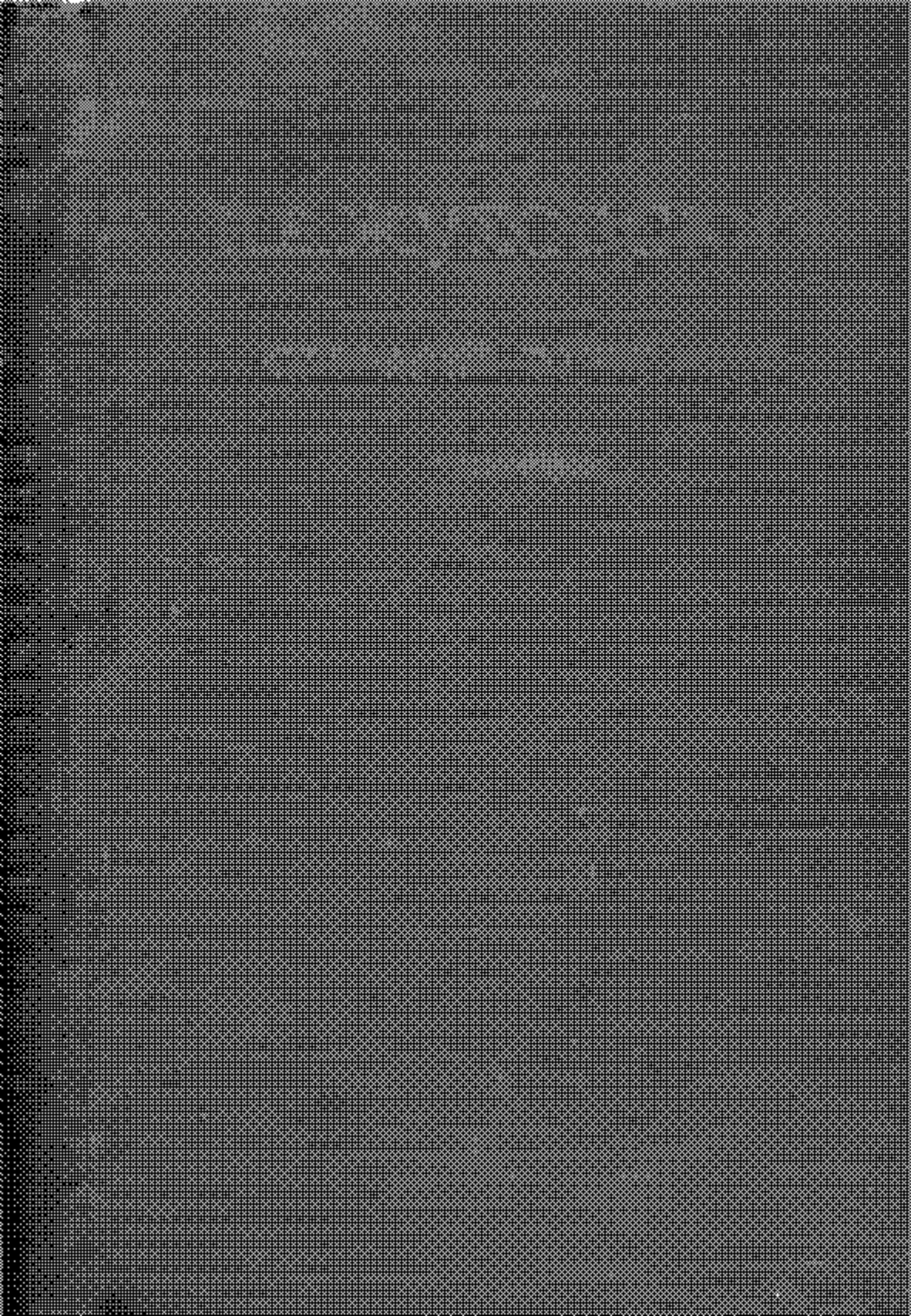


Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

Том II

ГИДРОДИНАМИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА ЛЕНИНГРАД
1949



Н. Е. ЖУКОВСКИЙ в 1887 г.

12-5-4

Печатается на основании Постановления Совета Министров СССР от 11 января 1947 года под редакцией:

Лейбензона Л. С. (главный редактор), *Христиановича С. А.* (заместитель главного редактора), *Юрьева Б. Н.* (заместитель главного редактора), *Абрамовича Г. Н.*, *Ветчинкина В. П.*, *Голубева В. В.*, *Келдыша М. В.*, *Некрасова А. И.*, *Пышнова В. С.*, *Сретенского Л. Н.*

Ответственные редакторы второго тома:
М. В. Келдыш и *С. А. Христианович.*

Редактор *В. К. Гольцман.* Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Подписано к печати 9/VI 1948 г. Тираж 2500 экз. Печ. л. 47³ +2 вклейки
Уч.-изд. л. 40.45. Тип. зн. в печ. л. 35 000. А-04399. Цена 24 руб. Переплет 2 руб.
Заказ 4637.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР, Ленинград. Измайловский пр., 29.

ГИДРОДИНАМИКА

КИНЕМАТИКА ЖИДКОГО ТЕЛА [1]).

Pour être en état d'appliquer facilement la Géométrie à la Mécanique, il ne suffit pas de connaître les diverses formes que les lignes ou surfaces peuvent présenter, et les propriétés de ces lignes ou de ces surfaces, mais il importe encore de savoir quels sont les changements de forme que peuvent subir les corps considérés comme des systèmes de points matériels, et aux quelles lois générales ces changements de forme se trouvent assujettis.

A. Cauchy

ВВЕДЕНИЕ.

Та высокая степень ясности, которая была внесена в область динамики твердого тела геометрическими исследованиями движения неизменяемой системы, заставляет ожидать значительного успеха гидродинамики от сближения ее с кинематикой изменяемой системы. К сожалению, геометрическая теория движения изменяемой системы находится только на первых ступенях своего развития. Все работы по этому предмету ограничиваются небольшим числом исследований движений простейших изменяемых систем и некоторыми общими соображениями о движении непрерывного изменяющегося тела, причем последние помещены по большей части в сочинениях по гидродинамике и по теории упругости.

Вот краткий перечень сочинений по тому и другому отделу. В 1830 г. Шаль [2]) обнаружил главные свойства

[1]) Магистерская диссертация. Работа сообщена Московскому математическому обществу в сентябре 1876 г. Впервые напечатана в Математическом сборнике, т. VIII, вып. 1, 2.

[2]) Chasles, Note sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace et sur

конечных перемещений подобно изменяемой фигуры, доказав существование неподвижной плоскости и точки. В 1860 и 1861 гг. появились сочинения Дирихле [1]) и Бриоши [2]) о движении жидкого эллипсоида, в которых указываются некоторые свойства изменяемой фигуры, перемещающейся так, что новые координаты суть линейные функции старых. От 1861 до 1868 г. Шёнеман [3]), Петерсен [4]), Дюран [5]), Винер [6]) и Аффольтер [7]) печатают ряд небольших статей по вопросу о движении подобно изменяемой плоской фигуры. В 1867 г. Томсон и Тэт издают свое сочинение «Treatise on natural Philosophy» [8]), в котором помещают обстоятельное исследование о конечных перемещениях тела, однородно изменяемого; они называют так изменяющееся тело, новые координаты которого суть линейные функции старых. В том же году Пикар [9]) выводит известные свойства движения неизменяемой системы, исходя из общих соображений о системе однородно изменяемой. В 1871

---

le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre, Bulletin des sciences mathématiques, de Férussac, 1830.

[1]) Lejeune Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Journal von Borchardt, т. 58.

[2]) Brioschi, Développements relatifs aux recherches de Dirichlet, Journal von Borchardt, т. 59.

[3]) Schönemann, Ueber die Bewegung veränderlicher ebener Figuren, welche während der Bewegung sich ähnlich bleiben, in ihrer Ebene, Programm des Gymnasiums zu Brandenburg für 1861—1862.

[4]) Petersen, Nouvelles Annales de Mathématiques, серия 2, т. V.

[5]) Durand, Nouvelles Annales de Mathématiques, серия 2, т. VI.

[6]) Wiener, Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a sè stessa, scorre con tre delle sue rette sopra tre punti fissi, Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da Brioschi e Cremona, серия II, т. I.

[7]) Affolter, Grunert's Archiv für Mathematik, ч. 55.

[8]) Мы пользовались немецким переводом Handbuch der Theoretischen Physik, перевод Гельмгольца и Вертгейма.

[9]) Picard, Nouvelle théorie de déplacement continu d'un corps solide, Nouvelles Annales de Mathématiques, серия 2, т. VI.

и 1872 гг. Дюранд [1]) представляет Парижской академии три глубоких исследования о скоростях и ускорениях однородно изменяемой системы. Наконец, в 1873 и 1874 гг. появляются статьи Лигина [2]) и Бурместера [3]) о перемещениях коллинеарно изменяемой плоской фигуры. Лигин от общих соображений о коллинеарно изменяемой фигуре переходит к фигуре, подобно изменяемой; Бурместер идет обратным путем, переходя от подобно изменяемой к однородно изменяемой и коллинеарно изменяемой фигуре. Второй отдел начал разрабатываться одновременно с первым. В 1827, 1828, 1829 и 1841 гг. Коши [4]) поместил в своих Exercices ряд исследований об удлинениях, сжатиях и вращении бесконечно малой частицы изменяемого тела. В 1858 г. Гельмгольц [5])

---

[1]) Durrande, Extrait d'une théorie du déplacement d'une figure, qui se déforme, Comptes Rendus, т. LXXIII, 2-й семестр.

Propriétés générales du déplacement d'une figure qui se déforme, там же, т. LXXIV, 1-й семестр.

De l'accélération dans le déplacement d'un système de points qui reste homographique à lui-même, там же, т. LXXV, 2-й семестр.

[2]) Лигин, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1873. Также брошюра «Обобщения некоторых геометрических свойств движений системы» Одесса, 1873.

[3]) Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme, Zeitschrift von Schlömilch 19-ый год издания, вып. 2.

Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und kollinear-veränderlicher ebener Systeme. Zeitschrift von Schlömilch, 19-ый год издания, вып. 6.

[4]) Cauchy, Sur la condensation et la dilatation des corps solides Exercices de Mathématiques, второй год.

Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps, там же, третий год.

Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou dilatation linéaire est la même en tous sens autour de chaque point, там же, четвертый год.

Mémoire sur la dilatations, la condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, т. II.

[5]) Helmholtz, Journal von Borchardt. т. 55.

напечатал свою известную статью «Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen», в которой идеи Коши о вращении частицы получили широкое применение, развившись в новое учение о вихрях. Это учение легло в основу сочинений, появившихся в 1861, 1862, 1867 и 1868 гг., авторами которых были Ганкель [1]), Рох [2]), Томсон [3]) и Липшиц [4]); во всех этих сочинениях пополняются и расширяются те аналитические соображения, которыми пользовался Гельмгольц при выводе своих кинематических теорем. В 1868 г. Бертран [5]) обнаружил для бесконечно малой частицы теорему о плоскостях, сохраняющих направление, которую годом раньше доказали Томсон и Тэт для однородно изменяемой системы. Некоторые замечания, сделанные в его статье, послужили основанием известной полемике между ним и Гельмгольцем [6]), которая значительно способствовала разъяснению вопроса о вращении частицы. По поводу этой полемики в 1868 г. была напечатана небольшая заметка в журнале «Mondes» [7]), а в 1870 г. — небольшая статья Вельтмана [8]). В 1870 г. Больцман [9]) по поводу одной гидродинамической задачи, которую разрешил Кирхгоф, напечатал статью, начинающуюся исследованием движения без вращения, воз-

---

[1]) Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861.

[2]) Roch, Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen, Journal von Borchardt, т. 61.

[3]) Thomson, On vortex motion, Philosophical Transactions of the Society of Edinburgh, т. XXV.

[4]) Lipschitz, Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, Journal von Borchardt, т. 69.

[5]) Bertrand, Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide, Comptes Rendus, т. LXVI.

[6]) Comptes Rendus, т. LXVII.

[7]) Mondes, т. XVII.

[8]) Weltmann, Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel, Zeitschrift von Schlömilch, 15-ый год издания, вып. 6.

[9]) Boltzmann, Ueber die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen, Journal von Borchardt, т. 78.

можного для несжимаемой жидкости, наполняющей многосвязное пространство. В 1871 г. появилось прекрасное сочинение Бельтрами [1]) «Dell'idrodinamica razionale», первые две части которого автор посвящает кинематике жидкого тела, излагая ее строго аналитическим путем. Наконец, в 1874 г. вышла из печати физика Кирхгофа [2]), в которой можно найти многие интересные соображения о движении жидкости без сжатия и вращения.

Рассматривая эти сочинения, мы замечаем, что теория движения изменяемых систем различных частных видов развилась главным образом из обобщения и расширения идей о движении твердого тела; общая же теория движения изменяемой системы имела свое начало в теории упругости и гидродинамике. Мы видим, что, несмотря на близкое сродство этих двух отделов кинематики изменяемой системы, несмотря на то, что они должны бы итти, расширяя и пополняя один другого, они всегда развивались особняком; так, например, идеи Коши о движении частицы, как кажется, были неизвестны авторам, писавшим по кинематике изменяемых систем частного вида, и наоборот, мы встречаем в применении к жидкой частице доказательство теорем, уже известных для тела, однородно изменяемого. С другой стороны, мы видим, что общие законы движения непрерывного изменяемого тела были по большей части тесно связаны вместе с динамическими соображениями, и только в сочинении Бельтрами им посвящена отдельная статья. Это сочинение не оставляет ничего более желать по добросовестной отделке и глубине мысли; но, с одной стороны, строго аналитический метод исследования, принятый автором, не дает изложению той наглядности, которая главным образом была бы желательна; с другой, — итальянский ученый не решился включить

[1]) Beltrami, Dell'idrodinamica razionale, Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, серия III, т. I и II.

[2]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Leipzig, 1874.

в кинематику статью об ускорениях, а обстоятельное геометрическое исследование последних может, как нам кажется, всего более осветить трудные вопросы гидродинамики. Предлагаемое нами сочинение «Кинематика жидкого тела» имеет в виду дать краткий, но по возможности наглядный очерк теории скоростей и ускорений непрерывного изменяемого тела, и может быть рассматриваемо как вступление в гидродинамику. При составлении его мы старались поставить общие теоремы о движении жидкости в уровень с тем развитием, которое получили исследования изменяемых систем частного вида. Сочинение разделяется на четыре главы. В первой главе мы изложили движение бесконечно малой жидкой частицы; при этом мы старались обобщить различные воззрения на этот вопрос, исходя из одного общего исследования о свойствах поверхности удлинения Коши. В этой главе, кроме многих небольших теорем, нам принадлежит теория конуса постоянных направлений и исследование вида траекторий точек частицы в движении относительно ее центра.

Вторая глава посвящена изучению линий токов (Stromlinien) и скоростей движущейся жидкости. Мы позволяем себе ввести в ней новый термин, характеризующий как линии токов, так и скорости точек жидкости, — *течение жидкости*. Глава начинается общим геометрическим и кинематическим исследованием течения жидкости и кончается специальным изучением течения жидкости без сжатия и вращения. При составлении этой главы мы пользовались, кроме вышеупомянутых сочинений, сочинениями, которые написали Клейц [1]) и Гатон де ла Гупильер [2]). В этой главе нам принадлежат, кроме общего метода исследования, тео-

[1]) Kleitz, Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement et application à l'Hydrodynamique, Paris, 1873.

[2]) Haton de la Goupillière, Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique.

Nouvelle théorie générale des lignes isothermes.

Nouvelle théorie générale du potentiel cylindrique, Comptes Rendus, т. XLVIII, 1-й семестр.

ремы о зависимости изменения жидкой частицы от кривизны линий токов и теория критических точек. Третья глава компилятивная: в ней излагается согласно с приемами исследования, предложенными во второй главе, учение о сложении и разложении течений жидкости, которое установили Гельмгольц, Рох, Томсон, Липшиц и Бельтрами.

Четвертая глава посвящена ускорениям точек движущейся жидкости. Мы начинаем ее общими теоремами об ускорениях, стараясь при этом выставить с возможной ясностью идеи Преображенского [1]) и теорему Липшица [2]), которые, на наш взгляд, должны играть высокую роль в гидродинамике. Глава оканчивается приложением найденных общих результатов к исследованию перманентного движения несжимаемой жидкости и движения несжимаемой жидкости, для которой давление равно нулю. В этой главе нам принадлежит обобщение теоремы Кориолиса и многие новые результаты по перманентному движению, которые значительно пополняют теоремы, найденные Клебшем [3]).

Во всем сочинении мы разбирали одновременно свойства сжимаемой и несжимаемой жидкости, указывая всякий раз на особенности последней. Мы старались сделать изложение по возможности простым, предпочитая, где было можно, геометрические соображения аналитическим и пользуясь криволинейными координатами, имеющими непосредственное кинематическое значение в разбираемом вопросе. Мы старались следовать, насколько умели, совету великого геометра: «étudier les choses en elles-mêmes». Надеемся, что наш скромный труд не останется бесполезным и прольет некоторый свет на трудные вопросы гидродинамики.

---

[1]) Преображенский, Отчеты Казанского съезда естествоиспытателей.

[2]) Lipschitz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne, Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da Brioschi e Cremona, серия II, т. VI.

[3]) Clebsch, Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Journal von Borchardt, т. 54.

Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, там же, т. 56,

ГЛАВА I.

О ДВИЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ЧАСТИЦЫ ЖИДКОСТИ.

§ 1. Описанию сложного явления мы обыкновенно предпосылаем разбор некоторых простых явлений, которые его характеризуют. Так как эти явления не только должны быть просты, но и должны возможно глубже выяснять характер описываемого явления, то они по необходимости усложняются, по мере того как оно само становится сложнее. Во всех сочинениях по кинематике твердого тела занимаются сначала движениями точки; такое вступление нельзя считать достаточным при изложении движения непрерывной жидкой массы, так как каждая бесконечно малая частица ее изменяет со временем не только свое положение, но и свою форму. В основу геометрической теории этого движения кажется всего удобнее положить изучение изменений бесконечно малой частицы.

Изменение частицы, несмотря на полную произвольность движущейся жидкой массы, совершается всегда по некоторым простым законам, что происходит от непрерывности функций, характеризующих движение жидкости. Вот какими словами выражает Бертран это влияние непрерывности: «На первый взгляд кажется невозможным исследование движения системы, точки которой друг от друга независимы и образуют непрерывную массу, плотность и форма которой могут изменяться каждое мгновение, так как индивидуальное движение каждой точки вполне произвольно. Но непрерывность функций является здесь, как всегда, условием весьма существенным и позволяет обнаружить между скоростями некоторые простые законы, подобно тому как непрерывность поверхностей дает всем известные теоремы о радиусах кривизны, несмотря на полную произвольность поверхности». Простые законы, о которых говорит геометр. суть законы изменения жидкой частицы, изучением которых мы намерены начать кинематику жидкости.

§ 2. Пусть a, b, c и x, y, z — прямоугольные координаты одной из точек жидкости в начале времени и по прошествии времени t. Напишем приращения x, y, z, происходящие от изменения a, b, c:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

Вообразив бесконечно малую частицу жидкости произвольной формы, заключающую точку (a, b, c), увидим, что координаты точек этой частицы относительно точки (a, b, c), которую назовем ее центром, будут da, db, dc. По прошествии времени t частица изменяется так, что координаты точек ее относительно центра будут dx, dy, dz. Обозначая по примеру Бельтрами бесконечно малые величины da, db, dc, dx, dy, dz через a, b, c, x, y, z*), получим уравнения:

$$\mathrm{x} = \frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{b} + \frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{c},$$

$$\mathrm{y} = \frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{b} + \frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{c},$$

$$\mathrm{z} = \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{a} + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{b} + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{c}.$$

Эти уравнения показывают, *что координаты точек измененной частицы относительно ее центра бывают всегда линейные функции первоначальных координат.*

Отсюда следует, что все точки жидкости, лежащие на бесконечно малой поверхности, будут во все время движения лежать на поверхности того же порядка. Бесконечно малые части плоскости и прямой линии будут во время движения оставаться плоскостью и прямой линией. Точки, делящие бесконечно малую прямую линию в известном отношении,

*) Подобным же образом и другие дифференциалы будем обозначать, отбрасывая знак дифференциала и изменяя шрифт: вместо dt, du, dv, dw, например, мы будем писать t, u, v, w.

будут делить в том же отношении и преобразованную линию, вследствие чего бесконечно малые параллельные линии и плоскости во время движения останутся параллельны. Частица жидкости, ограниченная поверхностью бесконечно малого шара, будет во все время движения ограничена поверхностью эллипсоида, потому что поверхность должна сохранить порядок и из сомкнутой не может сделаться разомкнутой; при этом каждым трем взаимно перпендикулярным диаметрам шара будут соответствовать три сопряженных диаметра эллипсоида, между которыми всегда найдутся такие три, которые сохранят свою ортогональность.

Из последнего заключения вытекает теорема: *через всякие два положения точки движущейся жидкости можно провести две системы бесконечно малых жидких триортогональных линий, которые во время движения переходят одна в другую* [1]). Томсон называет эллипсоид, в который преобразуется бесконечно малый шарик, *эллипсоидом деформации*, а линии, сохраняющие триортогональность, которые соответствуют осям эллипсоида, — осями деформации. Понятно, что *по направлению осей деформации частица претерпевает наибольшее и наименьшее удлинения;* мы называем сжатие отрицательным удлинением.

На основании сказанного *бесконечно малая частица может быть переведена из своего начального положения в положение, соответствующее времени t, помощью трех движений: помощью поступательного движения, помощью движения, обращающего бесконечно малый шарик в эллипсоид деформации, и помощью вращения эллипсоида деформации.*

§ 3. В предыдущем параграфе мы указали главные черты изменения частицы за конечный промежуток времени для того, чтобы яснее представить ее бесконечно малые изменения. Прилагая найденные результаты к двум бесконечно близким положениям частицы, соответствующим

[1]) Эта теорема обнаружена в 1828 г. в сочинении Коши в Exercices de Mathématiques, третий год, стр. 242.

моментам времени t и $t+dt=t+\mathrm{t}$, видим, что *через каждую точку движущейся жидкости можно провести три взаимно ортогональные бесконечно малые прямые, которые сохранят свою ортогональность, двигаясь вместе с жидкостью в продолжение бесконечно малого времени* t. Эти три линии будем называть *осями деформации данного момента времени t; они будут соответствовать линиям, по которым в этот момент частица претерпевает наибольшее и наименьшее удлинения. Все бесконечно малое движение частицы будет слагаться: из поступательного движения ее центра, из движения, обращающего бесконечно малый шарик в эллипсоид деформации, бесконечно мало отличающийся от шара, и из вращения осей деформации.*

Скорость вращения осей деформации называют *скоростью вращения частицы*. Первое и третье движения частицы будем называть *внешними*, а второе — *внутренним*. Понятно, что внутреннее движение частицы вполне характеризуется эллипсоидом деформации, оси которого дают нам направления осей деформации. Но мы не будем пользоваться уравнением этого эллипсоида, а выведем уравнение некоторой другой поверхности второго порядка, которое получается при рассмотрении скоростей точек частицы относительно центра. Для этого возьмем от x, y. z производные по времени и, положив

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,\quad \frac{d\mathrm{x}}{dt}=\mathrm{u},\quad \frac{d\mathrm{y}}{dt}=\mathrm{v},\quad \frac{d\mathrm{z}}{dt}=\mathrm{w},$$

заменим начальные координаты a, b, c, a, b, c на x, y, z, x, y, z:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{u}&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{z},\\ \mathrm{v}&=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{z},\\ \mathrm{w}&=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{x}+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{y}+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Найденные уравнения выражают бесконечно малые скорости u, v, w точек частицы относительно движущихся осей

x, y, z, параллельных x, y, z и имеющих начало в центре частицы. Пролагая эти скорости на радиус-вектор r, соединяющий точку частицы с ее центром, делим проложенное на r и называем полученный результат через ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}y^2 + \frac{\partial w}{\partial z}z^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)yz + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)zx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)xy\right].$$

Здесь ε выражает удлинение радиуса-вектора, отнесенное к единице времени и длины. Делая положения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\theta_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\theta_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\theta_3,$$

в которых ε_1, ε_2, ε_3 суть удлинения по направлениям координат, представим удлинение ε следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy). \qquad (2)$$

Если выберем бесконечно малые координаты x, y, z так, чтобы для них $\varepsilon r^2 = 2F$, где F постоянная малая величина, то увидим, что все точки, имеющие такие координаты, лежат на поверхности второго порядка:

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy. \qquad (3)$$

Это дает теорему Коши [1]: *линейные удлинения частицы по различным направлениям обратно пропорциональны квадрату центрального радиуса-вектора некоторой поверхности второго порядка.* Эта поверхность, которую называют *поверхностью удлинения*, играет почти единственную роль в теории изменения жидкой частицы, различные свойства движения которой связаны более или менее тесно со свойствами этой поверхности.

Так как оси деформации соответствуют наибольшему и наименьшему удлинениям, то направления их совпадают

[1]) Cauchy, Exercices de Mathématiques, второй год, стр. 69, 1827.

с направлениями осей поверхности удлинения и могут быть определены помощью уравнений:

$$\frac{\varepsilon_1\cos\alpha+\theta_3\cos\beta+\theta_2\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\theta_3\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\theta_1\cos\gamma}{\cos\beta}=$$
$$=\frac{\theta_2\cos\alpha+\theta_1\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma}{\cos\gamma}=E,$$

в которых α, β, γ — углы, делаемые осью деформации с осями координат, а E — удлинение по этой оси, равное одному из корней кубического уравнения:

$$E^3-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)E^2+(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2-\theta_1^2-\theta_2^2-\theta_3^2)E-$$
$$-(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+2\theta_1\theta_2\theta_3-\varepsilon_1\theta_1^2-\varepsilon_2\theta_2^2-\varepsilon_3\theta_3^2)=0. \qquad (4)$$

Называя через E_1, E_2, E_3 три действительных корня этого кубического уравнения, направляем оси координат по осям деформации и преобразуем уравнения (2) и (3) в (2′) и (3′)

$$\varepsilon=\frac{1}{r^2}(E_1x^2+E_2y^2+E_3z^2): \qquad (2')$$

$$2F=E_1x^2+E_2y^2+E_3z^2. \qquad (3')$$

Поверхность удлинения, выражаемая уравнением (3′), будет трехосный эллипсоид, когда три удлинения E_1, E_2, E_3, которые мы будем называть *главными*, имеют одинаковые знаки. В противном случае она представит гиперболоид, причем надо будет одновременно рассматривать оба сопряженных гиперболоида, давая F знаки + и —. Один гиперболоид будет соответствовать удлинению, другой — сжатию, а радиусы-векторы, направленные по асимптотическому конусу, будут иметь удлинения 0. Понятно, что в частных случаях поверхность удлинения может представить шар, цилиндр или две параллельные плоскости.

Все теоремы о диаметрах центральных поверхностей второго порядка дадут нам соответственные теоремы об удлинениях жидкой частицы. Так, например, равенство

$$E_1+E_2+E_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

дает теорему: *сумма линейных удлинений по всяким трем взаимно перпендикулярным осям равна сумме главных удли-*

ений. Пользуясь этой теоремой, можно получить известное выражение для изменения объема. Вообразив во время t бесконечно малый шар, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, получим для времени $t+\mathrm{t}$ эллипсоид деформации, объем которого выразится через

$$\frac{4}{3}\pi r^3(1+E_1\mathrm{t})(1+E_2\mathrm{t})(1+E_3\mathrm{t}).$$

Называя изменение объема, отнесенное к единице объема и времени, через Δ, получаем:

$$\Delta = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Теоремы Аполлония, распространенные на свойства сопряженных диаметров центральных поверхностей второго порядка, дают нам следующие соотношения между удлинениями e_1, e_2, e_3 по сопряженным диаметрам.

$$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\frac{1}{e_3}=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3};$$

$$e_1e_2e_3=(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)E_1E_2E_3.$$

В последнем соотношении α, β, γ — углы между сопряженными диаметрами. Все радиусы-векторы, имеющие равные удлинения, должны лежать на конусе, вершина которого есть центр поверхности удлинения, а основание — пересечение этой поверхности с шаром. Мы будем называть такой конус *конусом равного удлинения*. Уравнение его получаем из формулы (2′), полагая ε постоянным:

$$(E_1-\varepsilon)x^2+(E_2-\varepsilon)y^2+(E_3-\varepsilon)z^2=0. \qquad (5)$$

Если $E_1>E_2>E_3$, то величина ε заключена между E_1 и E_3. Полагая $E_2>\varepsilon>E_3$, находим конусы равного удлинения, имеющие действительной осью ось деформации E_3. В случае $\varepsilon=E_2$ конус равного удлинения обращается в две плоскости, проходящие через ось деформации E_2 и образующие с осью деформации E_1 углы, тангенсы которых суть

$$\pm\frac{\sqrt{E_1-E_2}}{\sqrt{E_2-E_3}}.$$

Эти плоскости рассекают эллипсоид или однополый гиперболоид, соответствующий поверхности удлинения, по кругам. В случае $E_1 > \varepsilon > E_2$ мы получаем конус равного удлинения, имеющий действительной осью E_1. Из сказанного выясняется изменение вида конуса равного удлинения при непрерывном изменении ε от E_3 до E_1: при $\varepsilon = E_3$ конус совпадает с осью деформации E_3; с возрастанием ε он идет, расширяясь и сохраняя эту ось своей действительной осью; при $\varepsilon = E_2$ он распадается на две плоскости, проходящие через ось деформации E_2; после этого он располагается около оси деформации E_1 и идет, суживаясь, пока не сольется с этой осью. Понятно, что асимптотический конус есть конус нулевого удлинения и действителен только в том случае, когда

$$E_1 > 0, \quad E_3 < 0.$$

§ 4. Перейдем теперь к определению слагающих скорости вращения жидкой частицы по направлению неподвижных осей x, y, z. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 будут подобные слагающие по осям деформации для данного момента времени. Возьмем на каждой из этих осей по точке, бесконечно близко отстоящей от центра частицы, и назовем их бесконечно малые координаты относительно центра через

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3),$$

а слагающие соответствующих им бесконечно малых относительных скоростей через

$$(u_1, v_1, w_1), \quad (u_2, v_2, w_2), \quad (u_3, v_3, w_3).$$

Так как оси деформации в продолжение бесконечно малого движения жидкости движутся, как неизменяемая система, то проложение скорости точки *2* на ось деформации *3* равно скорости вращения точки *2* около оси деформации *1*.

Пользуясь этим замечанием и подобными же замечаниями для других точек, напишем три уравнения:

$$r_2 r_3 \omega_1 = u_2 x_3 + v_2 y_3 + w_2 z_3,$$
$$r_3 r_1 \omega_2 = u_3 x_1 + v_3 y_1 + w_3 z_1,$$
$$r_1 r_2 \omega_3 = u_1 x_2 + v_1 y_2 + w_1 z_2$$

в которых r_1, r_2, r_3 — бесконечно малые расстояния точек *1*, *2*, *3* от центра частицы. Подставляя в написанные равенства значения u, v, w из формулы (1), представим первое из них в виде:

$$\omega_1 r_2 r_3 = x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x} + y_2 y_3 \frac{\partial v}{\partial y} + z_2 z_3 \frac{\partial w}{\partial z} + y_2 z_3 \frac{\partial w}{\partial y} + z_2 y_3 \frac{\partial v}{\partial z} + z_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial z} + x_2 z_3 \frac{\partial w}{\partial x} + x_2 y_3 \frac{\partial v}{\partial x} + y_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как оси деформации суть сопряженные диаметры поверхности удлинения, то, пользуясь формулой (3), можем написать равенство:

$$0 = x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x} + y_2 y_3 \frac{\partial v}{\partial y} + z_2 z_3 \frac{\partial w}{\partial z} + (y_2 z_3 + z_2 y_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + (z_2 x_3 + x_2 z_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (x_2 y_3 + y_2 x_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Вычитая его из $\omega_1 r_2 r_3$, получим:

$$\omega_1 r_2 r_3 = (y_2 z_3 - z_2 y_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + (z_2 x_3 - x_2 z_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Называя через λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 углы осей деформации с осями x, y, z, имеем:

$$\frac{y_2 z_3 - z_2 y_3}{r_2 r_3} = \cos\lambda_1, \quad \frac{z_2 x_3 - x_2 z_3}{r_2 r_3} = \cos\mu_1, \quad \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{r_2 r_3} = \cos\nu_1,$$

вследствие чего наше вращение ω_1 может быть выражено так:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\lambda_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\mu_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\nu_1.$$

Из этой формулы и подобных же формул для ω_2 и ω_3 заключаем, что искомые слагающие вращения по осям x, y, z, которые мы назовем через p, q, r, суть:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}). \qquad (6)$$

*) Эти формулы для вращения частицы найдены Коши в Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, т. II, стр. 302, 1841. При этом он

Эти вращения считаются положительными по направлению часовой стрелки и имеют одинаковый вид для всяких прямоугольных осей координат. Любопытно заметить, что при косоугольных осях координат проложения скорости вращения частицы на нормали к координатным плоскостям выражаются формулами, отличающимися от (6) только постоянными множителями. Если вообразим косоугольные оси координат x', y', z', плоскость $y'z'$ которых совпадает с плоскостью yz, а оси y' и y идут по одному направлению, и назовем угол $y'Oz'$ через φ_1, то получим:

$$y = y' + z' \cos \varphi_1,$$
$$z = z' \sin \varphi_1.$$

Далее, называя через u', v', w' проложения скорости точки по косоугольным осям x', y', z', имеем:

$$v' = v, \quad w' = v \cos \varphi_1 + w \sin \varphi_1.$$

Составляя теперь выражение

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}$$

и обращая внимание на формулы, определяющие y, z по y', z', получим формулу

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} = \sin \varphi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

из которой определим проложение вращения на линию, перпендикулярную к плоскости $y'z'$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2 \sin \varphi_1} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right).$$

называет скоростью вращения частицы около оси среднюю скорость вращения всех радиусов, лежащих в плоскости, проходящей через центр частицы перпендикулярно к оси. Это определение тождественно с определением, принятым нами, так как средняя скорость радиуса, происходящая от внутреннего движения, равна нулю. Сен-Венан в VIII томе Журнала Лиувилля (1863) дает простой вывод формул (6), исходя из определения вращения Коши.

Называя три определяемых проложения через p', q', r', а углы $z'Ox'$, $x'Oy'$ через φ_2, φ_3, получаем:

$$p' = \frac{1}{2\sin\varphi_1}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right), \quad q' = \frac{1}{2\sin\varphi_2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right),$$
$$r' = \frac{1}{2\sin\varphi_3}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right).$$

§ 5. Зная вращение частицы, можно вычесть соответствующие ему скорости из скоростей u, v, w и получить скорости одного внутреннего движения. Эти скорости, которые мы назовем через u_1, v_1, w_1, будут:

$$u_1 = u - (qz - ry),$$
$$v_1 = v - (rx - pz),$$
$$w_1 = w - (py - qx)$$

и принимают на основании формул (1) и (6) следующий вид:

$$u_1 = \varepsilon_1 x + \theta_3 y + \theta_2 z,$$
$$v_1 = \theta_3 x + \varepsilon_2 y + \theta_1 z, \qquad (7)$$
$$w_1 = \theta_2 x + \theta_1 y + \varepsilon_3 z.$$

В случае же, когда оси координат суть оси деформации, эти формулы еще более упрощаются:

$$u_1 = E_1 x, \quad v_1 = E_2 y, \quad w_1 = E_3 z. \qquad (7')$$

Сравнивая формулы (7) с уравнением (3), видим, что u_1, v_1, w_1 суть частные производные функции F по координатам x, y, z:

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial F}{\partial z}. \qquad (7'')$$

Отсюда следует теорема[1]): *скорости внутреннего движения имеют потенциальную функцию, которая равна половине линейного удлинения, умноженной на квадрат радиуса.* Функция F вполне характеризует внутреннее движение точек частицы, скорости которых перпендикулярны к поверх-

[1]) Первая часть теоремы принадлежит Гельмгольцу, Borchardt's Journal, т. 55, стр. 31, вторая — Бельтрами, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, серия III, т. I, вып. 3, стр. 439, 1871.

ностям F=const. и обратно пропорциональны расстоянию между двумя бесконечно близкими поверхностями F и $F+dF$.

Вот какой прекрасной теоремой выражает Бельтрами в своем сочинении Dell'Idrodinamica razionale[1]) свойство этого движения: *все точки, лежащие на поверхности, подобной поверхности удлинения, перейдут во время* t *по нормалям на поверхность софокусную.*

Для доказательства рассмотрим точки частицы, лежащие на бесконечно малой поверхности

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=2F,$$

где

$$\frac{1}{a}=E_1,\quad \frac{1}{b}=E_2,\quad \frac{1}{c}=E_3.$$

По прошествии бесконечно малого времени t координаты x, y, z обратятся на основании формул (7′) в

$$x'=x\left(1+\frac{t}{a}\right),\quad y'=y\left(1+\frac{t}{b}\right),\quad z'=z\left(1+\frac{t}{c}\right).$$

Вставляя в вышенаписанное уравнение выражения величин x, y, z через x′, y′, z′, получаем равенство

$$\frac{x'^2}{a+2t}+\frac{y'^2}{b+2t}+\frac{z'^2}{c+2t}=2F,$$

доказывающее теорему.

§ 6. Чтобы составить себе совершенно ясное представление о внутреннем движении частицы, укажем некоторые простые движения, на которые оно может быть разложено. Условимся называть *удлинением, перпендикулярным к плоскости*, движение, в котором точки имеют скорости, перпендикулярные к некоторой плоскости и пропорциональные расстоянию от нее. Скорость точки, находящейся на единице расстояния от плоскости, будем называть величиной удлинения, перпендикулярного к плоскости. Рассматривая

[1]) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, серия III, т. I, вып. 3, стр. 449, 1871.

теперь формулы (7′), убеждаемся в справедливости следующего разложения движения частицы: *внутреннее движение частицы может быть получено тремя удлинениями, которые перпендикулярны к плоскостям деформации и величины которых равны* E_1, E_2, E_3.

