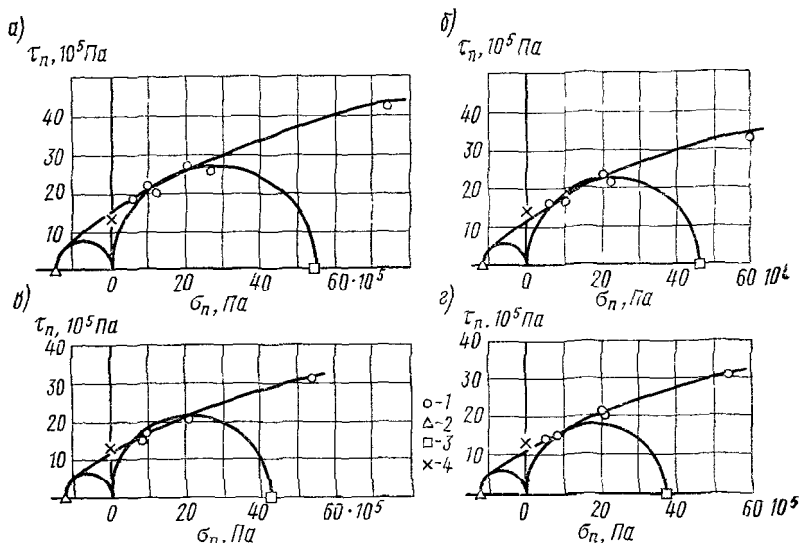


Рис. 9.14. Огибающие кривые кругов разрушающих напряжений для различных моментов времени t :

а — 1 ч; б — 4 ч; в — 12 ч; г — 24 ч. Келловейская супесь мерзлая, $\theta = -10^\circ \text{C}$. Данные испытаний: 1 — на сдвиг, 2 — на разрыв; 3 — на сжатие; 4 — вдавливание шарика (опыты Н. К. Пекарской)

§ 9.4. «ПИКОВАЯ» И ОСТАТОЧНАЯ ПРОЧНОСТЬ ГРУНТА

Испытания с постоянной скоростью деформации. В практике лабораторных опытов по определению механических свойств материалов широко распространен метод испытания с постоянной скоростью деформаций. В этом случае задается постоянная скорость перемещения рабочего органа испытательной машины и измеряется напряжение, возрастающее по мере увеличения деформации испытуемого образца. Полученные данные обрабатывают в виде графика «напряжение — деформация» или «напряжение — время» (поскольку при постоянной скорости деформации величина деформации прямо пропорциональна времени).

Указанный метод испытания был применен для грунтов впервые в 1937—1938 гг. Б. Тидеманном, М. Хворослевым и Р. Хефели, а затем детально рассмотрен А. Скемптоном [59] (1964, 1969), М. Н. Гольдштейном с его сотрудниками («Вопросы геотехники», 1964) и сейчас стал распространенным в механике грунтов. Особенно часто этот метод применяют при изучении оползневых процессов, поскольку считается, что сопротивление сдвигу при постоянной

скорости смещения в определенной степени моделирует условия работы движущегося оползня.

Основным требованием к проведению испытаний с постоянной скоростью деформаций является возможность больших смещений грунта. Для этой цели наиболее удобны приборы кольцевого сдвига; используют также приборы трехосного сжатия. Опыты проводятся при различных постоянных эффективных напряжениях.

Поровое остаточное сопротивление грунтов сдвигу. На рис. 9.15 приведены данные одного из испытаний, проведенных А. Скемптоном [59] с ненарушенным образцом глины из оползня в Уолтонс Вуд. Полученный график типичен для испытаний подобного рода. На рис. 9.15, а изображено изменение изме-

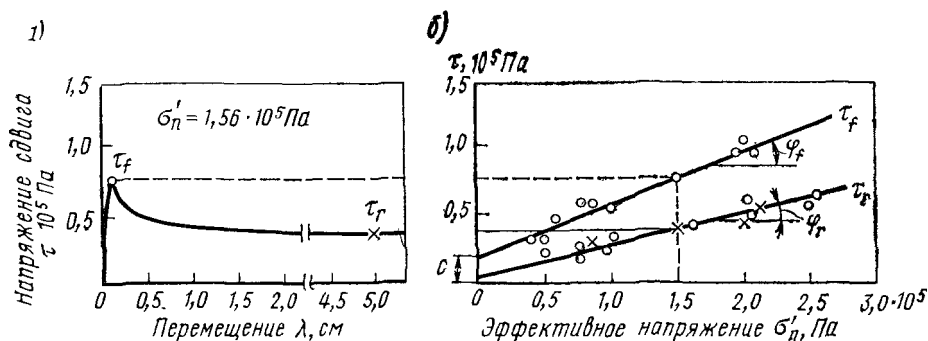


Рис. 9.15. Испытание на сдвиг с постоянной скоростью деформирования:

а — изменение сопротивления сдвигу τ с ростом смещения λ (при эффективном давлении $\sigma'_n = \text{const}$); б — диаграмма сдвига для пикового (τ_f) и остаточного (τ_r) значений

прямого напряжения сдвига τ по мере роста смещения λ при одном из значений эффективного нормального напряжения σ'_n . Отличительная особенность графика — наличие на кривой τ — λ экстремума. Вначале с ростом перемещения напряжение возрастает, достигая максимума. Это максимальное напряжение получило название пикового сопротивления τ_f . После достижения максимума происходит резкое снижение напряжения и затем, по мере дальнейшего роста перемещений, плавное и небольшое его уменьшение вплоть до достижения некоторого минимального значения, названного Хефели остаточным (residual) сопротивлением τ_r . Дальнейшее смещение изменения напряжения уже не вызывает.

Таким образом, по мере развития деформаций происходит снижение сопротивления сдвигу, определенное Скемптоном как ослабление грунта при деформировании. Очевидно, что этот процесс по своей физической сущности является тем же процессом снижения прочности в результате ползучести, который мы рассмотрели выше.

Если провести несколько испытаний при одной и той же скорости смещения, но при различных значениях $\sigma'_n = \sigma_n = \text{const}$, то ре-

зультаты можно представить в виде диаграммы сдвига, построенной для пикового τ_f и для остаточного τ_r сопротивлений (рис. 9.15, б). Соответственно для этих значений применяют следующие зависимости:

$$\tau_f = c_f + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_f; \quad \tau_r = c_r + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_r, \quad (9.4)$$

где c_f , c_r и φ_f , φ_r — сцепление и угол трения для «пикового» и остаточного сопротивлений сдвигу. В рассматриваемом примере $c_f = 0,16 \cdot 10^5$ Па и $c_r = 0$; $\varphi_f = 21^\circ$ и $\varphi_r = 13^\circ$.

Зависимость (9.4), как и диаграммы (рис. 9.15) «пикового» и остаточного сопротивлений сдвигу, аналогичны зависимостям (9.2) и соответствующим им диаграммам мгновенной и длительной прочности (см. рис. 9.13). В обоих случаях прочность грунта сильно снижалась, причем это снижение является следствием главным образом уменьшения сил сцепления грунта, трение же изменяется в меньшей степени.

Соотношение между максимальной и минимальной прочностью грунта. Соотношение τ_r/τ_f в рассматриваемом примере (рис. 9.15) составляет 0,475. «Пиковая» прочность соответствует максимальному сопротивлению грунта сдвига в момент, предшествующий разрушению связей, когда в грунте активно действуют все силы сопротивления — вязкая компонента сцепления, кристаллизационные связи и трение.

Остаточная же прочность соответствует полному или почти полному нарушению кристаллизационных жестких связей. Эти связи неизбежно разрушаются при больших перемещениях частиц и сдвиг происходит по образованной поверхности скольжения по типу сдвига «плитка по плитке».

В соответствии с этим основное сопротивление сдвигу обусловлено трением между «плитками» и вязкой компонентой сцепления. Естественно, что при этом возрастает роль нормального напряжения σ_n . Все исследователи единодушно отмечают, что с уменьшением скорости смещения существенно понижается «пиковая» прочность грунта. Так, по данным Днепропетровского института инженеров транспорта (опыты С. С. Бабицкой), при уменьшении скорости деформирования в 10^4 раз значения τ_f уменьшились на 26% для суглинка и на 40% для глины. Соответственно «пик» на диаграмме τ — λ (рис. 9.16) уменьшается и, по П. А. Ребиндеру, при очень медленном деформировании вообще исчезает.

Зависимость остаточной прочности грунта от скорости смещения проявляется в этом случае в значительно меньшей степени. Опыт А. Скемптона с лондонскими глинами и идейскими сланцами показали, что уменьшение скорости смещения в 10^3 раз (от 2 см/год до 20 см/сут) понизило значение τ_r всего на 4%. В упомянутых же выше опытах С. С. Бабицкой влияние скорости смещения на величину τ_r вообще не было отмечено.

Таким образом, если оценивать устойчивость грунтового массива по «пиковой» прочности, то надо вводить в расчет коэффициент, учитывающий соотношение скорости смещения грунта в лаборатор-

ных и натурных условиях. А. Скемптон считает, что такое снижение можно принять равным 3,5 на единицу логарифма времени. Если же устойчивость грунтового массива оценивать исходя из остаточной прочности (определенной, например, при скорости смещения 1 см/сут), то возможная погрешность по сравнению с натурной не превышает 2—5%, если скорость смещения грунта (оползание склона, откоса) принять в таком широком диапазоне как 1 см/год — 100 см/сут.

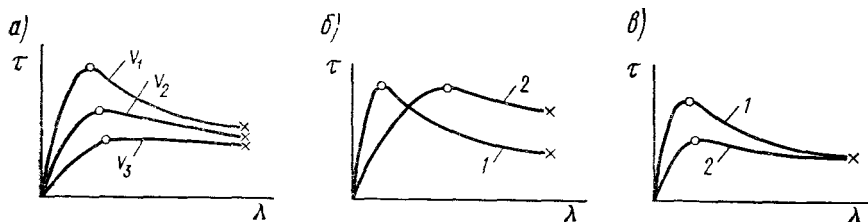


Рис. 9.16. Кривые «напряжение — перемещение»:

а — при различных скоростях перемещения $v_1 > v_2 > v_3$; б — для хрупких (1) и пластичных (2) грунтов; в — для переуплотненных (1) и нормально-уплотненных (2) грунтов

Влияние плотности-влажности грунта на его прочность. Вид кривой $\tau-\lambda$ и соответственно соотношение между «пиковой» и остаточной прочностью существенно меняются в зависимости от плотности-влажности грунта. Если для хрупкой глины характерна кривая с явно выраженной «пиковой» прочностью, намного превышающей остаточное сопротивление, то у кривой для пластичной глины «пика» почти нет, т. е. значения «пиковой» и остаточной прочности у этой глины почти не различаются между собой (рис. 9.16, б). А. Бишопом предложен специальный критерий, названный числом хрупкости:

$$I_B = \frac{\tau_f - \tau_r}{\tau_f} \quad (9.5)$$

При $I_B=1$ грунт является хрупким, при $I_B=0$ — пластичным. Кривая 1 на рис. 9.16, б соответствует $I_B=0,6$, кривая 2 — $I_B=0,1$.

Кривые для переуплотненной и нормально-уплотненной глины изображены на рис. 9.16, в. Кривая 1 для переуплотненной глины имеет явно выраженный «пик» и разница между τ_f и τ_r у этого грунта достаточно велика. Для нормально-уплотненной глины (кривая 2) «пик» на кривой $\tau-\lambda$ сглаживается и разница между τ_f и τ_r уменьшается. При этом значение τ_r для переуплотненной и нормально-уплотненной глины является одним и тем же.

Соотношение мгновенной, длительной, «пиковой» и остаточной прочности грунта. Рассмотрим соотношение между условно-мгновенной τ_0 и предельно-длительной τ_∞ прочностью (см. рис. 9.1), с одной стороны, и «пиковой» τ_f и остаточной τ_r прочностью (см. рис. 9.15) — с другой.

Выше говорилось, что «пиковое» сопротивление τ_f повышается с увеличением скорости деформации. Очевидно, что «пиковая» прочность при наибольшей, практически возможной скорости будет соответствовать условно-мгновенной прочности $\tau_f \rightarrow \tau_0$.

Значение остаточной прочности τ_r , как показали опыты, проведенные в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта, для пластичных грунтов с водно-коллоидными связями оказалось весьма близким к значению предела длительной прочности τ_∞ . Для грунтов же с жесткими связями (плотные глины, полускальные грунты) τ_r будет меньше величины τ_∞ . Действительно, предел длительной прочности есть сопротивление грунта еще не разрушенной структуры, включающее в себя как сцепление, так и трение. Остаточное же сопротивление есть сопротивление грунта с разрушенными связями, обусловленное в основном лишь трением.

Таким образом, в тех случаях, когда ведут расчет на устойчивость, не допуская развития незатухающих деформаций и больших сдвигов, за расчетную характеристику нужно принимать предел длительной прочности. Если же рассматривают процесс смещения массы грунта (например, в случаях оползней, длительного течения склона) и интересуются сопротивлением сдвигу в процессе смещения, то в расчете следует исходить из остаточной прочности грунта.

§ 9.5. КРИТЕРИИ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Условие длительной прочности. Закономерность длительной прочности грунта можно вывести из уравнения ползучести, введя в последнее тот или иной критерий его длительного разрушения.

Автором книги (1956) и М. Н. Гольдштейном (1957) было высказано предположение о том, что разрушение грунта наступает тогда, когда накопление пластической деформации (деформации ползучести) γ^c достигает некоторого постоянного предела γ_r^c , превышение которого ведет к разрушению. Это означает, что в качестве критерия разрушения было принято достижение деформацией ползучести постоянного значения

$$\gamma^c = \gamma_r^c = \text{const}, \quad (9.6)$$

являющегося константой данного грунта, не зависящей ни от величины напряжения, ни от времени до разрушения.

Постоянство предельной деформации. Строго говоря, величина деформации γ_r^c (или ϵ_r^c при сжатии), соответствующая моменту разрушения, изменяется в зависимости от времени до разрушения t_p , или, что то же самое, в зависимости от величины напряжения τ — вначале возрастает до некоторого максимума, а затем снижается по мере увеличения времени t_p (рис. 9.17). Изменение γ_r^c при малых временах до разрушения отчетливо видно, например, на рис. 9.17, а.

Если же исключить из рассмотрения участок малых t_p , то в дальнейшем γ_r^c будет изменяться не очень существенно и во мно-

гих случаях эту величину можно условно принять в качестве константы. Постоянство величины пластической деформации γ_p^c , соответствующей моменту разрушения, наглядно подтверждается видом кривых ползучести (при одноосном сжатии), приведенных ранее на рис. 5.13, б. Для всех этих кривых значение ϵ_p^c колеблется в

пределах от 0,09 до 0,1, т. е. практически остается постоянным. Подобные же результаты получены в опытах М. Н. Гольдштейна и сотрудников: при изменении времени до разрушения от 1 до 10^5 мин ϵ_p^c варьировалось в пределах обычного разброса опытных точек.

О малом изменении значения ϵ_p^c свидетельствуют также данные испытаний мерзлых грунтов, в частности данные, приведенные на рис. 5.14 и 5.23. Так, согласно графикам на рис. 5.14, в, г, средние значения предельной деформации ϵ_p^c для супесей оказались равными $0,16 \pm 0,03$ и для плотной глины бат-байосса — $0,06 \pm 0,015$.

Величина γ_p^c (или ϵ_p^c) зависит от типа грунта, увеличиваясь у пластичных грунтов, которым свойственно вязкое разрушение. Эта величина, по-видимому, также зависит от вида напряженного состояния и будет различной, например, для сжатия, растяжения и сдвига.

Возвращаясь к условию (9.6), следует отметить, что, строго говоря, оно не является

Рис. 9.17. Условия длительного разрушения грунтов:

а — условие постоянства предельных деформаций $\gamma = \gamma_p = \text{const}$; б — то же, произведения скорости деформаций на время до разрушения $\dot{\gamma} t_p = \text{const}$; в — то же, работы деформации $A t_p = \text{const}$

физическим условием. Такое условие и его связь с (9.6) будут рассмотрены в дальнейшем. Здесь же отметим, что вне зависимости от того, является ли γ_p^c константой грунта или нет, принятие этого условия означает ограничение использования грунта при достижении деформацией предельного значения. Это условие как бы объединяет расчет по пределу длительной прочности и по пределу ползучести. Если же в некотором диапазоне времени фактическая деформация разрушения будет больше принятого значения $\gamma_p^c = \text{const}$, то сделанное ограничение пойдет в запас прочности.

Подставив условие (9.6) в уравнение деформирования (5.8) $\gamma_p^c = f(\tau)\Phi(t_p)$ и решив это выражение относительно τ , получим уравнение длительной прочности

$$\tau = \frac{\text{const}}{\psi(t_p)}, \quad (9.7)$$

связывающее напряжение τ , вызвавшее разрушение, и t_p — время, через которое это разрушение произошло. Эта связь имеет гиперболический вид — напряжение обратно пропорционально функции времени.

Постоянство произведения скорости деформации грунта на время до его разрушения. На стадии установившегося течения деформацию ползучести γ^c в любой момент времени t можно выразить через скорость течения: $\gamma^c = \dot{\gamma}t$. В момент разрушения $t = t_p$ деформация будет равна $\gamma_p^c = \dot{\gamma}t_p$, и тогда условие (9.6) можно записать в форме

$$\dot{\gamma}t_p = \text{const}. \quad (9.8)$$

Условие (9.8), хорошо известное в теории ползучести, вытекает, таким образом, из условия (9.6). Возможность применения условия (9.8) к грунтам была показана М. Саито и Х. Уезавой в докладах на V, VI и VII Международных конгрессах по механике грунтов [55], а также и У. Лейм Финном и Д. Шидом в докладе на VIII конгрессе [55].

На рис. 9.18 изображен сводный график зависимости между скоростью течения и временем до разрушения, составленный как по указанным выше данным, так и по данным некоторых других авторов. В график включены данные лабораторных опытов и натурных наблюдений. Лабораторные данные относятся к испытаниям на одноосное и трехосное сжатие, натурные же — к наблюдениям за скоростью смещения откосов выемок и склонов.

Несмотря на то что приведенные данные получены для самых различных грунтов (включая грунты нарушенного и ненарушенного сложения, грунты различной степени уплотненности и различной влажности), все опытные точки достаточно кучно ложатся около единой прямой. Пунктирные линии на рис. 9.18 ограничивают по-

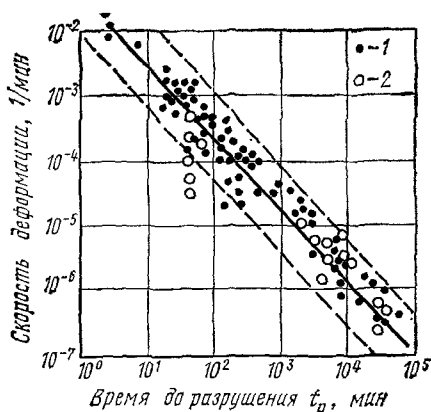


Рис. 9.18. Зависимость между скоростью деформации и временем до разрушения:

1 — данные лабораторных опытов различных исследований; 2 — данные натурных наблюдений и крупномасштабных экспериментов

лосу разброса, включающую 95% опытных точек. Таким образом, зависимость между временем до разрушения и скоростью $\dot{\epsilon}$ (или в общем случае $\dot{\gamma}$) можно выразить как $\lg t_p = \lg C + b \lg \dot{\gamma}$, откуда

$$t_p = C/\dot{\gamma}^b, \quad (9.9)$$

где $C = \text{const}$.

Значение параметра b колеблется в пределах от 0,92 до 1,08 и его можно принять $b=1$. Тогда зависимость (9.9) совпадает с условием (9.8):

$$t_p = C/\dot{\gamma}. \quad (9.10)$$

Величина безразмерной константы C равнялась по М. Сайто 0,023, а по У. Финну — 0,017, т. е. изменялась в сравнительно небольшой степени, несмотря на существенные различия в условиях опытов, разнообразие грунтов и т. д. Вопрос о том, является ли значение константы C единым для всех видов грунтов и для всех условий деформирования или зависит от указанных факторов, требуется специально изучить. Нам представляется, что второе предположение более вероятно. Однако малые колебания опытных значений C (они находятся в пределах 95% полосы, как показано на рис. 9.18) при столь большом различии в типах грунтов и в условиях опытов позволяет предположить, что зависимость C от вида грунта и вида напряженного состояния невелика.

Прогноз времени до разрушения откосов и склонов. Условие (9.8) является частным случаем более общего условия (9.6), поскольку последнее справедливо для любого вида кривой незатухающей ползучести, тогда как условие (9.8), строго говоря, применимо лишь для установившегося, ньютонова течения, скорость которого является постоянной от момента приложения нагрузки $t=0$ до момента разрушения t_p .

Вместе с тем малые изменения величины C в зависимости (9.10) позволяют практически распространить это условие на процесс ползучести с изменяющейся скоростью деформирования. В этом случае в соотношение (9.10) можно подставить значение $\dot{\gamma}$, соответствующее скорости деформирования на стадии установившегося течения $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_T = \text{const}$, отсчитывая время разрушения от момента начала этой стадии t_T , т. е. принимая $t_p - t_T = C/\dot{\gamma}_T$. Если же стадия течения явно не выражена, то можно исходить из минимальной скорости деформирования, отсчитывая t_p от момента t_0 , соответствующего этой скорости.

Наконец, условие (9.8), как показал М. Сайто на VII конгрессе по механике грунтов [55], можно распространить на прогрессирующую стадию ползучести с увеличивающейся скоростью деформации. В этом случае зависимость (9.10) заменяют соотношением

$$\gamma = C \lg \frac{t_p - t_0}{t_p - t}, \quad (9.11)$$

где γ — деформация ползучести в любой момент времени t ; t_0 — время, принимаемое за нулевой отсчет; t_p — время до разрушения, отсчитываемое от момента t_0 .

Решение уравнения (9.11) относительно интересующего нас значения t_p можно получить графически по трем точкам на кривой ползучести (на участке прогрессирующего течения). Задав произвольными значениями t_1, t_2, t_3 , связанными условием, чтобы разность деформаций, соответствующая этим моментам времени, была одинакова: $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma_3 - \gamma_2$, — можно привести уравнение (9.11) к виду

$$t_p - t_1 = \frac{0,5(t_2 - t_1)^2}{(t_2 - t_1) - 0,5(t_3 - t_1)}. \quad (9.12)$$

Величину t_p удобно определять графическим путем.

Зависимости (9.10) и (9.11) можно применять для прогноза по данным наблюдений за перемещением откосов и склонов возможного срока их обрушения.

Постоянство работы деформации. Более общим по сравнению с (9.8) условием длительного разрушения будет условие постоянства произведения скорости работы пластической деформации на время разрушения:

$$\dot{A}t_p = \text{const}, \quad (9.13)$$

где $\dot{A}$ — удельная мощность напряжения, определяемая выражением (4.79). В случае, если $\dot{A}$ переменна во времени, условие (9.13) запишется в виде

$$\int_0^{t_p} \dot{A}(t) dt = \text{const}. \quad (9.14)$$

Из условий (9.13) и (9.14) следует, что разрушение грунта наступает в тот момент, когда работа деформации достигнет некоторого предельного значения (см. рис. 9.17, θ).

Поскольку здесь рассматриваются вязкопластические деформации, условие (9.15) относится к диссипированной работе.

$$A = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p,$$

где σ_{ij} и $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ — компоненты тензоров напряжений и скорости пластической деформации.

Наиболее общим, однако, является термодинамический подход, при котором рассматривают изменение энтропии тела в процессе деформирования. Согласно этому подходу, условием разрушения грунта является достижение приращением плотности энтропии ΔS (в свою очередь зависящим от внешних сил, температуры и внутренних термодинамических потоков), накопленной в процессе ползучести, некоторого критического значения $\Delta S_{кр}$, зависящего от степени изменения структуры тела при данном виде разрушения:

$$\Delta S(t_p) = \Delta S_{кр}. \quad (9.15)$$

Это условие было сформулировано независимо И. И. Гольденблатом (см.: В. В. Болотин, И. И. Гольденблат и др. Строительная механика. Современное состояние и перспектива развития. Стройиздат, 1973) и А. И. Чудновским (сб. «Исследования по упругости и пластичности». ЛГУ, 1973, № 9).

§ 9.6. УРАВНЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Исходное уравнение. Физическая сущность процесса длительного разрушения грунта будет рассмотрена в гл. 10. Здесь же приведем вывод уравнения длительной прочности грунта, положив в основу условие длительного разрушения (9.6) и уравнения ползучести, полученные из макроопытов. На основании этого и используя соотношение (5.7), можем записать

$$\varphi(\gamma_p) = \tau\psi(t_p) = \text{const}, \quad (9.16)$$

где $\gamma_p = \text{const}$ — величина деформации ползучести в момент разрушения $t = t_p$; $\varphi(\gamma_p)$ — функция, характеризующая связь между деформацией γ_p и напряжением τ ; $\psi(t_p)$ — функция времени, определяющая, за какое время t деформация ползучести достигнет критического значения $\gamma = \gamma_p = \text{const}$.

Решив (9.16) относительно напряжения, получим ранее рассмотренную зависимость (9.7).

$$\tau = \frac{\text{const}}{\psi(t_p)}. \quad (9.17)$$

Соотношение (9.17) целесообразнее получить из интегрального уравнения ползучести вида (7.44), приняв

$$\varphi(\gamma_p) = \tau \int_0^{t_p} K(t) dt. \quad (9.18)$$

Примем значение ядра уравнения ползучести в форме (7.52):

$$K(t) = \left(\frac{T_2}{T_1 + t} \right)^n. \quad (9.19)$$

Тогда уравнение длительной прочности, полученное из соотношения (9.18), будет иметь вид

$$\tau = \frac{N}{\int_0^{t_p} \left(\frac{T_2}{T_1 + t} \right)^n dt}. \quad (9.20)$$

Логарифмическое уравнение длительной прочности грунта. Положив в выражении (9.19) $n = 1$, $T_1 = T$ и $T_2 = \delta$, получим из (9.20) выражение

$$\tau = \frac{\beta}{\ln \frac{t_p + T}{T}}, \quad (9.21)$$

где $\beta = N/\delta$, Па; $N = A_0(\gamma_p^c)^m$, Па; A_0 — коэффициент деформирования, Па; δ и m — безразмерные параметры.

Уравнение (9.21) не вполне отвечает начальному условию, поскольку при $t=0$ получаем $\tau_0 = \infty$. Поэтому более точной является следующая запись:

$$\tau = \frac{\beta}{\ln \frac{t_p + t^*}{T}}, \quad (9.22)$$

где t^* — произвольное малое значение времени (например, $t^* = 1$ с), причем размерность единицы (с, мин, ч) должна быть на несколько порядков меньше общей продолжительности наблюдения.

Для моментов времени $t \gg t^*$ значением t^* можно пренебречь, приняв

$$\tau \simeq \frac{\beta}{\ln(t_p/T)}, \quad (9.22')$$

что справедливо при $t_p > T$.

Формула (9.22) была принята для грунтов автором книги [3, 4] и получила экспериментальное подтверждение в работах многих других исследователей; особенно часто эту формулу применяют при оценке длительной прочности мерзлых грунтов.

Из выражения (9.22) следует, что условно-мгновенная прочность (при $t=0$) равна

$$\tau_0 = \frac{\beta}{\ln(t^*/T)} = \frac{\beta}{\ln(1/T)},$$

и соответственно формулу (9.22) при $t^* = 1$ можно переписать в форме

$$\nu \frac{\tau_0}{\tau} = \ln \frac{t_p + 1}{T} \quad \text{или} \quad \nu \frac{\tau_0 - \nu}{\nu} = \ln(t_p + 1), \quad (9.23)$$

где $\nu = \ln \frac{1}{T}$; $\frac{\tau_0 - \nu}{\nu}$ — уровень напряжения.

Отметим, что для металлов, пластмасс и других материалов (иногда и для грунтов) успешно применяют также уравнение длительной прочности, несколько отличное от (9.22),

$$\tau = \beta \ln \frac{T}{t_p + t^*} \approx \beta \ln \frac{T}{t_p}, \quad (9.24)$$

где $\beta \ln(T/t^*) = \tau_0$.

Формулу (9.24) можно получить и из совместного рассмотрения выражений (9.17) и (4.65).

Сопоставление результатов подсчетов по формулам (9.24) и (9.22) показало [3], что эти результаты для определенного интервала времени достаточно близко совпадают как между собой, так и с опытными данными. При очень же больших интервалах времени формулой (9.22) пользоваться предпочтительнее, поскольку согласно (9.24) при времени $t_p = T$ прочность τ падает до нуля, тогда как согласно (9.22) такое падение прочности происходит лишь при $t_p \rightarrow \infty$.

Рассмотрим вопрос о снижении прочности при неограниченно длительном воздействии нагрузки. Согласно формуле (9.22), прочность снижается беспредельно и кривая длительной прочности асимптотически стремится к оси абсцисс, т. е. при $t \rightarrow \infty$ прочность $\tau \rightarrow 0$. Поэтому в качестве условного предела длительной прочности τ_∞ следует рассматривать прочность, соответствующую некоторому предельному моменту времени до разрушения t_∞ :

$$\tau_\infty = \frac{\beta}{\ln \frac{t_\infty}{T}}. \quad (9.25)$$

Значение t_∞ определяется или сроком службы сооружения, или соотношением

$$t_\infty = (100T^{0,03})^{1/1,03}, \quad (9.26)$$

где t_∞ и T выражают в годах. Значение t_∞ в формуле (9.26) есть такое время, по превышении которого уменьшение прочности за $t=100$ лет составит менее 3%, т. е. t_∞ есть время, при котором выполняется условие

$$\frac{\tau_\infty - \tau_{100}}{\tau_{100}} = 0,03,$$

где τ_{100} — теоретическое значение прочности при $t=100$ лет; τ_∞ — расчетное значение условного предела длительной прочности.

Степенное уравнение длительной прочности. Положив в выражении (9.19) $n=1-\alpha$, $T_1=0$, $T_2=(\alpha\delta/T^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, получим из (9.20) следующий вид уравнения длительной прочности, также широко используемый в теории ползучести:

$$\tau = \left(\frac{t_p}{T^*} \right)^{-\alpha}, \quad (9.27)$$

где $T^* = T(N/\alpha)^{1/\alpha}$; $N = A_0(\gamma_p^c)^m$.

Поскольку при $t=0$ по формуле (9.27) имеем $\tau_0 = \infty$, эту формулу можно записать в форме, более соответствующей реальным условиям, положив верхний предел интеграла в (9.20) равным $t+t^*$:

$$\tau = \left(\frac{t_p + t^*}{T^*} \right)^{-\alpha}, \quad (9.28)$$

где t^* — произвольное малое значение времени, например $t^*=1$ (с, мин, ч). Тогда при $t=0$ имеем $\tau_0 = (T^*)^\alpha$ и формула (9.28) при $t^*=1$ получит вид

$$\frac{\tau_0}{\tau} = (t_p + 1)^{(\alpha)}. \quad (9.29)$$

Прочность грунта τ согласно формуле (9.29), так же как в предыдущем случае, снижается безгранично (при $t_p \rightarrow \infty \tau \rightarrow 0$).

Дробно-линейное уравнение длительной прочности. Положив в выражении (9.19) $n=2$, $T_1=T$, $T_2=[T(\delta-1)]^{1/2}$, получим из (9.20) дробно-линейное уравнение длительной прочности грунта

$$\tau = \frac{N}{\delta - 1} \frac{T + t_p}{t_p}, \quad (9.30)$$

где $N = \varphi(\gamma_p) - \varphi(\gamma_0)$, причем $\varphi(\gamma_p) = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_p} \gamma_p$.

Условием разрушения для данной зависимости будет достижение деформацией бесконечно большого значения $\gamma_p = \infty$ (см. рис. 5.8), откуда $\lim_{\gamma_p \rightarrow \infty} \varphi(\gamma_p) = \tau_s$.

С другой стороны, из (5.24) следует, что $\varphi(\gamma_0) = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_0} \gamma_0$.

Тогда $N = \tau_s - \tau$ и соотношение (9.30) получит вид

$$\tau_s - \tau = \tau (\delta - 1) \frac{t_p}{T + t_p}.$$

При $t_p=0$ имеем $\tau_0 = \tau_s$; при $t_p = \infty$ получим $\tau_0 - \tau_\infty = \tau_\infty (\delta - 1)$, откуда $\tau_\infty = \tau_0 / \delta$, как это и постулировалось в гл. 5 при анализе формулы (5.22). Подставив значение $N = \tau_0 - \tau$ в выражение (9.30) и проделав простейшие преобразования, получим уравнение длительной прочности грунта

$$t_p = \frac{T}{\delta} \frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty}, \quad (9.31)$$

где $\delta = \tau_0 / \tau_\infty$; $\frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty}$ — уровень напряжения грунта.

Формула (9.31), полученная (иным путем) Ю. К. Зарецким (1971), описывает процесс, в котором прочность снижается до конечного значения — предела длительной прочности τ_∞ ; соответственно кривая длительной прочности имеет асимптоту $\tau \rightarrow \tau_\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Далее будет показано, что дробно-линейная формула (9.31) не дает достаточно хорошего совпадения с опытными данными и что несколько лучшее совпадение получают, если связь между временем до разрушения и уровнем напряжения принять в виде степенной зависимости, а именно:

$$t_p^\alpha = \left(\frac{T}{\delta} \right)^\alpha \frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty}. \quad (9.32)$$

Эту формулу можно получить из уравнения (5.22), если в последнем время t ввести с показателем степени α . Если к тому же деформацию γ выразить в виде степенной функции γ^m , то уравнение ползучести (5.22) можно представить в более универсальной форме:

$$\gamma^m = \frac{\tau (1 + \delta t^\alpha)}{G_0 [T (1 - \tau/\tau_s) + t (1 - \delta \tau/\tau_s)]}. \quad (9.33)$$

§ 9.7. МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Проверка достоверности применимости различных формул. Проверку степени соответствия уравнений длительной прочности (9.22), (9.28), (9.31), (9.32) с опытными данными производят путем выравнивания кривых длительной прочности, преобразовывая указанные уравнения к линейному виду $Y = BX + D$ аналогично тому, как это было показано в § 6.2 и 6.3.

Формулу (9.22) можно привести к линейной форме, если преобразовать ее в следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\beta} \ln(t_p + 1) - \frac{1}{\beta} \ln T. \quad (a)$$

Формулу (9.28) можно тоже привести к линейной форме путем преобразования:

$$\ln \tau = \alpha \ln(t_p + 1) - \alpha \ln T^*. \quad (б)$$

В свою очередь, формулу (9.31) можно привести к следующему линейному виду:

$$\frac{t_p}{\tau_0 - \tau} = \frac{1}{\tau_0 - \tau_\infty} t_p + \frac{T}{\delta} \frac{1}{\tau_0 - \tau_\infty}, \quad (в)$$

причем τ_0 должно быть известно из опытов.

Наконец, формулу (9.32) можно преобразовать к виду

$$\ln \frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty} = \alpha \ln t_p - \alpha \ln (T/\delta). \quad (г)$$

Отметим, что для решения уравнения (г) необходимо предварительно определить τ_∞ . При известном из опыта значении τ_0 величину τ_∞ можно вычислить по трем точкам опытной кривой длительной прочности, абсциссы которых связаны соотношением $(t_1/t_2)^2 = t_1/t_3$. Подставив это соотношение в выражение (г) и избавившись от его правой части, получим, что ординаты τ_1 , τ_2 и τ_3 выбранных точек связаны между собой соотношением

$$\frac{(\tau_3 - \tau_\infty)(\tau_1 - \tau_\infty)}{(\tau_2 - \tau_\infty)^2} = \frac{(\tau_0 - \tau_1)(\tau_0 - \tau_3)}{(\tau_0 - \tau_2)^2}, \quad (д)$$

откуда находим значение τ_∞ .

Определение параметров, входящих в приведенные выше выражения (а) — (г), и дальнейшую обработку опытных данных (вычисление средней квадратической ошибки ε ; среднего квадратического отклонения σ , коэффициента корреляции r и коэффициента v) ведут по формулам, приведенным в § 6.2 и 6.3.

Обработка опытных данных*. В качестве примера рассмотрим данные испытания [3] на длительную прочность при сдвиге мерзлого грунта (супесь пылеватая, $\theta = -0,4^\circ$) вдоль боковой поверхности свай. Опыты проводились под различными постоянными сдвигающими нагрузками с определением времени до разрушения t_p . Полученные данные приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Данные испытания на длительную прочность мерзлого грунта

№ точек	1	2	3	4	5	6	7
Напряжение, 10^5 Па	4,8	2,3	2,1	1,9	1,7	1,5	1,3
Время до разрушения, с/ч	14	$19,1 \times 10^3$	$11,9 \times 10^4$	$15,45 \times 10^5$	$\frac{2,84 \times}{\times 10^6}$	$\frac{17,05 \times}{\times 10^6}$	Не разрушилось
	$\frac{3,9 \times}{\times 10^{-3}}$	2,4	33	429	788	4735	

Опытное значение предела длительной прочности было принято равным $\tau_\infty \approx (1,30 \div 1,35) \cdot 10^5$ Па.

Обработка опытных данных по формуле (9.22). Приведем формулу (9.22) к линейному виду $Y = BX + D$, в соответствии с выражением (а) принимаем $X = \ln(t_p + 1)$ (в секундах) и $Y = 1/\tau$.

Опытные точки, нанесенные на график рис. 9.19, а в указанном масштабе, достаточно хорошо ложатся на прямую, что свидетельствует о достоверности формулы (9.22). Угол наклона полученной прямой к оси абсцисс определит значение параметра $B = 1/\beta$, а отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, дает значение параметра $D = -(1/\beta) \ln T$.

Аналитически вычислить значения указанных параметров можно по формулам (6.12), для чего в табл. 9.3 сводим предварительные вычисления значений X , Y , X^2 , Y^2 , XY . Выполнив соответствующие подсчеты, получим:

$$B = \frac{70,01 \cdot 2,90 - 6 \cdot 37,79}{70,01^2 - 6 \cdot 948} = 0,0304; \quad D = \frac{70,01 \cdot 37,79 - 2,90 \cdot 948}{70,01^2 - 6 \cdot 948} = 0,128.$$

* Обработку опытных данных в § 9.7, а также в § 10.8, 11.6 и 13.5 производил М. Э. Слепак.

Отсюда находим значения параметров β и T , входящих в исходное уравнение (9.22): $\beta = 1/0,0304 = 32,9 \cdot 10^5$ Па; $T = e^{-\beta D} = \exp(-32,9 \cdot 0,128) = 0,015$ с.

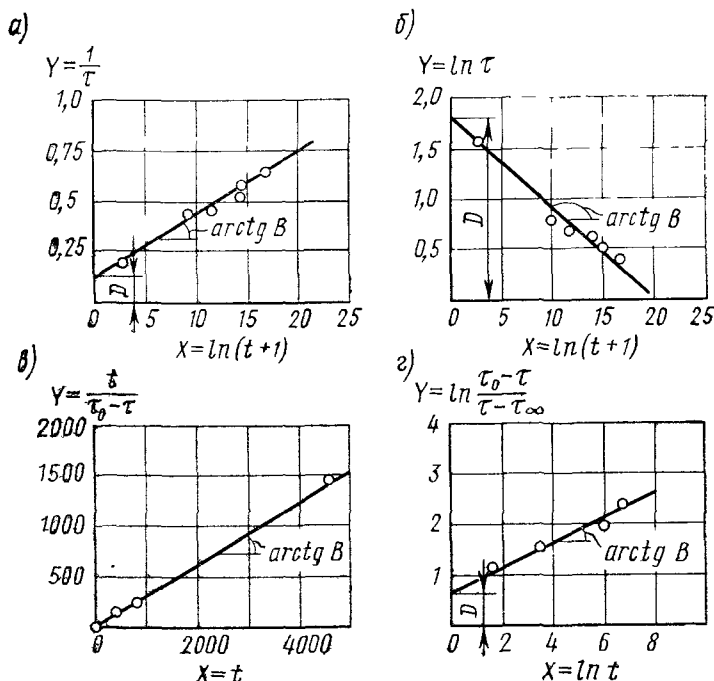


Рис. 9.19. Спрямление кривых длительной прочности с использованием различных формул:
 а — формула (9.22); б — формула (9.28); в — формула (9.31); г — формула (9.32)

Таблица 9.3

Обработка данных испытания грунта на длительную прочность
 в соответствии с формулой (9.22)

№ точек	t_p, c	$\tau, 10^5$ Па	X	Y	X^2	Y^2	XY	$\tau_{выч}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	14,0	4,8	2,708	0,208	7,4	0,043	0,564	4,75	0,01	10^{-4}
2	$19,1 \cdot 10^3$	2,3	9,852	0,435	97,3	0,191	4,29	2,34	-0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
3	$11,9 \cdot 10^4$	2,1	11,687	0,475	138	0,227	5,57	2,07	0,01	10^{-4}
4	$15,45 \cdot 10^5$	1,9	14,254	0,526	204	0,278	7,52	1,78	0,06	$36 \cdot 10^{-4}$
5	$2,84 \cdot 10^6$	1,7	14,857	0,588	221	0,348	8,75	1,73	-0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
6	$17,05 \cdot 10^6$	1,5	16,655	0,666	280	0,447	11,1	1,58	-0,05	$25 \cdot 10^{-4}$
Σ	—	—	70,01	2,90	948	1,534	37,79	—	—	$7 \cdot 10^{-3}$

Обработка данных испытаний грунта на длительную прочность
в соответствии с формулой (9.28)

№ то- чек	t_p, c	$\tau, 10^5 \text{ Па}$	X	Y	X^2	Y^2	XY	$\tau_{\text{выч}}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	14,0	4,8	2,708	1,569	7,4	4,25	2,460	4,43	0,08	$64 \cdot 10^{-4}$
2	$19,1 \cdot 10^3$	2,3	9,852	0,833	97,3	8,21	0,700	2,54	-0,09	$81 \cdot 10^{-4}$
3	$11,9 \cdot 10^4$	2,1	11,687	0,742	138	8,67	0,552	2,20	-0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
4	$15,45 \cdot 10^5$	1,9	14,254	0,642	204	9,15	0,413	1,80	0,05	$25 \cdot 10^{-4}$
5	$2,84 \cdot 10^6$	1,7	14,857	0,531	221	7,89	0,285	1,72	-0,01	10^{-4}
6	$17,05 \cdot 10^6$	1,5	16,655	0,406	280	6,76	0,165	1,49	0,01	10^{-4}
Σ	—	—	70,01	4,72	948	44,93	4,58	—	—	$1,9 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, уравнение длительной прочности (9.22) для рассматриваемого примера примет вид

$$\tau = \frac{32,9}{\ln [1,5 \cdot 10^{-2} (t_p + 1)]}, \quad (e)$$

где t_p — время, с; τ — прочность, 10^5 Па .

Вычисленные по этой формуле значения прочности $\tau_{\text{выч}}$ приведены в графе 9 табл. 9.3. Теоретическое значение мгновенной прочности, получаемое по формуле (e) при $t_p = 0$, оказалось равным

$$\tau_0 = \frac{32,9}{\ln (1,5 \cdot 10^{-2})} \simeq 7,8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Пользуясь формулами (9.25) и (9.26), определим предельное время t_∞ и соответствующее ему значение τ_∞ . Из (9.26) получим

$$t_\infty = \left[100 \left(\frac{0,015}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \right)^{0,03} \right]^{1/1,03} = 47 \text{ лет,}$$

откуда согласно (9.25)

$$\tau_\infty \approx \tau_{47} = \frac{32,9}{\ln \left(\frac{47 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{0,015} \right)} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Как видно, это значение достаточно близко к величине $\tau_\infty = 1,35 \cdot 10^5 \text{ Па}$, установленной непосредственно из опытов.

Отметим, что если принять время t_∞ равным сроку службы сооружения 100 лет, значение τ_∞ почти не изменится. Действительно, в этом случае получим $\tau_\infty \approx \tau_{100} = 1,28 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Сделанный подсчет свидетельствует о том, что предел длительной прочности грунта с достаточной для инженерных целей точностью можно вычислить по формуле (9.25).

Степень достоверности уравнения длительной прочности (9.22) оценивают аналогично тому, как это было сделано в гл. 6. Для каждого опытного значения τ , определяем отклонение от среднего

$\epsilon_j = \frac{\tau_j - \tau_{\text{выч}}}{\tau_{\text{выч}}}$ и квадрат этого отклонения ϵ_j^2 , записывая результаты подсчетов в графы 10 и 11 табл. 9.3.

На основе указанных данных определим по формулам (6.3), (6.6) и (6.13) значения среднего квадратического отклонения (стандарта) σ , коэффициента вариации v и коэффициента корреляции r . Эти значения оказались равными:

$$\sigma = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-3}}{6-2} \cdot 100} = 4,2\%; \quad v = \frac{4,2}{1 \sqrt{6}} = 1,7\%;$$

$$r = \frac{6 \cdot 37,79 - 70,01 \cdot 2,90}{\sqrt{(6 \cdot 948 - 70,01^2)(6 \cdot 1,534 - 2,90^2)}} = 0,949.$$

Таким образом, показатели точности аппроксимации опытных данных формулой (9.22) получены вполне удовлетворительные. Теоретическая кривая 1, построенная по этой формуле, изображена на рис. 9.20. Как следует из табл. 9.3, отклонение этой кривой от опытных точек не превышает 6%.

Обработка опытных данных по формуле (9.28). С учетом выражения (б) принимаем $X = \ln(t_p + 1)$ и $Y = \ln \tau$. На графике, построенном в этих координатах, опытные точки достаточно хорошо ложатся на прямую (см. рис. 9.19, б); угол наклона прямой определяет параметр $B = \alpha$, а отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, дает значение параметра $D = -\alpha \ln T$.

Для аналитического вычисления значений параметров B и D используем формулы (6.12), сведя предварительные вычисления в табл. 9.3а. Получим:

$$B = \frac{70,01 \cdot 4,72 - 6 \cdot 44,93}{70,01^2 - 6 \cdot 948} = -0,078 \quad \text{и} \quad D = \frac{70,01 \cdot 4,93 - 4,72 \cdot 948}{70,01^2 - 6 \cdot 948} = 1,7.$$

Отсюда параметры исходного уравнения (9.28) будут равны:

$$\alpha = -0,078 \quad \text{и} \quad T = \exp(1,7/0,078) = 29,5 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Таким образом, уравнение длительной прочности (9.28) для рассматриваемого примера будет иметь вид

$$\tau = \left(\frac{t_p + 1}{29,5 \cdot 10^3} \right)^{-0,078}, \quad (\text{ж})$$

где t_p — время, с; τ — прочность, 10^5 Па.

Вычисленные по этой формуле значения прочности $\tau_{\text{выч}}$ приведены в графе 9 табл. 9.3а. Теоретическое значение мгновенной прочности будет равно $\tau_0 = (29,5 \cdot 10^{-8})^{-0,078} = 5,47 \cdot 10^5$ Па.

Значения длительной прочности, определенные для моментов времени $t_p = 47 \approx 50$ лет и $t_p = 100$ лет, будут соответственно равны: $\tau_{50} = 1,05 \cdot 10^5$ Па; $\tau_{100} = 1,0 \cdot 10^5$ Па.

Отклонения ε_j вычисленных значений прочности $\tau_{\text{выч}}$ от опытных значений τ сведены в графы 10 и 11 табл. 9.3а, показатели же точности оказались равными: $\sigma=6,9\%$, $v=2,8\%$, $r=-0,96$.

Теоретическая кривая 2, построенная по данным, вычисленным по формуле (9.28), приведена на рис. 9.20. Отклонение теоретической кривой от опытных точек, как видно из табл. 9.3а, не превышает 9%.

Обработка опытных данных по формуле (9.31). С учетом выражения (в) принимаем $X=t_p$ и $Y=t_p/(\tau_0-\tau)$, полагая при этом, что значение τ_0 известно из опытов; в нашем случае $\tau_0=4,8 \times 10^5$ Па.

Спрямленный график, построенный в указанных координатах, приведен на рис. 9.19, в. Поскольку время на графике откладывают в нетрансформированном масштабе, первые точки сливаются с центром координат (хотя при точном подсчете $D \neq 0$) и выпадают из графической обработки, что является недостатком формулы (9.31).

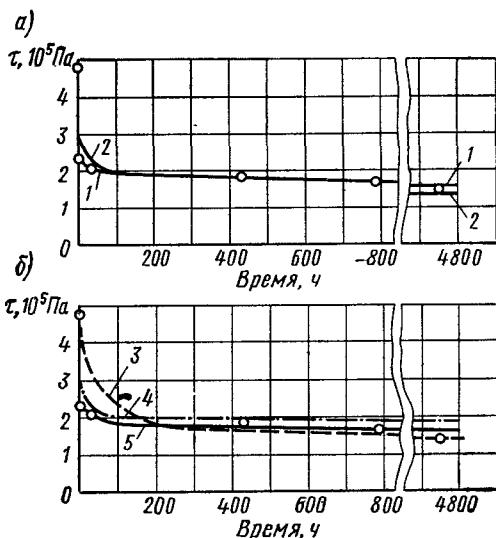


Рис. 9.20. Кривые длительной прочности. Точки — опытные данные; кривые — теоретические вычисления по формулам:

на рис. 9.20, а: 1 — (9.22); 2 — (9.28); на рис. 9.20, б: 3 — (9.31); 4 — (9.31) с использованием только данных кратковременных опытов; 5 — (9.32)

Таблица 9.4

Обработка данных испытаний грунта на длительную прочность в соответствии с формулой (9.31)

№ точки	$X = t_p, \text{ч}$	$\tau, 10^5 \text{Па}$	Y	Y^2	XY	X^2	$\tau_{\text{выч}}$	ε_j	ε_j^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$3,9 \cdot 10^{-3}$	4,8	—	—	—	—	4,799	10^{-4}	10^{-8}
2	5,3	2,3	2,1	4,5	11,2	28,1	4,25	-0,45	0,2
3	33	2,1	12,1	150	403	1089	3,1	-0,32	0,1
4	429	1,9	148	22100	63500	$184 \cdot 10^3$	1,71	0,12	0,014
5	788	1,7	254	64800	$2 \cdot 10^5$	$621 \cdot 10^3$	1,60	0,11	0,012
6	4735	1,5	1435	$206 \cdot 10^4$	$67,9 \times 10^5$	$224 \cdot 10^5$	1,50	0	0
Σ	5990	—	1851	$214,7 \times 10^4$	$70,6 \times 10^5$	$232 \cdot 10^5$	—	—	0,33

Аналитические параметры B и D определяют, как и в предыдущих случаях, по формуле (6.12), для чего промежуточные подсчеты сводят в табл. 9.4. В результате вычислений получаем $B=0,302$ и $D=8,89$. Отсюда параметры исходного уравнения (9.28) будут равны: $\tau_{\infty}=\tau_0-1/B=1,5 \cdot 10^5$ Па, $\delta=\tau_0/\tau_{\infty}=3,2$; $T=D\delta(\tau_0-\tau_{\infty})=94,3$ ч.

Уравнение длительной прочности (9.1) принимает для рассматриваемого примера вид

$$t_p = 29,43 \frac{4,8 - \tau}{\tau - 1,5}, \quad (3)$$

где t_p — время, ч; τ — прочность, 10^5 Па.

Вычисленные по этой формуле величины $\tau_{\text{выч}}$ и их отклонения ε , от опытных значений приведены в графах 8, 9, 10 табл. 9.4. Показатели точности, определенные по формулам (6.3), (6.6) и (6.13), нельзя признать удовлетворительными: $\sigma=29\%$, $\nu=12\%$, $r=1,006$.

Соответственно вычисленные значения прочности существенно (до 45%) расходятся с опытными данными (см. табл. 9.4), а теоретическая кривая (см. рис. 9.20, кривая 3) отклоняется от опытных точек. При этом больше всего кривая отклоняется на начальном участке. Если опытные данные обрабатывать по первым четырем опытными точкам, то, наоборот, получим совпадение теоретической кривой (см. рис. 9.20, кривая 4) с опытными точками на начальном участке, но ее отклонение от опытных точек для более длительных моментов времени. Особенно отклоняется теоретическое значение τ_{∞} , которое оказывается в этом случае равным $\tau_{\infty}=1,94 \cdot 10^5$ Па.

Обработка опытных данных по формуле (9.32). Несколько лучшее совпадение с опытными данными по сравнению с формулой (9.31) получается при использовании дробно-степенного уравнения (9.32). Для обработки опытных данных по этой формуле принимаем в соответствии с выражением (г) $X = \ln t_p$ и $Y = \ln \frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_{\infty}}$.

Для определения величины τ_{∞} при известном из опыта значении $\tau_0=4,8 \cdot 10^5$ Па используем формулу (д), задаваясь тремя точками на опытной кривой длительной прочности. Более достоверные результаты получают, если задают достаточно большие интервалы времени (например, $t_3=10t_2=100t_1$).

Принимаем $t_1=5,3$ ч, $t_2=53$ ч, $t_3=530$ ч, чему соответствуют $\tau_1=2,3$, $\tau_2=2,0$, $\tau_3=1,8 \cdot 10^5$ Па. Подставив указанные значения в формулу (д), получим $\tau_{\infty}=1,5 \cdot 10^5$ Па.

Значения X и Y при принятых величинах τ_0 и τ_{∞} приведены в табл. 9.5, а спрямленный график в указанных координатах был изображен на рис. 9.19, г. Угол наклона прямой определит параметр $B=\alpha$, а отрезок на оси ординат — параметр $D=-\alpha \ln (T/\delta)$.

Вычислив по формуле (6.12) значения параметров $B=0,278$ и $D=0,595$, найдем значения параметров исходного уравнения (9.32):

$$\alpha=B=0,278 \text{ и } (T/\delta)^{\alpha}=\exp(-0,595)=0,55.$$

Таблица 9.5

**Обработка данных испытаний грунта на длительную прочность
в соответствии с формулой (9.32)**

№ точек	$t_p, \text{ч}$	$\tau, 10^5 \text{ Па}$	X	Y	XY	X^2	Y^2	$\tau_{\text{выч}}$	ϵ_j	ϵ_j^2
1 ^я	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$3,9 \cdot 10^{-3}$	4,8	—	—	—	—	—	3,88	0,237	0,0491
2	5,3	2,3	1,67	1,14	1,904	2,789	1,300	2,35	-0,021	0,0004
3	33	2,1	3,50	1,50	5,250	12,250	2,250	2,07	0,014	0,0002
4	429	1,9	6,06	1,98	11,999	36,724	3,920	1,81	0,050	0,0025
5	788	1,7	6,67	2,74	18,276	44,489	7,508	1,76	-0,034	0,0012
6	4735	1,5	—	—	—	—	—	1,71	-0,123	0,0151
Σ	—	—	17,9	7,36	37,429	96,252	14,978	—	—	0,0685

Уравнение длительной прочности (9.32) для рассматриваемого примера примет вид

$$t_p^{0,278} = 0,55 \frac{4,8 - \tau}{\tau - 1,5}, \quad (\text{и})$$

где t_p — время, ч; τ — прочность, 10^5 Па .

Вычисленные по этой формуле значения $\tau_{\text{выч}}$ и их отклонения от опытных точек приведены в графах 9, 10, 11 табл. 9.5. Показатели точности оказались равными: $\sigma = 13,1\%$, $v = 5,3\%$, $r = 0,931$.

Теоретическая кривая 1, построенная исходя из формулы (г), приведена на рис. 9.20, б. Ее отклонение от опытных точек, как видно из табл. 9.5, не превышает 12,3%.

Сопоставление различных формул. Сводные результаты обработки опытных данных по различным формулам приведены в табл. 9.6 и на рис. 9.20.

Напомним, что опытное значение предела длительной прочности было равно $\tau_{\infty} = (1,3 \div 1,35) \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Как видно из табл. 9.6, наилучшие результаты получаются по формуле (9.22) как по значениям показателей точности, так и по приближению к опытному значению τ_{∞} . Кроме того, сам характер снижения прочности — медленное ее изменение при больших интервалах времени, — получаемый по этой формуле, хорошо соответствует действительности.

Результаты, вычисленные по формуле (9.28), хорошо совпадают с опытами для относительно небольших интервалов времени. При больших же значениях t подсчет по формуле (9.28) приводит к заниженным значениям τ_{∞} , поскольку эта формула по своему характеру отражает процесс более интенсивного снижения прочности.