Эта теорема имеет также место для удлинений, перпендикулярных к сопряженным диаметральным плоскостям. Представляя функцию F по косоугольным координатам, соответствующим сопряженным диаметрам

$$\frac{1}{\sqrt{e_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{e_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{e_3}},$$

и заменяя эти координаты перпендикулярами p_1, p_2, p_3, опущенными на диаметральные плоскости, получаем:

$$2F = \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1} p_1^2 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2} p_2^2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3} p_3^2.$$

В этой формуле φ_1, φ_2, φ_3 — углы, которые делают сопряженные диаметры с нормалями к соответствующим сопряженным плоскостям. Если обозначим через

$$\lambda_1, \ \mu_1, \ \nu_1, \ \lambda_2, \ \mu_2, \ \nu_2, \ \lambda_3, \ \mu_3, \ \nu_3,$$

углы нормалей к диаметральным плоскостям с прямоугольными осями координат x, y, z, то выразим p_1, p_2, p_3 через x, y, z следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} p_1 &= x\cos\lambda_1 + y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1, \\ p_2 &= x\cos\lambda_2 + y\cos\mu_2 + z\cos\nu_2, \\ p_3 &= x\cos\lambda_3 + y\cos\mu_3 + z\cos\nu_3. \end{aligned}$$

Составляем помощью этих уравнений производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1} p_1\cos\lambda_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2} p_2\cos\lambda_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3} p_3\cos\lambda_3, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1} p_1\cos\mu_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2} p_2\cos\mu_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3} p_3\cos\mu_3, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{e_1}{\cos^2\varphi_1} p_1\cos\nu_1 + \frac{e_2}{\cos^2\varphi_2} p_2\cos\nu_2 + \frac{e_3}{\cos^2\varphi_3} p_3\cos\nu_3. \end{aligned}$$

Из этих выражений скоростей по осям координат x, y, z следует, что слагающие скорости по направлениям нормалей p_1, p_2, p_3 суть

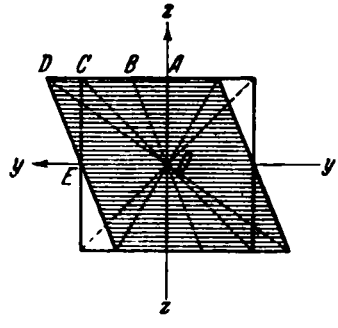
$$\frac{c_1 p_1}{\cos^2 \varphi_1}, \quad \frac{c_2 p_2}{\cos^2 \varphi_2}, \quad \frac{c_3 p_3}{\cos^2 \varphi_3},$$

откуда вытекает теорема: *внутреннее движение частицы может быть разложено на три удлинения*:

$$\frac{e_1}{\cos^2 \varphi_1}, \quad \frac{e_2}{\cos^2 \varphi_2}, \quad \frac{e_3}{\cos^2 \varphi_3},$$

перпендикулярные к трем сопряженным диаметрам. Понятно, что такое разложение отличается от указанного выше тем, что при движении частицы сами плоскости, перпендикулярно которым совершаются удлинения, приходят в движение. Укажем здесь еще на одно свойство внутреннего движения, вытекающее непосредственно из того условия, что скорости пердендикулярны к поверхности $F = \text{const}$. *Все точки, лежащие на плоскости, диаметральной данному направлению, имеют скорости, перпендикулярные к этому направлению. Все точки, лежащие на диаметре, сопряженном данной плоскости, имеют скорости, перпендикулярные к этой плоскости.*

§ 7. Формулы (7) показывают, что внутреннее движение частицы не может быть разложено на три удлинения, перпендикулярных к плоскостям координат, если оси координат не суть оси деформации. Чтобы сделать разложение в этом случае, познакомимся с движением, называемым *скольжением без вращения*. Если точки частицы движутся в плоскостях, параллельных плоскости Ozy, со скоростями, направленными вдоль по оси Oy и равными $2\theta_1 z$, то говорят, что частица претерпевает вдоль оси Oy в плоскости Ozy скольжение $2\theta_1$ (фиг. 1). Плоскость Ozy называют *плоскостью скольжения*, линию



Фиг. 1.

Oy — *направлением скольжения*, а $2\vartheta_1$ — его *величиною*. Будем вместо плоскости скольжения давать перпендикулярную к ней линию Ox, которую назовем *осью скольжения*[1]), и условимся считать эту линию положительной в ту сторону, смотря с которой на центр частицы, мы видим скольжение совершающимся против часовой стрелки.

Вообразив в плоскости скольжения бесконечно малый квадрат, стороны которого параллельны осям Oy и Oz, увидим, что он по прошествии бесконечно малого времени t обратится с точностью до величин второго порядка в ромб, так что прямой угол между диагоналями изменится во время t на бесконечно малую величину второго порядка. Это показывает, что диагонали и ось Ox будут при рассматриваемом движении осями деформации. Угол, на который поворачивается частица в бесконечно малое время t, будет угол, заключенный между диагоналями квадрата и ромба. Этот угол, как видно из фигуры 1, равен $\vartheta_1 t$, потому что

$$\angle DOC = \angle COE - \angle DOE = \frac{\angle AOE - \angle BOE}{2} = \frac{BA}{2AO} = \vartheta_1 t.$$

Он откладывается в сторону скольжения. Отсюда следует, что *при скольжении оси деформации поворачиваются в сторону скольжения на угол, равный половине скольжения*. Чтобы из рассматриваемого движения получить скольжение без вращения, прибавляем к нему вращение около оси скольжения Ox, направленное по часовой стрелке с угловой скоростью ϑ_1. Скорости точек частицы по осям Oy и Oz в этом новом движении будут $\vartheta_1 z$ и $\vartheta_1 y$. Скольжение без вращения вполне определяется величиной скольжения, направлением скольжения и осью скольжения, сторона которой известна. Из сказанного видно, что направление оси скольжения соответствует направлению оси вращения,

[1]) Употребляемое нами название оси скольжения имеет другое значение, чем то, которое встречаем у Томсона и Тэта. Они называют осями скольжения оси деформации, которые суть диагонали рассмотренного нами ниже квадрата. Thomson and Tait, Natural Philosophy, т. I стр. 123, 1886.

прибавляемого к скольжению, когда вращение считаем положительным по стрелке часов.

Из симметрии осей Oy и Oz относительно рассматриваемого движения следует, что от одновременного поворачивания направления скольжения в плоскости скольжения на прямой угол и изменения направления оси скольжение без вращения не изменяется. Положим теперь, что частица имеет три скольжения без вращения $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$, направления которых суть координатные линии Oy, Oz, Ox, а оси скольжения — координатные линии Ox, Oy, Oz, и назовем скорости точек частицы, происходящие от этих трех движений, через u_2, v_2, w_2. Эти скорости будут:

$$\begin{aligned} u_2 &= \theta_2 z + \theta_3 y, \\ v_2 &= \theta_3 x + \theta_1 z, \\ w_2 &= \theta_1 y + \theta_2 x. \end{aligned} \tag{8}$$

Присоединяя к ним скорости, происходящие от трех удлинений ε_1, ε_2, ε_3, перпендикулярных к плоскостям координат, получим формулы (7). Отсюда следует, что *внутреннее движение частицы можно всегда разложить на три удлинения, перпендикулярные к осям координат, и на три скольжения без вращения, для которых направления и оси скольжений суть оси координат.* Формулы (8) показывают, что скорости скольжений суть частные производные по координатам от функции ϕ:

$$2\phi = 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy.$$

Это уравнение соответствует поверхности гиперболоида, асимптотический конус которого проходит через оси координат; оно дает поверхность удлинения для внутреннего движения, при котором $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Докажем, что при $\Delta = 0$ функцию F можно представить в виде ϕ, т. е. что *внутреннее движение всякой несжимаемой частицы может быть получено тремя скольжениями без вращения около трех прямоугольных осей.* Так как в рассматриваемом случае $E_1 + E_2 + E_3 = 0$, то поверхность удлинения будет

соответствовать двум сопряженным гиперболоидам. Если допустим, например, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

есть уравнение асимптотического конуса этих гиперболоидов, то действительная ось его будет Oz. Сечения этого конуса плоскостями Ozx и Ozy будут четыре прямые линии, образующие с осью Oz углы, тангенсы которых даются формулами:

$$\frac{x}{z}=\pm\frac{1}{c}:\frac{1}{a}, \quad \frac{y}{z}=\pm\frac{1}{c}:\frac{1}{b}.$$

Все четыре тангенса по абсолютной величине более единицы, так как вследствие равенства

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0$$

получаются неравенства

$$\frac{1}{c}>\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{c}>\frac{1}{b}.$$

Это показывает, что асимптотический конус имеет бесконечное множество взаимно ортогональных образующих. Взяв две ортогональные образующие за оси Oy′ и Oz′ и проведя перпендикулярную к ним линию Ox′, выражаем функцию $2F$ помощью координат x′, y′, z′:

$$2F=\varepsilon_1'x'^2+2\theta_1'y'z'+2\theta_2'z'x'+2\theta_3'x'y'.$$

Так как $\Delta=0$, то $\varepsilon_1'=0$, и функция F получает вид ϕ. Из предложенного доказательства видно, что *конус нулевого удлинения несжимаемой частицы, проведенный через два ребра прямого трехгранного угла, всегда проходит через третье ребро.*

Когда все внутреннее движение приводится к одному скольжению без вращения, направление которого есть Oy, а ось Ox, то поверхность удлинения будет иметь уравнение

$$2\phi=2\theta_1yz$$

и представляет цилиндр, направляющая которого есть равносторонняя гипербола, а образующие параллельны оси Ox.

Отсюда следует, что внутреннее движение частицы может быть получено одним скольжением без вращения только в том случае, когда поверхность удлинения есть равносторонний гиперболический цилиндр. По этой причине и по формуле (4) приведение всего внутреннего движения к одному скольжению характеризуется двумя условиями:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - \varepsilon_1\theta_1^2 - \varepsilon_2\theta_2^2 - \varepsilon_3\theta_3^2 = 0.$$

Рассмотрим теперь, в каких случаях два скольжения без вращения могут быть заменены одним. Пусть имеем два скольжения без вращения, которым соответствуют функции скоростей F и ϕ:

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy,$$

$$2\phi = 2\theta_1' yz.$$

Удлинения ε_1, ε_2, ε_3 и скольжения $2\theta_1$, $2\theta_2$, $2\theta_3$ удовлетворяют вышенаписанным условиям. Функция скоростей сложного движения будет $(F+\phi)$:

$$2(F+\phi) = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2(\theta_1 + \theta_1')yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy.$$

Для того чтобы сложное движение было в свою очередь скольжением без вращения, необходимо удовлетворить равенству

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_1') - \varepsilon_1(\theta_1 + \theta_1')^2 - \varepsilon_2\theta_2^2 - \varepsilon_3\theta_3^2 = 0,$$

которому на основании условий, стесняющих F, можно дать вид

$$2\theta_2\theta_3 - \varepsilon_1(2\theta_1 + \theta_1') = 0.$$

Укажем на один частный случай, при котором это условие удовлетворяется. Пусть требуется сложить два скольжения без вращения, которым соответствуют функции скоростей $\phi = \theta_1' yz$ и $F = \theta_2 zx$. Здесь имеем $\theta_3 = \varepsilon_1 = 0$, поэтому условие удовлетворяется. Функция скоростей сложного движения будет

$$\phi + F = \theta_1' yz + \theta_2 zx.$$

Представим ее в более простом виде, переходя к новой системе прямоугольных координат x′, y′, z′ помощью формул перехода:

$$x = x' \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}} + y' \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}},$$

$$y = -x' \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}} + y' \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}},$$

$$z = z'.$$

Делая подстановку, получаем:

$$F + \phi = \sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}\, y' z'.$$

Эта формула показывает, что сложное движение есть скольжение без вращения, равное

$$2\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2},$$

направленное по линии Oy′ и имеющее осью Ox′. Угол α делаемый осями Ox′ и Ox, как видно из формул перехода выражается равенствами

$$\cos\alpha = \frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{-\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}.$$

Заметим теперь, что для всех трех рассматриваемых нами скольжений можно принять ось Oz за направление, если условимся ось скольжения $2\theta_1'$ считать в отрицательную сторону оси координат Ox, ось скольжения $2\theta_2$ — в положительную сторону Oy и ось скольжения

$$2\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}$$

в отрицательную сторону Ox′. Углы, которые делает отрицательная ось Ox′ с отрицательной осью Ox и положительной Oy, имеют косинусами

$$\frac{\theta_1'}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}, \quad \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2^2}}.$$

На основании всего сказанного о сложении предложенных движений выводим теорему: *чтобы сложить два скольжения без вращения, имеющих общее направление и ортогональные оси, надо отложить на положительных осях величины скольжений и взять геометрическую сумму полученных линий. Эта сумма будет давать величину и ось составного скольжения без вращения, которое будет иметь то же направление, какое имели слагаемые скольжения.* Эта теорема распространяется на случай сложения скольких бы то ни было скольжений без вращения, имеющих одинаковое направление, причем оси скольжений могут быть расположены под какими бы то ни было углами. Взяв прямоугольные координаты, одна из осей которых совпадает с данным направлением, разложим по вышеприведенной теореме каждое скольжение на два имеющих оси, направленные по двум другим координатам. Берем алгебраические суммы всех скольжений, имеющих оси по каждой из координат, и складываем два полученных скольжения в одно. Такой способ сложения нескольких скольжений оправдывает теорему: *сложное движение, происходящее от сложения нескольких скольжений без вращения, имеющих одинаковое направление, есть скольжение без вращения, имеющее то же направление, ось и величину которого получим, откладывая величины слагаемых скольжений на их осях и слагая геометрически полученные линии.*

§ 8. Разберем еще одно разложение, которое, как кажется, всего яснее представляет нам внутреннее движение частицы. Разложение это разбивает движение на две части: на удлинение всех центральных радиусов-векторов в предположении, что они неподвижны, и на вращение этих радиусов в предположении, что они сохраняют длину. Вращение радиуса-вектора называют его *девиацией* [1]) и представляют

[1]) Определение девиации радиуса полного движения частицы мы встречаем у Коши в Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, т. II, стр. 311. Название девиации (déviation) мы заимствуем из статьи Дюранда, помещенной в Comptes rendus, т. LXXIII, 2-й семестр, 1871, стр. 737.

направлением и величиной скорости точки радиуса, отстоящей на единицу от центра. В § 3 мы познакомились с удлинением ε центрального радиуса; посвятим этот параграф изучению его девиации. Называя через σ девиацию и через σ_1, σ_2, σ_3 ее проложения на оси деформации, определим эти проложения, замечая, что вся скорость точки частицы слагается из скорости по радиусу-вектору и скорости, перпендикулярной к радиусу:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{x}{r}(E_1 - \varepsilon), \\ \sigma_2 &= \frac{y}{r}(E_2 - \varepsilon), \\ \sigma_3 &= \frac{z}{r}(E_3 - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Формулы (9) показывают, что *девиация лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и нормаль к поверхности удлинения, восставленную из точки пересечения ее с радиусом.* В самом деле, косинусы углов, которые образует перпендикуляр к упомянутой плоскости с осями деформации, находятся в отношении

$$yz(E_2 - E_3) : xz(E_3 - E_1) : xy(E_1 - E_2).$$

Умножая уравнения (9) на члены этого отношения и складывая, получаем нуль. Для определения величины девиации σ возвышаем уравнения (9) в квадрат и складываем их, обращая внимание на формулу (2′):

$$\sigma^2 = \frac{x^2E_1^2 + y^2E_2^2 + z^2E_3^2}{r^2} - \varepsilon^2. \tag{10}$$

Эту формулу преобразовываем, вводя в нее выражение косинуса угла φ между радиусом-вектором и нормалью к поверхности удлинения:

$$\cos\varphi = \frac{E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2}{r\sqrt{E_1^2x^2 + E_2^2y^2 + E_3^2z^2}} = \frac{r\varepsilon}{\sqrt{E_1^2x^2 + E_2^2y^2 + E_3^2z^2}}.$$

Это дает нам формулу (10′):

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi, \tag{10′}$$

которую, впрочем, можно было бы написать прямо, так как скорость точки направлена по нормали и имеет

своими слагающими по радиусу-вектору и перпендикуляру к нему ε_r и σ_r.

Формула (10′) показывает, что *девиация равна удлинению, умноженному на тангенс угла между радиусом-вектором и соответствующей нормалью к поверхности удлинения*. Таким образом поверхность удлинения, давая нам наглядное изображение удлинения каждого центрального радиуса, дает одновременно и полное представление о его девиации. Мне казалось бесполезным, подобно Коши строить поверхность, выражающую девиацию по радиусу-вектору, тем более, что поверхность, о которой идет речь, будет четвертого порядка, как это видно из формулы (10). Чтобы яснее представить себе направление девиации, заметим, что на основании формул (9) и (5) она должна быть перпендикулярна к соответствующему конусу равного удлинения и должна быть направлена вне этого конуса при $E_2 > \varepsilon > E_3$ и внутрь его при $E_1 > \varepsilon > E_2$.

Проводя конические поверхности, ортогональные конусам равного удлинения, мы получим поверхности, по которым текут в продолжение бесконечно малого времени t центральные радиусы частицы. Условимся называть эти поверхности *конусами девиаций* и напишем их дифференциальное уравнение, которое будет

$$yz\,(E_2 - E_3)\,dx + zx\,(E_3 - E_1)\,dy + xy\,(E_1 - E_2)\,dz = 0$$

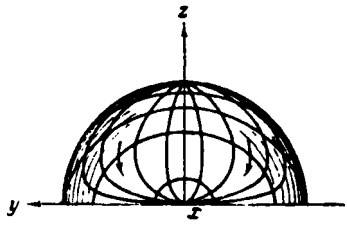
и дает после интеграции

$$x^{E_2 - E_3}\, y^{E_3 - E_1}\, z^{E_1 - E_2} = \text{const.}$$

Все конусы найденного семейства пересекают плоскости деформации по осям Ox и Oz. Начиная от слияния с плоскостью Oxz, эти конусы идут, все более и более выгибаясь, пока не обратятся в две пересекающиеся плоскости Oxy и Ozy. Нетрудно показать, что по осям Ox и Oz все конусы соприкасаются с плоскостями Oxy и Oyz; для этого определим производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ при постоянном x и производную $\frac{\partial x}{\partial y}$ при постоянном z:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c_1 y^{\frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_2}}; \quad \frac{\partial x}{\partial y} = c_2 y^{\frac{E_1 - E_3}{E_2 - E_3}},$$

и заметим, что они обращаются в нули при $y = 0$. На фигуре 2 изображены следы конусов равного удлинения и конусов девиации на поверхности шара, описанного из центра частицы. *Во всякое бесконечно малое время* t *вся девиация центральных радиусов-векторов приводится к течению их по конусам девиации от оси наименьшего удлинения к оси наибольшего удлинения.*



Фиг. 2.

§ 9. Заканчивая описание внутреннего движения, обратим внимание на разложение девиации радиусов, лежащих в одной плоскости, на девиацию вдоль плоскости и девиацию, нормальную к плоскости. От первой девиации радиусы движутся по плоскости, изменяя между собою углы; от второй девиации плоскость, в которой они заключены, вращается около некоторой лежащей на ней линии. Назовем через r′ бесконечно малую линию, отложенную на нормали рассматриваемой плоскости, и через x′, y′, z′ ее проекции по осям деформации и определим проложение на r′ девиации радиуса r, лежащего в рассматриваемой плоскости. На основании формул (9) искомая проекция будет

$$\frac{1}{rr'}(E_1 xx' + E_2 yy' + E_3 zz').$$

Пролагаем в свою очередь найденную девиацию на оси координат и преобразуем полученные проекции σ_1', σ_2', σ_3' на основании равенства

$$xx' + yy' + zz' = 0:$$

$$\sigma_1' = \frac{x'}{rr'^2}[(E_3 - E_1)\, zz' - (E_1 - E_2)\, yy'],$$

$$\sigma_2' = \frac{y'}{rr'^2}[(E_1 - E_2)\, xx' - (E_2 - E_3)\, zz'],$$

$$\sigma_3' = \frac{z'}{rr'^2}[(E_2 - E_3)\, yy' - (E_3 - E_1)\, xx'].$$

Эти формулы показывают, что линия, образующая с осями углы, косинусы которых находятся в отношениях

$$(E_2 - E_3)\,y'z' : (E_3 - E_1)\,z'x' : (E_1 - E_2)\,x'y',$$

не имеет девиации по нормали r'. Эту линию называют *характеристикой* плоскости, соответствующей нормали r'; она лежит в пересечении этой плоскости с плоскостью, сопряженной нормали r' относительно поверхности удлинения. Если возьмем характеристику за нормаль некоторой плоскости и отыщем характеристику этой последней, то увидим, что косинусы ее углов находятся в отношении

$$x' : y' : z'.$$

Это показывает, что *нормаль и ее характеристика суть две линии взаимные.* Так как характеристика перпендикулярна к нормали и лежит в ее сопряженной плоскости, то *сечение поверхности удлинения через нормаль и ее характеристику имеет эти две линии своими главными осями.* Понятно, что характеристика плоскости есть ось ее вращения. Чтобы определить угловую скорость плоскости около ее характеристики, заменяем в формулах для σ'_1, σ'_2, σ'_3 координаты x, y, z на x', y', z' и находим таким образом скорость, которую имеет от вращения плоскости конец линии, равной единице и отложенной на нормали r'. Проекции этой скорости по осям будут величины

$$\frac{x'}{r'}(\varepsilon' - E_1), \quad \frac{y'}{r'}(\varepsilon' - E_2), \quad \frac{z'}{r'}(\varepsilon' - E_3),$$

в которых ε' — удлинение по нормали r'. Сравнение этих величин с формулами (9) приводит нас к следующей теореме: *бесконечно малая жидкая плоскость, проходящая через центр частицы, движется так, что нормаль, восставленная к ней из этого центра, имеет девиацию, равную и противоположную девиации бесконечно малой жидкой линии, соответствующей нормали.*

По этой теореме угловая скорость вращения плоскости около ее характеристики равна $\varepsilon' \operatorname{tg} \varphi'$, где φ' — угол, кото-

рый делает нормаль к плоскости с нормалью к поверхности удлинения, восстановленной из точки ее пересечения с этой поверхностью. Что же касается прямого угла между плоскостью и жидкой линией, соответствующей ее нормали, то этот угол изменяется во время t на $2\varepsilon' \operatorname{tg} \varphi' \cdot t$. Переходя к девиации вдоль плоскости, замечаем, что на основании § 5 все внутреннее движение точек частицы в плоскости вполне определяется по кривой сечения этой плоскости с поверхностью удлинения. Если назовем через e_1 и e_2 главные оси этого сечения и направим координаты Ox и Oy по этим осям, то получим функцию скоростей:

$$2f = e_1 x^2 + e_2 y^2.$$

Все сказанное о внутреннем движении точек частицы в пространстве будет иметь место как частный случай при движении на плоскости. Полагая в формуле (10) $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = 0$, получим следующее выражение для девиации радиусов-векторов в плоскости:

$$\sigma^2 = \frac{x^2 e_1^2 + y^2 e_2^2}{r^2} - \varepsilon^2.$$

Подставляя сюда

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(e_1 x^2 + e_2 y^2),$$

находим

$$\sigma r^2 = \pm (e_1 - e_2)\, xy. \tag{11}$$

Если выберем координаты x, y так, чтобы σr^2 была постоянная малая величина k, то увидим, что все точки, им соответствующие, лежат на равносторонней гиперболе

$$\pm \frac{k}{e_1 - e_2} = xy, \tag{11'}$$

асимптоты которой суть оси Ox и Oy. Это дает теорему: *девиация в плоскости обратно пропорциональна радиусу-вектору равносторонней гиперболы, асимптоты которой суть главные оси рассматриваемого сечения.* Знаки $\pm$ в уравнении (11') показывают, что следует брать всякий раз обе сопряженные гиперболы, причем девиация будет совершаться для одной гиперболы в одну сторону, а для другой —

в другую, направляясь от асимптоты, соответствующей меньшему удлинению, к асимптоте, соответствующей большему. Доказанная теорема дает нам целый ряд весьма интересных следствий [1]).

Главные оси сечения не имеют девиации в его плоскости. Биссекторы главных осей имеют наибольшую девиацию и суть потому две ортогональные линии, наиболее изменяющие прямой угол. Все ортогональные радиусы-векторы имеют в своей плоскости одинаковые, но направленные в разные стороны девиации. Все радиусы-векторы, делающие с одной из главных осей сечения взаимно дополнительные углы, имеют одинаковую и направленную в одну сторону девиацию в плоскости сечения и потому не изменяют своего угла в пространстве во время t. *Все радиусы-векторы, делающие с одной из осей равные углы имеют одинаковую, но противоположно направленную девиацию, откуда следует, что линии, не изменяющие угла с плоскостью, лежат на конусе, удлинение которого равно удлинению нормали к плоскости.*

§ 10. Сказанное в предыдущих параграфах, кажется, вполне разъясняет характер внутреннего движения частицы; присоединяя к этому движению вращение осей деформации, получим ее полное движение относительно центра. Понятно, что полное движение можно разложить на удлинение радиусов-векторов, которое будет таким же, как для внутреннего движения, и на их девиацию, которая будет слагаться из внутренней девиации и скорости вращения. Называя через s_1, s_2, s_3 проложения полной девиации по осям деформации и через ω_1, ω_2, ω_3 угловые скорости вращения около этих осей, получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{r}s_1 &= (E_1 - \varepsilon)\,\mathrm{x} + \omega_2 \mathrm{z} - \omega_3 \mathrm{y}, \\ \mathrm{r}s_2 &= (E_2 - \varepsilon)\,\mathrm{y} + \omega_3 \mathrm{x} - \omega_1 \mathrm{z}, \\ \mathrm{r}s_3 &= (E_3 - \varepsilon)\,\mathrm{z} + \omega_1 \mathrm{y} - \omega_2 \mathrm{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

[1]) Некоторые из этих теорем в применении к конечному изменению плоской частицы можно найти в небольшой статье Тиссо о картографии, Comptes rendus, т. XLIX, 2-й семестр, 1859, стр. 673.

Подобным же образом можно выразить девиации нормали плоскости, припоминая, что внутренняя девиация нормали равна и противоположна девиации соответствующей ей жидкой линии. Если назовем через s'_1, s'_2, s'_3 девиацию нормали плоскости и отложим на этой нормали длину r′, проложения которой по осям суть x′, y′, z′, то получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} r's'_1 &= -(E_1 - \varepsilon')x' + \omega_2 z' - \omega_3 y', \\ r's'_2 &= -(E_2 - \varepsilon')y' + \omega_3 x' - \omega_1 z', \\ r's'_3 &= -(E_3 - \varepsilon')z' + \omega_1 y' - \omega_2 x', \end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

отличающиеся от формул (12) только знаком при внутренней девиации.

Самый существенный вопрос при разборе полного движения заключается в определении линий и плоскостей, не изменяющих своего направления; решение его может быть получено помощью формул (12) и (12′), если положить в них $s_1 = s_2 = s_3 = s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x(E_1 - \varepsilon) + \omega_2 z - \omega_3 y &= 0, \\ y(E_2 - \varepsilon) + \omega_3 x - \omega_1 z &= 0, \\ z(E_3 - \varepsilon) + \omega_1 y - \omega_2 x &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} -x'(E_1 - \varepsilon') + \omega_2 z' - \omega_3 y' &= 0, \\ -y'(E_2 - \varepsilon') + \omega_3 x' - \omega_1 z' &= 0, \\ -z'(E_3 - \varepsilon') + \omega_1 y' - \omega_2 x' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Эти уравнения позволяют при данном вращении частички отыскать линии и плоскости, не изменяющие своих направлений. Нетрудно заметить, что каждая из систем уравнений (13) и (13′) соответствует только двум уравнениям, потому что, умножая, например, уравнения первой системы последовательно на x, y, z и складывая, получаем тождество:

$$E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 z^2 - \varepsilon r^2 = 0.$$

Для определения искомых направлений находим прежде величины ε и ε', исключая из уравнений (13) и (13′) координаты x, y, z, x', y', z'. Это дает нам из уравнений (13) кубическое уравнение

$$(E_1-\varepsilon)(E_2-\varepsilon)(E_3-\varepsilon)+\omega_1^2(E_1-\varepsilon)+\omega_2^2(E_2-\varepsilon)+\omega_3^2(E_3-\varepsilon)=0,$$

которое не изменяется при перемене знака двучленов

$$(E_1-\varepsilon),\quad (E_2-\varepsilon),\quad (E_3-\varepsilon)$$

и потому соответствует также и уравнениям (13′). Отсюда *каждой величине ε соответствует равная ей величина ε'.*

Найденное уравнение можно написать в более простом виде, вводя удлинение ε_0 по оси вращения частицы:

$$\varepsilon_0=\frac{1}{\omega^2}(E_1\omega_1^2+E_2\omega_2^2+E_3\omega_3^2),$$

где

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2.$$

$$(E_1-\varepsilon)(E_2-\varepsilon)(E_3-\varepsilon)+\omega^2(\varepsilon_0-\varepsilon)=0. \quad (14)$$

$$\varepsilon^3-\varepsilon^2(E_1+E_2+E_3)+\varepsilon(E_2E_3+E_3E_1+E_1E_2+\omega^2)-$$
$$-(\omega^2\varepsilon_0+E_1E_2E_3)=0. \quad (14')$$

Каждому действительному корню этого уравнения найдем из формул (13) и (13′) соответствующие, не изменяющие направления линию и плоскость, и так как кубическое уравнение имеет всегда, по крайней мере, один действительный корень, то получаем теорему[1]): *через каждую точку движущейся жидкости можно всегда провести по крайней мере одну бесконечно малую линию и одну бесконечно малую плоскость, которые, двигаясь вместе с жидкостью, сохраняют во время t свое направление.*

Когда все три корня уравнения (14) действительны, то будем иметь три действительные, не изменяющие своего

[1]) Bertrand, Comptes rendus, сем. I, 1868, стр. 1227. Также Thomson and Tait, Natural Philosophy, т. I, стр. 131, 1886.

направления линии, и три действительные, не изменяющие своего направления плоскости. Умножая уравнения (13) и (13′) последовательно на x′, y′, z′, x, y, z и складывая их, получаем равенство

$$(\varepsilon' - \varepsilon)(xx' + yy' + zz') = 0,$$

которое показывает, что всякий раз, как ε' не равно ε, r′ перпендикулярен к r. Отсюда следует, что каждые две не изменяющие направлений линии лежат в не изменяющей направления плоскости, нормаль которой имеет удлинение, не равное удлинению этих линий.

Условимся называть линию и плоскость, удлинение нормали которой равно удлинению линии, *соответственными* и выставим на вид теорему: *три не изменяющие направления плоскости и линии суть грани и ребра трехгранного угла, расположенного таким образом, что не изменяющим направления линиям противолежат соответственные не изменяющие направления плоскости.* Отсюда следует, что всякий раз, как две сохраняющие направления линии сливаются или становятся мнимыми, сливаются или становятся мнимыми соответственные им плоскости. Найденная теорема могла бы быть получена, если обратить внимание на то, что линии, сохраняющие во время t свой угол с плоскостью, должны иметь удлинение, равное удлинению нормали к плоскости. Построив трехгранный угол, дополнительный до трехгранного угла, неподвижного в полном движении частицы относительно центра, увидим, что ребра и нормали противоположных плоскостей будут в нем тоже иметь равные удлинения, а потому этот угол не изменится при движении частицы в продолжение времени t. Если дадим вращению частицы противоположное направление, то заметим, что уравнения (13) и (13′) обратятся друг в друга: линии, сохраняющие направления в новом движении, займут место нормалей плоскостей, сохраняющих направления в старом, и наоборот, так что в новом полном движении относительно центра станет неподвижен трехгран-

ный угол, дополнительный старому трехгранному углу. Мы получим теорему: *при изменении стороны вращения линии, сохраняющие направления, и нормали соответственных им плоскостей взаимно переменяются.* Рассматривая уравнения (14′) и (14), выводим из них еще две теоремы: *сумма удлинений по трем линиям, сохраняющим направления, или по трем нормалям плоскостей, соответственных этим линиям, равна сумме удлинений по осям деформации. Если будем перемещать ось постоянного вращения по конусу равного удлинения, то линии и нормали плоскостей постоянного направления будут тоже перемещаться: каждая соответственная пара по своему конусу удлинения.*

§ 11. Займемся теперь исследованием уравнения (14), которому дадим вид:

$$\omega^2 = \frac{(E_1 - \varepsilon)(E_2 - \varepsilon)(E_3 - \varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \qquad (14'')$$

При непрерывном изменении ε от E_3 до E_1 величина ω три раза переходит через 0; она может иметь на этом промежутке, вообще говоря, три наибольших и наименьших значения, так как уравнение

$$\frac{d \ln \omega^2}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon - E_1} + \frac{1}{\varepsilon - E_2} + \frac{1}{\varepsilon - E_3} - \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} = 0$$

есть кубическое. Положим

$$E_1 > E_2 > \varepsilon_0 > E_3.$$

При непрерывном изменении ε от E_3 до ε_0 величина ω изменяется от 0 до ∞, причем на этом промежутке она может иметь одно наибольшее значение вместе с одним наименьшим. При изменении ε от ε_0 величина ω становится мнимой и обращается в 0 при $\varepsilon = E_2$. Наконец, при изменении ε от E_2 до E_1 величина ω действительна и идет, прежде возрастая от 0, потом убывая до 0; в этом промежутке может быть только одно наибольшее значение ее, потому что если бы на нем было два наибольших и одно наименьшее значение ω, то можно было бы найти такую величину ω, которой бы соответствовало в уравнении (14″) более трех

действительных корней ε. Предполагая, что существуют три действительных наибольших и наименьших значения ω, назовем наибольшее и наименьшее значения, заключенные в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

через ω' и ω'', а наибольшее значение, заключенное в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1,$$

через ω'''; между этими тремя величинами необходимо должно существовать неравенство

$$\omega''' < \omega'' < \omega',$$

потому что в противном случае можно опять найти величину ω, которой соответствует в уравнении (14″) более трех действительных корней ε. Давая теперь в уравнении (14″) различные значения ω, получим четыре случая:

1) При

$$\omega < \omega'''$$

существует три действительных корня ε, из которых один лежит в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

а два — в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1.$$

2) При

$$\omega''' < \omega < \omega''$$

существует только один действительный корень ε в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

3) При

$$\omega'' < \omega < \omega'$$

существует три действительных корня, которые все лежат в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

4) Наконец, при

$$\omega' < \omega$$

получаем только один действительный корень в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Всякий раз, как ω получает одно из значений ω', ω'' или ω''', две линии, сохраняющие свои направления, и две соответственные им плоскости сливаются в одну. Будем называть такие сливающиеся линии и плоскости *двойными*. Когда существует только одно наибольшее значение ω, равное ω''', то для всех вращений

$$\omega < \omega'''$$

будут существовать три действительных корня ε, из которых два заключены в промежутке

$$E_2 < \varepsilon < E_1$$

и один в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0;$$

когда же возьмем

$$\omega''' < \omega,$$

то будет только один действительный корень в промежутке

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Мы сделали предположение:

$$E_1 > E_2 > \varepsilon_0 > E_3;$$

понятно, что в предположении

$$E_1 > \varepsilon_0 > E_2 > E_3$$

получим совершенно такие же результаты, с той только разницей, что роль промежутка

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

будет играть промежуток

$$\varepsilon_0 < \varepsilon < E_1,$$

а роль промежутка

$$E_2 < \varepsilon < E_1$$

будет играть промежуток

$$E_3 < \varepsilon < E_2.$$

Посмотрим теперь, какова должна быть величина ε_0, чтобы существовали три двойные линии и плоскости. Делая в уравнении

$$\frac{d \ln \omega^2}{d\varepsilon} = 0$$

подстановки:

$$z = z + \varepsilon_0, \quad E_1 - \varepsilon_0 = k_1, \quad E_2 - \varepsilon_0 = k_2, \quad E_3 - \varepsilon_0 = k_3,$$

получим уравнение

$$\frac{1}{z-k_1} + \frac{1}{z-k_2} + \frac{1}{z-k_3} - \frac{1}{z} = 0,$$

которое можно представить так:

$$2z^3 - z^2(k_1 + k_2 + k_3) + k_1k_2k_3 = 0.$$

Полагая здесь в свою очередь

$$\frac{\sqrt[3]{k_1k_2k_3}}{z} = y,$$

найдем

$$y^3 - y\frac{k_1 + k_2 + k_3}{\sqrt[3]{k_1k_2k_3}} + 2 = 0.$$

Для того чтобы три корня этого последнего уравнения были действительны, необходимо выполнить условие:

$$-\frac{(k_1 + k_2 + k_3)^3}{27k_1k_2k_3} + 1 < 0.$$

Внося в это неравенство значение k, получим:

$$\frac{1}{(E_1 - \varepsilon_0)(E_2 - \varepsilon_0)(E_3 - \varepsilon_0)} \times$$
$$\times \left\{ \varepsilon_0 \left[\frac{(E_1 + E_2 + E_3)^2}{3} - (E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2) \right] - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{(E_1 + E_2 + E_3)^3}{3^3} - E_1E_2E_3 \right] \right\} < 0.$$

Так как множитель при ε_0 в квадратной скобке существенно положителен, что видно из тождества

$$\frac{(E_1 + E_2 + E_3)^2}{3} - (E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2) =$$
$$= \frac{(E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 + (E_1 - E_2)^2}{6},$$

то делим на него полученное неравенство и представляем найденный результат таким образом:

$$\frac{p - \varepsilon_0}{(E_1 - \varepsilon_0)(E_2 - \varepsilon_0)(E_3 - \varepsilon_0)} > 0, \tag{15}$$

где

$$p = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{9} + \frac{2}{3}\frac{E_1(E_2 - E_3)^2 + E_2(E_3 - E_1)^2 + E_3(E_1 - E_2)^2}{(E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 + (E_1 - E_2)^2}.$$

Неравенство (15) есть искомое нами условие существования трех действительных значений ω', ω'', ω'''. Входящая в это неравенство величина p заключена между E_1 и E_3, потому что, полагая все E, не заключенные в скобках, равными E_1, мы получим $p = E_1$, а полагая все E вне скобок равными E_3, найдем $p = E_3$. Что касается E_2, то может быть $E_2 > p$ и $E_2 < p$; решая неравенство (15) в первом и втором предположениях, получим

$$E_2 > \varepsilon_0 > p \quad \text{и} \quad p > \varepsilon_0 > E_2.$$

Мы видим, что *для того чтобы ось вращения допускала двойные не изменяющие направления линии и плоскости при трех вращениях ω', ω'', ω''', необходимо, чтобы эта ось лежала между плоскостями удлинения E_2 и конусом удлинения p.*

Называя через ε' удлинение радиуса, образующего с осями деформации равные углы, косинусы которых равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а через ε'' удлинение соответствующей ему характеристики, найдем:

$$\varepsilon' = \frac{E_1 + E_3 + E_3}{3},$$

$$\varepsilon'' = \frac{E_1(E_2 - E_3)^2 + E_3(E_3 - E_1)^2 + E_3(E_1 - E_2)^2}{(E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 + (E_1 - E_2)^2},$$

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon' + \frac{2}{3}\varepsilon''.$$

§ 12. Мы перейдем теперь к разбору зависимости, существующей между положением оси вращения и положениями линий и плоскостей, не изменяющих направления. Эта зависимость представляется весьма наглядно с помощью одного конуса третьего порядка, который мы будем называть *конусом постоянных направлений*. Чтобы вывести уравнение этого конуса, отлагаем на оси вращения бесконечно малую длину ρ, проекции ξ, η, ζ которой по осям деформации находятся в отношениях

$$\xi : \eta : \zeta = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3.$$

Составляя сумму уравнений (13), умноженных последовательно на ξ, η, ζ, и подобную же сумму уравнений (13′), получим между x, y, z в первом случае уравнение

$$\xi x(E_1 - \varepsilon) + \eta y(E_2 - \varepsilon) + \zeta z(E_3 - \varepsilon) = 0 \qquad (16)$$

и подобное же уравнение между x′, y′, z′ во втором случае. Рассматривая координаты x, y, z как постоянные, а ξ, η, ζ как текущие, получим уравнение плоскости, проходящей через точку x, y, z и точку

$$[yz(E_2 - E_3),\quad zx(E_3 - E_1),\quad xy(E_1 - E_2)].$$

Это показывает, что *все оси, при вращении около которых данная линия или нормаль данной плоскости сохраняет свое направление, лежат в плоскости, проходящей через это направление и соответствующую ему характеристику*. Когда же будем рассматривать координаты ξ, η, ζ как постоянные, а координаты x, y, z как текущие и подставим в уравнение (16):

$$\varepsilon = \frac{E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

то получим уравнение конуса третьего порядка:

$$\xi(E_1 - E_2)xy^2 + \xi(E_1 - E_3)xz^2 + \eta(E_2 - E_3)yz^2 + \eta(E_2 - E_1)yx^2 + \\ + \zeta(E_3 - E_1)zx^2 + \zeta(E_3 - E_2)zy^2 = 0. \qquad (16')$$

Мы имеем теорему: *место линий и нормалей плоскостей, которые могут сохранять направления при вращении частицы около данной оси с различными угловыми скоростями, есть конус третьего порядка*. Этот конус мы и будем называть конусом постоянных направлений. Познакомимся теперь с его свойствами. Уравнение (16′) показывает прямо, что *конус постоянных направлений проходит через оси деформации;* делая в этом уравнении поочередно

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,$$

находим:

$$\frac{y}{z} = \frac{\eta}{\zeta};\quad \frac{z}{x} = \frac{\zeta}{\xi};\quad \frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Это показывает, что *конус постоянных направлений пересекает плоскости деформации по проекциям оси вращения.* Далее, представляя уравнение конуса постоянных направлений в форме (16), убеждаемся, что оно удовлетворяется при

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

а также при

$$x = \eta\zeta(E_2 - E_3), \quad y = \xi\zeta(E_3 - E_1), \quad z = \eta\xi(E_1 - E_2),$$

откуда следует, что *конус постоянных направлений проходит через ось вращения и через соответствующую ей характеристику.*

Вообразив теперь на конусе постоянных направлений две образующие (x, y, z) и (x′, y′, z′), имеющие равные удлинения, получим из уравнения (16) равенство:

$$\frac{E_1\xi x + E_2\eta y + E_3\zeta z}{\xi x + \eta y + \zeta z} = \frac{E_1\xi x' + E_2\eta y' + E_3\zeta z'}{\xi x' + \eta y' + \zeta z'},$$

которое можно преобразовать так:

$$\eta\zeta(E_2 - E_3)(yz' - zy') + \zeta\xi(E_3 - E_1)(zx' - xz') + \\ + \xi\eta(E_1 - E_2)(xy' - yx') = 0.$$

Полученное уравнение показывает, что *плоскость, проходящая через две линии на конусе постоянного направления, имеющие равные удлинения, проходит всегда через характеристику, соответствующую оси вращения.* Так как из нижнего равенства получается верхнее, то и обратная теорема имеет место. *Всякая плоскость, проходящая через характеристику оси вращения, рассекает конус постоянных направлений еще по двум линиям равного удлинения.*

Эта теорема показывает, что *четыре касательные плоскости*[1]), *проведенные через характеристику оси вращения к конусу постоянных направлений, соприкасаются к нему по трем осям деформации и по оси вращения*, так как каждая из этих линий имеет в своей плоскости наибольшее и наименьшее удлинения.

[1]) Пятая касательная плоскость соприкасается к конусу по характеристике оси вращения.

Далее, из этой же теоремы следует, что на конусе постоянных направлений не может лежать более двух радиусов с равными удлинениями, потому что если бы существовало более двух таких радиусов, то все они должны бы были лежать на плоскости, проходящей через один из радиусов и характеристику оси вращения, что невозможно, так как плоскость может пересекать конус третьего порядка только по трем образующим. *Вследствие этого при вращении секущей плоскости, проходящей через характеристику оси вращения, величина* ε, *соответствующая сечениям конуса постоянных направлений, постоянно возрастает или убывает.*

Посмотрим теперь, какая связь существует между образующими конуса постоянных направлений и плоскостью, проходящей через ось вращения. Из уравнений (16) и (5) прямо видим, что *плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус еще по двум образующим, в которых она соприкасается с соответственными конусами равного удлинения.* Эта теорема показывает, что *конус постоянных направлений можно рассматривать как место образующих, по которым различные плоскости, проходящие через ось вращения, соприкасаются с конусами равного удлинения.* Так как на основании сказанного плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянных направлений по двум радиусам, имеющим наибольшее и наименьшее удлинения во всей плоскости, то эти радиусы будут главными осями сечения плоскости с поверхностью удлинения. Отсюда следует, что *плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянного направления по двум образующим, которые суть взаимные характеристики.*

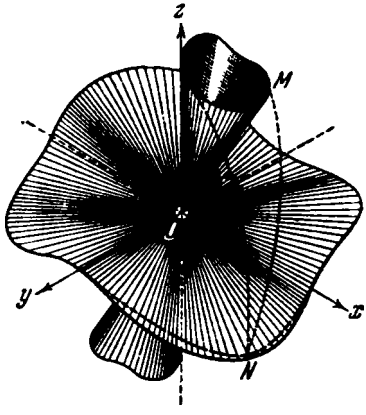
Пользуясь этим свойством, можно найти весьма простой способ построения конуса постоянных направлений. Взяв конус равного удлинения, проходящий через ось вращения находим его следы на концентрической сфере. Всякая плоскость, проходящая через ось вращения, рассечет эти следы в четырех точках, соединяя которые получим прямоуголь-

ник. Линии, делящие пополам углы между диагоналями прямоугольника, и будут те образующие, по которым проведенная плоскость рассекает конус постоянных направлений. Так как эти образующие параллельны сторонам прямоугольника, то получаем следующее простое построение конуса постоянных направлений. *Начертив на сфере следы конуса равного удлинения, соответствующего оси вращения, строим конус, имеющий вершиной точку пересечения сферы с осью вращения, а основанием — два полученных следа; найденный конус будет отличаться от конуса постоянных направлений только местом вершины.*

Из всего сказанного вполне выясняется вид разбираемого конуса и положение его относительно осей деформации. Он будет состоять из двух полостей, из которых одна, подобно конусу второго порядка, рассекает концентрическую сферу по двум замкнутым линиям, а другая, подобно плоскости, рассекает эту сферу по одной непрерывной линии. Ось вращения будет лежать на первой полости, а характеристика ее — на второй; равным образом все взаимные характеристики будут лежать на различных полостях, так как они будут соответствовать сторонам вышеупомянутого прямоугольника.

Будем называть полость, на которой лежит ось вращения, *полостью оси вращения*, а полость, на которой лежит характеристика, — *полостью характеристики оси вращения*. Плоскость, проходящая через полость оси вращения, может пересекать ее только по двум линиям, поэтому на этой полости не могут лежать образующие, соответствующие точкам перегиба; все такие образующие будут лежать на второй полости. То обстоятельство, что плоскость, проходящая через ось вращения, рассекает конус постоянных направлений по двум образующим, в которых она соприкасается с конусами равного удлинения, показывает, что конус постоянных направлений может пересекать две плоскости, соответствующие конусу равного удлинения E_2, только по оси деформации E_2. Отсюда следует, что в каж-

дой паре вертикальных углов, образуемых помянутыми плоскостями, лежит только одна полость конуса постоянных направлений. Понятно, что при этом полость оси вращения проходит только через ту ось деформации, которая лежит в ее угле, а полость характеристики оси вращения проходит через лежащую в ее угле ось деформации и еще через ось E_2: кроме того, так как характеристики осей деформации лежат на противоположных плоскостях деформации, то полость оси вращения проходит через две проекции оси вращения на плоскости деформации, а полость характеристики оси вращения — только через одну проекцию. Проведя через характеристику оси вращения четыре касательные плоскости к конусу постоянных направлений, увидим, что плоскости, проходящие через одну из осей деформации и ось вращения, вполне заключают в своем двугранном угле полость оси вращения, а плоскости, проходящие через две другие оси деформации, вполне заключают в своем двугранном угле полость характеристики оси вращения; отсюда следует, что каждые две образующие, имеющие одинаковые удлинения, лежат на одной и той же полости конуса.



Фиг. 3.

На фигуре 3 изображен конус постоянных направлений в его надлежащем положении относительно осей деформации, обрезанный по концентрической сфере. OM есть ось вращения, а ON ее характеристика. Линии, обозначенные пунктиром, представляют следы на сфере четырех касательных плоскостей, проведенных к конусу через характеристику оси вращения.

Заметим, что в частном случае, когда ось вращения попадает на одну из плоскостей удлинения E_2 и когда

$$\zeta = \xi \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_2 - E_3}},$$

уравнение (16′) распадается на два множителя:

$$(z\sqrt{E_2 - E_3} - x\sqrt{E_1 - E_2}) \times$$
$$\times \left[-\xi y^2 \sqrt{E_1 - E_2} + \xi xz \frac{E_1 - E_3}{\sqrt{E_2 - E_3}} + \right.$$
$$\left. + \eta yz \sqrt{E_2 - E_3} + \eta yx \sqrt{E_1 - E_2} \right] = 0,$$

из которых один дает уравнение той плоскости удлинения E_2, на которую вступает ось вращения, а другой дает уравнение конуса второго порядка, пересекающего по двум образующим вышеупомянутую плоскость. Эта плоскость и конус второго порядка служат переходной ступенью от конуса постоянных направлений, у которого полость оси проходит через ось деформации E_1, к конусу постоянных направлений, у которого эта полость проходит через E_3.

Приложим теперь свойства исследованного конуса к нашему кинематическому вопросу. Каждой образующей конуса удлинения ε будет соответствовать на той же полости другая образующая с тем же удлинением ε, расположенная таким образом, что плоскость, проходящая через обе образующие, пройдет через характеристику оси вращения. Если при данном вращении одна образующая будет соответствовать не изменяющей направления линии, то другая будет нормалью соответственной ей плоскости; при этом при данном направлении вращения частицы всегда можно сказать, которая из образующих соответствует линии и которая нормали; для этого стоит только припомнить, что девиация линии совершается от радиусов меньшего удлинения к радиусам большего удлинения, а девиация нормали — наоборот.

Положим теперь, что при данном вращении образующие a и a' представляют не изменяющую направления линию

и нормаль соответствующей ей плоскости. Чтобы найти две другие, не изменяющие направлений линии, проводим плоскость, перпендикулярную к a'; эта плоскость рассечет конус постоянных направлений или по одной линии, которая есть характеристика a', или по этой линии и еще по двум другим линиям b и c. Так как характеристика линии a' не должна, вообще говоря, сохранять от внутренней девиации угол с линией a, то в первом случае будет для данного вращения существовать только одна не изменяющая направления линия a и одна нормаль a' не изменяющей направления плоскости; во втором случае мы будем иметь три не изменяющие направления линии a, b, c и три не изменяющие своего направления плоскости, проходящие через эти линии. Нормали b' и c' к плоскостям ac и ab будут лежать на линии пересечения конуса постоянных направлений с плоскостью, перпендикулярной к a, и будут обладать тем свойством, что плоскости bb' и cc' пройдут через характеристику оси вращения. Из указанного построения образующих b и b', c и c' следует, что если пара образующих a и a' лежит на полости оси вращения, то пары b и b', c и c' лежат или обе на полости оси вращения, или обе на полости характеристики оси вращения, или, наконец, обе мнимы; в случае же, когда пара a и a' лежит на полости характеристики оси вращения, то пары b и b', c и c' наверно действительны и лежат одна на полости оси вращения, другая на полости характеристики оси вращения.

Мы получили такой результат: *всякий раз, как существуют три сохраняющие направления линии, а следовательно, и три соответственные им нормали, все три соответственные пары расположены на полости оси вращения или одна пара расположена на полости оси вращения, а другие две на полости характеристики оси вращения*; *всякий раз, как две пары этих линий мнимы, действительная пара лежит на полости оси вращения*. Заметив, что при

$$E_3 < \varepsilon_0 < E_2$$

на полости оси вращения будут лежать образующие, удлинения которых удовлетворяют неравенству

$$E_3 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

а на полости характеристики оси вращения — образующие, удлинения которых удовлетворяют неравенству

$$E_2 < \varepsilon < E_1,$$

увидим полное тождество найденного результата с изложенным в § 11.

Прежде нежели сделаться мнимыми, две не изменяющие направления линии и соответствующие им нормали сливаются в одну двойную линию и одну двойную нормаль; эти две двойные линии должны быть взаимно перпендикулярны и должны лежать на пересечении одной из полостей конуса постоянных направлений плоскостью, проходящей через характеристику оси вращения. Понятно, что обратное заключение тоже справедливо, т. е. всякие две взаимно перпендикулярные образующие конуса постоянных направлений, лежащие на одной и той же полости и на плоскости, проходящей через характеристику оси вращения, представляют двойную линию и соответствующую ей двойную нормаль. Это замечание позволяет графически определить три двойные линии и три соответственные нормали; из него видно, что на полости оси вращения могут быть только две действительные или мнимые пары двойных линий, следовательно, на конусе характеристики всегда будет одна действительная пара.

Теория конуса постоянных направлений позволяет с удобством разрешить многие задачи о не изменяющих направления линиях и плоскостях; предлагаем решение четырех подобных задач.

1) По положению двух данных сохраняющих направления линий найти ось вращения и третью линию.

Проводим через данные линии касательные плоскости к проходящим через них конусам равного удлинения; получим в пересечении этих плоскостей ось вращения

Строим характеристику оси вращения и соединяем с ней плоскостями данные линии; пересечение плоскостей с соответствующими конусами, проходящими через данные линии, дает соответствующие им нормали неподвижных плоскостей; проведя эти плоскости, найдем в их пересечении третью не изменяющую направления линию.

2) По данной не изменяющей направления линии и соответственной нормали найти ось вращения и две другие не изменяющие направления линии.

Ось вращения, как в предыдущей задаче, есть пересечение двух плоскостей, касательных к конусам постоянного удлинения, на которых лежат данные линии. Чтобы найти две другие не изменяющие направления линии, пользуемся началом, на котором основано вышеприведенное построение конуса постоянных направлений. Для этого строим поверхность удлинения и концентрическую с ней сферу, проходящую через точку, в которой ось вращения пересекает поверхность удлинения, и проводим через эту точку плоскость, перпендикулярную к данной нормали; плоскость пересечет поверхность удлинения по кривой второго порядка, а сферу — по кругу; из четырех точек A, B, C, D пересечения этих линий точка A будет лежать на оси вращения, точка B будет обладать тем свойством, что хорда AB параллельна характеристике данной нормали, точки же C и D дадут нам хорды CA и CD, параллельные искомым не изменяющим направления линиям.

3) По оси вращения и сохраняющей свое направление линии найти другие сохраняющие направления линии.

Эта задача сводится к задаче второй, когда через характеристику оси вращения и данную линию проведем плоскость и определим ее пересечение с конусом равного удлинения, на котором лежит данная линия.

4) По не изменяющим направления линиям a_1, a_2, a_3 и по соответствующим им удлинениям найти ось и скорость вращения, а также оси деформации и главные удлинения.

Построим сначала характеристику оси вращения, заме-

чая, что она должна лежать в пересечении трех плоскостей, из которых каждая проходит через одну из не изменяющих своего направления линий и через нормаль соответствующей не изменяющей направления плоскости. Так как удлинения по линиям, не изменяющим своего направления, даны, то по ним можно определить направление и величину девиации найденной линии. Величина девиации будет искомая скорость вращения частицы, а перпендикуляр к направлению девиации и к направлению характеристики оси вращения будет ось вращения частицы. Для определения осей деформации строим конус равного удлинения, проходящий через неподвижную линию a_1. Этот конус вполне определяется по данным задачи, так как он должен проходить через линию a_1, через нормаль к плоскости $(a_2 a_3)$, через два перпендикуляра к линиям a_2 и a_3, проведенных по плоскостям $(a_1 a_2)$, $(a_1 a_3)$, и должен еще касаться плоскостей, соединяющих линию a_1 и нормаль плоскости $(a_1 a_2)$ с осью вращения частицы. Оси найденного конуса будут оси деформации, а соответствующие им удлинения будут главные удлинения частицы.

§ 13. Когда известны для какой-нибудь точки жидкости не изменяющая своего направления линия и соответствующая плоскость, то полное движение частицы, имеющей эту точку центром, может быть исследовано весьма просто. Отнимая от скоростей всех точек частицы скорость ее центра, разлагаем бесконечно малые относительные скорости точек частицы каждую на две слагающие, из которых одна параллельна не изменяющей своего направления линии, а другая параллельна соответственной плоскости. Первые слагающие будут пропорциональны расстоянию от не изменяющей направления плоскости, а вторые слагающие будут одинаковы для всех точек, лежащих на линиях, параллельных соответственной линии. Если теперь назовем *косоугольным удлинением относительно плоскости* движение, при котором все точки частицы имеют параллельные скорости, направленные под косым углом к плоскости и пропорциональные расстоя-

нию точки от плоскости, то получим следующую теорему: *полное движение частицы относительно центра может быть разложено на косоугольное удлинение относительно не изменяющей своего направления плоскости, проходящей через этот центр, которое направлено вдоль неподвижной линии, и на движение, параллельное неподвижной плоскости, в котором все точки, лежащие на линиях, параллельных не изменяющей направления линии, имеют одинаковые скорости.*

Движение точек частицы параллельно плоскости, не изменяющей направления, определяется по движению точек, лежащих в этой плоскости. Разлагаем это последнее движение на удлинение радиуса и девиацию. Удлинение радиуса будет зависеть от кривой сечения, по которой не изменяющая направления плоскость пересечет поверхность удлинения, а девиация сложится из внутренней девиации радиуса в этой плоскости и из угловой скорости, равной проложению скорости вращения частицы на нормаль к плоскости, не изменяющей направления. Если наибольшая внутренняя девиация радиуса в не изменяющей направления плоскости будет менее проложения вращения частицы на нормаль к этой плоскости, то мы будем иметь только одну не изменяющую направления плоскость и одну не изменяющую направления линию; в противном случае два радиуса, лежащие в данной не изменяющей направления плоскости и имеющие девиации, равные угловой скорости вращения частицы около нормали к плоскости, но направленные в сторону, обратную этому вращению, будут две новые не изменяющие направлений линии. По § 9 эти не изменяющие направления линии должны лежать обе в одном и том же прямом углу, образуемом главными осями сечения не изменяющей направления плоскости с поверхностью удлинения, и должны быть равно наклонены к биссектору этого угла. Когда в данной не изменяющей направления плоскости не существует неподвижных линий, то девиация всех радиусов, лежащих в этой плоскости, совершается в сторону вращения частицы около нормали к плоскости; в противном

случае *девиация совершается в различные стороны, направляясь от не изменяющей направления линии с меньшим удлинением к не изменяющей направления линии с бо́льшим удлинением.* В частном случае, когда наибольшая девиация радиуса в не изменяющей направления плоскости равна проложению скорости вращения частицы на нормаль к плоскости; мы будем иметь в этой плоскости двойную неподвижную линию; девиация же всех радиусов будет совершаться в сторону вращения частицы около нормали к не изменяющей направления плоскости.

Проводим через центр частицы оси координат Ox, Oy, Oz, из которых две первые направлены по осям сечения не изменяющей направления плоскости с поверхностью удлинения, а последняя по соответствующей плоскости Oxy не изменяющей направления линии, и назовем через u, v, w скорости точек частицы по этим осям, а через ε и σ удлинение и девиацию радиуса в плоскости Oxy. На основании сказанного выше получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= e_1 x - ry, \\ v &= e_2 y + rx, \\ w &= \varepsilon_3 z, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}(e_1 x^2 + e_2 y^2),$$

$$r^2\sigma = (e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2),$$

в которых e_1, e_2, ε_3 суть удлинения по осям Ox, Oy, Oz, а r — проложение вращения частицы на нормаль к плоскости Oxy.

Что касается девиации σ, то она считается положительной от оси Ox к оси Oy. Полагая $r^2\sigma = \pm k$, где k — малая постоянная величина, найдем уравнение центрального конического сечения

$$(e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2) = \pm k. \qquad (11'')$$

Мы видим, что *в полном движении частицы относительно центра девиация радиуса-вектора, лежащего в не изменяющей направления плоскости, обратно пропорциональна централь-*

ному радиусу-вектору кривой второго порядка. Эта кривая будет эллипсис, гипербола или две параллельные прямые, смотря по тому, будет ли r^2 больше, меньше или равен

$$\left(\frac{e_2-e_1}{2}\right)^2.$$

Так как

$$\left(\frac{e_2-e_1}{2}\right)^2$$

есть квадрат наибольшей внутренней девиации радиуса-вектора в неподвижной плоскости, то мы получаем из уравнения (11″) результаты, вполне согласные со сказанным выше. Воспользуемся уравнениями (17) для определения бесконечно малых линий токов точек частицы в полном движении относительно центра. Дифференциальные уравнения этих линий будут

$$\frac{dx}{e_1x-ry}=\frac{dy}{e_2y+rx}=\frac{d\zeta}{\varepsilon_3\zeta}. \tag{18}$$

Они могут быть обинтегрированы помощью следующих преобразований. Представляем первую часть уравнения (18) в виде

$$dx\,(e_2y+rx)=dy\,(e_1x-ry).$$

Делим это уравнение на интегрирующий делитель

$$(e_2-e_1)\,xy+r\,(x^2+y^2)$$

и полагаем

$$e_2=\frac{e_2+e_1}{2}+\frac{e_2-e_1}{2},\quad e_1=\frac{e_2+e_1}{2}-\frac{e_2-e_1}{2}.$$

Это дает

$$\frac{(e_2-e_1)\,(y\,dx+x\,dy)+2r\,(x\,dx+y\,dy)}{(e_2-e_1)\,xy+r\,(x^2+y^2)}=\frac{(e_2+e_1)\,(x\,dy-y\,dx)}{(e_2-e_1)\,xy+r\,(x^2+y^2)}.$$

Умножая, с другой стороны, числитель и знаменатель первой дроби в уравнении (18) на $-y$, а числитель и знаменатель второй дроби на x, и складывая числитель первой дроби с числителем второй, а знаменатель первой дроби с знаменателем второй, найдем:

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{(e_2-e_1)\,xy+r\,(x^2+y^2)}=\frac{d\zeta}{\varepsilon_3\zeta}.$$

Задавшись углом ν $\left(\text{который, по предположению, менее } \frac{\pi}{2}\right)$, определим из этих формул размеры воронки с помощью отношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left[\frac{1}{\sin\nu}\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)-1\right], \\ \frac{b-a}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Что же касается количества Q истекающей жидкости, то оно представится формулой:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + 2\left[\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\right]}\,2bc. \qquad (125)$$

Величина, стоящая здесь в знаменателе множителем при 2, положительна, ибо она может быть представлена в виде двух положительных членов:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2};$$

с другой стороны, эта величина менее единицы, ибо при вычитании из нее единицы мы получаем отрицательную величину

$$-\left(1-\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right).$$

Это показывает, что формула (125) дает большее количество вытекающей жидкости, нежели формула (24), т. е. *прибавление наставки увеличивает количество вытекающей жидкости.*

Предположим, что к стенке воронки против контура струи FF прикреплена пьезометрическая трубка BD, и определим высоту $ED = h$, на которую жидкость (той же плотности, как текущая жидкость) поднимется в этой трубке.

болы, найдем следующее симметричное уравнение линий токов относительно косоугольных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, соответствующих не изменяющим своего направления линиям:

$$a\xi^{\frac{1}{\varepsilon_1}} = b\eta^{\frac{1}{\varepsilon_2}} = c\zeta^{\frac{1}{\varepsilon_3}}. \qquad (19')$$

Поверхности конусов, имеющие эти линии токов направляющими, а вершину — в центре частицы, выражаются такими же уравнениями, как конусы девиаций. Действительно, написавши на основании уравнений (19′) три равенства:

$$\xi^{\varepsilon_2-\varepsilon_3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon_2\varepsilon_1}\left(\frac{a}{c}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\eta^{\varepsilon_1}}{\zeta^{\varepsilon_1}},$$

$$\eta^{\varepsilon_3-\varepsilon_1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{\varepsilon_3\varepsilon_2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon_2\varepsilon_1}\frac{\zeta^{\varepsilon_2}}{\xi^{\varepsilon_2}},$$

$$\zeta^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\left(\frac{b}{c}\right)^{\varepsilon_2\varepsilon_3}\frac{\xi^{\varepsilon_3}}{\eta^{\varepsilon_3}};$$

перемножив их и перенося все переменные величины в первую часть, найдем уравнение нулевого измерения:

$$\xi^{\varepsilon_2-\varepsilon_3}\eta^{\varepsilon_3-\varepsilon_1}\zeta^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \text{const}. \qquad (19'')$$

Это уравнение представляет семейство конусов, расположенных относительно косоугольных осей точно так же, как конусы девиации расположены относительно осей деформации. Найденные поверхности могут быть названы *конусами полной девиации*. Замечая, что на основании сказанного в начале этого параграфа девиация радиусов-векторов в неподвижных плоскостях совершается от линии, не изменяющей направления, с меньшим удлинением к линии с большим удлинением, получаем для полного движения совершенно такую же теорему, как для внутреннего. *В случае существования трех не изменяющих направления линий бесконечно малые радиусы-векторы частицы в полном движении относительно центра текут в бесконечно малое время* t *по конусам полной девиации, направляясь от не изменяющей направления линии с меньшим удлинением к не изменяющей направления линии с бо́льшим удлинением.*

Приняв $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, рассмотрим вытекающую из уравнения (19′) связь между ξ и ζ:

$$\xi \zeta^{\frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \text{const.}$$

Если удлинение ε_3 отрицательно, а ε_1 положительно, то это уравнение представляет гиперболы высшего порядка, имеющие асимптотами оси $O\xi$ и $O\zeta$, которые в частном случае при $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0$ обращаются в гиперболы второй степени[1]). Когда ε_1 и ε_3 имеют одинаковые знаки, то мы получаем гиперболы, проходящие через начало координат, соприкасающиеся в начале с той из осей, которой соответствует меньшее по абсолютной величине удлинение, и имеющие в бесконечности касательную, параллельную другой оси; в частном случае, когда $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0$, эти гиперболы представляют прямые линии, проходящие через начало координат. Сказанное о линиях

$$\xi \zeta^{\frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \text{const.}$$

выясняет расположение линий токов на конусах девиации.

Переходим к интегрированию уравнений (18′) в предположении, что

$$\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} < r^2.$$

Последняя часть уравнения дает в интеграле арктангенс, и мы получим после интегрирования и небольшого преобразования следующие уравнения линий токов:

$$c_1 \zeta^{\frac{e_2 + e_1}{e_3}} = c_2 [(e_2 - e_1)\, xy + r(x^2 + y^2)] = e^{\frac{(e_2 + e_1)\psi}{r\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}}. \quad (20)$$

---

[1]) Во втором томе «Математического сборника» помещена статья Цингера «О движении свободной жидкой массы», в которой, между прочим, разбирается движение жидкой площади в предположении, что вращение ее равно нулю; вследствие этого неподвижные линии взаимно перпендикулярны и линии токов суть равносторонние гиперболы.

Здесь для краткости положено

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{y}{x} + \frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}.$$

Полагая

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

видим, что при непрерывном возрастании φ от 0 до ∞ функция ψ возрастает непрерывно от

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}$$

до бесконечности, переходя через все значения

$$\frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{\pi}{2}, \quad 5\frac{\pi}{2}, \quad \ldots$$

одновременно с φ; также и при непрерывном убывании φ до $-\infty$ функция ψ непрерывно убывает до $-\infty$. Это показывает, что *в полном движении, которому соответствует одна неподвижная плоскость, точки, лежащие в этой плоскости, движутся по спиралеобразным линиям, имеющим центр частицы асимптотической точкой. Эти спирали будут итти от оси Ox к Oy, расширяясь или сжимаясь, смотря по тому, будем ли мы иметь*

$$\frac{e_1 + e_2}{r} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{e_1 + e_2}{r} < 0.$$

Далее из уравнений (20) видим, что *в частном случае, когда*

$$e_1 + e_2 = 0,$$

эти спирали обращаются в эллипсы.

Для составления уравнений конусов полной девиации находим связь между

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r}{\rho} \quad \text{и} \quad \varphi,$$

которая на основании уравнений (20) будет иметь следующий вид:

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 = c\left[(e_2 - e_1)\sin\varphi\cos\varphi + r\right]\cdot e^{\frac{(2e_3 - e_2 - e_1)\psi}{r\sqrt{1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}}}, \qquad (20')$$

где

$$c = \text{const}.$$

Найденное уравнение показывает, что при существовании одной действительной не изменяющей направления плоскости конусы полной девиации рассекают концентрическую сферу по спиралеобразным линиям, которые расположены на двух полусферах, отсекаемых этой плоскостью. Каждая из спиралей идет одним своим концом к кругу, лежащему на не изменяющей направления плоскости, а другим концом к точке, лежащей на соответственной не изменяющей направления линии, но достигает этого круга и этой точки только после бесконечного числа оборотов. Смотря на проведенную нами сферу с положительного конца оси $O\zeta$ и считая ось Oy, как всегда, вправо от Ox, видим, что спирали будут итти от нашего глаза, завиваясь по стрелке часов, когда

$$\frac{2e_3 - e_2 - e_1}{r} < 0,$$

и завиваясь против стрелки в случае

$$\frac{2e_3 - e_2 - e_1}{r} > 0.$$

Понятно, что при том же положении глаза спирали, лежащие на нижней полусфере, будут завиваться в сторону, обратную спиралям верхней полусферы. Из сказанного о направлении спиралей следует, что при

$$2e_3 - (e_2 + e_1) < 0$$

радиусы-векторы частицы будут приближаться к плоскости, не изменяющей направления, а при

$$2e_3 - (e_2 + e_1) > 0$$

они будут удаляться от нее.

Остается еще рассмотреть частный случай

$$\frac{(e_2-e_1)^2}{4}=r^2,$$

при котором две из не изменяющих направления линий и две из не изменяющих направления плоскостей сливаются в одну линию и в одну плоскость. Из двух положений

$$e_2-e_1=-2r \quad \text{и} \quad e_2-e_1=2r$$

разберем первое. Уравнения (18′) дают при

$$e_2-e_1=-2r$$

следующие интегралы:

$$c_1\zeta^{\frac{e_2+e_1}{e_2}}=c_2\rho^2\sin^2 u=e^{\frac{e_2+e_1}{r}\frac{\operatorname{tg}u-1}{2\operatorname{tg}u}}. \tag{21}$$

Здесь угол

$$u=\varphi-\frac{\pi}{4}$$

есть угол, заключенный между радиусом-вектором и неподвижной линией, уравнение которой есть

$$x-y=0.$$

Полярное уравнение линий токов, лежащих на плоскости Oxy, в предположении, что полярная ось есть двойная не изменяющая направления линия, будет

$$\rho^2=\text{const}.\frac{1}{\sin^2 u}e^{\frac{e_2+e_1}{r}\frac{\operatorname{tg}u-1}{2\operatorname{tg}u}}. \tag{21′}$$

Входящее в него постоянное можно удобно определить по отрезку, который делает линия токов на оси деформации Oy; полагая этот отрезок равным ρ_0 и замечая, что для оси деформации

$$u=\frac{\pi}{4},$$

находим

$$\text{const}=\frac{\rho_0^2}{2}.$$

Рассмотрим вид кривых, выражаемых уравнением (21′), в предположении

$$\frac{e_2+e_1}{r}>0,$$

которое имеет, например, место, когда вращение r совершается по часовой стрелке и когда удлинение по двойной не изменяющей направления линии положительно. При

$$u=+0 \quad \text{и} \quad u=\pi-0$$

находим

$$\rho^2=0 \quad \text{и} \quad \rho^2=\infty.$$

Умножая уравнение (21′) на $\sin^2 u$ и замечая, что $\rho^2\sin^2 u$ есть квадрат длины перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на полярную ось, видим, что этот перпендикуляр при

$$u=+0 \quad \text{и} \quad u=\pi-0,$$

так же как и ρ, обращается в 0 и ∞. Составляя, наконец, выражение $\frac{\rho\,du}{d\rho}$, которое при

$$u=+0 \quad \text{и} \quad u=\pi-0$$

дает нам тангенс угла касательной к кривой с полярной осью, заключаем, что этот тангенс при обоих помянутых положениях радиуса-вектора равен нулю. Обращая внимание на все сказанное и замечая, что траектории, выражаемые уравнением (21′), симметричны относительно центра частицы, убеждаемся, что все эти траектории имеют в центре точку перегиба, касательная которой есть наша полярная ось. Каждая траектория имеет две симметричные части, которые, начиная от точки перегиба, идут в различные стороны, потом загибаются и идут опять в различные стороны, удаляясь в бесконечность, где они становятся параллельны полярной оси.

Конусы полной девиации в разбираемом нами случае имеют такое уравнение:

$$\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^2=\text{const.}\sin^2 u\, e^{\frac{2e_3-(e_1+e_2)}{r}\frac{\operatorname{tg} u-1}{2\operatorname{tg} u}}. \qquad (21'')$$

Полагая

$$\frac{2\varepsilon_3-(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{r}>0,$$

найдем

$$\frac{\zeta}{\rho}=0 \quad \text{для} \quad u=+0 \quad \text{и} \quad u=\pi+0$$

и

$$\frac{\rho}{\zeta}=0 \quad \text{для} \quad u=\pi-0 \quad \text{и} \quad u=2\pi-0.$$

Это показывает, что все конусы полной девиации проходят через обе не изменяющие направления линии. Проведя из центра частицы сферу, увидим, что не изменяющие направления плоскости разделят ее кругами на четыре части, а не изменяющие линии пересекут ее в четырех полюсах. Следы конусов полной девиации на этой сфере будут итти в каждой ее части, направляясь от полюса одной не изменяющей направления линии к полюсу другой, и будут, как видно из сказанного об уравнении (21′), касаться в этих полюсах соответствующих кругов, образуемых на сфере не изменяющими направления плоскостями. Нетрудно вывести все сказанное нами о конусе полной девиации при существовании двойной не изменяющей направления линии и двойной не изменяющей направления плоскости, рассматривая этот случай как предельный случай при слиянии двух из трех не изменяющих направления линий.

§ 14. Для полноты изложения движения бесконечно малой частицы мы считаем полезным сказать еще несколько слов о прекрасном способе, предложенном Дюрандом[1]) для исследования движения однородно изменяемого тела. Для каждой точки частицы (x, y, z) строим другую точку (u, v, w), центральный радиус-вектор которой выражает по величине и направлению скорость полного движения первой точки, и называем первую точку *сопряженной* относительно второй.

---

[1]) Статья Дюранда помещена в Comptes Rendus, т. LXXIII, 2-й семестр, стр. 1243. Он называет сопряженную плоскость и линию «plan conjugué» и «droite adjointe».

Взявши оси координат по осям деформации, найдем между координатами x, y, z, u, v, w следующую связь:

$$u = E_1 x + (\omega_2 z - \omega_3 y),$$
$$v = E_2 y + (\omega_3 x - \omega_1 z),$$
$$w = E_3 z + (\omega_1 y - \omega_2 x),$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}[E_2E_3u + \omega_1(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_2\omega_2 w - E_3\omega_3 v)],\\ y &= \frac{1}{D}[E_3E_1v + \omega_2(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_3\omega_3 u - E_1\omega_1 w)],\\ z &= \frac{1}{D}[E_1E_2w + \omega_3(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w) - (E_1\omega_1 v - E_2\omega_2 u)],\\ D &= E_1E_2E_3 + \omega_1^2E_1 + \omega_2^2E_2 + \omega_3^2E_3. \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Мы видим из этих формул, что величины x, y, z определяются по u, v, w как слагающие скорости точки (u, v, w) при движении, которому соответствует поверхность удлинения

$$2F'D = [E_2E_3u^2 + E_3E_1v^2 + E_1E_2w^2 + (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2]$$

и вращение

$$(-\omega_1 E_1,\ -\omega_2 E_2,\ -\omega_3 E_3).$$

Обращая внимание на тождество

$$ux + vy + wz = E_1x^2 + E_2y^2 + E_3z^2 =$$
$$= \frac{1}{D}[E_2E_3u^2 + E_3E_1v^2 + E_1E_2w^2 + (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2] \quad (22)$$

и замечая, что при

$$u = \omega_1 E_1, \quad v = \omega_2 E_2, \quad w = \omega_3 E_3,$$

из формулы (1′) получаем

$$x = \omega_1, \quad y = \omega_2, \quad z = \omega_3,$$

находим теорему: *точки, лежащие на поверхности* $F = \text{const.}$, *сопряжены точкам, лежащим на поверхности* $F' = \text{const.}$, *так что радиусы-векторы второй поверхности выражают скорости*

точек, лежащих на первой. Точки, лежащие на оси (ω_1, ω_2, ω_3), *сопряжены точкам, лежащим на оси* ($\omega_1 E_1$, $\omega_2 E_2$, $\omega_3 E_3$).

Возьмем теперь какой-нибудь бесконечно малый радиус r_1, имеющий по осям деформации проекции x_1, y_1, z_1, и найдем уравнения линии и плоскости, на которых лежат точки, сопряженные точкам, лежащим на линии r_1, и точки, сопряженные точкам, лежащим на плоскости, перпендикулярной к r_1. Эти уравнения будут

$$\frac{u}{x_1} = \frac{v}{y_1} = \frac{w}{z_1}, \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0. \tag{23}$$

Называя найденную линию и плоскость линией и плоскостью, сопряженными направлению r_1, получаем из формулы (23) теорему: *все точки, лежащие на линии, сопряженной данному радиусу, имеют скорости, параллельные этому радиусу. Все точки, лежащие на плоскости, сопряженной данному радиусу, имеют скорости, перпендикулярные к этому радиусу.* В частном случае, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

уравнения (23) и (1′) показывают, что линия, сопряженная радиусу r_1, есть не что иное, как сопряженный диаметр относительно поверхности удлинения плоскости, перпендикулярной к r_1, а сопряженная плоскость есть не что иное, как диаметральная плоскость, сопряженная радиусу r_1, относительно той же поверхности. Вышеприведенная теорема дает в этом случае теорему, помещенную в конце § 6.

Разлагая скорость движения точек, лежащих в одной плоскости, проходящей через центр частицы, на слагающую, направленную перпендикулярно к плоскости, и слагающую, направленную по плоскости, назовем *характеристикой плоскости в полном движении* линию, для которой первая слагающая равна нулю, а линиями, *неподвижными в плоскости*, — две действительные или мнимые линии, направление которых совпадает с соответствующими им слагающими скорости по плоскости. На основании свойств линии и плоскости, сопряженной данному направлению, получаем следующие теоремы:

плоскость, проходящая через центр частицы, перпендикулярно к данному радиусу, пересекает его сопряженную плоскость по своей характеристике. Плоскость, проходящая через данный радиус и его сопряженную прямую, имеет последнюю своей характеристикой. Плоскость, проходящая через данный радиус и пересекающая его сопряженную плоскость по линии, перпендикулярной к нему, имеет сечение своей неподвижной линией. Плоскость, проходящая через сопряженную линию перпендикулярно к плоскости, проведенной через эту линию и соответствующий радиус, имеет сопряженную линию своей неподвижной линией.