Результаты подсчетов по формуле (9.31) указаны в табл. 9.6 в двух вариантах. В графах 1—4 в числителе приведены подсчеты по данным обработки всех опытных точек рассматриваемого примера, а в знаменателе — по данным обработки только первых четырех

Сводные результаты обработки опытных данных по различным формулам

№ формул	Формула	Значения τ (10^4 Па) в периоды времени t , равные				Показатели точности			
		10 лет	20 лет	50 лет	100 лет	наибольшее отклонение от среднего ϵ , %	стандарт σ , %	коэф. вариации v , %	коэф. корреляции r
(9.22)	$\tau = \beta \left[\ln \frac{t+1}{T} \right]^{-1}$	1,38	1,34	1,30	1,28	6,0	4,2	1,7	0,92
(9.28)	$\tau = [(t+1)/T]^\alpha$	1,19	1,13	1,05	1,0	9,0	6,9	2,8	0,96
(9.31)	$t = T(\tau_0 - \tau)/\delta(\tau - \tau_\infty)$	1,5	1,5	1,5	1,5	45,0	29,0	12,0	1,01
(9.32)	$t^\alpha = T^\alpha(\tau_0 - \tau)/\delta^\alpha(\tau - \tau_\infty)$	1,58	1,56	1,55	1,54	12,3	13,1	5,3	0,93

точек. Однако в обоих случаях результаты оказываются малоудовлетворительными.

Вследствие этого, несмотря на определенные положительные качества формулы (9.31), из-за чего ее использовали некоторые исследователи (в том числе и автор книги), применять указанную формулу следует с большой осмотрительностью. Если же эту формулу несколько усложнить, придав ей вид (9.32), то результаты вычислений будут лучше совпадать с опытными данными, хотя показатели точности окажутся несколько хуже, чем полученные по формулам (9.22) и (9.28). Недостатком формулы (9.32) является также и то обстоятельство, что в эту формулу входят три параметра (а считая τ_0 — даже четыре), а не два, как у формул (9.22) и (9.28).

В целом же наиболее приемлема формула (9.22), которую мы и рекомендуем. Однако в тех случаях, когда в расчет требуется ввести условие $\tau = \tau_\infty$ при $t = \infty$, можно пользоваться формулой (9.32).

В заключение на рис. 9.21 показано спрямление в координатах $(1/\tau) - \ln t$ ряда кривых длительной прочности, полученных различными исследователями для различных грунтов и при различных условиях загрузки. Как видно, во всех случаях расчетные данные совпадают с фактическими.

§ 9.8. ВЛИЯНИЕ РЕЖИМА ЗАГРУЖЕНИЯ

Повышение прочности грунта в процессе ползучести. Еще в 1953 г. Р. Хефели в докладе на III Международном конгрессе по механике грунтов обратил внимание на факт повышения прочности грунта после испытания на длительную ползучесть. В проведенных им опытах глинистый грунт, испытываемый на приборе кольцевого сдвига, подвергался воздействию постоянной нагрузки в течение

двух месяцев, после чего образец догружался ступенями до разрушения. Величину конечной разрушающей нагрузки Р. Хефели сравнивал с прочностью образцов, испытанных без предварительного выдерживания под нагрузкой. Оказалось, что прочность образцов, подвергшихся предварительным испытаниям на ползучесть, была на 20—30% выше.

Аналогичные результаты были получены в 1960 г. Д. Троллопом и К. Чэном при испытании на одноосное сжатие искусственных образцов илстой глины и бентонита. Эти образцы испытывались в течение 10 сут под нагрузками, составляющими 60% от условно-мгновенной прочности, после чего доводились до разрушения. Раз-

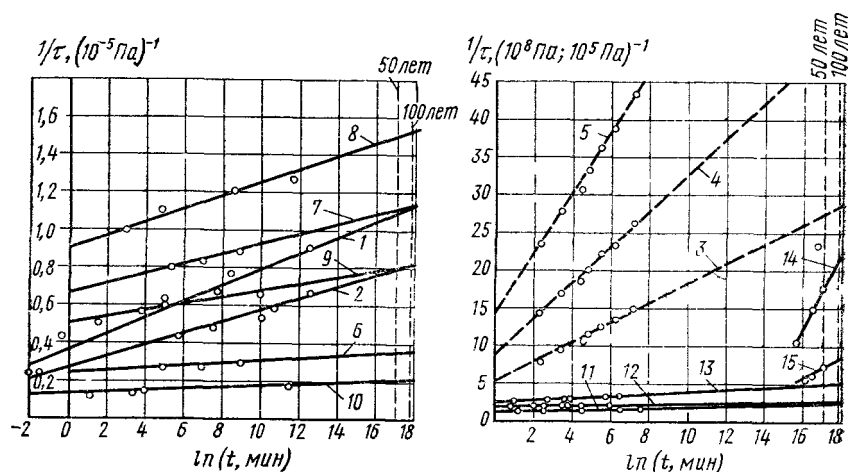


Рис. 9.21. Спрямление опытных кривых длительной прочности в соответствии с формулой (9.22). Кривые построены по данным испытаний различных исследователей:

1, 2 — супесь мерзлая, $\theta = -0,4^\circ \text{C}$, сдвиг вдоль бетонной поверхности (опыты С. С. Вялова); 3, 4, 5 — супесь мерзлая, $\theta = -20^\circ, -10^\circ, -5^\circ \text{C}$, $W=25\%$, одноосное сжатие, кривые построены в масштабе $1/\tau \cdot 10^{-3}$ (опыты Городецкого); 6, 7 — глина полутвердая, $W=23\%$, одноосное сжатие (опыты Гольдштейна); 8, 9, 10 — глины илтовая, монтморилонитовая и полиминеральная (опыты Гольдштейна и Бабницкой); 11, 12, 13 — глина алювиальная, $W=65\%$, сжатие (опыты Муроямы и Шибаты); 14, 15 — лондонские глины, трещиноватые, плотные, обрушение откосов выемок (данные натурных наблюдений Хелкея, Скемптона и Шукле)

рушающая нагрузка оказалась выше условно-мгновенной (получаемой при загрузении в течение 10—15 мин) на 12—15% у илстой глины и на 25% у бентонита. Х. Сид (1958), наблюдавший увеличение прочности грунта после испытания на ползучесть, привел убедительные доказательства того, что увеличение прочности грунта нельзя объяснить повышением его плотности в процессе испытания, поскольку пористость и влажность оставались неизменными в течение всего опыта.

Повышение прочности грунта в результате его ползучести было отмечено С. Р. Месчаном и В. В. Жихович, причем это повышение наблюдалось не только по сравнению с условно-мгновенной, но и

с так называемой стандартной прочностью, определенной по стандартной методике с нагружением ступенями, выдерживаемыми до условной стабилизации деформаций. Так, после испытания глинистого грунта на сдвиг под нагрузкой, составляющей 80 и 90% от стандартной, прочность увеличилась соответственно на 30 и 12,5%. В опытах с лёссовым грунтом прочность после 25—45-дневного воздействия нагрузок, составляющих 70—86% от стандартной, повышалась на 10—20%.

Упрочнение и расслабление грунта. С целью выявления процесса упрочнения, с одной стороны, и процесса снижения прочности,

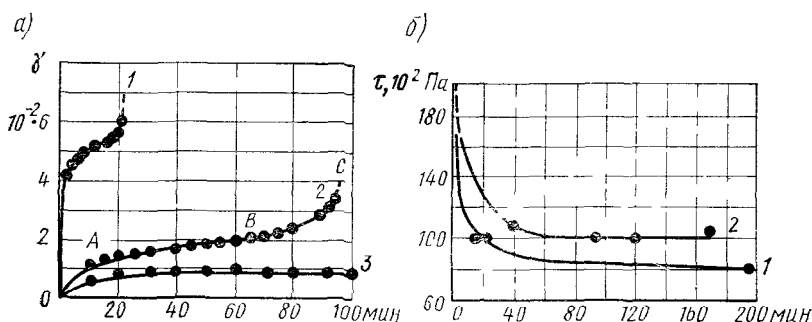


Рис 9.22. Упрочнение каолинового грунта в результате ползучести $W=40\%$, сдвиг при кручении (опыты Н. К. Пекарской и С. С. Вялова):

а — кривые ползучести; *б* — кривые длительной прочности, 1 — обычное нагружение, 2 — нагружение после предварительного деформирования, 3 — предварительное нагружение

с другой, автором книги и Н. К. Пекарской в 1965 г. были проведены параллельные испытания двух серий образцов глинистого грунта (каолина нарушенного сложения, $W=40\%$, $W_p=38\%$, $W_L=58\%$) на сдвиг при кручении. Образцы одной серии испытывались обычным путем, а образцы другой серии перед испытанием были подвергнуты деформированию под постоянной сдвигающей нагрузкой в течение 20 ч. При этом величину нагрузки ($\tau_1=66 \cdot 10^2$ Па) выбирали такой, чтобы деформация протекала в стадии затухающей ползучести (рис. 9.22, *а*, кривая 3). Затем обе серии образцов испытывались на ползучесть под различными нагрузками, большими τ_1 . Одни из полученных кривых ползучести приведены на рис. 9.22, *а* (кривые 1 и 2). Как видно, предварительное нагружение образца резко повысило его сопротивление деформированию — скорость установившегося течения уменьшилась в 4,5 раза по сравнению с недеформированным предварительно образцом, и соответственно разрушение произошло за срок, в 4,5 раза больший: через 97 мин, тогда как для недеформированного образца $t_p=21$ мин.

Следует отметить, что соотношения скоростей течения и времени до разрушения в настоящем примере ($\dot{\gamma}_1/\dot{\gamma}_2=t_{p(2)}/t_{p(1)}$) подтверждают справедливость условия (9.8).

Если испытания, аналогичные описанным выше, провести при различных нагрузках, то получим две кривые длительной прочности — для упрочненного и неупрочненного грунтов (рис. 9.22, б). Кривая для первого случая будет расположена выше, и соответственно все значения прочности — от мгновенной до предельно-длительной — для упрочненного грунта будут больше, чем для неупрочненного.

Упрочнение грунта наблюдалось и при испытании со ступенчатым нагружением. Недеформированный предварительно образец разрушился при приложении 8-й степени нагрузки при $\tau = 75 \cdot 10^2$ Па, тогда как разрушение предварительно деформированного образца произошло на 10-й ступени при $\tau = 91 \cdot 10^2$ Па. При этом влажность всех образцов до и после испытаний изменялась всего в пределах $\pm 0,5\%$, т. е. практически оставалась постоянной.

Таким образом, в процессе ползучести (во всяком случае, в ее затухающей стадии) грунт упрочняется. Это явление аналогично явлению наклепа в металлах, т. е. упрочнению в результате повторного нагружения.

Вместе с тем и в упрочненном грунте после его нового нагружения достаточно большими постоянными нагрузками прочность снижается по сравнению с мгновенной.

Следовательно, явления упрочнения и снижения прочности не исключают одно другое и процесс ползучести сопровождается, с одной стороны, расслаблением внутренних связей, а с другой — их упрочнением. Однако преимущественное развитие того или иного явления свойственно различным стадиям. Так, на стадии затухающей ползучести превалирует упрочнение; при незатухающей же ползучести, особенно на стадии прогрессирующего течения, преобладает расслабление межчастичных связей грунта, что и приводит к снижению его прочности.

Влияние на прочность грунта скорости нагружения. Непосредственным следствием процессов упрочнения и расслабления грунта является зависимость его прочности от режима нагружения. При испытаниях, проведенных с нагружением образцов ступенями с различными интервалами времени Δt выдерживания нагрузок, прочность грунта с увеличением Δt , т. е. с уменьшением скорости нагружения, уменьшается.

Это явление, хорошо известное в реологии, для грунтов было отмечено впервые в 1951 г. Казагранде и Уилсоном, а затем рядом других исследователей. Так, Бьерум с сотрудниками при испытании на трехосное сжатие грунта в условиях закрытой системы получил, что с уменьшением скорости нагружения от 1,0 до $3,6 \cdot 10^{-5}$ 1/ч прочность понизилась до 0,86 от кратковременной.

Отметим, что при дренированных испытаниях при времени испытания более 1 сут прочность не изменялась, что, по-видимому, объясняется упрочняющим эффектом вторичной консолидации. М. Н. Гольдштейн и С. С. Бабицкая получили, что с изменением интервала Δt времени воздействия ступени нагрузки от 5 с до 24 ч прочность на сжатие тощей полиминеральной глины уменьшилась на

16,5%, монтмориллонитовой глины — на 20% и иллитовой глины — на 34%. В опытах С. Р. Месчаня с изменением Δt от 5 с до 12 ч, что соответствует изменению общей продолжительности испытания от 1 до 7920 мин, прочность глины уменьшилась на 20—30%.

Таким образом, факт зависимости прочности грунта от скорости его загрузки установлен экспериментально.

Для изучения вопроса о характере этой зависимости Н. К. Пекарской и автором книги были проведены исследования, которые показали, что кривая, отображающая указанную зависимость, пред-

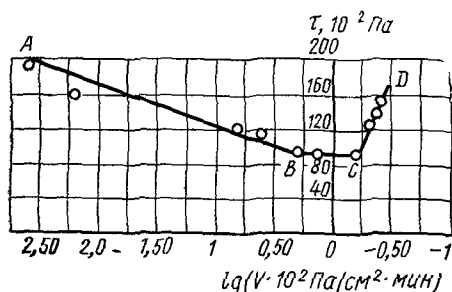


Рис. 9.23. Зависимость прочности каолинового грунта ($\tau \cdot 10^2$ Па) от скорости приложения нагрузки ($v \cdot 10^2$ Па/мин); $W=40\%$, сдвиг при кручении (опыты Н. К. Пекарской)

ставляет собой вогнутую кривую, имеющую экстремум, особенно четко проявляющийся при построении этой кривой в полулогарифмическом масштабе (рис. 9.23). На начальном этапе (участок АВ кривой), соответствующем большим скоростям загрузки, уменьшение этой скорости влечет за собой снижение прочности, которое можно принять прямо пропорциональным логарифму скорости загрузки. Достигнув некоторого минимального значения, прочность становится постоянной (участок ВС кри-

вой), а затем при дальнейшем уменьшении скорости приложения нагрузки возрастает (участок CD).

Таким образом, область больших скоростей загрузки, когда нарушение связей между частицами грунта не успевает компенсироваться их восстановлением, соответствует процессу снижения прочности, а область малых скоростей, при которых связи успевают восстанавливаться, — процессу упрочнения. При средних же скоростях загрузки достигается минимальное значение прочности, соответствующее пределу длительной прочности τ_∞ .

Мгновенная, стандартная и длительная прочность грунта. Мгновенная прочность τ_0 соответствует испытанию с наиболее высокой скоростью загрузки и, как уже говорилось, ее значение является наибольшим. Предел длительной прочности τ_∞ соответствует наименьшему значению прочности. Величина же стандартной прочности зависит от способа ее определения.

Мы уже говорили, что под стандартной следует подразумевать прочность грунта, полученную из стандартных испытаний с нагрузкой ступенями. Однако время Δt выдерживания ступеней может быть различным — от нескольких минут до нескольких часов и даже дней. Общая продолжительность испытания соответственно меняется от нескольких десятков до нескольких тысяч минут. Однако, как видно из рис. 9.23, значения прочности в этих случаях будут существенно различны и только в определенном, небольшом диапа-

зоне скоростей загрузки они примут постоянное значение, соответствующее τ_{∞} .

С. Р. Месчан показал, что если проводить испытания грунта на срез, выдерживая ступени нагрузок в соответствии с ГОСТ 12248—66 до условного затухания деформаций (0,01 или 0,005 мм/сут), то при общей продолжительности испытания от 1 до 8 ч полученные значения стандартной прочности оказываются близкими к пределу длительной прочности. Но следует учитывать, что совпадение этих величин является только приблизительным и в зависимости от вида грунта может колебаться. Иными словами, нужно иметь в виду, что прочность, полученная из стандартных испытаний, не является инвариантной величиной.

§ 9.9. МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЯ ГРУНТА НА ДЛИТЕЛЬНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Испытания под постоянными нагрузками. Наиболее достоверно предел длительной прочности τ_{∞} определяется из испытания на ползучесть серии идентичных образцов с доведением испытаний до разрушения и с фиксацией времени, через которое это разрушение произошло. Первый образец испытывают при быстром нагружении, определяя условно-мгновенную прочность τ_0 . Остальные образцы, общим количеством не менее пяти-шести, загружают постоянными нагрузками, величины которых составляют

$$\tau_j = \tau_0 \left(1 - \frac{n}{m} \right),$$

где n — порядковый номер образца; m — коэффициент, зависящий от реологических свойств грунта: для грунтов, у которых прочность снижается во времени в большой степени, $m=10$, а для грунтов с незначительным снижением прочности $m=20-30$.

На основании данных испытаний строят кривую длительной прочности (см. рис. 9.1), которую обрабатывают так, как было показано в примере § 9.7, на основе такой обработки и определяется величина τ_{∞} .

Испытания при ступенчатом нагружении грунта. При таком виде испытания грунтов опыты ведут с одним образцом, который загружают равными ступенями $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_3 = \dots$. Величину ступени нагрузки $\Delta\tau$ назначают как определенную долю от условно-мгновенной прочности $\Delta\tau = \tau_0/m$, где m принимают от 10 до 20. Каждая ступень нагрузки выдерживается до условной стабилизации деформаций, критерием чего является приращение относительной деформации не более 0,01% за 12 или 24 ч.

Испытания ведут до тех пор, пока при очередной ступени нагрузки не возникнет незатухающая деформация, развивающаяся с постоянной или возрастающей скоростью. Эту ступень и последующие две ступени нагрузок выдерживают в течение по крайней мере 3 сут, чтобы убедиться, что процесс деформирования протекает в установившейся стадии.

Результаты испытаний наносят на график «деформация — время» (рис. 9.24, а), определив значение τ_∞ как наибольшее напряжение, при котором деформация стабилизировалась. Для контроля рекомендуется построить график «напряжение — деформация» в обычных и логарифмических координатах (рис. 9.24, б). Точка перегиба кривой, особенно четко выявляющаяся на логарифмическом графике, обусловленная резким возрастанием величины деформации на ступенях незатухающей ползучести, определит значение τ_∞ .

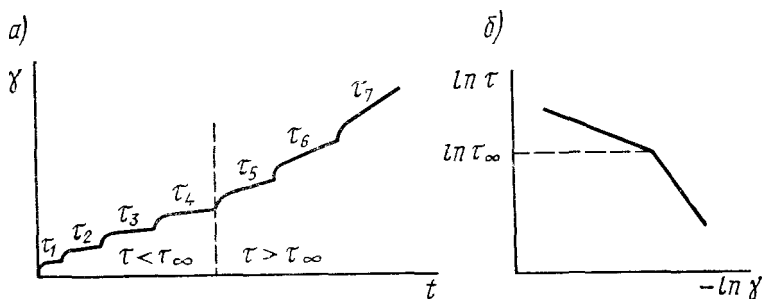


Рис. 9.24. Испытания при ступенчато-возрастающей нагрузке:
а — кривые развития деформаций; б — зависимость между напряжением ($\ln \tau$) и деформацией ($\ln \gamma$)

При описанном способе испытания значение прочности будет находиться или в пределах участка *BC* (см. рис. 9.23), или, вероятнее всего, за его пределами — на участке *CD*. В последнем случае получают повышенное значение τ_∞ . Однако надо учитывать, что в реальных условиях нагрузка на грунты передается не сразу, а постепенно, например по мере возведения сооружения, причем темп роста нагрузки в любом случае не меньше скорости ступенчатого загрузения по указанной выше методике. Следовательно, прочность, определяемая при ступенчатом загрузении с длительным выдерживанием ступеней, будет характеризовать предельно-длительную прочность, соответствующую условию постепенного роста нагрузки на грунт в строительный период.

Сокращение срока испытания. Процесс испытания грунта ступенчатыми нагрузками можно несколько ускорить, если ступени нагрузки выдерживать в течение короткого, одинакового для всех ступеней интервала времени $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots$ (например, от 1 до 24 ч). В этом случае следует строить график $\ln \tau - \ln \gamma$ (где γ — деформация в конце каждой ступени) и по точке перегиба прямой определить значение длительной прочности τ_t при данном Δt . Предел длительной прочности в этом случае определится как $\tau_\infty = k\tau_t$, где в зависимости от величины Δt и вида грунта коэффициент k имеет значение от 0,7 до 0,9.

Оценка предела длительной прочности грунта по графику скоростей течения. При обоих способах испытания — под постоянными и ступенчато-возрастающими нагрузками — величина τ_∞ может быть оценена по данным о скоростях

установившегося течения. Как известно, предел длительной прочности есть напряжение, разграничивающее затухающую ползучесть и установившееся течение. Следовательно, если по данным испытаний определить скорости установившегося течения для каждого значения напряжения и построить график зависимости между τ и $\dot{\gamma}$ (см. рис. 5.9), то пересечение полученной кривой с осью τ определит то напряжение, при котором скорость установившегося течения $\dot{\gamma}=0$, т. е. величину τ_{∞} .

Испытание грунта при одновременном воздействии на него сдвигающего и нормального напряжений. Такие испытания проводят аналогично описанным выше, но каждую серию испытаний (под постоянными или ступенчато-возрастающими нагрузками) выполняют при различном, постоянном для данной серии значении нормальной нагрузки σ_n . В результате получают семейство кривых длительной прочности для различных σ_n , которое перестраивают в диаграммы сдвига для различных значений времени до разрушения t_p (см. рис. 9.11), что и описывается условием (9.1)

$$\tau = c(t) + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi(t). \quad (9.34)$$

Закономерность изменения во времени сцепления $c(t)$ и угла внутреннего трения $\varphi(t)$ определяют из графика вида (9.12). Эту закономерность можно принять в соответствии с формулой (9.22), которую применяют для $c(t)$ и $\varphi(t)$ со своими параметрами β_c , β_{φ} и T_c , T_{φ} . Частным случаем будет $T_c = T_{\varphi} = T$ и тогда формула (9.22) примет вид

$$\tau = \frac{\beta_c + \sigma_n \beta_{\varphi}}{\ln \frac{t_p + t^*}{T}}. \quad (9.35)$$

Этот случай соответствует условию независимости от времени параметра $H = c(t) : \operatorname{tg} \varphi(t) = \operatorname{const}$. Однако более реален случай, когда сцепление существенно меняется во времени $c = c(t)$, тогда как угол трения меняется незначительно и его можно даже принять $\varphi = \operatorname{const}$. В последнем случае формула (9.22) получит вид

$$\tau - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta_c}{\ln \frac{t_p + t^*}{T}}. \quad (9.36)$$

Ускоренный метод испытаний грунтов. Автор книги предложил упрощенный метод испытаний грунтов на длительную прочность с помощью динамометрического прибора [5], позволяющий существенно сократить сроки испытания.

Схема прибора изображена на рис. 9.25, а. Нагрузка на образец I передается через динамометр 4, причем после создания начального напряжения σ_0 положение динамометра закрепляется: размер $l = l' + l''$ (где l' — высота динамометра, l'' — высота образца) остается постоянным.

Под воздействием приложенного напряжения в образце развивается деформация ползучести $\varepsilon = \Delta l''/l''$, в результате чего динамометр разжимается и напряжение в нем падает. Иными словами, образец грунта испытывают на ползучесть при изменяющемся напряжении и одновременно

на релаксацию при изменяющейся деформации, причем изменения напряжения и деформации взаимосвязаны.

При испытании к образцу через динамометр прикладывают произвольное начальное напряжение σ_0 и регистрируют как снижение его во времени, так и развитие во времени же деформаций образца. По полученным кривым (рис. 9.25, б) можно определить вид уравнения ползучести и значения входящих в него параметров. Например, принимая уравнение ползучести в форме (5.7)

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma \psi(t) \quad (9.37)$$

и полагая $\varphi(\varepsilon) = A_0 \varepsilon^m$, определим функцию ползучести $\psi(t)$ как

$$\psi(t) = A_0 \frac{[\varepsilon(t)]^m}{\sigma(t)}, \quad (9.38)$$

где $\varepsilon(t)$ — деформация образца, определяемая по рис. 9.25, б; $\sigma(t)$ — изменяющееся напряжение динамометра, определяемое по рис. 9.25, б. Обработку опытных кривых ведут в соответствии с рекомендациями § 6.2 и 6.3.

Если начальное напряжение σ_0 задать близким к условно-мгновенной прочности (определяемой предварительно), то конечное значение напряжения σ_K , соответствующее стабилизовавшейся деформации ε_K , будет близко к пределу длительной прочности σ_∞ , поскольку стабилизацию деформации можно рассматривать как достижение равновесия между действующей нагрузкой и внутренними силами сопротивления грунта:

$$\sigma_\infty = \xi \sigma_K; \quad \xi = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_K} \right)^m. \quad (9.39)$$

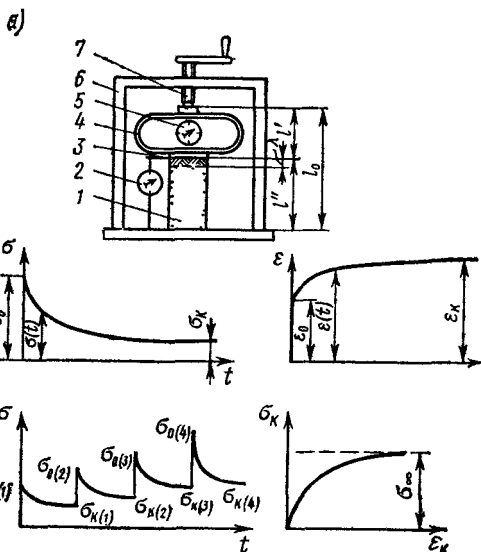


Рис 9.25 Динамометрический прибор для испытания на длительную прочность и ползучесть

а — схема прибора (1 — образец, 2 — индикатор деформаций образца, 3 — штамп, 4 — динамометр, 5 — индикатор деформаций динамометра, 6 — станина, 7 — натяжное устройство), результаты испытаний б — при разовом нагружении, в — при ступенчатом

Вариант испытания заключается в ступенчатом повышении начального напряжения σ_0 с выдерживанием каждой ступени до стабилизовавшегося конечного значения σ_k (рис. 9.25, в) с одновременной регистрацией деформации образца $\epsilon(t)$. На основе этих данных строят график зависимости между σ_k и ϵ_k (рис. 9.25, в), из которого определяют вид функции $\varphi(\epsilon)$, а также величину σ_∞ .

Вследствие того, что процесс релаксации протекает значительно быстрее процесса ползучести (время релаксации $T_r \ll$ времени последействия T_p), на испытания на динамометрическом приборе требуется значительно меньше времени, чем на обычные испытания, описанные выше.

Метод шариковой пробы. Для определения длительного сцепления грунтов весьма эффективен предложенный в 1947 г. Н. А. Цытовичем [42, 43] метод вдавливания шарикового штампа под постоянной нагрузкой P . Величина сцепления по данным таким испытаний будет равна

$$c(t) = 0,18 \frac{P}{\pi d S(t)}, \quad (9.40)$$

где d — диаметр шарикового штампа; $S(t)$ — изменяющаяся во времени глубина его вдавливания (осадка). Эта глубина меняется от начального S_0 до конечного, стабилизовавшегося значения, чему соответствуют условно-мгновенное сцепление c_0 и предельно-длительное c_∞ .

Формула (9.40) получена, исходя из строгого решения задачи (А. Ю. Ишлинский, 1944) для идеально пластичного, сен-венанова тела и справедлива, таким образом, для грунтов, не обладающих внутренним трением. Однако позднее было показано (см. статью С. С. Вялова и Н. А. Цытовича в «Докладах АН СССР», III, № 6, 1956), что значение c , определяемое этой формулой, можно рассматривать как некоторое эквивалентное сцепление $c_{\text{экр}}$, учитывающее влияние как сцепления, так и внутреннего трения. В частности, предельную нагрузку на фундамент (круглый или квадратный в плане) можно определять для связных грунтов по формуле

$$P_{\text{пр}} = 5,55 c_{\text{экр}} = \frac{P}{\pi d S_\infty}.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТОВ



§ 10.1. ДЕФОРМАЦИЯ ГРУНТА КАК ТЕРМОАКТИВАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Применение кинетической теории к грунтам. В предыдущих главах были рассмотрены феноменологические теории ползучести, основанные на данных макроопытов. В настоящей главе излагается физическая теория ползучести и длительной прочности грунтов, исходящая из представления о кинетической природе деформирования и длительного разрушения и базирующаяся на данных исследований микропроцессов, происходящих в грунтах *.

Согласно представлениям молекулярно-кинетической теории (см. § 7.6), процессы деформирования и разрушения являются термоактивационными, связанными с преодолением элементарными частицами энергетического барьера (см. рис. 7.14) и переходом их в новое положение равновесия под воздействием внешней силы, активирующей эти частицы.

Этот процесс имеет флуктуационный характер — происходит он вследствие отклонения тепловой энергии отдельных частиц от среднего значения этой энергии, поскольку тепловая энергия распределяется между элементарными частицами неравномерно из-за хаотичности их теплового движения. Указанное обстоятельство позволяет описать закономерность распределения энергии между элементарными частицами с помощью вероятностного, Больцманова закона распределения.

Однако если применять этот закон к грунтовой системе, то возникает вопрос, что рассматривать в качестве элементарных частиц грунтовой системы.

Очевидно, что термофлуктуационные процессы происходят как в кристаллической решетке минеральных частиц, так и в молекулярной структуре жидкой пленки, соединяющей эти частицы. Однако

* При написании этой главы были использованы материалы, опубликованные автором в трудах VII Международного конгресса по механике грунтов (1969), II Международной конференции по мерзлотоведению (1973), Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов (1975), а также статьи, написанные совместно с Ю. К. Зарецким, Р. В. Максимьяк и Н. К. Пекарской, опубликованные в 1968—1973 гг.

величина нагрузки, прикладываемой в обычных случаях к грунтам, во много раз меньше внутрикристаллических сил и этой нагрузки явно недостаточно, чтобы активировать атомы кристаллической решетки и вызвать их направленное смещение.

Такие процессы могут происходить лишь в массивных кристаллических породах при воздействии на них достаточно больших напряжений. В рыхлых же породах процесс деформирования начинается при небольших нагрузках, недостаточных для того, чтобы активировать атомы минеральных частиц, но вполне достаточных для того, чтобы активировать молекулы связанной воды (а в ряде случаев и цементационного вещества, связывающего минеральные частицы).

Было бы неправильным, однако, рассматривать деформации грунта как результаты перемещения молекул связанной воды, поскольку в процессе деформирования участвуют не только пленочная вода, но и сами минеральные частицы. Поэтому процесс деформирования грунтов целесообразно рассматривать как смещение структурных элементов грунтовой системы — минеральных частиц и их микроагрегатов.

Кинетическая природа деформирования и разрушения грунта. Схематично микроструктуру грунта можно рассматривать как хаотическое сочетание твердых частиц (даже при ориентированном их расположении), окруженных пленками связанной воды и связанных силами межчастичного взаимодействия, а также пустот, заполненных водой и воздухом.

Наличие межчастичных связей, природа которых была рассмотрена в гл. 2, делает положение микроструктурных элементов устойчивым, причем равновесное состояние частиц обуславливается расстоянием между ними и соответствует минимуму потенциальной энергии. С этой точки зрения можно провести аналогию между кривой потенциальной энергии связи между грунтовыми частицами и кривой потенциальной энергии связи между молекулами жидкой среды (см. рис. 7.14).

Очевидно, для перемещения частиц необходимо вывести их из состояния равновесия, причем они могут перемещаться лишь благодаря наличию в грунтовой системе пустот, размеры которых соизмеримы с размерами частиц и их агрегатов, аналогично тому, как перемещение молекул в жидкой среде возможно вследствие наличия так называемых «дырок» в структуре жидкости. При этом, чтобы вывести частицу из состояния равновесия и переместить в другое место, ее надо активировать, сообщив ей энергию большую, чем энергия связи с соседними частицами.

По аналогии с термоактивационным процессом перемещение частицы можно рассматривать как преодоление ей энергетического барьера, а сообщенную энергию — как своего рода «энергию активации». В последующем это понятие мы будем употреблять по отношению к грунтовым частицам без кавычек, хотя определенная условность при этом остается, поскольку понятие «энергия активации» относится к энергии, которой наделяются атомы и молекулы.

Энергия связи между отдельными элементами грунтовой системы будет весьма различна, учитывая различие в форме, размерах и расположении частиц. Хаотический характер расположения частиц и их малые размеры по отношению к любому рассматриваемому объему грунта позволяют использовать статистический подход и применить к этим частицам закон распределения Больцмана, полагая, что число активированных частиц с энергией U , равной или превышающей среднее значение энергии связи между частицами, определяется экспоненциальным законом (7.104). Полагая далее, что среднее время t пребывания частиц в положении равновесия обратно пропорционально числу активированных частиц и что их перемещение вызвано действием внешней силы и протекает во времени, можно по аналогии с (7.105) записать

$$t = t_0 e^{\frac{U(\tau, t)}{k\Theta}}. \quad (10.1)$$

В этом выражении сохранены обозначения формулы (7.105): $t_0 = h/k\Theta$ — период тепловых колебаний элементарных частиц, с; Θ — температура, К; h — постоянная Планка, Дж·с; k — постоянная Больцмана, Дж/К; $U(\tau, t)$ — энергия активации, которую мы рассматриваем как величину, зависящую от приложенного напряжения τ и времени t воздействия последнего. Следует, однако, иметь в виду, что формула (7.105) получена из рассмотрения поведения элементарных частиц (атомов, молекул) в силовом и температурных полях, тогда как формула (10.1) описывает поведение частиц грунта, связи между которыми являются более сложными.

Вследствие этого, исходя из аналогии с формулой (7.105), энергию активации частиц грунта в формуле (10.1) следует рассматривать как осредненное значение энергии $\langle U \rangle$, отнесенное к характерному объему грунта, подобно тому, что мы делали в формуле (2.10). Что же касается констант k и h , то при сохранении в формуле (10.1) их значений $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $h = 16,625 \cdot 10^{-31}$ Дж·с следует иметь в виду определенную условность такого допущения.

Кинетика деформаций и структурные изменения. Рассмотрим вопрос о зависимости энергии активации U , а следовательно, и всего активационного процесса от приложенного напряжения τ и времени t . Начальная энергия активации, которую обозначим через U_0 , соответствует исходной энергии связи между структурными элементами грунта, определяемой начальным взаиморасположением этих элементов — их формой, размерами и ориентацией, химическим составом твердой и жидкой фаз грунтовой системы, расстоянием между частицами и т. д., т. е. всеми факторами, формирующими силовое поле, рассмотренными в § 2.4 и 2.5. Иными словами, величина начальной энергии активации U_0 соответствует энергии связи между частицами грунта и определяется физическими свойствами грунта в исходном по отношению к процессу деформирования состоянии.

Поскольку под воздействием внешней силы нарушаются межчастичные связи грунта и изменяется их положение, энергия связи между частицами тоже изменяется и для каждого последующего смещения частиц необходимо сообщить им энергию активации, отличную от предыдущей.

Эта новая энергия может быть или больше U_0 , если в процессе деформирования произошло упрочнение (например, уплотнение грунта), или меньше U_0 , если произошло расслабление грунта (например, возникла незатухающая ползучесть), причем поскольку смещение развивается во времени, то и изменения U_0 происходят также во времени.

Отметим, что в формуле (10.1) рассматривается случай чистого сдвига. В общем же случае энергия активации будет функцией всех компонентов тензора напряжения, что будет показано в гл. 11.

Изменение энергии активации под воздействием внешней силы прежде всего связано с изменением микроструктуры грунта. Данные исследований свидетельствуют, что такие изменения заключаются в распаде агрегатов грунта, смещения и перекомпоновке частиц, их переориентации и т. д., а также в развитии дефектов структуры грунта.

Дефекты структуры грунта. Под термином «дефекты» в данном случае мы подразумеваем слабые места, разрывы и нарушения связей в каркасе грунта. При всей хаотичности расположения минеральных частиц в грунтовой системе каждая из них имеет по крайней мере две связи с соседними. В тех же случаях, когда остается только одна связь, можно говорить о разрыве каркаса грунта, т. е. о нарушении его структуры.

Подобные нарушения возникают тогда, когда расстояние между частицами превысит пределы взаимодействия межмолекулярных сил. По А. К. Ларионову, это расстояние определяется условием $\delta_{пр} \geq x_0$, где x_0 — расстояние, на котором действуют ван-дер-ваальсовы силы (4—10 Å). Дефекты сравнительно плотных глинистых грунтов проявляются в виде микрополостей, пустот, микротрещин, кливажа и т. п. Отметим еще раз, что с учетом приведенного выше определения поры с содержащейся в них свободной водой и газами к дефектам не относятся, являясь неотъемлемой частью трехкомпонентной грунтовой системы.

Данное определение термина «дефекты» структуры грунта, естественно, отличается от понятия дефектов кристаллической решетки твердого тела, и аналогия в этих терминах является условной.

Развитие дефектов играет основную роль в процессе длительного разрушения грунта, причем, как будет показано далее, наиболее важное значение имеют микротрещины. Таким образом, для выявления закономерности изменения энергии активации в процессе деформирования и длительного разрушения грунтов и раскрытия кинетической природы этих процессов необходимо прежде всего выявить микроструктурные изменения, происходящие в ходе указанных процессов, и установить закономерности этих изменений.

§ 10.2. ИЗМЕНЕНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ ГРУНТА В ПРОЦЕССЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Исследования изменений микроструктуры грунта проводились в НИИОСПе в 1967—1976 гг. Р. В. Максима́к и Н. К. Пекарской под руководством автора книги. Были испытаны однотипные образцы глинистого грунта на ползучесть и одновременно изучались микроструктура и происходящие в ней изменения на различных стадиях деформирования.

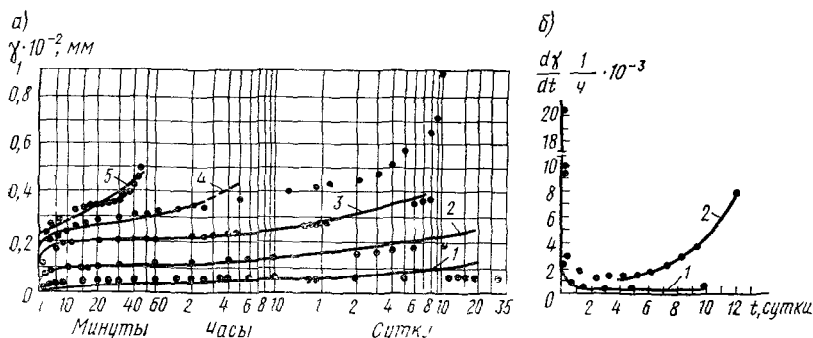


Рис. 10.1. Кривые ползучести каолинового грунта при сдвиге, $W=38\%$ (опыты Р. В. Максима́к):

а — развитие деформаций γ во времени при нагрузках τ , равных: 1 — 83; 2 — 90; 3 — 100; 4 — 135; 5 — $165 \cdot 10^2$ Па; *б* — кривые изменения во времени скорости деформации при τ , равных: 1 — 60; 2 — $180 \cdot 10^2$ Па. Кривые — по данным аналитических подсчетов по формуле (10.60)

Исследования выполнялись с искусственно приготовленными образцами мономинеральной (глуховецкий каолин) и полиминеральной (юрской) глин твердой, полутвердой и тугопластичной консистенции. Каолин имел влажность $W=38\text{—}40\%$ и пределы текучести $W_L=58\%$ и $W_p=38\%$, а юрская глина — влажность $W=32\%$ при $W_L=50\%$ и $W_p=26\%$.

Испытания на ползучесть выполнялись в условиях чистого сдвига путем скручивания полых цилиндрических образцов грунта под различными постоянными сдвигающими нагрузками, начиная от вызывающей мгновенное разрушение и кончая нагрузкой, приводящей лишь к затухающему деформированию. Методика исследований описана в статье Р. В. Максима́к в сб. «Основания, фундаменты и механика грунтов» (НИИОснований, 1967).

Кривые развития деформаций сдвига γ во времени (откладываем в логарифмическом масштабе) и кривые изменения во времени скоростей деформаций $\dot{\gamma}$, полученные для одной из серий испытаний, изображены на рис. 10.1. Как видно из этого рисунка, при малых напряжениях процесс ползучести имел затухающий характер, а при больших — незатухающий со всеми тремя стадиями: не-

установившегося, установившегося и прогрессирующего течения, заканчивающегося разрушением.

Испытания на ползучесть прерывались в различные моменты времени, с тем чтобы отобрать пробы грунта для микроскопического анализа данных об изменении структуры на различных стадиях деформирования и при различных нагрузках.

Структура грунта исследовалась с помощью оптической и электронной микроскопии. Такие изменения, как распад и переориентация частиц, изучались обычным петрографическим методом, в шлифах. Для изучения же развития дефектов и других нарушений структуры грунт насыщался жидким полимером (в вакууме) с последующей полимеризацией и закреплением. Изменение структуры оценивалось по степени поврежденности структуры (плотности дефектов) ω и степени ориентации Ω :

$$\omega = \frac{s_d}{s} 100\%; \quad \Omega = \frac{s_{op}}{s} 100\%, \quad (10.2)$$

где s_d — площадь шлифа, занятая дефектами структуры; s_{op} — площадь шлифа, занятая частицами, ориентированными в направлении сдвига; s — общая площадь сечения, перпендикулярного направлению сдвига.

Эти величины измерялись с помощью оптического микроскопа на интегральном столике (ИСА). Строго говоря, значения ω и Ω нужно относить к единичному объему грунта, но ввиду сложности трехмерного определения структурных изменений все изменения относились к площади шлифа.

Трещины в грунтах можно подразделить на субмикроскопические (от десятков до тысяч ангстрем), микроскопические (от одного до сотен микрон) и макроскопические (доли миллиметра и более). Такое подразделение вытекает из доступности наблюдений. Субмикроскопические трещины можно наблюдать только с помощью электронного микроскопа, микроскопические — с помощью обычного оптического микроскопа, а макроскопические — визуально. Однако принятое подразделение трещин имеет и физическое обоснование. Субмикроскопические трещины являются первичными, зародышевыми, микроскопические — трещинами развития, а макроскопические — трещинами разрушения (магистральными).

В рассматриваемых опытах при оценке степени поврежденности структуры грунта ω учитывались только микротрещины, и приводимые величины следует рассматривать как относительные величины, приращение которых, однако, позволяет решить главную задачу — оценить динамику образования микротрещин.

Исходная структура грунта имела блочно-неупорядоченный характер: 60—70% объема занимали агрегаты, состоящие из четко ориентированных частиц, а 40—30% объема составляла масса беспорядочно ориентированных глинистых частиц, заполняющих пространство между агрегатами. На контактах между последними имелись пустоты и полости, представляющие наиболее ослабленные места структуры. Эти дефекты хорошо просматриваются с помощью

оптического микроскопа (с увеличением в 40 раз и более). Исходная структура каолина имела степень поврежденности $\omega_0=22-25\%$, а юрской глины — $\omega_0=20-22\%$.

Первый этап микроструктурных исследований, выполненных Н. К. Пекарской и В. С. Шевелевой [14], показал, что изменение структуры существенно зависит от того, является ли процесс деформирования затухающим или незатухающим, причем в последнем случае каждой стадии деформирования соответствуют свои структурные изменения. Последующие исследования, проведенные Р. В. Максимяк (1970), позволили выявить количественные закономерности структурных изменений, а также установить критерии разрушения.

Таблица 10.1

Изменение структуры каолина ($W=40\%$) в процессе деформирования

Стадия деформирования	Напряжение τ , 10^2 Па*	Продолжительность испытания t , ч	Степень поврежденности ω , %	Степень ориентации Ω , %
Исходное состояние	0	0	24,1	Преобладающей ориентации нет
Затухающая ползучесть	91 83 83,6 75	144 408 768 528	21,3 23,1 21,1 20,3	То же
Установившееся течение	100 100 100 100 100 133 133 125 133 117 125	6 28 55 72 144 1,2 6,3 21 72 168 192	28,5 27 33,8 34,8 35 — — 27,6 34,2 34,6 34,2	21,9 — 22,3 25 41,1 18,4 24,3 — 28,3 — —
Прогрессирующее течение	166 160 138 135 135 133 100	0,03 0,15 1,2 3,8 4,2 984 840	36,8 — 36,3 37 37 — 37,2	Преобладающей ориентации нет 14,3 18,4 — — 65,8 50

* 10^2 Па = 1 Г/см².

Изменение структуры грунта в процессе ползучести. Изменения структуры грунта в процессе деформирования, отображаемые изменениями степени поврежденности (плотности дефектов) и степени переориентации на различных стадиях ползучести, приведены в табл 10 1, а иллюстрации этих изменений показаны на рис 10 2 (данные Р В Максима)

Как видно из табл 10 1, при затухающей ползучести прежде всего уменьшается количество дефектов структуры по сравнению с исходным состоянием. Микротрещины стремятся сомкнуться, а полости и пустоты — сжаться и вытянуться в направлении сдвига.

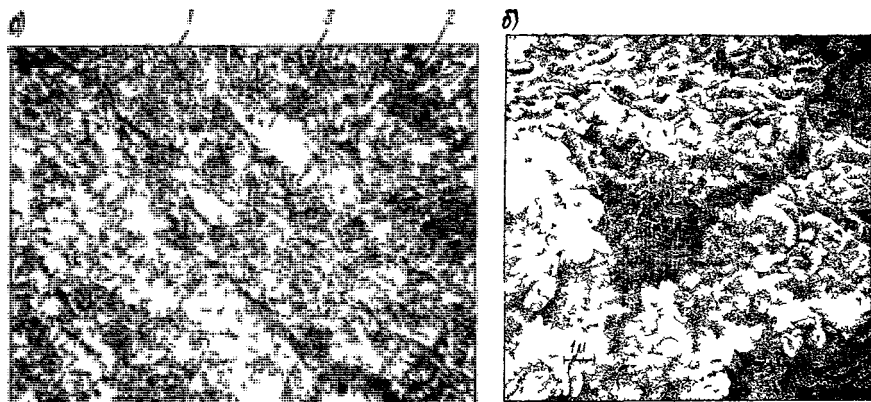


Рис 10 2 Изменения структуры юрской глины ($W=32\%$) в процессе ползучести (на стадии разрушения) (опыты Р В Максима)

a — увеличение в $40\times$ *b* — увеличение в $500\times$ 1 — микротрещины, 2 — пустоты, 3 — полости

Происходит уплотнение грунта с образованием новых межчастичных связей взамен нарушенных, что и вызывает затухание во времени деформаций. При этом дефекты структуры в основном уменьшались в начальный период деформирования, соответствующий наиболее интенсивному росту деформаций. Так, в одном из опытов степень поврежденности при ее начальном значении $\omega_0=25\%$ уменьшилась до 22% через 2 сут после начала испытания и до 20% после 6 сут.

При затухающей ползучести какого-либо заметного изменения величины переориентации частиц Ω не было отмечено, во всяком случае при длительности процесса до 770 ч. Однако не исключена возможность, что при очень большом времени деформирования значение Ω может измениться.

При незатухающем деформировании грунта характер структурных преобразований резко изменяется, на что существенно влияет продолжительность процесса деформирования, зависящая, в свою очередь, от величины нагрузки.

Если разрушение грунта происходит быстро, переориентация частиц не успевает произойти и структура практически не меняется.

(см. табл. 10.1, $t=0,03$ ч). Однако микро- и макротрещины образуются даже в этом случае и, например, при разрушении за 0,03 ч степень поврежденности увеличилась с 24,1 до 36,8%.

При более длительном процессе деформирования грунта интенсивность структурных изменений зависит от стадии ползучести. Так, в начале процесса, когда он протекал в виде I, неустановившейся стадии, наблюдались лишь незначительные изменения структуры: несколько уменьшились размеры полостей и начиналась переориентация частиц в наиболее слабых местах между агрегата-

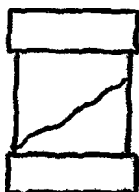


Рис. 10.3. Хрупкое разрушение образца из юрской глины полутвердой консистенции при испытании на сдвиг (при скручивании)

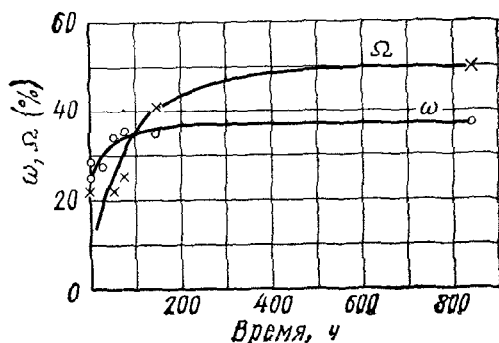


Рис. 10.4. Кривые развития степени ориентации Ω и степени поврежденности ω в процессе незатухающей ползучести каолина полутвердой консистенции ($W=38\%$) при постоянной нагрузке $\tau=100 \cdot 10^2$ Па

ми. После того как возникла II стадия (установившееся течение), появились более заметные изменения структуры (см. рис. 10.6) — начались распад агрегатов и переориентация частиц грунта, стремящихся расположиться базальными плоскостями вдоль направления сдвига; количество ориентированных участков заметно увеличилось. Наряду с продолжающимся «залечиванием» дефектов стали возникать новые повреждения структуры в виде тончайших микро-трещин, возникающих в наиболее слабых местах — у полостей — и зачастую протягивающихся от одной полости к другой.

Дальнейшее развитие деформации и переход процесса в стадию прогрессирующего течения привели к еще большему дроблению агрегатов и переориентации частиц грунта. Но наиболее характерным для стадии прогрессирующего течения является интенсивное развитие микротрещин (см. рис. 10.6 и 10.2). В ходе дальнейшего деформирования микротрещины слились и образовали магистральную трещину, что и привело образец к разрушению. Отметим, что разрушение с образованием магистральной трещины (рис. 10.3) наблюдалось у глинистых грунтов (каолин, юрская глина) как твердой и полутвердой, так и тугопластичной консистенции.

Описанные выше изменения структуры при незатухающей ползучести хорошо иллюстрируются данными табл. 10.1.

Закономерность изменения степени поврежденности ω и степени ориентации Ω при незатухающем деформировании под постоянной нагрузкой $\tau = 100 \cdot 10^2$ Па графически изображена на рис. 10.4.

Закономерность структурных изменений грунта. Прежде всего отметим, что в соответствии с опытными данными степень ориентации при деформировании грунта под различными нагрузками, но в течение одного и того же времени, оказалась примерно одинаковой. Отсюда можно в первом приближении считать, что процесс переориентации не зависит непосредственно от величины действующего напряжения, а определяется прежде всего продолжительностью деформирования (незатухающего).

Процесс же образования трещин зависит как от продолжительности деформирования, так и от уровня напряжения. Иными словами, можно считать, что $\Omega = \Omega(t)$, а $\omega = \omega(\tau, t)$. Вид этих функций, характеризующих закономерность структурных изменений, определяется выражениями:

$$1 - \omega = (1 - \omega_0)(t + 1)^{-\kappa_1 \bar{\tau}}; \quad (10.3)$$

$$1 - \Omega = (1 - \Omega_0)(t + 1)^{-\kappa_2}, \quad (10.4)$$

где κ_1 и κ_2 — параметры; $\bar{\tau}$ — некоторая безразмерная функция напряжения, значение которой будет рассмотрено позже.

Здесь и далее под t следует подразумевать безразмерную величину, равную t/t^* , где t^* — некоторый параметр, имеющий размерность времени; в ряде случаев можно принять $t^* = 1$.

Величины $1 - \omega$ и $1 - \Omega$ определяют соответственно неповрежденную и неориентированную единичные площади грунта, причем ω и Ω выражены здесь в долях единицы, соответственно $1 - \omega_0$ и $1 - \Omega_0$ — те же значения в исходном состоянии. Отметим, что $\Omega > 0$, поскольку даже при хаотичном расположении частиц всегда какая-то их часть имеет ориентацию, совпадающую с направлением будущего сдвига.

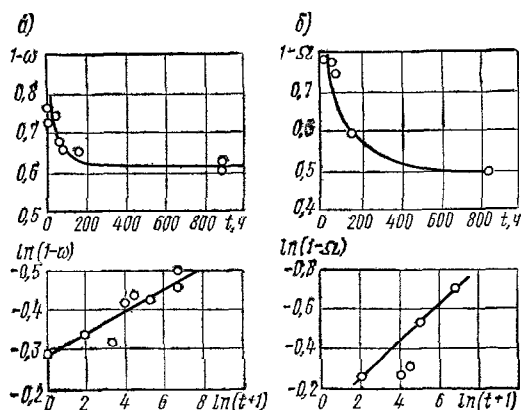


Рис. 10.5. Изменение структуры каолинового грунта полутвердой консистенции ($W = 38\%$; $\tau = 100 \cdot 10^2$ Па) в процессе ползучести в обычных и логарифмических координатах:

а — изменение поврежденности; б — изменение ориентации

Графически зависимости (10.3) и (10.4) отображены на рис. 10.5, который получен путем соответствующей перестройки графиков рис. 10.4. Достоверность зависимостей (10.3) и (10.4) подтверждается спрямлением указанных кривых при построении их в логарифмических координатах (нижние графики на рис. 10.5) в соответствии с преобразованием формул (10.3) и (10.4) к следующему виду:

$$\ln(1 - \omega) = \ln(1 - \omega_0) - \alpha_1 \bar{\tau} \ln(t + 1); \quad (10.5)$$

$$\ln(1 - \Omega) = \ln(1 - \Omega_0) - \alpha_2 \ln(t + 1). \quad (10.6)$$

Критерий разрушения грунта. Результаты микроструктурных исследований позволили выявить ту весьма важную роль, которую играет развитие дефектов структуры грунта в процессе его деформирования и длительного разрушения. Была установлена непосредственная связь между степенью поврежденности структуры и длительным разрушением грунта. При этом, как было показано Р. В. Максимьяк, разрушение грунта наступает при одном и том же значении степени поврежденности его структуры ω_r (табл. 10.2).

Т а б л и ц а 10.2

Значение степени поврежденности грунта ω_p (%) в момент разрушения

Каолин						Юрская глина			
при напряжении τ , 10^2 Па						при напряжении τ , 10^2 Па			
100	133	160	166	180	200	416	425	460	550
36,9	39,1	36,8	37	38,4	38	40,3	43	39,9	41
37,3	37,1	36,8	37,2	—	36	41,1	41,6	41,4	—
39,7	36,3	37,4	38,5	—	37,5	—	39,6	—	—
40,5	37	35,9	—	—	37,3	—	—	—	—
Среднее значение						Среднее значение			
38,6	37,3	37,7	37,6	38,4	37,2	40,7	41,4	40,6	41
$\omega_p(\text{ср}) = 37,5$						$\omega_p(\text{ср}) = 40,9$			

Это весьма важное обстоятельство свидетельствует о том, что значение степени поврежденности в момент разрушения ω_p можно рассматривать как критическое повреждение грунта. Указанное значение ω_p является константой для данного типа грунта. Так, для исследуемого каолина оно равно $\omega_p = (37,5 \pm 2)\%$, а для юрской глины $\omega_p = (40,9 \pm 2)\%$.

Следовательно, достижение степени поврежденности в результате накопления дефектов критического значения ω_p можно рассмат-

ривать в качестве критерия длительного разрушения Эта величина является постоянной для данного грунта $\omega_p = \text{const}$

Подчеркнем еще раз, что приведенные данные относились к глинистым грунтам от твердой до тугопластичной консистенции. Все сказанное, вероятно, можно отнести и к мягкопластичным грунтам. Вопрос же о критерии разрушения грунтов текучей консистенции подлежит специальному выяснению Можно предположить, что разрушение таких грунтов, носящее, несомненно, вязкий характер, вызывается смещением частиц на такое расстояние, при котором перестают взаимодействовать межчастичные силы. Это смещение можно рассматривать как разрыв связей, аналогичный описанному выше разрыву связей структурированных грунтов

В заключение отметим, что дефекты структуры грунта играют существенную роль в явлении дилатансии глинистых грунтов (см § 12.1) и, как показала Е. П. Шушерина (сб. «Мерзлотные исследования», вып 5. МГУ, 1966), характер объемных деформаций связан с развитием микротрещин.

Механизм деформирования и длительного разрушения грунта. Суммируя все сказанное выше,

можно представить механизм деформирования и длительного разрушения грунта Как было ранее показано автором (1963), в основе процесса ползучести грунтов лежат два взаимнопротивоположных явления — упрочнение и расслабление грунта, причем если превалирует первое из этих явлений (упрочнение), то деформации затухают и разрушения не происходит, если же превалирует расслабление, то в грунте развивается незатухающая ползучесть, приводящая к его разрушению

Явления упрочнения и расслабления грунта вызываются изменениями, происходящими под воздействием нагрузки в его структуре, эти изменения можно отобразить в виде схемы, показанной на рис 106 Когда к грунту приложена внешняя нагрузка, в его отдельных участках происходит концентрация напряжений, приводящая к перенапряжению отдельных связей и к их разрыву Обычно эти разрывы возникают в наиболее слабых местах структуры, в результате частицы с нарушенными связями стремятся переместиться в новое, более устойчивое положение

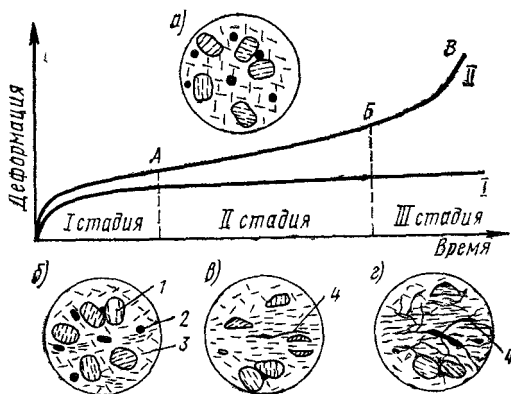


Рис 106 Схема изменений микроструктуры грунта в процессе ползучести Структура грунта

а — исходная, б — на I стадии, в — на II стадии, г — на III стадии ползучести, 1 — микроблоки глинистых частиц, 2 — полости и пустоты, 3 — цементирующая глина, 4 — микро и макротрещины

В начале процесса смещение частиц приводит к их более плотной «упаковке»; одновременно возникают новые межчастичные связи и уменьшаются размеры и количество дефектов структуры — полости, пустоты и микротрещины, причем «залечивание» их сопровождается уменьшением объема грунта — его уплотнением. В результате происходит упрочнение грунта. Эти явления могут происходить даже при чистом сдвиге; естественно, что их интенсивность увеличивается при наличии всестороннего сжимающего напряжения.

Наряду с «залечиванием» дефектов структуры грунта в ней возникают новые повреждения, расслабляющие структурные связи. Однако если нагрузка мала, то восстановление связей и «залечивание» дефектов структуры преобладает над разрушением связей и образованием новых дефектов. В результате доминирует процесс упрочнения, что и обуславливает затухающий характер деформирования грунта. Именно упрочнением структуры грунта объясняется рассмотренный в § 9.8 факт повышения сопротивления грунта после его деформирования.

Если же нагрузка достаточно велика, то явление упрочнения грунта происходит лишь в I, неустановившейся стадии процесса ползучести, когда расслабление связей компенсируется упрочнением структуры. По мере же дальнейшего развития процесса ползучести все возрастающее нарушение структурных связей, распад агрегатов, переориентация частиц и рост дефектов структуры вызывают более интенсивное снижение сопротивления грунта нагрузкам — его расслабление. Однако на каком-то этапе это расслабление компенсируется упрочнением и ползучесть протекает в виде квазиустановившегося течения с примерно постоянной скоростью (II стадия).

Увеличивающиеся в процессе деформирования (при больших нагрузках) изменения структуры и накопление ее нарушений приводят к превалированию расслабления над упрочнением, в результате этого скорость деформации возрастает и процесс деформирования грунта переходит в III стадию — прогрессирующего течения. На этой стадии рост дефектов становится наиболее интенсивным и, когда поврежденность структуры (плотность дефектов) достигает критического значения $\sigma_p = \text{const}$, грунт разрушается.

§ 10.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Закономерности длительного разрушения грунтов. При построении теории длительного разрушения грунтов, основные положения которой были изложены автором книги в докладе [38], будем исходить из следующих положений, приведенных в § 10.2:

1) разрушение грунтов (во всяком случае, твердой, полутвердой и пластичной консистенции) происходит в результате возникновения и развития дефектов структуры — микро- и макротрещин;

2) показателем процесса развития дефектов структуры является изменение во времени их плотности, иначе говоря, степени поврежденности ω , изменяющейся в пределах

$$\omega_0 \leq \omega \leq \omega_p \text{ и } (1 - \omega_0) \geq (1 - \omega) \geq (1 - \omega_p), \quad (10.7)$$

где ω_0 и ω_p — степень поврежденности в начальный момент ($t=0$) и в момент разрушения ($t=t_p$), $1-\omega_0$ и $1-\omega_p$ — неповрежденная единичная площадь в моменты $t=0$ и $t=t_p$ соответственно;

3) критерием разрушения грунта является достижение степенью поврежденности его структуры критического значения

$$\omega_p = \text{const}; \quad (10.8)$$

4) интенсивность процесса длительного разрушения грунта зависит от скорости роста дефектов, его структуры, которая в свою очередь является функцией действующего напряжения и времени:

$$\frac{d\omega}{dt} = f(\tau, t). \quad (10.9)$$

Вид функции $f(\tau, t)$ можно установить, используя зависимость (10.5), полученную на основании данных микроструктурных исследований. Продифференцировав указанную зависимость, получим

$$\frac{d\omega}{1-\omega} = \alpha_1 \bar{\tau} \frac{dt}{t+1}. \quad (10.10)$$

Это выражение хорошо отображает механизм образования трещин как стохастического (случайного) процесса, и его можно вывести также на основе теории вероятностей.

Допустим, что некоторый объем грунта состоит из N_0 элементарных объемов, в которых при некотором сочетании обстоятельств могут появиться трещины, в результате чего эти элементарные объемы разрушатся. Обозначим через N_t число элементарных объемов, которые к моменту t были неразрушенными, а через dN — число элементарных объемов, появление трещин у которых и разрушение наступило за промежуток времени от t до $t+dt$; вероятность появления трещин в течение времени dt обозначим через $m(t)dt$. Если далее обозначить через $p = N_t/N_0$ вероятность того, что до истечения срока времени t разрушения не произойдет, а через $dp = dN_t/N_0$ — вероятность того, что элементарные объемы разрушатся за промежуток времени от t до $t+dt$, то можно записать соотношение

$$-dp = p(t) m(t) dt, \quad (a)$$

откуда

$$-dN = N_t m(t) dt. \quad (б)$$

Это соотношение утверждает положение о том, что количество элементарных объемов, разрушенных за бесконечно малый промежуток времени dt , прямо пропорционально числу элементарных

объемов (образцов), не разрушившихся до этого времени. В нашем случае $N_0=1-\omega_0$, $N_t=1-\omega$, $dN_t=-d\omega$. Положив $m=\kappa_1\bar{\tau}/(t+1)$, получим уравнение (10.10).

Вывод уравнения длительной прочности грунта. С учетом условия (10.7) из соотношения (10.5) или из непосредственного интегрирования выражения (10.10) получаем

$$\int_0^{t_p} \bar{\tau} \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{1-\omega_0}{1-\omega_p} = \text{const.} \quad (10.11)$$

Здесь $\bar{\tau}$ — уровень напряжений, принимаемый равным

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0 - \tau}, \quad (10.12)$$

где τ_0 — условно-мгновенная прочность; τ — действующее напряжение, в общем случае переменное во времени, $\tau=\tau(t)$.

Выражение (10.11) является условием длительного разрушения, вытекающим из определения (10.8). Оно устанавливает связь между временем до разрушения и величиной нагрузки, причем интегральная форма выражения позволяет учитывать любой режим загрузки, переменность нагрузки, изменимость свойств грунта во времени и т. д.

Во всех случаях разрушение грунта будет происходить тогда, когда соотношение неповрежденной площади единичного поперечного сечения в исходном состоянии и в некоторый момент t_p достигнет критического значения $(1-\omega_0)/(1-\omega_p)=\text{const}$. При этом чем меньше величина нагрузки, тем за большее время наступает указанное критическое состояние, в чем и проявляется эффект длительной прочности грунта.

Для случая $\tau=\text{const}$ будем иметь:

$$\frac{\tau_0 - \tau}{\tau} = \frac{1}{\nu} \ln(t_p + 1); \quad \nu = \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{1-\omega_0}{1-\omega_p} = \text{const.} \quad (10.13)$$

Как видно, (10.13) совпадает с эмпирической формулой (9.23) или, обозначив $\nu=\ln(1/T)$ и $\tau_0=\beta/\nu=\beta/\ln(1/T)$, с формулой (9.22):

$$\tau = \frac{\beta}{\ln\left(\frac{t_p + 1}{T}\right)} \approx \frac{\beta}{\ln(t_p/T)}. \quad (10.14)$$

Однако в отличие от эмпирической формулы параметры выражения (10.13) имеют вполне определенный физический смысл, вытекающий из представления о процессе разрушения грунта как о процессе накопления дефектов его структуры. Так, параметр этого выражения $T = \left(\frac{1-\omega_p}{1-\omega_0}\right)^{1/\kappa_1}$ характеризует соотношение неповрежденной площади сечения грунта в начальный момент и в момент разрушения. Очевидно, что при $t=0$ имеем $T=1$ и $\nu=0$.

Соответственно этому величина τ_0 есть разрушающее усилие F , приходящееся на начальную единичную неповрежденную площадь: $\tau_0 = F/(1-\omega_0) \cdot 1 \cdot 1$. Прочность же τ есть усилие, приходящееся на единичную неповрежденную площадь в момент разрушения: $\tau = F/(1-\omega_p) \cdot 1 \cdot 1$.

Поскольку хорошее соответствие результатов, получаемых по формуле (9.22), опытным данным было показано с достаточной убедительностью в гл. 9, тем самым можно считать физическую формулу (10.13) вполне правомочной.

Отметим, что уравнение длительного разрушения (10.11) можно получить, исходя из термодинамического условия прочности (9.15). Заменяя в этом условии приращение плотности энтропии скоростью этого приращения, будем иметь, по А. И. Чудновскому,

$$\int_0^{t_p} \dot{S}(t) dt = \Delta S_{кр}. \quad (10.15)$$

Критическое значение плотности энтропии $\Delta S_{кр}$ определяется критической степенью поврежденности ω_p , и согласно рассмотренным выше данным его можно принять равным значению ν , определенному соотношением (10.13). Приращение же плотности энтропии можно представить в виде суммы приращения, вызванного энергообменом с окружающей средой dS_e , и приращения dS_i , обусловленного необратимыми процессами внутри системы, в частности диссипацией механической энергии. Тогда

$$\dot{S}_e = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{\Theta}; \quad \dot{S}_i = \Phi(T_s, T_e^p, \Theta, f), \quad (10.16)$$

где dQ — приток немеханической энергии; Θ — температура, К; T_s и T_e^p — тензоры напряжений и необратимых деформаций; f — плотность свободной энергии.

С помощью выражения (9.15) можно рассматривать длительное разрушение как следствие теплового и механического воздействий, с одной стороны, и внутренних физико-химических процессов в грунте (диффузия, осмос, сорбция) — с другой.

Если принять $S_e = 0$ и пренебречь влиянием внутренних физико-химических процессов, положив $f = 0$ ввиду сравнительно малого влияния этих факторов, и если вид функций S_i и $\Delta S_{кр}$ принять в соответствии с выражением (10.10), то уравнение (10.15) совпадает с (10.11).

Кинетическая природа длительного разрушения. Разрушение тел, согласно представлениям кинетической теории, рассматривается как неравновесный процесс нарушения и восстановления связей, активируемый воздействием внешней силы и носящий термофлуктуационный характер (см. § 7.6).

Полагая, что время до разрушения t_p соответствует интервалу времени от момента приложения нагрузки до момента отрыва частицы, т. е. есть время «соседней жизни» этой частицы, кинетическая теория прочности использует для описания зависимости между

действующим напряжением τ и временем до разрушения грунта t_p уравнение (10.1), которое в этом случае имеет вид

$$t_p = t_0 e^{U_p/k\theta} \quad (10.17)$$

Величину U_p в этом выражении рассматривают как энергию активации процесса разрушения, которую надо сообщить элементарной частице, чтобы оторвать ее от соседних частиц.

Рассмотрим в свете указанных представлений кинетическую сущность формулы (10.14). Представив ее в виде

$$t_p = T e^{\beta/\tau} \quad (10.18)$$

и сопоставив с (10.17), можем заключить, что выражение (10.14) будет иметь смысл кинетического уравнения, если параметр β является функцией энергии активации U_p , напряжения τ и температуры θ , т. е. если $\beta/\tau = U_p/k\theta$.

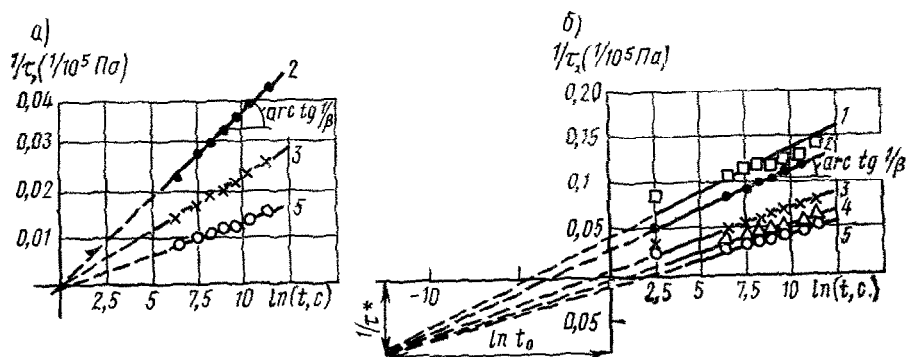


Рис. 10.7. Кривые длительной прочности грунта в масштабе $\frac{1}{\tau} - \ln t$:

а — испытание супеси на одноосное сжатие; б — испытание глины на сцепление при температуре: 1 — 20°; 2 — -5°; 3 — -10°; 4 — -15°; 5 — -20°

Первой проверкой справедливости этого предположения является проверка соотношения $\beta \sim 1/\theta$. Такую проверку целесообразнее выполнять для мерзлых грунтов, поскольку влияние температуры в наибольшей степени сказывается у этих грунтов.

Обработка с указанной целью результатов испытаний образцов на длительную прочность при сжатии и на определение длительного сцепления вдавливанием шарика [4] супеси и глины велась при температуре -20, -15, -10, -5° и 20° С.

Если опытные точки нанести на график, построенный в координатах $1/\tau - \ln t_p$ в соответствии с представлением формулы (10.14) в виде

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\beta} (\ln t_p - \ln T), \quad (10.19)$$

то получим пучок прямых (рис. 10.7), углы наклона которых определяют значения β для разных Θ . Как видно из графика, все прямые $1/\tau - \ln t_p$ сходятся в одном полюсе с координатами $1/\tau^* - \ln t_0$. Следовательно, зависимость (10.19) можно представить в виде

$$\ln\left(\frac{t_p}{t_0}\right) = \beta \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^*} \right). \quad (10.20)$$

Если теперь опытные точки нанести на график, построенный в координатах $(1/\Theta, \ln t_p)$, соответствующий преобразованию формулы (10.17) к виду

$$\ln t_p = \ln t_0 + \frac{U_p}{k} \frac{1}{\Theta}, \quad (10.21)$$

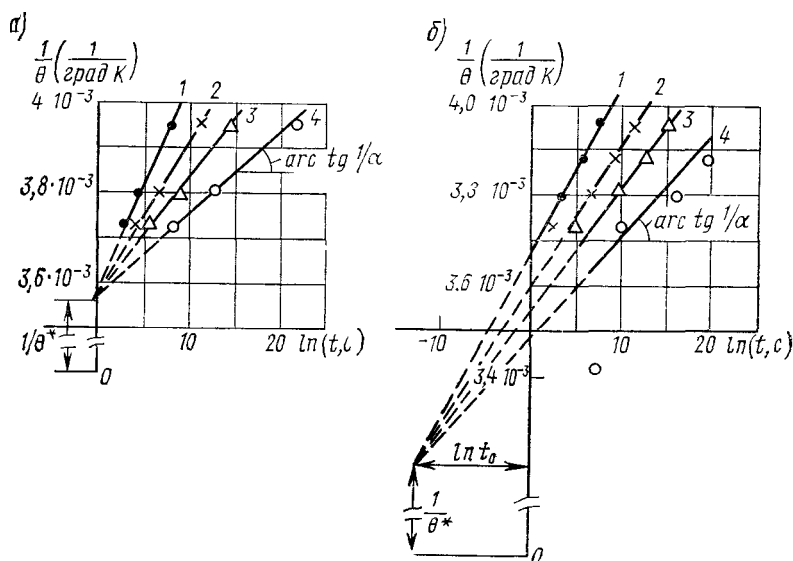


Рис. 10.8. Зависимость времени до разрушения грунта t_p от температуры Θ (К) при различных значениях напряжения τ :

а — испытание супеси на одноосное сжатие: 1 — $\tau=100$; 2 — $\tau=67$; 3 — $\tau=50$; 4 — $\tau=33 \cdot 10^5$ Па; б — испытание глины на длительное сдвигание: 1 — $\tau=67$; 2 — $\tau=33$; 3 — $\tau=14$; 4 — $\tau=9 \cdot 10^5$ Па

то получим пучок прямых (рис. 10.8), углы наклона которых определяют значения U_p/k для разных τ . Все прямые сходятся в одном полюсе с координатами $(1/\Theta^*, \ln t_0)$ и, следовательно, зависимость (10.21) можно представить в виде

$$\ln\left(\frac{t_p}{t_0}\right) = \alpha \left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta^*} \right). \quad (10.22)$$

Отметим, что от полученных прямых (рис. 10.8, б) резко отклоняется точка для температуры 20°C ($1/\Theta = 3,41 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$), причина чего будет рассмотрена в последующем.

Значения t_0 из выражений (10.20) и (10.22) оказались (см. рис. 10.7 и 10.8) полностью совпадающими; в обоих случаях t_0 для сжатия (супеси) равно $5,49 \cdot 10^{-1}$ с и для сцепления (глины) — $2,25 \cdot 10^{-6}$ с.

Согласно предпосылкам кинетической теории прочности, значение t_0 в формуле (10.17) принимают (Регель, 1974) равным периоду тепловых колебаний атомов: $t_0 = h/k\Theta$. При этом считается, что в пределах небольшого изменения температуры ($\Theta \approx 300$ К) $t_0 \approx 10^{-13}$ с = const.

Для грунтов (см. рис. 10.7) время $t_0 \gg 10^{-13}$ с и оно не является константой, но зависит от типа грунта и вида испытания. По-видимому, это объясняется несколько иным физическим смыслом значе-

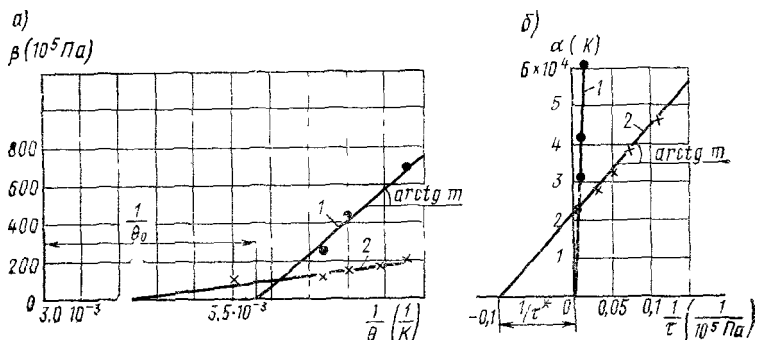


Рис. 10.9. Температурные (а) и силовые (б) зависимости параметров длительной прочности в соответствии с формулами (10.23):

1 — испытание супеси на сжатие; 2 — испытание глины на сцепление

ния t_0 в нашем случае, поскольку мы рассматриваем процесс разрушения грунта на микроструктурном, а не на молекулярном уровне. Из сопоставления (10.20) и (10.22) следует, что

$$\beta = m \left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta^*} \right); \quad \alpha = m \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^*} \right). \quad (10.23)$$

Справедливость этих соотношений подтверждается графиками на рис. 10.9, опытные точки которых хорошо ложатся на прямые. При этом значения m , определяемые углом наклона прямых, для обоих графиков оказались одинаковыми.

Из (10.20), (10.22) и (10.23) следует, что $\ln t_p$ пропорционален параметрам β и α , которые в свою очередь есть функции $1/\Theta$ и $1/\tau$. Поскольку именно такой вид зависимости t_p от Θ и τ соответствует кинетическому уравнению (10.17), можем заключить, что процесс разрушения грунта и отображающая этот процесс формула (10.14) имеют кинетическую природу.

Рассматривая совместно (10.20) и (10.22) и сопоставляя их с учетом (10.23), можем выразить энергию активации процесса раз-

рушения с помощью следующего соотношения:

$$U_p = U^* \frac{\tau^* + \tau}{\tau}, \quad (10.24)$$

где $U^* = \frac{km}{\tau^*} \frac{(\theta^* - \theta)}{\theta^*}$.

Из (10.24) следует, что энергия активации процесса разрушения зависит от температуры θ . Рассмотрим эту зависимость более подробно. Из термодинамики известно, что внутренняя энергия равна

$$U = H - \theta S, \quad (10.25)$$

где S — энтропия системы; H — теплота ее активации (энтальпия).

Напомним, что энтальпией или теплосодержанием называют функцию состояния термодинамической системы $H = \int_0^\theta c_p d\theta + H_0$, где c_p — теплоемкость среды в изобарном (протекающем при постоянном давлении) процессе; H_0 — энтальпия среды при $\theta = 0$ К.

Сопоставляя (10.25) и (10.24), получим

$$U_p = \frac{\tau^* + \tau}{\tau} (H^* - \theta S^*). \quad (10.26)$$

Отсюда время до разрушения можно выразить кинетическим соотношением

$$t_p = t_0 \exp \left(\frac{U^*}{k\theta} \frac{1}{\tau} \right) = t_0 \exp \left[\left(\frac{H^*}{k\theta} - \frac{S^*}{k} \right) \frac{1}{\tau} \right], \quad (10.27)$$

где $\bar{\tau} = \tau / (\tau^* + \tau)$.

§ 10.4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПАРАМЕТРОВ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Физический смысл параметров β и T . Вернемся к уравнению длительной прочности (10.14), переписав его в форме (10.18): $t_p = T e^{\beta/\tau}$.

В соответствии с (10.23) и (10.24) значение параметра β в этой формуле можно выразить в виде функции

$$\beta = \frac{\tau^*}{k\theta} U^*. \quad (10.28)$$

Сопоставив (10.19) и (10.20), значение параметра T можем выразить как

$$T = t_0 e^{\beta/\tau^*} = t_0 e^{U^*/k\theta}. \quad (10.29)$$

Таким образом, параметры β и T уравнения (10.16) являются функциями энергии активации, в свою очередь зависящей от физических свойств грунта и температуры. В табл. 10.3 приведены значения указанных параметров, полученных из рассмотренных выше (см. рис. 10.7 и 10.8) опытов.

Опытные значения параметров β и T уравнения длительной прочности (10.14)

Грунт	Температура, °С	Вид испытания			
		вдавливание шарика		одноосное сжатие	
		β , 10 ⁵ Па	T , с	β , 10 ⁵ Па	T , с
Глина	+20	108	0,013	—	—
	—5	120	0,016	329	0,0039
	—10	154	0,497	400	0,0075
	—15	169	1,649	—	—
	—20	186	6,686	596	0,044
Супесь	+20	64	18 · 10 ⁻⁸	—	—
	—5	—	—	263	0,930
	—10	223	0,0037	429	1,297
	—15	250	0,018	—	—
	—20	258	0,030	692	2,014

Влияние температуры. Зависимость параметров β и T от температуры, выраженная соотношениями (10.28) и (10.29), иллюстрируется данными табл. 10.3. Как видно, влияние Θ на эти параметры весьма существенно. Что же касается влияния температуры на сам процесс длительного разрушения, то для оценки этого влияния рассмотрим снова формулу (10.18), подставив в нее значения β и T из (10.28) и (10.29). Тогда получим следующую зависимость времени до разрушения от температуры грунта:

$$t_p = t_0 \exp \left(\frac{U^*}{kT} \frac{1}{\Theta} \right); \quad \ln \frac{t_p}{t_0} = \frac{U^*}{kT} \frac{1}{\Theta}. \quad (10.30)$$

Зависимость же длительной прочности от температуры можно определить из выражения

$$\tau = \frac{\tau^* U^*}{k\Theta \ln \left(\frac{t_p}{t_0} \right) - U^*}. \quad (10.31)$$

Следует отметить, что степень влияния температуры на процесс разрушения в интервалах ее отрицательных и положительных значений различна, поскольку у мерзлых грунтов возникают льдоцементационные связи, прочность которых существенно зависит от Θ . Соответственно у мерзлого грунта энергия активации U^* в большей степени зависит от Θ , чем у грунта немерзлого.

Изменение величины U^* при замерзании грунта, обусловленное возникновением льдоцементационных связей (и другими дополнительными причинами — сближением минеральных частиц, увеличением связности пленочной воды и т. д.), происходит скачкообразно. Кроме того, часть энергии активации затрачивается на поглощение скрытой теплоты кристаллизации воды в интервале интенсивных фазовых превращений, т. е. в интервале температур, близких к 0° С.

Таким образом, для более полной формулировки в выражение (10.26) необходимо ввести член, учитывающий затрату энергии на фазовые превращения грунтовой воды. Соответственно время до разрушения будет резко меняться при переходе через точку заморзания, как это и отображено на схеме рис. 10.10. Участок Oa этой схемы соответствует интервалу положительных температур, участок ab — интервалу отрицательных температур, близких к 0°C , характеризующемуся интенсивными фазовыми переходами, и участок bc — интервалу отрицательных температур без существенных фазовых переходов. Наклоны прямой $1/\theta - \ln(t_p/t_0)$ на этих участках будут различны, отображая этим изменения величины U^* на указанных интервалах. Отклонение опытных точек для положительной температуры от прямых на графиках рис. 10.8 и объясняется указанными выше особенностями.

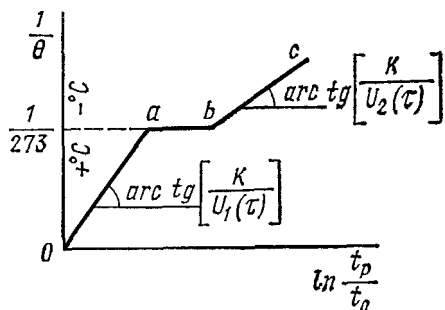


Рис. 10.10. Зависимость между температурой грунта и длительностью его разрушения с учетом фазовых превращений грунтовой воды

Энергия активации и число межчастичных связей. Значение энергии активации в формуле (10.1) измеряют в джоулях (или эргах) и относят к одной элементарной частице (по смыслу — постоянной

Больцмана). Если же разделить U на число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$, получим $U/N_A k\theta = U/R\theta$, где $R = kN_A = 1,99 \cdot 10^{-3}$ ккал/моль $= 8,31 \cdot 10^3$ кДж/моль (газовая постоянная). В этом случае энергия активации U будет отнесена к 1 молю вещества и ее следует выражать в Дж/моль (или кал/моль). Напомним, что моль есть единица количества вещества.

Поскольку мы условились рассматривать процесс на микроструктурном, а не атомно-молекулярном уровне, целесообразно относить энергию активации к элементарному объему грунта, обозначая ее как $\langle U \rangle$, как это делали в формуле (2.10). Оценим количество межчастичных связей, приходящихся на такой объем.

Напряжение τ , изменяющее величину U , определяется как $\tau = sF$, где F — сила, Н, действующая на элементарную частицу; s — число смещенных частиц в единице площади. Если считать, что F — сила, вызывающая разрыв одной связи между грунтовыми частицами, то величина s определяет число единичных связей на единицу площади. Полагая, что активация разрыва одной частицы требует одновременного разрыва n связей, имеем $s = 1/n$.

Глинистую частицу можно рассматривать как приведенную сферу со средним значением эквивалентного диаметра $0,0005$ мм, тогда в 1 см^3 объема грунта будет содержаться около $8 \cdot 10^{12}$ частиц. Если считать, что при нормальной упаковке каждая сферическая частица имеет шесть контактов, то на 1 см^3 объема придется

$48 \cdot 10^{12}$ контактов, а на 1 см^2 площади — $48 \cdot 10^{12/(2/3)} = 13 \cdot 10^8$ контактов. По данным Митчелла, в иллитовой глине число связей на единицу площади составляет от $5 \cdot 10^{10}$ во влажной глине ($W=40\%$) до $5 \cdot 10^{12}$ в сухой. Таким образом, на один контакт приходится от 40 до 4000 связей.

Рассмотрим, от чего зависит прочность грунта: от числа контактов между частицами или от числа связей. Связи между частицами образуются в результате контактирования частиц и появления межчастичных сил взаимодействия как физико-химической природы, так и вызванных эффективным давлением σ' от внешней нагрузки. При $\sigma'=0$ сцепление имеет чисто физико-химическую природу. Если же такое сцепление незначительно, силы взаимодействия возникают лишь благодаря нормальному давлению. Разрыв связей (любой природы) указывает на начало разрушения грунта. Таким образом, следуя Митчеллу, можно считать, что прочность грунта пропорциональна не числу контактов между частицами, а числу межчастичных связей, приходящихся на единицу объема.

О функции напряжений $\bar{\tau}$. При рассмотрении в предыдущих разделах закономерности длительной прочности мы исходили из предположения о том, что процесс снижения прочности беспределен и при $t_p \rightarrow \infty$ прочность $\tau \rightarrow 0$. Если же считать, что при $t_p \rightarrow \infty$ прочность снижается до некоторой постоянной величины — истинного предела длительной прочности τ_∞ , то эту величину следует ввести в выражение (10.12), определяющее вид функции напряжения $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau_0 - \tau_\infty}.$$

Тогда формула (10.13) будет иметь вид

$$\frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty} = \frac{1}{v} \ln(t_p + 1). \quad (10.32)$$

Если же функцию $\bar{\tau}$ принять в виде

$$\bar{\tau} = \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau_0 - \tau_\infty} (t_p + 1),$$

то получим выражение, совпадающее с формулой (9.31):

$$\frac{\tau_0 - \tau}{\tau - \tau_\infty} = \frac{1}{v} t_p. \quad (10.33)$$

Вопрос о существовании истинного предела длительной прочности является в настоящее время, как говорилось в гл. 9, неясным. Эта неясность остается и при кинетическом подходе к теории прочности. Так, в работе [30] отмечалось, что резкое затухание кривой длительной прочности у твердых тел (металлы, пластмассы и другие при комнатной температуре) «...создало иллюзию порогового разрушения, откуда и пошло понятие о пределе прочности». И далее указывается: «Расширение температурных условий испытаний,

а также и диапазона изменения долговечности привело к тому, что существование предела прочности как физической характеристики тел стало отрицаться».

Действительно, из общего вида кинетической зависимости (10.1) следует, что процесс разрыва межчастичных связей активируется при любом значении приложенной силы и долговечность материала соответственно зависит лишь от времени воздействия этой силы.

§ 10.5. УЧЕТ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

Постановка задачи. Кривая длительной прочности типа рис. 9.1 и соответствующая ей формула (9.18) относятся к случаю, когда действует постоянная нагрузка и когда свойства и состояние грунта (плотность-влажность, температура и др.) неизменны во времени. Вместе с тем представляется весьма важным определить длительную прочность в условиях воздействия переменной нагрузки и при изменяющихся во времени свойствах грунта.

Действительно, случай, когда нагрузка на грунт постоянна с момента загрузки, является скорее гипотетическим, принимаемым в целях упрощения. Фактически же нагрузка растет в большинстве случаев постепенно, по мере возведения сооружения, и только по окончании строительного периода нагрузка становится постоянной. Но даже и в процессе эксплуатации нагрузка может меняться, например при изменении уровня воды в водохранилище, при переменных эксплуатационных нагрузках (в складах, элеваторах и силосах) и пр.

В меньшей степени важно учитывать переменное действие нагрузок при оценке длительной прочности грунтов, подвергающихся кратковременным и периодически действующим нагрузкам.

С изменением же свойств грунта необходимо считаться, например, при определении длительной прочности консолидирующихся грунтов, у которых плотность-влажность изменяется во времени. При этом уплотнение грунта может происходить как в процессе возведения сооружения, т. е. одновременно с ростом нагрузки, так и после окончания строительства, т. е. при постоянной нагрузке. Наконец, случай учета переменной температуры имеет исключительно важное значение при оценке длительной прочности мерзлых грунтов. Температура этих грунтов, используемых в качестве оснований сооружений или среды, в которой эти сооружения возводятся, как правило, изменяется в соответствии с изменением температуры наружного воздуха и под воздействием тепловыделений сооружений.

Принцип линейного суммирования поврежденности. Для учета в уравнении длительной прочности переменных свойств грунтов и переменной нагрузки используем принцип суммирования поврежденности Робинсона.

Если в течение времени t , к образцу было приложено напряжение τ , то он получает поврежденность, степень которой равна отношению времени t , действия напряжений τ , к времени $t_p(\tau)$, необ-

ходимому для разрушения при данном напряжении. Тогда в соответствии с условием (10.7) можно записать

$$\frac{\omega_f}{\omega_p - \omega_0} = \frac{t_f}{t_p(\tau_f)}.$$

При переменных нагрузках τ и изменяющихся свойствах (температура, плотность-влажность) грунта поврежденность суммируется и сумма повреждений будет равна

$$\int_{\omega_0}^{\omega_p} \frac{d\omega}{\omega_p - \omega_0} = \int_{t^*}^{t_p} \frac{dt}{t_p(\tau, N)} = 1. \quad (10.34)$$

Подставим в это равенство значение t_p из (10.18), причем напряжение принимаем как некоторую заданную функцию времени $\tau(t)$, а параметры β и T — как функции свойств грунта, изменяющиеся во времени $N(t)$, т. е. $\beta = \beta[N(t)] = \beta(t)$ и $T = T[N(t)] = T(t)$. Тогда равенство (10.34) примет вид

$$\int_{t^*}^t \frac{1}{T(t)} \exp \left[-\frac{\beta(t)}{\tau(t)} \right] dt = 1. \quad (10.35)$$

Полученное выражение позволяет определить длительную прочность с учетом изменяющейся во времени по заданному закону нагрузки и с учетом переменных свойств грунта, изменение которых во времени задано переменными значениями параметров длительной прочности $\beta(t)$ и $\tau(t)$. При этом поскольку $\beta(t)$ входит в подинтегральное выражение в виде показателя степени, а $T(t)$ — в виде множителя и, следовательно, влияние переменности T сказывается в меньшей степени по сравнению с β , то для упрощения параметр T можно иногда рассматривать как константу, а изменимость свойств и состояния грунта учитывать переменным значением параметра $\beta(t)$.

Переменная нагрузка. Ниже рассмотрены некоторые простейшие случаи учета переменных нагрузок (рис. 10.11).

Схема а — нагрузка повышается ступенями: в течение времени t_1 на грунт передается нагрузка τ_1 , которая затем увеличивается до значения $\tau_2 = k\tau_1$ ($k > 1$). Требуется определить, в какой момент времени t_p произойдет разрушение грунта.

Подставив в формулу (10.35) значения $\tau_1 = \text{const}$ и $\tau_2 = k\tau_1 = \text{const}$ и разбивая интеграл на две части, получим

$$\int_0^{t_1} e^{-\beta/\tau_1} dt + \int_{t_1}^{t_p} e^{-\beta/\tau_2} dt = T, \quad (10.36)$$

откуда

$$t_p = t_1 + (t_m - t_1) \exp \left[\frac{\beta}{\tau_1} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \right], \quad (10.37)$$

где $t_m = T e^{\beta/\tau_1}$ — то время, через которое грунт бы разрушился, если бы действовала только нагрузка τ_1 .

Естественно, что решение применимо для случаев $t_1 < t_p < t_m$. При этом для простоты нижний предел интегрирования был принят равным $t^* = 0$. В более корректной форме его надо было принять равным $t^* = -1$, чем лучше удовлетворяются начальные условия. Эта поправка остается справедливой и для последующих выкладок.

Рассмотрим, какой должна быть нагрузка $\tau_2 = k\tau_1$, при которой грунт разрушился бы сразу по ее приложению. Подставив $t_p = t_1$ в формулу (10.37) и проделав соответствующие преобразования, получим, что разрушение произойдет в момент t_1 , если отношение нагрузок $\tau_1/\tau_2 = 1/k$ будет равно

$$\frac{1}{k} = \frac{\tau_1 \ln \left(\frac{1}{t_m - 1} \right)}{\beta \ln(1/T)} + 1.$$

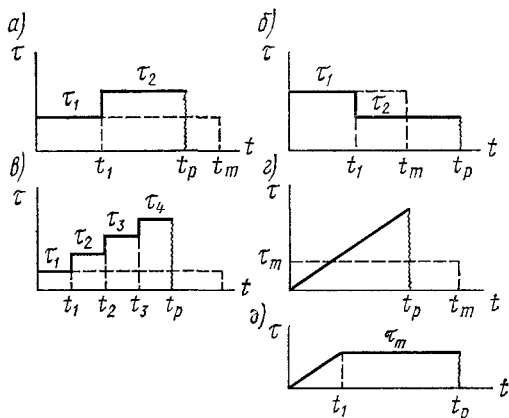


Рис. 10.11. Схемы загрузки

Пример. Пусть на массив грунта, характеристики длительной прочности которого равны $T = 6,5 \cdot 10^{-6}$ 1/ч и $\beta = 31,9 \cdot 10^{-5}$ Па, действовала нагрузка $\tau_1 = 1,55 \times 10^5$ Па, которая через $t_1 = 1000$ ч увеличилась до $\tau_2 = 1,2 \tau_1 = 1,85 \cdot 10^5$ Па.

Мгновенное разрушение массива грунта могло бы произойти лишь при нагрузке $\tau_0 = \beta / \ln \frac{1}{T} = 31,9 / \ln \frac{10^6}{6,5} = 4,37 \cdot 10^5$ Па. Разрушение же под нагрузкой

$\tau_1 = 1,55 \cdot 10^5$ Па, если последняя действует непрерывно, произошло бы через время $t_m = 6,5 \cdot 10^6 \cdot \exp(31,9/1,55) = 4735$ ч. Но если нагрузка τ_1 будет действовать только в течение $t_1 = 1000$ ч, а затем увеличится до $\tau_2 = 1,2 \tau_1$, как это оговорено условиями примера, то разрушение наступит через $t_p = 1000 + (4735 - 1000) \exp \left[\frac{31,9}{1,2} \left(\frac{1}{1,2} - 1 \right) \right] = 1109$ ч. Если же нагрузку τ_2 рассматриваем как разрушающую,

вызывающую разрушение сразу после ее приложения, т. е. через $t_1 = 1000$ ч, то такую величину нагрузки найдем из соотношения

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{k} = \frac{1,55}{31,9} \ln \frac{1}{4735 - 1000} + 1 = 0,712,$$

откуда $\tau_2 = 1,55/0,712 = 2,18 \cdot 10^5$ Па.

Схема б (рис. 10.11). Согласно этой схеме, нагрузка уменьшается ступенями, т. е. $\tau_1 < \tau_2 = k\tau_1$, где $k < 1$.

В этом случае остается в силе формула (10.36), но $t_1 < t_m < t_p$.

Схема в (рис. 10.11). По этой схеме загрузка грунта происходит непрерывно, ступенями: $\tau_1 < \tau_2 = k_1\tau_1 < \tau_3 = k_2\tau_1 < \dots < \tau_n = k_n\tau_1$, с выдерживанием каждой ступени в течение равного интервала времени $\Delta t = t_1 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots$

В этом случае интеграл в выражении (10.35) разбивается на n частей с пределами от 0 до t_1 , от t_1 до t_2 , ..., от t_n до t_p . Решение получаем в виде

$$\frac{t_m}{\Delta t} = 1 - \exp \left[\frac{\beta}{\tau_1} \left(1 - \frac{1}{k_1} \right) \right] + \\ + \exp \left[\frac{\beta}{\tau_1} \left(1 - \frac{1}{k_2} \right) \right] + \dots + \left[\frac{t_p}{\Delta t} - n \right] \exp \left[\frac{\beta}{\tau_1} \left(1 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) \right], \quad (10.38)$$

где $t_m > t_p > t_n$.

Из этого выражения определим номер ступени n , при которой произойдут разрушения, а также время до разрушения t_p .

Схема z (рис. 10.11) — нагрузка на грунт возрастает непрерывно по линейному закону $\tau = mt$. В этом случае формула (10.35) будет иметь вид, позволяющий вычислить t_p :

$$T = \int_0^{t_p} e^{-\beta/mt} dt = t_p e^{-\beta/mt_p} + \frac{\beta}{m} E_i \left(-\frac{\beta}{mt_p} \right), \quad (10.39)$$

где E_i — интегральная показательная функция.

Схема ∂ (рис. 10.11) — нагрузка в течение времени t_1 возрастает по линейному закону $\tau = mt$, а затем становится постоянной: $\tau = \tau_m = \text{const}$. Этот случай имеет наиболее важное значение для практических расчетов, поскольку время от 0 до t_1 можно рассматривать как строительный период, а время $t > t_1$ — как эксплуатационный.

Разбивая интеграл в выражении (10.35) на две части:

$$\int_0^{t_1} e^{-\beta/mt} dt + \int_{t_1}^{t_p} e^{-\beta/\tau_m} dt = T,$$

получим

$$T = \frac{\beta}{m} \left[\frac{1}{\beta} mt_1 \exp \left(-\frac{\beta}{mt_1} \right) + E_i \left(-\frac{\beta}{mt_1} \right) \right] + (t_p - t_1) \exp \left(-\frac{\beta}{\tau_m} \right). \quad (10.40)$$

Из этого уравнения можно найти или t_p при заданном τ_m или, наоборот, определить величину τ_m , при которой может произойти разрушение массива грунта за заданное время t_p , например за срок его службы.

Учет изменяемости свойств грунта. Рассмотрим закономерность снижения прочности мерзлого грунта при переменной его температуре.

Для задач строительства на вечномёрзлых грунтах наибольший интерес представляет диапазон изменения температур, захватывающий область фазовых изменений. Как отмечалось выше, в этом диапазоне зависимость от температуры в форме (10.31) перестает

быть справедливой и следует пользоваться какой-либо эмпирической формулой.

Опыты показывают, что можно принять зависимость

$$\beta = \frac{a}{(1 + \theta_c)^k} \text{ или } \beta = a + b\theta_c^n, \quad (10.41)$$

где θ_c — температура мерзлого грунта, °С, без учета отрицательного знака. Параметр же T можно рассматривать как константу.

Принимая вторую из приведенных эмпирических температурных зависимостей и полагая, что температура изменяется во времени по некоторому заданному закону $\theta_c(t)$, получим, подставив выражение (10.41) в формулу (10.35),

$$T = \int_{t^*}^{t^p} \exp \left\{ - \frac{a + b [\theta_c(t)]^n}{u} \right\} dt. \quad (10.42)$$

Закон изменения во времени температуры $\theta_c(t)$ или задают в качестве граничного условия задачи, или в общем случае определяют из решения уравнения теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial t} = a_\tau \Delta \theta_c, \quad (10.43)$$

где $a_\tau = \lambda/c$ — коэффициент температуропроводности грунта; λ — коэффициент теплопроводности; c — объемная теплоемкость: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа.

Пользуясь понятием эффективной теплоемкости, включающим как истинную теплоемкость, так и теплоту фазовых переходов, А. Г. Колесников и Г. А. Мартынов преобразовали уравнение (10.44) к следующему виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_{эф} \Delta \theta_c, \quad (10.44)$$

где $a_{эф} = \frac{\lambda}{c + \rho Q \frac{\partial W_n}{\partial t}}$; ρ — плотность сухого грунта; Q — теплота

кристаллизации; W_n — количество незамерзшей воды в грунте.

Таким образом, задача о длительной прочности грунта с учетом переменной во времени температуры сводится к совместному решению уравнения длительной прочности (10.42) и уравнения теплопроводности (10.44).

Периодическое изменение температуры. Рассмотрим, например, периодическое изменение температуры грунта в соответствии с колебаниями температуры наружного воздуха; этот случай является наиболее интересным, поскольку больше всего соответствует реальным условиям. Известно, что изменение темпе-

ратуры грунта на глубине z от поверхности определяется выражением

$$\theta_c = \theta_{c(0)} \left[1 - e^{-D} \cos \left(\frac{2\pi t}{t_1} - D \right) \right],$$

где $\theta_{c(0)}$ — среднегодовая температура вечномерзлого грунта, $^{\circ}\text{C}$; $t_1 = 1$ год (7860 ч) — период колебания температуры; $D = z\sqrt{\pi/a_{\tau}t_1}$ — декремент затухания; a_{τ} — коэффициент теплопроводности мерзлого грунта, $\text{м}^2/\text{ч}$.

Решение задачи получим, подставив это выражение в формулу (10.43):

$$T = \int_0^{t_p} \exp \left\{ -\frac{1}{\tau} \left[a + b\theta_{c(0)}^n \left(1 - e^{-D} \cos \left(\frac{2\pi t}{t_1} - D \right) \right)^n \right] \right\} dt. \quad (10.45)$$

Из этого выражения, решаемого численным путем, можно определить или время до разрушения t_p при заданном значении нагрузки τ (постоянной или переменной), или, приняв t_p равным сроку службы сооружения, определить длительную прочность τ_{∞} .

Другие виды формул длительной прочности. Условие (10.34), позволяющее учитывать переменность нагрузки и изменяемость свойств грунта, можно распространить не только на формулу (10.18), но и на феноменологические формулы длительной прочности. Так, если значение $t_p(\tau, N)$ в подынтегральном выражении уравнения (10.34) принять в соответствии с формулой (9.27)

$$t_p = T^* \tau^{1/\alpha}, \quad (10.46)$$

то уравнение (10.34) примет вид

$$\int_{t^*}^{t_p} \frac{1}{T^*(t)} \frac{dt}{[\tau(t)]^{1/\alpha}} = 1, \quad (10.47)$$

где $T^* = T^*[N(t), \theta(t)] = T^*(t)$ и $\tau = \tau(t)$ — параметр прочности и нагрузка.

Рассмотрим решение уравнения (10.47) для случаев переменной нагрузки (при $T^* = \text{const}$) в соответствии со схемами на рис. 10.11.

Решение для схем *a* и *б* (загружение грунта двумя ступенями) будет иметь вид

$$t_p = \frac{1}{k^{\alpha}} [t_m + t_1 (k^{\alpha} - 1)], \quad (a)$$

где $t_m = T^* \tau_1^{1/\alpha} = T^* \tau_m^{1/\alpha}$.

Для схемы *в* (непрерывное нагружение ступенями) получим

$$t_m = \Delta t \left[1 + k_1^{\alpha} + k_2^{\alpha} + \dots + k_{n-1}^{\alpha} \left(\frac{t_p}{\Delta t} - n \right) \right]. \quad (б)$$

В случае непрерывного нагружения по линейному закону (схема з) получим

$$t_p = [t_m \tau_m^\alpha m^{-\alpha} (\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha+1}} = [T^* m^{-\alpha} (\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (в)$$

Для схемы д (загружение по линейному закону и затем $\tau = \text{const}$) будем иметь

$$t_p = \frac{1}{\tau_m^\alpha} \left[T^* + \tau_m^\alpha t_1 - \frac{m^\alpha t_1^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \right], \quad (г)$$

откуда находим время до разрушения t_p при заданном τ_m или предельно-длительную прочность $\tau_m = \tau_\infty$ при заданном t_p .

§ 10.6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТОВ

Кинетическая природа вязкости. Согласно кинетической теории, коэффициент вязкости определяют по формуле (7.106):

$$\eta = Ae^{U/k\Theta}, \quad (10.48)$$

которая получена для идеальной, ньютоновой жидкости, характериземой постоянной скоростью течения $\dot{\gamma}$ и линейной связью между этой скоростью и напряжением сдвига $\eta = \tau / \dot{\gamma} = \text{const}$.

Грунты же, как и большинство реальных тел, деформируются в неустановившемся режиме, с изменяющейся во времени скоростью, и учитывать это обстоятельство нужно обязательно.

Изменение энергии активации в процессе деформирования. Переменность вязкости в зависимости от напряжения τ и от времени t отображается тем, что энергия активации в формуле (10.48) должна рассматриваться как переменная величина, изменяющаяся в процессе деформирования.

Эти изменения вызваны рассмотренными выше изменениями микроструктуры грунта. Но поскольку последние, в свою очередь, зависят от величины приложенного напряжения и от продолжительности процесса, энергия активации является функцией τ и t , т. е. $U = U(\tau, t)$. Соответственно выражение (10.48) будет иметь вид

$$\eta = Ae^{U(\tau, t)/(k\Theta)}. \quad (10.49)$$

Выше было показано, что процесс ползучести есть следствие развития явлений упрочнения и расслабления структуры грунтов под воздействием нагрузки. Следовательно, энергия активации может как уменьшаться в результате расслабления структуры грунта, так и увеличиваться в результате ее упрочнения, что равносильно уменьшению высоты энергетического барьера (см. рис. 7.14) в первом случае и его увеличению во втором. Обозначив через $\bar{U} = U/k\Theta$ относительную энергию активации, можно записать

$$\bar{U}(\tau, t) = \bar{U}_0 - \bar{U}_{\text{рсл}} + \bar{U}_{\text{упр}},$$

где $\bar{U}_0$ — исходная (при $\tau=0, t=0$) энергия активации, зависящая от физико-химических свойств грунта; $\bar{U}_{\text{рсл}}$ и $\bar{U}_{\text{упр}}$ — изменяющаяся во времени энергия, затрачиваемая на расслабление и упрочнение структуры соответственно.

Подставляя это равенство в формулу (10.49), получим

$$\eta(\tau, t) = A \exp(\bar{U}_0 - \bar{U}_{\text{рсл}} + \bar{U}_{\text{упр}}), \quad (10.50)$$

где $\eta(\tau, t)$ — переменная (эффективная) вязкость.

Равенство (10.50) означает, что если произошло смещение частицы, то для дальнейшего ее перемещения нужна уже не начальная энергия активации $\bar{U}_0$, а иная, соответствующая структуре в рассматриваемый момент t . Эта новая энергия $\bar{U}(\tau, t)$ будет меньше $\bar{U}_0$, если в результате предшествующего смещения частицы структура расслабилась, или больше $\bar{U}_0$, если произошло упрочнение грунта.

Определим исходя из данных микроструктурных исследований значение энергии активации $U_{\text{рсл}}$, затрачиваемой на расслабление грунта.

Поскольку основное расслабление структуры вызывается накоплением дефектов, примем, что

$$d\bar{U}_{\text{рсл}} = \rho_1 \frac{d\omega}{1 - \omega}, \quad (10.51)$$

где ω — плотность дефектов (степень поврежденности в долях единицы); $\rho_1 = \rho_1^*/k\Theta$ — безразмерный параметр; ρ_1^* — коэффициент, Дж.

С другой стороны, согласно (10.10)

$$\frac{d\omega}{1 - \omega} = \kappa_1 \bar{\tau} \frac{dt}{t + 1}, \quad (10.52)$$

где $\bar{\tau} = \frac{v}{v_0 - v}$; $\kappa_1 = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_p} \right)$.

Подставив соотношение (10.52) в формулу (10.51), получим

$$d\bar{U}_{\text{рсл}} = \kappa_1 \rho_1 \bar{\tau} \frac{dt}{t + 1},$$

откуда

$$\bar{U}_{\text{рсл}} = \lambda_1 \int_0^t \bar{\tau} \frac{dt}{t + 1}, \quad (10.53)$$

где $\lambda_1 = \rho_1 \kappa_1 = \frac{\rho_1}{v} \ln \left(\frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_p} \right)$.

Сопоставив (10.53) с (10.11), можем увидеть, что равенство (10.11) равносильно утверждению $\bar{U}_{\text{рсл}} = \text{const}$, т. е. что энергия, затрачиваемая на разрушение грунта, есть величина постоянная. Поскольку эта энергия является диссипированной, равенство (10.11) соответствует условию длительного разрушения (9.14).

При $\tau = \text{const}$ будем иметь

$$\bar{U}_{\text{рсл}} = \lambda_1 \bar{\tau} \ln(t+1). \quad (10.54)$$

Перейдем далее к определению значения энергии активации $\bar{U}_{\text{упр}}$, которая затрачивается на упрочнение структуры грунта. При-
чем по аналогии с (10.51)

$$d\bar{U}_{\text{упр}} = \rho_2 \frac{d\bar{\Omega}}{1 - \bar{\Omega}}, \quad (10.55)$$

где $\bar{\Omega}$ — показатель упрочнения структуры (в долях единицы); $\rho_2 = \rho_2^*/k\Theta$; ρ_2^* — параметр, Дж.

Поскольку упрочнение структуры обусловлено развивающимся во времени смещением частиц, закономерность развития во времени этих смещений можно принять в соответствии с выражением (10.4). Тогда, учитывая соотношение (10.6), получим

$$\frac{d\bar{\Omega}}{1 - \bar{\Omega}} = \bar{x}_2 \frac{dt}{t+1}. \quad (10.56)$$

Подставив это выражение в формулу (10.55), будем иметь

$$\bar{U}_{\text{упр}} = \rho_2 \int_{\bar{\Omega}_0}^{\bar{\Omega}} \frac{d\bar{\Omega}}{1 - \bar{\Omega}} = \rho_2 \bar{x}_2 \int_0^t \frac{dt}{t+1} = \rho_2 \bar{x}_2 \ln(t+1),$$

или

$$\bar{U}_{\text{упр}} = \lambda_2 \ln(t+1), \quad (10.57)$$

где $\lambda_2 = \rho_2 \bar{x}_2$.

С учетом выражений (10.54) и (10.57) равенство (10.50) получит вид

$$\bar{U}(\tau, t) = \bar{U}_0 + [\lambda_2 - \lambda_1 \bar{\tau}] \ln(t+1). \quad (10.58)$$

Кинетическое уравнение скорости деформирования. Учитывая, что коэффициент вязкости равен $\eta = \tau/\dot{\gamma}$, выразим скорость деформации, определяемую формулой (10.50), в виде соотношения

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{A} \exp[-(\bar{U}_0 - \bar{U}_{\text{рсл}} + \bar{U}_{\text{упр}})], \quad (10.59)$$

или, учитывая выражение (10.58),

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{A} e^{-\bar{U}_0} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1 \bar{\tau}) \ln(t+1)}. \quad (10.59')$$

Отсюда

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\tau_0} \left(\frac{1}{t+1} \right)^{n(\tau)}. \quad (10.60)$$

При выводе формулы (10.6) под t подразумевалось безразмерное значение времени t/t^* , где t^* — параметр, имеющий размерность времени. Соответственно более точно эту формулу можно записать в виде

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta_0} \left(\frac{t}{t^*} + 1 \right)^{-n(\tau)}, \quad (10.60')$$

или упрощенно, принимая, что $t^* \ll 1$,

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta_{*0}} t^{-n}, \quad (10.60'')$$

где $\eta_{*0} = \eta_0 (t^*)^{-n}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться как формулой (10.60), так и (10.60''). В этих формулах:

$n(\tau) = \lambda_2 - \lambda_1 \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0 - \tau_1}$, τ_0 — условно-мгновенная прочность;

τ — действующее напряжение;

$\eta_0 = Ae^{U_0/k\theta}$ — начальная вязкость, П; k — постоянная Больцмана, Дж/град; θ — абсолютная температура, К; U_0 — исходная энергия активации, необходимая для начального смещения частиц грунта, Дж; $A = 6k\theta t_0/V$; V — молярный объем; t_0 — период теплового колебания элементарной частицы;

$\lambda_2 = \frac{\rho_2^* \bar{x}_2}{k\theta} = \frac{\bar{x}_2}{k\theta} (1 - \bar{\Omega}) \frac{dU_{\text{упр}}}{d\bar{\Omega}}$ — безразмерный структурный параметр, характеризующий упрочнение структурных связей грунта; $\bar{x}_2$ — безразмерный коэффициент, входящий в соотношение (10.56), ρ_2^* — параметр, входящий в соотношение (10.55), Дж; $\bar{\Omega}$ — степень изменения структуры (за счет смещения, перекомпоновки и перераспределения частиц) по отношению к исходному состоянию, доли единицы;

$\lambda_1 = \frac{\rho_1^* \bar{x}_1}{k\theta} = \frac{1}{v_{cr} k\theta} \ln \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_p}$ — структурный параметр, характеризующий расслабление межчастичных связей и их разрыв; ρ_1^* — параметр, входящий в соотношение (10.51), Дж; $\bar{x}_1 = \frac{1}{v_{cr} \rho_1^*} \ln \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_p}$ —

константа грунта, характеризующая условия разрушения структуры; ω_0 и ω_p — степень поврежденности в исходном состоянии и в момент разрушения, доли единицы, v_{cr} — безразмерный коэффициент, входящий в уравнение длительной прочности (10.13).