Если вставим во второе уравнение (23) координаты какой-нибудь точки частицы, то получим, с одной стороны, величину, пропорциональную перпендикуляру, опущенному из точки на плоскость, сопряженную радиусу r_1, с другой стороны, величину, пропорциональную проекции скорости рассматриваемой точки на радиус r_1. Обозначая перпендикуляр через p, скорость через V и угол, который делает эта скорость с радиусом r_1, через α, можем написать равенство

$$V\cos\alpha = cp.$$

Постоянное c определяем, предполагая, что рассматриваемая точка лежит на радиусе r_1. Называя через ε_1 удлинение по радиусу r_1 и через φ_1 — угол, который этот радиус делает с перпендикуляром p, получим:

$$c = \frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}, \qquad V\cos\alpha = \frac{p\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}.$$

Отсюда следует теорема: *проекция скорости на данный радиус равна расстоянию рассматриваемой точки от сопряженной плоскости этого радиуса, умноженному на удлинение радиуса и разделенному на косинус угла между перпендикуляром и радиусом.*

Возьмем теперь три радиуса r_1, r_2, r_3 и разложим скорость каждой точки частицы на три слагающие по направлению радиусов ρ_1, ρ_2, ρ_3, представляющих систему осей, дополнительную первой системе. Строим плоскости, сопря-

женные радиусам r_1, r_2, r_3, и называем через p_1, p_2, p_3 перпендикуляры, опущенные из точки частицы на эти плоскости, через ε_1, ε_2, ε_3 — удлинения по радиусам r_1, r_2, r_3, через φ_1, φ_2, φ_3 — углы между r_1 и p_1, r_2 и p_2, r_3 и p_3 и, наконец, через θ_1, θ_2, θ_3 — углы между r_1 и ρ_1, r_2 и ρ_2, r_3 и ρ_3. На основании вышеприведенной теоремы проекции скорости на радиусы r_1, r_2, r_3 будут:

$$\frac{p_1\varepsilon_1}{\cos\varphi_1}, \quad \frac{p_2\varepsilon_2}{\cos\varphi_2}, \quad \frac{p_3\varepsilon_3}{\cos\varphi_3}.$$

Замечая, что проекция скорости на радиус r_i равна проекции на этот радиус слагающей скорости по радиусу ρ_i, получим для трех искомых слагающих скорости по радиусам ρ_1, ρ_2, ρ_3 следующие формулы:

$$\frac{p_1\varepsilon_1}{\cos\varphi_1\cos\theta_1}, \quad \frac{p_2\varepsilon_2}{\cos\varphi_2\cos\theta_2}, \quad \frac{p_3\varepsilon_3}{\cos\varphi_3\cos\theta_3}.$$

Это дает нам теорему о разложении полного движения: *полное движение всегда можно разложить на три косоугольных удлинения, направленных по трем произвольным осям, причем удлинения совершаются относительно плоскостей, сопряженных дополнительной системе осей.*

Эта теорема в случае, когда вращение частицы равно нулю и линии r_1, r_2, r_3 представляют три сопряженных диаметра относительно поверхности удлинения, дает нам разложение Бельтрами, изложенное в § 6. При этом можно показать помощью формул (23) и (1′), что разложение движения на три прямоугольных удлинения относительно плоскостей возможно только в том случае, когда вращение частицы равно нулю.

В другом частном случае, когда ρ_1, ρ_2, ρ_3 суть линии, не изменяющие своих направлений, а следовательно, $\rho_2\rho_3$, $\rho_3\rho_1$, $\rho_1\rho_2$ суть сопряженные плоскости линий r_1, r_2, r_3, мы получаем теорему: *в случае существования трех не изменяющих своих направлений линий полное движение частицы может быть разложено на три косоугольных удлинения относительно неподвижных плоскостей, направленных по неподвижным линиям.*

На основании свойств сопряженной линии и плоскости могут быть решены уже исследованные нами вопросы о линиях и плоскостях, сохраняющих свое направление. Первые будут соответствовать линиям, которые сами себе сопряжены, вторые — плоскостям, сопряженным своему перпендикуляру. Пользуясь этим замечанием, находим из уравнений (23) и (1′) уравнения (13) и (13′). Кроме того, можно еще отыскивать линии, сопряженные радиусу, перпендикулярному к линиям, и плоскости, сопряженные лежащему на них радиусу. Уравнения (22) показывают, что подобные линии, а также радиусы, которым сопряжены подобные плоскости, лежат на конусе нулевого удлинения; это, впрочем, очевидно само собою. Заметим, что линии, лежащие на конусе нулевого удлинения, будут сопряжены линиям, лежащим на конусе $F' = 0$, который, таким образом, дает направление полных девиаций всех радиусов конуса нулевого удлинения.

§ 15. Сказанного нами довольно, чтобы составить себе отчетливое представление о движении точек частицы. Окончим главу разбором употребленных в ней способов исследования.

В основу нашего изложения положено разложение движения частицы на внешнее и внутреннее. Против этого разложения, которое употреблял Гельмгольц[1]), возражал Бертран, оспаривая его преимущество сравнительно с другими разложениями и находя неуместным называть вращением частицы вращение осей деформации[2]). Понятно, что, отделяя от движения частицы поступательное движение, мы можем разложить оставшееся относительное движение множеством способов на вращение

$$(\omega_1', \quad \omega_2', \quad \omega_3')$$

---

[1]) Гельмгольц указывает на Кирхгофа, который пользовался этим разложением в своем сочинении по теории упругости, помещенном в Journal von Crelle, т. XL, 1850.

[2]) Comptes Rendus, т. LVII, стр. 221, 267, 469, 755, 773, 1035.

и движение, выражаемое по осям деформации скоростями u_1', v_1', w_1':

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= E_1 x + (\omega_2 - \omega_2')\, z - (\omega_3 - \omega_3')\, y, \\ v_1' &= E_2 y + (\omega_3 - \omega_3')\, x - (\omega_1 - \omega_1')\, z, \\ w_1' &= E_3 z + (\omega_1 - \omega_1')\, y - (\omega_2 - \omega_2')\, x. \end{aligned}\right\} \qquad (7''')$$

Но между всеми движениями, определяемыми формулами (7'''), только одно движение, при котором

$$\omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3,$$

будет иметь потенциал скоростей, да и вообще говоря, только при этом движении скорости

$$u_1', \quad v_1', \quad w_1'$$

будут перпендикулярны семейству некоторых поверхностей[1]). Существование потенциала скоростей, равного F', объясняет кинематическое значение внутреннего движения, так как от этой причины свойства его могут быть исследованы полно и просто и являются, по большей части, следствием простых геометрических теорем о поверхности удлинения. С другой стороны, составляя для движения, выражаемого формулами (7'''), моменты количеств движения

---

[1]) Это заключение Бельтрами оправдывает, составляя известное условие, при котором существует семейство поверхностей, ортогональных направлению (u_1', v_1', w_1'):

$$u_1'\left(\frac{\partial w_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial z}\right) + v_1'\left(\frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial w_1'}{\partial x}\right) + w_1'\left(\frac{\partial v_1'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y}\right) =$$

$$= E_1(\omega_1 - \omega_1')\, x + E_2(\omega_2 - \omega_2')\, y + E_3(\omega_3 - \omega_3')\, z = 0$$

Заметим к этому, что кроме положения

$$\omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \omega_3' = \omega_3,$$

это условие удовлетворяется еще в частных случаях:

$$\omega_1 = \omega_1', \quad \omega_2 = \omega_2', \quad E_3 = 0; \quad \omega_1 = \omega_1', \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0$$

бесконечно малого жидкого шарика относительно осей деформации, находим выражения

$$i(\omega_1 - \omega_1'), \quad i(\omega_2 - \omega_2'), \quad i(\omega_3 - \omega_3'),$$

в которых i — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр. Эти моменты будут равны нулю только при внутреннем движении. Прибавляя к внутреннему движению внешнее, найдем, что момент количества абсолютного движения бесконечно малого жидкого шарика, взятый относительно его центра, направлен по вращению осей деформации и равен этому вращению, умноженному на i. В этом, как заметил Гельмгольц, заключается причина, вследствие которой вращение осей деформации следует считать вращением жидкой частицы.

Кроме Бертрана, против рассматриваемого нами разложения возражал еще Вельтман[1]), но его возражение, кажется, происходило оттого, что он приписал разложению Гельмгольца значение, которого никогда не давал ему последний. Вельтман предполагает, что речь идет не о разложении движения частицы, но о разложении всего движения жидкой массы на движение, имеющее потенциал скоростей, и движение, при котором частицы имеют только вращение, т. е. при котором

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0.$$

Понятно, что подобное разложение возможно только в том случае, когда для всех точек жидкости p, q и r постоянны. Не находя никакого геометрического значения в разложении Гельмгольца, Вельтман приходит к следующему резкому заключению: «Wir können deshalb die Definition der Rotationsgeschwindigkeit mit ihren Componenten p, q und r nur als eine rein analytische betrachten».

Мы видели, какое определенное геометрическое значение имеют величины p, q, r как с точки зрения Коши,

[1]) Weltmann, Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel, Zeitschrift von Schlömilch, т. I, 15, вып. 6, стр. 454, 1870.

так и с точки зрения Гельмгольца. Это значение может быть указано и независимо от движения частицы, когда заметим, что во всякой жидкой массе всегда существуют три единственных семейства триортогональных линий, которые сохраняют свою ортогональность, двигаясь вместе с жидкостью в продолжение бесконечно малого времени t. Проведя из двух положений какой-нибудь точки жидкости, соответствующих временам t и $t+\mathrm{t}$, касательные к помянутым линиям, найдем два прямых трехгранных угла, из которых второй будет повернут относительно первого около некоторой оси на бесконечно малый угол; этот угол и эта ось и будут соответствовать вращению (p, q, r).

Оспаривая разложение Гельмгольца, Бертран предлагал изучать движение частицы, опираясь на свойства плоскостей, не изменяющих своего направления. Такое изучение имеет тоже весьма важное кинематическое значение, но мы поставили его после разбора внутреннего движения, так как при этом лучше выясняется причина, вследствие которой линия и соответствующая ей плоскость становятся неподвижны. Изучив главные свойства линий и плоскостей, не изменяющих своих направлений, мы перешли к определению линий, по которым текут в продолжение бесконечно малого времени t точки частицы в их полном движении относительно центра. Уравнения этих линий могли бы быть выведены проще, рассматривая порознь линии, соответствующие трем и одной неподвижной плоскости, но мы сочли более удобным написать общие дифференциальные уравнения и указать особенности искомых линий при самом интегрировании этих уравнений.

Для того чтобы познакомить читателя с одним из простых искусственных приемов исследования движения частицы, мы изложили коротко теорию Дюранда, помощью которой можно бы получить результаты, уже найденные нами выше, но на наш взгляд всегда останется преимущество за тем способом, которому мы следовали сначала.

Пусть вообразит читатель жидкую частицу и соответствующую ей поверхность удлинения, и он ясно представит себе внутреннее движение частицы, происходящее от удлинения радиусов, которое определяется поверхностью удлинения, и от течения радиусов по конусам внутренней девиации, ортогональным конусам равного удлинения; пусть он прибавит к внутреннему движению вращение частицы, и тогда он поймет причину, вследствие которой три или один радиус и соответствующие им плоскости станут неподвижны; он увидит, что вследствие этого прибавления характер движения частицы изменится: в случае трех неподвижных плоскостей она разделится на восемь частей, так что в каждом из косых трехгранных углов радиусы будут двигаться так же, как при внутреннем движении; если же существуют только одна неподвижная плоскость и линия, то все радиусы будут течь по спиралеобразным конусам, закручивающимся около неподвижной линии и подходящим к этой линии и соответствующей ей плоскости только после бесконечного числа оборотов. Таким образом, перед глазами читателя встанет отчетливая картина полного движения частицы относительно ее центра, что, на наш взгляд, всего дороже.

ГЛАВА II.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

§ 16. Если проведем внутри движущейся жидкой массы семейство линий, касательные которых направлены по скоростям соответственных точек жидкости, то получим *линии токов*. Эти линии дают траектории точек жидкости в перманентном движении и служат огибающими траекторий для движения неперманентного. Когда даны линии токов и величины скоростей в каждой точке этих линий, то перманентное движение жидкости вполне определено; движение же неперманентное определяется этим только для бесконечно малого времени.

Будем называть *течением жидкости* в данный момент времени перманентное движение, скорости которого геометрически равны скоростям рассматриваемого движения, и заметим, что, разделяя время на бесконечно малые промежутки, можно разложить всякое движение жидкости на ряд течений, изменяющихся от одного промежутка к другому.

Всякую поверхность, проходящую через линии токов, называют *поверхностью тока*; через такую поверхность жидкость не протекает в продолжение соответствующего бесконечно малого времени. Вообразив поверхность тока, имеющую форму бесконечно тонкой трубки, получим канал, по которому в продолжение бесконечно малого времени будет течь наполняющая его жидкость. Будем называть жидкость, наполняющую такой бесконечно тонкий канал, *жидкой струйкой*, а самый канал — *поверхностью струйки*. Разделяя всю движущуюся жидкую массу в данный момент времени на жидкие струйки, увидим, что течение жидкости, соответствующее бесконечно малому времени, следующему за этим моментом, приводится к течению струек внутри их поверхностей.

Понятно, что теория движения жидкой струйки является промежуточным звеном, связывающим учение о движении частицы с учением о жидком течении. Мы займемся сначала геометрическими свойствами струйки в зависимости от проходящих через нее линий токов, а потом разберем ее движение.

§ 17. Называя через α, β, γ косинусы углов, которые образуют направление скорости точек жидкости с осями координат, получим следующие дифференциальные уравнения линий токов:

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Если существует семейство поверхностей, ортогональных этим линиям, то его дифференциальное уравнение будет:

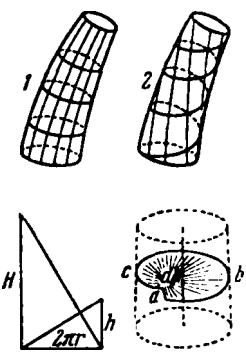
$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0.$$

Так как это последнее уравнение имеет интегрирующий множитель только в том случае, когда удовлетворено условие

$$\alpha\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0,$$

то это условие служит признаком существования ортогональных поверхностей.

Чтобы глубже вникнуть в геометрическое значение найденного условия, построим поверхность струйки и проведем по ней непрерывный ряд линий токов. Эти линии будут итти, как видно на фигуре 4, или не закручиваясь (*1*), или закручиваясь (*2*). Если начертим теперь на поверхности струйки линии, ортогональные линиям токов, то увидим, что в первом случае они представят нам систему замкнутых, бесконечно малых линий, а во втором — систему винтовых линий. Само собой разумеется, что к первому семейству линий токов можно провести ортогональные поверхности, а ко второму — нельзя.



Фиг. 4.

Чтобы выразить аналитически, чем отличаются линии токов первого рода от линий токов второго, определим для последних шаг h винтовой линии, проведенной по поверхности струйки ортогонально к линиям токов. Рассматривая замкнутую бесконечно малую линию $adcb$, в которой ad есть искомый шаг h, напишем известное равенство

$$\int(\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz)=$$
$$=\iint\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\alpha'+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\beta'+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\gamma'\right]df.$$

Здесь первый интеграл берется по бесконечно малой линии $adcb$, а второй — по бесконечно малой поверхности, проходящей через эту линию; α', β', γ' суть косинусы углов нормали поверхности с осями. Замечая, что первый инте-

грал равен h, и взявши вместо второго интеграла подинтегральную функцию, умноженную на поверхность $adcb$, равную f, получаем, опуская величины третьего порядка:

$$h = \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\gamma\right] f.$$

Мы видим теперь ясно геометрическую причину вышенайденного условия существования ортогональных поверхностей к линиям токов.

На основании сказанного будем называть линии токов, имеющие ортогональные поверхности, *незакручивающимися*, а линии токов, не имеющие таких поверхностей,—*закручивающимися*. Если бы поверхность струйки была прямой круглый цилиндр радиуса r и линии токов были бы винтовые, то шаг их H определился бы по шагу h из пропорции

$$\frac{H}{2\pi r} = \frac{2\pi r}{h},$$

которая дала бы для H конечную величину

$$\frac{2\pi}{H} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\gamma\right]. \qquad (24)$$

Будем называть для всякой струйки величину H *шагом закручивания* линий токов в рассматриваемой точке. Шаг закручивания имеет знак $+$, когда по направлению скорости линии токов завиваются по стрелке часов, и знак $-$ в противоположном случае.

Для дальнейшего исследования свойств линий тока, заключенных внутри поверхности струйки, назовем одну из таких линий *осью струйки* и рассмотрим движение струйки, при котором точки ее бегут по линиям токов плоскими слоями, перпендикулярными к ее оси. Полагая, что точки, лежащие на осевой линии, имеют скорость, равную единице, что начало осей координат лежит на осевой линии, а ось Ox направлена по касательной к последней, выразим полученное нами движение помощью слагающих скорости

$$u' = \alpha m, \quad v' = \beta m, \quad w' = \gamma m,$$

где m — отношение элемента дуги линии тока, на которой лежит рассматриваемая точка, к элементу дуги осевой линии, предполагая, что тот и другой элементы заключены между двумя бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными к осевой линии. Обращая внимание на равенства

$$\beta = \gamma = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial x} = 0, \quad \alpha = m = 1,$$

которые имеют место для начала координат, составляем помощью формул (1) скорости u′, v′, w′ относительного движения частицы, имеющей центр в начале координат:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial m}{\partial y}\, y + \frac{\partial m}{\partial z}\, z, \\ v' &= \frac{\partial \beta}{\partial x}\, x + \frac{\partial \beta}{\partial y}\, y + \frac{\partial \beta}{\partial z}\, z, \\ w' &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}\, x + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\, y + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\, z. \end{aligned} \tag{25}$$

Пользуясь этими формулами, определим связь между производными от α, β, γ и кривизной линий токов. Вообразив две поверхности тока, проходящие через ось рассматриваемой струйки и прикасающиеся к осям Oy и Oz, проведем по этим поверхностям линии токов s_1 и линии, ортогональные линиям токов, s_2 и s_3. Условимся при этом называть вообще *ортогональными линиями* линии, проведенные перпендикулярно линиям тока.

Обозначая через $\frac{1}{R_p^q}$ и $\frac{1}{L_p^q}$ геодезическую кривизну и геодезическое вращение линии s_p в поверхности $s_p s_q$, припомним известное выражение для геодезической кривизны:

$$\frac{1}{R_p^q} = -\frac{\delta_q \delta_p s_p}{\delta_q s_q \delta_p s_p}, \tag{26}$$

в котором $\delta_p s_p$ и $\delta_q s_q$ суть бесконечно малые элементы взаимно ортогональных дуг s_p и s_q, а $\delta_q \delta_p s_p$ есть бесконечно малое изменение элемента дуги s_p, заключенного между двумя бесконечно близкими кривыми s_q, при перемещении

вдоль этих кривых [1]). Заметив, что при рассматриваемом движении плоскость Oyz есть одна из плоскостей деформации, и припоминая значение m, находим из формул (25):

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{\partial m}{\partial y} = -\frac{\delta_2\delta_1 s_1}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial x} = -\frac{\partial m}{\partial z} = -\frac{\delta_3\delta_1 s_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3}.$$

Далее $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ и $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$ суть удлинения по осям Oy и Oz и потому выражаются подобными же формулами:

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{\delta_1\delta_2 s_2}{\delta_2 s_2 \delta_1 s_1}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\delta_1\delta_3 s_3}{\delta_3 s_3 \delta_1 s_1}.$$

Наконец, $\frac{\partial\beta}{\partial z}$ и $\frac{\partial\gamma}{\partial y}$ дают, как показывают формулы (25), девиации радиусов, направленных по осям Oz и Oy в плоскости Oyz, и потому суть геодезические вращения линии s_1 в плоскостях s_1s_3, s_1s_2 взятые со знаками — и +. На основании всего сказанного получаем для производных от β и γ по координатам формулы, найденные Клейцем [2])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial y} = -\frac{1}{R_2^1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = -\frac{1}{L_1^3}, \\ &\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{1}{R_1^3}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{1}{L_1^2}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\frac{1}{R_3^1}. \end{aligned}\right\} \qquad (26')$$

Определим теперь изменение объема и вращение частицы в рассматриваемом нами движении. Изменение объема равно как видно из формул (25), изменению бесконечно малой площади сечения струйки. Называя это изменение расширением струйки и обозначая его через $\frac{1}{k_1}$, получаем:

$$\frac{1}{k_1} = -\left(\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_3^1}\right).$$

---

[1]) Мы считаем радиус геодезической кривизны R_p^q положительным, когда он направлен в ту сторону, в которую дуга s_q возрастает. Такой же знак приписывает радиусам кривизны Ламе, Leçons sur les coordonnées curvilignes, § XXVIII. Что касается геодезического вращения, то мы даем ему знак +, когда, передвигаясь в положительную сторону дуги s_p, касательная к поверхности s_ps_q, перпендикулярная к кривой s_p, вращается по стрелке для наблюдателя, к которому она приближается.

[2]) Kleitz, Études sur les forces moléculaires, гл. V, 1873.

Расширение струйки равно отрицательной сумме геодезических кривизн в поверхностях тока двух перпендикулярных между собой ортогональных линий, проходящих через рассматриваемую точку на оси струйки. Понятно, что *в случае незакручивающихся линий тока расширение струйки есть отрицательная сферическая кривизна ортогональной поверхности.*

Вращения частицы по осям Oy и Oz будут, конечно, равны $-\frac{1}{R_1^3}$ и $\frac{1}{R_1^2}$; что касается вращения по оси Ox, то его можно представить на основании формул (25), (24) и (26′) таким образом:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{4\pi}{H} = \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_1^3}. \qquad (24')$$

Эта формула показывает, что *сумма геодезических вращений оси струйки в двух поверхностях тока, ортогональных между собой в данной точке на оси струйки, равна для этой точки отношению* 4π *к шагу закручивания линий тока.*

Назовем бесконечно малую кривую, получаемую от сечения струйки плоскостью, перпендикулярной к оси, *сечением струйки*, а точку, в которой эта плоскость пересекает ось, — *центром сечения* и займемся изменением радиусов сечения при передвижении его центра по оси струйки. Это изменение вполне определится помощью кривой, по которой плоскость сечения пересекает соответствующую поверхность удлинения; будем называть такую кривую *указательницей поверхности струйки.* Так как удлинение радиусов сечения струйки равно геодезической кривизне соответствующих ортогональных линий в поверхностях токов с обратным знаком, то получаем теорему: *геодезические кривизны в поверхностях тока всех ортогональных линий, проходящих через одну точку на оси струйки, пропорциональны квадратам радиусов-векторов указательницы струйки.* Эта теорема показывает, что *для незакручивающихся линий тока указательница струйки есть дюпенова указательница ортогональной поверхности.*

Предполагая, что оси Oy и Oz касаются ортогональных линий, имеющих наибольшую и наименьшую геодезическую кривизну в поверхностях тока, найдем следующее уравнение указательницы:

$$-2F'' = \frac{y^2}{R_2^1} + \frac{z^2}{R_3^1}.$$

Геодезическая кривизна в поверхности тока какой-нибудь ортогональной линии σ, проходящей через центр сечения струйки и образующей с осью Oy угол φ, а также геодезическое вращение оси струйки в поверхности тока, проходящей через линию σ, выразятся по формулам (26′):

$$\frac{1}{R_\sigma^1} = \frac{\cos^2\varphi}{R_2^1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_3^1}, \quad \frac{1}{L_1^\sigma} = \left(\frac{1}{R_2^1} - \frac{1}{R_3^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi + \frac{2\pi}{H}.$$

Понятно, что для незакручивающихся линий тока последняя формула примет вид:

$$\frac{1}{L_1^\sigma} = \left(\frac{1}{R_2^1} - \frac{1}{R_3^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Называя через σ_1 линию, проведенную по ортогональной поверхности перпендикулярно к σ, и направляя ось Oy по σ, имеем:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = -\frac{1}{L_\sigma^{\sigma_1}},$$

а по (26′)

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{1}{L_1^\sigma}; \quad \frac{1}{L_1^\sigma} = -\frac{1}{L_\sigma^{\sigma_1}}.$$

Мы получим формулу Морена [1]):

$$\frac{1}{L_\sigma^{\sigma_1}} = \left(\frac{1}{R_3^1} - \frac{1}{R_2^1}\right)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Так как по этой формуле кривая, не имеющая в поверхности геодезического вращения, есть одна из линий кривизны поверхности, то можем сказать, что *поверхности тока*,

---

1) Morin, Théorèmes relatifs à la théorie des surfaces, Comptes Rendus, т. 66, стр. 741.

проходящие через ось струйки и прикасающиеся к радиусам сечения, не имеющим девиации в плоскости сечения, имеют в центре сечения линии кривизны, направленные по оси струйки. Отсюда прямо вытекает теорема Дюпена о триортогональных поверхностях и теорема Иоахимсталя о поверхностях, пересекающихся под постоянным углом.

Если бы в сечении струйки существовали такие два радиуса, которые сохраняли бы между собой угол во все время воображаемого нами движения струйки, то это бы показывало, что через ось струйки возможно провести две пересекающиеся под прямым углом поверхности тока. Эта мысль, высказанная Клейцем, может послужить к определению аналитического условия, при котором к данному семейству поверхностей можно подыскать два новых семейства, так чтобы все три семейства были ортогональны [1]).

---

[1]) Мне удалось вывести это условие весьма просто. Проведя комплекс линий, ортогональных данному семейству $\varphi = \text{const.}$, воображаем жидкость, текущую по этим линиям со скоростями, равными обратному параметру $\frac{1}{h}$. Выбирая оси, как было показано, и называя частные производные φ по координатам x, y, z через a, b, c, определяем скорости v', w', выражающие изменение бесконечно малой площади, параллельной Oyz:

$$\left.\begin{aligned} v' &= \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial b}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h^2}\right)y + \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{h^2}\right)z, \\ w' &= \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial c}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h^2}\right)y + \left(\frac{1}{h^2}\frac{\partial c}{\partial z} + c\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{h^2}\right)z. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Искомое нами условие будет удовлетворено, когда оси указательницы струйки во всяком сечении будут совпадать с проекциями на это сечение осей бесконечно близкой указательницы. Это условие может быть выражено проще. Так как проекции главных осей центрального сечения поверхности удлинения на плоскость деформации делают с осями деформации бесконечно малые углы второго порядка, когда плоскость сечения наклонена к плоскости деформации под бесконечно малым углом первого порядка, то вместо того, чтобы брать оси бесконечно близкой указательницы, можно взять оси бесконечно близкой площади, параллельной первому сечению. Далее можно принять за центр такой площади, делая ошибку второго порядка, не точку, лежащую на оси струйки, а точку,

§ 18. Займемся движением струек. Вообразив бесконечно малую часть струйки, имеющую форму цилиндра, среднее сечение которого положим круглым, разлагаем движение такой частицы на четыре: 1) поступательное движение; 2) вращение по оси струйки и перпендикулярно к оси; 3) движение, изменяющее высоту цилиндрика и обращающее его из круглого в эллиптический; 4) скольжение около оси перпендикулярно к осевой линии, вследствие которого цилиндрик из прямого обращается в косой.

Все эти изменения могут быть определены по производным от скорости жидкости v_1, взятым по направлению линий

лежащую на перпендикуляре, восставленном из центра первого сечения. На основании этих замечаний приходим к такому условию: *оси кривой удлинения бесконечно малой площади, проведенной параллельно Oyz на расстоянии δx и имеющей центр на оси Ox, должны быть параллельны осям указательницы, имеющей центр в начале координат, если в этом начале*

$$b = c = 0.$$

Выражаем относительные скорости упомянутой площади, разлагая скорости v′, w′ в формулах (2) по строке Маклорена и ограничиваясь первыми степенями δx:

$$v' = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\delta x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial y}y + \frac{\partial b}{\partial z}z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{a}y + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{1}{a}z\right)\delta x,$$

$$w' = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\delta x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y}y + \frac{\partial c}{\partial z}z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{1}{a}y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{a}z\right)\delta x.$$

Так как движению, выражаемому первыми скобками, соответствуют главные оси, параллельные осям деформации, проходящим через начало координат по плоскости Oxy, то необходимо, чтобы направления осей, соответствующих движению, выражаемому вторыми скобками, были одинаковы с направлениями осей движения, выражаемого первыми скобками. Это дает формулу

$$\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{\partial b}{\partial z}}{\dfrac{\partial b}{\partial y} - \dfrac{\partial c}{\partial z}},$$

которая представляет условие ортогональности трех поверхностей, найденное Леви: Levi, Mémoire sur les coordonnées curvilignes ortogonales Journal de l'Ecole Polytechnique, т. XXVI, 1870, стр. 157.

тока и по двум взаимно перпендикулярным ортогональным линиям. Располагая оси Ox, Oy, Oz, как в предыдущем параграфе, и сохраняя для s_1, s_2, s_3 указанные значения, определим относительные скорости u, v, w точек частицы, имеющей центр в начале координат. Для этого подставляем в формуле (1) вместо u, v, w величины αv_1, βv_1, γv_1 и обращаем внимание на формулы (26′):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{u}_1 &= \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\,\mathrm{x} + \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\,\mathrm{y} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\,\mathrm{z}, \\ \mathrm{v}_1 &= \frac{v_1}{R_1^2}\,\mathrm{x} - \frac{v_1}{R_2^1}\,\mathrm{y} - \frac{v_1}{L_1^3}\,\mathrm{z}, \\ \mathrm{w}_1 &= \frac{v_1}{R_1^3}\,\mathrm{x} + \frac{v_1}{L_1^2}\,\mathrm{y} - \frac{v_1}{R_3^1}\,\mathrm{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (25')$$

Помощью этих формул находим все величины, характеризующие вышеупомянутые изменения цилиндрика. Называя вращения по осям координат через p, q, r, скольжения по осям Oy и Oz, направленные по Ox, через $2\theta_2$, $2\theta_3$, удлинение радиуса r среднего сечения цилиндрика через ε и изменение объема через Δ, получаем:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{H} v_1, \qquad 2q = -\frac{r_1}{R_1^3} + \frac{\delta_3 r_1}{\delta_3 s_3}, \qquad 2r = \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}, \\ 2\theta_2 &= -\frac{r_1}{R_1^3} - \frac{\delta_3 r_1}{\delta_3 s_3}, \qquad 2\theta_3 = \frac{r_1}{R_1^2} + \frac{\delta_2 r_1}{\delta_2 s_2}, \qquad \varepsilon = 2\frac{r_1}{r^3} F', \\ &\Delta = \frac{r_1}{k_1} + \frac{\delta_1 r_1}{\delta_1 s_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Первая из этих формул показывает, что *вращение цилиндрика по оси струйки происходит исключительно от закручивания линий тока, причем цилиндрик вращается внутри поверхности тока, как винт в своей гайке.* Вторая, третья, четвертая и пятая формулы показывают, что вращение и скольжение перпендикулярно к оси струйки зависят от кривизны этой линии и от изменения скорости по ортогональным линиям. Полагая $q = r = 0$, получаем:

$$\theta_2 = -\frac{r_1}{R_1^3}, \qquad \theta_3 = \frac{v_1}{R_1^2}.$$

Отсюда на основании § 7 следует теорема: *если струйка не имеет вращения перпендикулярно к своей оси, то жидкая площадь, соответствующая ее сечению, вращается во время движения около перпендикуляра к соприкасающейся плоскости осевой линии на бесконечно малый угол, равный углу смежности этой линии, в сторону, обратную ее вращению.* Шестое равенство из группы (27) определяет изменение среднего сечения цилиндрика из круглого в эллиптическое. Мы видим, что это изменение вполне определяется по указательнице струйки, так что удлинение каждого радиуса среднего сечения равно геодезической кривизне в поверхности тока, соответствующей ортогональной линии, умноженной на $-v_1$.

Последняя формула (27) дает удлинение высоты цилиндрика:

$$\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} = \Delta - \frac{v_1}{k_1}.$$

Отсюда следует, что *для несжимаемой жидкости приращение скорости по оси струйки равно отрицательному расширению ее сечения, умноженному на скорость.*

Помощью формул (25′) могут быть получены общие формулы, дающие относительное движение частицы по трем проекциям скорости v_1, v_2, v_3 на касательные трех семейств взаимно ортогональных линий s_1, s_2, s_3. Предположив, что к рассматриваемому выше течению прибавлены два другие, совершающиеся по линиям s_2 и s_3 со скоростями v_2 и v_3, найдем для относительного движения частицы формулы (25″), в которых геодезические кривизны и вращения берутся относительно шести поверхностей тока s_1s_2, s_1s_3, s_2s_3, s_2s_1, s_3s_1, s_3s_2:

$$\left.\begin{aligned} u = x\left(\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_2}{R_1^2} - \frac{v_3}{R_1^3}\right) + y\left(\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + \frac{v_2}{R_2^1} - \frac{v_3}{L_3^2}\right) + \\ + z\left(\frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} + \frac{v_3}{R_3^1} + \frac{v_2}{L_2^3}\right), \end{aligned}\right\} \quad (25'')$$

$$\left.\begin{aligned} v &= y\left(\frac{\delta_2 v_2}{\delta_2 s_2} - \frac{v_3}{R_2^3} - \frac{v_1}{R_2^1}\right) + z\left(\frac{\delta_3 v_2}{\delta_3 s_3} + \frac{v_3}{R_3^2} - \frac{v_1}{L_1^3}\right) + \\ &\quad + x\left(\frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} + \frac{v_1}{R_1^2} + \frac{v_3}{L_3^1}\right), \\ w &= z\left(\frac{\delta_3 v_3}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1}{R_3^1} - \frac{v_2}{R_3^2}\right) + x\left(\frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} + \frac{v_1}{R_1^3} - \frac{v_2}{L_2^1}\right) + \\ &\quad + y\left(\frac{\delta_2 v_3}{\delta_2 s_2} + \frac{v_2}{R_2^3} + \frac{v_1}{L_1^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (25'')$$

Мы будем часто впоследствии делать приложения этих формул. Определим теперь с их помощью изменения элемента поверхности $s_1 s_2$ при движении жидкости. Проведя линии s_3, нормальные к семейству поверхностей $s_1 s_2$, полагаем в формулах (25″)

$$v_2 = 0, \quad \frac{1}{L_3^1} + \frac{1}{L_3^2} = 0$$

и определяем из них изменение элемента площади $\delta_1 s_1 \delta_2 s_2$, которое назовем через d, и вращение этого элемента около линии s_3:

$$d = \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_1}{R_2^1} - v_3\left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3}\right). \quad 2r = \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}. \quad (28)$$

На основании формулы (26) этим величинам можно дать вид:

$$d = \frac{\delta_1 (v_1 \delta_2 s_2)}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2} - v_3\left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3}\right), \quad 2r = -\frac{\delta_2 (v_1 \delta_1 s_1)}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2}. \quad (28')$$

Называя *относительным течением* по поверхности $s_1 s_2$ движение со скоростью v_1, получаем результат: *вращение частицы на поверхности около нормали зависит только от относительного течения по поверхности, а изменение площади элемента поверхности равно изменению площади в относительном движении плюс сферическая кривизна поверхности, умноженная на отрицательную нормальную скорость.*

Из второй формулы (28′) можно получить равенство

$$\int v_1 \cos(\widehat{v_1, ds})\, ds = 2 \iint r\, df,$$

в котором второй интеграл распространяется на площадь замкнутой кривой на поверхности $s_1 s_2$, а первый на ее контур. Проекцию $v_1 \cos(\widehat{v_1, ds})$ можно заменить на $v \cos(\widehat{v, ds})$, где v абсолютная скорость, откуда

$$\int v \cos(\widehat{v, ds})\, ds = 2 \iint r\, df. \tag{29}$$

§ 19. Соединяя струйки в движущуюся массу жидкости, мы можем рассматривать семейства кривых, касательные которых направлены по осям вращения частичек, по осям их деформации или по линиям, не изменяющим своего направления. Все эти семейства обладают любопытными геометрическими свойствами, но наибольшего внимания заслуживает первое семейство, названное Гельмгольцем линиями вихрей (Wirbellinien). Если вообразим течение, совершающееся по линиям вихрей со скоростями, равными вращению частиц, то получим на основании формулы (6) течение без изменения объема. Поверхность тока такого течения Гельмгольц называет *поверхностью вихрей* (Wirbelfläche), соответствующую ему струйку — *вихревой струйкой* (Wirbelfaden), а количество жидкости, которое протекает при таком течении через разрез струйки в единицу времени, — *напряжением вихревой струйки.*

Понятно, что *напряжение вихревой струйки есть постоянная величина вдоль всей струйки и что все вихревые струйки должны быть или замкнуты, или должны лежать концами на свободной поверхности жидкости.*

Называя *обтеканием* данной разомкнутой или замкнутой линии интеграл

$$N = \int v \cos(\widehat{v, ds})\, ds,$$

взятый по этой линии, имеем по формуле (29): *обтекание всякой замкнутой линии равно двойной сумме напряжений вихревых струек, ею обхватываемых. Обтекание по замкнутой линии, лежащей на поверхности вихря, равно нулю, если эта линия может, не покидая поверхности, обратиться в точку. На всякие двум линиям на поверхности вихря, которые про-*

ведены между двумя точками и могут перейти, не покидая поверхности, одна в другую, обтечения равны.

Разложим течение жидкости на два течения со скоростями v_1 и v_3 так, чтобы точки, лежащие на поверхности вихря, имели скорость v_3 по нормали, а скорость v_1 по касательной к поверхности. Возьмем по линии ab на этой поверхности интеграл

$$N = \int_a^b v_1 \cos(\widehat{v_1, ds})\, ds,$$

и будем рассматривать его на основании сказанного выше как функцию точки b. Эта функция будет постоянна по линиям s_2, перпендикулярным к направлению скорости v_1, а производная ее $\frac{dN}{ds}$ будет давать проложение скорости v_1 на направление ds; поэтому *относительное движение жидкости на поверхности вихрей имеет потенциальную функцию, равную обтеканию кривой, идущей по поверхности вихрей от постоянной точки до рассматриваемой точки.*

Потенциальная функция N будет однозначна, если поверхность тока односвязна; в противном случае она может быть многозначна и иметь столько модулей периодичности, сколько существует различных обтеканий по путям, не обращающимся в точку [1]).

Обращая внимание на вторую формулу (28′), заключаем, что *при возрастании скорости относительного движения по поверхности вихря на прямой длиной в одну нормаль получим по этой поверхности новое течение без изменения площади.* Составляя для этого нового течения количество жидкой площади, протекающей через данную кривую, которое будем обозначать через M, увидим, что $M = N$.