Энергия активации U и ее изменения $U_{\text{рсл}}$ и $U_{\text{упр}}$ выражены в джоулях на одну межчастичную связь. Если же разделить на число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль, то, как это отмечалось в § 4 настоящей главы, энергия U будет отнесена к 1 молю.

Таким образом, полученное автором в 1976 г. уравнение деформирования грунта (10.60) исходит из рассмотрения микроструктурного механизма деформаций и основывается на положениях

кинетической теории. Параметры, входящие в уравнение, имеют конкретный физический смысл и включают в себя как деформативные, так и прочностные характеристики грунта, которые являются взаимосвязанными. Отметим, что показатель степени $n(\tau)$, входящий в формулу (10.60), также имеет определенный физический смысл и, кроме того, не нарушает размерность параметра η_0 , чем устраняются недостатки степенной функции, рассмотренные в § 4.3.

Зависимость (10.60) получена исходя из теории течения. Если же записать (10.60) в интегральной форме, то с допущением можно распространить ее на случай переменной нагрузки

$$\gamma = \frac{1}{\eta_0} \left[\tau(t) + \int_0^t \tau(v) Q(\tau, t-v) dv \right], \quad (10.61)$$

где $Q(\tau, t) = (t+1)^{-n(\tau)}$.

§ 10.7. УРАВНЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Закономерность ползучести. Из формулы (10.60) легко получить уравнение деформирования грунта

$$\gamma = \gamma_0 + \int_0^t \frac{\tau}{\eta_0} \frac{dt}{(t+1)^{n(\tau)}},$$

или при $\tau = \text{const}$ (и при $n(\tau) \neq 1$)

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\tau}{\eta_0 [1 - n(\tau)]} [(t+1)^{1-n(\tau)} - 1], \quad (10.62)$$

где γ_0 — условно-мгновенная деформация грунта.

Как видно, процесс деформирования, описываемый уравнениями (10.60) и (10.62), будет иметь различный характер в зависимости от значения показателя степени

$$n(\tau) = \lambda_2 - \lambda_1 \bar{\tau} = \lambda_2 - \lambda_1 \frac{\tau}{\tau_0 - \tau} \quad (10.63)$$

или, иными словами, от величины напряжения

$$\tau = \tau_0 \frac{\lambda_2 - n}{\lambda_1 + \lambda_2 - n}.$$

Разграничительным значением является $n=0$: при $n<0$ скорость деформаций возрастает, при $n>0$ убывает, а при $n=0$ происходит течение с постоянной скоростью. Рассмотрим эти случаи подробнее (рис. 10.12).

Случай $n<0$. Этот случай наблюдается при напряжениях $\tau > \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, он соответствует неограниченному возрастанию как величины деформации, так и ее скорости — при $t \rightarrow \infty$ скорость $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow \infty$ (кривые 1, 2 и 3 на рис. 10.12). Однако в зависимости

от величины n закономерность возрастания скорости деформации будет различна. Если $n < -1$, т. е. $\tau > \tau_0[(\lambda_2 + 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)]$, то скорость $\dot{\gamma}$ увеличивается с возрастающим ускорением (кривая 1); если $n > -1$, т. е. $\tau < \tau_0[(\lambda_2 + 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)]$, то скорость возрастает с уменьшающимся ускорением (кривая 3), а если $n = -1$, т. е. $\tau = \tau_0[(\lambda_2 + 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)]$, то ускорение постоянно: $d\dot{\gamma}/dt = \text{const}$ (кривая 2).

Случай $n = 0$. Такой случай возникает при напряжении $\tau = \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, соответствует ньютонову течению с постоянной скоростью $\dot{\gamma} = \tau/\eta_0 = \text{const}$ (кривые 4 на рис. 10.12).

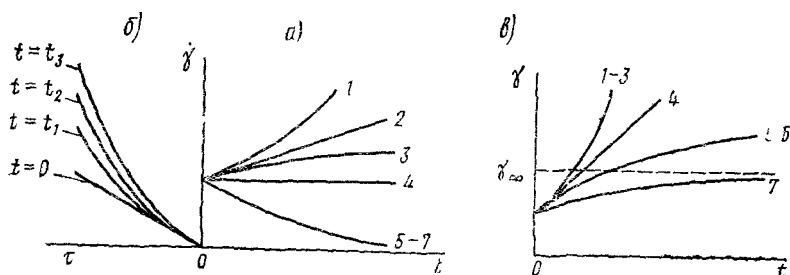


Рис 10.12. Кривые деформирования, соответствующие формуле (10.60):

а — кривые изменения скорости деформации $\dot{\gamma}$ во времени при различных напряжениях τ , б — кривые зависимости между скоростью $\dot{\gamma}$ и напряжением для различных моментов времени t_j ; в — кривые развития деформации во времени при различных τ : 1 — $n < -1$, 2 — $n = -1$; 3 — $-1 < n < 0$, 4 — $n = 0$; 5 — $0 < n < 1$; 6 — $n = 1$;

7 — $n > 1$, где $n = \lambda_1 - \lambda_2 \frac{\tau}{\tau_0 - \tau}$

Случай $n > 0$, возникающий при напряжениях $\tau < \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, соответствует деформированию с уменьшающейся скоростью: при $t \rightarrow \infty$ скорость $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Но сама деформация в зависимости от величины n может быть как незатухающей, так и затухающей (кривые 5, 6 и 7 на рис. 10.12).

Так, если $n < 1$, т. е. $\tau > \tau_0[(\lambda_2 - 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)]$, то происходит неограниченное возрастание деформации по степенному закону (10.62) и при $t \rightarrow \infty$ деформация $\gamma \rightarrow \infty$, хотя ее скорость $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ (кривая 5).

Если $n = 1$, т. е. $\tau = \tau_0[(\lambda_2 - 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)]$, то деформация грунта также неограниченно нарастает и при $t \rightarrow \infty$ $\gamma \rightarrow \infty$, но, как в предыдущем случае, $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ (кривая 6). Однако деформация нарастает более медленно, чем при $n < 1$, по логарифмическому закону

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\tau}{\eta_0} \ln(t + 1). \quad (10.64)$$

Наконец, при $n > 1$, т. е. $\tau < \tau_0[(\lambda_2 - 1) : (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)]$, наблюдается затухающее деформирование и при $t \rightarrow \infty$ скорость деформации $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, а сама деформация $\gamma \rightarrow \gamma_\infty$. Уравнение деформирования грунта (10.62) принимает вид

$$\gamma = \gamma_\infty - \frac{\tau}{\eta_0(n-1)}(t+1)^{1-n}, \quad (10.65)$$

где

$$\gamma_\infty = \gamma_0 + \frac{\tau}{\eta_0(n-1)} = \frac{\tau(\tau_0 - \tau)}{[\tau_0(\lambda_2 - 1) - \tau(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)]\eta_0}. \quad (10.66)$$

При этом, если $n \gg 1$, деформацией ползучести можно пренебречь из-за ее малости и $\gamma_\infty \approx \gamma_0$.

Критические значения напряжения. Зависимость между скоростью деформации и напряжением, вытекающая из формулы (10.60), графически изображена на рис. 10.12, б. Как видно, кривые $\tau-\dot{\gamma}$ для различных моментов времени t неподобны, причем с уменьшением времени степень нелинейности кривых уменьшается и при $t=0$ кривая трансформируется в прямую $\dot{\gamma} = \tau/\eta_0$.

Таким образом, кинетическое уравнение (10.60) описывает все встречающиеся в реальном грунте процессы деформирования в зависимости от величины напряжения: затухающую ползучесть, заканчивающуюся стабилизацией деформации, незатухающую, вековую ползучесть с уменьшающейся скоростью, но с неограниченно возрастающей деформацией по степенному или логарифмическому закону, установившееся течение с постоянной скоростью и прогрессирующее течение с возрастающей скоростью (при различных законах ускорения). Переход от одного вида деформирования к другому обуславливается величиной напряжения.

Можно выделить два критических значения напряжений, которые назовем первым и вторым пределами текучести:

$$\tau_{s(1)} = \tau_0 \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}; \quad \tau_{s(2)} = \tau_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1}. \quad (10.67)$$

Значению $\tau_{s(1)}$ соответствует $n=1$, а значению $\tau_{s(2)}$ — $n=0$.

При напряжениях $\tau < \tau_{s(1)}$ ползучесть грунта имеет затухающий характер (кривая 7 на рис. 10.12). При напряжениях $\tau_{s(1)} \leq \tau < \tau_{s(2)}$ развивается вековая ползучесть с уменьшающейся скоростью (кривые 5 и 6 на рис. 10.12). При $\tau = \tau_{s(2)}$ возникает установившееся течение (кривая 4), а при $\tau > \tau_{s(2)}$ развивается прогрессирующее течение с возрастающей скоростью (кривые 1—3). Отметим, что в свете сказанного предел $\tau_{s(2)}$ можно уподобить пределу длительной прочности τ_∞ с учетом, однако, высказанных ранее соображений об условности этого понятия.

Отличие указанных пределов от критических значений напряжений τ_k , показанных на рис. 4.11, заключается в том, что значения τ_k характеризуют изменение вида связи между напряжением и скоростью установившегося течения, тогда как пределы $\tau_{s(1,2)}$ определя-

ют вид связи между напряжением и переменной скоростью деформирования, учитывая фактор времени.

Отметим, что пределы $\tau_{s(1,2)}$, выраженные через физические (структурные) параметры λ_1 и λ_2 , имеют вполне определенный физический смысл. Напомним, что параметры λ_1 и λ_2 характеризуют способность структуры грунта к расслаблению (λ_1) или упрочнению (λ_2). Соответственно значения $\tau_{s(1,2)}$, определяемые согласно (10.67), устанавливают границы, при которых один из указанных выше процессов (расслабление или упрочнение) становится преобладающим, чем и определяется характер деформирования.

Приближенная формула деформирования грунта. Формула (10.60) описывает семейство кривых ползучести, которые не являются взаимоподобными, причем очертания их зависят от величины напряжения (рис. 10.12). Это является большим достоинством указанной формулы, поскольку тем самым оказывается возможным описывать различные виды реальных процессов ползучести.

В то же время в пределах не очень больших изменений напряжения кривые ползучести можно рассматривать как взаимоподобные, приняв показатель степени n в формуле (10.60) постоянным. Влияние напряжения в этом случае следует отобразить множителем $f(\tau)$, и тогда получим более простое соотношение (5.9) с функцией времени вида (5.12)

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{\tau^*} \right)^{1/m} \left(\frac{t + t^*}{t^*} \right)^{-n}. \quad (10.68)$$

Иной вид уравнения деформирования. Уравнение деформирования (10.60) выведено на основании данных микроструктурных исследований. Естественно, что при обработке этих данных были сделаны определенные допущения, в частности выведена функция напряжения $\bar{\tau}$, входящая в соотношение (10.53). С определенным приближением вид этой функции можно принять также и в форме (10.32). Тогда уравнение деформирования (10.59) примет вид, подробно рассмотренный в статьях автора и Ю. К. Зарецкого («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1971, № 3, и Труды VIII Международной конференции по механике грунтов, 1973):

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau \exp \left(\frac{\lambda_1}{T} \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau_0 - \tau} t \right)}{\eta_0 (1 + t)^{\lambda_2}}, \quad (10.69)$$

где λ_1 , λ_2 , η_0 , T — параметры; τ_0 и τ_∞ — мгновенная и предельно-длительная прочность грунта.

В зависимости от соотношения τ и τ_∞ формула (10.69) описывает процесс незатухающей ползучести (при $\tau > \tau_\infty$) или затухающей (при $\tau < \tau_\infty$), причем в последнем случае эта формула совпадает с выражением (7.62), если в него ввести множитель τ .

Если же в качестве простейшего приближения принять, что значение $\bar{U}_{рсл}$, определяемое выражением (10.53), не изменяется во времени и равно $\bar{U}_{рсл} = \lambda_1 \tau / \tau_0$, то при некоторых других допущениях

уравнение деформирования (10.59) можно привести к виду, полученному эмпирическим путем в работе [58]:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_0} \frac{\exp\left(\frac{\lambda_1 \tau}{\tau_0}\right)}{(1+t)^{\lambda_2}}. \quad (10.69')$$

Наконец, если в формуле (10.60) принять $\lambda_2=0$, то придем к формуле (7.112) кинетической теории течения нелинейно-вязкой среды; если же в формуле (10.60) положить $\lambda_1=\lambda_2=0$, получим уравнение течения идеально вязкой ньютоновой жидкости в трактовке Френкеля.

Как видно, уравнение (10.60) является достаточно универсальным.

§ 10.8. ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Определение параметров уравнения (10.60). Для определения параметров уравнения (10.60) целесообразно использовать его упрощенный вариант (10.60''), преобразовав его к линейному виду

$$Y = BX + D \quad (10.70)$$

с помощью подстановки $Y = \ln(\dot{\gamma}/\tau)$, $X = \ln t$, $B = -n$, $D = \ln \frac{1}{\eta_0^*}$.

Построив по опытным данным график (рис. 10.13, а) в координатах $\ln(\dot{\gamma}/\tau) - \ln t$, получим семейство прямых для различных значе-

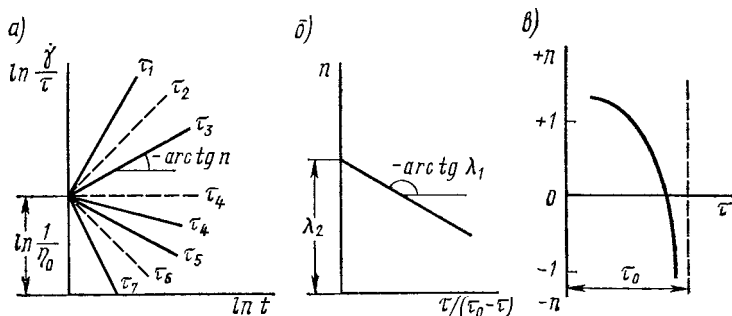


Рис. 10.13. Обработка опытных данных в соответствии с формулой (10.60):

а — график для определения параметров η_0 и n ; б — то же, параметров λ_1 и λ_2 ; в — то же, значения τ_0

ний τ , отсекающих на оси ординат отрезок, равный $\ln(1/\eta_0^*)$; численные величины тангенсов углов наклона этих прямых определяют значения n . Пунктирные прямые на графике соответствуют таким значениям τ , при которых показатели степени n принимают критические значения: $n=1$ при $\tau=\tau_2=\tau_{s(1)}$, $n=0$ при $\tau=\tau_4=\tau_{s(2)}$ и $n=-1$ при $\tau=\tau_6$.

Далее, учитывая, что

$$n = \lambda_2 - \lambda_1 \frac{\tau}{\tau_0 - \tau}, \quad (10.71)$$

строим график в координатах $n - \tau/(\tau_0 - \tau)$ (рис. 10.13, б); отрезок, отсекаемый полученной прямой на оси ординат, определит параметр λ_2 , а численное значение тангенса угла наклона этой прямой — параметр λ_1 (с учетом масштаба графика).

Значение мгновенной прочности τ_0 , входящей в выражение (10.71), определяют непосредственно из опытов на быстрое разрушение. Если же такие данные отсутствуют, то можно построить график зависимости n от τ (рис. 10.13, в) и по трем точкам этого графика ($n_1, \tau_1; n_2, \tau_2; n_3, \tau_3$) определить τ_0 по формуле

$$\tau_0 = \frac{\tau_3 - k\tau_2}{1 - k}, \quad \text{где } k = \frac{(n_1 - n_2)(\tau_3 - \tau_1)}{(n_1 - n_3)(\tau_2 - \tau_1)}. \quad (10.72)$$

Определить параметры уравнения (10.60) можно также непосредственно по кривым ползучести, используя упрощенный вариант формул (10.62), (10.64) и (10.65), получающийся интегрированием уравнения (10.60''):

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\tau}{\eta_0^* (1 - n)} t^{1-n} \quad \text{при } n < 1; \quad (10.73)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\tau}{\eta_0^*} \ln t \quad \text{при } n = 1; \quad (10.74)$$

$$\gamma = \gamma_\infty - \frac{\tau}{\eta_0^* (n - 1)} t^{1-n} \quad \text{при } n > 1, \quad (10.75)$$

где γ_0 и γ_∞ — начальная и конечная (стабилизировавшаяся) деформации.

Эти уравнения приводят к линейному виду (10.70) с помощью следующих подстановок:
для формулы (10.73)

$$Y = \ln(\gamma - \gamma_0), \quad X = \ln t, \quad B = 1 - n, \quad D = \ln \left[\frac{\tau}{\eta_0^* (1 - n)} \right];$$

для формулы (10.74)

$$Y = \gamma, \quad X = \ln t, \quad B = \tau/\eta_0^*, \quad D = \gamma_0;$$

для формулы (10.75)

$$Y = \ln(\gamma_\infty - \gamma), \quad X = \ln t, \quad B = -(n - 1), \quad D = \ln \left[\frac{\tau}{\eta_0^* (1 - n)} \right].$$

Дальнейшую обработку и определение параметров ведут аналогично указанному выше (рис. 10.13, б, в). Значение γ_0 в этих формулах принимают по опытным данным, а значение γ_∞ в форму-

ле (10.75) — либо по опытным данным, либо вычисляют по формуле

$$\gamma_{\infty} = \frac{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}{\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3}, \quad (10.76)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — значения деформаций в произвольные моменты времени t_1, t_2, t_3 , связанные между собой соотношением $t_3/t_1 = (t_2/t_1)^2$.

Вообще говоря, обрабатывать опытные данные по кривым скоростей, т. е. непосредственно по формуле (10.60), проще, чем по кривым ползучести. Однако сами опытные значения скоростей имеют больший разброс, чем значения деформаций, поскольку их определяют дифференцированием последних. Поэтому целесообразно обработку данных вести и по кривым скоростей, и по кривым ползучести, взаимно контролируя результаты.

Сопоставление теоретических и опытных данных. Сопоставим результаты теоретических подсчетов по формулам (10.73), (10.74) и (10.75) с данными испытаний глинистого грунта на чистый сдвиг (при кручении), приведенными в § 10.2 (см. рис. 10.1). При обработке этих данных в соответствии с формулой (10.60) были получены следующие значения показателей степени n для всех опытных кривых, изображенных на рис. 10.1:

№ кривой	1	2	3	4	5
$\tau, 10^{-2}$ Па	83	90	100	135	165
n опытное	0,92	0,7	0,64	0,49	—0,05
n вычисленное	0,74	0,7	0,64	0,35	—0,05

Под вычисленным значением n подразумевают то значение, которое вычислено по формуле (10.71) исходя из значений параметров λ_1 и λ_2 , определенных по графику рис. 10.13, б.

Определение реологических характеристик. Поскольку опытное значение мгновенной прочности τ_0 было неизвестно, его вычисляли по форм. (10.72), для чего предварительно строили график вида рис. 10.13. Было получено $\tau_0 = 262 \cdot 10^2$ Па.

Зная величину τ_0 и построив график вида рис. 10.13, б, определили затем значения $\lambda_2 = 1,04$ и $\lambda_1 = 0,65$. Наконец, по формулам (10.67) были вычислены критические напряжения: $\tau_{s(1)} = 0,058\tau_0 = 15 \cdot 10^2$ Па и $\tau_{s(2)} = 0,62\tau_0 = 162 \cdot 10^2$ Па. Действительно, при $\tau_{s(1)} < \tau < \tau_{s(2)}$ скорость деформаций убывала (кривые 1, 2, 3, 4), а при $\tau > \tau_{s(2)}$ — деформация носила незатухающий характер с возрастающей скоростью (кривая 5).

Теоретические кривые ползучести, построенные по формулам (10.73), (10.74) и (10.75) при указанных выше значениях параметров, нанесены (в виде сплошных кривых) на рис. 10.1, а (точками на этом графике показаны опытные данные). На графике б этого же рисунка показано сопоставление опытных значений скоростей деформаций с результатами подсчетов по исходной формуле (10.60).

Некоторые выводы. В гл. 5 были рассмотрены различные феноменологические уравнения ползучести и было показано, что

те или иные формулы могут применяться в зависимости от вида кривой ползучести. В то же время некоторые из формул можно применять с большей или меньшей степенью достоверности результатов для одного и того же вида кривых ползучести. Таким образом, выбор феноменологического уравнения оказывается затруднительным и зависит больше от объективных обстоятельств.

Выведенное в данной главе уравнение (10.60) свободно от указанных недостатков. Это уравнение и вытекающие из него формулы (10.73), (10.74), (10.75) позволяют описать в зависимости от величины действующего напряжения все встречающиеся в природе виды кривых ползучести, что следует из сущности формулы (10.60), полученной из рассмотрения процесса ползучести как взаимодействия процессов расслабления и упрочнения структуры грунта. В то же время при некоторых допущениях формулу (10.60) можно упростить и привести к простейшему виду, совпадающему с эмпирическими формулами.

Исходя из сказанного, вместо большого числа эмпирических формул для определения деформаций ползучести можно рекомендовать более универсальную формулу (10.60) и ее приближенный вид (10.68).

ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СВЯЗНЫХ ГРУНТОВ



§ 11.1. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Взаимное влияние инвариантов тензора напряжений. В § 3.7 уже говорилось, что в классической деформационной теории пластичности принимают три исходных условия: 1 — деформация формы вызывается девиатором напряжений и не зависит от шарового тензора напряжений; 2 — деформация объема вызывается шаровым тензором и не зависит от девиатора напряжений; 3 — напряженное и деформированное состояния подобны. Однако для грунтов эти условия, особенно два первых, вообще говоря, не соблюдаются.

Первое условие не выполняется из-за того, что грунт по-разному сопротивляется деформированию при сжатии и растяжении и соответственно внутреннее трение проявляется не только в предельном, но и в допредельном состояниях. В итоге сдвиговая деформация грунта зависит как от интенсивности касательных напряжений, так и от среднего нормального напряжения. В сказанном легко убедиться, проведя простейшие испытания на сдвиговом приборе — не только предельное сопротивление, но и деформация при сдвиге оказываются зависящими от нормального напряжения (см., например, рис. 5.10).

Напомним, что интенсивность касательных напряжений является инвариантом девиатора напряжений, а среднее нормальное напряжение (всестороннее давление) есть инвариант шарового тензора напряжений.

Второе условие не выполняется из-за того, что в грунте развиваются объемные деформации не только под действием среднего нормального напряжения, но и в результате сдвига (явление дилатансии), поскольку при действии сдвигающей силы частицы грунта будут переупаковываться. Так, в гл. 2 было показано, что в процессе сдвига неупорядоченная структура переходит в упорядоченную с более плотной упаковкой (см. рис. 2.12), что в свою очередь ведет к изменению объема. Следовательно, объемная деформация грунта зависит как от среднего нормального давления, так и от интенсивности касательных напряжений.

Поскольку изменение структуры грунта зависит от вида напряженного состояния, как это показано, например, на рис. 2.10, то следует далее учитывать, что процесс деформирования (и сдвигового и объемного) будет зависеть от этого фактора и соответственно от значения третьего инварианта тензора напряжений, которым характеризуется вид напряженного состояния.

Третье условие для грунтов не соблюдается из-за деформационной анизотропии последних, как было показано в гл. 2.

Из сказанного следует, что объемные J_1 и сдвиговые J_2 деформации являются функциями всех трех инвариантов тензора напряжений I_1, I_2, I_3 . Введя еще фактор времени t , можем составить обобщенное реологическое уравнение состояния грунта в следующем виде:

$$J_1 = J_1(I_1, I_2, I_3, t); J_2 = J_2(I_2, I_1, I_3, t). \quad (11.1)$$

Аналогичную запись можно сделать применительно к скоростям деформаций:

$$\dot{J}_1 = \dot{J}_1(\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, t); \dot{J}_2 = \dot{J}_2(\dot{I}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_3, t). \quad (11.2)$$

В предельном состоянии эти уравнения принимают вид

$$\Phi(I_1, I_2, I_3, t) = 0. \quad (11.3)$$

Соотношения (11.1) — (11.3) отображают взаимное влияние всех трех инвариантов тензора напряжений на поведение грунта как в допредельном, так и в предельном состояниях. На возможность такого влияния указывалось в некоторых работах по теории пластичности. Однако для большинства традиционных материалов взаимное влияние I_1, I_2, I_3 , тем более с учетом фактора времени, не учитывалось, поскольку опыты показывают, что для таких материалов указанное влияние в большинстве случаев несущественно.

Обзор исследований. Впервые влияние первого инварианта тензора напряжений I_1 на сдвиговую деформацию грунтов было отмечено, по-видимому, А. И. Боткиным (1939). Это влияние было отображено им в виде зависимости интенсивности деформаций сдвига γ_i от интенсивности касательных напряжений τ_i и от среднего нормального напряжения σ_m ; объемная же деформация принималась упругой:

$$\frac{v_i}{H + \sigma_m} = \gamma_i G(\gamma_i); \sigma_m = k \epsilon_m, \quad (11.4)$$

где H — параметр связности грунта, характеризующий его сопротивление всестороннему растяжению; k — модуль объемной деформации; $G(\gamma_i)$ — переменный модуль сдвига, принимаемый равным $G(\gamma_i) = A/(B + \gamma_i)$.

Условие предельного состояния определялось соотношением (4.22)

$$\tau_i = (H + \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi, \quad (11.5)$$

где Ψ — угол трения на октаэдрической площадке, причем $H \operatorname{tg} \Psi = \tau^0$ — сопротивление чистому сдвигу.

Зависимости (11.4) и (11.5) были в последующем подтверждены и развиты многими исследователями. В частности, на основании испытаний песчаных грунтов на трехосное сжатие Б. Н. Баршевский (1956), А. С. Строганов (1956), С. Мурояма (1956) и другие получили, что не только деформация сдвига γ_i , но и деформация объема ϵ_m есть функции отношения τ_i/σ_m .

Влияние среднего нормального напряжения сказывается также на скорости течения грунта. Опыты, подтверждающие зависимость γ_i от σ_m , были проведены А. С. Строгановым (1961) и С. Е. Гречищевым (1961).

В ряде работ рассматривались математические модели, учитывающие взаимное влияние инвариантов тензора напряжений на деформирование грунтов. Г. А. Гениев в 1966 г. предложил модель несжимаемого жестко-упрочняющего тела, представляющую собой как бы модель Фойгта, но с введением вместо элемента вязкого трения элемента сухого, кулонова трения:

$$\gamma_i = \frac{1}{G^0_i} (\tau_i - \sigma_m \operatorname{tg} \Psi),$$

причем угол Ψ может быть переменным.

Условие предельного равновесия достигается в этой модели при $\tau_i = \tau_s^0 + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi$, где $\tau_s^0 = \gamma_s G^0$.

В последующих публикациях Г. А. Гениев [7] рассмотрел возможность учета в рамках указанной модели нелинейно-упругих эффектов, а также явления дилатансии.

В работе В. А. Иоселевича («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1967, № 4) взаимное влияние инвариантов тензора напряжений учитывалось тем, что модуль деформации E и коэффициент Пуассона ν принимались зависящими от τ_i и σ_m , а в предельном состоянии связь между напряжением и сдвиговой деформацией заменялась на связь между напряжением и приращением деформаций.

И. Н. Нельсон и М. Барон (1971) принимали модуль объемной деформации в виде параболической функции от σ_m , а модуль сдвига — в виде линейной функции от τ_i и σ_m .

К. Роскоу и Х. Пурушасб в своем докладе на IV Азиатской региональной конференции по механике грунтов (Бангкок, 1971) предложили обобщенное уравнение пластического течения, в котором приращение главных деформаций $\Delta \epsilon_{1,2,3}$ является суммой приращений, обусловленных изменением отношения τ_i/σ_m , с одной стороны, и изменением объемной деформации — с другой:

$$\Delta \epsilon_{1,2,3} = \left(\frac{\partial \epsilon_{1,2,3}}{\partial \eta} \right)_V \Delta \eta + \left(\frac{\partial \epsilon_{1,2,3}}{\partial V} \right)_\eta \Delta V.$$

В этом уравнении $\Delta \eta$ — приращение отношения τ_i/σ_m при постоянном объеме $V = \text{const}$, а ΔV — изменение объема при $\eta = \text{const}$. В последующем Х. Пурушасб на основе трехосных испытаний песка развил представления об учете среднего нормального напряжения в допредельном и предельном состояниях грунта.

Все перечисленные опытные данные подтверждают соотношения (11.1).

Обобщение уравнения деформирования грунтов. Обобщенное уравнение деформирования грунтов (для данного напряженного состояния) можно записать в общей форме, предложенной автором (1962) — в виде

$$\gamma_i = f(\tau_i, \sigma_m, t); \quad \epsilon_m = f^*(\sigma_m, \tau_i, t). \quad (11.6)$$

Это уравнение связывает сдвиговую и объемную деформации с интенсивностью касательных напряжений, средним нормальным напряжением и временем. При этом было показано, что взаимное влияние τ_i и σ_m на процесс деформирования грунта вызвано различием в его сопротивлении деформированию при сжатии и при растяжении.

Экспериментальные исследования указанных зависимостей осуществлялись в лаборатории механики мерзлых грунтов НИИОСП путем испытаний грунтов на ползучесть в условиях трехосного сжатия.

Экспериментальное изучение закономерностей деформирования песчаных и глинистых грунтов проводилось в течение ряда лет в МИСИ Г. И. Ломизе и сотрудниками (А. Л. Крыжановским, И. Н. Иващенко и др.) [17, 18] на приборах трехосного сжатия ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) и на приборах, позволяющих независимо задавать все три главных напряжения ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$).

Было установлено, что сдвиговые и объемные деформации зависят не только от первого и второго инвариантов тензора напряжений, но и от третьего инварианта, характеризующего вид напряженного состояния и от траектории нагружения.

Схемы испытания грунтов в условиях сложного напряженного состояния. Ниже рассмотрены схемы испытаний грунтов, которые обычно применяют при изучении сложного напряженного состояния грунтов. Наиболее распространена схема испытания на трехосное осесимметричное сжатие (рис. 11.1, а), когда к сплошному цилиндрическому образцу прикладывают вертикальное σ_z и радиальное $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$ давления. Обычно на образец передается всестороннее, гидростатическое давление p_0 и дополнительное вертикальное давление p_z ; таким образом, $\sigma_2 = \sigma_3 = p_0$, $\sigma_1 = p_z + p_0$.

Интенсивность касательных напряжений при таком виде испытаний равна, как это следует из табл. 3.1, $\tau_i = p_z/\sqrt{3} = (1/\sqrt{3})(\sigma_1 - \sigma_3)$, а среднее нормальное напряжение $\sigma_m = p_z/3 + p_0 = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$. Соответственно интенсивность деформации сдвига и средняя линейная деформация равны $\gamma_i = (2/\sqrt{3})(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ и $\epsilon_m = (\epsilon_1 + \epsilon_3)/3$, где $\epsilon_1 = \Delta h/h$; $\epsilon_3 = \Delta d/d < 0$ (h — высота цилиндра, d — его диаметр).

Испытания обычно проводят по схеме раздавливания: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. В этом случае параметр Лоде равен $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) : (\sigma_1 - \sigma_3) = -1$. Можно проводить испытание и по схеме радиального сжатия, когда $\sigma_x = \sigma_y > \sigma_z$. В этом случае $\sigma_z = \sigma_3$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1 = \sigma_2$ и параметр Лоде $\mu_\sigma = +1$.

Опыты на трехосное сжатие часто проводят, изменяя величину вертикального напряжения σ_z , но сохраняя постоянным радиальное напряжение: $\sigma_x = \sigma_y = \text{const}$. Однако в этом случае будет меняться и τ_i , и σ_m , что усложняет изучение их взаимного влияния.

Целесообразнее производить испытания грунтов, сохраняя постоянным значение σ_m и увеличивая значение τ_i или сохраняя постоянным отношение τ_i/σ_m . В обоих случаях требуется соответственно изменять как σ_z , так и $\sigma_x = \sigma_y$. При испытаниях грунтов на ползучесть необходимо проводить серию опытов при различных τ_i и постоянных для каждой серии значениях σ_m .

Более усложненной схемой испытаний является схема, показанная на рис. 11.1, б при которой к трехосному сжатию добавляется воздействие крутящего момента $M_{кр}$, прикладываемого к одному

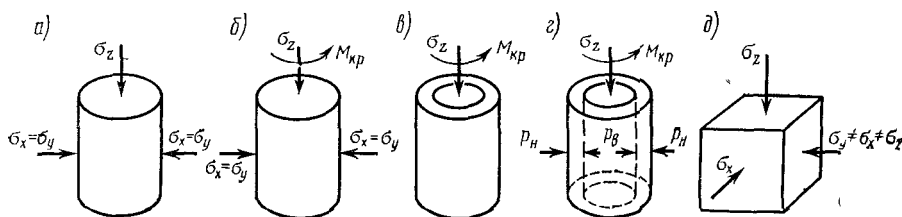


Рис. 11.1. Схемы испытаний при сложном напряженном состоянии:

а — осьесимметричное трехосное сжатие ($\sigma_z \approx \sigma_x = \sigma_y$); б — осьесимметричное сжатие ($\sigma_z \approx \sigma_x = \sigma_y$) и кручение $M_{кр}$; в — осевое сжатие (σ_z) и кручение полого цилиндра, г — осевое сжатие σ_z , радиальное внутреннее p_B и наружное p_H давление и кручение $M_{кр}$ полого цилиндра, д — сжатие куба при произвольных значениях напряжений ($\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$)

из торцов (другой торец неподвижен) цилиндрического образца. При такой схеме испытания кроме значений $\mu_\sigma = \pm 1$ можно получить значение $\mu_\sigma = 0$, соответствующее чистому сдвигу, если проводить опыты на кручение при $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ или на кручение в условиях гидростатического обжатия $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$; в первом случае будем иметь $\sigma_{1,3} = \pm \tau$ и $\sigma_2 = 0$, во втором — $\sigma_{1,3} = p \pm \tau$ и $\sigma_2 = p$.

Схемы, показанные на рис. 11.1, в, г, соответствуют испытанию полого цилиндрического образца под воздействием вертикальной нагрузки и крутящего момента в одном случае (схема в) и под воздействием вертикальной нагрузки, крутящего момента и внутреннего и наружного всестороннего давления — во втором случае (схема г). В первом случае параметр Лоде μ_σ может принимать два значения: -1 и 0 , во втором — любые значения от -1 до $+1$.

Наконец при испытании по схеме д к образцу кубической формы прикладывают любые, не зависящие друг от друга значения $\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_x$, $\sigma_3 = \sigma_y$. Параметр μ_σ может принимать соответственно любые значения — от $\mu_\sigma = -1$ при $\sigma_z > \sigma_x = \sigma_y$ и $\mu_\sigma = 0$ при $\sigma_x = (\sigma_z + \sigma_y)/2$ до $\mu_\sigma = +1$ при $\sigma_y > \sigma_z = \sigma_x$. Схемы на рис. 11.1, г и д позволяют наиболее полно изучить влияние напряженного состояния.

§ 11.2. ОБОБЩЕННОЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Деформационная теория. С учетом изложенных выше особенностей деформирования грунта исходные положения деформационной теории, выраженные соотношениями (3.84)—(3.89), можно сформулировать в следующем виде:

1) изменение объема грунта ε_m складывается из деформации под воздействием среднего нормального напряжения σ_m и деформации, обусловленной воздействием интенсивности касательных напряжений τ_i . Объемная деформация развивается во времени и включает в себя обратимую и необратимую части; деформация зависит также от вида напряженного состояния, определяемого параметром Лоде:

$$\varepsilon_m = f^*(\sigma_m, \tau_i, \mu_s, t); \quad (11.7)$$

2) изменение формы грунта γ_i вызывается воздействием интенсивности касательных напряжений τ_i и среднего нормального напряжения σ_m . Эта деформация, развивающаяся во времени, включает в себя обратимую и необратимую части; она зависит также от вида напряженного состояния, определяемого параметром μ_σ :

$$\gamma_i = f(\tau_i, \sigma_m, \mu_s, t). \quad (11.8)$$

В предельное напряженное состояние грунт переходит при достижении деформацией некоторого критического значения $\gamma_i = \gamma_s$, и тогда соотношение (11.8) принимает вид

$$f(\tau_i, \sigma_m, \mu_s, t) = \text{const}$$

или

$$\Phi(\tau_i, \sigma_m, \mu_s, t) = 0; \quad (11.9)$$

3) тензор деформаций есть функция тензора напряжений

$$T_\varepsilon = f(T_\sigma). \quad (11.10)$$

В частных случаях, которые будут рассмотрены далее, можно принять линейную связь между девиаторами D_ε и D_σ

$$D_\varepsilon = \chi D_\sigma, \quad (11.11)$$

что равносильно допущению подобия напряженного и деформированного состояний:

$$\mu_\sigma = \mu_\varepsilon. \quad (11.12)$$

Обобщение уравнений Генки. Для сформулированных выше исходных положений остаются справедливыми уравнения Генки (3.90), устанавливающие связь между компонентами деформаций и компонентами напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \chi(\sigma_x - \sigma_m) + \chi^* \sigma_m; & \gamma_{xy} &= 2\chi \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \chi(\sigma_y - \sigma_m) + \chi^* \sigma_m; & \gamma_{yz} &= 2\chi \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \chi(\sigma_z - \sigma_m) + \chi^* \sigma_m; & \gamma_{zx} &= 2\chi \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

с той, однако, разницей, что функции χ и χ^* в этих уравнениях имеют более общий вид:

$$\chi = \frac{\gamma_i}{2\tau_i} = \frac{f(\tau_i, \sigma_m, \mu_\sigma, t)}{2\tau_i}; \quad \chi^* = \frac{\varepsilon_m}{\sigma_m} = \frac{f^*(\sigma_m, \tau_m, \mu_\sigma, t)}{\sigma_m}. \quad (11.14)$$

Уравнения (11.13) можно записать в более распространенной форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\bar{G}}(\sigma_x - \sigma_m) + \frac{1}{\bar{k}}\sigma_m; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\bar{G}}\tau_{xy}; \dots, \quad (11.13')$$

где $\bar{G} = \tau_i/\gamma_i = \tau_i/f(\tau_i, \sigma_m, \mu_\sigma, t)$; $\bar{k} = \sigma_m/\varepsilon_m = \sigma_m/f(\sigma_m, \tau_m, \mu_\sigma, t)$ — приведенные модуль сдвига и модуль объемной деформации.

Возможность использования уравнений Генки для описания общего вида связи между компонентами напряжений и деформаций грунта с учетом взаимного влияния всех трех инвариантов тензора напряжений вытекает из принятого условия (11.11). Раскрыв это соотношение относительно компонент деформаций и подставив в полученные выражения значения (11.8) и (11.7), получим уравнения (11.13).

Уравнения (11.13) справедливы только для активного нагружения; для описания процесса разгрузки следует пользоваться уравнениями вида (3.92), но с учетом приведенных значений $\bar{G}$ и $\bar{k}$.

Теория пластического течения. Аналогично рассмотренным выше соотношениям деформационной теории соотношения (3.98) — (3.100) теории пластического течения можно записать в обобщенном виде, учитывая те обстоятельства, что скорость объемной деформации ε_m и интенсивность скорости деформации сдвига γ_i есть функции интенсивности касательных напряжений и среднего нормального напряжения. Эти скорости изменяются во времени и зависят от вида напряженного состояния:

$$\dot{\varepsilon}_m = f^*(\sigma_m, \tau_i, \mu_\sigma, t). \quad (11.15)$$

$$\dot{\gamma}_i = f(\tau_i, \sigma_m, \mu_\sigma, t). \quad (11.16)$$

Далее условимся считать тензор скорости пластической деформации функцией тензора напряжения

$$T_\varepsilon^p = f(T_\sigma). \quad (11.17)$$

В частном случае можно принять, что $D_\varepsilon^p = \dot{\kappa} D_\sigma$, т. е. допустить, что поле напряжений и поле скоростей деформаций являются подобными:

$$\mu_\sigma = \mu_\varepsilon. \quad (11.18)$$

Выразив соотношение (11.17) через компоненты напряжений $\sigma_x, \dots, \sigma_{xy}, \dots$ и компоненты приращений деформаций $d\varepsilon_x, \dots, d\varepsilon_{xy}, \dots$

и перейдя затем к компонентам скоростей деформаций $\frac{d\epsilon_x}{dt} = \dot{\epsilon}_x, \dots$, $\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \dot{\gamma}_{xy}, \dots$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= \dot{\chi}(\sigma_x - \sigma_m) + \dot{\chi}^* \sigma_m; \quad \dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\chi} \tau_{xy}; \\ \dot{\epsilon}_y &= \dot{\chi}(\sigma_y - \sigma_m) + \dot{\chi}^* \sigma_m; \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2\dot{\chi} \tau_{yz}; \\ \dot{\epsilon}_z &= \dot{\chi}(\sigma_z - \sigma_m) + \dot{\chi}^* \sigma_m; \quad \dot{\gamma}_{zx} = 2\dot{\chi} \tau_{zx},\end{aligned}\quad (11.19)$$

где

$$\dot{\chi} = \frac{\dot{\tau}_i}{2\tau_i} = \frac{f(\tau_i, \sigma_m, \mu_0, t)}{2\tau_i}; \quad \dot{\chi}^* = \frac{f^*(\sigma_m, \tau_i, \mu_0, t)}{\sigma_m}. \quad (11.20)$$

Уравнения (11.19) отличаются от уравнений Сен-Венана — Мизеса (3.102), во-первых, более общим значением функции χ , а во-вторых, учетом скорости объемной деформации. Согласно (11.15), деформация объема для грунтов происходит и при их пластическом течении, тогда как согласно (3.97) такая деформация является чисто упругой. Естественно, что уравнение (11.19) описывает лишь процесс активного нагружения.

При сопоставлении обобщенных уравнений деформационной теории (11.13) и теории пластического течения (11.19) остаются в силе изложенные в гл. 3 соображения. Условия подобия лучше удовлетворяются, если рассматривать поле скоростей деформаций, а не поле деформаций, и с этой точки зрения уравнения (11.19) более приемлемы для грунтов, чем уравнения (11.13). Но, как было сказано ранее, при простом нагружении или близком к такому виду его, по уравнениям деформационной теории, а также теории пластического течения получаются идентичные результаты, т. е. тогда можно использовать любые из этих уравнений. В частности, уравнениями деформационной теории можно пользоваться, если для описания временных эффектов применяют теорию старения или теорию наследственной ползучести.

§ 11.3. ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Диаграммы деформирования грунтов. Опытные данные. Соотношение (3.84), применяемое для описания закономерностей деформирования традиционных материалов, соответствует инвариантной диаграмме зависимости между напряжением и деформацией. Это значит, что опытные точки, полученные при любом виде испытания, лягут на одну кривую, построенную в координатах «интенсивность касательных напряжений τ_i — интенсивность деформаций сдвига γ_i ».

Если опыты с металлами и подобными им материалами подтверждают это положение (рис. 11.2, а), то совсем иная картина

наблюдается в большинстве случаев для грунтов. На рис. 11.2, б—ж приведены данные испытаний различных грунтов — песка, суглинка, глины, плотной моренной глины, мерзлых грунтов — на трехосное сжатие, проведенных различными исследователями.

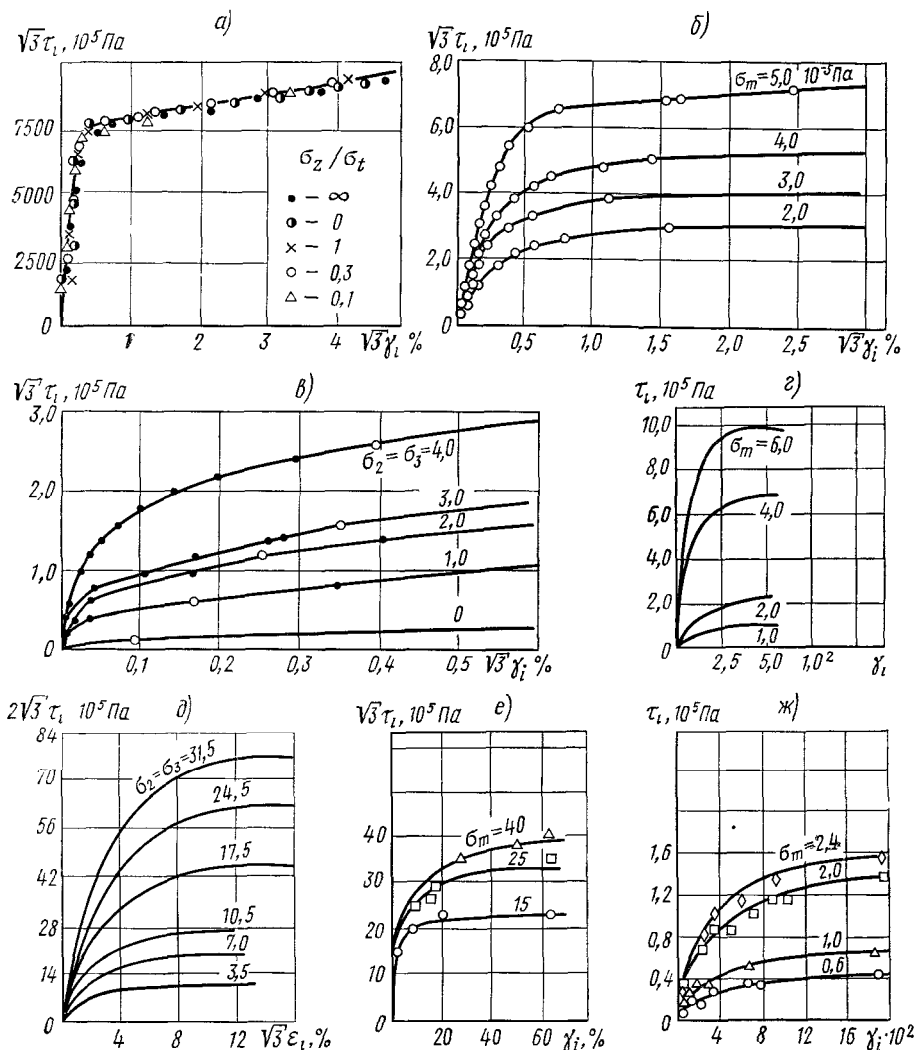


Рис. 11.2. Диаграммы «напряжение — деформация» при сложном напряженном состоянии, характеризующие влияние среднего нормального напряжения σ_m : а — сталь, растяжение и радиальное давление при различных значениях σ_z/σ_t (опыты Жукова, 1954); б — песок, трехосное сжатие при различных значениях σ_m (опыты Боткина); в — глина, трехосное сжатие при различных значениях $\sigma_z = \sigma_3$ (опыты Боткина); г — песок, трехосное сжатие при различных значениях σ_m (опыты Федорова); д — плотная моренная глина, трехосное сжатие при различных σ_m (опыты Инслея и Гиллеса); е — мерзлая супесь, —10°, трехосное сжатие при различных σ_m (опыты Шушерной и Вялова); ж — глина (каолин), трехосное сжатие при различных σ_m (опыты Миндича и Вялова)

В одних опытах поддерживалось постоянное значение $\sigma_m = (\sigma_1 + 2\sigma_2)/3$, но изменялась величина τ_i , в других поддерживалось постоянное значение $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$, а увеличивалось σ_1 . Как видно, для всех опытов диаграммы $\gamma_i - \tau_i$ оказываются неинвариантными — они представлены семействами кривых $\gamma_i - \tau_i$, каждая из которых соответствует значению своего среднего нормального напряжения σ_m , т. е.

$$\gamma_i = f(\tau_i, \sigma_m). \quad (11.21)$$

Поверхность в координатах $\gamma_i - \tau_i - \sigma_m$. Рассмотрим [4] подробнее связь между интенсивностью касательных напряжений τ_i , средним нормальным напряжением σ_m и интенсивностью деформаций сдвига γ_i для некоторого фиксированного момента времени t_j .

Эту связь можно отобразить с помощью поверхности, построенной в координатах $\gamma_i - \tau_i - \sigma_m$, как это показано на рис. 11.3, а. Проекция следов пересечения такой поверхности с плоскостями $\tau_i - \gamma_i$, $\tau_i - \sigma_m$ и $\sigma_m - \gamma_i$ изобразят семейства соответствующих кривых (рис. 11.3, б).

На плоскости $\tau_i - \gamma_i$ (I квадрант) получим семейство кривых, отображающих зависимость между τ_i и γ_i при различных фиксированных значениях среднего нормального напряжения $\sigma_m = \text{const}$. Нижняя кривая этой диаграммы при $\sigma_m = 0$ соответствует чистому сдвигу.

Проекция следов на плоскость $\tau_i - \sigma_m$ (II квадрант) дают семейство кривых, отображающих зависимость

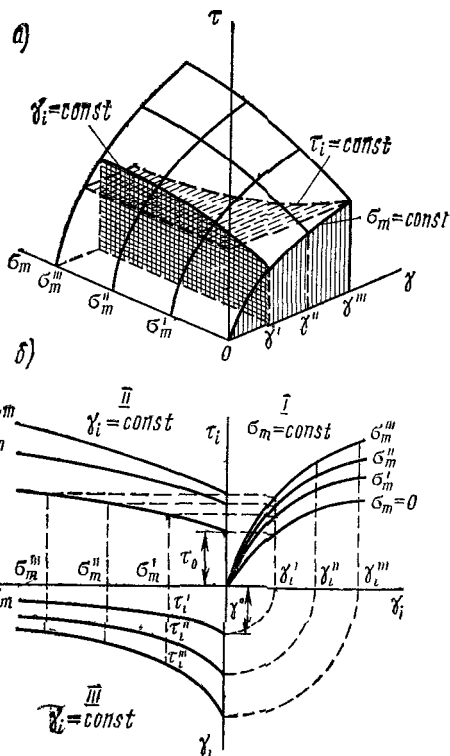


Рис. 11.3. Поверхность $\gamma_i - \tau_i - \sigma_m$ (а) и проекции ее сечения (б) на плоскости $\tau_i - \gamma_i$, $\tau_i - \sigma_m$, $\sigma_m - \gamma_i$

между τ_i и σ_m при различных фиксированных значениях деформации $\gamma_i = \text{const}$. Отрезки τ_0 , отсекаемые кривыми по оси ординат, соответствуют напряжениям чистого сдвига $\sigma_m = 0$, вызывающим данную деформацию γ_i . Верхняя кривая является предельной кривой — она соответствует предельному состоянию. На плоскости $\sigma_m - \gamma_i$ (III квадрант) получим семейство кривых, отображающих влияние σ_m на деформацию сдвига γ_i при различных фиксированных значе-

ниях интенсивности касательных напряжений $\tau_i = \text{const}$. Отрезки γ^0 , отсекаемые кривыми на оси ординат, соответствуют деформации чистого сдвига.

Из рассмотрения приведенных диаграмм следует, что зависимость (11.21) можно представить в иной форме.

$$\gamma_i = f_1(\tau_i) - f_2(\tau_i, \sigma_m) \text{ или } \tau_i = \varphi_1(\gamma_i) + \varphi_2(\gamma_i, \sigma_m). \quad (11.22)$$

Первые члены этих выражений отображают сопротивление деформированию при чистом сдвиге, а вторые характеризуют влияние нормального напряжения σ_m , с повышением которого сопротивление сдвигу повышается, а развитие деформаций тормозится.

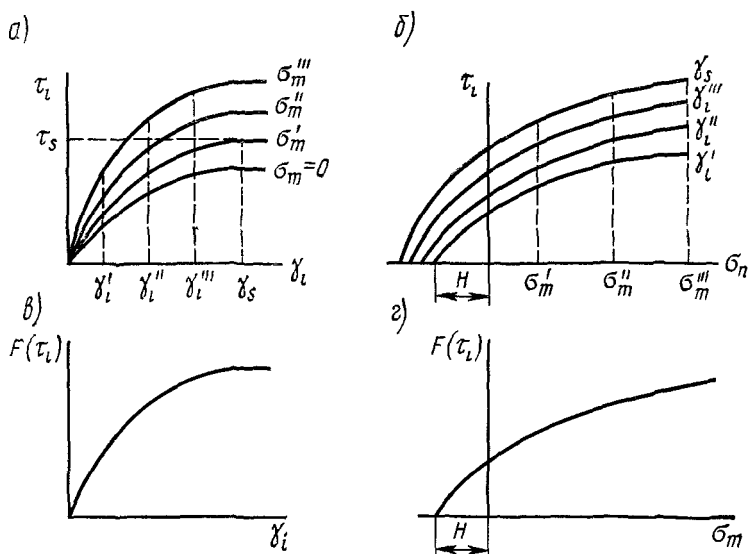


Рис 11.4 Построение кривых $\tau_i - \gamma_i$ (а) и $\tau_i - \sigma_m$ (б) и приведение их к инвариантному виду (в, г)

Диаграммы, показанные на рис. 11.3, б, можно построить способом, описанным ниже. Пусть мы провели испытания, например, на трехосное сжатие, увеличивая τ_i при сохранении различных постоянных значений σ_m . В результате получим график зависимости между τ_i и γ_i в виде семейства кривых $\tau_i - \gamma_i$ для различных σ_m (рис. 11.4, а). Для перестройки этого графика в диаграмму $\tau_i - \sigma_m$ при различных γ_i пересечем кривые $\tau_i - \gamma_i$ вертикальными прямыми для произвольных значений γ_i' , γ_i'' , ... и т. д. Точки пересечения перенесем на диаграмму $\tau_i - \sigma_m$, получив на ней семейство кривых для различных γ_i (рис. 11.4, б).

Переход к предельному состоянию определяется достижением деформацией некоторого предельного значения $\gamma_i = \gamma_s$. Как правило, этому состоянию соответствует переход кривых $\tau_i - \gamma_i$ в горизонтальные прямые. Но иногда кривые $\tau_i - \gamma_i$ такого перехода мо-

гут не иметь, и тогда предельное состояние (условное) определяется или точкой резкого перегиба кривой $\tau_i - \gamma_i$, или достижением деформацией γ_i некоторого заданного предельного значения. Напряжение, вызывающее переход в предельное состояние, есть $\tau_s = f(\sigma_m)$.

В общем случае предельная деформация γ_s также зависит от среднего нормального напряжения $\gamma_s = \varphi(\sigma_m)$, но при теоретических построениях иногда целесообразно принимать условие $\gamma_s = \text{const}$.

Предельная огибающая кривая $\tau_i - \sigma_m$, построенная для значения $\gamma_i = \gamma_s$ (верхняя кривая диаграммы б), будет отображать условие предельного состояния грунта.

Диаграммы деформирования, изображенные на рис. 11.4, а, б, можно привести к инвариантному виду, сведя семейство кривых $\tau_i - \gamma_i$ и $\tau_i - \sigma_m$ к единым кривым, если построить эти диаграммы в координатах $F(\tau_i) - \gamma_i$ и $\bar{F}(\tau_i) - \sigma_m$ (рис. 11.4, в, г), где в соответствии с выражением (11.22) $F(\tau_i) = \tau_i - \varphi_2(\gamma_i; \sigma_m)$ и $\bar{F}(\tau_i) = [\tau_i - \varphi_1(\gamma_i)] / \varphi_3(\gamma_i)$.

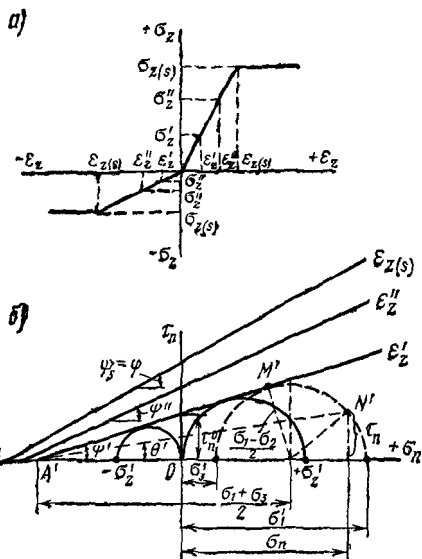
Различие в сопротивлении грунта растяжению и сжатию и влияние среднего нормального напряжения. Ранее подчеркивалось, что зависимость деформаций сдвига от среднего нормального напряжения обус-

Рис. 11.5. Диаграммы деформирования материалов, неодинаково сопротивляющихся сжатию (+ σ) и растяжению (− σ)

ловливается различием в сопротивлении грунтов деформированию растяжения и сжатия. Докажем справедливость этого утверждения.