---

[1]) Этот вопрос обстоятельно исследуется Томсоном, у которого мы заимствовали и остальные результаты этого параграфа. Он называет обтекание по разомкнутой кривой flow, а по замкнутой — circulation. On vortex motion, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, стр. 217.

Мы будем называть количество жидкой площади, протекающей через данную кривую, *протечением* относительно этой кривой; так же будем называть количество жидкости, протекающей через данную поверхность.

То обстоятельство, что линии s_2 суть линии токов течения, не изменяющего площадь, выясняет нам расположение этих линий на поверхностях вихря, а следовательно, и расположение линий s_1; но чтобы лучше понять это расположение, мы должны сначала изучить свойства точек, в которых линии токов имеют бесконечно большую кривизну.

§ 20. Вообразив некоторое пространство, ограниченное замкнутой поверхностью, внутри которой скорости течения u, v, w непрерывны, однозначны и конечны, увидим, что линии тока, наполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, когда скорости u, v, w обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Будем называть критическими точки, в которых линии тока пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разберем свойства таких точек сначала для плоского течения.

Относя начало координат в точку, для которой скорости плоского течения u и v обращаются в нули, в бесконечности или становятся неопределенны, отыскиваем предел дроби $\frac{v}{u}$ при

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Если этот предел имеет конечную величину $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнения линий тока, бесконечно близких от начала координат, получатся помощью интегрирования уравнения (30):

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{30}$$

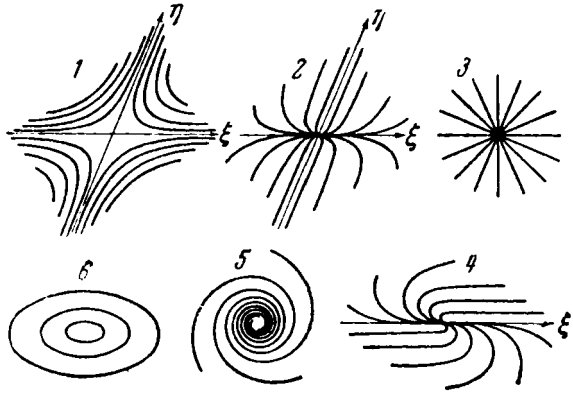
Рассмотрим теперь различные критические точки. Когда скорости u и v обращаются для начала координат в нули,

а их производные по координатам конечны (некоторые из производных могут быть равны нулю), то уравнение (30) может быть представлено в виде уравнения (18′). Сохраняя обозначения § 13, получим следующие случаи критических точек:

1) $\frac{(c_2-c_1)^2}{4}>r^2$. Линии тока бесконечно близко от критической точки представляют гиперболы с бесконечно большой кривизной,

$$\xi\eta^{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\text{const.},$$

имеющие вид (*1*) в случае $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}<0$ и (*2*) в случае $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}>0$ (фиг. 5). При $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=-1$ гиперболы обращаются в квадратные, а при



Фиг. 5.

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=1$ в прямые линии (*3*). При $r=0$ оси $O\xi$ и $O\eta$ ортогональны.

2) $\frac{c_2-c_1}{2}=\mp r$. Линии токов на бесконечно близком расстоянии от критической точки по уравнениям (21′) будут:

$$\rho^2\sin^2 u=\text{const.}\,e^{-\frac{c_2+c_1}{r}\frac{1\mp\operatorname{tg}u}{2\operatorname{tg}u}},$$

где

$$u=\varphi\mp\frac{\pi}{4}.$$

Взяв верхний знак и предположив

$$\frac{e_2+e_1}{r}>0,$$

найдем бесконечно близко от критической точки линии токов (*4*), изображенные на фигуре 5. Когда

$$e_2+e_1=0,$$

то вышенаписанное уравнение даст прямые линии, и начало координат не будет критической точкой.

3) $\frac{(e_2-e_1)^2}{4}<r^2$. Уравнения линий токов по формуле (20) бесконечно близко от критической точки будут иметь вид:

$$(e_2-e_1)\,xy+r(x^2+y^2)=\text{const.}\,e^{\frac{(e_2+e_1)\psi}{r\sqrt{1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}}},$$

где

$$\psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{y}{x}+\frac{e_2-e_1}{2r}}{\sqrt{1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}}.$$

Это уравнение представляет спирали, для которых критическая точка есть асимптотический полюс, как это изображено на фигуре 5, (5). В случае

$$e_2+e_1=0$$

спирали обращаются в эллипсы.

Назовем разобранные точки нулевыми критическими точками первого порядка и обратим внимание на следующие результаты. *При движении несжимаемой жидкой площади нулевые критические точки первого порядка бывают гиперболические или эллиптические. В первом случае две линии тока пересекаются в критической точке, во втором — линии токов охватывают критическую точку, обращаясь в пределе в бесконечно малые эллипсы. Если в нулевой критической точке первого порядка вращение элемента площади равно нулю, то через*

эту точку проходят две пересекающиеся под прямым углом линии тока.

Кроме нулевых критических точек первого порядка, могут еще быть нулевые критические точки n-го *порядка*, которые имеют место, когда в данной точке скорости u, v и их производные до n-го порядка обращаются в нули, а производные n-го порядка конечны. Мы исследуем подробно такие точки только для плоского течения без сжатия и вращения, а теперь заметим, что при течении без сжатия через нулевую критическую точку n-го порядка не может проходить более $n+1$ линий тока.

Критические точки, в которых u и v обращаются в ∞ или $\frac{0}{0}$, мы будем называть *бесконечными* или *неопределенными* критическими точками; они представляют бесчисленное множество различных видов, потому что $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ может быть всякой функцией. Чтобы выяснить характер рассматриваемой критической точки, проведем из нее как из центра окружность и, взяв по ней замкнутые интегралы

$$M=\int v\cos(\widehat{v,n})\,ds, \qquad N=\int v\cos(\widehat{v,s})\,ds,$$

определим их пределы M_0, N_0, полагая радиус окружности равным нулю. Величины M_0 и N_0 могут быть нули, конечны или бесконечны. Будем называть *точкой истечения* критическую точку, для которой $N_0=0$, а $M_0\neq 0$, и *вихревой точкой* критическую точку, дающую $M_0=0$, а $N_0\neq 0$; точку, для которой M_0 и N_0 не равны нулю, будем называть точкой *истечения и вихря*. Понятно, что нулевые критические точки не соответствуют ни точкам истечения, ни точкам вихря. Возьмем пример точки истечения и вихревой:

$$u=\frac{ax-by}{\rho^2}, \qquad v=\frac{ay+bx}{\rho^2}.$$

По уравнению (30) находим для линии тока

$$\rho^2=\text{const.}\,e^{\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \tag{30'}$$

уравнения спиралей, асимптотический полюс которых есть точка истечения и вихревая. При $a = 0$ рассмотренный пример дает точку вихревую, а при $b = 0$ точку истечения.

Называя M_0 и N_0 коэффициентами точек истечения и вихря, обратим внимание читателя на теоремы: *для плоского течения без изменения площади протечение, взятое по замкнутой кривой, равно сумме коэффициентов точек истечения, лежащих внутри этой кривой. Для плоского течения без вращения обтечение, взятое по замкнутой кривой, равно сумме коэффициентов вихревых точек, лежащих внутри кривой.*

Переходим к исследованию критических точек плоского течения без вращения и изменения площади. Известно, что в этом случае линии токов и ортогональные линии могут быть получены, если приравнять постоянным действительные и мнимые коэффициенты функции мнимого переменного. Так, если дано

$$F(z) = \phi + \psi i,$$

то искомые линии будут

$$\phi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.} \tag{30''}$$

Предположив, что данная функция $F(z)$ обращается в начале координат в 0 или ∞, отыскиваем величину n, для которой

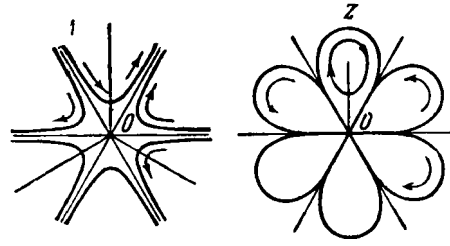
$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{F(z)}{z^n} \right)$$

будет конечен. Если возможно найти такое значение n, то уравнения линий тока вблизи рассматриваемой точки найдутся помощью формул (30″) и будут при надлежащем выборе полярной оси иметь следующий простой вид:

$$\rho^n \sin(\widehat{n, \varphi}) = \text{const.}, \quad \rho^n \cos(\widehat{n, \varphi}) = \text{const.}$$

Замечая, что для целого и положительного n начало координат будет нулевой критической точкой $(n-1)$-го порядка, и называя *бесконечной нулевой критической точкой n-го порядка* точку, соответствующую целому и отрицательному n,

обнаружим помощью вышеописанных уравнений теорему Гатона де ла Гупильера[1]): *в случае плоского течения без вращения и изменения площади через нулевую критическую точку $(n-1)$-го порядка и бесконечную критическую точку n-го порядка проходят n линий тока, касательные которых образуют $2n$ равных углов. Через нулевую точку не проходит более ни одна другая линия тока; через бесконечную проходят все линии тока, причем бесконечно близко от критической точки они образуют бесконечно малые замкнутые кривые с $2n$ петлями.* На фигуре 6 представлены точки 2-го и (—3)-го порядков.



Фиг. 6.

Все точки целого положительного порядка дают

$$M_0 = N_0 = 0.$$

Этим же свойством обладают критические точки отрицательного целого порядка, если $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = \frac{A}{z^n} + \frac{A_1}{z^{n_1}} + \frac{A_2}{z^{n_2}} + \ldots + A_0,$$

где

$$A,\ A_1,\ A_2 \ldots A_0$$

суть функции z, не имеющие критической точки при $z = 0$, а $n > n_1 > n_2 \ldots$ целые числа. Можно предположить, что из таких критических точек столько же истекает жидкости, сколько втекает в них.

Случай дробного значения n может иметь место только при многозначных скоростях u и v. Чтобы получить здесь определенное течение, нужно сделать, как известно, разрез плоскости, проходящий через критическую точку в беско-

[1]) Haton de la Goupillière, Nouvelle théorie générale de lignes isothermes, Comptes Rendus, т. XLVIII, 1-й семестр, 1859, стр. 621.

нечность. При этом линии токов с обеих сторон разреза не представляют непрерывных кривых. Мы можем избежать этой разрывности и рассматривать дробную критическую точку как целую, когда введем римановские плоскости и вообразим, что жидкость течет непрерывно по всем плоскостям.

Мы разобрали этот вопрос в предположении, что возможно найти степень n, при которой

$$\lim_{z\to 0}\frac{F(z)}{z^n}$$

есть величина конечная; но это не всегда имеет место, в чем легко убедиться, полагая

$$F(z)=\ln z \quad \text{и} \quad F(z)=e^{\frac{1}{z}}.$$

При первом положении находим точку истечения или точку вихря

$$\varphi=\ln\rho, \quad \psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

которые были исследованы в вышеприведенном примере (30′).

Переходим к исследованию критических точек при движении жидкой массы. Если все точки, лежащие на некоторой линии, имеют

$$u=v=w=0,$$

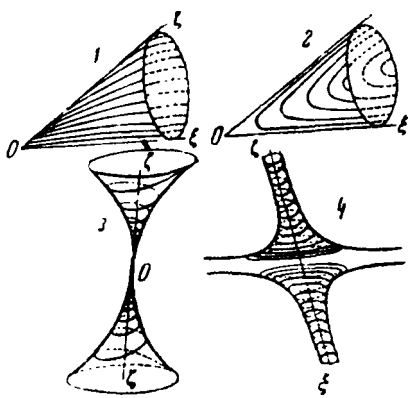
а производные от u, v, w по координатам конечны, то такая линия может быть названа *нулевой критической осью первого порядка. Поверхности тока, пересекающие критическую ось первого порядка, должны соприкасаться в точке пересечения к не изменяющей направления плоскости, соответственной касательной к критической оси.*

Располагая оси Ox, Oy, Oz, как в § 13, заметим, что удлинение ε_3 по оси Oz равно нулю, а следовательно, при несжимаемой жидкости $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$. Это дает теорему: *при несжимаемой жидкости точки пересечения поверхностей тока с нулевой критической осью первого порядка соответствуют эллиптическим или гиперболическим критическим точкам на*

этих поверхностях. В одном случае через критическую ось будут проходить две поверхности тока; в другом поверхности токов будут обхватывать критическую ось, суживаясь по мере приближения к ней.

Вообразив замкнутую односвязную поверхность тока при течении несжимаемой жидкости, увидим, что число гиперболических точек на такой поверхности будет на два менее числа эллиптических. Всякую многосвязную замкнутую поверхность можно сделать односвязной, проведя k перегородок и рассматривая обе стороны каждой перегородки как части поверхности. Нетрудно показать, что *на замкнутой поверхности тока, которая делается односвязной помощью k перегородок, число гиперболических точек на $2k-2$ более числа эллиптических.* Сказанное выясняет расположение ортогональных линий на поверхностях вихря.

Мы рассмотрели нулевые критические точки первого порядка в предположении о существовании критической оси. Но, разумеется, может быть и одна нулевая критическая точка первого порядка. Вид линий тока в бесконечной близости от такой точки вполне выясняется на основании сказанного в § 13. *Через критическую точку будут проходить три не изменяющие направления плоскости или одна.*



Фиг. 7.

Рассмотрим первое предположение. Если $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0$, то всякая линия тока пройдет через критическую точку, как показано на фигуре 7, (*1*). Если же $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} < 0$, то через критическую точку пройдут только линии, прикасающиеся к одной из

не изменяющих направления плоскостей, и линия, прикасающаяся к соответственной не изменяющей направления прямой.

Во втором предположении уравнения (20) дают нам поверхности тока

$$(e_2 - e_1)\,xy + r(x^2 + y^2) = c\zeta^{\frac{e_1+e_2}{\varepsilon_3}},$$

обхватывающие линию тока, прикасающуюся к неизменяющей направления линии. Если

$$\frac{e_2+e_1}{\varepsilon_3} > 0,$$

то эти поверхности будут суживаться, приближаясь к критической точке, и обратятся в ней в острие [фигура 7, (*3*)]. Если же, наоборот,

$$\frac{e_2+e_1}{\varepsilon_3} < 0,$$

то рассматриваемая поверхность тока будет, приближаясь к критической точке, расстилаться по поверхности тока, проходящей через эту точку [фигура 7, (*4*)]. В первом случае каждая линия тока пройдет через критическую точку, во втором — нет.

Замечая, что при несжимаемой жидкости

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} < 0, \quad \frac{e_2+e_1}{\varepsilon_3} < 0,$$

приходим к заключению: *при несжимаемой жидкости все линии тока не могут проходить через нулевую критическую точку первого порядка.* Понятно, что *при течении без вращения через нулевую критическую точку первого порядка будут проходить три пересекающиеся под прямым углом линии тока, а ортогональные поверхности, бесконечно близкие от этой точки, будут бесконечно малые эллипсоиды или гиперболоиды с бесконечно большой кривизной, причем при несжимаемой жидкости может иметь место только последний случай.*

О других видах критических точек для жидкой массы мы скажем только несколько слов. Для исследования критической точки на поверхности тока предполагаем, что

плоскость Oxy прямоугольных осей Ox, Oy, Oz прикасается к поверхности в начале координат, и определяем проекции линий тока поверхности на эту плоскость. Искомые проекции найдутся как линии токов некоторого плоского течения, совершающегося по плоскости Oxy со скоростями u, v, соответствующими точкам поверхности; так что, рассматривая u и v как функции координат x, y, которые входят в них явно и неявно под видом координаты z, мы можем свести исследование критической точки на поверхности к исследованию критической точки на плоскости. Если $n-1$ первых производных от u и v, взятых по x и y в указанном смысле, обращаются в нули, то мы будем иметь на поверхности нулевую критическую точку n-го порядка.

Линия, соединяющая непрерывный ряд критических точек n-го порядка, расположенных на семействе поверхностей тока, может быть названа критической осью n-го порядка.

Подобным же образом могут быть исследованы и другие виды критических точек на поверхностях тока и проведены соответствующие им оси.

Смотря по тому, будут ли критические точки на поверхностях тока точками истечения или вихря, соответствующие им критические оси должны получить те же названия. Коэффициентом вихревой оси будем называть предел обтечения замкнутой линии, охватывающей ось, при обращении этой линии в точку.

Пользуясь теоремой § 19, легко доказать, что *при невращаемой жидкости предел обтечения постоянен для всех точек вихревой оси, которая должна быть необходимо или замкнута, или должна кончаться на свободной поверхности.*

Далее получаем теорему: *обтечение по замкнутой кривой внутри невращаемой жидкости равно сумме коэффициентов всех вихревых осей, проходящих через замкнутую линию.* Коэффициент истечения критической точки определяется как предел интеграла

$$M = \int\int v \cos(\widehat{v, dn}) df,$$

взятого по поверхности сферы, описанной около критической точки, при убывании радиуса до нуля. Понятно, что *протечение, взятое по произвольной замкнутой поверхности внутри течения несжимаемой жидкости, равно сумме коэффициентов истечения, заключенных внутри поверхности критических точек.*

§ 21. Мы перейдем теперь к изучению течения без сжатия и вращения и изложим в этом параграфе некоторые теоремы о потенциальной функции, которые с кинематической точки зрения почти очевидны. Вообразив течение жидкости с конечными непрерывными и однозначными скоростями, наполняющее односвязное пространство, ограниченное поверхностью f, увидим, что при отсутствии вращения и сжатия струйки не могут нигде пересекаться, что все они будут разомкнуты и будут лежать своими концами на поверхности f; при этом на каждой струйке жидкость будет течь, постоянно направляясь в одну сторону. Отсюда следует, что *все скорости жидкости внутри f равны нулю всякий раз как на поверхности функция F постоянна или* $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$. Далее видим, что *два течения, имеющие на f одинаковые значения F или* $\frac{\partial F}{\partial n}$, *тождественны*, ибо, составляя их разность, получим течение, имеющее внутри поверхности скорость, равную нулю. *Функция F не может нигде внутри рассматриваемого пространства иметь максимум или минимум*, так что все наибольшие и наименьшие значения F будут лежать на поверхности f. Так же можно показать, что скорость течения *не может внутри пространства*, ограниченного поверхностью f, *иметь максимум*[1]). Проведя ось Ox параллельно скорости данной точки, заметим, что производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, которая в рассматриваемой точке есть скорость течения v_0, удовлетворяет условию

$$\Delta_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0.$$

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, стр. 184.

Если производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ по координатам внутри рассматриваемого пространства конечны, непрерывны и однозначны, то $\frac{\partial F}{\partial x}$ не может иметь ни в одной точке максимум. При этом всегда можно выбрать бесконечно близко от рассматриваемой точки другую точку, для которой

$$\frac{\partial F}{\partial x} > v_0,$$

откуда и подавно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > v_0^2.$$

Все сказанное выше можно распространить на многосвязное пространство, когда проведем перегородки и будем рассматривать обе стороны каждой перегородки как части ограничивающей поверхности f. Линии токов течения с непрерывными однозначными и конечными скоростями могут замыкаться на перегородках, так как обтечения по линиям, не приводимым в точку, не должны быть равны нулю.

Можно также рассматривать течение, ограниченное конечными поверхностями f и бесконечно удаленной поверхностью s. Предположим, что при этом скорости удовлетворяют вышеупомянутым условиям и обращаются в бесконечности в нули, а линии токов разомкнуты и лежат своими концами на поверхностях f и поверхности s. Кирхгоф называет такое течение течением жидкости, *неподвижной в бесконечности* (die Flüssigkeit ruht in der Unendlichkeit), и показывает, каким образом по количеству жидкости, вытекающей из поверхности f, определить F и $\frac{\partial F}{\partial n}$ в бесконечности. Пусть M будет это количество; по теореме Грина можно написать:

$$F = \frac{1}{4\pi}\int df F \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{df}{r}\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{4\pi R^2}\int ds F - \frac{1}{4\pi R}\int ds \frac{\partial F}{\partial n},$$

где два первые интеграла распространяются на поверхность f, а последние — на поверхность s сферы бесконечно большого радиуса R, имеющей центр в рассматриваемой

точке; ∂n — элемент внутренней нормали. Последний интеграл равен нулю, а предпоследний не изменяется с изменением центра сферы, ибо в бесконечности

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

поэтому он равен постоянной величине c. Мы находим формулу

$$F - c = \frac{1}{4\pi}\int df F \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{df}{r}\frac{\partial F}{\partial n},$$

которая определяет F до постоянного. Полагая, что точка, для которой определяем F, уходит в бесконечность, находим:

$$F - c = \frac{M}{R}, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{M}{R^2}.$$

При $M = 0$ производная $\frac{\partial F}{\partial n}$ есть бесконечно малая величина выше второго порядка; поэтому через всякую часть поверхности s жидкость не протекает, поверхность s может быть взята для такого течения поверхностью тока. Что касается линий тока, то все они будут лежать своими концами на поверхностях f. Для такого течения имеют место все теоремы, доказанные для течения, заключенного в конечном пространстве, причем можно не обращать внимания на бесконечно удаленную поверхность s.

§ 22. Посвятим этот параграф исследованию геометрических свойств линий тока без сжатия и вращения. Такое исследование в случае плоского течения могло бы быть сделано помощью теории мнимых величин; но мы предпочитаем чисто геометрические приемы, которые могут быть одинаково приложимы как для движения по плоскости или поверхности, так и для движения в пространстве.

Вообразив бесконечно тонкий слой несжимаемой жидкости, заключенный между двумя бесконечно близкими параллельными поверхностями тока, которые совпадают с поверхностями вихря, отнесем движение такого слоя к системе криволинейных координат (s_1, s_2), соответствую-

щих линиям тока и ортогональным линиям. Формулы (28) и (28′), если положить в них

$$v_3 = r = d = 0,$$

дадут уравнения, которые представляем двумя способами:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{R_1^2} = \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2}, \qquad \frac{1}{R_2^1} = \frac{\delta_1 \ln v_1}{\delta_1 s_1}, \\ &\delta_2 (v_1 \delta_1 s_1) = 0, \quad \delta_1 (v_1 \delta_2 s_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Симметрия этих формул относительно s_1 и s_2 показывает, что при поворачивании всех скоростей около нормали к поверхности на 90° течение остается без сжатия и вращения; это вытекает также из сказанного в конце § 18.

Из вторых двух уравнений видна возможность выбрать две функции F_1 и F_2, постоянные, первая на s_1, а вторая на s_2, и удовлетворяющие условию

$$v_1 = \frac{\delta_2 F_1}{\delta_2 s_2} = \frac{\delta_1 F_2}{\delta_1 s_1}.$$

Когда расположим линии s_1 и s_2 таким образом, чтобы приращения $\delta_1 F_2$ и $\delta_2 F_1$ были постоянны и равны, то для всех точек будем иметь $\delta_2 s_2 = \delta_1 s_1$. Называя две системы взаимно перпендикулярных кривых, образующих в пересечении бесконечно малые квадратики, *квадратной сеткой*, получим теорему: *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данное течение по поверхности было без изменения площади и без вращения по нормали к поверхности, состоит в том, чтобы линии токов и ортогональные линии могли образовать квадратную сетку, а скорость была бы обратно пропорциональна стороне соответствующего квадрата.*

Условие квадратности ортогональной сетки может быть выражено некоторой зависимостью между радиусами кривизны. Взявши δ_1 и δ_2 от двух первых уравнений (31), умноженных на $\delta_2 s_2$ и $\delta_1 s_1$, вычитаем полученные результаты:

$$\delta_1 \left[\frac{\delta s_2}{R_1^2}\right] - \delta_2 \left[\frac{\delta s_1}{R_2^1}\right] = 0; \tag{32}$$

это и есть искомое соотношение. Оно показывает на основании формул (25″) и (26), что, *слагая два течения, направленные по* s_1 и s_2 *со скоростями* $\frac{1}{R_2^1}$ и $\frac{1}{R_1^2}$, *мы получаем течение без вращения около нормали к поверхности.* Назовем линии токов и ортогональные линии такого течения через p_1 и p_2. Из формул (31) видно, что *на линиях* p_2 *скорость* v_1 *постоянна.* Если бы поверхность была развертываема, то, развернув ее, нашли бы, что *по кривым* p_1 *скорость* v_1 *сохраняет свое направление.*

Определяя по формуле (25′) удлинения, которые претерпевают радиусы-векторы плоской частицы, направленные по p_1 и p_2 при движении жидкости по кривым s_1 со скоростью v_1, найдем:

$$\frac{v_1}{R_2^1}, \quad \frac{v_1}{R_1^2},$$

откуда теорема: *удлинения по кривым* p_1 *и* p_2 *равны удлинениям по кривым* s_1 и s_2. Мы будем называть на основании этой теоремы прямоугольную сетку (p_1p_2) сеткой линий *равного удлинения с* (s_1s_2).

Обратим внимание на связь, существующую между геодезическими кривизнами всякой ортогональной сетки:

$$\delta_1\left(\frac{\delta_2 s_2}{R_2^1}\right)+\delta_2\left(\frac{\delta_1 s_1}{R_1^2}\right)=\frac{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2}{R'R''}; \qquad (32')$$

здесь $\frac{1}{R'}$ и $\frac{1}{R''}$ — главные кривизны поверхности[1]). Эта

[1]) Эта формула получается из теоремы:

$$\int\frac{ds}{R_g}+A_1+A_2+\ldots=2\pi-\theta,$$

где интеграл распространяется на все стороны криволинейного замкнутого многоугольника, начертанного на поверхности; A_1, A_2,... суть внешние углы многоугольника, а θ — площадь сферического изображения многоугольника, которое получаем, проводя из центра сферы радиуса единицы линии, параллельные нормалям, восставленным из точек многоугольника к поверхности. Эта площадь определяется помощью радиусов

связь показывает, что течение, скорости которого слагаются геометрически из кривизн ортогональной сетки, имеет расширение площади, равное произведению главных кривизн поверхности.

Называя параметром квадратной сетки соответствующую скорость течения без сжатия и вращения, получаем из формул (32) и (32′) теорему [1]: *для развертывающейся поверхности сетка* $(p_1 p_2)$ *квадратная и имеет своим параметром*

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}.$$

Эта теорема дает при развертывающейся поверхности следующие радиусы кривизны r_1^2 и r_2^1 сетки равного удлинения, причем d_1 и d_2 суть изменения по кривым p_1, p_2:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{d_2 \ln \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}}{d_2 p_2};$$

$$\frac{1}{r_2^1} = \frac{d_1 \ln \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}}{d_1 p_1}.$$

Две системы взаимно ортогональных линий (q_1, q_2), делящих пополам углы между s_1 и p_1, s_2 и p_2, будут, как мы знаем, соответствовать направлению осей деформации элемента поверхности $s_1 s_2$. Мы назовем сетку $(q_1 q_2)$ сеткой

кривизны поверхности интегралом

$$0 = \int \frac{1}{R' R''} df,$$

распространенным на площадь данного криволинейного многоугольника. (Salmon, Analyticshe Geometrie des Raumes., стр. 574, 1865.)

[1]) Для всякой поверхности можно по двум квадратным сеткам получить третью, составляя разность течений, слагающихся геометрически из кривизн той и другой сетки.

осей деформации и постараемся определить ее радиусы кривизны в случае

$$\frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{R''} = 0.$$

Разлагаем скорость v_1 на слагающие u_1 и u_2, направленные по линиям q_1 и q_2, и пишем на основании формулы (25″) уравнения

$$\frac{\partial_1 u_1}{\partial_1 q_1} - \frac{u_2}{\rho_1^2} = \varepsilon, \qquad \frac{\partial_2 u_2}{\partial_2 q_2} - \frac{u_1}{\rho_2^1} = -\varepsilon;$$

$$\frac{\partial_2 u_1}{\partial_2 q_2} + \frac{u_2}{\rho_2^1} = 0, \qquad \frac{\partial_1 u_2}{\partial_1 q_1} + \frac{u_1}{\rho_1^2} = 0,$$

в которых $\frac{1}{\rho_1^2}$ и $\frac{1}{\rho_2^1}$ — кривизны линий q_1 и q_2, ε — главное удлинение, а ∂_1 и ∂_2 — изменения по кривым q_1 и q_2. Взявши ∂_2 от первого равенства, умноженного на $\partial_1 q_1$, и ∂_1 от третьего, умноженного на $\partial_2 q_2$, вычитаем полученные результаты:

$$-\frac{\partial_1 q_1 \partial_2 u_2}{\rho_1^2} - \frac{\partial_2 q_2 \partial_1 u_2}{\rho_2^1} - u_2\left[\partial_2\left(\frac{\partial_1 q_1}{\rho_1^2}\right) + \partial_1\left(\frac{\partial_2 q_2}{\rho_2^1}\right)\right] = \partial_2(\varepsilon \partial_1 q_1).$$

Преобразуя это равенство на основании формулы (32′) и заменяя в нем $\partial_2 u_2$ и $\partial_1 u_2$ выше данными величинами, находим $\frac{1}{\rho_1^2}$. Эта величина вместе с подобной же величиной для $\frac{1}{\rho_2^1}$ будет:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\partial_2 \ln \sqrt{\varepsilon}}{\partial_2 q_2}, \qquad \frac{1}{\rho_2^1} = \frac{\partial_1 \ln \sqrt{\varepsilon}}{\partial_1 q_1}.$$

Отсюда: *для развертывающихся поверхностей сетка линий деформации квадратная и имеет своим параметром корень квадратный из главного удлинения.*

Воображая два течения, совершающиеся по обоим семействам линий деформации со скоростями $\sqrt{\varepsilon}$, получим течение со скоростью $\sqrt{2\varepsilon}$, совершающееся по линиям нулевого удлинения. Отсюда — *сетка линий нулевого удлинения на раз-*

вертывающейся поверхности есть тоже квадратная и имеет тоже параметр $\sqrt{\varepsilon}$.

Понятно, что, изменяя линии токов на ортогональные линии, мы изменим сетку линий деформации на сетку нулевого удлинения и наоборот. Предположив, что данная поверхность развернута на плоскости и обозначая через Δ знак первого дифференциального параметра, найдем из (31), (25′) и (4):

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}=\Delta \ln v_1,$$

$$\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{v_1\sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}}=\sqrt{\Delta v_1}.$$

Помощью одной квадратной сетки мы можем составить бесчисленное множество других. Так, например, можно составить на плоскости сетки с параметрами

$$(\Delta \ln)^k v_1, \quad \sqrt{(\Delta)^k v_1},$$

взяв от данной сетки k раз сетку равного удлинения или k раз сетку линий деформации[1]).

Переходим к течению без вращения и сжатия в пространстве. Отнесем движение к системе криволинейных координат, образуемых семейством ортогональных поверхностей и двумя семействами поверхностей тока. Заметив, что в уравнении (27) угол между ортогональными линиями s_2, s_3 может быть взят острым, если будем называть через q, r, θ_2, θ_3 проекции вращения и скольжения струи на перпендикуляры к поверхностям $s_1 s_3$, $s_1 s_2$, на-

[1]) Читатель может познакомиться с вопросом об образовании новых квадратных сеток на плоскости из сочинения Гатона де ла Гупильера Nouvelle théorie générale des lignes isothermes, который разбирает вопрос с помощью теории мнимых величин.

пишем для нашего случая:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{k_1} &= \frac{\delta_1 \ln v_1}{\delta_1 s_1}, \quad \delta_1 (v_1\, df) = 0; \\ \frac{1}{R_1^2} &= \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2}, \quad \delta_2 (v_1 \delta_1 s_1) = 0; \\ \frac{1}{R_1^3} &= \frac{\delta_3 \ln v_1}{\delta_3 s_3}, \quad \delta_3 (v_1 \delta_1 s_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Второй вид формул (33) показывает, что *условие, необходимое и достаточное для возможности течения без сжатия и вращения относительно данного семейства ортогональных поверхностей, состоит в том, чтобы эти поверхности вместе с двумя семействами поверхностей тока разделяли пространство на бесконечно малые параллелепипеды, для которых отношение* df: $\delta_1 s_1$ *постоянно* [1]). *Скорость при этом будет обратно пропорциональна* $\delta_1 s_1$ *или* df.

Первый вид уравнений (33) определяет сжатие и кривизны струй по изменениям скорости. Из него видно, что *течение, слагающееся геометрически из кривизны линий тока и сжатия струй течения без сжатия и вращения, само бывает без вращения и имеет ортогональной поверхностью* $v_1 = \text{const}$.

При этом первая кривизна отлагается по радиусу кривизны линии тока, а вторая — по ее касательной.

Первую часть этой теоремы весьма удобно принять за признак изотермичности линий тока. Из второй части полу-

[1]) Равенство

$$\delta_1 \frac{df}{\delta_1 s_1} = 0$$

приводит к известному условию, стесняющему функцию F, постоянную на изотермической системе поверхностей; вычитая это равенство, умноженное на $\delta_1 F$, из тождества

$$\delta_1 \left(\frac{\delta_1 F}{\delta_1 s_1}\, df \right) = \Delta_2 F \cdot \delta_1 s_1 \cdot df,$$

найдем формулу, данную Ляме:

$$\frac{\Delta_2 F}{(\Delta F)^2} = \frac{\delta_1^2 F}{(\delta_2 F)^2}$$

(Lamé, Leçons sur les coordonneés curvilignes, § XX).

чаем такой результат: *на ортогональных поверхностях скорость v_1 бывает постоянна по линиям, перпендикулярным к радиусам кривизны линий тока.*

Чтобы показать, в каком случае течение, слагаемое геометрически из кривизн линий тока и сжатия струй, будет несжимаемо, определим $\Delta_2 \ln v_1$. Для этого предположим, что линии s_2, s_3 суть линии кривизны одной из ортогональных поверхностей, и составим по формулам (25″) изменение объема течения, скорости которого по s_1, s_2, s_3 суть

$$-\frac{1}{k_1},\ \frac{1}{R_1^2},\ \frac{1}{R_1^3}.$$

Это дает:

$$\Delta_2 \ln v_1 = -\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{k_1} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^2} + \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{R_1^3} - \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 - \\ - \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_3^2}\right) - \frac{1}{R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3}+\frac{1}{R_2^3}\right).$$

Заметив, что по теореме Иоахимсталя линии s_2, s_3 будут не только линиями кривизны для ортогональных поверхностей, но и линиями кривизны для поверхностей тока, пишем по формуле (33) соотношения между радиусами кривизны, которые в нашем случае представляют известные формулы Ляме[1]):

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_2^1} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^2} = \left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^2}\right)^2 + \frac{1}{R_1^3}\cdot\frac{1}{R_2^3},$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_3^1} + \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{R_1^3} = \left(\frac{1}{R_3^1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^3}\right)^2 + \frac{1}{R_1^2}\cdot\frac{1}{R_3^2}.$$

Складывая, получаем:

$$-\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left(\frac{1}{k_1}\right) + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_1^2} + \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{R_1^3} - \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 - \\ - \frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_3^2}\right) - \frac{1}{R_1^3}\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{R_1^3}\right) = -\frac{2}{R_2^1 R_3^1},$$

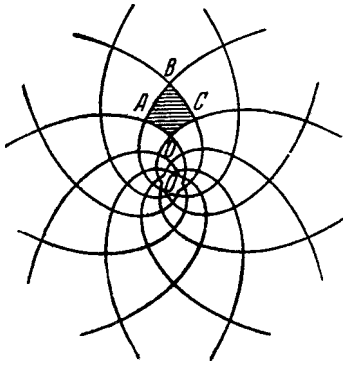
[1]) Leçons sur les coordonnées curvilignes, § XLVI.

откуда

$$\Delta_2 \ln v_1 = -\frac{2}{R_2^1 R_3^1}. \qquad (33')$$

Мы получаем результат: *если ортогональные поверхности развертываются, то течение, определяемое функцией скоростей* $\ln v_1$, *будет без сжатия.*

§ 23. Оканчивая главу о течении жидкости, необходимо еще познакомиться с одним частным случаем течения без вращения и изменения объема. Это течение при движении жидкой площади определяется квадратной сеткой, образуемой концентрическими кругами и радиусами. Скорость его равна $\frac{\alpha}{2\pi\rho}$ и направлена по тем или другим линиям сетки. Будем называть движение по радиусам истечением, а по кругам — вихрем. Угловая скорость вихревого движения обратно пропорциональна квадрату радиуса, поэтому жидкая площадь при таком движении претерпевает закручивание, возрастающее до бесконечности в критической точке. Так как при вихревом движении удлинения по кругам и радиусам равны нулю, то линии деформации делают с радиусами углы в 45° и образуют квадратную сетку из взаимно ортогональных логарифмических спиралей. Каждый криволинейный прямоугольник $ABCD$, изображенный на фигуре 8, остается прямоугольным по прошествии бесконечно малого времени. Скорость течения, соответствующего сетке осей деформации, есть $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \cdot \frac{1}{\rho}$; это течение имеет в центре критическую точку истечения и вихря.



Фиг. 8.

Движение в пространстве, которое мы назовем истечением, есть течение без сжатия и вращения; ортогональные

поверхности суть концентрические сферы. Скорость такого течения, как видно из формулы (33), есть $\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha}{\rho^2}$, так что слагающие по осям координат будут:

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha x}{\rho^3}, \quad v = \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha y}{\rho^3}, \quad w = \frac{1}{4\pi}\frac{\alpha z}{\rho^3}.$$

Вихревым движением, соответствующим бесконечно малому вихрю dz, направленному по оси Oz, называют движение, совершающееся параллельно плоскости Oxy по кругам, центры которых лежат на оси Oz, со скоростями

$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha\, dz \sin\varphi}{\rho^2},$$

где φ — угол ρ с Oz. Скорости по осям такого движения суть:

$$u' = -\frac{1}{2\pi}\alpha\, dz\frac{y}{\rho^3}, \quad v' = \frac{1}{2\pi}\alpha\, dz\frac{x}{\rho^3}, \quad w' = 0.$$

Мы принимаем коэффициент α положительным, когда вращение — по стрелке часов для наблюдателя, смотрящего с положительного конца dz.

Вихревое движение около элемента dz не дает изменения объема, но дает вращения:

$$p' = -\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\rho^3}, \quad q' = -\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\rho^3};$$

$$r' = \frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\rho^3}\right) = -\frac{1}{4\pi}\alpha\, dz\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\rho^3}.$$

Величины найденных вращений суть не что иное, как сумма скоростей двух истечений относительно точек O и O', помещенных в начале и конце элемента dz и имеющих коэффициенты $-\alpha$ и $+\alpha$. *Воображая некоторую линию AB, все элементы которой сообщают жидкости вихревые движения, имеющие коэффициент α, получим движение без сжатия, но с вращением, угловые скорости которого равны скоростям течения, слагающегося из двух истечений $-\alpha$ и $+\alpha$, помещенных в точках A и B.* Будем называть такое движение вихревым движением около оси AB. *Когда ось вихревого движения замкнута,*

то оно не имеет ни сжатия, ни вращения. Исключение представляют точки, лежащие на самой оси, которая есть вихревая критическая ось. Чтобы определить скорости вихревого движения с замкнутой осью вихря, рассмотрим на плоскости Oxy бесконечно малый прямоугольник $dx\,dy$, каждая сторона которого соответствует осям бесконечно малого вихревого движения с коэффициентом α (периметр прямоугольника считаем от $+x$ к $+y$). Такой вихрь дает скорости:

$$u'' = -\frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\rho^3} = -\frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\rho^3},$$

$$v'' = -\frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\rho^3} = -\frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\rho^3},$$

$$w'' = \frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\rho^3}\right) = -\frac{1}{2\pi}\alpha\,dx\,dy\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\rho^3}.$$

Это показывает, что движение, сообщаемое нашим бесконечно малым замкнутым вихрем, может быть заменено двумя истечениями, критические точки которых лежат на концах элемента dz и имеют коэффициенты

$$\mp\frac{2\alpha\,dx\,dy}{dz}.$$

Отсюда является возможность заменить движение, сообщаемое каким-нибудь конечным замкнутым вихрем, двумя истечениями, которым соответствуют две бесконечно близкие поверхности истечения, и выразить потенциал вихревого движения площадью сферического изображения вихревой оси.

ГЛАВА III.

СЛОЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ.

§ 24. Исследования движений систем частного вида обязаны своим успехом главным образом разложению этих движений на более простые. То же имеет место и относительно движения жидкости, и можно, не преувеличивая, сказать, что успехи гидродинамики за последние годы

являются следствием разложения движения жидкости, указанного Гельмгольцем. Ввиду важности этого разложения мы посвящаем ему особую главу, которую начнем общими замечаниями о сложении и разложении течений.

При сложении течений жидкости соответствующие им скорости слагаются геометрически; так же слагаются и скорости относительного движения частички, вследствие чего линейное удлинение радиуса сложного движения равно сумме его удлинений в слагаемых движениях, а вращение частички в сложном движении есть геометрическая сумма вращений в слагаемых движениях. Нулевые критические точки в слагаемых движениях не будут, вообще говоря, критическими точками сложного, но бесконечные и неопределенные точки останутся и в сложном движении. Этого нельзя сказать всегда о критических точках при сложении бесконечно большого числа бесконечно медленных движений.

Мы будем слагать такие течения, предполагая, что они определяются координатами точек, непрерывно распределенных по линии, по поверхности или внутри объема, и что они имеют скорости, пропорциональные дифференциалу дуги, площади или объема. Таким образом, получаются, например, сложные движения, слагающиеся из бесчисленного множества истечений или вихревых движений, в предположении, что данная поверхность или данный объем представляют непрерывную последовательность точек истечения или вихревых осей.

В случае объема скорости первого движения слагаются из скоростей

$$\frac{1}{4\pi}\alpha\frac{dv}{\rho^2},$$

направленных к элементу объема dv, а скорости второго — из скоростей

$$\frac{1}{2\pi}\alpha\frac{dv}{\rho^2}\sin(\widehat{dl,\rho}),$$

перпендикулярных к радиусу ρ и элементу dl вихревой оси. В случае поверхности роль элемента объема играет

элемент поверхности. Будем называть такие движения *истечением и вихревым движением относительно данного объема или данной поверхности.* Первое движение вполне определяется *коэффициентом* α в каждой точке, второе требует еще знания направления элемента *dl вихревой оси* в каждой точке.

§ 25. Предположим теперь, что внутри данного замкнутого пространства совершается течение жидкости со скоростями u, v, w, и постараемся разложить это движение на вихревое и истечение. Для этого определяем скорости вихревого течения относительно всего объема жидкости, предполагая, что вихревые оси суть линии вихрей, а коэффициенты в каждой точке равны вращению частицы; эти скорости будут:

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{q(z-c)-r(y-b)}{\rho^3}\,da\,db\,dc = \frac{\partial}{\partial y}N - \frac{\partial}{\partial z}M,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{r(x-a)-p(z-c)}{\rho^3}\,da\,db\,dc = \frac{\partial}{\partial z}L - \frac{\partial}{\partial x}N,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{p(y-b)-q(x-a)}{\rho^3}\,da\,db\,dc = \frac{\partial}{\partial x}M - \frac{\partial}{\partial y}L,$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{p}{\rho}\,da\,db\,dc,$$

$$M = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{q}{\rho}\,da\,db\,dc, \quad N = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{r}{\rho}\,da\,db\,dc. \tag{34}$$

Интегралы распространяются на весь объем, заключенный в данной поверхности f, а p, q, r, ρ суть слагающие вращения и расстояние рассматриваемой точки (x, y, z) от точки объема (a, b, c). Подставляя в последние формулы значения p, q, r, преобразуем их помощью интегрирования по частям:

$$L = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial} - \frac{\partial Q}{\partial} - L',$$

$$M = \frac{\partial}{\partial} - \frac{\partial R}{\partial x} - M',$$

$$N = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - N'.$$

Здесь

$$P=\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{u}{\rho}\,da\,db\,dc,$$

$$Q=\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{v}{\rho}\,da\,db\,dc,\quad R=\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{w}{\rho}\,da\,db\,dc;$$

$$L'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{\rho}\left[v\cos(\widehat{n,z})-w\cos(\widehat{n,y})\right]df, \qquad (34')$$

$$M'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{\rho}\left[w\cos(\widehat{n,x})-u\cos(\widehat{n,z})\right]df,$$

$$N'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{\rho}\left[u\cos(\widehat{n,y})-v\cos(\widehat{n,x})\right]df.$$

Двойные интегралы распространяются на поверхность f, n есть внутренняя нормаль этой поверхности. Подставляем значения M, N в формулу скорости:

$$\frac{\partial}{\partial y}N-\frac{\partial}{\partial z}M=-\Delta_2 P+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial N'}{\partial b}-\frac{\partial M'}{\partial c}\right),$$

и преобразовываем член, входящий в скобки, помощью интеграции по частям:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{v_n}{\rho}\,df+\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\Delta}{\rho}\,da\,db\,dc;$$

v_n выражает скорость на поверхности по внутренней нормали, а Δ — изменение объема. Полагая

$$S=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\Delta}{\rho}\,da\,db\,dc,\quad S'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{v_n}{\rho}\,df \qquad (34'')$$

и замечая, что $-\Delta_2 P$ равняется нулю вне поверхности f и дает u для внутренней точки, находим формулу для скорости u и подобные же формулы для v, w:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\partial(N+N')}{\partial y}-\frac{\partial(M+M')}{\partial z}+\frac{\partial(S+S')}{\partial x},\\ v&=\frac{\partial(L+L')}{\partial z}-\frac{\partial(N+N')}{\partial x}+\frac{\partial(S+S')}{\partial y},\\ w&=\frac{\partial(M+M')}{\partial x}-\frac{\partial(L+L')}{\partial y}+\frac{\partial(S+S')}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (34''')$$

Рассматривая формулы (34), (34′), (34″), (34‴), приходим к основной теореме о разложении всякого течения, которая во всей ее полноте была изложена Бельтрами [1]). Мы назовем через ω и v_s вращение частицы и слагающую скорости по поверхности f.

Всякое течение жидкости можно разложить на четыре: 1) *истечение относительно всего объема жидкости, коэффициенты которого равны* Δ; 2) *вихревое движение относительно всего объема, оси которого суть линии вихрей, а коэффициенты равны* ω; 3) *истечение относительно поверхности, замыкающей рассматриваемую массу, коэффициенты которого равны* v_n; 4) *вихревое движение относительно поверхности, оси которого получаются, повернув скорости относительного течения поверхности на прямой угол около внутренней нормали по часовой стрелке, и коэффициенты которого равны* $\frac{v_s}{2}$.

Чтобы выяснить себе причину, вследствие которой движение жидкости разлагается на четыре вышеупомянутые, заметим, что скорости, определяемые формулами

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad v_1 = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad w_1 = \frac{\partial S}{\partial z},$$

не имеют вращения, но имеют изменение объема Δ. Скорости же

$$u_2 = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad v_2 = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad w_2 = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

наоборот, не имеют изменения объема, но имеют некоторые вращения p_2, q_2, r_2, как видно из формулы (34):

$$p_2 = p + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df,$$

$$q_2 = q + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df,$$

$$r_2 = r + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df;$$

ω_n — вращение около внутренней нормали к f.

[1]) Dell'idrodinamica razionale, §§ 15, 16 и 17. Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, серия III, т. II.

Вторые члены происходят от концов вихрей и могут быть рассматриваемы как вращения некоторого вихревого течения относительно поверхности f. Заменяя ω_n по формуле (28), получим

$$\int\int \frac{\omega_n}{\rho}\, df = -\frac{1}{2}\int\int \frac{\delta_2 (v_1 \delta_1 s_1)}{\rho},$$

где $v_1 = v_s$, а s_1 и s_2 — линии токов и ортогональные линии относительного движения по поверхности f. Это показывает на основании сказанного в § 23, что вышеупомянутое вращение может быть получено от скоростей вихревого движения относительно поверхности f, оси которого суть ортогональные линии этой поверхности, а коэффициенты равны $-\frac{v_s}{2}$.

Если теперь возьмем это вихревое движение в обратную сторону и сложим его с движением

$$(u_1,\ v_1,\ w_1) \quad \text{и} \quad (u_2,\ v_2,\ w_2),$$

то получим течение, имеющее во всякой точке внутри поверхности f то же вращение и то же изменение объема, как данное течение. Для полного тождества обоих течений нужно к слагаемым движениям прибавить еще течение без вращения и изменения объема; мы видели, каково это течение.

§ 26. Рассмотрим теперь теорему Бельтрами в различных частных случаях.

Когда поверхность f есть ортогональная поверхность и жидкость не имеет вращения, то в формуле (34‴) надо положить

$$L = M = N = L' = M' = N' = 0.$$

Это дает такой результат: *движение без вращения внутри ортогональной поверхности f может быть разложено на истечение относительно объема, заключенного в f, с коэффициентами Δ и на истечение относительно поверхности f с коэффициентами v_n* [1]). Для несжимаемой жидкости остается

[1]) Влияние, оказываемое изменением объема одной частички на скорости других частичек, указано Роxом, Anwendung der Potentialausdrüke auf mathematische Physik, Borchardt's Journal, т. 61, § 5.

только последнее течение, причем определение v_n представляет известную задачу электростатики.

Если, наоборот, поверхность f есть поверхность тока и изменение объема равно нулю, то в формулах (34‴) надо положить

$$S = S' = 0.$$

Движение без изменения объёма внутри поверхности тока может быть разложено на вихревое движение относительно объема с коэффициентами ω *и с осями, направленными по линиям вихрей, и на вихревое движение относительно поверхности тока с коэффициентами* $\frac{v_s}{2}$ *и с осями, направленными по ортогональным линиям поверхности.*

Когда вращение жидкости равно нулю, то остается только второе течение; при этом скорость v_s на поверхности тока определяется, как показал Больцман [1]), под следующим условием. *Если проведем по поверхности* f *бесконечное множество ортогональных линий* s_2 *и предположим, что между каждыми двумя линиями пробегает гальванический ток с напряжением* $v_s \delta_1 s_1$, *то действие всех таких токов на элемент каждого из них даст силу, перпендикулярную к поверхности* f. Это условие является следствием такого свойства электрических взаимодействий: если на магнитную массу dm действуют другие магнитные массы с известной силой g и мы заменим магнитную массу на элемент тока dl, то на этот элемент будет действовать сила, перпендикулярная g и dl.

Положив, наконец, что f — поверхность вихрей и что жидкость несжимаема, получаем разложение Гельмгольца [2]). *Если поверхность* f *есть поверхность вихрей, то все жидкое течение можно разложить на вихревое движение относительно объема жидкости, оси которого направлены по линиям вихрей, а коэффициенты равны* ω, *и на некоторое течение без вращения и изменения объема.*

и

[1]) Boltzmann, Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, Borchardt's Journal, т. 78.

[2]) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, § 3, Borchardt's Journal, т. 55.

Мы видели, какими условиями стеснены v_n на ортогональной поверхности и v_s на поверхности тока для течения без сжатия и вращения. Заметим вообще, что при всяком течении, в котором даны

$$\Delta,\ p,\ q,\ r,$$

из двух скоростей v_n и v_s произвольна только одна, так что, давши относительное течение по поверхности f, мы определяем этим нормальную скорость, и наоборот.

Это вытекает из сказанного в § 21. Если пространство многосвязно, то следует принять в соображение перегородки.

ГЛАВА IV.

ОБ УСКОРЕНИЯХ ТОЧЕК ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ.

§ 27. Движение жидкости представляет, как было сказано в главе II, ряд непрерывно изменяющихся течений. Изменение течения в данный момент времени вполне определяется, когда даны геометрические производные скорости в каждой точке пространства. Мы будем называть эти производные *ускорениями течения*. Ускорения течения будут известны, когда даны полные ускорения точек движущейся жидкости и ускорения, которые они имели бы, если бы течение не изменялось. Эти последние ускорения назовем *перманентными ускорениями*.

Ускорения течения по тем и другим ускорениям определяются по теореме: *полное ускорение есть геометрическая сумма ускорения течения и перманентного ускорения*.

§ 28. Займемся свойствами перманентного ускорения. Называя его проекции по осям Ox, Oy, Oz через g_1, g_2, g_3, имеем:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z};\\ g_2 &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z};\\ g_3 &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z};\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

u, v, w — скорости по осям. Предполагая, что оси Ox, Oy, Oz касаются линий s_1, s_2, s_3, указанных в § 18, преобразуем найденные проекции помощью формул (25′) и (27):

$$g_1 = \Delta \cdot v_1 - \frac{v_1^2}{k_1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}, \quad g_3 = \frac{v_1^2}{R_1^3}.$$

Отсюда следует, что перманентное ускорение слагается из центростремительного и тангенциального, причем *тангенциальное ускорение при несжимаемой жидкости равно отрицательному расширению струйки, умноженному на квадрат скорости.*

Будем рассматривать перманентные ускорения как скорости некоторого течения и определим соответствующее этому течению изменение объема и вращение. По формулам (35) имеем:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = v_1 \frac{\delta_1 \Delta}{\delta_1 s_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 4\omega^2;$$

здесь δ_1 — изменение по линии тока s_1, а ω — скорость вращения частицы. Найденное выражение упрощается, когда предположим, что оси координат суть оси деформации:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = v_1 \frac{\delta_1 \Delta}{\delta_1 s_1} + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - 2\omega^2; \tag{36}$$

получаем теорему: *изменение объема течения, соответствующего перманентному ускорению, равно изменению сжатия течения при передвижении точки по траектории плюс сумма квадратов главных удлинений без двойного квадрата угловой скорости частицы.*

Найденная величина может быть выражена через удлинения ε_1, ε_2, ε_3 по линиям, не изменяющим направления. Пользуясь уравнением (14′), получаем:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = v_1 \frac{\delta_1 \Delta}{\delta_1 s_1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2. \tag{36′}$$

Полагая $\Delta = 0$, находим теорему [1]): *изменение объема для течения, соответствующего перманентным ускорениям при несжимаемой жидкости, равно сумме квадратов удлинений по линиям, не изменяющим своих направлений.*

Определяем вращение при течении, соответствующем перманентным ускорениям. Из формулы (35) имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) = v_1 \frac{\delta_1 p}{\delta_1 s_1} - p\frac{\partial u}{\partial x} - q\frac{\partial u}{\partial y} - r\frac{\partial u}{\partial z} + \Delta \cdot p. \quad (36'')$$

Здесь p, q, r — проекции по осям вращения ω частицы. Эта формула вместе с двумя подобными оправдывает теорему: *вращение перманентного ускорения слагается геометрически из трех линий: из производной вращения частицы при передвижении ее центра, из скорости, которую бы имела точка* $(-p, -q, -r)$ *в относительном движении частицы* [2]), *и из линии* $\Delta \cdot \omega$, *отложенной по оси вращения.*

Понятно, что при $\omega = 0$ перманентные ускорения дают невращаемое течение. Выведем еще одно заключение из формул (35).

Предполагая, что слагаются два течения, соответствующие скоростям u, v, w и u', v', w', сравниваем ускорения слагаемых движений с ускорением сложного движения. Это дает теорему о сложении перманентных ускорений: *перманентное ускорение сложного движения слагается геометрически из четырех линий: из ускорения первого движения, из ускорения второго движения, из скорости, которую бы имела точка* (u, v, w) *в относительном движении частицы при втором течении, и скорости, которую бы имела точка* (u', v', w') *в относительном движении частицы при первом течении.* Приняв ряд положений движущейся траектории за линии токов одного течения, а пути, описы-

[1]) Lipschitz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggeto ad attrazioni interne ed esterne, Annali di Matematica pura ed applicata, deretti da Brioschi e Cremona, серия II, т. VI.

[2]) Координаты $-p$, $-q$, $-r$ взяты относительно центра частицы.

ваемые точками траектории, за линии токов другого течения, читатель без труда выведет из этой теоремы теорему Кориолиса.

§ 29. Вообразим теперь два течения, скорости которых геометрически равны ускорению течения и полному ускорению. Изменение объема первого течения равно производной от изменения объема жидкости в данной точке, поэтому изменение объема для полных ускорений равно изменению объема для перманентных ускорений плюс производная от изменения объема жидкости в данной точке. *Когда жидкость несжимаема, то изменение объема для полного ускорения равно сумме квадратов удлинений частицы по не изменяющим направления линиям.*

В большинстве вопросов гидродинамики полагают, что полные ускорения имеют потенциальную функцию F, вследствие чего вращение для ускорений течения равно по величине, но противоположно по направлению вращению перманентных ускорений. Так как вращение ускорений течения есть геометрическая производная вращения жидкости в данной точке пространства, то получаем по формуле (36″) следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{\theta} = \frac{1}{\theta}\left(p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} + r\frac{\partial u}{\partial z}\right). \qquad (36''')$$

Здесь d — полное изменение по времени, а θ — плотность жидкости. Эта формула вместе с двумя подобными показывает, что для каждой точки линия $\frac{\omega}{\theta}$, направленная по оси вращения, изменяется так, как радиус-вектор точки $\left(\frac{p}{\theta}, \frac{q}{\theta}, \frac{r}{\theta}\right)$ в предположении, что эта точка перемещается по закону относительного движения частицы. Отсюда следует известная теорема Гельмгольца [1]: *если полные ускорения имеют потенциальную функцию, то все точки, лежащие на линиях вихрей, остаются на этих линиях во все время движения, а напряжение вихревых струек не изменяется.*

[1] Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, § 2.

Из теоремы Гельмгольца следует, что полная производная от обтечения по замкнутой жидкой линии равна нулю. Понятно, наоборот, что эта последняя теорема заключает в себе теорему Гельмгольца; дадим для нее самостоятельное доказательство. Вообразив жидкую линию s_1' и линию, соответствующую ее бесконечно близкому положению, s_1'' проведем три семейства взаимно ортогональных поверхностей координат

$$s_1 s_2,\ s_2 s_3,\ s_3 s_1,$$

так, чтобы линии s_1' и s_1'' были координатными линиями семейства s_1 и соответствовали, кроме того, геодезическим линиям в поверхностях $s_1 s_3$. Построив оси Ox, Oy, Oz, имеющие начало на линии s_1' и касательные координатным линиям, определим по формулам (35) и (25″) g_1. Полагая в формулах (25″) все геодезические вращения равными нулю, находим:

$$g_1 = v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} + v_2 \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + v_3 \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1 v_2}{R^2} + \frac{v_2^2}{R_2^1} + \frac{v_3^2}{R_3^1}.$$

Но так как в нашем случае течение, слагающееся из течений v_2 и v_3, не дает скольжения, имеющего направлением Ox, а осью перпендикуляр к скорости $\sqrt{v_2^2 + v_3^2}$ по плоскости Oyz, то по теореме о сложении скольжений можно написать:

$$\left(\frac{v_3}{R_3^1} + \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1}\right) v_3 + \left(\frac{v_2}{R_2^1} + \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1}\right) v_2 = 0.$$

Отсюда

$$g_1 = v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} + v_2 \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} + v_3 \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} - \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} v_2 - \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} v_3.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства ускорение течения по оси Ox, найдем формулу [1]) для полного ускоре-

[1]) По Томсону эта формула выведена Вальтоном в Cambridge Mathematical Journal. 1842.

ния, слагающие которого назовем через J_1, J_2, J_3:

$$J_1 = \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} - \frac{\delta_1 v_2}{\delta_1 s_1} v_2 - \frac{\delta_1 v_3}{\delta_1 s_1} v_3 =$$
$$= \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} + v_1 \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{1}{2} \delta_1 \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{\delta s_1}.$$

Предполагая, что кривая s_1, совпадающая с s_1, замкнута, умножаем найденное равенство на δs_1 и берем от обеих частей интеграл по всей кривой s_1:

$$\int J_1 \delta_1 s_1 = \int \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1 v_2}{R_1^2} + \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} v_1 \right) \delta_1 s_1.$$

Здесь первая часть может быть преобразована на основании равенства

$$\frac{d \delta_1 s_1}{dt} = \left(\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} - \frac{v_2}{R_1^2} \right) \delta_1 s_1,$$

вытекающего из формулы (25″). Мы получаем:

$$\int J_1 \delta_1 s_1 = \int \frac{d (v_1 \delta_1 s_1)}{dt}. \qquad (36'''')$$

Из этого равенства вытекает теорема Томсона [1]), из которой как следствие получается теорема Гельмгольца: *полная производная от обтечения скорости по замкнутой линии равна обтечению полного ускорения по этой линии.*

Перейдем теперь к вопросу о разложении течения, соответствующего полным ускорениям. Назовем через J_n и J_s слагающие полного ускорения по нормали и касательной через g_n и g_s — подобные слагающие для перманентного ускорения и через $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ и $\frac{\partial v_s}{\partial t}$ — для ускорения течения и предположим, что полное ускорение имеет потенциальную функцию F.

Прилагая сказанное в главе III к полному ускорению, получим теорему Липшица: *если жидкость несжимаема и полные ускорения имеют потенциальную функцию, то тече-*

[1]) On vortex motion, стр. 274.

ние полного ускорения может быть разложено на три: на истечение относительно объема жидкости с коэффициентом

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

на истечение относительно поверхности с коэффициентом J_n *и на вихревое движение относительно поверхности, оси которого перпендикулярны к* J_n, *а коэффициенты равны* $\frac{J_s}{2}$ [1].

Во всех вопросах о движении несжимаемой жидкости всегда бывает известно на поверхности J_n или значение функции F[2], а так как из этих двух величин только одна может быть произвольна, то вопрос об определении ускорений течения при движении жидкости вполне определенный.

Давая течение свободной несжимаемой жидкости для данного момента и функцию F на поверхности для всякого времени, мы можем, как показал Преображенский, опреде-

---

[1]) Эта теорема выражена Липшицем несколько иначе, так как он определяет не полные ускорения, но давление. При этом формула, помощью которой он определяет давление, одинаково приложима как для жидкости без трения, так и для жидкости с трением: «Determinazione della pressionne» etc., стр. 226, 1874. Бобылев тоже указывает способ определения давления жидкости с трением как потенциала масс, но ничего не говорит об условиях на поверхности: Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Mathematische Annalen von Neumann, т. VI, вып. I, 1873.

[2]) На свободной поверхности жидкости известно давление жидкости P и силовая функция U, поэтому известна и функция F:

$$F = U - \frac{1}{0} P,$$

а следовательно, величина и направление J_s. Если ограничивающая поверхность представляет стенки сосуда, то известно J_n:

$$J_n = \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{v^2}{\rho_n},$$

где $\frac{1}{\rho_n}$ — проекция кривизны траектории на нормаль к поверхности.

лить все движение, переходя от одного момента времени к другому[1]).

Отыскав функцию F, имеющую данное значение на поверхности и удовлетворяющую внутри жидкости условию

$$\Delta_2 F = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

найдем полные ускорения, а следовательно, и ускорения течения и потому будем знать течение для второго момента; по этому течению можем определить течение третьего момента, и т. д. до бесконечности.

Понятно, что вместо того, чтобы определять полное ускорение, мы можем прямо отыскивать ускорения течения, так как при вышеупомянутых условиях вращение этого течения равно и противоположно вращению перманентных ускорений, а изменение объема равно нулю. Что же касается условий на поверхности, то на стенках сосуда

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = 0,$$

а на свободной поверхности $\frac{\partial v_s}{\partial t}$ слагается геометрически из J_s и $-g_s$. Мы получим теорему: *при несжимаемой жидкости, для которой полное ускорение имеет потенциальную функцию, изменение течения во время dt происходит от прибавления к нему трех течений: вихревого течения относительно объема жидкости, оси которого суть линии вихрей перманентных ускорений, а коэффициенты равны*

$$-dt\sqrt{\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2},$$

вихревого движения относительно ограничивающей поверхности

---

[1]) Преображенский пользуется подобным соображением для того, чтобы выразить давление жидкости бесконечной строкой. При этом способ его одинаково приложим, существует ли или не существует силовая функция. Отчеты Казанского съезда, 1873.

оси которого перпендикулярны ускорениям течения, а коэффициенты равны $\frac{1}{2}dt\frac{\partial v_s}{\partial t}$, *и истечения относительно свободной поверхности с коэффициентом* $dt\frac{\partial v_n}{\partial t}$.

§ 30. Мы займемся теперь перманентным движением несжимаемой жидкости и исследуем, какими условиями должны быть стеснены траектории и скорости этого движения, чтобы ускорения имели потенциальную функцию F. Начнем для простоты с плоского движения. Относя его к криволинейным координатам s_1, s_2, где s_1 суть линии токов, а s_2 суть ортогональные линии, пишем на основании формул (27) и (35) следующие равенства:

$$g_1 = \frac{v_1^2}{R_2^1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}, \quad \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1} = \frac{v_1}{R_2^1}, \quad \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} = -2r + \frac{v_1}{R_1^2}. \qquad (37)$$

Подставляя вместо g_1 и g_2 величины

$$g_1 = \frac{\delta_1 F}{\delta_1 s_1}, \quad g_2 = \frac{\delta_2 F}{\delta_2 s_2}$$

и исключая F помощью равенства

$$\delta_1\delta_2 F = \delta_2\delta_1 F,$$

получаем условие

$$\delta_2 \frac{v_1^2 \delta_1 s_1}{R_2^1} - \delta_1 \frac{v_1^2 \delta_2 s_2}{R_1^2} = 0.$$

Чтобы обнаружить механическое значение этого условия, представляем вторые формулы (37) так:

$$\delta_1 \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{R_2^1}\delta_1 s_1, \quad \delta_2 \frac{v_1^2}{2} = -2rv_1\delta_2 s_2 + \frac{v_1^3}{R_1^2}\delta_2 s_2.$$

Помощью этих уравнений наше условие дает:

$$\delta_1 (rv_1 \delta_2 s_2) = 0.$$

Но так как вследствие несжимаемости жидкости

$$\delta_1 (v_1 \delta_2 s_2) = 0,$$

то

$$\delta_1 r = 0.$$

Мы видим, что *вращение плоской частицы не изменяется по ее траектории*, что, впрочем, прямо следует из теоремы Гельмгольца.

Чтобы найти условие, стесняющее линии токов, берем от вторых формул (37) производные по $\delta_2 s_2$ и $\delta_1 s_1$:

$$\frac{\delta_2\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2} + \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} = v_1 \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_2^1}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2},$$

$$\frac{\delta_1\delta_2 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_2 s_2} + \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1} = v_1 \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1^2}\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}.$$

Производя вычитание и заменяя $\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}$ его величиной из формулы (37), получаем:

$$\frac{2}{v_1}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1}\right) : \frac{1}{R_2^1} + \frac{2}{R_1^2}.$$

Мы имеем теперь две формулы для производных v_1:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1}\right) : \frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_1^2}; \\ \frac{\delta_1 \ln v_1}{\delta_1 s_1} &= \frac{1}{R_2^1}. \end{aligned} \tag{38}$$

Исключая из этих формул v_1 помощью равенства

$$\delta_1\delta_2 \ln v_1 = \delta_2\delta_1 \ln v_1,$$

найдем условие, стесняющее траектории плоского перманентного движения:

$$\frac{1}{2}\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1}\right) : \frac{1}{R_2^1}\right] + \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1} = 0. \tag{38'}$$

Величина, стоящая в скобках, выражает, как видно из формулы (25″), двойное вращение течения, скорости которого по s_1 и s_2 суть

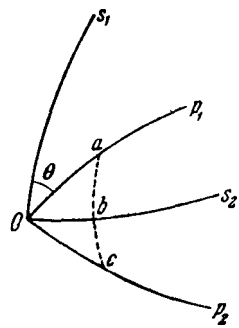
$$\frac{1}{R_2^1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_1^2}.$$

Мы видели, что для квадратной сетки это вращение равно нулю; следовательно, квадратная сетка удовлетворяет

условию (38′). Так как по формулам (38) и (37)

$$\tau = -\frac{v_1}{4}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{R_2^1}\right) : \frac{1}{R_2^1},$$

то заключаем, что *всякий раз, как сетка траекторий есть квадратная, перманентное течение не имеет вращения.* Когда данная сетка $(s_1 s_2)$ удовлетворяет условию (38′), то по формулам (38) находим соответствующие ей скорости, зная скорость в одной точке; а найдя скорости, по формулам (37) определяем ускорения.



Фиг. 9.

§ 31. Займемся теперь обратным вопросом и постараемся по данным ускорениям, имеющим потенциальную функцию, отыскать течение жидкости. Вообразив сетку ускорений $(p_1 p_2)$, (фиг. 9) назовем через θ угол, который делает траектория s_1 с направлением ускорения p_1, и постараемся определить изменение этого угла по p_1 и p_2. Мы будем обозначать изменения по линиям сетки ускорений через d_1 и d_2. Величины $d_1\theta$ и $d_2\theta$ могут быть определены по теореме: сумма внешних углов бесконечно малого криволинейного треугольника плюс сумма углов смежности его сторон равна 2π. Прилагая эту теорему к треугольникам Oab и Ocb и пользуясь формулами (37), получаем:

$$d_1\theta = \frac{1}{r_1^2}\,d_1 p_1, \quad d_2\theta = \left(-\frac{1}{r_2^1} + \frac{g}{r_1^2}\right) d_2 p_2. \tag{39}$$

Здесь $\frac{1}{r_1^2}$ и $\frac{1}{r_2^1}$ суть кривизны сетки ускорений, а g — полное ускорение. Первое уравнение (39) дает нам интересную теорему: *по линиям ускорения направление скорости не изменяется.* Эта теорема имеет место для перманентного ускорения всякого плоского течения несжимаемой жидкости.

Чтобы определить изменения v_1 по p_1 и p_2, выводим из первой и второй формул (37) и формулы (32′) уравнение

$$\delta_1\left(\frac{g_1\delta_2 s_2}{v_1^2}\right)+\delta_2\left(\frac{g_2\delta_1 s_1}{v_1^2}\right)=0,$$

которое показывает, что течение, направленное по линиям ускорения и равное ускорению g, разделенному на v_1^2, несжимаемо. Выражая это самое условие в координатах (p_1p_2), получаем:

$$d_1\left(\frac{gd_2p_2}{v_1^2}\right)=0,\quad \frac{d_1\ln v_1^2}{d_1p_1}=\frac{\Delta_2F}{g}.$$

Далее обратим внимание на формулу

$$\frac{\delta_1\ln v_1^2}{\delta_1 s_1}=\frac{d_1\ln v_1^2}{d_1p_1}\cos\theta-\frac{d_2\ln v_1^2}{d_2p_2}\sin\theta,$$

в которой можно заменить первый и второй члены известными величинами

$$\frac{2g\cos\theta}{v_1^2}=\frac{\Delta_2F}{g}\cos\theta-\frac{d_2\ln v_1^2}{d_2p_2}\sin\theta.$$

Мы получаем, таким образом, искомые изменения v_1:

$$\frac{d_1\ln v_1^2}{d_1p_1}=\frac{\Delta_2F}{g},$$

$$\frac{d_2\ln v_1^2}{d_2p_2}=\operatorname{ctg}\theta\cdot\left(\frac{\Delta_2F}{g}-\frac{2g}{v_1^2}\right). \qquad (39')$$

Уравнения (39) и (39′) позволяют определить по направлению и величине ускорений соответствующее перманентное течение. Но для того чтобы эти уравнения были совместны, необходимо выполнить такие условия:

$$d_1d_2\theta=d_2d_1\theta,\quad d_1d_2\ln v_1^2=d_2d_1\ln v_1^2.$$

Первое условие удовлетворяется само собой, так как, подставляя в него $d_1\theta$ и $d_2\theta$ из (39), получаем на основании формулы (32′):

$$d_1\left(\frac{gd_2p_2}{v_1^2}\right)=0,\quad \frac{d_1\ln v_1^2}{d_2p_1}=\frac{\Delta_2F}{g}.$$

Второе условие на основании формул (39) и (39′) дает:

$$\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{2g}{r_1^2}-\frac{\Delta_2 F}{g}\right)d_1p_1d_2p_2=$$

$$=\sin^2\theta\cdot d_2\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_1p_1\right)-\sin\theta\cos\theta\cdot d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_2p_2\right).$$

Делаем здесь некоторые преобразования:

$$\frac{d_2\ln g}{d_2p_2}=\frac{1}{r_1^2},\quad \frac{d_1\ln g}{d_1p_1}=\frac{1}{r_2^1}+\frac{\Delta_2 F}{g},$$

$$\Delta_2\ln g\cdot d_1p_1d_2p_2=d_2\frac{d_1p_1}{r_1^2}+d_1\frac{d_2p_2}{r_2^1}+d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_2p_2\right)=d_1\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_2p_2\right),$$

$$d_2\frac{d_1p_1}{r_2^1}-d_1\frac{d_2p_2}{r_1^2}=\left\{\frac{d_2\frac{1}{r_2^1}}{d_2p_2}-\frac{d_1\frac{1}{r_1^2}}{d_1p_1}\right\}d_1p_1d_2p_2=-d_2\left(\frac{\Delta_2 F}{g}d_1p_1\right),$$

откуда

$$\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{2g}{r_1^2}-\frac{\Delta_2 F}{g}\right)=$$

$$=-\sin^2\theta\cdot\left(\frac{d_2}{d_2p_2}\frac{1}{r_2^1}-\frac{d_1}{d_1p_1}\frac{1}{r_1^2}\right)-\cos\theta\sin\theta\cdot\Delta_2\ln g. \quad (39'')$$

Условие (39″) будет удовлетворено независимо от θ в двух случаях:

1) $$\frac{1}{r_1^2}=0,\quad \frac{d_2}{d_2p_2}\frac{1}{r_2^1}=0,\quad \Delta_2\ln g=0;$$

линии $F=\text{const}$. будут круги;

2) $$\frac{2g}{r_1^2}-\frac{\Delta_2 F}{g}=0,\quad \frac{d_2\frac{1}{r_1^2}}{d_2p_2}-\frac{d_1\frac{1}{r_2^1}}{d_1p_1}=0,\quad \Delta_2\ln g=0;$$

линии $F=\text{const}$. и линии, по которым направлены ускорения, дают квадратную сетку; F и g определяются из условия

$$\Delta_2\ln g=0.$$

Скорость дается уравнением

$$\frac{2}{r_1^2}=\frac{\Delta_2 F}{g^2},$$

которое удовлетворяет уравнению (39'), потому что

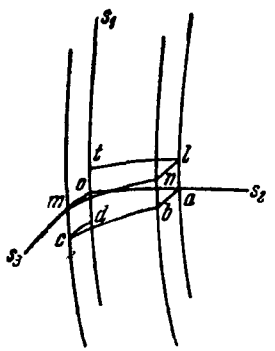
$$0 = \frac{d_1}{d_1 p_1}\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_2 p_2\right) = \left(g \frac{d_1}{d_1 p_1} \frac{\Delta_2 F}{g^2} + \frac{\Delta_2 F}{g^2} \Delta_2 F\right) d_2 p_2,$$

$$\frac{d_1}{d_1 p_1} \ln\left(\frac{\Delta_2 F}{g^2}\right) = -\frac{\Delta_2 F}{g},$$

$$0 = \frac{d_2}{d_2 p_2}\left(\frac{\Delta_2 F}{g} d_1 p_1\right) = g \frac{d_2}{d_2 p_2} \frac{\Delta_2 F}{g^2} d_1 p_1, \quad \frac{d_2}{d_2 p_2} \ln \frac{\Delta_2 F}{g^2} = 0.$$

Далее, зная g и v_1, определяем θ из уравнений (39).

§ 32. Обращаемся к перманентному движению несжимаемой жидкости в пространстве, предполагая, что существует потенциал ускорений[1]). Проведя через данное семейство линий s_1 два семейства поверхностей тока (фиг. 10) и покрыв их ортогональными линиями s_2 и s_3, предположим, что в точке o три линии s_1, s_2, s_3 пересекаются под прямыми углами.



Фиг. 10.

Будем называть через g_1, g_2, g_3, p, q, r проекции ускорения на s_1, s_2, s_3 и вращения частицы по линии s_1 и по перпендикулярам к поверхностям тока $s_1 s_3$, $s_2 s_1$. На основании формул (37) и (27) можем для всякой точки написать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= -\frac{v_1^2}{k_1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}, \quad g_3 = \frac{v_1^3}{R_1^3}, \\ -\frac{v_1}{k_1} &= \frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}, \quad p = \frac{2\pi}{H} v_1, \quad 2q = -\frac{v_1}{R_1^3} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}, \\ 2r &= \frac{v_1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Первые формулы показывают, что течение, скорости которого слагаются геометрически из сжатия и кривизны

[1]) Мы будем называть свойства этого движения вообще свойствами перманентного движения несжимаемой жидкости.

линий тока (причем первое откладывается по касательной s_1, а вторая по радиусу кривизны линии s_1), должно иметь ортогональную поверхность.

Обозначая через Ω_1, Ω_2, Ω_3 вращения такого течения по линиям s_1 и по нормалям к поверхностям s_1s_3, s_1s_2, получим условие, которое в точке o выражается таким образом:

$$-\frac{1}{k_1}\Omega_1+\frac{1}{R_1^2}\Omega_2+\frac{1}{R_1^3}\Omega_3=0. \tag{41}$$

Для определения Ω_1 пользуемся формулой (29) и фигурой 10:

$$2\Omega f=\int\frac{d\sigma}{R_1^\sigma}-\frac{1}{k_1}\,od.$$

Интеграл распространяется на разомкнутую кривую $oabcd$, f есть площадь сечения струйки, а $\frac{1}{R_1^\sigma}$ проекция кривизны траектории на касательную к элементу $d\sigma$.