Рассмотрим диаграмму (рис. 11.5, а) упругопластического деформирования грунта при одноосном сжатии и растяжении для случая, когда модуль упругости и предел текучести при сжатии больше, чем при растяжении: $|+E| > |−E|$, $|+\sigma_s| > |−\sigma_s|$. Отложим на положительной оси абсцисс (сжатие) и на отрицательной (растяжение) некоторые равные значения деформаций: $|+\varepsilon_z'| = |−\varepsilon_z'|$. Очевидно, этим значениям ε_z' будут отвечать различные по абсолютной величине значения сжимающих и растягивающих напряжений: $|+\sigma_z'| > |−\sigma_z'|$.

Далее построим для значений $\pm \sigma_z'$ круги напряжений (рис. 11.5, б) и проведем к ним касательную $A'B'$. Угол наклона этой касательной Ψ' является углом наибольшего отклонения $\text{tg } \Psi' = \text{max}[\tau_n' / (\sigma_n' + H')]$, где H' — параметр связности грунта. Вели-



чины Ψ и H' будут параметрами касательной к кругам напряжений, соответствующим некоторой деформации $\pm \varepsilon_z' = \text{const}$.

Если теперь на рис. 11.5, а отложить какое-либо другое значение деформации $|\pm \varepsilon_z''|$, то ему будут соответствовать свои напряжения $|+\sigma_z''| > |-\sigma_z''|$ и своя огибающая кругов этих напряжений на рис. 11.5, б с параметрами Ψ'' и H'' . Следовательно, параметры Ψ и H являются функциями деформаций $\Psi = \Psi(\varepsilon_z)$ и $H = H(\varepsilon_z)$.

Записав уравнение огибающей кругов напряжений в известной форме [42], получим

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \left[H(\varepsilon_1) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right] \sin \Psi(\varepsilon_1),$$

где $H = [\tau_n(\varepsilon_1)] / [\text{tg } \Psi(\varepsilon_1)]$, причем $H \sin \Psi = \tau_n \cos \Psi = \tau^0$ — напряжение чистого сдвига.

Члены $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ и $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ — не что иное, как интенсивность касательных напряжений τ_i и среднее нормальное напряжение σ_m для плоского деформированного состояния. В свою очередь деформация одноосного сжатия-растяжения определяет интенсивность деформаций сдвига $\gamma_i = (2/\sqrt{3})(1 + \nu)\varepsilon_1$. Таким образом, полученную зависимость можно представить в виде

$$\tau_i = [H(\gamma_i) + \sigma_m] \sin \Psi(\gamma_i). \quad (11.23)$$

Сопоставив выражения (11.23) и (11.22) и приняв $H(\gamma_i) \sin \Psi(\gamma_i) = \varphi(\gamma_i)$, $\sin \Psi(\gamma_i) = \varphi_2(\gamma_i)$, легко видеть, что (11.23) является частным случаем (11.22) и что, следовательно, различие в сопротивлении растяжению и сжатию приводит к зависимости деформирования при сдвиге от величины среднего нормального напряжения σ_m .

Учет внутреннего трения в предельном и допредельном состояниях грунта. Из сказанного выше следует также, что учет влияния среднего нормального напряжения σ_m равносильен учету внутреннего трения не только в предельном, но и в допредельном состояниях. Поясним это положение на диаграммах «напряжение—деформация» и соответствующих им кругах напряжений (рис. 11.6).

Для материалов, не обладающих внутренним трением, упруго-пластическое состояние отображается на диаграмме $\tau_i - \gamma_i$ графиком а, на котором допредельное состояние описано законом Гука $\tau_i = G\gamma_i$, а предельное — условием Сен-Венана $\tau_i = \tau_s = \text{const}$. Диаграмма $\tau_i - \sigma_m$ представлена соответственно равными кругами напряжений для всех γ_i , включая предельное значение γ_s .

Для материалов, обладающих трением, принимается в обычной трактовке, что в допредельном состоянии справедлив тот же закон Гука $\tau_i = G\gamma_i$, а в предельном — закон Мизеса — Боткина (или Мора — Кулона) $\tau_s = \tau^0 + \sigma_m \text{tg } \Psi$. Соответственно на диаграмме $\tau_i - \gamma_i$ (рис. 11.6, б) допредельное состояние отображено одной прямой, тогда как предельное — семейством прямых $\tau_i = \tau_s$, зависящих от среднего нормального напряжения σ_m . Нелогичность такого

допущения наглядно проявляется при построении графика в координатах $\tau_i - \sigma_m$. Получается, что круги напряжений для всех значений деформаций $\gamma_i < \gamma_s$ (т. е. для допредельного состояния) имеют горизонтальные касательные и только при $\gamma_i = \gamma_s$ (предельное состояние) касательная становится наклонной.

Указанное несоответствие можно устранить, если трение учитывать как в предельном, так и в допредельном состояниях. Тогда

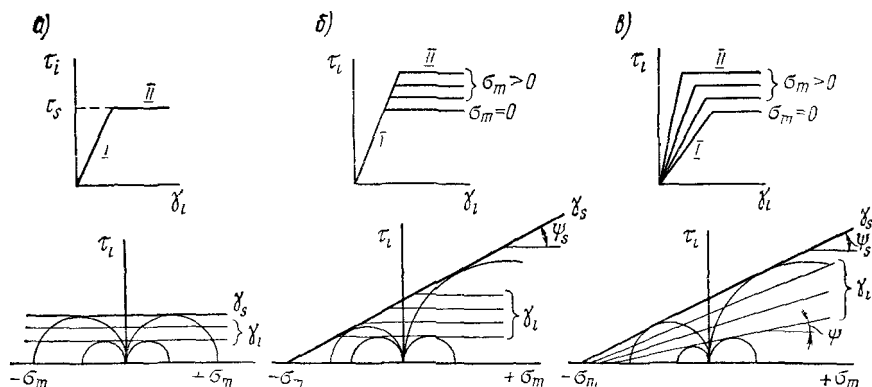
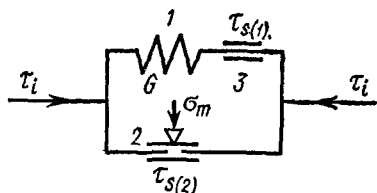


Рис. 11.6. Диаграммы деформирования и круги напряжений для упругопластического состояния

диаграмма $\tau_i - \gamma_i$ (рис. 11.6, в) будет представлять собой семейство ломаных прямых, каждая из которых соответствует своему значению σ_m , а на диаграмме $\tau_i - \sigma_m$ получим семейство наклонных прямых с углом наклона Ψ . Изменение этого угла $0 < \Psi \leq \Psi_s$ отображает постепенный переход от допредельного к предельному состоянию.

Механическая модель грунта, учитывающая влияние σ_m . Влияние среднего нормального напряжения σ_m на процесс деформирования можно проанализировать с помощью механической

Рис. 11.7. Механическая модель, отображающая влияние среднего нормального напряжения σ_m



модели, изображенной на рис. 11.7 (при учете фактора времени эта модель комбинируется с моделью, изображенной на рис. 7.6, а).

Приняв для простоты линейный закон связи между напряжением и деформацией $\tau_{i(1)} = G\gamma_{i(1)}$, отобразим сопротивление сдвига грунта упругим элементом 1. Влияние среднего нормального напряжения σ_m отобразим подключением элемента кулонова трения 2, полагая $\gamma_{i(2)} = \tau_{i(2)} / (B\sigma_m)$, где $B = f / \gamma_{i(2)}$ — коэффициент трения, отнесенный к единичной деформации.

Поскольку элементы соединены параллельно, то $\tau_i = \tau_{i(1)} + \tau_{i(2)}$ и $\gamma_i = \gamma_{i(1)} = \gamma_{i(2)}$, откуда

$$\tau_i = \gamma_i (G + B\sigma_m) = \tau^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H} \right) = \operatorname{tg} \Psi (H + \sigma_m), \quad (11.24)$$

где $\operatorname{tg} \Psi = B\gamma_i$ — тангенс угла наклона, зависящий от величины деформации, т. е. $\Psi = \Psi(\gamma_i)$; $H = G/B = \text{const}$ — показатель связности грунта

Переход к предельному состоянию можно отобразить подключением к модели сен-венанова элемента 3. Будем считать, что пружина 1 модели может сжиматься лишь до величины $\gamma_i = \gamma_s$, после чего модель может смещаться неограниченно. Для развития такого смещения необходимо приложить усилие, равное $\tau_i = \tau_{s(1)} + \tau_{s(2)}$, где $\tau_{s(1)} = G\gamma_s$, а $\tau_{s(2)} = \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s$. Тогда уравнение (11.24) перейдет в условие предельного равновесия Мизеса — Шлейхера — Боткина

$$\tau_i = \tau_s^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right) = \tau_s^0 + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s. \quad (11.25)$$

Связь параметров уравнения (11.24) с характеристиками деформирования при сжатии и растяжении. Параметры уравнения (11.24) можно выразить через характеристики деформирования грунта $E_{сж}$, $\nu_{сж}$, E_p , ν_p , соответствующие сжатию и растяжению (см. рис. 11.5).

На основании данных табл. 3 1 для одноосного напряженного состояния имеем: $\tau_i = \sigma_1 / \sqrt{3}$, $\gamma_i = 2\varepsilon_1 (1 + \nu) / \sqrt{3}$, $\sigma_m = \sigma_1 / 3$.

При сжатии соответственно получим:

$$\tau_i = \frac{E_{сж}\varepsilon_1}{\sqrt{3}} = \frac{E_{сж}\gamma_i}{2(1 + \nu_{сж})}; \quad \sigma_m = \frac{E_{сж}\varepsilon_1}{3} = \frac{E_{сж}\gamma_i}{2(1 + \nu_{сж})\sqrt{3}};$$

при растяжении:

$$\tau_i = \frac{E_p\gamma_i}{2(1 + \nu_p)}; \quad \sigma_m = - \frac{E_p\gamma_i}{2(1 + \nu_p)\sqrt{3}}.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (11.24), определим входящие в него параметры:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Psi &= \sqrt{3} \frac{(1 + \nu_p) E_{сж} - (1 + \nu_{сж}) E_p}{(1 + \nu_p) E_{сж} + (1 + \nu_{сж}) E_p}; \\ H &= \frac{E_{сж} E_p \gamma_i}{\sqrt{3} [(1 + \nu_p) E_{сж} - (1 + \nu_{сж}) E_p]}; \\ G &= \frac{E_{сж} E_p}{(1 + \nu_i) E_{сж} + (1 + \nu_{сж}) E_p}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Для тех случаев, когда коэффициенты Пуассона при сжатии и растяжении равны: $\nu_{сж} = \nu_p = \nu$, вид приведенных соотношений упрощается:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{E_{\text{сж}} - E_p}{E_{\text{сж}} + E_p}; \quad H = \frac{E_{\text{сж}} E_p \gamma_i}{\sqrt{3} (1 + \nu) (E_{\text{сж}} - E_p)}; \quad (11.27)$$

$$G = \frac{E_{\text{сж}} E_p}{(1 + \nu) (E_{\text{сж}} + E_p)}.$$

Отличительной особенностью полученных соотношений является, во-первых, постоянство угла Ψ . Это означает, что при принятых исходных положениях угол отклонения на любой стадии деформирования будет равен углу внутреннего трения (подробнее об этом будет сказано далее). Во-вторых, деформация может развиваться лишь при напряжениях $\tau_i > \sigma_m \operatorname{tg} \Psi$, что видно из подстановки (11.26) или (11.27) в (11.24). Последнее ограничение соответствует схеме жестко-упрочняющегося тела. Оно вытекает из особенности диаграммы рис. 11.5, а, на которой прямая $\sigma_z - \epsilon_z$ имеет точку перегиба в центре координат, что является определенной условностью.

§ 11.4. УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Поверхности $\tau_i - \gamma_i - \sigma_m$ и $\tau_i - \gamma_i - t$. В предыдущем параграфе была рассмотрена связь между τ_i , γ_i и σ_m без учета фактора времени. Для учета этого фактора нужно рассмотреть совместно поверхность $\tau_i - \gamma_i - \sigma_m$, изображенную на рис. 11.3, и поверхность $\tau_i - \gamma_i - t$, показанную на рис. 7.10. Соответственно уравнение деформирования (11.22) примет вид

$$\gamma_i = f_1(\tau_i, t) - f_2(\tau_i, \sigma_m, t) \quad (11.28)$$

$$\tau_i = \varphi_1(\gamma_i, t) + \varphi_2(\gamma_i, \sigma_m, t).$$

Если кривые деформирования оказываются подобными, можно записать

$$\gamma_i = f_1(\tau_i) \Phi_1(t) - f_2(\tau_i) \bar{\psi}(\sigma_m) \Phi_2(t) \quad (11.29)$$

или

$$\tau_i = \varphi_1(\gamma_i) F_1(t) + \varphi_2(\gamma_i) \bar{\Omega}(\sigma_m) F_2(t),$$

где согласно рис. 11.3 f_1 и Φ_1 определяются видом кривых $\tau_i - \gamma_i$ при $\sigma_m = 0$ (I квадрант), f_2 и Φ_2 — видом кривых $\tau_i - \gamma_i$ при $\sigma_m > 0$ (II квадрант), $\bar{\Omega}$ — видом кривых $\tau_i - \sigma_m$ (II квадрант), ψ — видом кривых $\gamma_i - \sigma_m$ (III квадрант).

Частным является случай, когда функции $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, $F_1 = F_2 = F$. Тогда

$$\gamma_i = f(\tau_i) \psi(\sigma_m) \Phi(t); \quad \tau_i = \varphi(\gamma_i) \Omega(\sigma_m) F(t), \quad (11.30)$$

где $\psi(\sigma_m) = 1 + \bar{\psi}(\sigma_m)$ и $\Omega(\sigma_m) = 1 - \bar{\Omega}(\sigma_m)$.

Приведенные зависимости, соответствующие теории старения, справедливы для постоянных или медленно и монотонно изменяющихся напряжений.

Интегральная форма уравнения деформирования. При изменяющейся по произвольному закону нагрузке (в условиях активного нагружения) зависимость между деформацией γ_i и напряжением τ_i с учетом среднего нормального напряжения σ_m следует выражать с помощью интегральных соотношений Больцмана — Вольтерры, аналогично тому, как это делается в теории наследственной ползучести. Тогда вместо соотношений (11.22) будут справедливы зависимости

$$\gamma_i = f_1[\tau_i(\sigma_m)] - \int_0^{\sigma_m} P(\sigma_m - \xi) f_2[\sigma_m(\xi)] d\xi; \quad (11.31)$$

$$\tau_i = \varphi_1[\gamma_i(\sigma_m)] + \int_0^{\sigma_m} S(\sigma_m - \xi) \varphi_2[\gamma_i(\xi)] d\xi. \quad (11.32)$$

Как и в (11.22), первые члены этих выражений отображают деформацию и напряжение чистого сдвига, а вторые — затормаживающее влияние среднего нормального напряжения.

Для учета фактора времени соотношения (11.31) и (11.32) следует рассмотреть совместно с соотношениями наследственной ползучести (7.41) и (7.43). В результате получим:

$$\begin{aligned} \gamma_i = & f_1[\tau_i(\sigma_m, t)] + \int_0^t Q_1(t - \nu) f_1[\tau_i(\nu)] d\nu - \int_0^{\sigma_m(t)} P(\sigma_m - \xi) \times \\ & \times f_2[\tau_i(\xi)] d\xi - \int_0^t \int_0^{\sigma_m(t)} Q_2(t - \nu) P(\sigma_m - \xi) f_2[\tau_i(\xi)] d\xi d\nu; \end{aligned} \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} \tau_i = & \varphi_1[\gamma_i(\sigma_m, t)] - \int_0^t R_1(t - \nu) \varphi_1[\gamma_i(\nu)] d\nu + \\ & + \int_0^{\sigma_m(t)} S(\sigma_m - \xi) \varphi_2[\gamma_i(\xi)] d\xi - \int_0^t \int_0^{\sigma_m(t)} R_2(t - \nu) \times \\ & \times S(\sigma_m - \xi) \varphi_2[\gamma_i(\xi)] d\xi d\nu. \end{aligned} \quad (11.34)$$

В этих выражениях приняты следующие обозначения: $f_1(\tau_i) = \gamma^0$ и $\varphi_1(\gamma_i) = \tau^0$ — функции, характеризующие связь между напряжением и деформацией при чистом сдвиге ($\sigma_m = 0$) в момент времени $t = 0$; $f_2(\tau_i)$ и $\varphi_2(\gamma_i)$ — функции, характеризующие связь между напряжением и деформацией при $\sigma_m > 0$ в момент времени $t = 0$; в соответствии с (11.29) они определяются при $\Phi(t) = 1$ соотношениями $f_2(\tau_i) = -(\gamma_i - \gamma^0)/\bar{\Psi}(\sigma_m)$ и $\varphi_2(\gamma_i) = (\tau_i - \tau^0)/\bar{\Omega}(\sigma_m)$;

$$Q_1(t) = \frac{1}{f_1(\tau_i)} \frac{d\gamma_i}{dt} \quad \text{и} \quad R_1(t) = -\frac{1}{\varphi_1(\gamma_i)} \frac{d\tau_i}{dt} -$$

ядра уравнений ползучести и релаксации при чистом сдвиге ($\sigma_m=0$), аналогичные ядрам уравнений (7.41) и (7.43);

$$Q_2(t) = -\frac{1}{f_2(\tau_i)} \frac{d}{dt} (\gamma_i - \gamma^0) \text{ и } R_2(t) = \frac{1}{\varphi_2(\gamma_i)} \frac{d}{dt} (\tau_i - \tau^0) -$$

ядра уравнений ползучести и релаксации при $\sigma_m > 0$, характеризующие изменение во времени избытка деформации и напряжения над чистым сдвигом; $P(\sigma_m) = -\frac{1}{f_2(\tau_i)} \frac{d\gamma_i}{d\sigma_m}$ и $S(\sigma_m) = \frac{1}{\varphi_2(\gamma_i)} \frac{d\tau_i}{d\sigma_m}$ — ядра интегральных уравнений деформирования, учитывающих влияния σ_m . Эти функции характеризуют изменение деформации и напряжения с ростом среднего нормального напряжения σ_m и формально аналогичны ядрам ползучести Q и релаксации R уравнений наследственной ползучести (7.41) и (7.43) с той разницей, что Q и R характеризуют изменения γ_i и τ_i по t , а P и S — по σ_m .

Первые два члена выражений (11.33) и (11.34) соответствуют деформации или напряжению чистого сдвига, причем первый член отображает мгновенное состояние, а второй — изменяющееся во времени. Третий и четвертый члены выражений (11.33) и (11.34) отражают влияние среднего нормального напряжения σ_m , причем третьи члены характеризуют эти влияния в момент $t=0$, а четвертые — изменение влияния во времени. Если принять $f_1=f_2$ и $Q_1=Q_2$ (или $\varphi_1=\varphi_2$ и $R_1=R_2$), то уравнения (11.33) и (11.34) существенно упрощаются.

Из сопоставления значений P , S и выражений (11.29) следует:

$$P = \frac{d\bar{\psi}}{d\sigma_m}, \quad S = \frac{d\bar{\Omega}}{d\sigma_m} \text{ или } \bar{\psi} = \int_0^{\sigma_m} P d\sigma_m, \quad \bar{\Omega} = \int_0^{\sigma_m} S d\sigma_m.$$

Значения P и S можно подставлять в уравнения (11.33) и (11.34) лишь в тех случаях, когда нагружение является простым или близким к таковому.

Для случаев постоянной нагрузки $\tau_i = \text{const}$ или постоянной деформации $\gamma_i = \text{const}$ соответственно имеем:

$$\gamma_i = f_1(\tau_i) \left[1 + \int_0^t Q(t) dt \right] - f_2(\tau_i) \bar{\psi}(\sigma_m) \left[1 + \int_0^t Q_2(t) dt \right]; \quad (11.35)$$

$$\tau_i = \varphi_1(\gamma_i) \left[1 - \int_0^t R_1(t) dt \right] + \varphi_2(\gamma_i) \bar{\Omega}(\sigma_m) \left[1 - \int_0^t R_2(t) dt \right]. \quad (11.36)$$

Эти выражения идентичны формулам (11.29).

Для случаев, когда $f_1=f_2=f$, $Q_1=Q_2=Q$ и $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, $R_1=R_2=R$, формулы (11.35) и (11.36) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\gamma_i &= f(\tau_i) \psi(\sigma_m) \left[1 + \int_0^t Q(t) dt \right]; \\ \tau_i &= \varphi(\gamma_i) \Omega(\sigma_m) \left[1 - \int_0^t R(t) dt \right],\end{aligned}\tag{11.37}$$

где $\psi(\sigma_m) = 1 + \bar{\psi}(\sigma_m)$ и $\Omega(\sigma_m) = 1 - \bar{\Omega}(\sigma_m)$.

Очевидно, что эти выражения идентичны (11.30).

Виды функций, входящих в уравнения (11.33) и (11.34). Виды функций f , φ , Q , R , входящих в уравнения (11.33) и (11.34), были рассмотрены в гл. 7. Соответственно связь между напряжением и деформацией можно принять в виде

$$\varphi_1(\gamma_i) = A_0 \gamma_i^{m_1}; \quad \varphi_2(\gamma_i) = B_0 \gamma_i^{m_2}.\tag{11.38}$$

Что же касается вида функций Ω и S , то, аппроксимируя кривые $\tau_i - \sigma_m$ прямыми, как это обычно делают в механике грунтов на диаграммах сдвига, принимаем:

$$\bar{\Omega}(\sigma_m) = \sigma_m; \quad S(\sigma_m) = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = 1.\tag{11.39}$$

После подстановки (11.38) и (11.39) в (11.36) и (11.29) уравнения деформирования с учетом влияния σ_m , выведенные на основании теории наследственной ползучести в первом случае и теории старения во втором, будут иметь следующий вид.

$$\begin{aligned}\tau_i &= A_0 \left\{ [\gamma_i(t)]^{m_1} - \int_0^t R_1(t-v) [\gamma_i(v)]^{m_1} dv \right\} + \\ &+ B_0 \left\{ \sigma_m(t) [\gamma_i(t)]^{m_2} - \int_0^t R_2(t-v) \sigma_m(v) [\gamma_i(v)]^{m_2} dv \right\}\end{aligned}\tag{11.40}$$

и

$$\tau_i = A_0 \gamma_i^{m_1} F_1(t) + B_0 \sigma_m \gamma_i^{m_2} F_2(t).\tag{11.41}$$

Обозначив $F_1(t) = A(t)/A_0$ и $F_2(t) = B(t)/B_0$, получим из (11.41) следующее выражение:

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^{m_1} + B(t) \sigma_m \gamma_i^{m_2}.\tag{11.42}$$

Такой вид уравнения деформирования позволяет учитывать время как в функциональной, так и в параметрической формах.

Возможные виды функции $A(t)$ были рассмотрены в гл. 7; вид функции $B(t)$ можно представить аналогично $A(t)$. Одной из наиболее простых, но достаточно хорошо отвечающих опытным данным, является степенная зависимость вида (7.87):

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + \delta_1 t^{\alpha_1}}; \quad B(t) = \frac{B_0}{1 + \delta_2 t^{\alpha_2}}.\tag{11.43}$$

Анализ уравнения деформирования (11.42). Члены этого уравнения имеют следующий смысл:

$$A_0 \gamma_i^{m_1} = \tau^0(\gamma_i); \quad B_0 \gamma_i^{m_2} = \operatorname{tg} \Psi(\gamma_i);$$

$$\frac{A_0}{B_0} \gamma_i^{m_1 - m_2} = \frac{\tau^0(\gamma_i)}{\operatorname{tg} \Psi(\gamma_i)} = H(\gamma_i), \quad (11.44)$$

где $\tau^0(\gamma_i)$ — отрезки на оси ординат графика рис. 11.8, а, отсекаемые прямыми $\tau_i - \sigma_m$ и отображающие сопротивление чистому сдвигу; $H(\gamma_i)$ — отрезки на оси абсцисс, отсекаемые прямыми $\tau_i - \sigma_m$ и отображающие сопротивление всестороннему растяжению; $\Psi(\gamma_i)$ — углы наклона прямых $\tau_i - \sigma_m$, соответствующие углам отклонения на октаэдрической площадке при данном значении γ_i .

Все указанные параметры зависят от величины деформации и, следовательно, от времени, поскольку $\gamma_i = \gamma_i(t)$. При этом возможны некоторые комбинации значений τ^0 , Ψ , H , приводящие к различным частным случаям уравнения (11.42).

Схема а (рис. 11.8). Этот случай является наиболее общим; он соответствует уравнению (11.42) $m_1 \neq m_2$, причем с учетом (11.44) указанное уравнение можно переписать в виде

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^{m_1} \left[1 + \frac{\sigma_m}{H(\gamma_i, t)} \right]. \quad (11.45)$$

Все параметры этого уравнения τ , Ψ и $H = \tau^0 / \operatorname{tg} \Psi$ изменяются в зависимости от величины деформации и во времени.

Схема б (рис. 11.8). Показатели степени в (11.42) $m_1 \neq 0$, $m_2 = 0$. В этом случае параметр $H = H(\gamma_i, t)$ — есть функция γ_i и t , тогда как угол Ψ ни от деформации, ни от времени не зависит — $\operatorname{tg} \Psi = \operatorname{tg} \Psi_s = \operatorname{const}$.

Диаграмма $\tau_i - \sigma_m$ отображается семейством параллельных прямых, и выражение (11.42) можно переписать в форме

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^{m_1} \left[1 + \frac{\sigma_m}{H(\gamma_i, t)} \right] = A(t) \gamma_i^{m_1} + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s. \quad (11.46)$$

Отметим, что это выражение отображает деформирование жестко-упрочняющегося тела — деформация начнет развиваться только при $\tau_i > \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s$.

Схема в (рис. 11.8). Показатели степени в выражении (11.42) $m_1 = m_2 = m$. В этом случае угол $\Psi = \Psi(\gamma_i, t)$ является функцией γ_i и t , параметр же H от γ_i не зависит, а если $A(t)/B(t) = \operatorname{const}$, то H не зависит ни от γ_i , ни от t , т. е. $H = H_s = \operatorname{const}$. Диаграмма τ_i — σ_m представлена семейством прямых, выходящих из одного полюса, а выражение (11.42) примет следующий вид:

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^m \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right). \quad (11.47)$$

Частным для этого выражения является случай, когда $A = 0$ и диаграмма τ_i — σ_m представлена семейством прямых, выходящих из центра координат ($H = 0$):

$$\tau_i = \sigma_m \operatorname{tg} \Psi(\gamma_i, t). \quad (11.48)$$

Нелинейная зависимость τ_i — σ_m (рис. 11.8, з). Рассмотрим случай, когда связь между τ_i и σ_m не линейная, как было принято в уравнении (11.42), а степенная: $\Omega(\sigma_m) = [1 + \sigma_m/H_s]^\lambda$. Такой вид зависимости был получен С. Э. Городецким на основании опытных данных («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1975, № 3). В этом случае диаграмма τ_i — σ_m отобразится семейством кривых, выходящих из одного полюса $H = H_s = \operatorname{const}$, а уравнение деформирования (11.29), если положить $\varphi_1(\gamma_i) = \varphi_2(\gamma_i) = = A(t) \gamma_i^m$, примет вид

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^m \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right)^\lambda, \quad (11.49)$$

где $A(t) \gamma_i^m = \tau^0(t)$.

Для проверки применимости формулы (11.49) и определения входящих в нее параметров предварительно находят из графика τ^0 — γ_i или иным путем величину $\tau^0(\gamma_i)$. Далее определяют параметр H , для чего (11.49) приводят к виду $y = qe^{kx} + c$, где $y = \sigma_m$, $x = [\ln \tau_i - \ln \tau^0(t)]$, $k = 1/\lambda$, $q = -c = H$.

Построив график в координатах (y, x) , выбирают на полученной кривой три произвольные точки с абсциссами $x_1, x_2, x_3 = (x_1 + x_2)/2$. Тогда параметр H определится из выражения $H = (y_3^2 - y_1 y_2) / (y_1 + y_2 - 2y_3)$, где y_1, y_2, y_3 — ординаты выбранных точек.

Зная τ^0 и H , для проверки применимости уравнения (11.49) преобразуют это уравнение к линейному виду:

$$\ln \tau_i = \ln \tau^0(t) + \lambda \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right).$$

Дробно-линейная зависимость. Другим вариантом нелинейной связи между τ_i и σ_m является дробно-линейная зависи-

мость. Согласно (5.22') имеем

$$\tau_i = \frac{G_0 \tau_s \gamma_i (T + t)}{(\tau_s + G_0 \gamma_i) (T + \delta t)}, \quad (11.50)$$

где $\tau_s = \lim \tau_i = \Phi(\sigma_m)$ при $\gamma_i \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$.

Если функцию $\Phi(\sigma_m)$ также принять дробно-линейной, то τ_s в (11.50) будет иметь вид

$$\tau_s = \frac{\tau_s^* (H_s + \sigma_m) \operatorname{tg} \bar{\Psi}}{\tau_s^* + (H_s + \sigma_m) \operatorname{tg} \bar{\Psi}}, \quad (11.51)$$

где $\tau_s^* = \lim \tau_s$ при $\sigma_m \rightarrow \infty$, $\operatorname{tg} \bar{\Psi} = \lim [\tau_s / (H_s + \sigma_m)]$ при $(H_s + \sigma_m) \rightarrow 0$; $H_s = \text{const}$.

Если же принять функцию $\Phi(\sigma_m)$ линейной, то τ_s в (11.50) примет вид

$$\tau_s = (H_s + \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi_s = \tau_s^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right), \quad (11.52)$$

где τ_s^0 — предел текучести при чистом сдвиге.

Величина G_0 в (11.50) также зависит от σ_m , причем эту зависимость можно принять аналогичной (11.51) или (11.52). В последнем случае имеем

$$G_0 = \bar{G} (H_s + \sigma_m) = G_0^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right), \quad (11.52')$$

где G_0^0 — значение G_0 при чистом сдвиге; $\bar{G} = G_0^0 / H_s$. Подставив (11.52) и (11.51) в (11.50), получим

$$\tau_i = (H_s + \sigma_m) \frac{\bar{G} \operatorname{tg} \Psi_s (T + t) \gamma_i}{(\operatorname{tg} \Psi_s + \bar{G} \gamma_i) (T + \delta t)}. \quad (11.50')$$

Инвариантные диаграммы. Все рассмотренные выше уравнения деформирования можно отобразить с помощью инвариантных диаграмм, на которых семейства кривых $\tau_i - \gamma_i$ и $\tau_i - \sigma_m$ сведены в единые кривые, построенные в обобщенных координатах $F(\tau_i) / \Phi(t) - \gamma_i$ и $F(\tau_i) / \Phi(t) - \sigma_m / H$, как это показано на рис. 11.9.

Для выражения (11.45) и вытекающих из нее формул (11.46) и (11.47) значения указанных функций будут равны:

для формулы (11.45)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H(\gamma_i, t)}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\gamma_i^m}; \quad \Phi(t) = A(t);$$

для формулы (11.46)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H(\gamma_i, t)}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H(\gamma_i, t)}} = \tau_i - \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s; \quad \Phi(t) = A(t);$$

для формулы (11.47)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H_s}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\gamma_i^m}; \quad \Phi(t) = A(t).$$

Для формулы (11.49) значения функций равны:

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s}\right)^\lambda}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\gamma_i^m}; \quad \Phi(t) = A(t).$$

Значения этих функций для формулы (11.50') следующие:

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H_s}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \tau_i \frac{\tau_s^0 + G_0^0 \gamma_i}{\tau_s^0 G_0^0 \gamma_i}; \quad \Phi(t) = \frac{T + t}{T + \delta t}.$$

О преимуществах той или иной из рассмотренных формул в настоящее время нельзя дать уверенных рекомендаций ввиду малой изученности вопроса. Тем не менее имеющиеся опытные данные свидетельствуют в пользу формулы (11.45) с упрощающими допущениями $m_1 = m_2$ или $m_2 = 0$. Отметим, что допущение $m_2 = 0$ хорошо согласуется с опытными данными о независимости угла внутреннего трения грунта от степени развития деформации.

Упругопластическое состояние.

Положив в (11.45) $m_1 = m_2 = 1$, получим уравнение линейного деформирования с учетом влияния σ_m . При этом сохраняют силу все рассмотренные выше случаи, указанные на схемах рис. 11.8, б.

Уравнения упругопластического деформирования, отображаемого с помощью диаграммы на рис. 11.6, в, имеют вид:

$$\frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H}} = G \gamma_i \quad \text{при } \tau_i < \tau_s;$$

$$\frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H_s}} = \tau_s^0 \quad \text{при } \tau_i = \tau_s.$$

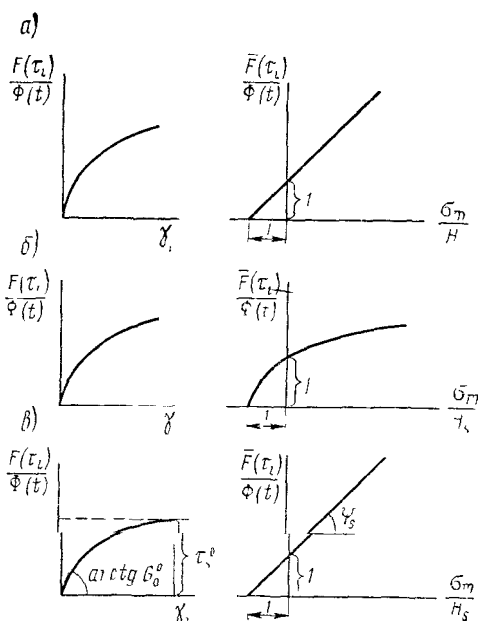


Рис. 11.9. Инвариантные диаграммы деформирования, соответствующие формулам: а — (11.45); б — (11.49); в — (11.50)

Отметим, что параметры H_s , Ψ_s , τ_s^0 предельного состояния грунта можно выразить с помощью характеристик его прочности при одноосном сжатии $R_{сж}$ и растяжении R_p :

$$\operatorname{tg} \Psi_s = \sqrt{3} \frac{R_{сж} - R_p}{R_{сж} + R_p}; \quad H_s = \frac{2}{3} \frac{R_{сж} R_p}{R_{сж} - R_p}; \quad \tau_s^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_{сж} R_p}{R_{сж} + R_p}.$$

§ 11.5. УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧНО-ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ГРУНТА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Связь между $\dot{\gamma}_i$, τ_i , σ_m , t . Выше была рассмотрена связь между интенсивностью деформаций сдвига $\dot{\gamma}_i$, интенсивностью касательных напряжений τ_i , средним нормальным напряжением σ_m и временем t . Аналогичную связь можно установить между интенсивностью скоростей деформаций сдвига $\dot{\gamma}_i$ и τ_i , σ_m , t , исходя из соотношения (11.16) теории течения.

Поскольку время t входит в это соотношение в явном виде, связь между $\dot{\gamma}_i$, τ_i , σ_m и t находят из совместного рассмотрения поверхностей $\dot{\gamma}_i - \tau_i - \sigma_m$ и $\dot{\gamma}_i - \tau_i - t$. Первая из них аналогична поверхности на рис. 11.3, а вторая изображена на рис. 7.12.

Предполагая подобие кривых, соотношения (11.16) можно представить при $\mu_\sigma = \text{const}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= f_1(\tau_i) \kappa_1(t) - f_2(\tau_i) \bar{\psi}(\sigma_m) \kappa_2(t); \\ \tau_i &= \varphi_1(\dot{\gamma}_i) \eta_1(t) + \varphi_2(\dot{\gamma}_i) \bar{\Omega}(\sigma_m) \eta_2(t). \end{aligned} \quad (11.53)$$

Для выражения (11.53) частным является случай, когда $f_1 = f_2 = f$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ или $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Тогда

$$\dot{\gamma}_i = f(\tau_i) \psi(\sigma_m) \kappa(t); \quad \tau_i = \varphi(\dot{\gamma}_i) \Omega(\sigma_m) \eta(t), \quad (11.54)$$

где $\psi(\sigma_m) = 1 + \bar{\psi}(\sigma_m)$; $\Omega(\sigma_m) = 1 - \bar{\Omega}(\sigma_m)$.

Приняв в (11.54) степенной вид функций φ_1 и φ_2 и линейную зависимость между τ_i и σ_m , получим уравнение нелинейно-вязкого течения

$$\tau_i = \eta_1(t) \dot{\gamma}_i^{m_1} + \eta_2(t) \sigma_m \dot{\gamma}_i^{m_2} = \eta_1(t) \dot{\gamma}_i^{m_1} \left[1 + \frac{\sigma_m}{H(\dot{\gamma}_i, t)} \right], \quad (11.55)$$

где $H(\dot{\gamma}_i, t) = [\eta_1(t)/\eta_2(t)] \dot{\gamma}_i^{m_1 - m_2}$.

Анализ уравнения нелинейно-вязкого течения (11.55). В этом выражении член $\eta_1(t) \dot{\gamma}_i^{m_1} = \tau^0(\dot{\gamma}_i)$ характеризует сопротивление чистому сдвигу, а член $\eta_2(t) \dot{\gamma}_i^{m_2} \sigma_m$ — изменение этого сопротивления в результате влияния σ_m , причем $\eta_2(t) \dot{\gamma}_i^{m_2} = \operatorname{tg} \Psi(\dot{\gamma}_i, t)$. Функции времени $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, входящие в (11.55), отображают изменение вязкости в процессе деформирования.

Возможны различные сочетания функций τ^0 , $\operatorname{tg} \Psi$, H , аналогично тому, как это было показано на рис. 11.8.

С л у ч а й *а* — показатели степени уравнения (11.55) $m_1 \neq m_2$. График $\tau_i - \sigma_m$ для этого случая аналогичен рис. 11.8, *а*.

С л у ч а й *б*, когда $m_1 \neq 0$ и $m_2 = 0$. В этом случае уравнение (11.55) принимает вид (рис. 11.8, *б*)

$$\tau_i = \eta_1(t) \dot{\gamma}_i^{m_1} \left[1 + \frac{\sigma_m}{H(\dot{\gamma}_i, t)} \right] = \eta_1(t) \dot{\gamma}_i^{m_1} + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s. \quad (11.56)$$

С л у ч а й *в* при $m_1 = m_2$. Уравнение (11.55) тогда принимает вид (рис. 11.8, *в*)

$$\tau_i = \eta_1(t) \dot{\gamma}_i^m \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right), \quad (11.57)$$

где $H_s = \eta_1(t)/\eta_2(t) = \text{const}$.

Установившееся течение. Если рассматривают только стадию установившегося течения с постоянной скоростью, то коэффициенты вязкости η_1 , η_2 , входящие в формулы (11.55) — (11.57), будут постоянными величинами и $\eta_1/\eta_2 = H = \text{const}$.

Тогда формула (11.57) будет описывать вязкое ньютоново течение с учетом влияния σ_m :

$$\tau_i = \eta_1 \dot{\gamma}_i \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right). \quad (11.58)$$

Уравнение пластично-вязкого течения типа бингамова можно получить из (11.58), если в эту формулу вместо τ_i ввести разность $\tau_i - \tau_r$, где $\tau_r = \tau_s^0 + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s$, τ_s^0 — предельное сопротивление сдвигу; Ψ_s — угол трения на октаэдрической площадке.

Нелинейное же пластично-вязкое течение характеризуется уравнением (11.55), если принять для него $\eta_1 = \text{const}$, $\eta_2 = \text{const}$, а вместо τ_i подставить разность $\tau_i - \tau_r$. В результате при $m_1 \neq m_2$ получим

$$\tau_i = \tau_s^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H} \right) + \eta_1 \dot{\gamma}_i^{m_1} + \eta_2 \sigma_m \dot{\gamma}_i^{m_2}. \quad (11.59)$$

Если же $m_1 = m_2 = m$, то будем иметь

$$\tau_i = (\tau_s^0 + \eta_1 \dot{\gamma}_i^m) \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right). \quad (11.60)$$

Наконец, при $\eta_2 = 0$ получим

$$\tau_i = \tau_s^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H} \right) + \eta_1 \dot{\gamma}_i^{m_1}. \quad (11.61)$$

В формуле (11.61) от среднего нормального напряжения σ_m зависит только предельное сопротивление грунта сдвигу (первый член этой формулы), тогда как на вязкое сопротивление (второй член) σ_m не влияет. В формуле же (11.60), рассмотренной ранее Строгановым и Гречищевым, от σ_m зависят и предельное, и вязкое сопротивление.

Инвариантные диаграммы. Инвариантные диаграммы нелинейно-вязкого и пластично-вязкого течения, описываемого уравнениями (11.55) и (11.59) и вытекающими из них формулами (11.56)—(11.57) и (11.60)—(11.61), показаны на рис. 11.10. Функции $F(\tau_i)$, $\bar{F}(\tau_i)$, $\Phi(t)$ на этой диаграмме имеют следующие значения:

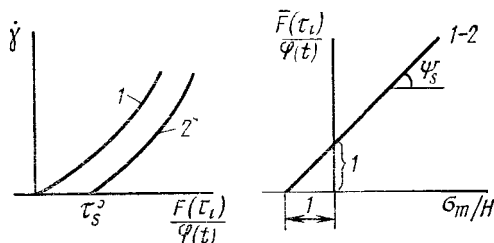


Рис. 11.10. Инвариантные диаграммы течения, соответствующие формулам:
1 — (11.55); 2 — (11.59)

для нелинейно-вязкого течения (рис. 11.10, а):
в формуле (11.55)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H(\dot{\gamma}_i, t)}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i^m}; \quad \Phi(t) = \eta_1(t);$$

в формуле (11.56)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H(\dot{\gamma}_i, t)}} = \tau_i - \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i^m}; \quad \Phi(t) = \eta_1(t);$$

в формуле (11.57)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \frac{\sigma_m}{H_s}}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i^m}; \quad \Phi(t) = \eta_1(t);$$

для нелинейного пластично-вязкого течения (рис. 11.10, б):
в формуле (11.59)

$$F(\tau_i) = \tau_i - \sigma_m \left(\frac{\tau_s^0}{H} + \eta_2 \dot{\gamma}_i^{m_1} \right); \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i - \eta_1 \dot{\gamma}_i^{m_1} - \eta_2 \sigma_m \dot{\gamma}_i^{m_1}}{\tau_s^0}; \quad \Phi(t) = 1;$$

в формуле (11.60)

$$F(\tau_i) = \frac{\tau_i}{1 + \sigma_m / H_s}; \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\tau_s^0 + \eta_1 \dot{\gamma}_i^{m_1}}; \quad \Phi(t) = 1;$$

в формуле (11.61)

$$F(\tau_i) = \tau_i - \tau_s \left(\frac{\sigma_m}{H_s} \right); \quad \bar{F}(\tau_i) = \frac{\tau_i - \eta_1 \dot{\gamma}_i^{m_1}}{\tau_s^0}; \quad \Phi(t) = 1.$$

§ 11.6. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Общий вид кинетического уравнения деформирования. Рассмотренные выше уравнения деформирования грунта с учетом влияния среднего нормального напряжения σ_m относились к феноменологическим теориям. Покажем, как учитывать влияние σ_m в уравнении (10.60) кинетической теории.

Для чистого сдвига это уравнение имеет вид

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\tau_0} (t+1)^{-n}, \quad (11.62)$$

где $n = \lambda_2 - \lambda_1 \tau / (\tau_0 - \tau)$; $t = t/t^*$ ($t^* = 1$) — время в безразмерной форме.

Для сложного напряженного состояния эту формулу можно представить в следующем виде:

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\tau_i}{\tau_0} (t+1)^{-n}, \quad (11.63)$$

или с учетом размерности t

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\tau_i}{\tau_0} \left(\frac{t}{t^*} + 1 \right)^{-n}, \quad (11.63')$$

где $n = \dot{\lambda}_2 - \lambda_1 \tau_i / (\tau_{s(0)} - \tau_i)$.

В свою очередь,

$$\tau_{s(0)} = \tau_{s(0)}^0 \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_{s(0)}} \right)^{\lambda_3}, \quad (11.64)$$

где $\tau_{s(0)}$ (или просто τ_0) — условно-мгновенный предел текучести грунта при сложном напряженном состоянии (сопротивление сдвигу на октаэдрической площадке); $\tau_{s(0)}^0$ (или τ_0^0) — тот же предел текучести при чистом сдвиге; $H_{s(0)}$ (или H_0) и λ_3 — параметры связности и упрочнения при условно-мгновенном сдвиге.

Во многих случаях $\lambda_3 = 1$; тогда $H_{s(0)} = \tau_{s(0)}^0 / \operatorname{tg} \Psi_{s(0)}$, где $\Psi_{s(0)}$ (или Ψ_0) — угол внутреннего трения на октаэдрической площадке. Подробнее об этих параметрах будет сказано в § 11.7.

Таким образом, в формулу деформирования (11.63) входят такие фундаментальные характеристики грунта, как его связность и угол внутреннего трения.

Опытные данные. Для проверки справедливости формулы (11.63) сопоставим подсчеты по этой формуле с опытными данными. Для этой цели используем данные экспериментов С. Р. Месчяна (1976), заключающиеся в испытании на ползучесть образцов глинистого грунта полутвердой консистенции (структура нарушенная, $W = 32,9\%$).

Опыты выполнялись на приборе, позволяющем осуществлять скручивание цилиндрических образцов ($r=50,5$ мм, $h=24$ мм) с одновременным воздействием вертикального давления σ_z , причем образец заключали в обойму из набора колец, не препятствующих скручиванию (сдвигу), но не допускающих бокового расширения грунта [23]. Испытано было три серии образцов при различных вертикальных нагрузках $\sigma_z=3,0-5,0-8,0 \cdot 10^5$ Па. В каждой серии испытывалось по три образца под различными постоянными скручивающими нагрузками, составляющими определенную долю от стандартной прочности: отношение приложенного крутящего момента к моменту, вызывающему разрушение при стандартном закружении $M/M_{ст}$, равнялось во всех сериях 0,3; 0,6; 0,8.

Значения касательного напряжения τ в допредельном состоянии и стандартного сопротивления сдвигу $\tau_{ст}$ были определены по формулам

$$\tau = \frac{1}{2\pi r^3} \left(3M + \gamma \frac{dM}{d\gamma} \right); \quad \tau_{ст} = \frac{3M_{ст}}{2\pi r^3}, \quad (11.65)$$

где γ — угловая деформация.

Интенсивности касательных напряжений и среднее нормальное напряжение вычислялись по формулам

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{2(1-\xi)^2 \sigma_z^2 + 6\tau^2}; \quad \sigma_m = \frac{1+2\xi}{3} \sigma_z, \quad (11.66)$$

где $\xi = \nu/(1-\nu)$.

Приняв для рассматриваемого грунта $\nu=0,3$, получим:

$$\tau_i = \sqrt{0,11\sigma_z^2 + \tau^2}; \quad \sigma_m = 0,62\sigma_z. \quad (11.67)$$

Значения предельно-длительного $\tau_{s(\infty)}$ и условно-мгновенного $\tau_{s(0)}$ сопротивления сдвигу принимаем для рассматриваемых опытов равными: $\tau_{s(\infty)} = \tau_{ст}$, $\tau_{s(0)} = 2\tau_{s(\infty)}$. Например, для $\sigma_z = 5 \cdot 10^5$ Па и $M/M_{ст} = 0,3-0,6-0,8$ имеем $\tau = 0,7-1,19-1,93 \cdot 10^5$ Па, $\tau_i = 1,8-2,04-2,35 \cdot 10^5$ Па, $\tau_{s(0)} = 4,82 \cdot 10^5$ Па. Результаты испытаний для этой серии опытов приведены на рис. 11.11.

Обработка опытных данных. Эту обработку в соответствии с формулой (11.63) и определение входящих в эту формулу параметров целесообразно вести аналогично тому, как было показано в § 10.8.

Приняв, что $t/t^* \gg 1$, приведем формулу (11.63) к более простому виду:

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\tau_i}{\eta_0^*} t^{-n}. \quad (11.68)$$

где $\eta_0^* = \eta_0/(t^*)^{-n}$.

Отметим, что, как следует из условий испытания, $\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}$, хотя $\gamma_i \neq \gamma$.

Значения параметров n и η_0 уравнения (11.68) можем определить, преобразовав последнее к линейному виду:

$$\ln(\dot{\gamma}_i/\tau_i) = \ln(1/\eta_0^*) - n \ln t \quad (11.69)$$

и нанеся опытные точки на график рис. 11.12, а, построенный в координатах $\ln(\dot{\gamma}_i/\tau_i) - \ln t$. (Отметим, что этот график является некоторым видоизменением графика 10.13, а.)

В результате получим семейство прямых, соответствующих различным τ_i ; углы наклона этих прямых определяют значения показателя степени $n(\tau_i)$, а отрезок на оси ординат — значение параметра η_0^* . Полученные для рассматриваемого примера опытные значения n приведены в табл. 11.1.

Рис. 11.11. Испытание глинистого грунта на ползучесть при кручении с одновременным воздействием вертикального давления σ_z при различных значениях скручивающего момента:

1 — $M/M_{сг} = 0,3$; 2 — $M/M_{сг} = 0,6$; 3 — $M/M_{сг} = 0,8$. Точки — экспериментальные данные; сплошные кривые построены в результате вычислений по формуле (11.63)

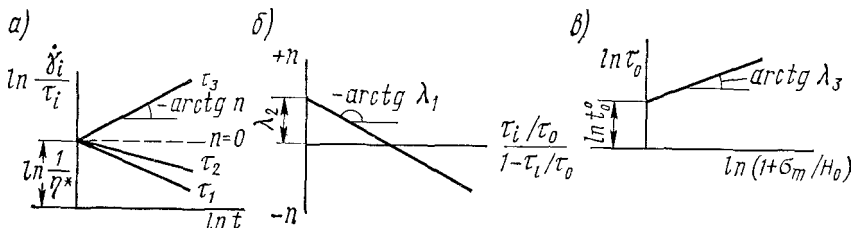
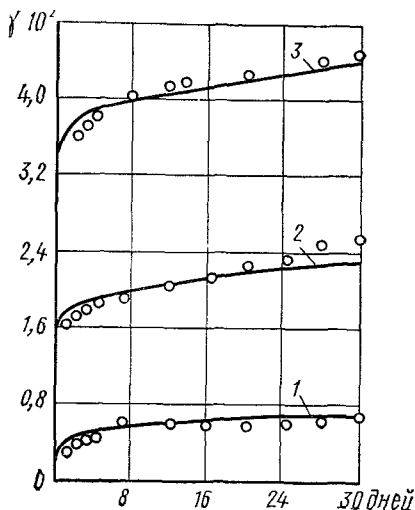


Рис. 11.12. Обработка опытных данных в соответствии с формулой (11.68): а — график для определения параметров n и η_0^* формулы (11.68); б — то же, параметров λ_1 и λ_2 формулы (11.64); в — то же, параметров τ_0^* , H и λ_3 формулы (11.64)

Как видно, показатель степени n существенно зависит от величины напряжения, что вытекает из физического смысла этого параметра:

$$n = \lambda_2 - \lambda_1 \frac{\tau_i}{\tau_{s(0)} - \tau_i} \quad (11.70)$$

В то же время при одних и тех же соотношениях $\tau_i/\tau_{s(0)}$ показатель степени n не зависит от σ_m , что впервые было отмечено

Значения параметра n в формуле (11.68)

$M/M_{ст}$	σ_z , Па					
	$3,0 \cdot 10^5$		$5,0 \cdot 10^5$		$8,0 \cdot 10^5$	
	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные	опытные	вычисленные
0,3	0,71	0,86	0,87	0,78	1,23	0,77
0,6	0,36	0,70	0,41	0,64	0,64	0,65
0,8	0,5	0,44	0,53	0,40	0,38	0,44

С. Р. Месчаном [38]. Действительно, с учетом (11.64) имеем

$$\tau_i/\tau_{s(0)} = \frac{\tau_i}{\tau_{s(0)}^0} \left[1 + \frac{\sigma_m}{H_{s(0)}} \right]^{-\lambda_2},$$

а при $\tau_i/\tau_{s(0)} = \text{const}$ получим

$$n = \lambda_2 - \lambda_1 \left(\frac{\tau_i/\tau_{s(0)}}{1 - \tau_i/\tau_{s(0)}} \right) = \text{const}.$$

Определение параметров соотношений (11.70) и (11.64). С помощью выражения (11.70) можно откорректировать полученные значения n и определить входящие в него параметры λ_1 и λ_2 . Для этого построим график в координатах $n - \frac{\tau_i/\tau_{s(0)}}{1 - \tau_i/\tau_{s(0)}}$

(рис. 11.12, б), позволяющий определить λ_1 и λ_2 аналогично тому, как это было показано на рис. 10.14, б, и вычислить параметр для любого уровня напряжения. Вычисленные таким путем значения параметра n приведены в табл. 11.1.

В рассматриваемом примере мы определяли значение мгновенной прочности $\tau_{s(0)}$ по опытным данным. Если же такие данные отсутствуют, $\tau_{s(0)}$ можно вычислить по формуле (10.72).

Зависимость $\tau_{s(0)}$ от σ_m определяют в соответствии с формулой (11.64) путем построения графика в координатах $\ln \tau_{s(0)} - \ln (1 + \sigma_m/H_{s(0)})$ (рис. 11.12, в); способ предварительного определения величины $H_{s(0)}$ рассмотрен при анализе формулы (11.49). При $\lambda_3 = 1$ график на рис. 11.12, в приводят к обычному графику сдвига в координатах $\tau_{s(0)} - \sigma_m$, откуда непосредственно находят параметры $H_{s(0)}$ и $\Psi_{s(0)}$.

Сопоставление теоретических и опытных данных. Окончательно расчетные значения параметра n уравнения (11.63) принимают с учетом сделанной корректировки.

Уравнения деформирования, получающиеся путем интегрирования (11.63), будут иметь вид, аналогичный (10.73), (10.74) и (10.75):

$$\gamma_i = \gamma_{i(0)} + \frac{\tau_i}{\eta_0^* (1-n)} t^{1-n} \text{ при } n < 1; \quad (11.71)$$

$$\gamma_i = \gamma_{i(0)} + \frac{\tau_i}{\eta_0^*} \ln t \text{ при } n = 1; \quad (11.72)$$

$$\gamma_i = \gamma_{i(\infty)} - \frac{\tau_i}{\eta_0^* (n-1)} t^{1-n} \text{ при } n > 1. \quad (11.73)$$

Теоретические кривые, построенные по этим формулам для одного из рассмотренных примеров ($\sigma_z = 5 \cdot 10^5$ Па), нанесены на график, построенный по опытным данным на рис. 11.11. Аналогичный вид имели кривые и при других значениях σ_z .

Для конечной проверки приемлемости формулы (11.63) нужно сопоставить опытные и аналитические значения γ_i , вычисленные по формулам (11.71)–(11.73), сведенным в один обобщенный график для всех τ_i (при любом σ_m).

Такой график, построенный по данным испытания (проведенного С. Р. Месчаном) глинистого грунта на кручение при относительном крутящем моменте $M/M_{ст}$ и при воздействии вертикальной нагрузки σ_z представлен на рис. 11.13. Точки 1, 2, 3, ... соответствуют значениям σ_z , указанным в таблице 11.2.

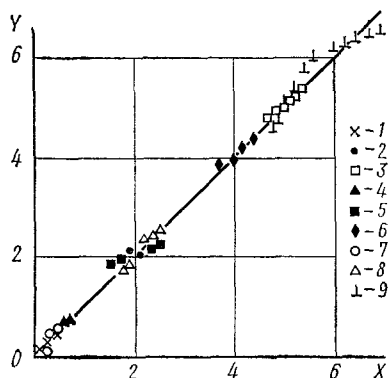


Рис. 11.13. Спрявление кривых ползучести в обобщенных координатах

Таблица 11.2

$M/M_{ст}$	σ_z , Па		
	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$
0,3	1	4	7
0,6	2	5	8
0,8	3	6	9

Как видно из этого графика, по оси ординат которого отложены вычисленные значения $Y = \gamma_{i(выч)} \cdot 10^2$, а по оси абсцисс — опытные: $X = \gamma_{i(опыт)} \cdot 10^2$, все опытные точки кучно легли на биссектрису угла $X = Y$, что свидетельствует об удовлетворительном совпадении опытных и вычисленных данных.

§ 11.7. УРАВНЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ГРУНТА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Уравнение предельного напряженного состояния. Общий вид этого уравнения в форме соотношения (11.9) был получен в предположении, что переход грунта в предельно напряженное состояние наступает при достижении интенсивностью деформаций сдвига некоторого критического значения $\gamma_i = \gamma_s$. Очевидно, что в условиях ползучести это значение будет достигнуто в некоторое время, что и отображено введением t в соотношение (11.9).