Полагая по (26)

$$\frac{1}{R_1^2}=-\frac{\delta\ln\delta_1 s_1}{\delta\sigma}$$

и произведя интегрирование, получаем:

$$2\Omega_1 f=\ln(ot)-\ln(od)-\frac{1}{k_1}\,od.$$

Подставляем сюда величины, указанные в § 17:

$$od=\frac{4\pi}{H}f,\quad \frac{\delta_1\ln f}{\delta_1 s_1}=\frac{1}{k_1};$$

это дает:

$$2\Omega_1=\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{2\pi}{H}. \tag{41'}$$

Называя дробь $\frac{2\pi}{H}$ геометрическим вращением струйки, получаем теорему: *вращение течения, слагающегося из сжатия и кривизны струек, проложенное на ось струйки, равно производной геометрического вращения струйки по ее оси.*

Вращения Ω_2 и Ω_3 могут быть также определены по формуле (29), которая дает:

$$2\Omega_3\delta_1 s_1\delta_2 s_2 = \delta_1\frac{\delta_2 s_2}{R_1^2} + \delta_2\frac{\delta_1 s_1}{k_1},$$

$$2\Omega_2\delta_1 s_1\delta_3 s_3 = -\delta_1\frac{\delta_3 s_3}{R_1^3} - \delta_3\frac{\delta_1 s_1}{k_1};$$

$$2\Omega_3 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^2 R_3^1},$$

$$2\Omega_2 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} - \frac{1}{R_1^3 R_2^1}. \qquad (41'')$$

В случае существования поверхности $\rho = \text{const.}$, ортогональной к линиям токов, эти формулы упрощаются. Называя через ρ функцию, постоянную на поверхности, через h_1 и $\Delta_2\rho$ ее первый и второй параметры, имеем:

$$\delta_1(fh_1) = \delta_1 s_1 f\Delta_2\rho, \quad \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{\delta_1 \ln h_1}{\delta_1 s_1}\right) = \frac{\Delta_2\rho}{h_1^2},$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^2} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_1^2 R_3^1}\right) = \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{\Delta_2\rho}{h_1^2}.$$

Отсюда

$$\frac{2\Omega_3}{h_1} = \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{\Delta_2\rho}{h_1^2}, \quad \frac{2\Omega_2}{h_1} = -\frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{\Delta_2\rho}{h_1^2}. \qquad (41''')$$

Обращаемся к другим условиям, вытекающим из предположения, что g_1, g_2, g_3 суть частные производные некоторой функции F. Первые формулы (40) могут быть на основании вторых формул представлены таким образом:

$$\delta_1 F = \delta_1\frac{v_1^2}{2}, \quad \delta_2 F = \delta_2\frac{v_1^2}{2} + 2rv_1\delta_2 s_2, \quad \delta_3 F = \delta_3\frac{v_1^2}{2} - 2qv_1\delta_3 s_3. \qquad (42)$$

Отсюда сейчас же получаем соотношения:

$$\delta_1(rv_1\delta_2 s_2) = 0, \quad \delta_1(qv_1\delta_3 s_3) = 0, \qquad (42')$$

которые обращаются в формулы, найденные Клебшем, когда назовем через h_2 и h_3 дифференциальные параметры по-

верхностей s_1s_3, s_1s_2 и заметим, что вдоль линии s_1

$$\frac{v_1\delta_2 s_2}{h_3} = \text{const.}, \quad \frac{v_1\delta_3 s_3}{h_2} = \text{const.}$$

Мы получаем:

$$\delta_1 r h_3 = 0, \quad \delta_1 q h_2 = 0. \tag{42''}$$

Для всякого семейства поверхностей токов несжимаемого перманентного течения вращение частицы около нормали к поверхности, умноженное на параметр поверхности, не изменяется по линии тока.

Переходим теперь к определению изменений скорости v_1. Умножаем в формуле (40) $2q$ на h_2, $2r$ на h_3 и берем от произведений δ_1, обращая внимание на формулы (42''):

$$0 = \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\left(-\frac{v_1}{R_1^3}h_2 + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}h_2\right) = \frac{v_1 h_2}{R_1^3}\frac{1}{k_1} - v_1 h_2 \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^3} -$$

$$- h_2 v_1 \frac{1}{R_2^1}\frac{1}{R_1^3} + h_2 \frac{\delta_1\delta_3 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} h_2 \frac{1}{R_2^1} + \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3} h_2 \frac{1}{R_3^1};$$

$$0 = \frac{v_1}{R_1^3}\frac{1}{k_1} - v_1 \frac{\delta_1}{\delta s_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{v_1}{R_2^1 R_1^3} - \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} + \frac{\delta_1\delta_3 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3}.$$

Исключаем $\delta_1\delta_3 v_1$, взяв δ_3 от четвертой формулы (40):

$$\frac{\delta_3\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1 \delta_3 s_3} = \frac{v_1}{k_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{\delta_3 v_1}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} - v_1 \frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1}.$$

Подставляя, получаем:

$$\frac{2}{k_1}\frac{\delta_3 \ln v_1}{\delta_3 s_3} = -\frac{\delta_3}{\delta_3 s_3}\frac{1}{k_1} - \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^1 R_1^3} + \frac{2}{R_1^3}\frac{1}{k_1}.$$

Подставляя сюда величину Ω_2 из формулы (41''), находим формулу для изменения $\delta_3 \ln v_1$. Подобным же образом найдем $\delta_2 \ln v_1$, так что будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta_1 \ln v_1}{\delta_1 s_1} &= -\frac{1}{k_1}, \\ \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2} &= -\frac{\Omega_3}{\frac{1}{k_1}} + \frac{1}{R_1^2}, \\ \frac{\delta_3 \ln v_1}{\delta_3 s_3} &= \frac{\Omega_3}{\frac{1}{k_1}} + \frac{1}{R_1^3}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Пользуясь формулами (43), можно сделать ряд интересных заключений. Умножаем вторую формулу на $\frac{1}{R_1^3}$, третью на $\frac{1}{R_1^2}$ и вычитаем первое произведение из второго. Это дает для точки o:

$$\frac{\delta_3 \ln v_1}{\delta_3 s_3} \cdot \frac{1}{R_1^2} - \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2} \cdot \frac{1}{R_1^3} = \frac{\frac{\Omega_2}{R_1^2} + \frac{\Omega_3}{R_1^3}}{\frac{1}{k_1}} = \Omega_1.$$

Мы получаем теорему: *производная от* $\ln v_1$ *по элементу линии, перпендикулярной к линии тока и к радиусу кривизны, равна производной геометрического вращения по элементу линии тока, разделенной на кривизну этой линии.*

Подставляя производные v_1 из двух последних формул (43) в две последние формулы (40), получаем:

$$2q = \frac{v_1 \Omega_2}{\frac{1}{k_1}}, \quad 2r = \frac{v_1 \Omega_3}{\frac{1}{k_1}}. \tag{43'}$$

Эти уравнения дают теорему: *проекция вращения частицы на плоскость, перпендикулярную к линии тока, геометрически равна проекции на ту же плоскость вращения течения, слагающегося из кривизн и сжатий струек, когда это вращение уменьшено в* $\frac{1}{v_1 k_1}$ *раз.* Кроме того, из этих уравнений вместе с пятым уравнением (40) следует, что *по линиям токов, перпендикулярным к изотермическим поверхностям, возможно только невращаемое перманентное течение несжимаемой жидкости.*

Когда даны линии токов перманентного течения, то соответствующая им скорость вполне определяется по формуле (43); но для того чтобы подобное определение было возможно, линии токов должны удовлетворять некоторому условию; это условие состоит в том, что *течение, имеющее по линиям* s_1, s_2, s_3 *скорости*

$$-\frac{1}{k_1}, \quad -\frac{\Omega_2}{\frac{1}{k_1}} + \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{\Omega_3}{\frac{1}{k_1}} + \frac{1}{R_1^3},$$

должно быть без вращения.

Выражая по формуле (29), что вращения упомянутого течения по нормалям к поверхностям s_1s_2, s_1s_3 суть нули, получаем:

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\ln\frac{\Omega_3}{\frac{1}{k_1}}-\frac{2}{k_1}-\frac{1}{R_2^1}=0,$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\ln\frac{\Omega_2}{\frac{1}{k_1}}-\frac{2}{k_1}-\frac{1}{R_3^1}=0. \qquad (43'')$$

Вычитая эти уравнения, можно на основании формулы (26) написать равенство:

$$\delta_1\ln\frac{\Omega_3\delta_2 s_2}{\Omega_2\delta_3 s_3}=0,$$

которое показывает, что бесконечно малая прямая

$$\sqrt{(\delta_3 s_3)^2+(\delta_2 s_2)^2+2\delta_3 s_3\delta_2 s_2\cos(\widehat{s_3,s_2})},$$

направленная по вращению

$$\frac{1}{\sin(\widehat{s_2,s_3})}\sqrt{(\Omega_2)^2+(\Omega_3)^2+2\Omega_2\Omega_3\cos(\widehat{s_3,s_2})},$$

передвигаясь по поверхности тока, все время остается направленной по этому вращению. Это замечание вместе с формулой (43′) дает теорему: *в перманентном движении несжимаемой жидкости линии вихрей лежат в поверхностях тока, в которых также лежат и линии вихрей течения, слагающегося из сжатия и кривизны струек.* Понятно, что первая часть этой теоремы непосредственно следует из теоремы Гельмгольца.

Рассмотрим теперь результаты, имеющие место при существовании ортогональных поверхностей. Формула (41′) дает нам $\Omega=0$. Заменяя эту величину из формул (41), (43′), (44‴), (43) и (41″), получаем теоремы.

При существовании ортогональных поверхностей вращения течения, слагающегося из кривизн и сжатий струек, направлены по линиям вихря и перпендикулярны к линиям токов и их радиусам кривизны, вследствие чего поверхность тока,

проходящая через линии вихрей, имеет линии токов геодезическими кривыми.

При существовании ортогональных поверхностей величины

$$h/_1, \quad v_1, \quad \frac{\Delta_2 v}{h_1^2} \text{ и } \frac{1}{k_1}$$

не изменяются при передвижении по линиям, ортогональным к линиям тока и радиусам кривизны.

Если бы мы направили поверхность тока $s_1 s_2$ по поверхности вихрей перманентного течения, имеющего ортогональные поверхности, то нашли бы по формуле (26):

$$\delta_2 \delta_1 s_1 = 0.$$

Это показывает, что *на поверхности вихрей, совпадающей с поверхностью тока, отрезки линий тока между двумя ортогональными кривыми между собой равны.* Так как вдоль всех кривых s_2 скорость v_1 будет постоянна, то получаем еще такой результат: *линии токов и ортогональные кривые на поверхности вихря, совпадающей с поверхностью тока, суть линии деформации элемента площади на этой поверхности.*

§ 33. Мы сделаем еще одно небольшое исследование несжимаемого течения, при котором перманентные ускорения, рассматриваемые как скорости, не дают изменения объема, и ограничимся при этом только разбором плоского течения. Относя движение к системе криволинейных координат s_1, s_2, соответствующих линиям токов и ортогональным линиям, выражаем слагаемые перманентного ускорения по этим линиям помощью формул (35):

$$g_1 = \frac{v_1^2}{R_2^1}, \quad g_2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}$$

Так как g_1 и g_2, рассматриваемые как скорости, не дают изменения объема, то

$$\delta_1 \frac{v_1^2 \delta_{s\,2}}{R_2^1} + \delta_2 \frac{v_1^2 \delta_1 s_1}{R_1^2} = 0.$$

Это равенство упрощается помощью формулы (32′):

$$\frac{1}{R_2^1}\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}+\frac{1}{R_1^2}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}=0. \tag{44}$$

Припоминая, что во всяком несжимаемом плоском течении скорость сохраняет свое направление на линиях, направленных по перманентному ускорению, получаем из формулы (44) такую теорему: *если в данном плоском несжимаемом течении перманентные ускорения не имеют сжатия, то скорость течения сохраняет по направлению этих ускорений свою величину и направление.*

На основании последней из формул (27) и формулы (44) получаем производные от скорости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta_1 \ln v_1}{\delta_1 s_1}&=\frac{1}{R_2^1},\\ \frac{\delta_2 \ln v_1}{\delta_2 s_2}&=-\frac{\left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}{\frac{1}{R_1^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{44′}$$

Интегрирование этих уравнений дает v_2; но чтобы интеграция была возможна, необходимо выполнить условие

$$\delta_2\delta_1 \ln v_1=\delta_1\delta_2 \ln v_1,$$

которое налагает стеснение на сетку линий токов и ортогональных кривых. Подставляя в это условие $\delta_1 \ln v_1$ и $\delta_2 \ln v_1$ из формул (44′), получаем:

$$\delta_2\frac{\delta_1 s_1}{R_2^1}+\delta_1\left[\delta_2 s_2\frac{\left(\frac{1}{R_2^1}\right)^2}{\frac{1}{R_1^2}}\right]=0,$$

что по формуле (32′) можно написать так:

$$\delta_1\left[\delta_2 s_2\frac{1}{R_2^1}\left(\frac{\frac{1}{R_2^1}}{\frac{1}{R_1^2}}-1\right)\right]=0. \tag{44″}$$

Это условие показывает, что *течение, совершающееся со скоростью*

$$\frac{1}{R_2^1}\left(\frac{1}{\dfrac{R_2^1}{\dfrac{1}{R_1^2}}}-1\right)$$

по линиям s_1, *должно быть несжимаемо.*

Так как по теореме Липшица

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=0,$$

а по условию несжимаемости

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=0,$$

то

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.$$

Это показывает, что в рассматриваемом движении *две системы не изменяющих направления линий слиаются в одну систему линий, направленных по линиям нулевого удлинения и делящих потому пополам углы между осями деформации.* Формула (14′) дает нам:

$$E_1=-E_2=\omega.$$

Если назовем через u_1 и u_2 скорости нашего течения по касательным к линиям деформации q_1 и q_2, то по формулам (25″) можем написать:

$$\frac{d_1u_1}{d_1q_1}=\frac{u_2}{\rho_1^2}+E_1,\qquad \frac{d_2u_1}{d_2q_2}=-\frac{u_2}{\rho_2^1}-E_1,$$
$$\frac{d_1u_2}{d_1q_1}=-\frac{u_1}{\rho_1^2}+E_1,\qquad \frac{d_2u_2}{d_2q_2}=\frac{u_1}{\rho_2^1}-E_1.$$

Исключая u_1 из двух первых формул помощью условия

$$d_2d_1u_1=d_1d_2u_1$$

и пользуясь двумя вторыми формулами, получаем:

$$\frac{1}{\rho_1^2}\frac{d_2u_2}{d_2q_2}+\frac{1}{\rho_2^1}\frac{d_2u_2}{d_1q_1}+\frac{d_2E_1}{d_2q_2}+\frac{d_1E_1}{d_1q_1}-\frac{E_1}{\rho_1^2}-\frac{E_1}{\rho_2^1}=0,$$

$$\frac{2}{\rho_1^2}=\frac{d_1\ln E_1}{d_1q_1}+\frac{d_2\ln E_1}{d_2q_2}.$$

Симметрия найденной формулы показывает, что *кривизны обеих линий деформации в каждой точке между собою равны.*

Положим теперь, что функция полного ускорения сохраняет одно и то же значение во всех точках линии, ограничивающей данную жидкую площадь, во все время движения, и постараемся определить движение этой площади, предполагая, что начальное ускорение ее обладает вышеизложенными свойствами. По способу Преображенского найдем, что ускорение течения равно и противоположно перманентному. Таким образом, по прошествии бесконечно малого времени dt мы будем иметь течение, скорости v_1', v_2' которого по кривым s_1 и s_2 будут:

$$v_1' = v_1 - \frac{v_1^2}{R_2^1}dt, \quad v_2' = -\frac{v_1^2}{R_1^2}dt. \tag{45}$$

Это течение несжимаемо. Определяем его перманентные ускорения g_1', g_2' по формулам (35), (25″), (44) и (44″):

$$g_1' = g_1 - v_1\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{v_1^2}{R_2^1} - \frac{v_1^2}{(R_1^2)^2}\right)dt = g_1 + \left(v_1\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{v_1^2}{R_1^2} - \frac{v_1^2}{(R_2^1)^2}\right)dt =$$

$$= g_1 + \left(v_1\frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2}\frac{\delta_2 v_1}{\delta_2 s_2}\right)dt;$$

$$g_2' = g_2 - v_1\left(\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2 R_2^1}\right)dt = g_2 - \left(v_1\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{v_1^2}{R_1^2}\frac{\delta_1 v_1}{\delta_1 s_1}\right)dt;$$

$$g_1' = g_1 + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2}\frac{v_1^3}{R_1^2}dt; \qquad g_2' = g_2 - \frac{\delta_1}{\delta_1 s_1}\frac{v_1^3}{R_1^2}dt. \tag{45'}$$

Формулы (45′) показывают, что *перманентные ускорения нового течения будут тоже несжимаемы.* Отсюда следует, что и для второго момента полное ускорение будет равно нулю, и т. д. до бесконечности. Все точки нашей жидкой площади будут двигаться прямолинейно и равномерно.

В своей статье «О свободном движении свободной капельной жидкости»[1]) Ф. А. Слудский разбирает, между прочим,

[1]) Математический сборник, т. VI, 1873.

вопрос о прямолинейном и равномерном движении жидких частиц в предположении, что они друг на друга не давят. Условия, найденные им для начального течения, в применении к жидкой площади будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Интегрируя эти уравнения, находим следующие общие интегралы:

$$v=\varphi(u), \quad x\varphi'(u)=y-\psi(u),$$

в которых φ и ψ — произвольные функции. Первый интеграл показывает, что скорость сохраняет свою величину и направление на одной и той же кривой, что согласно со сказанным выше.

СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛОЩАДИ ПО ИНЕРЦИИ [1]).

Один из возможных случаев движения несжимаемой жидкой площади, на которую не действуют никакие силы, представляет нам движение частиц жидкости по инерции при давлении, равном нулю. Мы имеем в виду определить условия, стесняющие начальные скорости такого движения.

Воображаем семейство линий (s), касательные которых направлены по начальным скоростям жидкости, и семейство линий (s'), построенное так, что на каждой линии s' все начальные скорости параллельны. Обозначаем: через a и b косинусы углов, которые касательные к линиям (s) образуют с осями координат, через ρ — радиусы кривизны линий (s) и через d—дифференциалы, взятые по их направлениям; для линий (s') примем соответственно обозначения: a', b', ρ', d'.

Если назовем через x и y начальные координаты точки, имеющей скорость v, а через ξ и η — ее координаты по прошествии времени t, то найдем:

$$\xi = x + avt, \quad \eta = y + bvt. \tag{1}$$

Подставляем величины (1) в условие неизменяемости элемента площади, которое помощью криволинейных координат (s) и (s') может быть представлено формулой:

$$\frac{d\xi}{ds}\frac{d'\eta}{d's'} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d'\xi}{d's'} = \frac{dx}{ds}\frac{d'y}{d's'} - \frac{dy}{ds}\frac{d'x}{d's'}. \tag{2}$$

---

[1]) Доложено Московскому математическому обществу 30. IX 1876 и впервые напечатано в Математическом сборнике, т. VIII, вып. 3.

На основании равенств

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{d'x}{d's'} = a', \quad \frac{d'y}{d's'} = b', \quad \frac{d'a}{d's'} = 0, \quad \frac{d'b}{d's'} = 0$$

получаем после подстановки уравнение

$$\left[b'\frac{da}{ds} - a'\frac{db}{ds} + (ab' - ba')\frac{d\ln v}{ds}\right]t + \left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right)\frac{d'v}{d's'}t^2 = 0. \quad (3)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях t и пользуясь равенствами

$$\frac{da}{ds} = -\frac{b}{\rho}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{a}{\rho},$$

найдем для начальных скоростей условия:

$$\frac{d\ln v}{ds} = \frac{a'\frac{db}{ds} - b'\frac{da}{ds}}{ab' - ba'} = \frac{1}{\rho}\frac{aa' + bb'}{ab' - ba'}, \quad (4)$$

$$\left(a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds}\right)\frac{d'v}{d's'} = \frac{1}{\rho}\frac{d'v}{d's'} = 0. \quad (5)$$

Условие (5) удовлетворяется двумя положениями:

$$\rho = \infty, \quad \frac{d'v}{d's'} = 0,$$

из которых первое требует, чтобы линии (s) были прямые, а второе — чтобы скорость v не изменялась на каждой из кривых (s'). Так как первое положение на основании уравнения (4) дает:

$$\frac{dv}{ds} = 0$$

и представляет потому движение точек жидкости по параллельным прямым линиям с произвольными скоростями на каждой прямой [1]), то мы займемся только вторым положением. Мы имеем:

$$dd'v = 0,$$

а так как

$$dd'v = d'dv,$$

---

1) При этом за систему линий (s') можно принять любую систему линий.

то из уравнения (4) получаем:

$$d'\left(\frac{b'da - a'db}{ab' - ba'}\right) = 0.$$

Производя дифференцирование и замечая, что

$$d'da = dd'a = 0, \quad d'db = dd'b = 0,$$

найдем уравнение:

$$(a\,db - b\,da)(a'd'b' - b'd'a') = 0. \tag{6}$$

Так как первая скобка может равняться нулю только при $\rho = \infty$, то вторая скобка должна быть равна нулю. Пользуясь формулами

$$\frac{d'a'}{d's'} = -\frac{b'}{\rho'}, \quad \frac{d'b'}{d's'} = \frac{a'}{\rho'},$$

находим условие:

$$\frac{1}{\rho'} = 0. \tag{7}$$

Оно показывает, что линии (s') должны быть прямые.

Теперь вся задача решена. Проведя на плоскости произвольное семейство прямых линий (s') и одну из линий (s), найдем все остальные линии семейства (s), так как все они будут пересекать каждую прямую (s') под одинаковыми углами; построив же линии (s), мы найдем v, интегрируя уравнение (4).

Уясним сказанное примером. Предположив, что прямые (s') пересекаются в одной точке и что одна из линий (s) есть эллипс, имеющий эту точку центром, найдем, что все семейство (s) представит подобные эллипсы. Пусть

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = \lambda^2 \tag{8}$$

будет уравнение этого семейства, где e — эксцентриситет, а λ — малая ось, принятая за параметр семейства. Назовем через φ угол, образуемый центральным радиусом-вектором одного из эллипсов с осью Ox, и определим помощью этого

угла величины a', b', a, b, ρ, ds:

$$a' = \cos\varphi, \quad b' = \sin\varphi, \quad a = -\frac{\sin\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$b = \frac{(1-e^2)\cos\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi_1]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\rho = \frac{\lambda\,[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi_1]^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)\,[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds = \frac{\lambda\,[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}{[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi.$$

Подставляя все эти величины в формулу (4), получаем.

$$d\ln v = \frac{(1-e^2)\,e^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]\,[(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}.$$

Чтобы удобнее взять интеграл, заменим $(1-e^2)$ его тождественной величиной:

$$(1-e^2) = [(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi](2-e^2) - \\ -[(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi].$$

Это дает дифференциальное уравнение

$$d\ln v = \frac{(2-e^2)\,e^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi},$$

интеграл которого выразится формулой

$$v = k\left\{\frac{(1-e^2)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{(1-e^2)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

Эта формула, в которой k есть произвольное постоянное, позволяет определить v на всякой прямой (s') по углу φ.

Если бы мы хотели определить, на какую линию перейдут во время t точки, лежащие в начале времени на одном из эллипсов (8), то должны бы были выразить по формулам

(1) x и y через ξ и η. Это даст, на основании найденных значений a, b и v, следующие величины:

$$x = \frac{\lambda^2\xi + kt\lambda\eta}{\lambda^2 + k^2t^2(1-e^2)}, \qquad y = \frac{\lambda^2\eta - kt\lambda(1-e^2)\xi}{\lambda^2 + k^2t^2(1-e^2)}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (8), находим уравнение:

$$\xi^2(1-e^2) + \eta^2 = \lambda^2 + k^2t^2(1-e^2), \tag{10}$$

которое показывает, что по прошествии времени t точки, лежащие на одном из эллипсов (8), переходят на эллипс того же семейства, квадрат малой оси которого увеличен на $k^2t^2(1-e^2)$.

Воображая часть жидкости, заключенную между двумя эллипсами семейства (8), которым соответствуют параметры λ, λ_1, и называя через λ_2, λ_3 параметры эллипсов, ограничивающих эту часть жидкости по прошествии времени t, найдем:

$$\lambda^2 - \lambda_1^2 = \lambda_2^2 - \lambda_3^2.$$

Это уравнение, умноженное на $\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$, покажет нам, что рассматриваемая часть жидкости не изменила площади.

ОБ УДАРЕ ДВУХ ШАРОВ, ИЗ КОТОРЫХ ОДИН ПЛАВАЕТ В ЖИДКОСТИ [1])

Пусть шар массы m, падая в вертикальном направлении со скоростью v, наносит прямой удар шару массы m', плавающему в жидкости. Плотность шара m' возьмем равной половине плотности жидкости ρ; радиус его назовем через r_1 и предположим, что центр его совпадает с центром полусферического сосуда радиуса r_2, в который доверху налита жидкость.

Чтобы определить скорости u и u' шаров после удара, покажем, что потерянное количество движения уравновешивается силами удара:

$$Q = \int_0^\tau P\,dt, \quad q = \int_0^\tau p\,dt,$$

где P и p — функции времени, выражающие взаимное давление шаров и давление внутри жидкости в продолжение весьма малого времени удара τ. Получим:

$$Q = m(v-u) = m'u' + \int q \sin\theta\, ds, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

---

[1]) Сообщено 17 ноября 1882 г. в физико-математической комиссии Отделения физических наук О. Л. Е. и впервые опубликовано в Записках Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, т. V, 1884, стр. 43—48.

Интеграл в формуле (1) распространяется на погруженную поверхность шара m', причем ds есть элемент площади этой поверхности, а θ — угол, который радиус, проведенный к этому элементу, образует с горизонтальной плоскостью. В формулах (2) φ есть потенциальная функция скоростей точек жидкости после удара. Эта функция должна для всей жидкой массы удовлетворять условию

$$\Delta_2\varphi = 0,$$

которое вследствие полной симметрии относительно вертикальной оси может быть с помощью сферических координат написано таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cos\theta \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

Кроме того, мы должны иметь на погруженной поверхности шара

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = u' \sin\theta, \tag{4}$$

на стенках сосуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \tag{5}$$

и на свободной поверхности жидкости

$$\varphi = 0. \tag{6}$$

Последнее уравнение пишем потому, что на основании формул (2) можно принять

$$q = -p\varphi, \tag{7}$$

а на свободной поверхности $q = 0$.

Для того чтобы удовлетворить всем этим условиям, возьмем

$$\varphi = R \sin\theta,$$

где R есть функция одного радиуса-вектора. Подставляя эту величину в уравнение (3), найдем для определения R уравнение

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - 2R = 0,$$

интеграл которого будет

$$R = cr + \frac{c_1}{r^2}.$$

Вследствие этого

$$\varphi = \left(cr + \frac{c_1}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Эта функция обращается в 0 при $\theta = 0$, поэтому уравнение (6) удовлетворено. Чтобы удовлетворить уравнения (4) и (5), выбираем произвольные постоянные c и c_1 так, чтобы

$$c - \frac{2c_1}{r_1^3} = u', \quad c - \frac{2c_1}{r_2^3} = 0.$$

Получаем, что

$$c_1 = -u'\frac{r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)}, \quad c = -u'\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Таким образом, находим:

$$\varphi = -u'\sin\theta\,\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(r + \frac{r_2^3}{2r^2}\right). \tag{8}$$

Пользуясь формулами (7) и (8), определяем интеграл, входящий в формулу (1):

$$\int q\sin\theta\,ds = \pi\rho r_1^3\frac{2r_1^3 + r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}u'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi\rho r_1^3}{3}\frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}u'.$$

Полагая для сокращения

$$\mu = \frac{\pi\rho r_1^3}{3}\frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}, \tag{9}$$

напишем уравнение (1) в виде:

$$m(v - u) = (m' + \mu)u'. \tag{10}$$

Если шары не упруги, то к уравнению (10) надо прибавить условие $u = u'$, что дает:

$$u = u' = \frac{mv}{m + m' + \mu}. \tag{11}$$

Если же шары вполне упруги, то надо написать, что первоначальная живая сила шара m равна сумме живых сил

обоих шаров и жидкости после удара:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{m'u'^2}{2}+\frac{\rho}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}d\sigma, \qquad (12)$$

где $d\sigma$ — элемент объема жидкой массы. Чтобы определить входящий сюда интеграл, напишем по теореме Грина, что

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}d\sigma=-\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds.$$

Интеграл во второй части распространяется на все поверхности, ограничивающие жидкую массу; но так так на свободной поверхности $\varphi=0$, а на стенках сосуда $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, то его надо распространить только на погруженную поверхность шара m'. Отсюда по формулам (4) и (7)

$$\rho\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}d\sigma=u'\int q\sin\theta\,ds=u'^2\mu.$$

На основании этого уравнения формуле (12) можно дать следующий вид:

$$m(v^2-u^2)=(m'+\mu)u'^2.$$

Делим это уравнение на уравнение (10); находим:

$$v+u=u'. \qquad (13)$$

Решая уравнения (10) и (13), получим для упругих шаров:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{v(m-m'-\mu)}{m+m'+\mu},\\ u'&=\frac{2mv}{m+m'+\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Формулы (11) и (14) отличаются от обыкновенных формул удара шаров только тем, что в них m' заменено на $m'+\mu$. Таким образом, погружая один из шаров в жидкость, мы как бы увеличиваем его массу. Формула (9) показывает, что при $r_2=\infty$ масса μ равна половине массы вытесненной жидкости.

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСТИ, НАПОЛНЕННЫЕ ОДНОРОДНОЮ КАПЕЛЬНОЮ ЖИДКОСТЬЮ [1])

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рядом с задачею о движении твердого тела в беспредельной жидкой массе возникла другая задача — о движении твердого тела, заключающего в себе жидкие массы. Насколько нам известно, Стокс первый обратил внимание на эту интересную задачу. В своих мемуарах «On some cases of fluid motion» [2]) и «On the critical values of sums of periodic series» [3]), читанных в 1842 и 1847 гг., он рассмотрел два случая полостей, из которых одна имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а другая — форму цилиндра с основанием по круговому сектору, и высказал весьма важную мысль, что движение твердого тела не изменится, если заменим в нем жидкую массу некоторым *эквивалентным твердым телом* (equivalent solid); впрочем, справедливость такой замены он доказывает только для случая малых скоростей.

В 1860 г. Гельмгольц в своем сочинении «Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten» [4]) исследовал колебательное дви-

---

[1]) Сообщено Московскому математическому обществу в сентябре и октябре 1885 г. и впервые опубликовано в Журнале Русского физико-химического общества, ч. физическая, 1885, т. XVII, отд. I, вып. 6, стр. 81—113; вып. 7, стр. 145—199; вып. 8, стр. 231—280.

[2]) Stokes, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. VIII, стр. 105.

[3]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. VIII, стр. 533.

[4]) Helmholtz, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien, т. XL, стр. 607.

жение твердого тела под влиянием трения жидкости, наполняющей его сферическую полость, а в 1873 г. эта же задача с большею подробностью была разобрана Любеком в его сочинении «Ueber den Einfluss, welchen auf die Bewegung eines Pendels mit einem kugelförmigen Hohlraume eine in ihm enthaltene reibende Flüssigkeit ausübt»[1]). В своем прекрасном курсе по гидродинамике, вышедшем в 1873 г., Ламб при изложении задачи о движении твердого тела в беспредельной жидкости касается также и задачи о движении тела, заключающего в себе жидкие массы, и разбирает как пример случай эллипсоидальной полости [2]).

Наконец, в 1883 г. появляется сочинение Неймана [3]), в котором задача о движении тел в жидкости получает самую общую постановку, а вместе с нею и задача о движении тела, заключающего в себе жидкие массы, которую он в отличие от первой задачи называет «innere Probleme». Нейман рассматривает односвязные и многосвязные полости и показывает, что в последнем случае начальное движение, сообщенное жидкой массе при покоящемся твердом теле, оказывает на движение тела жироскопический эффект.

Вот все известные нам сочинения о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы. Одни из них относятся к частным примерам, другие же останавливаются на интересующей нас задаче только мимоходом — при исследовании более важной задачи о движении тел в беспредельной жидкой массе. Таким образом, не существует сочинения, из которого бы читатель получил полное представление о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы; а между тем эта задача значительно проще задачи о движении тела в беспредельной жидкой массе и может быть изложена с большею полнотою, нежели последняя. Вследствие этого мы считаем не бесполезным

[1]) Lübeck, Borchardts Journal, т. 77, стр. 1.

[2]) Lamb, A Treatise on the Motion of Fluids, стр. 112.

[3]) Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig,

наше сочинение, в котором, вместе с некоторыми новыми общими теоремами, читатель найдет описание движений, соответствующих многим формам полостей, до сих пор не исследованных. Это сочинение состоит из трех глав.

В первой главе излагается общая теория движения тела и заключенных в нем жидких масс, пренебрегая трением и предполагая, что скорости жидкостей имеют потенциальные функции. При этом оказывается, что внутреннее движение жидкости вполне определяется по вращению тела и не зависит от его поступательного движения; само же движение тела совершается так, как будто бы жидкие массы были заменены эквивалентными твердыми телами. Массы эквивалентных тел равны массам жидкостей; их центры тяжестей совпадают с центрами тяжестей жидких масс; что же касается до их моментов инерции, то мы доказываем, что момент инерции эквивалентного тела относительно всякой оси, проходящей через его центр тяжести, менее момента инерции соответственной жидкой массы относительно той же оси. Если тело имеет многосвязные полости и находящимся в них жидким массам сообщено начальное движение, то, заменяя эти массы эквивалентными телами, мы должны еще присоединить к телу некоторый жироскоп, направление оси вращения и момент начального количества движения которого вполне определяются по главному моменту количеств движения жидких масс при покоящемся теле. Здесь в нашем изложении делается невозможным то сомнение, которое, по словам Неймана, возникало при его методе исследования [1]). Оканчивая первую главу, мы излагаем в сокращенной форме также и метод Неймана, хотя наше исследование ведется независимо от него.

Вторая глава заключает в себе определение внутреннего движения жидкости и эллипсоидов инерции эквивалентных тел для различных форм полостей. Мы начинаем ее подробным исследованием случая эллиптической полости и разъясняем

1) Hydrodynamische Untersuchungen, стр. 236.

внутреннее движение, совершающееся в ней с помощью особого вида движения, которое мы называем *эллиптическим вращением*. После этого мы разбираем задачу о цилиндрических полостях. Для исследования движения жидкостей, появляющегося в них от вращения около оси, параллельной образующей цилиндра, мы пользуемся, следуя указанию Томсона и Тэта [1]), тем методом, который употребляет Сен-Венан в задаче о кручении призм [2]); переходя потом к вращению тела около оси, перпендикулярной образующей цилиндра, мы излагаем задачу Стокса о полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, и решаем с помощью бесселевых функций новую задачу о полости, имеющей форму прямого круглого цилиндра. Далее, мы обращаемся к полостям, имеющим форму тел вращения, и показываем, что эта задача может быть исследована с помощью сферических функций совершенно так же, как задача Сен-Венана с помощью тригонометрических функций. Таким образом, получается обратный способ решения задачи, который может дать сколько угодно различных форм полостей, для которых известны внутреннее движение жидкости и эллипсоид инерции эквивалентного тела. С помощью такого способа мы находим коническую полость, полость, образованную вращением пересекающихся гипербол, и кольцевидную полость. Как пример прямого решения задачи о телах вращения, мы исследуем с помощью сферических функций случай полости, имеющей форму полушара. Вторая глава оканчивается примерами многосвязных полостей и разъяснением жироскопического эффекта, происходящего от начального движения жидких масс.

Третья глава посвящена движению жидкости с трением. Указав общий способ, служащий для определения движения тела и находящейся в нем жидкости, мы излагаем задачу Гельмгольца и прибавляем к ней новую задачу о движении

---

[1]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 705.

[2]) Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, Savants Étrangers, т. XIV.

замкнутой трубки, наполненной жидкостью. Эта последняя задача исследуется нами с помощью теории трубок Пуазеля, и решение ее проверяется на одном выполненном нами приборе.

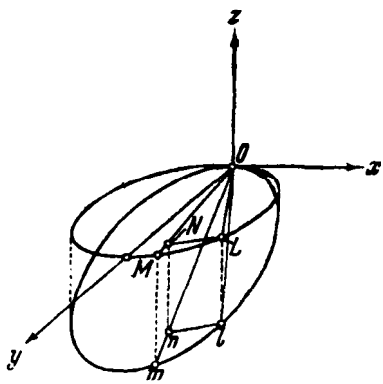
ГЛАВА ПЕРВАЯ.

А. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

§ 1. Циркуляция скорости. Теорема Стокса. Мы изложим сначала некоторые гидродинамические теоремы, которые послужат основанием нашего исследования. Будем, вместе с Томсоном, называть *циркуляцией скорости* (circulation) по какому-нибудь контуру, лежащему внутри жидкости, взятый по этому контуру интеграл

$$\int V \cos\theta \, ds,$$

где V — скорость жидкости, ds — элемент контура, θ — угол между V и ds. Определим сперва, чему равна циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру. Пусть (фиг. 1) $OlmO$ будет такой контур.



Фиг. 1.

Берем начало прямоугольных осей координат x, y, z в точке O и направляем ось Oz по оси вращения частицы жидкости. Скорости точек жидкости, бесконечно близких к O, могут быть разложены каждая на две скорости, из которых одна имеет потенциальную функцию скоростей $\varphi(x, y, z)$, а другая является скоростью вращательного движения около оси Oz с угловою скоростью вращения ω частицы жидкости. Сделав такое разложение скоростей, найдем, что для замкнутого контура $OlmO$

$$\int V \cos\theta \, ds = \int \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + \int r\omega \cos\phi \, ds,$$

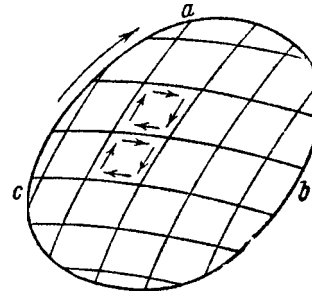
где r — проекция радиуса-вектора точки на плоскость Oxy, а ψ — угол между ds и направлением скорости от вращательного движения. Первый интеграл, взятый по замкнутому контуру, пропадает, и у нас остается только второй интеграл, в котором можно положить [1])

$$\cos\psi\, ds = r\, d\lambda,$$

где λ — угол между r и Ox. Мы получаем:

$$\int V\cos\vartheta\, ds = \omega \int r^2\, d\lambda = 2\omega\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ есть бесконечно малая площадь проекции контура $OlmO$ на плоскость Oxy. Так как эта площадь есть не что иное, как площадь перпендикулярного сечения вихревой нити, полученной с помощью проведения через все точки контура $OlmO$ линий вихря, то можно сказать, что *циркуляция скорости по бесконечно малому замкнутому контуру равна удвоенному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре.*



Фиг. 2.