Графически условие предельно напряженного состояния отображается предельной кривой $\tau_i - \sigma_m$ для γ_s (см. рис. 11.4, б). Очевидно, что такая кривая будет соответствовать данному моменту времени t_j . Если же надо рассмотреть ряд моментов $t_1, t_2, t_3, \dots$, то получают семейство предельных кривых $\tau_i - \sigma_m$ (рис. 11.14, б). Изменение же значений τ_s в интервале времени $0 \leq t < \infty$ определится семейством кривых длительной прочности, каждая из которых будет отвечать своему значению σ_m (рис. 11.14, а).

Кривые длительной прочности, изображенные на рис. 11.14, а, можно получить по результатам

испытаний не менее трех серий идентичных образцов на ползучесть при сложном напряженном состоянии, при этом в каждой серии образцы испытывают при одном и том же значении σ_m , но при различных τ_i с доведением испытания до разрушения. Обработку опытных данных для каждого значения σ_m ведут по схеме на рис. 9.1. Случай $\sigma_m = 0$ соответствует сопротивлению чистому сдвигу.

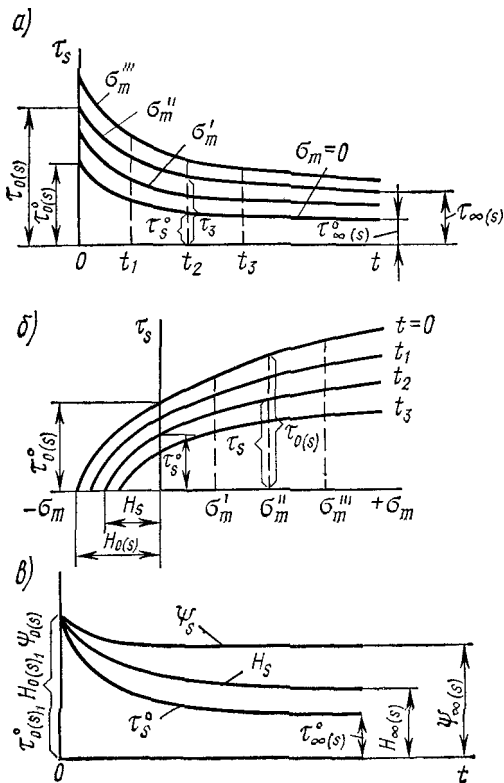


Рис. 11.14. Диаграмма предельного состояния с учетом фактора времени:

а — кривые длительной прочности при различных σ_m ; б — огибающие кривые $\tau_s - \sigma_m$ для разных t , в — кривые изменения во времени параметров прочности

Перестроив кривые τ_s-t в координатах $\tau_s-\sigma_m$, получают семейство огибающих кривых для различных моментов времени t , как это было показано на рис. 11.14, а.

Уравнение длительной прочности грунта и уравнение предельного состояния. Уравнение длительной прочности с учетом влияния σ_m можно получить из уравнений ползучести, включающих в себя σ_m (см. § 11.4), путем перехода к предельному значению деформации $\gamma_i = \gamma_s = \text{const}$.

Полученное соотношение явится одновременно уравнением предельного состояния с учетом фактора времени. Так, положив $\gamma_i = \gamma_s = \text{const}$ в формуле (11.45), будем иметь

$$\tau_s = [H_s(t) + \sigma_m] \operatorname{tg} \Psi_s(t), \quad (11.74)$$

что соответствует уравнению предельного состояния (4.22). Мизеса — Боткина с той, однако, разницей, что параметры: $H_s(t)$ — связность, $\Psi_s(t)$ — угол трения на октаэдрической площадке и $\tau_s^0(t)$ — предел текучести при чистом сдвиге являются переменными во времени.

Эти параметры изменяются от условно-мгновенных значений (при $t=0$) $\tau_{s(0)}^0$, $H_{s(0)}$, $\Psi_{s(0)}$ до предельно-длительных (при $t \rightarrow \infty$) $\tau_{s(\infty)}^0$, $H_{s(\infty)}$, $\Psi_{s(\infty)}$ (рис. 11.14, в).

Закономерность изменения во времени параметров τ_s^0 и $\operatorname{tg} \Psi_s$ можно принять аналогичной закономерностям длительной прочности, рассмотренным в гл. 9. В частности, в соответствии с (9.22') получим:

$$\tau_s^0 = \frac{\beta_1}{\ln(t/T_1)}; \operatorname{tg} \Psi_s = \frac{\beta_2}{\ln(t/T_2)}; H_s = \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\ln(t/T_2)}{\ln(t/T_1)}. \quad (11.75)$$

Рассмотрим частные случаи зависимости (11.74) в соответствии со схемами, показанными на рис. 11.8. Если $\Psi_s = \text{const}$, то

$$\tau_s = [H_s(t) + \sigma_m] \operatorname{tg} \Psi_s = \tau_s^0(t) + \sigma_m \operatorname{tg} \Psi_s, \quad (11.76)$$

$$\text{где } \tau_s^0(t) = \frac{\beta_1}{\ln(t/T_1)}, \quad H_s(t) = \frac{\beta_1}{\operatorname{tg} \Psi_s} \frac{1}{\ln(t/T_1)}.$$

При $H_s = \text{const}$

$$\tau_s = [H_s + \sigma_m] \operatorname{tg} \Psi_s(t) = \tau_s^0(t) \left[1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right], \quad (11.77)$$

$$\text{где } \tau_s^0(t) = \frac{\beta_1}{\ln(t/T)}; \operatorname{tg} \Psi_s = \frac{\beta_2}{\ln(t/T_2)}; H_s = \beta_1/\beta_2 = \text{const}.$$

К виду, подобному (11.77), но в более общей, нелинейной форме, приводит уравнение (11.49), которое при $\gamma_i = \gamma_s$, по данным С. Э. Городецкого, принимает вид

$$\tau_s = \tau_s^0(t) \left[1 + \frac{\sigma_m}{H_s} \right]^{\lambda_s}, \quad (11.78)$$

$$\text{где по-прежнему } \tau_s^0 = \frac{\beta_1}{\ln(t/T_1)}; H_s = \text{const}.$$

Дробно-линейная зависимость (11.50) переходит в предельное соотношение при $\gamma_i \rightarrow \infty$, в результате чего

$$\tau_s = \frac{\tau_{s(0)}(T + t)}{T + \frac{\tau_{s(0)}}{\tau_{s(\infty)}} t}, \quad (11.79)$$

где в соответствии с (11.52) $\tau_{s(0)} = (H_s + \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi_0$; $\tau_{s(\infty)} = (H_\infty + \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi_\infty$.

Сопоставив рассмотренные выше формулы, отдаем предпочтение простейшей из них — формуле (11.76), тем более что условие независимости угла трения Ψ от времени воздействия нагрузки хорошо соответствует опытным данным. В тех случаях, когда диаграмма предельного состояния явно нелинейна, рекомендуется пользоваться формулой (11.78).

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ



В гл. 11 было показано, что процесс деформирования грунтов обуславливается воздействием всех трех инвариантов тензора напряжений, и было исследовано влияние первого и второго инвариантов на деформацию сдвига. Ниже будет рассмотрено взаимное влияние этих двух инвариантов на развитие объемных деформаций. Кроме того, будет исследовано влияние третьего инварианта и некоторых других факторов на процесс деформирования грунта в целом.

§ 12.1. ДИЛАТАНСИЯ

Опыты Рейнольдса. Проводя опыты с песком, О. Рейнольдс еще в 1885 г. обнаружил факт изменения объема под воздействием простого сдвига. Он назвал это явление дилатансией (dilatancy) * и объяснил его переупаковкой частиц песка при сдвиге, проиллюстрировав такую переупаковку известной моделью в виде уложенных различным образом шаров.

При неплотной укладке шаров (каждый шар касается только четырех соседних) в результате сдвига шары примут более плотную упаковку (каждый шар будет соприкасаться уже с шестью соседними шарами) и объем фигуры, сложенный из шаров, уменьшится. И, наоборот, если начальная укладка шаров была плотной, то при сдвиге она изменится на неплотную, вследствие чего объем увеличится. Аналогично, сдвиг сыпучего грунта, имеющего плотную упаковку, приводит к разрыхлению, а имеющего рыхлую упаковку — к уплотнению.

Дилатансия проявляется как при упругом, так и при пластическом и при вязком деформировании, причем во всех случаях она может быть положительной (уплотнение) и отрицательной (разрыхление). Упругая отрицательная дилатансия по Рейнеру [32, 33] описывается уравнением

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_m}{3k} - \frac{v_i^2}{\delta}, \quad (12.1)$$

* Иногда применяют термин «дилатация».

где $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_m$ — объемная деформация; k — модуль объемной деформации; δ — модуль объемной дилатансии.

Дилатансия глинистых грунтов. Положительную дилатансию неуплотненных (свежевыпавших) глинистых грунтов с исходной структурой типа карточного или книжного домика можно объяснить перестройкой этой структуры, когда под воздействием сдвига хаотически ориентированные частицы переупаковываются, стремясь занять параллельное, т. е. более компактное, расположение, что и приводит к уменьшению объема.

Перестройкой структуры объясняется явление дилатансии также и в плотных глинах, поскольку и в таких грунтах деформации сдвига приводят к изменению характера расположения частиц. Основную роль при этом играет изменение под воздействием сдвига плотности дефектов.

На основе экспериментов, проведенных в МГУ, Е. П. Шушерина (сб. «Мерзлотные исследования», МГУ, вып. V, 1966) показала, что уменьшение объема плотного грунта происходит в результате сокращения количества дефектов — микротрещин и т. п., а увеличение объема — в результате их развития. Первое из рассмотренных явлений происходит при затухающей ползучести, второе — при незатухающей. В стадии же установившегося течения развитие дефектов компенсируется их «залечиванием» и объемные изменения не происходят. Эти явления были подробно рассмотрены в гл. 10.

Поскольку накопление дефектов приводит к разрушению грунта, то можно утверждать, что процесс его разрушения непосредственно связан с явлением отрицательной дилатансии. Действительно, если проводить опыты в условиях, не допускающих развития дефектов структуры грунта и связанного с этим объемного разрыхления, то разрушение грунта окажется затрудненным, а иногда и невозможным.

Соответственно возможность разрушения существенно зависит от вида напряженного состояния, определяясь соотношением девиаторной и шаровой частей тензора напряжений. Примером может служить испытание на трехосное сжатие: по мере увеличения отношения σ_m/τ_i разрушение образца становится все более затрудненным, а в условиях гидростатического давления ($\sigma_m = p$, $\tau_i = 0$) — вообще невозможным.

Общий вид уравнения объемного деформирования грунта. Общий вид этого уравнения представлен соотношением (11.1), в котором объемная деформация выражена как функция всех трех инвариантов тензора напряжений и времени. Вопрос о влиянии третьего инварианта будет рассмотрен в дальнейшем. Здесь же ограничимся исследованием взаимного влияния первого и второго инвариантов, выражая их, как и в (11.6), через величины σ_m и τ_i .

Следуя М. Рейнеру [32], объемную деформацию грунта представим в виде суммы:

$$\epsilon_V = \epsilon_V^0 \pm \epsilon_V^D \quad \text{или} \quad \epsilon_m = \epsilon_m^0 \pm \epsilon_m^D, \quad (12.2)$$

где $\epsilon_V^0 = 3\epsilon_m^0$ — объемная деформация, вызванная шаровым тензором напряжений (всесторонним давлением σ_m); $\epsilon_V^D = 3\epsilon_m^D$ — объемная деформация, вызванная воздействием девиатора напряжений (интенсивностью касательных напряжений τ_i); знак « $\pm$ » в этом выражении указывает на возможность как уплотнения, так и разрыхления грунта.

Величина ϵ_V^0 является функцией только σ_m :

$$\epsilon_V^0 = f_1^*(\sigma_m). \quad (12.3)$$

Величина ϵ_m^D , как будет показано далее, зависит от деформации сдвига:

$$\epsilon_V^D = \lambda \gamma_i, \quad (12.4)$$

где λ — коэффициент дилатансии. Поскольку деформация сдвига γ_i , в свою очередь, зависит от интенсивности касательных напряжений τ_i и от среднего нормального напряжения σ_m , то

$$\epsilon_V^D = f_2^*(\tau_i, \sigma_m). \quad (12.5)$$

Подставив (12.3) и (12.5) в равенство (12.2), получим уравнение объемного деформирования в общем виде:

$$\epsilon_m = f_1^*(\sigma_m, t) \pm f_2^*(\sigma_m, \tau_i, t). \quad (12.6)$$

Отметим, что уравнение (12.1) является частным случаем (12.6).

Очевидно, что степень влияния сдвиговых напряжений на объемную деформацию зависит от соотношения девиаторной и шаровой части тензора напряжений, и если последняя существенно преобладает, то влиянием сдвигового напряжения на объемную деформацию можно пренебречь. Для таких случаев можно принять, как это предложил А. А. Григорян (1960; 1964), что связь между сдвиговыми напряжениями и деформациями является линейной, а между плотностью грунта и всесторонним давлением — нелинейной.

Коэффициент дилатансии. Этот коэффициент λ , приведенный в выражении (12.4), является коэффициентом пропорциональности между приращением объемной деформации, вызываемым девиатором напряжений, и сдвиговой деформации: $\lambda = \epsilon_m^D / \gamma_i$.

Коэффициент дилатансии используют в уравнениях деформационной теории пластичности. В теории же течения пользуются понятием скорости дилатансии, определяемой коэффициентом пропорциональности между скоростями пластической объемной деформации и сдвиговой деформации $\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_m^D / \dot{\gamma}_i$.

Г. И. Ломизе и Е. И. Сухановым на основе опытов, проведенных в МИСИ (1973), было показано, что коэффициент дилатансии $\dot{\lambda}$ зависит от траектории загрузки; при переходе же грунта в предельное состояние этот коэффициент принимает постоянное значение: $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_s = \text{const}$.

Иногда вместо величины $\dot{\lambda}$ оперируют с углом дилатансии ν , таким, что $2\dot{\lambda} = \sin \nu$. Была сделана попытка найти связь между

углом дилатансии и углом внутреннего трения грунта. Согласно ассоциированному закону, должно быть справедливым равенство $v = \varphi$. Однако опытами это равенство не подтверждается.

Явление дилатансии хорошо иллюстрируется с помощью модели Р. Роу (1962), являющейся развитием модели Рейнольдса. Рассматривая деформирование кубической и ромбической упаковки шаров, Роу получил следующие выражения, определяющие соотношения между главными напряжениями и скоростями главных деформаций:

$$\sigma_1/\sigma_3 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\beta + \varphi); \quad \dot{\epsilon}_3/\dot{\epsilon}_1 = A \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad (12.7)$$

где α — угол, определяющий геометрию укладки шаров; β — угол отклонения плоскости скольжения шара от одной из главных осей напряжений; A — коэффициент, зависящий от типа упаковки.

Определив критическое значение угла сдвига между частицами $\beta = (\pi/4 - \varphi/2)$, получим связь между углом внутреннего трения φ и углом дилатансии v [56]:

$$\sin \varphi = \frac{(k-1) + (k+1) \sin v}{(k+1) + (k-1) \sin v}, \quad (12.8)$$

где $k = \operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi/2)$.

Дилатансионная теория деформирования Роу была проверена экспериментально им самим, а также Барденом и Хайтом, Ли и другими учеными. Хорн в 1965 г. распространил эту модель на сыпучие материалы с хаотической упаковкой сферических частиц и рассмотрел эффекты анизотропии. В то же время теория Роу была подвергнута критике со стороны ряда авторов (Моргенштерн, Роскоу, Троллу), высказавших сомнения в достоверности предложенного механизма деформирования.

Вопрос о дилатансии и связанный с ним вопрос о потенциале пластичности подробно рассмотрены в обзорных работах [27, 56, 57]. Отметим, что в работе [27] приведено условие предельного состояния с учетом дилатансии, которое получается из предположений, сформулированных ниже.

Выразив приращение пластической деформации через пластический потенциал:

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

и введя в это выражение условие пластичности Мизеса — Боткина, а также условие дилатансии в виде $\dot{\epsilon}_m - \dot{\lambda} \gamma_i = \epsilon_m - \epsilon_m^D = 0$, В. Н. Никольский получил условие предельного состояния в форме

$$\tau_i^2 - \dot{\lambda} (\sigma_m + H)^2 \operatorname{tg} \Psi = \tau_i (\sigma_m + H) (\operatorname{tg} \Psi - \dot{\lambda}). \quad (12.9)$$

При $\dot{\lambda} = 0$ формула (12.9) переходит в условие Мизеса — Боткина. Связь между углом дилатансии v и углом внутреннего трения грунта φ выражается равенством $\varphi = 2\varphi_m + v$, где φ_m — константа, определяемая как угол трения между отдельными частицами грун-

та, а φ — угол трения грунтовой среды в целом, определяемый обычными методами.

Дилатансия как следствие различия в сопротивлении грунта растяжению и сжатию. На основе простейшего анализа можно показать, что объемные деформации при сдвиге возникают вследствие различия в сопротивлении грунта растяжению и сжатию.

Действительно, рассмотрим случай, когда единичный кубический объем подвергается воздействию равных по величине сжимающего и растягивающего напряжений $\sigma_{сж} = \sigma_p = \sigma$ (рис. 12.1). В этом случае произойдет чистый сдвиг, и если модуль сжатия $E_{сж}$ и модуль растяжения E_p равны, то изменится только форма куба без изменения его объема. Если же модули деформаций не равны (например, $E_{сж} > E_p$), то деформации растяжения и сжатия также окажутся различными, что и приведет к изменению объема:

$$\epsilon_{сж} - \epsilon_p = \frac{\sigma_{сж}}{E_{сж}} - \frac{\sigma_p}{E_p} = -\frac{\Delta V}{V}.$$

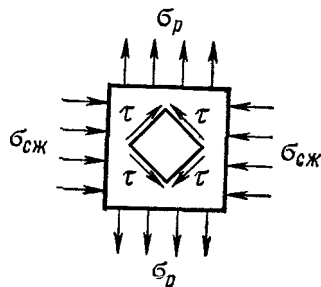


Рис. 12.1. Схема чистого сдвига

Опытные данные. Явление дилатансии подтверждено большим количеством опытных данных; некоторые из них приведены на рис. 12.2. На графике а изображена связь между осевыми ϵ_1 и объемными $\epsilon_m = \epsilon_v/3$ деформациями при трехосном сжатии песка различной пористости e при постоянном значении $\sigma_2 = \sigma_3$.

Как видно, увеличение осевой деформации привело сначала к уплотнению грунта, которое, однако, при дальнейшем росте ϵ_1 сменилось интенсивным разрыхлением — тем большим, чем меньше пористость грунта.

Аналогичная зависимость наблюдается между сдвиговым напряжением τ_i и объемной деформацией, что иллюстрируется графиком б, построенным по опытам с мерзлыми грунтами. Вначале увеличение τ_i приводит к уплотнению грунта, но после достижения объемной деформацией некоторого максимального значения дальнейшее увеличение напряжения вызывает разрыхление грунта.

Приведенные опытные данные хорошо подтверждают представления объемной деформации в виде суммы (12.2). Согласно (12.5), составляющая ϵ_m^D этой суммы, т. е. дилатансионная часть объемной деформации, есть функция как τ_i , так и σ_m . Для песка эту функцию можно принять в виде

$$\epsilon_m^D = f^* \left(\frac{\tau_i}{\sigma_m} \right), \quad (12.10)$$

что подтверждается графиком на рис. 12.2, в, полученным С. Муромой (опубликован в работе [51]), и графиком на рис. 12.2, г, полученным Г. И. Ломизе и А. Л. Крыжановским [18]. Из этих гра-

фиков следует, что все опытные точки для самых различных значений τ_i и σ_m хорошо ложатся на единую кривую, построенную в координатах $\epsilon_m - \tau_i/\sigma_m$. Отметим, что разрыхление грунта может возникать как с самого начала загрузки (график *в*), так и лишь при больших значениях τ_i — в последнем случае разрыхлению предшествует уплотнение (график *г*). Такое различие объясняется величиной начальной пористости грунта.

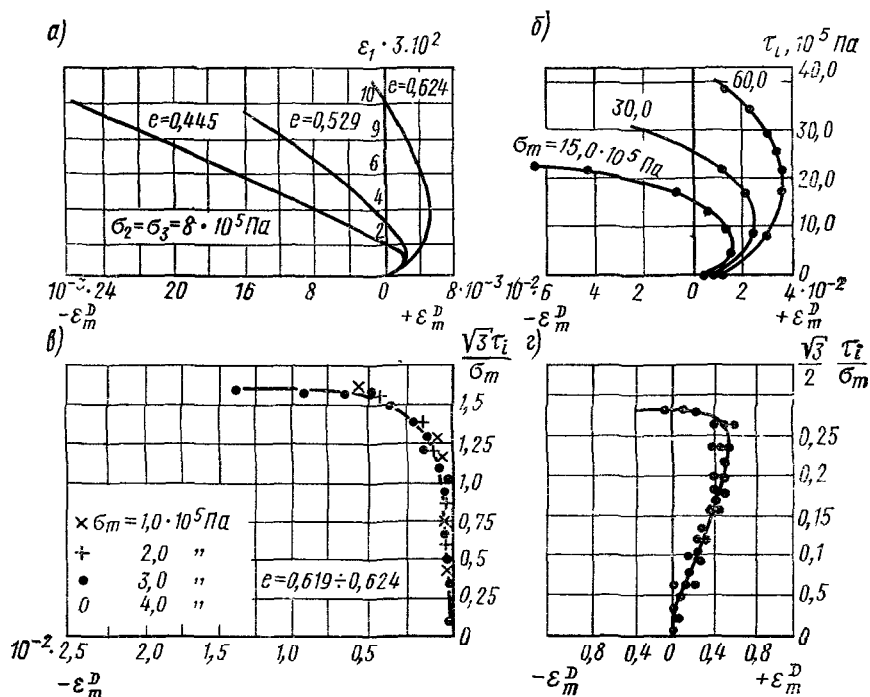


Рис. 12.2. Зависимость объемной деформации ϵ_m от интенсивности касательных напряжений τ_i :

а — связь между ϵ_m и τ_i при трехосном сжатии песка различной плотности (опыты Строганова); б — связь между ϵ_m и τ_i при трехосном сжатии мерзлой супеси при различных $\sigma_m = \text{const}$ (опыты Городецкого); в — связь между ϵ_m и τ_i/σ_m при трехосном сжатии песка (опыты Муромы); г — то же (опыты Ломизе и Крыжановского). Масштаб деформаций увеличен в $3 \cdot 10^2$ раз.

Для связных грунтов зависимость объемной деформации от τ_i и σ_m будет более сложной. В простейшем случае можно принять

$$\epsilon_m^D = f^* \left(\frac{\tau_i}{\sigma_m + H} \right). \quad (12.11)$$

Тогда выражение (12.6) для фиксированного значения t получит вид

$$\epsilon_m = f_1^*(\sigma_m) \pm f_2^* \left(\frac{\tau_i}{\sigma_m + H} \right). \quad (12.12)$$

С. Э. Городецким (1969, 1975) предложена более общая зависимость

$$\varepsilon_m = f_1^*(\sigma_m) \pm f_2^*(\sigma_m) \tau_i - f_3^*(\sigma_m) \tau_i^2. \quad (12.13)$$

Выражение (12.13) хорошо иллюстрируется кривыми на рис. 12.2, б. При $\tau_i = 0$ происходит только деформация $\varepsilon_m^0 = f_1^*(\sigma_m)$ от всестороннего давления; она отображается отрезком на оси абсцисс графика б. Деформация ε_m^D , описываемая вторым и третьим членами правой части формулы (12.13), графически выражена кривыми $\varepsilon_m - \tau_i$, смещенными к оси координат на величину ε_m^0 . При этом член $f_3^*(\sigma_m) \tau_i^2$ отображает разрыхление, тогда как член $f_2^*(\sigma_m) \tau_i$ характеризует или разрыхление (знак минус), или добавочное уплотнение (знак плюс).

Положительный или отрицательный знак дилатансии зависит от исходной пористости (плотности) грунта. А. Казагранде ввел важное понятие критической плотности $\rho_{кр}$ грунта. Если начальная плотность ρ_0 равна критической, то объем грунта при сдвиге не меняется. При $\rho_0 > \rho_{кр}$ грунт является переуплотненным и при сдвиге будет разрыхляться. При $\rho_0 < \rho_{кр}$ грунт считается рыхлым и при сдвиге станет уплотняться. Однако уплотнение его будет происходить лишь до достижения плотностью критического значения, после чего начнется разрыхление.

Изложенные закономерности можно схематизировать в виде графика рис. 12.3. Огибающая кривая при $\tau_i = 0$ соответствует объемному деформированию ε_m^0 при всестороннем давлении. Кривые при $\tau_i > 0$ отображают суммарную объемную деформацию, вызванную как σ_m , так и τ_i . Соответственно разность величин $\varepsilon_m^0 - \varepsilon_m$ определит объемную деформацию ε_m^D , вызванную напряжением сдвига τ_i .

Дилатансия при ползучести. Дилатансия глинистых грунтов является функцией времени, развиваясь в процессе объемной ползучести.

На рис. 5.23 были изображены кривые, свидетельствующие о наличии дилатансии при одноосном сжатии. Аналогичный вид имеют и кривые объемной ползучести при трехосном сжатии, что хорошо иллюстрируется данными опытов, выполненным в НИИ оснований С. Э. Городецким («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1975, № 3) и представленных на рис. 12.4.

Как видно из графика а, при малых напряжениях сдвига τ_i (кривые 1—8) происходило только уменьшение объема грунта,

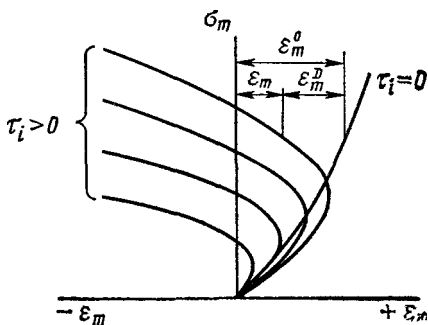


Рис. 12.3. График объемного деформирования

развивающееся во времени по затухающему закону. При больших же значениях τ_i грунт уплотнялся лишь в начальный момент, а затем он разрыхлялся — тем больше, чем больше величина τ_i . Соответственно кривые зависимости между τ_i и σ_m меняют во времени свой характер (рис. 12.4, б).

С учетом фактора времени зависимость (12.6) можно представить в виде

$$\epsilon_m = f_1^*(\sigma_m) \Phi_1^*(t) \mp f_2^*(\sigma_m, \tau_i) \Phi_2^*(t), \quad (12.14)$$

где $\Phi_1^*(t)$ — функция времени, имеющая во всех случаях затухающий характер; $\Phi_2^*(t)$ — функция времени, которая может иметь как затухающий характер (когда она описывает дополнительное уплотнение), так и незатухающий (если она описывает разрыхление).

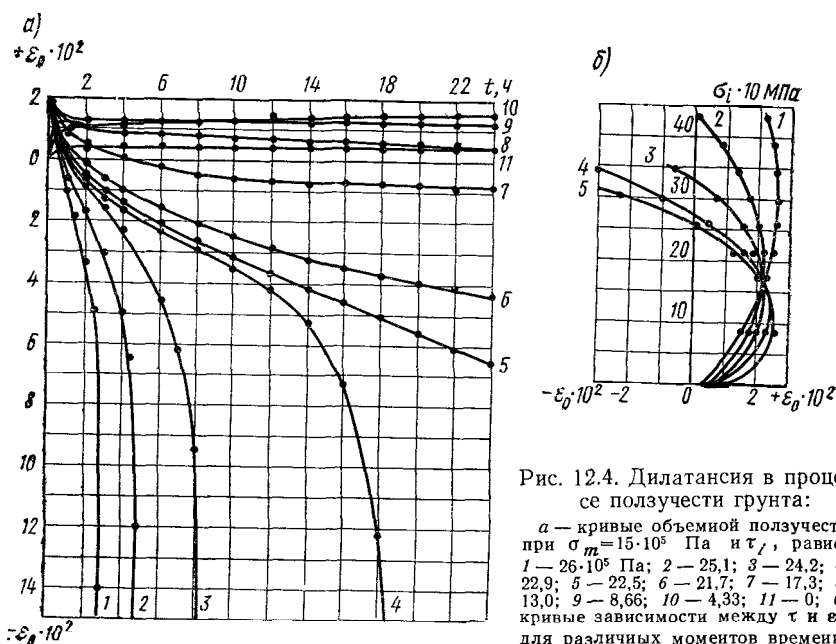


Рис. 12.4. Дилатансия в процессе ползучести грунта:

а — кривые объемной ползучести при $\sigma_m = 15 \cdot 10^5$ Па и τ_i , равном: 1 — 26,10⁵ Па; 2 — 25,1; 3 — 24,2; 4 — 22,9; 5 — 22,5; 6 — 21,7; 7 — 17,3; 8 — 13,0; 9 — 8,66; 10 — 4,33; 11 — 0; б — кривые зависимости между τ_i и ϵ_v для различных моментов времени t , равных: 1 — 15 мин; 2 — 1 ч; 3 — 4 ч; 4 — 12 ч; 5 — 24 ч. Испытание на трехосное сжатие, супесь мерзлая, $\theta = -1^\circ \text{C}$ (опыты Городецкого)

В статье Ю. К. Зарецкого и С. Э. Городецкого («Гидротехническое строительство», 1975, № 2) показано, что дилатансионная часть деформации объемной ползучести ϵ_m^D развивается синхронно сдвиговой деформации ползучести и если рассматривать разность между полной деформацией ползучести и деформацией неустановившейся ползучести, то для этой разности будет справедливым соотношение (12.4). При этом в допредельном состоянии коэффициент дилатансии является функцией τ_i и σ_m :

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\tau_{s(\infty)}^{1-\alpha}}{\tau_i} \quad \text{при } \tau_i < \tau_{s(\infty)}, \quad (12.15)$$

а в предельном — только σ_m :

$$\lambda = -\lambda_0 \tau_{s(\infty)}^{-\alpha} \quad \text{при } \tau_i > \tau_{s(\infty)}, \quad (12.15')$$

где $\tau_{s(\infty)} = \tau_{s(\infty)}^0 \left[1 + \frac{\sigma_m}{H} \right]$ — предельно-длительное сопротивление при сложном напряженном состоянии (см. § 11.6), $\tau_{s(\infty)}^0$ — предельно-длительное сопротивление грунта при чистом сдвиге.

Указанная запись отображает то установленное опытами обстоятельство, что при затухающей ползучести ($\tau_i < \tau_{s(\infty)}$) дилатансия является положительной (доуплотнение грунта), при $\tau_i = \tau_{s(\infty)}$ дилатансия отсутствует ($\lambda = 0$), а при прогрессирующем течении ($\tau_i > \tau_{s(\infty)}$) возникает отрицательная дилатансия (разрыхление). Физические причины этих явлений были пояснены ранее — они связаны с кинетикой развития дефектов структуры грунта.

§ 12.2. ВЛИЯНИЕ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Параметр Лоде как характеристика напряженного состояния. Ранее указывалось, что параметр Лоде для напряжений $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) : (\sigma_1 - \sigma_3)$, определяя соотношение между всеми тремя главными нормальными напряжениями, характеризует вид напряженного состояния тела.

Факт влияния параметра μ_σ на процесс деформирования грунта можно установить сопоставительными опытами при различных напряженных состояниях, каждому из которых соответствует свое значение параметра μ_σ .

Если опытные точки, полученные из испытаний грунта при различных μ_σ , находятся на одной кривой диаграммы зависимости между τ_i и γ_i , это означает, что связь между τ_i и γ_i не зависит от вида напряженного состояния. Если для разных μ_σ получают различные кривые $\tau_i - \gamma_i$, это будет означать, что вид напряженного состояния влияет на процесс деформирования. Подобные опыты целесообразно проводить на приборах типа, изображенных на рис. 11.1, б—д, позволяющих проводить испытания, изменяя μ_σ .

Опытные данные. На рис. 12.5 показаны данные испытаний суглинка природной структуры, проведенных в 1969 г. в МИСИ

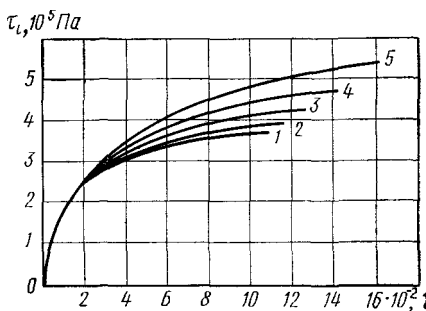


Рис. 12.5. Влияние вида напряженного состояния суглинка на зависимость между τ_i и γ_i :

1 — $\mu_\sigma = +1$; 2 — $\mu_\sigma = +0,5$; 3 — $\mu_\sigma = 0$; 4 — $\mu_\sigma = -0,5$; 5 — $\mu_\sigma = -1$ (опыты Ломизе и др.)

Г. И. Ломизе и сотрудниками [39] по схеме, изображенной на рис. 11.1, б, при различных значениях параметра Ломе.

Как видно, при сравнительно малых деформациях (до 2% в данном опыте) кривые для различных μ_σ сливаются, но затем начинают расходиться, причем степень этого расхождения увеличивается с ростом деформации. Это означает, что у грунтов процесс деформирования в определенной степени зависит от вида напряженного состояния. Учитывать такое влияние авторы предлагают путем введения в зависимость между напряжением и деформацией соотношения первого и третьего инвариантов в форме $(I_1^3/I_3)^\alpha$. Тогда уравнения состояния можно записать в следующем виде:

$$\gamma_l = f \left[\frac{\tau_l}{\sigma_m + H} \left(\frac{I_1^3}{I_3} \right)^\alpha \right]; \quad \epsilon_m = f_1^*(\sigma_m) \pm f_2^* \left[\frac{\tau_l}{\sigma_m + H} \left(\frac{I_1^3}{I_3} \right)^\alpha \right]. \quad (12.16)$$

Т. Чанг и Х. Ко [57], предположив, что плотность энергии деформации является функцией трех инвариантов тензора деформации $W = W(J_1, J_2, J_3)$, получили уравнение деформирования в виде

$$\sigma_{ij} = (2B_1J_1 + 2B_2J_1^2 + B_3J_2) \delta_{ij} + (B_4 + B_3J_1) \epsilon_{ij} + B_5 \epsilon_{il} \epsilon_{lj}, \quad (12.17)$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера, $i, j, l = 1, 2, 3$; B_{1-5} — параметры.

Влияние вида напряженного состояния на процесс деформирования грунта может быть объяснено различным его сопротивлением растяжению и сжатию. Действительно, закономерность деформирования $\epsilon_1 = \sigma_1/E$ будет идентичной для случаев одноосного сжатия ($\mu_\sigma = -1$) и растяжения ($\mu_\sigma = +1$) только тогда, когда $E_{сж} = E_r$. Если же $E_{сж} \neq E_r$, то получим две различные диаграммы деформирования.

Предельное состояние грунта. Возвращаясь к рис. 12.5, подчеркнем еще раз, что влияние вида напряженного состояния увеличивается по мере роста деформаций. Естественно, что в наибольшей степени это влияние будет сказываться при достижении предельного состояния. Рассмотрение указанного вопроса начнем с сопоставления условий предельного состояния по Морю — Кулону и Мизесу — Шлейхеру — Боткину. Условие Мора — Кулона описывается соотношением (4.12)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H) \sin \varphi, \quad (12.18)$$

где $H = c/\operatorname{tg} \varphi$,

а условие Мизеса — Боткина — соотношением (4.23)

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ = \sqrt{(2/3)} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3H) \operatorname{tg} \Psi, \end{aligned} \quad (12.19)$$

где $H = \tau_s^0/\operatorname{tg} \Psi$.

Как известно, параметры φ и Ψ имеют различные значения. Параметр φ есть угол внутреннего трения по Морю, определенный углом наклона прямой на диаграмме зависимости между касатель-

ным τ_n и нормальным σ_n напряжениями, действующими на площадке скольжения. Величина же Ψ определяется углом наклона прямой на диаграмме зависимости между интенсивностью касательных напряжений τ_i и средним нормальным напряжением σ_m , т. е. напряжений, действующих на октаэдрической площадке. Поэтому параметр Ψ часто рассматривают как угол внутреннего трения грунта на октаэдрической площадке. Параметр φ обычно используют при рассмотрении плоской задачи, а параметр Ψ — как плоской, так и пространственной.

Связь между характеристиками прочности по Мору c и φ и по Мизесу — Боткину H и Ψ зависит от вида испытаний грунта. Например, при трехосном сжатии $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$; подставив указанное условие в равенства (12.18) и (12.19) и исключив из них значения σ_1 и σ_3 , получим следующие известные соотношения:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}; \quad H = \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (12.20)$$

Так, А. И. Боткин, обработав данные испытания песка, которые были показаны на рис. 11.2, б, получил при обработке по Мору угол трения, равный $\varphi = 30^\circ 30'$, тогда как $\Psi = 34^\circ 30'$. Однако для глинистых грунтов по данным того же автора разница в величинах φ и Ψ значительно уменьшается.

В случае идеально связного грунта $\varphi = \Psi = 0$; тогда условия (11.18) и (11.19) переходят в условия Сен-Венана и Мизеса, которые различаются между собой только значениями c и τ_s . По Сен-Венану, как уже говорилось в гл. 3, $c = \tau_s = \sigma_s/2$, тогда как по Мизесу $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$, где σ_s — предел прочности (текучести) на сжатие.

Условие предельного состояния при разных значениях параметра μ_σ . Рассмотренные выше расхождения между параметрами прочности по теории Мора — Кулона и по теории Мизеса — Боткина вытекают из того, что первая не учитывает влияние промежуточного главного напряжения σ_2 , тогда как вторая рассматривает все три главных напряжения: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Вопросу влияния σ_2 был посвящен ряд экспериментальных исследований, подтвердивших, что состояние предельного равновесия существенно зависит от величины σ_2 . Степень влияния σ_2 можно выявить, проведя сопоставительные опыты при различных μ_σ , например, на трехосное раздавливание, когда $\sigma_2 = \sigma_3$ и $\mu_\sigma = -1$, на трехосное растяжение, когда $\sigma_2 = \sigma_1$ и $\mu_\sigma = +1$, и чистый сдвиг, когда $\mu_\sigma = 0$.

Оказывается, значения параметров прочности c и φ , получаемые из указанных испытаний, существенно различны. На рис. 12.6 приведены данные Д. Корнфордза («Geotechnique», 1964, № 2), относящиеся к опытам с песком различной плотности на трехосное сжатие при $\mu_\sigma = \pm 1$ и на сдвиг ($\mu_\sigma = 0$), а также данные испытаний песка при различных значениях μ_σ , проведенные различными исследователями и обработанные М. В. Малышевым («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1969, № 5).

На графиках нанесены значения угла внутреннего трения φ по Мору, вычисленные по данным испытаний при различных значениях параметра μ_σ . Если бы величина φ не зависела от вида испытания, то она для данного грунта оставалась бы постоянной для любых μ_σ . Но, как видим, с изменением μ_σ величина параметра φ существенно меняется.

Условие Мизеса — Боткина хотя и учитывает воздействие всех трех главных напряжений — $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, но тоже приводит к различ-

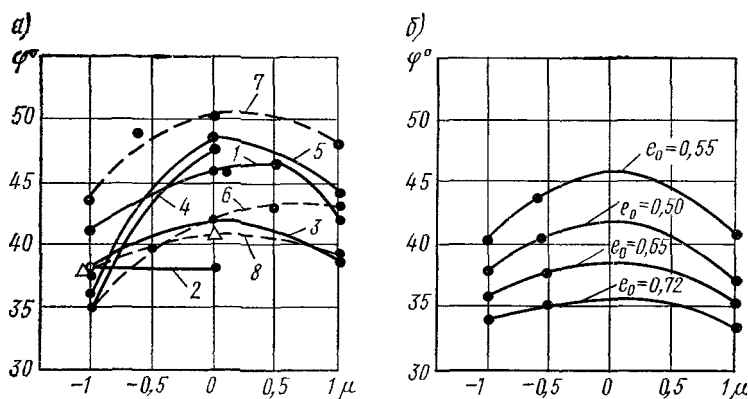


Рис. 12.6. Зависимость угла φ для песка различной плотности от вида напряженного состояния:

a — опыты различных исследователей, обработанные М. В. Малышевым: 1 — Малышев — Фрадис, $e=0,495$; 2 — Баршевский, $e=0,64$; 3 — Кирпатрик, $e=0,55$; 4 — Строганов, $e=0,56$; 5 — Ломизе — Крыжановский, $e=0,73$; 6 — Хон-Йин Ко и Смитт, $e=0,52$; 7—8 — Фрадис, $e=0,61$; б — опыты Корифордза при различных значениях e

ным результатам в зависимости от вида напряженного состояния. Опыты, проведенные в МИСИ Г. И. Ломизе с сотрудниками (1966—1975), свидетельствуют, что для песков величина Ψ зависит от μ_σ , что отображается графиком, аналогичным рис. 12.5. Данных же о глинистых грунтах пока недостаточно, но, по-видимому, для этих грунтов влияние вида испытаний сказывается в значительно меньшей степени.

Таким образом, в общем случае условия предельного состояния как Мора — Кулона (12.18), так и Мизеса — Шлейхера — Боткина (12.19) дают результаты, зависящие от вида напряженного состояния; соответственно величины параметров прочности φ и Ψ , входящих в эти условия, зависят от вида испытания. Это означает, что на диаграммах сдвига $\tau_n - \sigma_n$ (Мора — Кулона) и $\tau_i - \sigma_m$ (Мизеса — Боткина) мы получаем не единые прямые, а их семейства, каждая из которых соответствует данному значению μ_σ и имеет свой угол наклона: φ и Ψ . Следовательно, указанные условия являются недостаточными для описания предельного состояния грунтов в общем виде.

Обобщенные условия предельного состояния. Для получения инвариантного условия предельного равновесия необходимо в это условие ввести третий инвариант тензора напряжений I_3 или, что равносильно, параметр Лоде μ_σ , учитывающий влияние вида напряженного состояния. Иными словами, следует принимать общий вид записи условия предельного состояния в форме (11.3). Конкретные виды этой зависимости могут быть различными.

Г. А. Гениев («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1968, № 2) предложил следующую форму преобразования условия Мизеса — Боткина:

$$\tau_i = \operatorname{tg} \Psi (H + \sigma_m) (1 + k \cos \omega_\sigma), \quad (12.21)$$

где k — постоянная; $\cos 3\omega_\sigma = 3\sqrt{3}I_3 : 2(I_2)^{3/2}$.

Условие (12.21) дает предельную поверхность в виде треугольного конуса. Если принять, что этот конус описан вокруг шестигранной пирамиды Мора (рис. 12.7), то между параметрами прочности условия Гениева и условия Мора будет иметь место следующая связь:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Psi &= 6\sqrt{3} \sin \varphi / (9 - \sin^2 \varphi); \\ H &= c / \operatorname{tg} \varphi; \quad k = \sin \varphi / 3. \end{aligned}$$

Условие прочности, отображаемое формой конуса 3 на рис. 12.7, принималось также другими исследователями. Так, в обобщающем докладе [57] на VI Международном конгрессе по механике грунтов (1965) было рассмотрено аналогичное условие, предложенное Л. Барденом. На этом же конгрессе Т. Шибота и Д. Карубе изложили свой вариант подобного условия [55].

Г. М. Ломизе и А. Л. Крыжановский [17, 18] предложили записывать условие предельного состояния в следующем виде:

$$\tau_i = F(\sigma_m / N^a), \quad (12.22)$$

или в частном случае

$$\tau_i = (H + N^a \sigma_m) \operatorname{tg} \Psi, \quad (12.23)$$

где $N = I_3 / I_1^3$.

Предельная поверхность, описываемая условием (12.23), также имеет форму конуса, но только вписанного между двумя конусами Мизеса — Боткина, соответствующими крайним значениям $\mu_\sigma = \pm 1$ (см. рис. 12.7). Аналогичный вид предельной поверхности принимали Х. Ко и Д. Скотт [57].

Естественно, что учет влияния вида напряженного состояния усложняет как получение из опыта расчетных характеристик, так и

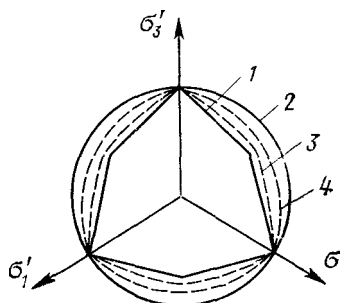


Рис. 12.7. Сечение предельной поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ девиаторной плоскостью для формул:

1 — (12.18); 2 — (12.19); 3 — (12.21);
4 — (12.23)

само решение задач. Поэтому лишь в особо важных случаях необходимо учитывать это влияние, причем следует иметь в виду, что влияние сказывается в большей степени для песков и в меньшей — для глин.

В целях упрощения расчетов влиянием вида напряженного состояния при решении обычных задач можно во многих случаях пренебречь. Для большей же достоверности получаемых из опыта расчетных характеристик их следует определять из таких испытаний, при которых напряженное состояние образца приближается к напряженному состоянию в натуре для данной задачи. Например, для задач, близких к осесимметричным (круглые, квадратные или близкие к ним в плане фундаменты, круглоцилиндрические подземные сооружения), определять параметры прочности H и Ψ из трехосных испытаний. В то же время целесообразно развивать исследования влияния вида напряженного состояния.

§ 12.3. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ НАГРУЖЕНИЯ

Траектория нагружения. Пусть тело нагружается так, что в точке M его напряжение повысилось от 0 до некоторого значения $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Очевидно, что достичь этого значения можно, повышая каждую из компонент $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по тому или иному режиму.

Отобразив процесс нагружения в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, получим некоторую кривую OM (рис. 12.8), называемую путем или траекторией нагружения. Например, траектория всестороннего сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) отобразится прямой, наклоненной под одним углом ко всем трем осям.

Траектория осесимметричного трехосного сжатия ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) отобразится прямой, наклоненной одинаково к осям σ_2 и σ_3 . Напомним, что вид напряженного состояния является постоянным, если параметр Лоде μ_σ остается постоянным, и переменным, когда этот параметр в процессе нагружения изменяется.

Путь нагружения можно также отобразить в пространстве инвариантных характеристик напряженного состояния $\tau_i, \sigma_m, \mu_\sigma$, а в случаях, когда $\mu_\sigma = \text{const}$, — на плоскости $\tau_i - \sigma_m$. Рассмотрим в качестве примера различные пути такого нагружения, причем будем нагружать тело от нулевого значения нагрузки и до момента разрушения образца.

Состояние предельного равновесия отобразится на плоскости $\tau_i - \sigma_m$ некоторой кривой AB (рис. 12.9), каждая точка которой определяет такое соотношение между τ_i и σ_m , при котором выполняется условие предельного равновесия.

Допустим, мы нагружаем тело в условиях чистого сдвига. Поскольку в этом случае $\tau_i = \tau$ и $\sigma_m = 0$, то путь нагружения изобразим отрезком OA , совпадающим с осью τ_i . Допустим далее, что, испытывая грунт на трехосное сжатие ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$), мы хотим довести образец до разрушения при некотором соотношении между τ_i и σ_m , которое отображается точкой M на предельной кривой AB .

Очевидно, что достичь этой точки можно, подходя к ней по самым различным траекториям. Если повышать напряжения так, чтобы сохранить постоянным соотношение $\tau_i/\sigma_m = k$, то путь нагружения изобразится прямой OM , тангенс угла которой равен k . Учитывая, что $\tau_i = (\sigma_1 - \sigma_3)/\sqrt{3}$ и $\sigma_m = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$, соблюсти это условие можно, если компоненты напряжений будут изменяться в соотношении $\sigma_1/\sigma_3 = (\sqrt{3} + 2k) : (\sqrt{3} - k)$.

Предположим теперь, что в начале опыта образец обжимается увеличивающимся гидростатическим давлением (при $\tau_i = 0$) вплоть до некоторого значения $\sigma_m = p_1$, соответствующего точке D на рис. 12.9. Далее начинаем увеличивать компоненты σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3$ так,

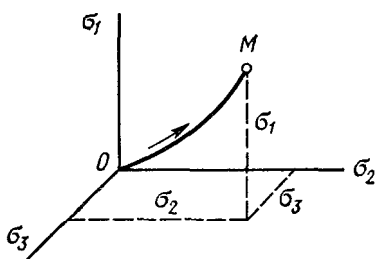


Рис. 128 Изображение пути нагружения в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

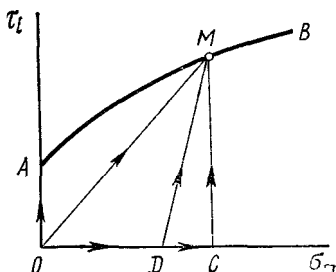


Рис. 129 Различные пути нагружения, отображаемые на плоскости $\tau_i - \sigma_m$

чтобы приращение τ_i было пропорционально приращению σ_m , т. е. $\Delta\tau_i/\Delta\sigma_m = k$. Путь такого нагружения отобразится ломаной прямой ODM . Компоненты напряжений на участке DM этой прямой должны изменяться с соблюдением соотношения $\sigma_1 = [(\sqrt{3} + 2k)\sigma_3 - 3kp_1] : (\sqrt{3} - k)$. Если же после обжатия образца гидростатическим давлением $\sigma_m = p_2$ (точка C графика) мы станем увеличивать τ_i так, чтобы среднее нормальное напряжение σ_m сохранялось постоянным, то получим траекторию, изображенную ломаной $OСМ$. В этом случае по мере увеличения σ_1 компоненты $\sigma_2 = \sigma_3$ должны уменьшаться, удовлетворяя равенству $\sigma_1 + 2\sigma_3 = 3p_2$.

В рассматриваемых случаях значение параметра Лоде для всех путей нагружения образца оставалось постоянным ($\mu_\sigma = -1$); однако нагружение было сложным, поскольку все компоненты напряжений $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ изменялись независимо.

Подобие напряженного и деформированного состояний грунта. Как говорилось в § 37, в классических теориях пластичности принято допущение о подобии напряженного и деформированного состояний, вытекающее из условия (3.87), согласно которому компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций (или скоростей деформаций) и совпадают с ними по направлению, т. е. являются соосными.

Условия соосности проверяют сопоставлением углов наклона главных напряжений α_σ и главных деформаций α_ϵ при различных

напряженных состояниях, для чего следует проводить испытания грунтов по схеме, позволяющей осуществлять в процессе нагружения поворот осей главных напряжений.

Такие испытания можно вести вдавливанием штампа в массив грунта с измерением всех компонент напряжений и деформаций или на приборах типа б, в и г, показанных на рис. 11.1. В этих случаях приложении к торцам образца крутящего момента и вызываемого им касательного напряжения изменяет ориентацию главных площадок напряжений, в результате чего поворачиваются оси главных напряжений. Условие соосности будет выполнено, если для любого напряженного состояния соблюдается равенство $\alpha_\sigma = \alpha_\epsilon$.

Опытные данные. Опыты по проверке влияния траектории нагружения и подобия напряженного и деформированного состояний для грунтов начали проводиться лишь с 1960-х годов. Одни из первых работ такого рода были выполнены Р. Альвином и Д. Брауном (1960), которые исследовали влияние траектории нагружения при вдавливании штампа в суглинистый грунт (в лотке). Оказалось, что закономерность развития деформаций грунта в лотке и в образце, испытывавшемся на трехосное сжатие, являются тождественными только в случае, когда задавались одинаковые траектории нагружения; в противном случае тождественность не достигалась.

Существенное влияние траектории загрузки отмечалось также К. Роскоу и Х. Пурушасбом (1963) и Т. Лэмбом (1964).

Одни из первых данных по невыполнению условия соосности $\alpha_\sigma = \alpha_\epsilon$ были получены Б. Брамсом и А. Касбаряном (1965), которые испытывали каолиновую глину на приборе, позволяющем повернуть ось главного напряжения, и К. Джерардом (1967), проанализировавшим опыты Р. Роу, с песком.

Вопросы подобия напряженного и деформированного состояний и влияния пути нагружения были подробно рассмотрены Д. Скоттом и Х. Ко в их обзорном докладе на VII Международном конгрессе по механике грунтов [57]. Обширные исследования по этим же вопросам были выполнены в МИСИ Г. М. Ломизе, А. Л. Крыжановским и др. [17, 18]. Исследования проводились на приборах системы г и д на рис. 11.1 в условиях как простого, так и сложного нагружения, а также в лотке путем вдавливания квадратного штампа.

Опыты показали, что условие $\alpha_\sigma = \alpha_\epsilon$ хорошо соблюдается тогда, когда поворот осей напряжения (изменение угла α_σ) происходит одновременно с возрастанием τ_i при $\mu_\sigma = \text{const}$, т. е. когда вид напряженного состояния неизменен. Если же он меняется (изменяется и α_σ и μ_σ), то направление главных напряжений не совпадает с направлением главных деформаций.

Аналогичные результаты были получены при сопоставлении опытных значений параметров Лоде для напряженного μ_σ и деформированного μ_ϵ состояний (рис. 12.10).

При таком нагружении, когда значения μ_σ в процессе опыта не изменялись (оставаясь равными 1, 0, -1), условие $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ соблюдалось достаточно хорошо; как видно из рис. 12.10, опытные

точки в этом случае легли на биссектрису угла $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$. При сложном же нагружении, когда значение μ_σ изменялось от 1 до -1 при $\tau_i = \text{const}$ и $\sigma_m = \text{const}$ (кривая 2) или когда при изменении μ_σ изменялось и τ_i и σ_m (кривая 3), опытные точки легли на кривые $\mu_\sigma \neq \mu_\epsilon$, резко отличные от прямой 1.

Таким образом, условие соосности и подобия напряженного и деформированного состояний выполняется для грунтов только при неизменном виде напряженного состояния. При сложном же нагружении это условие перестает быть справедливым и в тем большей степени, чем большие изменения имеет параметр μ_σ .

Это означает, что одному и тому же напряженному состоянию грунта могут в зависимости от режима нагружения соответствовать различные деформации. Однако построение теории, учитывающей отсутствие подобия между напряженным и деформированным состояниями, является весьма сложной задачей. И хотя определенные попытки в этом направлении были предприняты, но разработка такой теории, применимой для решения инженерных задач, — дело будущего.

Учитывая, что в реальных условиях режим загрузки оснований сооружений не сильно отличается от простого, с определенным приближением можно применять условие подобия $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ напряженного и деформированного состояний. Такая возможность подтверждается, в частности, опытами на вдавливание полосового штампа в слой глинистого грунта с одновременным измерением компонентов напряжений и перемещений. Эти данные рассматриваются в § 13.6

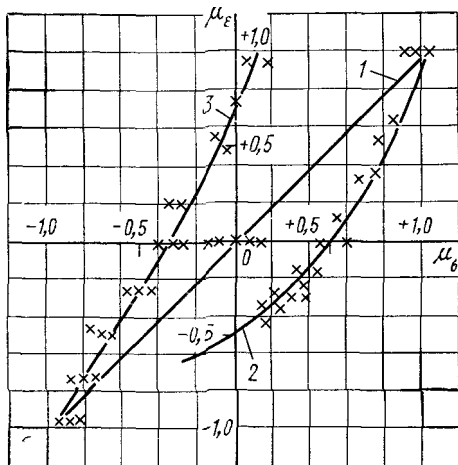


Рис 1210 Проверка условия подобия напряженного и деформированного состояний:

1 — нагружение при $\mu_\sigma = \text{const}$, 2, 3 — нагружение при $\mu_\sigma \neq \text{const}$, (песок, испытанный на трехосное сжатие при $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ (опыты Ломизе и Крыжановского))

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 13.1. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ

Возможные упрощения уравнения. Учитывать влияние на напряженно-деформированное состояние грунта всех факторов, рассмотренных в предыдущих главах, — нелинейной связи между напряжением и деформацией, ползучести, взаимного воздействия трех инвариантов тензора напряжений, вида напряженного состояния, режима нагружения и т. д., — необходимо для понимания поведения грунта под воздействием нагрузок. Однако при современном уровне наших знаний и имеющемся малом объеме опытных данных мы еще не в состоянии учитывать в инженерных расчетах все указанные факторы, тем более что при этом чрезмерно усложнились бы как сами расчеты, так и получение необходимых исходных характеристик грунта. Вследствие этого при решении практических задач следует стремиться максимально упростить исходные уравнения. В качестве первого допущения следует исходить из того, что к грунтам можно применить условие подобия напряженного и деформированного состояний. Это и некоторые другие допущения, рассматриваемые далее обуславливаются, в частности, тем, что грунты, как правило, работают в условиях, близких к простому нагружению. Если же принять условие подобия, то становятся применимыми обобщенные уравнения деформации Генки (11.13), рассмотренные в § 11.2.

Полагая далее, что расчетные характеристики определяются при напряженном состоянии, близком к натурному во многих случаях можно не учитывать влияние вида напряженного состояния и не включать в уравнения (11.13) параметр Лоде μ_σ .

Уравнения Генки. Напомним общий вид уравнений Генки (11.13), устанавливающих связь между компонентами напряжений и деформаций:

$$\varepsilon_x = \chi(\sigma_x - \sigma_m) + \chi^* \sigma_m; \quad \gamma_{xy} = 2\chi \tau_{xy}, \dots, \quad (13.1)$$

где

$$\chi = \frac{f(\tau_i, \sigma_m, t)}{2\tau_i(t)} = \frac{\gamma_i(t)}{2\varphi(\gamma_i, \sigma_m, t)}; \quad \chi^* = \frac{f^*(\sigma_m, \tau_i, t)}{\sigma_m(t)} = \frac{\varepsilon_m(t)}{\varphi^*(\varepsilon_m, \tau_i, t)}.$$

Функция χ^* во втором из этих выражений отображает влияние дилатансии. Если требуется ввести в уравнение (13.1) дилатансию в явном виде, можно представить член $\chi^* \sigma_m$ этого уравнения как

$$\chi^* \sigma_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^D = \varepsilon_m^0 \mp \lambda \gamma_i,$$

где $\lambda = \varepsilon_m^D / \gamma_i$.

Подставив это выражение в соотношения (13.1), получим

$$\varepsilon_x - \varepsilon_m^0 = \chi (\sigma_x - \sigma_m) \mp 2\lambda \tau_i; \quad \gamma_{xy} = 2\chi \tau_{xy}; \dots \quad (13.2)$$

Напомним, что знак плюс в приведенных соотношениях означает положительную дилатансию (доуплотнение), а знак минус — отрицательную (разрыхление); при отсутствии же объемной деформации $\lambda = 0$.

Соотношения (13.1) записаны в форме, соответствующей теории старения, и применимы для случая постоянной или медленно и монотонно возрастающей нагрузки. Вообще говоря, эти случаи являются типичными для работы грунта в качестве оснований сооружений. Но если необходимо учитывать переменность нагрузки, то в соотношения (13.1) следует вводить интегральные уравнения теории наследственности вида (11.33).

Рассмотрим случай простого нагружения, когда все компоненты напряжения изменяются пропорционально одному множителю, что позволяет в соотношениях (11.33) положить

$$\int_0^{\sigma_m} P(\sigma_m - \xi) f_2[\tau_i(\xi)] d\xi = f_2(\tau_i) \bar{\psi}(\sigma_m).$$

Введем далее понятие интегрального оператора Вольтерры [29]

$$\tilde{L}\{y(t)\} = \int_0^t L(t-v) y(v) dv. \quad (13.3)$$

Окончательно соотношения (13.1) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \chi \left\{ [\sigma_x(t) - \sigma_m(t)] + \int_0^t [\sigma_x(v) K(t-v) - \sigma_m(v) K^*(t-v)] dv \right\} + \\ + \chi^* \left\{ \sigma_m(t) + \int_0^t \sigma_m(v) K^*(t-v) dv \right\} \dots; \\ \gamma_{xy} = 2\chi \left\{ \tau_{xy}(t) + \int_0^t \tau_{xy}(v) K(t-v) dv \right\} \dots, \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\text{где } \chi = \frac{f_1(\tau_i) - f_2(\tau_i) \bar{\psi}(\sigma_m)}{2\tau_i}; \quad \chi^* = \frac{f_1^*(\sigma_m) \pm f_2^*(\tau_i, \sigma_m)}{\sigma_m}.$$

Степенной закон деформирования. Примем, что связь между напряжениями и деформациями описывается степен-

ными зависимостями вида (11.24) для сдвиговых деформаций и (4.41) для объемных:

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^{m_1} + B(t) \sigma_m \gamma_i^{m_2}; \quad \sigma_m = D(t) \varepsilon_m^* \quad (13.5)$$

Функции же времени имеют вид (11.43)

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + \delta_1 t^{\alpha_1}}; \quad B(t) = \frac{B_0}{1 + \delta_2 t^{\alpha_2}}; \quad D(t) = \frac{D_0}{1 + \delta_3 t^{\alpha_3}} \quad (13.6)$$

Тогда функции χ и χ^* соотношений (13.1) можно записать в следующем виде:

$$\chi = \frac{\gamma_i^{1-m_1}}{2 [A(t) \gamma_i^{m_1-m_2} + B(t) \sigma_m]}; \quad \chi^* = \frac{\varepsilon_m^{1-\varepsilon}}{D(t)} \quad (13.7)$$

В частном случае когда $m_1 = m_2 = m$ и $A(t)/B(t) = H_s$, функция χ упрощается, принимая вид

$$\chi = \frac{\gamma_i^{1-m}}{2 \{A(t) [1 + \sigma_m/H_s]\}} = \frac{\tau_i^{(1-m)/m}}{2 \{A(t) [1 + \sigma_m/H_s]\}^{1/m}} \quad (13.8)$$

§ 13.2. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

Постановка задачи. Рассмотрим полученное автором книги (сб. «Реологические вопросы механики грунтов», АН Казахской ССР, 1962) решение задачи о деформировании толстостенного полого цилиндра (неограниченной длины), подвергающегося воздействию внешнего радиального давления интенсивностью p . Такая задача возникает при расчете льдогрунтовых ограждений шахтных стволов или других подземных цилиндрических выработок, проходимых с помощью замораживания, когда вокруг будущей выработки создается ограждение из замороженного грунта, под защитой которого и производится выемка породы.

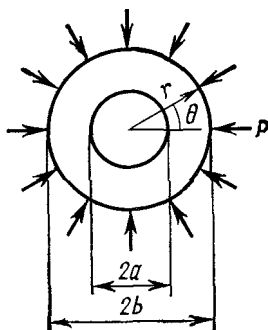


Рис. 13.1. Схема к расчету льдогрунтового ограждения

Задача сводится к определению оптимальной толщины льдогрунтового цилиндра исходя из условия, чтобы радиальное смещение стенки u_r за заданное время t_p (от начала проходки до момента постановки крепи) от воздействия горного

давления p не превышало допустимой величины Δ и чтобы за это время была обеспечена устойчивость льдогрунтового ограждения.

Обозначаем внутренний радиус льдогрунтового цилиндра через a , внешний — через b , а текущий — через r и примем полярную систему координат r, θ, y (рис. 13.1).

В качестве исходных уравнений состояния примем уравнения (11.47) и (11.43):

$$\tau_i = A(t) \gamma_i^m \left(1 + \frac{\sigma_m}{H_s}\right); \quad A(t) = \frac{A_0}{1 + \delta t^a}.$$

Объемными деформациями пренебрегаем:

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_y}{3} = 0. \quad (13.9)$$

Полагая, что цилиндр работает в условиях плоской деформации: $\epsilon_y = 0$, $\sigma_y = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$, и учитывая, что, по условиям симметрии, $\gamma_{r\theta} = \gamma_{ry} = \gamma_{\theta y} = 0$ и $\tau_{r\theta} = \tau_{ry} = 0$ (ось y перпендикулярна плоскости чертежа), получим:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2}; \quad \tau_i = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}. \quad (13.10)$$

Тогда соотношения Генки примут следующий вид:

$$\epsilon_r = \chi(\sigma_r - \sigma_m); \quad \epsilon_\theta = \chi(\sigma_\theta - \sigma_m); \quad \epsilon_y = \chi(\sigma_y - \sigma_m) = 0, \quad (13.11)$$

где $\chi = \gamma_i^{1-m} \cdot 2 \{A(t)[1 + \sigma_m/H_s]\}$.

Расчет по деформациям. Решение задачи сводится к нахождению зависимости между радиальным смещением стенки u_r и размерами цилиндра a и b при заданном давлении на внешнюю стенку p и известных реологических характеристиках замороженного грунта m , $A(t)$, H_s .

Уравнение равновесия для данной задачи получит форму

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (13.12)$$

Соотношения Коши между деформациями и смещениями имеют вид

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \epsilon_y = 0. \quad (13.13)$$

Подставив (13.13) в уравнение несжимаемости (13.9), получим дифференциальное уравнение перемещений

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (13.14)$$

Решив (13.14) с учетом (13.13), (13.12) и (13.11) при граничных условиях $\sigma_r = a = 0$, $u_r = a = u_a$, получим следующие значения компонентов напряжений:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \sigma_m \left(1 \mp \frac{N}{r^{2m}} \right) \mp \frac{NH_s}{r^{2m}}, \quad (13.15)$$

$$\text{где } \sigma_m = \frac{(r^{2m} - N)^{(1-m)/m}}{r^{2(1-m)}} \left\{ \frac{1}{H_s} \left[\frac{a^{2(1-m)}}{(a^{2m} - N)^{(1-m)/m}} - \frac{r^{2(1-m)}}{(r^{2m} - N)^{(1-m)/m}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{NH_s a^{2(1-m)}}{a^{2m} - N^{1/m}} \right] \right\}; \quad N = A(t) [2au_0]^m H_s^{-1}.$$

Используя второе граничное условие $\sigma_{r=b} = p$, получим уравнение, связывающее нагрузку p и смещение u_a

$$u_a = \frac{b^2}{2a \left[\frac{A(t)}{H_s} \right]^{1/m}} \left\{ \frac{\left[\frac{p}{H_s} + 1 \right]^m - 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \left[\frac{p}{H_s} + 1 \right]^m - 1} \right\}^{1/m}. \quad (13.16)$$

Приравняв перемещение $u_a = \Delta$, путем подбора можем найти безопасную толщину $\delta = b - a$ стенки льдогрунтового ограждения по условию допускаемого смещения ее Δ за расчетный период времени t_p . Время t_p учитывается в этом случае введением в соотношение (13.16) значения

$$A(t_p) = \frac{A_0}{1 + \delta t_p^a}.$$

В случае линейного деформирования $m=1$ выражение (13.16) упрощается:

$$u_a = \frac{ap}{2A(t) \left[\frac{p}{H_s} + 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}. \quad (13.17)$$

Если не учитывать влияния среднего давления ($H_s = \infty$), то выражение (13.16) примет следующий вид:

$$u_a = \frac{a}{2} \left\{ \frac{mp}{A(t)} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right]} \right\}^{1/m}. \quad (13.18)$$

При $m=1$ выражение (13.18) переходит в известную формулу Ламэ

$$u_a = \frac{ap}{2A(t) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}. \quad (13.18')$$

Как видно, учет среднего нормального напряжения существенно уменьшает расчетную величину смещения грунта.

Расчет льдогрунтового цилиндра на длительную прочность. Рассмотрим теперь расчет того же льдогрунтового цилиндра на длительную прочность. Задача сводится к определению толщины стенки δ цилиндра, при которой нагрузка p не вызовет за данное время t_p разрушения льдогрунтового ограждения.

Условие предельного состояния примем в форме (11.77)

$$\tau_{i(s)} = [H_s + \sigma_m] \operatorname{tg} \Psi_s \quad (13.19)$$

или с учетом (13.10) в форме

$$\pm \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2H_s + \sigma_r + \sigma_\theta} = \operatorname{tg} \Psi_s, \quad (13.20)$$

где знак плюс соответствует разрыву цилиндра, а знак минус — его раздавливанию.

Подставив выражение (13.20) в уравнение равновесия (13.12) после ряда преобразований получим

$$\pm \frac{(1 \pm \operatorname{tg} \Psi_s) d\sigma_r}{2 \operatorname{tg} \Psi_s (\sigma_r + H_s)} + \frac{dr}{r} = 0. \quad (13.21)$$

Решив это уравнение для случая раздавливания цилиндра при граничном условии $\sigma_r = b = p$, определим значение предельной нагрузки:

$$p_{np} = \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right) \frac{2 \operatorname{tg} \Psi_s}{1 - \operatorname{tg} \Psi_s} \right] \frac{\tau_s^0(t)}{\operatorname{tg} \Psi_s}, \quad (13.22)$$

где $\tau_s^{(0)} = H_s \operatorname{tg} \Psi_s$ — предельное сопротивление чистому сдвигу.

Аналогичная формула, но без учета фактора времени была предложена А. С. Строгановым. Фактор времени в формуле (13.22) учитывается изменением во времени сопротивления сдвига $\tau_s^{(0)}(t)$ по закону (11.75). В расчет следует вводить то значение $\tau_s^{(0)}(t)$, которое соответствует расчетному значению времени t_p , т. е. $\tau_s^{(0)}(t_p) = \beta \cdot \ln(t_p/T)$.

При $\Psi_s = 0$ выражение (13.22) перейдет в известное решение задачи о пластическом равновесии толстостенного цилиндра:

$$p_{np} = 2\tau_s^0(t) \ln(b/a). \quad (13.23)$$

§ 13.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ УЧЕТА НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ДЕФОРМАЦИЕЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ОСАДКИ

Постановка задачи. Одной из основных задач механики грунтов является задача о напряженно-деформированном состоянии группового основания под воздействием внешней нагрузки, приложенной к его поверхности. Основание в этом случае рассматривают как полупространство, если деформации основания возможны в трех направлениях (x, y, z), или как полуплоскость, если деформации возможны лишь в двух направлениях (что происходит, например, при полосовой нагрузке).

В рамках теории линейного деформирования эта задача решена для самых различных случаев. Решение же на основе теории нелинейного деформирования с учетом ползучести, влияния среднего нормального напряжения, дилатансии и т. д. в общем виде воз-

можно с помощью ЭВМ, и в этом направлении за последние годы достигнуты определенные успехи*.

Возможность же аналитических решений нелинейных задач весьма ограничена — решить их возможно лишь при определенных видах функций χ и χ^* . Поэтому в настоящее время необходимо либо упрощать эти функции, либо пользоваться простейшими приближенными приемами.

Простейшее приближение. Простейший эмпирический прием учета нелинейности при определении осадки грунта основания заключается в том, что распределение напряжений в основании принимают исходя из решения теории упругости, тогда как осадку вычисляют с учетом нелинейности и ползучести [3]. В этом случае осадку можно определить известным методом элементарного суммирования:

$$S = \sum_{j=1}^n \frac{\beta}{E_j} p_j h_j, \quad (13.24)$$

где p_j — давление в j -м слое основания толщиной h_j , вычисленное по известным формулам теории упругости или таблицам (см. например, СНиП III—15—74); E_j — модуль деформации, который рассматривают в данном случае как переменную величину, зависящую от величины нагрузки и от времени: $E_j = E(p, t)$. В общем виде значение E_j можно выразить соотношением

$$E(p, t) = \frac{p}{f(p)} \Phi(t). \quad (13.25)$$

Степенной закон деформирования грунта. Если исходить из степенного закона деформирования (5.17), то выражение (13.25) будет иметь вид

$$E(p, t) = \frac{A_z^{1/m} p^{(m-1)/m}}{1 + \delta t^\beta}, \quad (13.26)$$

где A_z и m — коэффициенты деформирования и упрочнения при условно-мгновенном нагружении; δ и β — параметры, получаемые из испытания на ползучесть.

При $t=0$ значение условно-мгновенного модуля деформации определим из выражения [45]

$$E(p, 0) = A_z^{1/m} p^{(m-1)/m}. \quad (13.27)$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем $E(p, \infty) \rightarrow 0$.

* См.: Е. Ф. Винокуров. Итерационный метод расчета оснований и фундаментов, 1972, и статьи В. Н. Широкова, В. И. Соломина, М. В. Малышева, Ю. К. Зарецкого («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1970, № 1); В. Г. Федоровского и С. Е. Когановской; А. Л. Крыжаковского, А. С. Чевикина и О. В. Куликова («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1975, № 1, 5); А. К. Бугрова и др. («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1977, № 3 и 6).

Таким образом, каждому значению давления p_j будет соответствовать свое значение модуля E_j , причем все эти значения изменяются во времени. В расчете принимают значения E_j , соответствующие сроку службы сооружения.

Значение модуля деформации $E(p, t)$ определяют из опытов на одноосное сжатие или из полевых испытаний на вдавливание штампа. При этом влияние на величину осадки бокового расширения грунта учитывается известным коэффициентом

$$\beta = \frac{1 - 2\nu^2}{1 - \nu}. \quad (13.28)$$

Дробно-линейный закон деформирования. Если закон деформирования принять в виде дробно-линейной зависимости (5.22), то выражение (13.25) примет вид

$$E(p, t) = \frac{E_0 [T(1 - p/p_s) + t(1 - \delta p/p_s)]}{T + \delta t}. \quad (13.29)$$

При $t=0$ и $t \rightarrow \infty$ формула (13.29) характеризует соответственно условно-мгновенное и предельно-длительное значения модуля деформирования:

$$E(p, 0) = E_0(1 - p/p_0) \text{ и } E(p, \infty) = E_\infty(1 - p/p_\infty). \quad (13.30)$$

В выражениях (13.29) и (13.30) $p_s = p_0$ — предельная нагрузка при условно-мгновенном нагружении ($t=0$); $p_\infty = p_s/\delta$ — предельно-длительная нагрузка (при $t \rightarrow \infty$); E_0 — значение модуля деформации при $p \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$; $E_\infty = E_0/\delta$ — значения модуля при $p \rightarrow 0$, но $t \rightarrow \infty$; T и δ — параметры. Напомним, что под предельными нагрузками p_0 и p_∞ имеются в виду нагрузки, приводящие к неограниченно большим осадкам, возникающим в начальный момент времени (p_0) или при длительном выдерживании этих нагрузок (p_∞). Подробнее см. пояснение к рис. 5.8.

Закон течения (5.45). Н. Н. Маслов [19] предложил метод расчета оснований, подчиняющихся линейному закону течения Бингама или его видоизменению в форме (5.45) для случая воздействия как вертикальной, так и горизонтальной нагрузок.

Примем предел текучести, входящий в эту формулу, в виде

$$\tau_i = \tau_{lim} = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_w + c_c, \quad (13.31)$$

где $\sigma_n = p + \gamma z$; p — внешняя нагрузка; γ — объемная масса грунта; z — текущая координата.

В результате получим выражение, позволяющее определить границу, ниже которой $\tau < \tau_{lim}$ и течение не происходит; тем самым представляется возможным найти зону течения грунта и определить развитие деформаций сдвига основания во времени. Из этих же положений определяется скорость смещения грунта на склонах и откосах.

Использование формулы Шлейхера. Другой приближенный прием учета нелинейности и ползучести грунта при расчете осадки

основания заключается в том, что для определения осадки используют известное решение Шлейхера, полученное для упругого полупространства; значение же модуля деформации по-прежнему принимают переменным в форме (13.25). Тогда

$$S = \frac{(1 - \nu^2)}{E(p, t)} \omega b p, \quad (13.32)$$

где ω — коэффициент, зависящий от формы подошвы и жесткости фундамента; значения ω табулированы (см., например, Н. А. Цытович [42]); b — ширина прямоугольной (или диаметр круглой) площади подошвы фундамента.

Приняв значение E в форме (13.26), получим [3]

$$S = \frac{(1 - \nu^2) \omega b}{A_z^{1/m}} p^{1/m} (1 + \delta t^\beta). \quad (13.33)$$

Если же принять значение E в форме (13.29), то будем иметь

$$S = \frac{(1 - \nu^2) \omega b}{E_0} \frac{p(T + \delta t)}{T(1 - p/p_s) + t(1 - \delta p/p_s)}. \quad (13.34)$$

Формула (13.34) без учета фактора времени была предложена Б. П. Поповым (сб. «Инженерно-геологические исследования для гидроэнергетического строительства», т. II, 1950), а с учетом этого фактора — Ю. К. Зарецким («Основания, фундаменты и механика грунтов», 1972, № 2). Эта формула справедлива для однородного массива грунта неограниченной толщины. При наличии жесткого подстилающего слоя, залегающего на глубине h от подошвы фундамента, будет справедлива формула, полученная автором книги и А. Л. Миндичем («Основание, фундаменты и механика грунтов», 1974, № 6) для полосовой нагрузки шириной b :

$$S = \frac{(1 - \nu^2) nb}{E_0} \frac{p(T + \delta t)}{T(1 - p/p_s) + t(1 - \delta p/p_s)}, \quad (13.35)$$

где $n = (1,07h/b)/(1 + 0,4h/b)$ — коэффициент, учитывающий влияние подстилающего жесткого основания.

При $t=0$ по формулам (13.33), (13.34) и (13.35) можно определить значение начальной осадки, равной соответственно:

$$S_0 = \frac{(1 - \nu^2) \omega b}{A_z^{1/m}} p^{1/m}; \quad S_0 = \frac{(1 - \nu^2) \omega b p}{E_0(1 - p/p_0)}; \quad S_0 = \frac{(1 - \nu^2) nb p}{E_0(1 - p/p_0)}. \quad (13.36)$$

При $t \rightarrow \infty$ по формуле (13.33) получают неограниченное нарастание осадки (при расчетах по этой формуле следует принимать конечное значение t , равное сроку службы сооружения), а по формулам (13.34) и (13.35) — значение стабилизированных предельно-длительных осадок, равных соответственно:

$$S_\infty = \frac{(1 - \nu^2) \omega b p}{E_\infty(1 - p/p_\infty)}; \quad S_\infty = \frac{(1 - \nu^2) nb p}{E_\infty(1 - p/p_\infty)}. \quad (13.37)$$

Зависимости (13.36) и (13.37) проверялись рядом исследователей. Некоторые из таких данных рассматриваются в § 13.6 (см. рис. 13.6).

Учет переменной нагрузки. При медленном и монотонном возрастании нагрузки p ее изменение во времени можно приближенно учитывать непосредственно формулой (13.32) и ее частными случаями (13.33)—(13.37), вводя в них значение $p=p(t)$. В более корректной форме это изменение следует учитывать, вводя в формулу (13.32) вместо члена $p(t)/E(p, t)$ интегральное уравнение теории наследственной ползучести. Приняв указанное уравнение в форме (7.43), получим*

$$S = (1 - \nu^2) \omega b \left\{ f_0[p(t)] + \int_0^t Q(t - \zeta) f[p(\zeta)] d\zeta \right\}. \quad (13.38)$$

Если принять $Q(t - \zeta) = (\beta \delta / T^\beta) (t - \zeta)^{\beta-1}$ и $f_0(p) = f(p) = (p/A_z)^{1/m}$, то

$$S = \frac{(1 - \nu^2) \omega b}{A_z^{1/m}} \left\{ p(t)^{1/m} + \frac{\beta \delta}{T^\beta} \int_0^t [p(\zeta)]^{1/m} (t - \zeta)^{\beta-1} d\zeta \right\}. \quad (13.39)$$

При $p = \text{const}$ и $T = 1$ выражение (13.39) переходит в (13.33). Если же положить $Q(t - \zeta) = T(\delta - 1)/[T + (t - \zeta)]^2$ и записать (13.38) в форме (7.60), получим

$$\frac{\bar{E}_0 p_s}{p_s + \bar{E}_0 S} S = p(t) + T(\delta - 1) \int_0^t \frac{p(\zeta) d\zeta}{[T + (t - \zeta)]^2}, \quad (13.40)$$

где $\bar{E}_0 = E_0 / (1 - \nu^2) \omega b$.

При $p = \text{const}$ это выражение, решенное относительно S , переходит в (13.34).

О коэффициенте поперечного расширения. Значение коэффициента ν можно выразить, используя (4.4), через соотношение модулей линейной E или сдвиговой G деформаций и модуля объемной деформации k , причем эти модули рассматриваются как переменные величины:

$$\nu = \frac{k(\sigma_m, t) - E(\sigma_z, t)}{2k(\sigma_m, t)} = \frac{k(\sigma_m, t) - 2G(\tau_i, t)}{2[k(\sigma_m, t) + G(\tau_i, t)]}. \quad (13.41)$$

Ранее уже отмечалось, что коэффициент ν будет постоянной величиной только в том случае, если $k(\sigma_m, t)/G(\tau_i, t) = \text{const}$; это возможно тогда, когда кривые сдвиговых и объемных деформаций будут подобны.

В действительности закономерности этих деформаций различны (см. рис. 1.1) и соответственно коэффициент ν будет переменной

* Переменная интегрирования здесь обозначена ζ , а не ν , как в гл. 7, чтобы не смешивать ее с коэффициентом Пуассона.

величиной: $\nu = \nu(\tau_i, \sigma_m, t)$. Однако изменения этого коэффициента в общем не велики; множитель же $(1 - \nu^2)$ изменяется в еще меньшей степени. Например, при $0,30 \leq \nu \leq 0,5$ значение $(1 - \nu^2)$ изменяется в пределах от 0,91 до 0,75. Соответственно при использовании выражения (13.32) и вытекающих из него формул (13.33) — (13.40) можно принять $\nu = \text{const}$, что равносильно, как уже говорилось, допущению о постоянстве соотношения k/G . Опытные данные, подтверждающие возможность такого допущения, будут приведены в § 13.6 (см. рис. 13.6).

Однако в случае необходимости переменность ν может быть учтена, для чего в (13.32) следует вводить значение $\nu(p, t)$, определяемое из соотношения (13.41).

Другой прием учета различия в закономерностях линейного и объемного деформирования грунтов рассмотрен в работе А. А. Мустафаева [24].

§ 13.4. ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ОСНОВАНИЕ

Задача Буссинеска. Как известно, задача об определении напряженно-деформированного состояния основания под воздействием местной нагрузки сводится к определению значений компонент напряжения и деформации в какой-либо точке M полупространства от действия сосредоточенной силы P и к последующему суммированию перемещений и напряжений, возникающих в данной точке от действия элементарных сосредоточенных сил, распределенных на поверхности по заданному закону.

Задача о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство впервые была решена в 1885 г. Буссинеском; эта же задача для полуплоскости рассмотрена Фламаном. Оба решения исходили из условия простого радиального распределения напряжений в полупространстве. Такое распределение

предполагает, что напряжения на площадках, параллельных радиусу, равны нулю.

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу о плоской деформации ($\epsilon_y = 0$), т. е. о действии сосредоточенной погонной нагрузки на полуплоскость; при этом примем цилиндрическую систему координат (r, θ, y) , где ось y направлена нормально к плоскости чертежа (рис. 13.2). В этом случае имеем $\sigma_\theta = 0$; $\tau_{r\theta} = \tau_{y\theta} = \tau_{\theta y} = 0$; $\sigma_r = \sigma_r(r, \theta)$; $\sigma_y = \sigma_y(r, \theta)$ и дифференциальные уравнения равновесия (3.78) сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0. \quad (13.42)$$

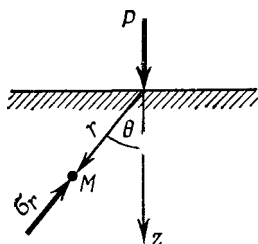


Рис. 13.2. Сосредоточенная сила, действующая на полупространство

Из решения этого уравнения совместно с уравнениями неразрывности деформаций и соотношениями Генки получим

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi r} \cos \theta. \quad (13.43)$$

Нелинейная задача. Обобщенное уравнение деформирования с учетом нелинейной связи между напряжениями и деформациями, развития деформаций во времени и взаимного влияния первого и второго инвариантов тензора напряжений (при $\mu_\sigma = \text{const}$) согласно (11.6) имеет вид

$$\gamma_i = f(\tau_i, \sigma_m, t); \quad \varepsilon_m = f^*(\sigma_m, \tau_i, t), \quad (13.44)$$

причем соотношения $\chi = \gamma_i / 2\tau_i$ и $\chi^* = \varepsilon_m / \sigma_m$ — функции пластичности входят в уравнения Генки (11.13).

Численные методы с использованием ЭВМ позволяют решать задачи о напряженно-деформированном состоянии основания, нагруженного местной нагрузкой, при любом виде соотношений (13.44). Например, В. Н. Широков и др., применив метод конечных разностей и используя итерационный способ упругих решений А. А. Ильюшина, получили численное решение для случая, соответствующего зависимости (11.4) Боткина, т. е. дробно-линейного соотношения для сдвиговых деформаций и линейного — для объемных.

Для этого же случая получено численное решение В. Г. Федоровским и С. Е. Когановской, применившими, аналогично тому, как это делается в методе конечных элементов, вариационный энергетический принцип. Использование метода конечных разностей для решения нелинейных задач в общей постановке (нелинейность, учет дилатансии) рассмотрены в работе А. Л. Крыжановского с сотрудниками, а методы конечных элементов — в статьях А. К. Бугрова, К. К. Гребнева и др.

Аналитические решения нелинейной задачи. Решать задачи о напряженно-деформированном состоянии основания с учетом нелинейности, ползучести и других факторов аналитическим способом можно только при определенных ограничениях. Эти ограничения будут рассмотрены далее, здесь же приведем обзор имеющихся решений.

Впервые задача о действии на полуплоскость сосредоточенной силы P при степенном законе деформирования грунта $\gamma_i = (\tau_i / A_0)$ была решена в 1938 г. О. К. Фрелихом. Это решение имело вид $\sigma_r = (a/r) P \cos^m \theta$ и, как выяснилось позже, является справедливым лишь при $m = \nu(1-\nu)$.

Более общее решение для случая $0 \leq m \leq 1$, но при $\nu = 0,5$ (несжимаемая среда), дано В. В. Соколовским (1950), а затем Н. Х. Арутюняном (1959), причем последний рассматривал задачу с учетом ползучести грунта и распространил решение на полосовую нагрузку. Работы указанных авторов стали основополагающими для дальнейшего рассмотрения напряженно-деформированного

**Исходные законы деформирования грунта, для которых получены аналитические
решения задачи о действии сосредоточенной силы или полосовой нагрузки на полуплоскость**

Закон сдвигового деформирования	Закон объемного деформирования	Автор
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A_0} \right]^{1/m}$	$\varepsilon_m \neq 0, \nu = \frac{m}{1+m}$	О. К. Ф р е л и х. Распределение давления в грунте, 1938
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A_0} \right]^{1/m}$	$\varepsilon_m = 0$	В. В. С о к о л о в с к и й. Теория пластичности, 1950
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} \right]^{1/m}$	$\varepsilon_m = 0$	Н. Х. А р у т ю н я н. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. XII, в. 2, 1959. Прикл. мат. и мех., т. XIII, в. 5, 1959
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A_0} \right]^{1/m}$	$\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D_0} \right]^{1/m}$	В. В. М а л ы ш е в. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1963, № 3

Закон сдвигового деформирования	Закон объемного деформирования	Автор
$\gamma_l = \frac{\tau_l^{1/m} \sigma_m^{1/n}}{N(r, \theta)}$ где $1/q = 1/m + 1/n - 1/x$, $M(r, \theta) =$ $= 2N(r, \theta)/a(a^2 + a + 1)^\beta$, $\beta = (x - m - xm)/2xm$	$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m^{1/q} \tau_l^{1/x}}{M(r, \theta)}$	Ю. К. Зарецкий. Сб. «Исследования по механике горных пород», Алма-Ата, 1965
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} - \frac{\sigma_m}{C(t)} \right]^{1/\eta}$	$\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m}$	С. С. Вялов и М. Э. Слепак, 1976 (в настоящей книге)
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} \right]^{1/m} - \left[\frac{\sigma_m}{C(t) \tau_l^{1-\eta/m}} \right]^{1/m}$	$\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m} - \left[\frac{\tau_l}{E(t) \sigma_m^{1-\mu/m}} \right]^{1/\mu}$	Ю. К. Зарецкий и С. С. Вялов. Сб. «Доклады к I Международному конгрессу по механике скальных пород», 1967

состояния полуплоскости при нелинейной связи между напряжениями и деформациями.

В последующем задача для сосредоточенной силы и степенного закона, но для сжимаемой среды, рассматривалась М. В. Малышевым (1963), показавшим, что решить ее можно в том случае, если закономерности объемного и сдвигового деформирования аналогичны.

Наиболее общий случай был рассмотрен Ю. К. Зарецким (1965), получившим решение для сосредоточенной и молотовой нагрузки при степенном законе сдвигового и объемного деформирования с учетом взаимного влияния первого и второго инвариантов тензора напряжений и неоднородности основания по глубине. Иной вид степенного закона с учетом ползучести рассмотрен автором этой книги и М. Э. Слепаком (1975).

Решение задачи для комбинированного дробно-линейно-степенного закона при некоторых принятых ограничениях было получено Е. Ф. Винокуровым и Т. Т. Кононковым (1974), а задача для степенного закона сдвигового и объемного деформирования с учетом ползучести и дилатансии рассматривалась в работе автора книги и Ю. К. Зарецкого в 1967 г. Отметим, что в этой работе закономерность деформирования грунта основания была получена из учета различия в сопротивлении грунта сжатию и растяжению и приводилось к форме, аналогичной (12.6):

$$\gamma_i = f_1(\tau_i, t) - f_2(\tau_i, \sigma_m, t) \text{ и } \varepsilon_m = f_1^*(\sigma_m, t) - f_2^*(\sigma_m, \tau_i, t).$$

В табл. 13.1 приведена сводка перечисленных выше исходных закономерностей, для которых получены аналитические решения задачи.

Условия, определяющие возможность аналитического решения. Аналитическое решение задачи о распределении напряжений и перемещений в нелинейно-деформируемой полуплоскости будет возможно, если принять положение о радиальном распределении напряжений. Однако возникает вопрос: в каких же случаях допустимо принимать радиальное распределение напряжений?

Ю. К. Зарецкий показал, что такое допущение возможно, если соблюдаются два условия: первое — функции (13.44) $\gamma_i = f(\tau_i, \sigma_m, t)$ и $\varepsilon_m = f^*(\sigma_m, \tau_i, t)$ однородны, причем степень их однородности одинакова; второе — функции $\chi = \gamma_i/2\tau_i$ и $\chi^* = \varepsilon_m/\sigma_m$ являются переменными в плоскости $r-\theta$, но они изменяются по r и по θ так, что их можно представить как произведение двух функций, одна из которых зависит только от полярного угла θ , а другая — от радиуса r , т. е. $\chi = \Phi_1(\theta)\Phi_2(r)$ и $\chi^* = \Phi_1^*(\theta)\Phi_2^*(r)$, причем $\Phi_2(r) = \Phi_2^*(r) = \Phi(r)$, а $\Phi_1^*(\theta) = \alpha_1\Phi_1(\theta)$.

Условие радиального распределения напряжений можно выразить в более простой форме, учтя при этом фактор времени. Так, условие первое можно записать в виде, вытекающем из самого понятия однородности:

$$\gamma_i^m = \tau_i \Phi\left(\frac{\sigma_m}{\tau_i}\right) [1 + \tilde{L}], \quad (13.45)$$

где $\tilde{L} = \tilde{L}(t)$ — интегральный оператор, отображающий влияние времени и определяемый выражением (13.3), причем $\tilde{L}_0 = 0$.

Напомним, что функцию $f(x; y; \dots)$ называют однородной, если $f(\lambda x; \lambda y; \dots) = \lambda^n f(x; y; \dots)$; n — степень однородности.

Условие второе можно выразить в виде условия постоянства коэффициента поперечной деформации ν . Покажем это. Если принять, что функции времени сдвиговой $\tilde{L}$ и объемной $\tilde{L}^*$ деформаций таковы, что $[1 + \tilde{L}^*] = \alpha_2 [1 + \tilde{L}]$, то второе условие можно записать в следующей форме:

$$\frac{\chi^*}{\chi} = \frac{\Phi^*(\theta) \Phi^*(r) [1 + \tilde{L}^*]}{\Phi(\theta) \Phi(r) [1 + \tilde{L}]} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi(\theta) \Phi(r) [1 + \tilde{L}]}{\Phi(\theta) \Phi(r) [1 + \tilde{L}]} = \alpha = \text{const}, \quad (13.46)$$

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$.

В то же время функции χ^* и χ можно выразить как $\chi = 1/2\bar{G}$ и $\chi^* = 1/\bar{k}$, где $\bar{G} = G(\tau_i, \sigma_m, t)$; $\bar{k} = k(\sigma_m, \tau_i, t)$ — переменные модуль сдвига и модуль объемной деформации. Отсюда

$$\alpha = \frac{\chi^*}{\chi} = \frac{2\bar{G}}{\bar{k}}. \quad (13.47)$$

Используя соотношение (4.4), получим, что коэффициенты α и ν связаны между собой зависимостью $\alpha = (1 - 2\nu)/(1 + \nu)$. Поскольку же согласно (13.46) $\alpha = \text{const}$, то и

$$\nu = \frac{1 - \alpha}{2 + \alpha} = \text{const}. \quad (13.48)$$

Таким образом, если сдвиговая деформация описывается зависимостью вида (13.45) и если коэффициент поперечной деформации $\nu = \text{const}$, то распределение напряжений в полуплоскости, нагруженной сосредоточенной нагрузкой, можно принять радиальным и соответственно получить аналитическое решение задачи.

Анализ условий (13.45) и (13.48). Условие (13.45) выполняется довольно легко. Для этого надо, во-первых, чтобы кривые «напряжение — деформация» аппроксимировались степенной зависимостью, что можно принять для многих грунтов. Во-вторых, нужно, чтобы влияние среднего нормального давления на сдвиговую деформацию отображалась путем введения в уравнение состояния множителя $f(\sigma_m/\tau_i)$; такому условию удовлетворяет зависимость (11.46) и подобные ей, что отвечает многим реальным случаям.

Наконец, требуется, чтобы фактор времени учитывался введением множителя $[1 + \tilde{L}]$, что соответствует допущению о подобии изохронных кривых для всех моментов времени (см. рис. 5.6). Это допущение, как уже отмечалось, вполне приемлемо для грунтов.

Условие (13.48) постоянства коэффициента ν несколько сложнее. Выше уже говорилось, что ν будет постоянным только в том случае, когда кривые сдвигового и объемного деформирования подобны; это относится и к кривым «напряжение — деформация» и к кривым ползучести. В действительности же кривые $\dot{\gamma}_i - \tau_i$ и $\dot{\epsilon}_m - \sigma_m$ по своей форме различны (см. рис. 1). Кривые ползучести для сдвиговой и объемной деформаций также могут иметь различ-

ную форму: для сдвиговой деформации они могут быть как затухающими, так и незатухающими, тогда как для объемной деформации — только затухающими.

Тем не менее принятое допущение о постоянстве коэффициента ν сравнительно мало сказывается на конечных результатах расчетов основания. Так, далее, в § 13.6, на основании опытных данных будет показано, что хотя сдвиговая и объемная деформация описываются различными законами, но результирующая кривая «осадка — нагрузка» по своему характеру идентична кривой сдвиговой, а не объемной деформации. Очевидно, что объемные деформации оказывают ощутимое влияние лишь в начале загрузки — в стадии уплотнения; затем, при развитии сдвиговых процессов, доминирующим становится закон сдвигового деформирования.

Все приведенные в табл. 13.1 закономерности удовлетворяют условиям (13.45) и (13.48). Покажем это на примере одной из формул, приведенных в указанной таблице:

$$\gamma_i = \left[\frac{\tau_i}{A(t)} - \frac{\sigma_m}{C(t)} \right]^{1/m}; \quad \varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m}. \quad (13.49)$$

Выражение (13.49) описывает закономерность деформирования связного грунта с углом внутреннего трения $\operatorname{tg} \psi = A(t)/C(t) = \text{const}$; оно соответствует формулам (11.46) и (8.5). Частным случаем будет $C(t) = \infty$ и $\psi = 0$, что соответствует грунту, который не обладает внутренним трением.

Функции χ и χ^* имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\gamma_i}{2\tau_i} = \frac{1}{2[A(t)]^{1/m}} \left[\tau_i^{1-m} - \frac{A(t)}{C(t)} \tau_i^{-m} \sigma_m \right]^{1/m}; \\ \chi^* &= \frac{\varepsilon_m}{\sigma_m} = \left[\frac{\sigma_m^{1-m}}{D(t)} \right]^{1/m}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\chi^*}{\chi} = 2 \left[\frac{A(t)}{D(t)} \right]^{1/m} \left[\left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{1/m} - \frac{A(t)}{C(t)} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{-m} \right]^{1/m}. \quad (13.51)$$

Для удовлетворения условия $\nu = (1-\alpha)/(2+\alpha) = \text{const}$ необходимо, во-первых, чтобы $\sigma_m/\tau_i = \text{const}$, что соответствует случаю простого нагружения, и, во-вторых, чтобы $A(t)/C(t) = \text{const}$ и $A(t)/D(t) = \text{const}$. Например, можем принять

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + \delta(t/T)^a}; \quad C(t) = \frac{C_0}{1 + \delta(t/T)^a}; \quad D(t) = \frac{D_0}{1 + \delta(t/T)^a}. \quad (13.52)$$

Тогда

$$\nu = \frac{1 - 2 \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left[\left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{1-m} - \frac{A_0}{C_0} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{-m} \right]^{1/m}}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left[\left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{1-m} - \frac{A_0}{C_0} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_i} \right)^{-m} \right]^{1/m} \right\}}. \quad (13.53)$$

В соотношениях (13.49) фактор времени учтен в параметрической форме, что соответствует теории старения. Если же учитывать время с помощью интегральных соотношений уравнений наследственной ползучести, то в соответствии с (13.3) и (7.102) получим

$$\frac{\tau_i(t)}{A(t)} = \frac{1}{A_0} \tau_i(t) [1 + \tilde{L}] = \frac{1}{A_0} \left[\tau_i(t) + \int_0^t K_1(t-\zeta) \tau_i(\zeta) d\zeta \right];$$

$$\frac{\sigma_m(t)}{C(t)} = \frac{1}{C_0} \sigma_m(t) [1 + \tilde{L}^*] = \frac{1}{C_0} \left[\sigma_m(t) + \int_0^t K_2(t-\zeta) \sigma_m(\zeta) d\zeta \right]. \quad (13.54)$$

Тогда зависимости (13.49) будут иметь вид

$$(\gamma_i)^m = \frac{1}{A_0} \left[\tau_i(t) + \int_0^t K_1(t-\zeta) \tau(\zeta) d\zeta \right] -$$

$$- \frac{1}{C_0} \left[\sigma_m(t) + \int_0^t K_2(t-\zeta) \sigma_m(\zeta) d\zeta \right];$$

$$(\varepsilon_m)^m = \frac{1}{D_0} \left[\sigma_m(t) + \int_0^t K_3(t-\zeta) \sigma_m(\zeta) d\zeta \right]. \quad (13.55)$$

Условие $v = \text{const}$ будет соблюдено, если $K_1(t-\zeta) = K_2(t-\zeta) = K_3(t-\zeta) = K(t-\zeta)$.

Например, это условие соблюдается при

$$K(t-\zeta) = \frac{a\delta}{r^a} (t-\zeta)^{a-1}, \quad (13.56)$$

что соответствует (13.52). Таким образом, при указанных выше ограничениях условие (13.48) будет выполнено. Условие (13.45) при этих же ограничениях выполняется автоматически. Действительно, учитывая (13.54), получим

$$\gamma_i^m = \frac{\tau_i}{A(t)} - \frac{\sigma_m}{C(t)} = [1 + \tilde{L}] \left[\frac{1}{A_0} - \frac{1}{C_0} \frac{\sigma_m}{\tau_i} \right] \tau_i, \quad (13.57)$$

что и соответствует условию (13.45).

Общее решение задачи. Для любых зависимостей, удовлетворяющих условиям (13.45) и (13.48), можно получить общее решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости, нагруженной сосредоточенной нагрузкой. Покажем это.

Решение уравнения равновесия (13.42) имеет вид

$$\sigma_r = \frac{f(\theta)}{r}. \quad (13.58)$$

Условия совместности (3.80) будут иметь форму

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} = r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 2 \left[\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right], \quad (13.59)$$

а соотношения Генки (11.13) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(t) &= \frac{1}{3} [\sigma_r (2\chi + \chi^*) + \sigma_y (\chi^* - \chi)]; \\ \varepsilon_\theta(t) &= \frac{\sigma_r + \sigma_y}{3} (\chi^* - \chi); \\ \varepsilon_y(t) &= \frac{1}{3} [\sigma_y (2\chi + \chi^*) + \sigma_r (\chi^* - \chi)]; \\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta y} = \gamma_{ry} = 0.\end{aligned}\quad (13.60)$$

Из равенства $\varepsilon_y(t) = 0$ следует, что

$$\sigma_y = \frac{\chi - \chi^*}{2\chi + \chi^*} \sigma_r = \frac{1 - \alpha}{2 + \alpha} \sigma_r = \nu \sigma_r. \quad (13.61)$$

Инварианты тензоров напряжений и деформаций принимают в этих случаях следующие значения:

$$\begin{aligned}\tau_i &= \sqrt{\frac{1}{3} V \sigma_r^2 + \sigma_y^2 - \sigma_r \sigma_y} = \sqrt{\frac{1}{3} V 1 - \nu + \nu^2 \sigma_r}; \\ \sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_y) = \frac{1}{3} (1 + \nu) \sigma_r;\end{aligned}\quad (13.62)$$

$$\gamma_i = 2 \sqrt{\frac{1}{3} V \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\theta}; \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta).$$

Отметим, что из совместного рассмотрения (13.61) и (13.53) можно установить связь между параметрами A_0 , C_0 , D_0 зависимостей (13.49) и (13.52), которая вытекает из условия $\nu = \text{const}$:

$$(1 - 2\nu)^2 \left(\frac{1}{A_0} \frac{\sqrt{3} V 1 - \nu + \nu^2}}{1 + \nu} + \frac{1}{C_0} \right) = \frac{1}{D_0} (V \sqrt{3} V 1 - \nu + \nu^2)^m.$$

С учетом (13.61) соотношения Генки (13.60) приводят к виду

$$\varepsilon_r(t) = (1 - \nu) \chi \sigma_r; \quad \varepsilon_\theta(t) = -\nu \chi \sigma_r; \quad \varepsilon_y = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta y} = \gamma_{yz} = 0, \quad (13.63)$$

где $\chi = \chi(t)$.

Эта запись соответствует теории старения. Если же исходить из теории наследственной ползучести, получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(t) &= (1 - \nu) \chi \left[\sigma_r(t) + \int_0^t \sigma_r(\zeta) K(t - \zeta) d\zeta \right]; \\ \varepsilon_\theta(t) &= -\nu \chi \left[\sigma_r(t) + \int_0^t \sigma_r(\zeta) K(t - \zeta) d\zeta \right].\end{aligned}\quad (13.64)$$

Распределение напряжений. Решение задачи о распределении напряжений в полуплоскости от действия сосредоточенной силы $P(t)$ сводится к нахождению вида функции $f(\theta)$ в соотношении (13.58). Решив совместно уравнения (13.58), (13.59) и (13.63),

а также уравнение равновесия всех сил, действующих по вертикальной оси $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta d\theta = P$, получим, как показали Соколовский и Арутюнян

$$\sigma_r(t) = \frac{2P(t) [\omega'(\lambda\theta)]^m}{rI}; \quad \sigma_y(t) = 2\nu\sigma_r(t). \quad (13.65)$$

Здесь

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \cos \theta [\omega'(\lambda\theta)]^m d\theta;$$

$$\omega(\lambda\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda\theta) & \text{при } \lambda^2 > 0 \\ \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh}(|\lambda|\theta) & \text{при } \lambda^2 < 0 \\ 1 & \text{при } \lambda^2 = 0; \end{cases} \quad (13.66)$$

$$\omega'(\lambda\theta) = \begin{cases} \cos(\lambda\theta) & \text{при } \lambda^2 > 0 \\ \operatorname{ch}(|\lambda|\theta) & \text{при } \lambda^2 < 0 \\ 0 & \text{при } \lambda^2 = 0; \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{m} \left[1 + \frac{\nu}{1-\nu} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right].$$

При $m=1$ выражение (13.65) переходит в решение теории упругости (13.43).

Напряжения в полуплоскости от действия нагрузки, приложенной к поверхности и распределенной по некоторому произвольному закону $p=p(x, t)$, находят путем суммирования напряжений в данной точке M , вызванных действием элементарных сосредоточенных сил.

Вертикальную составляющую напряжений, вызванных действием элементарной сосредоточенной силы $P_j(t)$, можно определить из выражения $\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \theta$, подставив в это выражение значения σ_r из (13.65) и учитывая, что $z = r \cos \theta$, $r = \sqrt{z^2 + (x-\rho)^2}$, $x-\rho = r \sin \theta$, где ρ — расстояние от оси z до рассматриваемой точки. Тогда получим

$$\sigma_z = \frac{2P_i(t)}{I} \left[\cos(\lambda \arctg \frac{x-\rho}{z}) \right]^m \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 + (x-\rho)^2)^3}}. \quad (13.67)$$

Это выражение определяет распределение вертикальных напряжений по глубине массива от действия сосредоточенной силы, изменяющейся во времени по заданному закону.

Как видно, распределение напряжений не зависит ни от вида функции напряжения $f(\sigma_m/\tau_i)$, ни от вида функции ползучести $(1+\bar{L})$, входящих в соотношение (13.45). Иными словами, решения (13.65) — (13.68) являются общими для любых закономерностей, удовлетворяющих условиям (13.45) и (13.48).

§ 13.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСАДКИ ОСНОВАНИЯ И РЕАКТИВНЫХ ДАВЛЕНИЙ ГРУНТА

Определение перемещений. Для определения осадки основания найдем вначале перемещение данной точки M полуплоскости от действия сосредоточенной силы $P(t)$. Для этого, подставив в соотношения Генки (13.63) значения σ_r и σ_θ , определяемые формулами (13.65), найдем значения компонент деформаций ϵ_r и ϵ_θ . Далее определим значения компонент перемещений, для чего проинтегрируем соотношения Коши

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{и} \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \quad (13.68)$$

С учетом симметрии напряженного состояния, а также при условии, что в бесконечности смещения стремятся к нулю. Проведя с некоторыми видоизменениями выкладки, аналогичные приведенным в работах Н. Х. Арутюняна получим следующее решение:

$$\begin{aligned} u_r(t) &= M [(1 + \tilde{L}) P(t)]^{1/m} r^{(m-1)/m}, \\ u_\theta(t) &= N [(1 + \tilde{L}) P(t)]^{1/m} r^{(m-1)/m}, \end{aligned} \quad (13.69)$$

где N и $M = \frac{1-\nu}{1-\nu/m} \cdot \frac{dN}{d\theta}$ — некоторые функции, устанавливаемые из решения каждой конкретной задачи; подробнее об этих функциях будет сказано далее.

Определение осадки. Осадку основания, т. е. перемещение поверхности полуплоскости от воздействия нагрузки $P(x, t)$, произвольно распределенной по полосе шириной b (рис. 13.3), можно определить суммированием перемещений свободной поверхности полуплоскости под действием системы элементарных сил $P_i(x)$. Допустимость такого суммирования для нелинейнодеформируемого материала в случае степенного закона деформирования вытекает, как было показано Н. Х. Арутюняном, из применения принципа суперпозиций для некоторых обобщенных перемещений границы полуплоскости $u^*(x) = [u_{\theta/\theta=\pm\pi/2}]^m$. Действительно, поскольку эти обобщенные перемещения связаны с нагрузкой линейно, величину $u^*(x)$ можно определить как сумму смещений $u_i^*(x)$ от действия элементарных сил $P_i(x)$. Подобный прием дает точное решение для прямолинейной границы основания, где направления главных осей по отношению к выбранной системе координат остаются постоянными. Заменив суммирование интегрированием и приняв значения $[u_{\theta/\theta=\pm\pi/2}]$ в виде второй из формул (13.69) (при $\theta = \pm\pi/2$), получим после преобразований следующее значение осадки поверхности:

$$S(x, t) = N \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} [(1 + \tilde{L}) p(\rho, t)] \frac{d\rho}{|\rho - x|^{1-m}} \right\}^{1/m}. \quad (13.70)$$

При равномерно распределенной нагрузке $p=p(t)$ будем иметь

$$S(x, t) = N \left\{ [(1 + \tilde{L}) p(t)] \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\rho}{|\rho - x|^{1-m}} \right\}^{1/m}, \quad (13.70')$$

где, если обозначить $\bar{x} = 2x/b$,

$$\left[\int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\rho}{|\rho - x|^{1-m}} \right]^{1/m} = \begin{cases} \frac{b}{2m^{1/m}} [(1 - \bar{x})^m + (1 + \bar{x})^m]^{1/m} & \text{при } -1 < \bar{x} < 1; \\ \frac{b}{2m^{1/m}} [(1 + \bar{x})^m - (\bar{x} - 1)^m]^{1/m} & \text{при } \bar{x} > 1; \\ 2^{(1-m)/m} \frac{b}{m^{1/m}} & \text{при } \bar{x} = 0. \end{cases}$$

Множитель N , входящий в уравнения перемещений (13.69), (13.70) и (13.70'), имеет следующее значение:

$$N = \kappa \frac{\omega(\lambda\theta)}{I^{1/m}} F(m, \nu), \quad (13.71)$$

где $\kappa = \pm 1$ в зависимости от выбора осей координат; I , $\omega(\lambda\theta)$, λ — функции ν , m , θ , определяемые по выражениям (13.66); $F(m, \nu)$ — множитель, зависящий от вида функции $\hat{f}(\sigma_m/\tau_i)$, входящий в исходное соотношение (13.45).

Значение $F(m, \nu)$ устанавливают из решения задачи для каждого конкретного вида соотношения (13.45). В табл. 13.2 приведены значения $F(m, \nu)$ для некоторых из рассмотренных выше исходных закономерностей. В этой же таблице помещены значения ν , вычисленные по формулам (13.47) и (13.48) для указанных закономерностей.

Интегральный оператор $\tilde{L}$, входящий в формулы (13.69), (13.70) и (13.70'), определяют из выражения (13.3). При этом

$$[1 + \tilde{L}] p = p(t) + \int_0^t p(\xi) K(t - \xi) d\xi. \quad (13.72)$$

В том случае, когда $p = \text{const}$, будем иметь

$$[1 + \tilde{L}] p = p \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right] = p \frac{A_0}{A(t)}, \quad (13.73)$$

где $K(t)$ — ядро ползучести, возможные виды которого рассмотрены в § 7.4. Если ползучесть не учитывают, то $K(t - \xi) = K(t) = 0$.

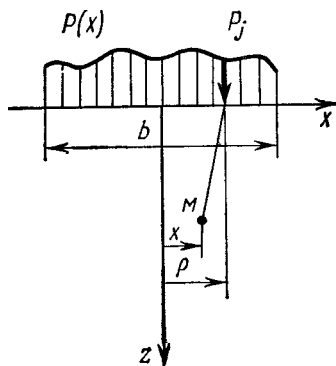


Рис. 13.3. Схема действия местной (полосовой) нагрузки

Уравнение состояния	Коэффициент $\nu = \frac{\frac{1}{2} \sigma_m \tau_l - \tau_l \varepsilon_m}{\sigma_m \tau_l + \tau_l \varepsilon_m}$	Коэффициент $F(m, \nu)$
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} \right]^{1/m}$ $\varepsilon_m = 0$	0,5	$\alpha \frac{2m-1}{2(1-m)}$, где $\alpha = \pm 1$
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} \right]^{1/m}$ $\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m}$	$\frac{1 - 2 \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{(1-m)/m}}{2 \left[1 + \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{(1-m)/m} \right]}$	$\alpha \frac{(m-\nu) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\nu+\nu^2} \right)^{(1-m)/m}}{(1-m) A_0^{1/m}}$
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} - \frac{\sigma_m}{C(t)} \right]^{1/m}$ $\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m}$	$\frac{1 - 2 \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left[\left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{1-m} - \frac{A_0}{C_0} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{-m} \right]^{1/m}}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left[\left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{1-m} - \frac{A_0}{C_0} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{-m} \right]^{1/m} \right\}}$	$\alpha \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(1-m)/m} \times$ $\times \frac{(m-\nu) \sqrt{1-\nu+\nu^2}}{(1-m) A_0^{1/m}} \times$ $\times \left[1 - \frac{A_0}{C_0} \frac{1+\nu}{\sqrt{3} \sqrt{1-\nu+\nu^2}} \right]^{1/m}$
$\gamma_l = \left[\frac{\tau_l}{A(t)} \right]^{1/m} - \left[\frac{\sigma_m}{C(t) \tau_l^{1-\eta/m}} \right]^{1/\eta}$ $\varepsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m} - \left[\frac{\tau_l}{E(t) \sigma_m^{1-\mu/m}} \right]^{1/\mu}$	$\frac{1 - 2 \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{1-m/m} \left[1 - \left(\frac{D_0 \tau_l}{E_0 \sigma_m} \right)^{1/\mu} - \left(\frac{A_0 \sigma_m}{C_0 \tau_l} \right)^{1/\eta} \right]}{2 \left\{ 1 - \left(\frac{A_0}{D_0} \right)^{1/m} \left(\frac{\sigma_m}{\tau_l} \right)^{(1-m)/m} \left[1 - \left(\frac{D_0 \tau_l}{E_0 \sigma_m} \right)^{1/\mu} - \left(\frac{A_0 \sigma_m}{C_0 \tau_l} \right)^{1/\eta} \right] \right\}}$	$\alpha \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(1-m)/m} \times$ $\times \frac{(m-\nu) (\sqrt{1-\nu+\nu^2})^{1-m/m}}{(1-m) A_0^{1/m}} \times$ $\times \left\{ 1 - \left[\frac{A_0^{\eta/m} \sqrt{3} (1+\nu)}{C_0 \sqrt{1-\nu+\nu^2}} \right]^{1/\eta} \right\}$

Введение в уравнение (13.70) интегрального оператора $\tilde{L}$ позволяет использовать это уравнение для определения осадки при любом законе возрастания нагрузки во времени. Допустим, например,

что при $(1 + \tilde{L}) = \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right] = [1 + \delta(t/T)^a]$ требуется определить

осадку под центром фундамента ($\bar{x}=0$) для случая, когда за период времени от 0 до t_1 (строительный период) нагрузка возрастает по линейному закону $p(t) = nt$, а начиная с момента t_1 становится постоянной: $p = p_1 = \text{const}$. Тогда, разбивая интеграл в (13.70) на два интеграла с пределами от 0 до t_1 и от t_1 до t_p , где t_p — срок службы сооружения, получим следующее значение осадки:

$$S(t) = 2^{(1-m)/m} N \frac{b p_1^{1/m}}{m^{1/m}} \left[1 + \frac{\delta}{T^a} \left(\frac{a}{a+1} t_1^a + t^a \right) \right]^{1/m}.$$

Если же считать, что нагрузка была постоянной с самого начального момента времени, то

$$S(t) = 2^{(1-m)/m} N \frac{b p^{1/m}}{m^{1/m}} \left[1 + \delta \left(\frac{t}{T} \right)^a \right]^{1/m}.$$

Для случая $m=1$ и $p = \text{const}$ задача об осадке с учетом того, что переменная величина p входит под знак интеграла в степени -1 , имеет следующее решение, соответствующее известной формуле теории упругости

$$S(x) = \frac{b(1-\nu)^2}{\pi E} \left[\bar{x} \ln \frac{|1-\bar{x}|}{1+\bar{x}} - \ln |1-\bar{x}^2| + 2 \right] p. \quad (13.74)$$

Реактивные давления. Распределение реактивных (контактных) давлений грунта основания по подошве жесткого ленточного фундамента находят из условия равенства перемещений точек участка контакта основания и фундамента:

$$u_{\theta(1)} + u_{\theta(2)} = \delta - f(x), \quad (13.75)$$

где $u_{\theta(1)} = u_{\theta(2)} = u_{\theta}$ — вертикальные смещения границы основания и подошвы фундамента, рассматриваемого как абсолютно жесткий полосовой штамп; δ — сближение подошвы штампа и основания в направлении оси z ; $f(x)$ — уравнение поверхности штампа, принимаемое для плоского штампа $f(x) = 0$.

В свою очередь, перемещение u_{θ} связано с неизвестным пока контактным давлением $p(x, t)$ зависимостью

$$u_{\theta}(t) = N [1 - \tilde{L}] \left[\int_{-b/2}^{b/2} \frac{p(\rho, t) d\rho}{|\rho - x|^{1-m}} \right]^{1/m}. \quad (13.76)$$

Подставив (13.76) в равенство (13.75), получим

$$W(x, t) - \int_0^t W(x, \zeta) K(t - \zeta) d\zeta = [\Phi(t)]^m, \quad (13.77)$$

где

$$W(x, t) = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{p(\rho, t) d\rho}{|\rho - x|^{1-m}}. \quad (13.78)$$

Решение задачи, заключающееся в отыскании неизвестной функции $p(x, t)$, сводится к решению интегральных уравнений (13.77) и (13.78) с учетом уравнения равновесия $\int_{-b/2}^{b/2} p(x, t) dx = P(t)$. Так, решив (13.77), получим

$$W(t) = [\Phi(t)]^m - \int_0^t [\Phi(\zeta)]^m R(t - \zeta) d\zeta, \quad (13.79)$$

где $R(t - \zeta)$ — резольвента ядра $K(t - \zeta)$. Далее, используя метод Н. Х. Арутюняна, будем иметь

$$W(t) = \frac{2P(t) \Gamma\left(\frac{3-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (b/2)^{1-m}}. \quad (13.80)$$

Окончательно выражение для определения реактивных давлений грунта на подошву жесткого фундамента будет иметь вид

$$p(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\pi^{3/2} (b/2) \sqrt{1 - \bar{x}^2}^m} P(t), \quad (13.81)$$

где $\bar{x} = 2x/b$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция; значения ее табулированы.

Как видно, множитель N , зависящий от вида исходного закона деформирования грунта (13.45), в окончательную формулу не входит, и эта формула справедлива для любого степенного закона, удовлетворяющего условиям (13.45) и (13.48). При линейном законе ($m=1$) распределение реактивных давлений описывается формулой теории упругости

$$p(x) = \frac{P}{\pi (b/2) \sqrt{1 - \bar{x}^2}}. \quad (13.82)$$

Анализ формул. Во все рассмотренные формулы входит показатель степени m , являющийся характеристикой нелинейности закона деформирования и существенно изменяющий характер распределения напряжений и перемещений в основании по сравнению с решениями теории упругости.

Сопоставим формулу (13.70'), определяющую осадку поверхности основания под действием равномерно распределенной нагрузки, при $m \neq 1$ с соответствующей формулой (13.74) теории упругости. Как следует из структуры формулы (13.74), осадки поверхности упругого основания должны безгранично возрастать и $S \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Очевидно, что это положение противоречит физическому смыслу.

Другой особенностью решения (13.74) является то обстоятельство, что в это решение входит произвольная постоянная, получающаяся при интегрировании и значение которой определить невозможно. А поскольку значение произвольной постоянной должно суммироваться с величиной осадки, то абсолютное значение последней получено быть не может. Поэтому формула теории упругости (13.74) позволяет определить лишь относительную осадку, т. е. перемещение одной точки поверхности грунта по отношению к другой. Формула же (13.70') теории нелинейного деформирования свободна от этих недостатков. Согласно указанной формуле, перемещения поверхности асимптотически затухают и $S \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; соответственно эта формула дает абсолютные значения осадок.

Влияние фактора времени непосредственно сказывается на величине перемещений, которые нарастают пропорционально функции ползучести $\left[1 + \int_0^t K(t - \zeta) d\zeta \right]$. На напряженное же состояние основания ползучесть, как это следует из формул (13.68) и (13.81), влияния не оказывает и распределение напряжений будет изменяться во времени только при изменении во времени же внешней нагрузки.

Указанное обстоятельство вытекает из принятого вида уравнения ползучести (13.45), который соответствует случаю, наиболее близко отвечающему реальным условиям, когда закон деформирования в любой момент времени остается подобным начальному. Этот случай отображен схемой на рис. 5.6, в. Таким образом, при законе деформирования (13.45) напряженное состояние во времени меняться не будет, а деформированное состояние будет оставаться подобным начальному.

Если же допустить, что закон деформирования меняется во времени (изохронные кривые не подобны, как это показано на рис. 5.6, а, б), то и напряженное состояние будет меняться от начального до некоторого установившегося. Так, если начальное состояние описывается линейным законом, а при $t > 0$ будет справедлив степенной закон, то характер распределения напряжений в начальный момент времени будет соответствовать решению теории упругости, а затем этот характер изменится и будет определяться рассмотренными выше формулами для нелинейного закона. Вид напряженного и деформированного состояний будет меняться и в том случае, когда сдвиговые и объемные деформации протекают во времени по различным законам (например, сдвиговая деформация незатухающая, а объемная — затухающая), а также во всех других случаях,

когда кривые ползучести не подобны. Во всех этих случаях коэффициент ν будет переменным во времени. Условием же неизменяемости напряженного состояния будет рассмотренное выше условие $\nu = \text{const}$.

Отметим, что напряженное и деформированное состояния могут изменяться во времени и в некоторых других случаях, например когда усилия в грунте вызываются заданными деформациями, в смешанных задачах, рассматривающих области до предельного и предельного состояний, описываемых различными законами, в задачах теории консолидации, когда перераспределяется давление в поровой воде и в скелете грунта и пр.

Для примера выполним расчет основания ленточного фундамента, загруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 1,8 \cdot 10^5$ Па при ширине фундамента $b = 200$ см. Грунт согласно данным трехосных испытаний подчиняется закономерностям (13.49):

$$\gamma_t = \left[\frac{\tau_t}{A(t)} - \frac{\sigma_m}{C(t)} \right]^{1/m}; \quad \epsilon_m = \left[\frac{\sigma_m}{D(t)} \right]^{1/m},$$

где $m = 0,5$.

Закономерности ползучести, установленные из тех же трехосных испытаний, описываются выражениями:

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + \tilde{L}}; \quad C(t) = \frac{C_0}{1 + \tilde{L}}; \quad D(t) = \frac{D_0}{1 + \tilde{L}},$$

где $1 + \tilde{L} = 1 + \int_0^t K(t) dt = [1 + \delta(t/T)^a]$, причем $\sigma_m \leq \frac{C(t)}{A(t)} \tau_t$.

Численные значения параметров: $A_0 = 60,3 \cdot 10^5$ Па, $C_0 = 10^7$ Па, $D_0 = 2,23 \cdot 10^7$ Па, $a = 0,06$, $T = 1$ мес, $\delta = 1,3$. Значение коэффициента ν , вычисленное по формуле, приведенной в строке 3 табл. 13.2, $\nu = 0,35$.

Определим осадку поверхности основания, полагая фундамент абсолютно гибким. Для этого используем формулу (13.70'), предварительно вычислив значения множителя N по выражению (13.71):

$$N = \kappa \frac{\omega(\lambda\theta)}{I^{1/m}} F(m, \nu).$$

Согласно (13.66), имеем:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{0,5} + \frac{0,35}{1 - 0,35} \left(1 - \frac{1}{0,5}\right)} = 0,96;$$

$$\omega\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{0,96} \sin\left(0,96 \frac{\pi}{2}\right) = 1,04;$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} [\cos(0,96\theta)]^{0,5} \cos \theta d\theta \approx 0,35.$$

Далее, согласно строке 3 табл. 13.2, получим

$$F(m, v) = \frac{2(0,5 - 0,35) \sqrt{1 - 0,35 + 0,35^2}}{(0,35)^2 \sqrt{3} (1 - 0,5) 60,3^2} \times \\ \times \left[1 - \frac{60,3 \cdot 10^5 (1 + 0,35)}{10^7 \sqrt{3} \sqrt{1 - 0,35 + 0,35^2}} \right]^2 = 7,78 \cdot 10^{-4}.$$

Отсюда

$$N = \frac{1,04}{(0,35)^2} 0,916 \cdot 10^{-4} = 7,78 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{10^5 \text{ Па}} \right)^2.$$

Подставив это значение в формулу (13.70'), будем иметь:

$$S(x, t) = 7,78 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 1,8^2 \cdot 4 [\sqrt{1 - \bar{x}} + \sqrt{1 + \bar{x}}]^2 [1 + \tilde{L}]^2$$

$$\text{при } |\bar{x}| < 1;$$

$$S(x, t) = 1,0 [\sqrt{1 + \bar{x}} - \sqrt{\bar{x} - 1}]^2 [1 + \tilde{L}] \text{ при } \bar{x} > 1;$$

$$S(x, t) = 1,0 \text{ при } \bar{x} = 0.$$

Обозначив, как и ранее, $\bar{x} = x/(b/2)$, в дальнейшем осадку будем вычислять в безразмерной форме: $\bar{S} = S/(b/2)$. Для сравнения определим осадку также по формуле (13.74) теории упругости. При этом для возможности сопоставления примем, что осадка под центром фундамента для обоих случаев одинакова: $\bar{S} = 1 \cdot 10^{-2}$. Тогда модуль линейной деформации грунта можно определить из формулы (13.74) при $x=0$:

$$E = \frac{4}{\pi} \frac{b/2}{S} (1 - \nu^2) p = \frac{4}{\pi} 0,01 (1 - 0,35^2) / 1,8 = 200 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Подставив это значение в формулу (13.74), получим выражение для определения относительной осадки упругой полуплоскости

$$\frac{S(x, t)}{b/2} = \frac{2(1 - 0,35^2)}{200\pi} 1,8 \left[\bar{x} \ln \frac{|1 - \bar{x}|}{1 + \bar{x}} - \ln |1 - \bar{x}^2 + 2| \right].$$

Результаты вычислений по обоим формулам сводим в табл. 13.3.

Эпюры распределения осадок по поверхности основания показаны на рис. 13.4, а. Как видно, осадка поверхности, вычисленная по решению теории упругости, принимает отрицательное значение и неограниченно возрастает. Мы уже отмечали, что такой характер нарастания противоречит действительности. Осадка же, вычисленная по теории нелинейного деформирования, довольно близко от границы нагрузки начинает затухать, что соответствует реальной «воронке» смещений поверхности.

Приведенные подсчеты относятся к начальному моменту времени $t=0$. В дальнейшем же осадка будет развиваться пропорцио-

Значения относительной осадки ($\bar{S}$, 10^2), вычисленные для нелинейного и линейного законов деформирования

$\bar{x} = \frac{2x}{b}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	83,0
По нелинейной формуле (13.70')	1,0	1,0	0,96	0,90	0,80	0,50	0,27	0,21	0,173	0,147	0,0875
По линейной формуле (13.74)	1,0	0,99	0,92	0,805	0,635	0,31	-0,14	-0,225	-0,396	-0,520	

нально функции $(1 + \bar{L})$, т. е.

$$S(x, t) = S_0(x) [1 + 1,3t^{0,06}]^{1/0,5},$$

где S_0 — начальные значения осадки, приведенные в табл. 13.3.

График развития осадки во времени показан на рис. 13.4, б.

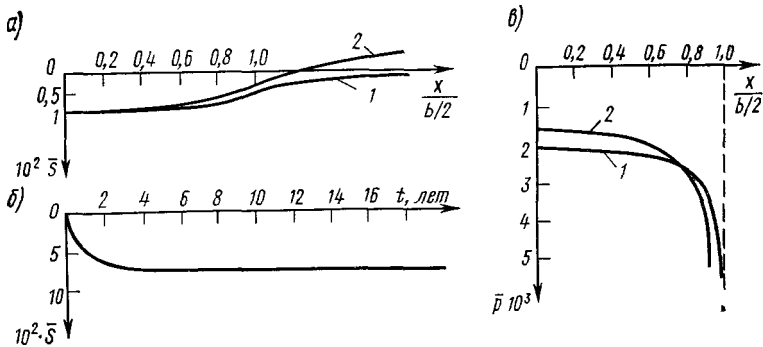


Рис. 13.4 Эпюра осадок (а), кривая развития осадки во времени (б) и эпюра реактивных давлений (в)

1 — при нелинейном законе деформирования, 2 — при линейном

Определение реактивных давлений. Реактивные давления вычисляем по формуле (13.81), принимая силу P равной $P = pb \cdot 1,0 = 7,6 \cdot 10^3$ Н. Учитывая принятые исходные данные, получим

$$p(x) = \frac{\Gamma(1,25) \Gamma(0,25) \sin(0,25\pi)}{(\sqrt{\pi})^3 100 (1 - \bar{x}^2)^{0,25}} 7,6 \cdot 10^2 (10^5 \text{ Па}).$$

Для сопоставления вычислим давление также по формуле (13.82) теории упругости:

$$p(x) = \frac{7,6 \cdot 10^2}{\pi \cdot 100 \sqrt{1 - \bar{x}^2}} (10^5 \text{ Па}).$$

Результаты вычислений сведены в табл. 13.4, причем для удобства значения нагрузки указаны в безразмерной форме: $\bar{p} = (p \cdot 1 \cdot 1) / P$.

Эпюры распределения реактивных давлений приведены на рис. 13.4, в. Как видно, эпюра для нелинейного закона более равномерна, что ближе соответствует опытным данным для глинистых грунтов. Однако, как и по решению теории упругости, краевые значения реакции неограниченно возрастают. Это объясняется видом принятой зависимости (13.49), по которой напряжения сдвига неограниченно возрастают с ростом деформаций.

Для получения конечных значений реактивных давлений в исходное уравнение следует ввести условие предельного состояния ($\tau_i = \tau_{i(s)}$) при $\gamma_i = \gamma_{i(s)}$ или принять зависимость (например, дробно-линейную), в которую будет входить предел текучести $\tau_{i(s)}$. Однако в этих случаях для решения задачи придется прибегать к помощи ЭВМ.

В качестве примера на рис. 13.5 показаны результаты такого решения, полученного В. Н. Широковым и другими* для случая дробно-линейного закона деформирования. На графике изображены эпюры распределения вертикальных перемещений u_z и напряжений σ_z (в безразмерных координатах) под центром полосового жесткого фундамента. Там же для сопоставления приведены соответствующие эпюры, получаемые по теории упругости. Как видно, и перемещения, и напряжения при нелинейном законе затухают по глубине значительно скорее, чем это предсказывает теория упругости.

Некоторые выводы из сопоставлений. Из сопоставления результатов подсчетов по формулам теорий нелинейного и линейного деформирования видно, что учет нелинейности, а также таких факторов, как влияние среднего нормального напряжения, приближает теоретические решения к реальному поведению грунта.

Можно отметить следующие преимущества решений, получаемых для нелинейных законов деформирования:

вертикальные перемещения и напряжения под фундаментом, определенные по этим законам, затухают более интенсивно, чем при решении по теории упругости, что соответствует ограниченной глу-

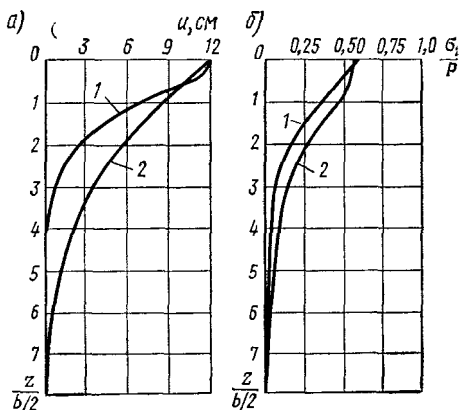


Рис. 13.5. Эпюры вертикальных перемещений (а) и напряжений (б) под центром полосовой нагрузки:

1 — при нелинейном законе деформирования; 2 — при линейном (данные В. Н. Широкова и др.)

* См. сноску на с. 408.

Значения реактивных давлений $\overline{p} \cdot 10^3$

$\bar{x} = \frac{2x}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
По нелинейной формуле (13.81)	2,11	2,115	2,13	2,18	2,20	2,20	2,36	2,50	2,72	3,19	5,60
По линейной формуле (13.82)	1,59	1,60	1,62	1,67	1,74	1,84	1,99	2,23	2,66	3,65	11,30

бине сжимаемой толщи грунта; именно такое представление о работе грунтов основания (сжимаемый слой ограниченной толщины) соответствует современным представлениям и нашло отражение в СНиП II—15—74;

осадки поверхности грунта затухают недалеко за пределами фундамента, стремясь к нулю по мере удаления от последнего; это означает, что по распределительной способности нелинейно-деформируемый грунт занимает промежуточное положение между моделью Винклера (осадка только под нагрузкой) и моделью упругого полупространства (неограниченная деформация поверхности за пределами нагрузки); такая промежуточная модель ближе соответствует современным представлениям и опытным данным;

эпюры реактивных давлений имеют более выравненное очертание, чем при решении по теории упругости, вследствие чего уменьшаются расчетные значения изгибающих моментов, действующих на фундамент.

§ 13.6. ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ

Условия опытов. Ниже приведены данные о распределении напряжений и перемещений в массиве нелинейно-деформируемого грунта, загруженного полосовой нагрузкой, и эти данные сопоставляются с решениями по теории упругости. Указанные данные получены А. Л. Миндичем и автором книги («Основания, фундаменты и механика грунтов» 1974, № 6; 1976, № 6) на основании испытаний в лотке на вдавливание полосового штампа в слой глинистого грунта (каолин, $W=36\%$, $W_L=46,5\%$, $W_p=28,6\%$), подстилаемого жестким основанием.

В ходе опытов измерялись напряжения и перемещения в различных точках грунта, причем в каждую из них закладывалось по три датчика напряжений в различных плоскостях, что позволяло определить все компоненты напряжений.

Перемещение точек грунта фиксировалось с помощью специальных приспособлений на подвижном и неподвижном экранах, что позволяло получить траекторию этих перемещений и определить компоненты деформаций.

Опыты выполнялись при различных соотношениях $\lambda=b/h$, где h — толщина слоя глинистого грунта, b — ширина полосового штам-

па; это соотношение варьировалось от 0,25 до 3,0. Нагрузка прикладывалась ступенями по $0,15 \cdot 10^5$ Па с выдерживанием каждой ступени до стабилизации деформаций; фактор времени не рассматривался.

Испытания на трехосное сжатие показали, что зависимость между напряжениями и деформациями для данного грунта выражается соотношениями:

$$\sigma_m = k \varepsilon_m, \quad \tau_l = \bar{G} \gamma_l, \quad \bar{G} = \frac{(\tau_s^* / \sigma_0) \sigma_m}{(\tau_s^* / G_0^*) + \gamma_l}, \quad (13.83)$$

где $\tau_s^* = \tau_s(\sigma_0 / \sigma_m)$; $G_0^* = G_0(\sigma_0 / \sigma_m)$; τ_s — предел текучести; $\sigma_0 = 10^5$ Па. Согласно опытным данным, $G_0^* = 38,8 \cdot 10^5$ Па, $\tau_s^* = 0,68 \cdot 10^5$ Па.

Зависимость между нагрузкой и осадкой. Такая зависимость, полученная из опытов, выражается формулой (13.37)

$$S_\infty = \frac{(1 - \nu^2) n b p}{E_\infty (1 - p/p_\infty)}, \quad (13.84)$$

где n — коэффициент, учитывающий влияние подстилающего жесткого основания; $p_\infty = a\lambda / (\lambda - \beta)$ — предельная нагрузка.

Формулу (13.84) можно привести к виду $Ap/S = p_\infty/p - 1$, где $A = (1 - \nu^2) nb / E_\infty$. Следовательно, если эта формула справедлива, то при построении обобщенного графика в координатах $Ap/S - p/p_\infty$ все опытные точки для любых соотношений $\lambda = b/h$ должны лечь на единую кривую.

Такой график показан на рис. 13.6, где кроме результатов испытаний в лотке приведены данные опытов в натуре. Точками на этом графике показаны опытные значения, полученные из испытания на вдавливание полосового штампа шириной b в слой глинистого грунта толщиной h при различных соотношениях $\lambda = h/b$. Сплошной кривой показаны результаты теоретических вычислений по формуле (13.84). Как видно, все опытные точки кучно лежат около теоретической кривой (коэффициент корреляции $r = 0,93$), что свидетельствует о хорошем соответствии формулы (13.84) данным опытов.

Отметим следующее обстоятельство. Как следует из (13.83), закономерности объемной и сдвиговой деформаций для данного грунта существенно различны. Объемные деформации подчиняются линейной зависимости, а сдвиговые — нелинейной. Соответственно результирующую кривую «осадка — нагрузка» нужно было бы

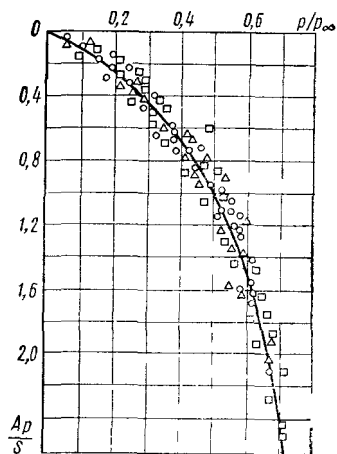


Рис. 13.6. Сопоставление опытного определения осадки с результатами вычислений по формуле (13.84)

отображать каким-то новым законом, являющимся комбинацией законов сдвигового и объемного деформирования. Но, как видно из рис. 13.6, эта кривая описывается дробно-линейной зависимостью (13.84), т. е. такой же зависимостью, что и для сдвиговых деформаций (конечно, с иными параметрами). Это свидетельствует о том, что на процесс осадки преимущественное влияние оказывают сдвиговые, а не объемные деформации. Тем самым в порядке первого приближения мы можем при оценке осадок основания принимать закон сдвигового деформирования в качестве исходного закона, полагая при этом, что $v = \text{const}$, что и постулировалось ранее.

Напряженно-деформированное состояние. Наглядное представление о характере напряженного и деформированного состояний дают эллипсы напряжений, определяющие величину и направление главных напряжений σ_1 и σ_2 в различных точках массива, и лепестки деформаций, отображающие величину и направление главных деформаций ϵ_1 и ϵ_2 .

Напомним, что уравнение кривой деформирования, т. е. геометрического места точек конца отрезка, проведенного из рассматриваемой точки и пропорционального величине деформации в данном направлении, записывается в следующей параметрической форме:

$$\alpha_1 = \arctg \sqrt{\left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right|} \sin t; \quad \bar{r}_1 = \frac{|\epsilon_1 \epsilon_2| \cos^2 t}{|\epsilon_2| + |\epsilon_1| \sin^2 t};$$

$$\alpha_2 = \arctg \sqrt{\left| \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right|} \sin t; \quad \bar{r}_2 = \frac{|\epsilon_1 \epsilon_2| \cos^2 t}{|\epsilon_1| + |\epsilon_2| \sin^2 t},$$

где α_1 и $\bar{r}_1$ — параметры уравнения лепестков, построенных в направлении ϵ_1 и характеризующих деформациями положительного знака (сжатие); α_2 и $\bar{r}_2$ — то же, для деформаций отрицательного знака (растяжение).

На рис. 13.7 показаны такие построения по данным одного из опытов. Справа от оси симметрии приведены опытные данные, слева — вычисленные по теории упругости. Значения ϵ , σ , α с одним штрихом соответствуют нагрузкам $p = 0,3 \cdot 10^5 = 0,21 p_\infty$ для графика а и $p = 0,15 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,1 p_\infty$ для графика б, с двумя штрихами — нагрузке $p = 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,55 p_\infty$ для обоих графиков.

Вычисления по теории упругости, приведенные для сопоставления, выполнены по формулам Д. М. Бурмистера (1956). Из этого сопоставления видно, насколько сильно оказывает влияние на деформации нелинейность. Так, если, по теории упругости, увеличение деформации должны быть пропорционально росту нагрузок, то фактически с возрастанием нагрузки в три раза деформации увеличились в 1,5—10 раз. При этом, если, по теории упругости, во всех точках сжимающие напряжения ϵ_1 по абсолютной величине должны быть больше растягивающих ϵ_2 , то фактически это условие соблюдается лишь для точек, расположенных по оси симметрии, тогда как в точках под осью, проходящей под краем штампа, $|\epsilon_1| < |\epsilon_2|$.

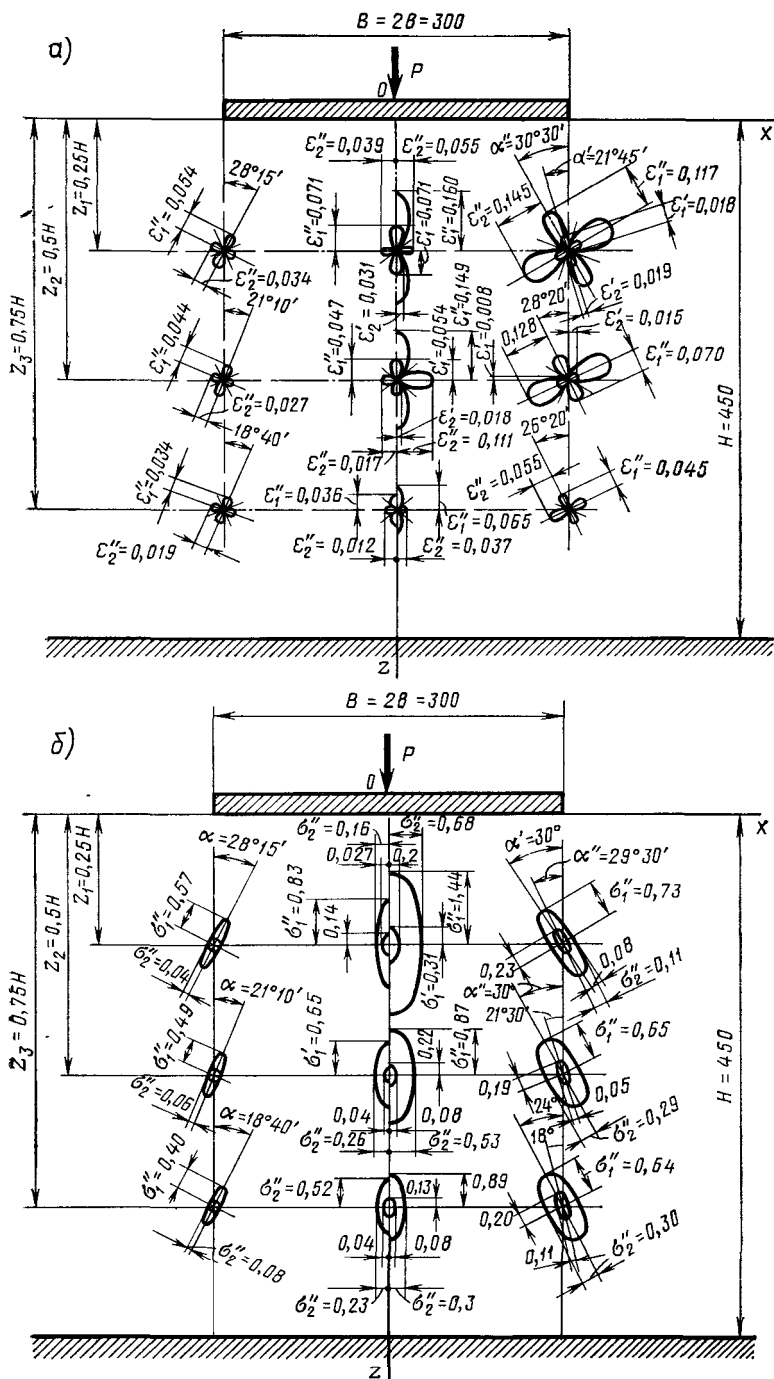


Рис. 13.7. Лепестки деформаций (а) и эллипсы напряжений грунта (б)

О повороте осей главных напряжений и главных деформаций. По теории упругости, направления осей главных напряжений и главных деформаций с ростом нагрузки не должны меняться. В действительности же возрастание нагрузки вызывает поворот этих осей, что видно из сопоставления углов наклона α' и α'' , показанных на рис. 13.7. Однако углы поворота осей главных напряжений и главных деформаций не намного отличаются друг от друга и направления этих осей примерно совпадают. Например, при нагрузке $p=0,55p_\infty$ углы наклона главных осей напряжений α_σ и главных осей деформации α_ϵ к вертикальной оси z на различной глубине составляют (рис. 13.7):

$z=0,25 \text{ H},$	$\alpha_\sigma''=30^\circ,$	$\alpha_\epsilon''=30^\circ 30';$
$z=0,5 \text{ H},$	$\alpha_\sigma''=30^\circ,$	$\alpha_\epsilon''=28^\circ 20';$
$z=0,75 \text{ H},$	$\alpha_\sigma''=24^\circ,$	$\alpha_\epsilon''=26^\circ 20'.$

Это означает, что с определенным приближением выполняется условие соосности компонентов девиатора напряжений и девиатора деформаций (см. § 12.3). Отметим, что с ростом нагрузки различие между α_σ и α_ϵ увеличивается.

Распределение напряжений по глубине. Эпюры σ_z/p зависят от нагрузки и, следовательно, значения σ_z не пропорциональны p , как это следует из решения теории упругости.

Резко отличаются от теоретических и очертания эпюр, причем форма эпюр зависит от относительной толщины слоя сжимаемого грунта $\lambda=h/b$. В пределах ширины штампа и особенно по его центральной оси происходит концентрация напряжений и эпюры принимают существенно криволинейное очертание с максимальным значением ординат в середине толщины слоя (при малых λ) или в верхней трети его (при больших λ). Величина этих ординат в данном примере оказалась на 75—100% больше вычисленных по теории упругости.

Зарождение зон предельного напряженного состояния. Согласно (13.83), предельное состояние грунта, характеризующее условием $\tau_t=\tau_s$, наступает тогда, когда деформация сдвига достигнет неограниченно большого значения $\gamma_t \rightarrow \infty$ и соответственно $\bar{G} \rightarrow 0$. Таким образом, в точках, где величина приведенного модуля сдвига $\bar{G}$ будет минимальной, напряженное состояние грунта будет в наибольшей степени приближаться к предельному.

На рис. 13.8 показаны линии равных значений $\bar{G}$ для одного из опытов при двух значениях нагрузок, составляющих 0,2 и 0,55 от предельной. В первом случае ($p=0,2p_\infty$) наибольшая концентрация напряжения происходит в центре слоя, где $\bar{G}$ достигает наименьшего значения. С повышением нагрузки до значения $p=0,55p_\infty$ появляются новые зоны концентрации напряжений — в точках, расположенных по оси, проходящей под краем штампа. Здесь значение $\bar{G}$ падает до $0,96 \cdot 10^5$ Па (при максимальном значении $\bar{G}=$

ных давлений в пластичной полосе, сжимаемой двумя пуансонами, и свидетельствует об образовании под штампом жесткого ядра.

При сравнительно большой толщине сжимаемого слоя очертания опытных эпюр контактных давлений под штампом становятся

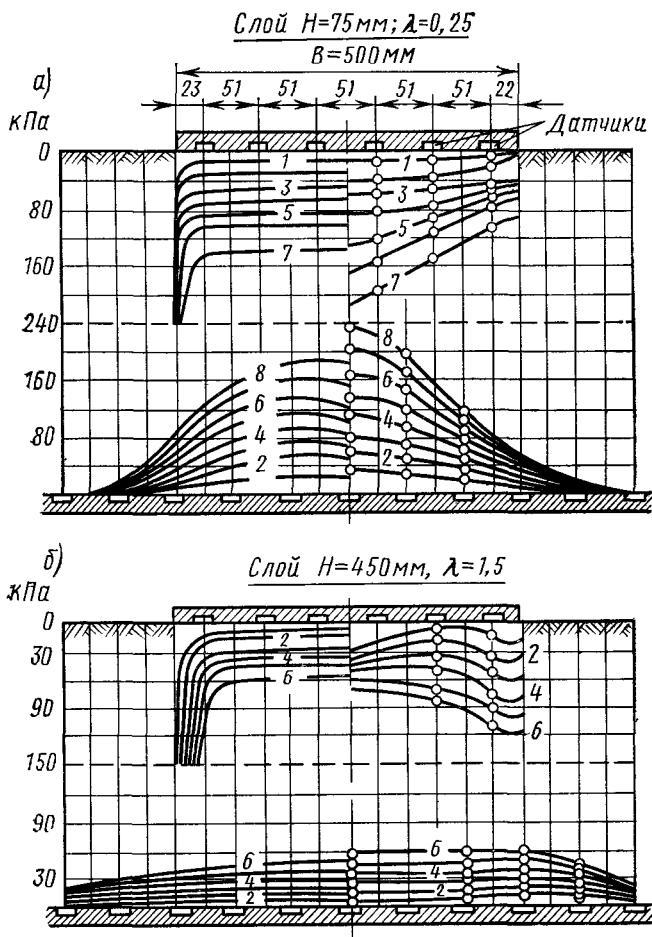


Рис 139. Эпюры контактных напряжений — опытных (справа) и вычисленных по решениям теории упругости (слева):

a — при относительной толщине сжимаемого слоя $h/b=0,25$ и при нагрузке p , равной 1 — 0,2, 2 — 0,4, 3 — 0,6, 4 — 0,8, 5 — 1,0, 6 — 1,2, 7 — 1,4, 8 — 1,6 10^5 Па, b — то же, при $h/b=1,5$ и при p , равном: 1 — 0,15, 2 — 0,3, 3 — 0,37, 4 — 0,45, 5 — 0,75, 6 — 0,9 10^5 Па

отличными от теоретических, начиная даже с малых нагрузок. Эпюра имеет сначала (при малых λ) седлообразное, а затем волнообразное очертание. Во всех случаях крайние ординаты не возрастают безгранично (как это следует из теории упругости), а

имеют конечное значение, что согласуется с видом исходного уравнения (13.83), согласно которому напряжение сдвига ограничено предельным значением $\tau_i \leq \tau_s$.

Очертание эпюры контактных напряжений по поверхности жесткого подстилающего слоя близко к получаемому из решения теории упругости, полученному М. И. Горбуновым-Посадовым.

Таким образом, рассматриваемые выше опытные данные свидетельствуют о том, что учет нелинейного закона деформирования позволяет получить более достоверную модель основания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые единицы измерения системы СИ и их соотношения с единицами других систем

Величина	Наименование и обозначение единицы	Единица в других системах	Перевод единиц других систем в единицы СИ
Длина	метр (м) $1 \text{ м} = 10^3 \text{ мм} = 10^6 \text{ мкм}$ (микрометров)	микрон (мк), ангстрем (Å)	$1 \text{ мк} = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$ $1 \text{ Å} = 10^{-4} \text{ мкм} = 10^{-10} \text{ м}$
Сила, нагрузка	ньютон (Н) $1 \text{ Н} = 10^{-3} \text{ кН} = 10^{-6} \text{ МН}$	дина (дин), килограмм-сила (кГ)	$1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$ $1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$ $1 \text{ Г} = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \approx 10 \text{ мН}$
Механическое напряжение	паскаль (Па) ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$) $1 \text{ Па} = 10^{-3} \text{ кПа} = 10^{-6} \text{ МПа}$	килограмм-сила на квадратный сантиметр (кГ/см ²)	$1 \text{ кГ/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па} = 10^{-1} \text{ МПа}$ $1 \text{ кГ/мм}^2 = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 10^7 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}$
Поверхностная нагрузка	ньютон на кв. м (Н/м ²) $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$	кГ/м ²	$1 \text{ кГ/м}^2 = 9,81 \text{ Н/м}^2 \approx 10 \text{ Н/м}^2$
Давление	паскаль (Па)	бар, атмосфера техническая (ат), кГ/см ² , атмосфера физическая (атм), дин/см ²	$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$ $1 \text{ ат} = 1 \text{ кГ/см}^2 = 0,98 \times 10^5 \approx 10^5 \text{ Па}$ $1 \text{ атм} = 76 \text{ см высоты рт. ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ $1 \text{ дин/см}^2 = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \approx 10^{-1} \text{ Па}$
Работа, энергия	джоуль (Дж)	килограмм-сила-метр (кГ·м), эрг	$1 \text{ кГ} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ Дж} \approx 10 \text{ Дж}$ $1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$
Количество теплоты	джоуль (Дж)	калория (кал), килокалория (ккал)	$1 \text{ кал} = 4,19 \text{ Дж}$ $1 \text{ ккал} = 10^3 \text{ кал} = 4,19 \times 10^3 \text{ Дж} = 4,19 \text{ кДж}$
Мощность	ватт (Вт)	кГ·м/с, кал/с	$1 \text{ кГ} \cdot \text{м/с} = 9,8 \text{ Вт} \approx 10 \text{ Вт}$ $1 \text{ кал/с} = 4,19 \text{ Вт}$ $1 \text{ ккал/с} = 4,19 \text{ кВт}$
Вязкость (коэффициент вязкости)	ньютон-секунда кв. м. (Н·с/м ²)	на пуаз (П), дин·с/см ²	$1 \text{ П} = 1 \text{ дин} \cdot \text{с/см}^2 = 1,2 \times 10^3 \text{ Г} \cdot \text{с/см}^2 = 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$
Вес	ньютон (Н) ($1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$)	кГ (кгс)	$1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
2. Войтковский К. Ф. Механические свойства льда. Изд-во АН СССР, 1960.
3. Вялов С. С. Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов. Изд-во АН СССР, 1959.
4. Вялов С. С., Зарецкий Ю. К. [и др.]. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений. Изд-во АН СССР, 1962.
5. Вялов С. С., Городецкий С. Э. [и др.]. Методика определения характеристик ползучести длительной прочности и сжимаемости мерзлых грунтов. «Наука», 1966.
6. Вялов С. С., Зарецкий Ю. К. [и др.]. Кинетика структурных деформаций и разрушения глин. Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов. Стройиздат, 1973.
7. Гейнман Г. А. Вопросы прочности и деформируемости грунтовых сред. Сб. «Строительные конструкции», вып. 4, 1970.
8. Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практические применения. Гостройиздат, 1948.
9. Гольденблат Н. Н., Николаенко Н. А. Теория ползучести строительных материалов и ее приложения. Гостройиздат, 1960.
10. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов, т. I, II. Стройиздат, 1971, 1973.
11. Ержанов Ж. С. [и др.]. Ползучесть осадочных горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1970.
12. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов. «Наука», 1967.
13. Ильющин А. А. Пластичность. Изд-во АН СССР, 1963.
14. Исследование реологических свойств грунтов. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 38, «Энергия», 1968.
15. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиздат, 1960.
16. Ларионов А. К. Инженерно-геологическое изучение структуры рыхлых осадочных пород. «Недра», 1966.
17. Ломизе Г. М. [и др.]. Вопросы прочности и деформируемости грунтов. Сб., Баку, 1966.
18. Ломизе Г. М. [и др.]. Вопросы механики грунтов и строительство на лёссовых основаниях. Сб., Грозный, 1970.
19. Маслов Н. Н. Длительная устойчивость и деформация смещения подпорных стенок. «Энергия», 1968.
20. Маслов Н. Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии. «Высшая школа», 1968.
21. Малнин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. «Машиностроение», 1968.
22. Месчан С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд-во АН Арм. ССР, 1967.
23. Месчан С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. «Недра», 1974.
24. Мустафаев А. А. Основы механики просадочных грунтов. Стройиздат, 1976.
25. Надан А. Пластичность и разрушение твердых тел, т. I. ИЛ, 1954; т. II. «Мир», 1969.
26. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Физика почв. «Наука», 1967.
27. Никольский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. ВИНТИ, 1972.

28. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов. Сб. Изд-во АН СССР, 1963.
29. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. «Наука», 1966.
30. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. К. Кинетическая природа прочности твердых тел. «Наука», 1974.
31. Реология, теория и ее приложения. Под ред. Эйриха. ИЛ, 1962.
32. Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию. Изд. нефтегорнотопливной литературы, 1963.
33. Рейнер М. Реология. «Наука», 1965.
34. Ржаницин А. Р. Теория ползучести. Стройиздат, 1968.
35. Седов Л. И. Механика сплошной среды. «Наука», 1970.
36. Сергеев Е. М., Голодковский Г. А. [и др.]. Грунтоведение. Под ред. Е. М. Сергеева. Изд-во МГУ, 1971.
37. Тер-Степанян Г. И. О длительной устойчивости склонов. Изд-во АН Арм. ССР, 1961.
38. Труды I и II Всесоюзных симпозиумов по реологии грунтов. Изд. Ереванского университета, 1973; 1976.
39. Труды IV—VIII Международных конгрессов по механике грунтов и фундаментостроению. Под ред. Н. А. Цытовича. Изд-во АН СССР, 1957; Стройиздат, 1961, 1965, 1969, 1973.
40. Флорин В. А. Основы механики грунтов. Т. I, II. Госстройиздат, 1959, 1961.
41. Хархута Н. Н., Иевлев В. М. Реологические свойства грунтов. Автотрансиздат, 1961.
42. Цытович Н. А. Механика грунтов. Стройиздат, 1963; «Высшая школа», 1963, 1973.
43. Цытович Н. А. Механика мерзлых грунтов. «Высшая школа», 1973.
44. Цытович Н. А., Зарецкий Ю. К. [и др.]. Прогноз скорости осадок оснований сооружений (консолидация и ползучесть многофазных грунтов). Стройиздат, 1967.
45. Черкасов И. И. Механические свойства грунтовых оснований. Автотрансиздат, 1958.
46. Шукле Л. Реологические проблемы механики грунтов. Стройиздат, 1973.
47. Bishop A. W., Lovenbury H. T. Creep characteristics of two undisturbed clays. Proc. 7-th ICSMFE, v. I, Mexico, 1969.
48. Folque J. B. Reologia de solos nao suturades (Rheology of nonsutureted soils), Lisboa, 1961.
49. Geuse E. C. W. A., Tan Tjong-kie. The mechanical behavior of clays. Proc. 2-d Intern. Congresses of Rheology, London, 1954.
50. Haefeli R. Creep and progressive failure in snow, soil, rock and ice. Proc. 6-th ICSMFE, v. III, Toronto, 1966.
51. IUTAM Symposium Grenoble. Rheology and soil mechanics. Springer verlog, Berlin — New-Jork, 1966.
52. Kisiel I., Lysik R. Zarys reologii gruntow. Dzialanie obciazenia statycznego na grunt. Warszawa, 1966.
53. Mitchell J. K., Campanella R. G., Singh A. Soil creep as a rate process. Journ Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE, v. 94, N SM-1, 1968.
54. Morgenstern N. R. Structural and physicochemical effectson properties of clays. Proc. 7-th ICSMFE, v. 3, Mexiso, 1969.
55. Proceedings of the III—IX Intern. Conf. on Soil mech and Found. Eng. (ICSMFE), Zurich, 1953; London, 1957; Paris, 1961; Montreal, 1965; Mexico, 1969; Moscow, 1973, Tokyo, 1977.
56. Roscoe K. H. The influence of strains in soil mechanics. Geotechnique, v. 20, N 2, 1970.
57. Scott R. T., Hon-Yim Ko. Stess deformation and strength characteristics. State of the Art volume 6-th ICSMFE, Mexico, 1969.
58. Singh A., Mitchell J. K. Creep potencial and creep ruture of soils. Proc. 7-th ICSMFE, v. I, Mexico, 1969.
59. Skempton A. W. Long therm stabilitg of clays slopes. «Geotechnique».
60. Tan Tjong-kie. Deformation of the rheological parameters and the hardling coefficients of clays. IVTAM Simp. Grenoble, 1966.

О Г Л А В Л Е Н И Е



	Стр.
Введение	3

Г л а в а 1

Реологические свойства грунтов

§ 1.1. Особенности деформирования грунтов	6
§ 1.2. Основные понятия и определения реологии	9
§ 1.3. Исследования по реологии грунтов	15
§ 1.4. Примеры деформаций сооружений	22

Г л а в а 2

Структура и структурные связи грунтов

§ 2.1. Состав и строение грунтов	29
§ 2.2. Компоненты грунта	31
§ 2.3. Взаимодействие между твердыми и жидкими компонентами грунта	34
§ 2.4. Силы взаимодействия между твердыми частицами грунта	37
§ 2.5. Межчастичные связи в грунте	42
§ 2.6. Структура грунта	44
§ 2.7. Текстура грунта	46
§ 2.8. Анизотропия грунта	52

Г л а в а 3

Напряжения и деформации

§ 3.1. Напряжение и деформация в точке	55
§ 3.2. Изменение формы и объема	60
§ 3.3. Тензоры напряжений, деформаций и скоростей деформаций	64
§ 3.4. Инварианты тензора напряжений	70
§ 3.5. Инварианты тензора деформаций	78
§ 3.6. Основные уравнения теорий пластичности	82
§ 3.7. О теориях деформирования	86

Г л а в а 4

Упругость, пластичность и вязкость

§ 4.1. Упругость и пластичность	93
§ 4.2. Предельное напряженное состояние	96
§ 4.3. Нелинейное деформирование	103
§ 4.4. Вязкость	111
§ 4.5. Нелинейная вязкость и бингамово течение	118
§ 4.6. Последействие и релаксация	122
§ 4.7. Упругопластично-вязкие свойства грунтов	128
§ 4.8. Термодинамические соотношения	131

Глава 5

Ползучесть грунтов

§ 5.1. Закономерности ползучести	138
§ 5.2. Зависимость между напряжением, деформацией и временем	143
§ 5.3. Уравнения ползучести	146
§ 5.4. Уравнения течения	151
§ 5.5. Опытные данные	160
§ 5.6. Общность закономерностей деформирования грунтов	172

Глава 6

Методика обработки опытных данных

§ 6.1. Испытания грунтов на ползучесть	181
§ 6.2. Выбор эмпирической формулы	183
§ 6.3. Примеры подбора формул	188
§ 6.4. Сопоставление результатов подсчетов	195
§ 6.5. Обработка опытных кривых	198

Глава 7

Теории ползучести

§ 7.1. Теория линейного упруговязкого деформирования	205
§ 7.2. Механические модели грунта	212
§ 7.3. Теория наследственной ползучести	218
§ 7.4. Ядра интегральных уравнений наследственной ползучести	224
§ 7.5. Технические теории ползучести	229
§ 7.6. Молекулярная теория течения	239

Глава 8

Теория консолидации грунтов

§ 8.1. Объемная ползучесть	248
§ 8.2. Фильтрационная консолидация грунта	253
§ 8.3. Первичная и вторичная консолидация грунта	257

Глава 9

Длительная прочность грунтов

§ 9.1. Ползучесть и длительная прочность	263
§ 9.2. Опытные данные	267
§ 9.3. Снижение сопротивления грунтов сдвигу	277
§ 9.4. «Пиковая» и остаточная прочность грунта	279
§ 9.5. Критерии длительного разрушения	283
§ 9.6. Уравнения длительной прочности	288
§ 9.7. Методика обработки опытных данных	292
§ 9.8. Влияние режима загрузки	300
§ 9.9. Методы испытания грунта на длительную прочность	305

Глава 10

Кинетическая теория прочности и ползучести грунтов

§ 10.1. Деформация грунта как термоактивационный процесс	310
§ 10.2. Изменения микроструктуры грунта в процессе деформирования	314
§ 10.3. Кинетическая природа длительной прочности	322

	<i>Стр.</i>
§ 10.4. Физический смысл параметров длительной прочности	329
§ 10.5. Учет переменной нагрузки	333
§ 10.6. Кинетическая природа ползучести грунтов	339
§ 10.7. Уравнение деформирования	343
§ 10.8. Обработка опытных данных	347

Глава 11

Теория деформирования связных грунтов

§ 11.1. Особенности деформирования грунта при сложном напряженном состоянии	351
§ 11.2. Обобщенное реологическое уравнение состояния	356
§ 11.3. Влияние среднего нормального напряжения	358
§ 11.4. Уравнения ползучести грунта с учетом влияния среднего нормального напряжения	366
§ 11.5. Уравнения пластично-вязкого течения грунта с учетом влияния среднего нормального напряжения	374
§ 11.6. Кинетическое уравнение деформирования грунта с учетом влияния среднего нормального напряжения	377
§ 11.7. Уравнение длительной прочности грунта с учетом влияния среднего нормального напряжения	382

Глава 12

Некоторые особенности деформирования грунтов при сложном напряженном состоянии

§ 12.1. Дилатансия	385
§ 12.2. Влияние вида напряженного состояния	393
§ 12.3. Влияние условий нагружения	398

Глава 13

Примеры решения задач теории нелинейной ползучести

§ 13.1. Обобщенное уравнение деформирования грунтов	402
§ 13.2. Осесимметричная задача	404
§ 13.3. Приближенные способы учета нелинейной связи между напряжением и деформацией при расчете осадки	407
§ 13.4. Действие сосредоточенной силы на основание	412
§ 13.5. Определение осадки основания и реактивных давлений грунта	422
§ 13.6. Опытные данные	432
<i>Приложение. Некоторые единицы измерения СИ и их соотношения с единицами других систем</i>	<i>440</i>
<i>Литература</i>	<i>441</i>

RHEOLOGICAL PRINCIPLES OF SOIL MECHANICS

By Prof. **Sergey S. Vyalov**, Dr. Sc. (Eng.).

Higher Schools Publishing House, Moscow, 1978.

CONTENTS

Introduction	3
Ch. 1. Rheological properties of soils	6
1.1. Peculiarities of soil deformation. 1.2. Basic concepts and definitions of rheology. 1.3. Investigations on soils rheology	
Ch. 2. Structure and structural bonds of soils	29
2.1. Composition and structure of soils. 2.2. Soil components. 2.3. Interaction between solid and liquid soil components. 2.4. Interaction forces of solid particles in soil. 2.5. Interparticle bonds in soil. 2.6. Soil structure. 2.7. Soil texture. 2.8. Soil anisotropy.	
Ch. 3. Stresses and strains	55
3.1. Stress and strain in a point. 3.2. Change of shape and volume. 3.4. Stress tensor invariants. 3.5. Strain tensor invariants. 3.6. Basic equations of plasticity theory. 3.7. On deformation theories.	
Ch. 4. Elasticity, plasticity, viscosity	93
4.1. Elasticity and plasticity. 4.2. Limiting stress condition. 4.3. Nonlinear deformation. 4.4. Viscosity. 4.5. Nonlinear viscosity and Bingham flow. 4.6. Aftereffect and relaxation. 4.7. Elastic — plastic and viscous properties of soils. 4.8. Thermodynamic relationships.	
Ch. 5. Soil creep	138
5.1. Creep patterns. 5.2. Stress — strain — time relationship. 5.3. Creep equations. 5.4. Flow equations. 5.5. Experimental data. 5.6. Similarity of soil deformation patterns.	
Ch. 6. Data processing methods	181
6.1. Soil creep testing. 6.2. Choice of empirical formula. 6.3. Examples of formula selection. 6.4. Comparing calculation results. 6.5. Processing experimental curves.	
Ch. 7. Creep theories	205
7.1. Theory of linear elastic — viscous deformation. 7.2. Mechanical soil models. 7.3. Hereditary creep theory. 7.4. Kernels of hereditary creep integral equations. 7.5. Technical creep theories. 7.6. Molecular theory of flow.	
Ch. 8. Soil consolidation theory	248
8.1. Volumetric creep. 8.2. Filtration consolidation of soil. 8.3. Primary and secondary soil consolidation.	
Ch. 9. Long — term strength of soils	263
9.1. Creep and long — term strength. 9.2. Experimental data. 9.3. Loss of soil shear strength. 9.4. Peak and residual strength. 9.5. Long — term failure criteria. 9.6. Long — term strength equation. 9.7. Data processing. 9.8. Effect of loading regime. 9.9. Long — term strength testing of soil methods.	

Ch. 10. Kinetic theory of soil strength and creep	310
10.1. Soil deformation as thermoactivation process. 10.2. Changes in soil microstructure during deformation. 10.3. Kinetic nature of long — term strength. 10.4. Physical meaning of long — term strength parameters. 10.5. Taking into account variability of load. 10.6. Kinetic nature of soil creep. 10.7. Equation of deformation. 10.8. Data processing.	
Ch. 11. Theory of cohesive — soil deformation	351
11.1. Peculiarities of soil deformation in complex stress state. 11.2. Generalized rheological equation of state. 11.3. Effect of average normal stress. 11.4. Soil creep equation taking into account effect average normal stress. 11.5. Equation of plastic and viscous soil flow taking into account the effect of average normal stress. 11.6. Kinetic equation of soil deformation taking into account effect of average normal stress. 11.7. Equation of long — term soil strength taking into account effect of average normal stress.	
Ch. 12. Some peculiarities soil deformation in complex stress state	385
12.1. Dilatancy. 12.2. Effect of type of stress state. 12.3. Effect of loading condition.	
Ch. 13. Examples of solution of problems on nonlinear creep theory	402
13.1. Generalized equation of soil deformation. 13.2. Axisymmetrical problem. 13.3. Approximate methods of taking into account nonlinear stress strain relationship in settlement calculations. 13.4. Effect of concentrated force on base. 13.5. Determining base settlement and soil reactive pressure. 13.6. Experimental data.	

Сергей Степанович Вялов
РЕОЛОГИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

Редактор А. П. Мартынов
Худож. редактор Т. А. Дурасова
Обложка художника А. Е. Коленкова
Техн. редактор З. В. Нуждина
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 1108

Изд. № Стр.—317 Сдано в набор 25.08.77 Подп. к печати 16.01.78.
Т-03610 Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Объем 28 усл. печ. л. 28,85 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз.
Заказ 3211. Цена 1 р. 20 к
Издательство «Высшая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14
Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.