Переходим к определению циркуляции скорости по конечному контуру, *обращаемому в точку*. Мы будем называть таким образом контур, который может быть обращен в точку посредством непрерывного изменения, не выходя из жидкой массы. Через такой контур всегда можно провести поверхность, которая вся будет лежать в жидкости. Вообразим (фиг. 2), что такая поверхность проведена через данный нам контур $abca$, и построим на ней два ряда линий, которые разделят контур на бесконечно малые части. Нетрудно видеть, что циркуляция скорости по контуру $abca$ может быть заме-

[1]) Из фигуры 1 видно, что $OL = r$, $LN = ln = r\, d\lambda$ и из треугольника lnm, — что $ln = \cos\psi\, ds$. (*Прим. ред.*)

нена суммою циркуляций по всем бесконечно малым контурам, взятым в том же направлении, потому что при таком суммировании циркуляции по всем внутренним линиям сократятся. Так как циркуляция по всякому бесконечно малому замкнутому контуру равна удвоенному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре, то сумма всех таких циркуляций будет равна сумме удвоенных напряжений всех вихревых нитей, проходящих сквозь контур *abca*. Отсюда получается теорема Стокса[1]): *циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, обращаемому в точку, равна удвоенной сумме напряжений всех вихревых нитей, проходящих через этот контур.* Напряжение вихря надо считать положительным, если вращение частицы совершается в ту сторону, в которую берем циркуляцию, и отрицательным в обратном случае.

§ 2. Главный контур и главная циркуляция. Теорема Гельмгольца. Прилагаем теорему Стокса к исследованию движения жидкой массы без вращения частиц жидкости. Если пространство, занимаемое жидкою массою, односвязно, то все замкнутые контуры, проводимые внутри его, обращаемы в точку, и потому циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру при отсутствии вращения частиц равна нулю. Для жидкой массы, занимающей многосвязное пространство, подобное заключение необходимо только для замкнутых контуров, обращаемых в точку, но в ней могут быть проводимы также и замкнутые контуры, в точку не обращаемые, для которых циркуляция скорости не должна быть равна нулю. Докажем, что для всяких двух таких контуров, которые могут быть посредством непрерывного изменения, не выходя из жидкой массы, преобразованы из одного в другой, циркуляции скорости одинаковы. Пусть (фиг. 3) *abca* и *defd* будут два таких контура. Мы всегда можем провести между ними линию *ad* так, что контур *abcadfeda* будет обращаем в точку. Вследствие этого, условившись обозначать циркуляцию скоб-

[1]) Stokes, Cambridge University Calendar, 1854.

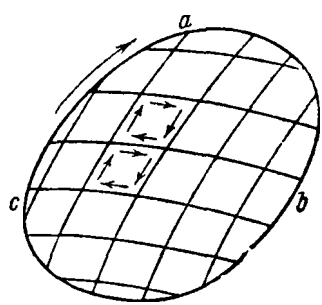
где r — проекция радиуса-вектора точки на плоскость Oxy, а ψ — угол между ds и направлением скорости от вращательного движения. Первый интеграл, взятый по замкнутому контуру, пропадает, и у нас остается только второй интеграл, в котором можно положить [1])

$$\cos\psi\, ds = r\, d\lambda,$$

где λ — угол между r и Ox. Мы получаем:

$$\int V\cos\theta\, ds = \omega \int r^2\, d\lambda = 2\omega\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ есть бесконечно малая площадь проекции контура $OlmO$ на плоскость Oxy. Так как эта площадь есть не что иное, как площадь перпендикулярного сечения вихревой нити, полученной с помощью проведения через все точки контура $OlmO$ линий вихря, то можно сказать, что *циркуляция скорости по бесконечно малому замкнутому контуру равна удвоенному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре.*



Фиг. 2.

Переходим к определению циркуляции скорости по конечному контуру, *обращаемому в точку*. Мы будем называть таким образом контур, который может быть обращен в точку посредством непрерывного изменения, не выходя из жидкой массы. Через такой контур всегда можно провести поверхность, которая вся будет лежать в жидкости. Вообразим (фиг. 2), что такая поверхность проведена через данный нам контур $abca$, и построим на ней два ряда линий, которые разделят контур на бесконечно малые части. Нетрудно видеть, что циркуляция скорости по контуру $abca$ может быть заме-

[1]) Из фигуры 1 видно, что $OL = r$, $LN = ln = r\, d\lambda$ и из треугольника lnm, — что $ln = \cos\psi\, ds$. (*Прим. ред.*)

циркуляцию по какому-нибудь замкнутому контуру *abca* формулою

$$(abca) = mk + m_1k_1 + \ldots + m_{n-1}k_{n-1},$$

в которой m, m_1, $\ldots$, m_{n-1} суть некоторые положительные или отрицательные целые числа. Для получения числа m, например, надо сосчитать, сколько раз рассматриваемый контур пересекает первую перегородку, идя в направлении, одинаковом с первым главным контуром (т. е. в том направлении, в каком бралась циркуляция k), и сколько раз он пересекает ее, идя в обратном направлении, и взять разность этих чисел. Найденная формула показывает, что циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру в многосвязном пространстве равна нулю, если

$$k = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0.$$

На основании сказанного о циркуляции скорости можно доказать теорему Гельмгольца, что *скорости несжимаемой жидкости, движущейся без вращения частиц, вполне определяются по их нормальным составляющим на границах жидкой массы и по главным циркуляциям.* Если бы мы допустили, что существуют два течения несжимаемой жидкости, удовлетворяющие данным условиям, то, вычитая геометрически из скоростей первого течения скорости второго, нашли бы течение несжимаемой жидкости без вращения частиц, нормальные составляющие скоростей которого на границах жидкости были бы равны нулю. В таком течении, вследствие несжимаемости жидкости, все линии токов должны быть замкнутые кривые, по которым жидкость должна течь в одном направлении. Если бы скорости этого течения не были равны нулю, то, взявши циркуляции по линиям токов в сторону движения жидкости, мы бы получили некоторые положительные величины, а между тем, вследствие $k = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0$, циркуляции по всем замкнутым контурам должны быть равны нулю. Следовательно, геометрические разности скоростей двух допущенных течений должны быть нули, т. е. эти течения должны быть одинаковы. Если жидкая масса заполняет

полость, стенки которой неподвижны, то она может иметь движение без вращения частичек только в том случае, когда пространство полости многосвязно и когда циркуляции по некоторым из главных контуров не равны нулю; при этом линии токов будут непременно замкнутыми контурами, не обращающимися в точки.

Составим потенциальную функцию скоростей при течении жидкости без вращения частиц. Для этого обратим $n+1$-связное пространство, занимаемое жидкостью, в односвязное посредством проведения n перегородок и, взявши внутри полученного таким образом односвязного пространства постоянную точку a, будем составлять циркуляции скорости для различных разомкнутых контуров ab:

$$(ab) = \int V \cos\theta \, ds.$$

Эти циркуляции будут зависеть только от координат точки b, потому что для двух путей acb и $ac'b$ имеем:

$$0 = (acbc'a) = (acb) + (bc'a),$$

или

$$(acb) = (ac'b).$$

Таким образом, заключаем, что

$$(ab) = \varphi(x, y, z),$$

где x, y, z суть координаты точки b. Написав это в виде

$$\varphi(x, y, z) = \int V \cos\theta \, ds,$$

найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V \cos\theta,$$

отсюда следует, что $\varphi(x, y, z)$ есть потенциальная функция скоростей рассматриваемого течения. Если возьмем две бесконечно близкие точки b и b', лежащие с двух сторон первой перегородки так, что направление bb' одинаково с направлением первого главного контура, то

$$(abb'a) = k,$$

а следовательно,

$$(ab) - (ab') = k.$$

Эта формула показывает, что при переходе через перегородку в направлении главного контура потенциальная функция скоростей убывает скачком на величину циркуляции скорости по этому контуру. Если пространство, занимаемое жидкою массою, односвязно или если оно многосвязно, но все главные циркуляции равны нулю, то скорости жидкости имеют *однозначную* потенциальную функцию; в противном же случае скорости имеют *многозначную* потенциальную функцию, модули периодичности которой суть главные циркуляции.

§ 3. Теорема Томсона. Подобно циркуляции скорости по данному контуру, лежащему внутри жидкой массы, можно взять по этому контуру интеграл, который мы назовем *циркуляцией полного ускорения*. Он представляется так:

$$\int j \cos \mu \, ds,$$

где j — полное ускорение точек жидкости, ds — элемент контура, а μ — угол между j и ds. Рассматривая координаты x, y, z точек жидкости как функции времени и начальных координат a, b, c, предположим, что наш контур в начале времени представлялся уравнениями

$$b = f(a), \quad c = f_1(a);$$

потом исключим с помощью этих уравнений b и c из функций, выражающих x, y, z, так что получим:

$$x = F(t, a), \quad y = F_1(t, a), \quad z = F_2(t, a).$$

Приписывая дифференциалу, взятому по t, знак ∂, а дифференциалу, взятому по a, знак d, напишем:

$$j \cos \mu \, ds = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dy + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dy + \frac{\partial z}{\partial t} dz\right) -$$

$$- \left[\frac{\partial x}{\partial t} d\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial y}{\partial t} d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial z}{\partial t} d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]$$

или, сохраняя для V и θ значения § 1,

$$j\cos\mu\,ds = \frac{\partial}{\partial t}(V\cos\theta\,ds) - d\frac{V^2}{2}.$$

Если рассматриваемый контур замкнутый, то последний член при интеграции пропадает, и мы получаем формулу

$$\int j\cos\mu\,ds = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int V\cos\theta\,ds\right), \qquad (1)$$

которая дает нам теорему Томсона[1]): *циркуляция полного ускорения по замкнутому контуру равна полной производной по времени от циркуляции скорости по этому контуру*. Эта теорема одинаково верна, обращаем ли данный контур в точку или нет.

§ 4. Выражение суммы элементарных работ количеств движения частиц жидкости, заключенной в односвязной и многосвязной полостях, через интегралы по поверхности. Предположим, что однородная несжимаемая жидкость движется с потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z)$, и определим для данного момента времени сумму элементарных работ ее количеств движения (мы рассматриваем количества движения частиц жидкости, как силы) при каком-нибудь бесконечно малом возможном для нее перемещении. Называя возможные перемещения частиц жидкости через δx, δy, δz и их массы через m, выразим искомую элементарную работу суммою

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right),$$

распространяемою на всю жидкую массу. Чтобы удобнее определить эту сумму, вообразим систему линий (s), элементы которых направлены по перемещениям δs точек жидкости, и разделим с помощью поверхностей, проходящих через эти линии, всю жидкую массу на бесконечно тонкие трубки. Пусть df будет площадь сечения такой трубки; тогда, вследствие несжимаемости, вдоль всей трубки произведение $\delta s\,df$ будет постоянно. Рассматривая часть нашей суммы, относя-

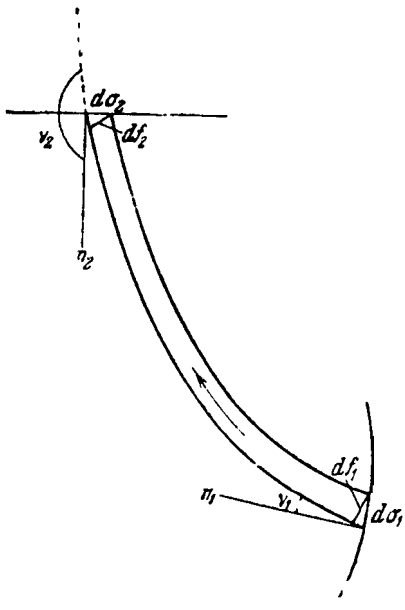
[1]) On vortex motion, Philos. Trans. R. S. Edinb., 1869, стр. 274.

щуюся к одной из трубок, положим $m = \rho\, df\, \delta s$, где ρ — плотность жидкости, а δs — элемент линии s. Эта часть суммы будет:

$$\int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)\rho\, df\, \delta s = \rho\, df\, \delta s \int \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds,$$

где интеграция производится по линии s, которую берем в направлении перемещения жидкости.

Предположив, что пространство, занимаемое жидкою массою, сделано с помощью проведения n перегородок односвязным, можем рассматривать функцию φ в этом односвязном пространстве как однозначную, а перегородки отнести к границам жидкости. Если рассматриваемая нами бесконечно тонкая трубка не пересекает установленных таким образом границ и замыкается в рассматриваемом пространстве, то интеграл в вышенаписанной формуле будет равен нулю; если же трубка пересекает границы, то мы будем отдельно рассматривать каждую ее часть между двумя точками пересечения и считать каждую за особую трубку. Обозначая величины, относящиеся к началу трубки, индексом (1), а величины, относящиеся к ее концу, индексом (2), и обращая внимание на фигуру 5, найдем:



Фиг. 5.

$$\rho\, df\, \delta s \int \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds = \rho\,(\varphi_2\, \delta s_2\, df_2 - \varphi_1\, \delta s_1\, df_1) =$$

$$= -\rho\,(\varphi_2\, \delta s_2 \cos\nu_2\, d\sigma_2 + \varphi_1\, \delta s_1 \cos\nu_1\, d\sigma_1),$$

где $d\sigma$ представляет площадь, вырезываемую трубкою на поверхностях границ, а ν — угол между перемещением δs и нормалью к поверхности границы, взятою внутрь жидкой массы[1]). Рассуждая подобным образом относительно всех бесконечно тонких трубок, найдем, что

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)=-\rho\int\int\varphi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma, \qquad (2)$$

где интеграл во второй части распространяется на поверхность жидкой массы и обе стороны поверхностей всех перегородок. Если функция φ однозначна, то все интегралы, распространенные на перегородки, обращаются в нули, ибо с двух противоположных сторон каждой перегородки $\delta s\cos\nu$ имеет равные величины, но противоположные знаки; так что в этом случае можно пользоваться формулою (2), относя ее вторую часть только к поверхности жидкости. Для многозначной функции φ по той же причине интегралы могут быть взяты только по одной стороне перегородок, а формула (2), на основании § 2, может быть написана так:

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)=$$
$$=-\rho\int\int\varphi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma+\rho\int\int k\,\delta s'\cos\nu'\,d\sigma', \qquad (3)$$

где первый интеграл распространяется на поверхность жидкости, а второй — на те стороны перегородок, нормаль которых направлена в сторону главного контура.

Б. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ, НАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОЛОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

§ 5. Потенциал скоростей частиц жидкости, движущейся внутри неподвижной полости. Положим, что в начальный момент твердое тело неподвижно, и посмотрим, какое движение без вращения частиц может иметь жидкость, заключенная в его полости? Из сказанного в § 2 следует, что

[1]) Во всем нашем сочинении мы будем брать направление нормали внутрь жидкой массы.

в случае односвязной полости жидкость должна быть неподвижна; в случае же многосвязной полости она может двигаться с потенциальною функциею скоростей, вполне определяемою по главным циркуляциям k, $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Эта функция χ может быть представлена в виде

$$\chi = k\vartheta + k_1\vartheta_1 + \ldots + k_{n-1}\vartheta_{n-1}, \qquad (4)$$

где ϑ, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ суть функции точки, удовлетворяющие уравнению Лапласа и дающие на стенках полости производные по нормали, равные нулю. При этом функция ϑ убывает на единицу при переходе через первую перегородку, в направлении первого главного контура, и изменяется непрерывно при переходе через все остальные перегородки; функция ϑ_1 убывает на единицу при переходе через вторую перегородку, в направлении второго главного контура, и изменяется непрерывно при переходе через все другие перегородки и т. д.

Такое движение жидкости с потенциалом скоростей χ могло бы, по мнению Стокса [1]), быть получено, материализируя на время перегородки, обращающие пространство полости в односвязное, и сообщая им такие движения и деформации, чтобы скорости двух бесконечно близких точек жидкости, лежащих с двух противоположных сторон перегородки, имели равные величины и направления.

§ 6. Влияние на внутреннее движение жидкости движения полости. Потенциал скоростей жидкости при вращении полости. Относительная скорость жидкости и ее максимум. Задавшись вышеуказанным начальным движением жидкости и предположив, что частицы ее все время находятся под действием сил, имеющих однозначную потенциальную функцию, сообщим нашему твердому телу какое-нибудь движение.

По началу Даламбера силы, действующие на частицы жидкости, вместе с силами инерции этих частиц должны уравновешиваться; а так как условие, необходимое и достаточное для равновесия однородной и несжимаемой жидкой

[1]) On some cases of fluid motion, § 2.

массы, наполняющей полость тела, состоит только в том, что силы, на нее действующие, должны иметь однозначную потенциальную функцию, то в нашей задаче во все время движения должна существовать однозначная потенциальная функция полных ускорений точек жидкости. Внося это предположение в формулу (1), приходим к заключению, что циркуляция скорости по замкнутому контуру, образуемому одними и теми же точками жидкой массы, не изменяется со временем. Следовательно, в нашей полости циркуляции скорости будут равны нулю все время для замкнутых контуров, обращаемых в точки, и будут оставаться постоянными для главных контуров. Из сказанного видим, что во все время движения скорости жидкости будут иметь потенциальную функцию скоростей, главные циркуляции которой суть начальные циркуляции k, k_1, ..., k_{n-1}. Также и наоборот: если мы допустим существование такой потенциальной функции, то по теореме Томсона придем к заключению, что циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру должна быть равна нулю, откуда следует, что силы инерции имеют однозначную потенциальную функцию и уравновешиваются вместе с силами, действующими на жидкую массу, давлениями стенок полости.

Потенциальная функция скоростей вполне определяется по главным циркуляциям k, k_1, ..., k_{n-1} и по тому условию, что ее производные по нормали на стенках полости равны нормальным скоростям точек самих стенок; силы же, действующие на частицы жидкости, не имеют никакого влияния на их движение внутри полости и производят только изменение в давлении жидкости.

Разлагаем движение твердого тела на поступательное со скоростью какой-нибудь точки O и вращательное около этой точки. Так как скорости всякого поступательного движения имеют однозначную потенциальную функцию, то это движение прямо сообщается жидкой массе и не оказывает никакого влияния на ее внутреннее движение. Последнее изменяется только от вращательного движения тела около

точки O и будет одно и то же, если мы сделаем эту точку неподвижной и будем вращать около нее тело так, как оно вращается около движущейся точки O. Сделав это, вообразим прямоугольные оси координат $Oxyz$, неизменно соединенные с телом и имеющие начало в точке O. Предположив, что потенциальная функция скоростей точек жидкости выражена по координатам точки относительно каких-нибудь неподвижных осей координат, заменим в ней эти координаты с помощью x, y, z и представим ее в виде $\Phi(x, y, z, t)$. Для $t=0$ эта функция обращается в функцию χ, данную в § 5; для какого-нибудь другого момента времени мы можем положить

$$\Phi = \chi + \varphi.$$

Так как функция χ удовлетворяет внутри полости уравнению Лапласа, дает по главным контурам циркуляции k, k_1, ..., k_{n-1}, и ее нормальные производные на стенках полости равны нулю, то функция φ должна быть однозначною функциею координат, удовлетворяющею внутри полости уравнению Лапласа и дающею на ее стенках

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \cos\alpha\,(z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta\,(x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma\,(y\omega_1 - x\omega_2), \qquad (5)$$

где dn — элемент внутренней нормали, α, β, γ — углы, образуемые dn с осями Ox, Oy, Oz, а ω_1, ω_2, ω_3 — проекции на эти оси мгновенной угловой скорости ω вращения тела.

Мы удовлетворим всем условиям, наложенным на функцию φ, если положим

$$\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3, \qquad (6)$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 суть однозначные функции координат x, y, z, удовлетворяющие внутри полости уравнению Лапласа и дающие на ее стенках

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial n} &= y\cos\gamma - z\cos\beta, \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial n} &= z\cos\alpha - x\cos\gamma, \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial n} &= x\cos\beta - y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Из сказанного следует, что время t входит в функцию Φ только через ω_1, ω_2 и ω_3. *Если по прошествии некоторого времени тело останавливается и* ω_1, ω_2, ω_3 *обращаются в нули, то функция* Φ *обращается в функцию* χ, *т. е. жидкость получает внутри полости то же движение, какое имела сначала; если в начале времени жидкость была неподвижна* ($k = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0$), *то при остановке тела останавливается и жидкость, заключенная в его полости.*

Проекции на оси Ox, Oy, Oz скоростей абсолютного движения частиц жидкости выражаются формулами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

проекции же на эти оси скоростей относительного движения частиц жидкости получатся, если из абсолютных скоростей вычтем скорости от вращательного движения твердого тела, и будут:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - (z\omega_2 - y\omega_3), \\ v &= \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} - (x\omega_3 - z\omega_1), \\ w &= \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - (y\omega_1 - x\omega_2). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Определяя по этим формулам составляющие вращения жидкой частицы в относительном движении, найдем для них величины:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\omega_1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\omega_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\omega_3.$$

которые показывают, что частицы жидкости в их относительном движении имеют вращение, противоположное вращению тела. Это понятно само собою, так как относительное движение жидкости, слагаясь с движением тела, должно дать движение без вращения частиц жидкости.

Кирхгоф показал, что в случае движения жидкой массы с потенциалом скоростей наибольшая скорость жидкости может находиться только на ее границах [1]); вследствие этого наибольшая абсолютная скорость нашей жидкой массы будет находиться на стенках полости. Точно так же можно доказать, что *наибольшею скоростью в относительном движении жидкости будет обладать точка, лежащая на поверхности.*

Написав квадрат относительной скорости

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

возьмем от его половины частные производные по x, y, z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + 2(w\omega_2 - v\omega_3),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + 2(u\omega_3 - w\omega_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + 2(v\omega_1 - u\omega_2).$$

От этих формул берем соответственно производные по x, y, z и складываем полученные результаты:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right) =$$

$$= \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2).$$

---

1) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, стр. 186.

Обращая внимание на условие несжимаемости и на величины ω_1, ω_2, ω_3, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2}V^2\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

откуда заключаем, что вторые производные по x, y и z от квадрата скорости не могут внутри полости одновременно иметь отрицательные величины, следовательно, внутри полости скорость V не может получить наибольшее значение [1]).

Когда ω_1, ω_2, ω_3 даны как функции времени, то определение места каждой частицы жидкости во всякое время внутри полости может быть сделано посредством интегрирования совместных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt.$$

В частном случае, когда жидкость в начальный момент неподвижна, и тело вращается около неподвижной оси, положение частиц жидкости может быть определено по положению тела. Мы имеем:

$$\omega_1=\frac{d\theta}{dt}\cos\lambda,$$
$$\omega_2=\frac{d\theta}{dt}\cos\mu,$$
$$\omega_3=\frac{d\theta}{dt}\cos\nu,$$

где θ — угловое перемещение тела, а λ, μ и ν — постоянные углы, образуемые осью вращения с осями Ox, Oy и Oz. Подставляем эти величины ω_1, ω_2, ω_3 в вышенаписанные диф-

[1]) Доказанная теорема является обобщением аналогичной теоремы, обнаруженной А. П. Соколовым в его сочинении «Задача о кручении призматических тел», Математический сборник, т. IX, стр. 301.

ференциальные уравнения и разделяем их на $\frac{dt}{d\theta}$:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cos\mu+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\cos\nu-(z\cos\mu-y\cos\nu)}=$$

$$=\frac{dy}{\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\cos\lambda+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\cos\mu+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\cos\nu-(x\cos\nu-z\cos\lambda)}=$$

$$=\frac{dz}{\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\cos\lambda+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\cos\mu+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\cos\nu-(y\cos\lambda-x\cos\mu)}=d\theta.$$

Интегрирование этих уравнений позволяет определить координаты каждой точки жидкости в функции θ. При этом, как будет показано на примере эллипсоидальной полости, положение жидкости зависит также от числа оборотов твердого тела.

Сказанное не может быть распространено на общий случай движения тела, так как, определяя положение его относительно неподвижных осей координат с помощью трех эйлеровых углов, мы не имеем возможности выразить координаты x, y, z частицы жидкости с помощью этих углов.

§ 7. Гидродинамическое давление жидкости в полости. Переходим к определению давления жидкости, заключенной в полости. Так как оно зависит не только от вращательного, но и от поступательного движения твердого тела, то прибавляем к потенциальным функциям χ и φ еще потенциальную функцию от скоростей поступательного движения, так что за потенциальную функцию абсолютных скоростей принимаем

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=\chi+\varphi+px+qy+rz,$$

где p, q и r — проекции на подвижные оси Ox, Oy и Oz скорости точки O. На основании формулы (8) u, v и w выразятся по функции F так:

$$u=\frac{\partial F}{\partial x}-(p+z\omega_2-y\omega_3),\quad v=\frac{\partial F}{\partial y}-(q+x\omega_3-z\omega_1),$$

$$w=\frac{\partial F}{\partial z}-(r+y\omega_1-x\omega_2).$$

Вообразим неподвижные оси координат $Ox'y'z'$, которые в рассматриваемый момент времени сливаются с нашими подвижными осями и, выразив потенциальную функцию скоростей в координатах x', y', z', назовем ее через F'. Обозначая через p гидродинамическое давление, а через U — силовую функцию, найдем по известной формуле гидродинамики, что

$$\frac{1}{\rho}p - U = \tau - \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2\right],$$

где τ есть некоторая функция одного времени, $\frac{\partial F'}{\partial t}$ есть частная производная от функции F' по времени. Предполагая для простоты, что время t начинает считаться от рассматриваемого момента, найдем по прошествии бесконечно малого времени t, что

$$F' = F[x' - (p + \omega_2 z - \omega_3 y)\,t,$$
$$y' - (q + \omega_3 x - \omega_1 z)\,t,\quad z' - (r + \omega_1 y - \omega_2 x)\,t,\ t],$$

откуда

$$\frac{\partial F'}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} - \left[\frac{\partial F}{\partial x}(p + \omega_2 z - \omega_3 y) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y}(q + \omega_3 x - \omega_1 z) + \frac{\partial F}{\partial z}(r + \omega_1 y - \omega_2 x)\right].$$

Подставляя эту величину в выражение для p и составляя V^2 по вышенаписанным формулам для u, v, w, найдем весьма простое выражение гидродинамического давления:

$$\frac{1}{\rho}p - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2), \qquad (9)$$

где V' есть так называемая скорость влечения от движения твердого тела. Эта формула вполне определяет изменение давления при переходе от одной точки жидкости к другой и имеет сходство с известною формулою Бернулли, от которой она отличается присутствием $-\frac{\partial F}{\partial t}$ и $+\frac{1}{2}V'^2$. Но мы не можем с помощью этой формулы определить абсолютную величину давления во всякой точке жидкости, так

как в нее входит еще функция времени τ, для определения которой задача не представляет никаких данных, подобно тому, как нет данных для определения величины давления на четыре ножки абсолютно твердого стола. Мы можем только указать нижний предел величины τ, так как давление p не может быть отрицательно, то

$$\tau > \max\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) - U\right].$$

Эта формула показывает, что *если в одной из точек жидкости скорость относительного движения становится весьма большой, то и давление во всей полости сделается тоже весьма большим.*

В. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЗАКЛЮЧАЮЩЕГО ВНУТРИ СЕБЯ ЖИДКИЕ МАССЫ.

§ 8. Постановка задачи. Возможность разложения движения рассматриваемой системы на движение около центра тяжести и поступательное движение. При исследовании движения тела, заключающего внутри себя жидкие массы, под действием каких-нибудь внешних сил мы будем, для сокращения формул, рассматривать только тот случай, когда одна точка твердого тела неподвижна, потому что в случае свободного движения нашей системы нам придется только прибавить к ее движению около центра тяжести, как около неподвижной точки, надлежащее поступательное движение. Возможность такого прибавления видна из того, что силы инерции точек системы в полученном сложном движении будут слагаться из прежних сил инерции и сил инерции в поступательном движении; все же внешние силы могут быть заменены силою, проходящею через центр тяжести системы, и парою. Пара уравновешивается силами инерции прежнего движения (когда центр тяжести рассматривался как неподвижная точка), сила же может быть уравновешена силами инерции надлежащим образом выбранного поступательного движения. Действительно, силы инерции поступательного движения частиц жидкости уравновешиваются

на жидких массах в полостях тела, так как скорости поступательного движения имеют однозначную потенциальную функцию.

Эти силы инерции разовьют в жидкостях добавочные давления, действие которых на тело может быть заменено действием сил, приложенных в центрах жидких масс, направленных в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и равных произведению этого ускорения на массы соответствующих жидкостей. Все такие силы, происходящие от добавочных давлений, с силами инерции частиц твердого тела дадут одну равнодействующую, которая пройдет через центр тяжести всей системы, будет направлена в сторону, противоположную ускорению поступательного движения, и будет равна произведению этого ускорения на массу системы. Для того чтобы эта сила уравновесила равнодействующую внешних сил, нужно только, чтобы ускорение поступательного движения было направлено по этой равнодействующей силе и было равно ее величине, разделенной на массу системы.

§ 9. Формулы проекций главного момента количеств движения полости и заключенной в ней жидкости. Пусть O будет неподвижная точка твердого тела; примем ее за начало прямоугольных осей координат $Oxyz$, неизменяемо соединенных с телом, и постараемся определить проекции на эти оси главного момента G количеств движения всех материальных точек нашей системы относительно O. Этот момент будет слагаться геометрически из главного момента g_0 количеств движения твердого тела и главных моментов g, g_1, g_2, ... количеств движения жидких масс в первой, второй и т. д. полостях. Если

$$f_0(x, y, z) = 1$$

будет уравнение эллипсоида инерции твердого тела относительно точки O, то проекции главного момента количеств движения тела на оси Ox, Oy и Oz представятся

производными:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x g_0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \\ \text{пр}_y g_0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2}, \\ \text{пр}_z g_0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где ω_1, ω_2, ω_3 попрежнему выражают проекции на оси Ox, Oy, Oz мгновенной угловой скорости тела ω.

Переходим к составлению проекций главного момента g. Так как абсолютное движение жидкости по § 6 слагается из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей φ, и из движения, имеющего потенциальную функцию скоростей χ, то момент g слагается геометрически из моментов g' и g'', соответствующих первому и второму движению. Проекции по осям Ox, Oy, Oz момента g'' не будут изменяться со временем и представятся на основании формулы (4) линейными функциями главных циркуляций $k, k_1, \ldots$ Проекции по осям момента g' могут быть найдены с помощью сказанного в § 4 о работе количеств движения однородной несжимаемой жидкой массы. Известно, что для получения проекции главного момента системы сил на какую-нибудь ось, проходящую через центр моментов, надо повернуть точки приложения этих сил на бесконечно малый угол около этой оси и разделить сумму элементарных работ, совершенных силами, на угловое перемещение. Предположим, что в формуле (2) δx, δy, δz суть проекции по осям координат бесконечно малых перемещений точек жидкой массы при ее вращении около оси Ox на бесконечно малый угол $\delta\theta$; тогда

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -z\,\delta\theta, \quad \delta z = y\,\delta\theta,$$

вследствие чего

$$\text{пр}_x g' = -\frac{\rho}{\delta\theta}\int\int \varphi\,\delta s \cos\nu\, d\sigma = -\rho\int\int \varphi\,(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma,$$

где α, β, γ — углы внутренней нормали поверхности полости с осями координат. На основании формулы (7) и теоремы

Грина найденная величина проекции может быть преобразована:

$$\text{пр}_x g' = -\rho \int\int \varphi \frac{\partial \psi_1}{\partial n} d\sigma = \rho \int\int\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Условившись в обозначении

$$\rho \int\int\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = [\varphi, \psi],$$

представим найденную формулу вместе с двумя другими для осей Oy и Oz в следующем виде:

$$\text{пр}_x g' = [\varphi, \psi_1], \quad \text{пр}_y g' = [\varphi, \psi_2], \quad \text{пр}_z g' = [\varphi, \psi_3].$$

Подставляем сюда величину φ из формулы (6):

$$\begin{aligned} \text{пр}_x g' &= \omega_1 [\psi_1, \psi_1] + \omega_2 [\psi_1, \psi_2] + \omega_3 [\psi_1, \psi_3], \\ \text{пр}_y g' &= \omega_1 [\psi_2, \psi_1] + \omega_2 [\psi_2, \psi_2] + \omega_3 [\psi_2, \psi_3], \\ \text{пр}_z g' &= \omega_1 [\psi_3, \psi_1] + \omega_2 [\psi_3, \psi_2] + \omega_3 [\psi_3, \psi_3]. \end{aligned}$$

Составляем двойную живую силу нашей жидкой массы в движении, определяемом функцией скоростей φ. Называя эту двойную живую силу через $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, найдем по формуле (6):

$$\begin{aligned} f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = {} & [\psi_1, \psi_1] \omega_1^2 + [\psi_2, \psi_2] \omega_2^2 + [\psi_3, \psi_3] \omega_3^2 + \\ & + 2 [\psi_2, \psi_3] \omega_2 \omega_3 + 2 [\psi_3, \psi_1] \omega_3 \omega_1 + 2 [\psi_1, \psi_2] \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта формула показывает, что найденные нами величины проекции g' могут быть представлены в виде производных:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_1}, \\ \text{пр}_y g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_2}, \\ \text{пр}_z g' &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_3}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Так как функция $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ положительна при всевозможных значениях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то уравнение

$$f(x, y, z) = 1$$

представляет нам некоторый эллипсоид. Докажем, что *этот эллипсоид всегда заключает внутри себя эллипсоид инерции рассматриваемой жидкой массы.* Пусть уравнение эллипсоида инерции жидкой массы относительно точки O будет

$$F(x, y, z) = 1.$$

Пишем по формуле (8) равенства:

$$z\omega_2 - y\omega_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right),$$

$$x\omega_3 - z\omega_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right),$$

$$y\omega_1 - x\omega_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \left(w - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right),$$

возводим их в квадрат, складываем и, умножив результат на массу m частицы жидкости, берем от обеих частей сумму, распространенную на всю полость. Получим:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\ + \sum m\left[\left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 + \left(w - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right] - \\ - 2\sum m\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(w - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\right].$$

Преобразуем последнюю сумму. Для этого умножаем и делим ее на некоторое бесконечно малое время δt и полагаем

$$\left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\delta t = \delta x, \quad \left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\delta t = \delta y, \quad \left(w - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\delta t = \delta z.$$

Эти величины δx, δy, δz будут проекции бесконечно малых путей δs, пройденных во время δt в движении жидкости, слагающемся из ее относительного движения и ее начального движения, взятого в обратную сторону. По формуле (2) получаем:

$$\sum m\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(w - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\right] = \\ = \frac{1}{\delta t}\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right) = -\frac{\rho}{\delta t}\int\int \varphi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma,$$

но так как для рассматриваемых перемещений δs имеем

$\cos\nu = 0$, то преобразуемая сумма есть нуль. Вследствие этого находим, что

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) =$$

$$= f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \sum m\left[\left(u - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(v - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 + \left(w - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right], \quad (13)$$

откуда

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) < F(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Заменяем в этом неравенстве ω_1, ω_2, ω_3 на $\cos a$, $\cos b$ и $\cos c$:

$$f(\cos a, \cos b, \cos c) < F(\cos a, \cos b, \cos c).$$

Если предположим, что a, b и c суть углы, образуемые с осями координат центральными радиусами-векторами r и R эллипсоидов

$$f(x, y, z) = 1, \quad F(x, y, z) = 1,$$

то найдем:

$$\frac{1}{r^2} = f(\cos a, \cos b, \cos c), \quad \frac{1}{R^2} = F(\cos a, \cos b, \cos c),$$

так что наше неравенство дает:

$$r > R,$$

т. е первый эллипсоид заключает внутри себя второй. Распространяя сказанное о первой полости на все остальные, условимся приписывать в них соответственным величинам индексы 1, 2, ...; складываем геометрически главные моменты g'', g_1'', g_2'', ... и называем через P, Q и R проекции их равнодействующего момента на оси Ox, Oy и Oz; потом составляем функцию

$$T = \frac{1}{2}[f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \ldots] + \\ + P\omega_1 + Q\omega_2 + R\omega_3. \quad (14)$$

На основании формул (10), (12) и подобных же формул для других полостей заключаем, что искомые нами проекции на оси Ox, Oy, Oz главного момента количеств движения G выражаются частными производными от функции T по составляющим угловой скорости:

$$\text{пр}_x G = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \quad \text{пр}_y G = \frac{\partial T}{\partial \omega_2}, \quad \text{пр}_z G = \frac{\partial T}{\partial \omega_3}. \quad (15)$$

§ 10. Дифференциальные уравнения движения тела с полостями, наполненными жидкостью. Эквивалентные тела. Жироскопический эффект жидких масс в случае многосвязных полостей. Пользуясь найденными проекциями главного момента количеств движения нашей системы, легко можем составить дифференциальные уравнения движения твердого тела по способу, предложенному Буром[1]). Вообразим неподвижные оси координат $Ox'y'z'$, совпадающие в рассматриваемый момент времени с нашими подвижными осями $Oxyz$, и назовем через L, M и N проекции главного момента внешних сил относительно точки O на оси Ox', Oy', Oz'. Эти проекции должны быть равны производным по времени от проекций на оси Ox', Oy', Oz' главного момента количеств движения G, т. е. должны быть равны проекциям на эти оси скорости точки, лежащей в конце вектора G. Так как скорость этой точки слагается из скорости относительно подвижных осей и скорости влечения от движения этих осей, то по формуле (15) находим:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\omega_2 - \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\omega_3, \\ M &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\omega_3 - \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\omega_1, \\ N &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\omega_1 - \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Это и будут дифференциальные уравнения движения нашего твердого тела. Если в начальный момент, когда твердое тело неподвижно, жидкие массы тоже неподвижны, т. е. все величины k равны нулю, то $P = Q = R = 0$. Уравнения (16) представляют в этом случае обыкновенные дифференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего относительно неподвижной точки эллипсоид инерции

$$f_0(x, y, z) + f(x, y, z) + f_1(x, y, z) + \ldots = 1. \qquad (17)$$

Такое твердое тело может быть получено присоедине-

[1]) Bour, Cours de Mécanique, вып. III, стр. 146.

нием к данному твердому телу вместо жидких масс неизменяемые тела, имеющие относительно точки O эллипсоиды инерции

$$f(x, y, z) = 1, \quad f_1(x, y, z) = 1, \ldots$$

Мы будем эти тела выбирать таким образом, чтобы их массы равнялись массе заменяемой жидкости и центры тяжести совпадали с ее центром тяжести. Такие твердые тела мы назовем вместе со Стоксом[1]) *эквивалентными телами*. Посмотрим, каковы должны быть центральные эллипсоиды инерции эквивалентных тел? Называя координаты центра тяжести C первой полости через ξ, η, ζ, возьмем этот центр за начало осей Cx', Cy', Cz', параллельных осям Ox, Oy, Oz, и представим уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела в виде

$$f'(x', y', z') = 1.$$

Так как момент инерции рассматриваемого тела относительно какой-нибудь оси, проходящей через точку O и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы a, b, c, равен его моменту относительно параллельной оси, проходящей через точку C, сложенному с произведением массы жидкости M в первой полости на квадрат расстояния между этими осями, то

$$f(\cos a, \cos b, \cos c) = f'(\cos a, \cos b, \cos c) + \\ + M[(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) - \\ - (\xi \cos a + \eta \cos b + \zeta \cos c)^2].$$

Заменяем здесь $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ на ω_1, ω_2, ω_3:

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\ + M[(\zeta\omega_2 - \eta\omega_3)^2 + (\xi\omega_3 - \zeta\omega_1)^2 + (\eta\omega_1 - \xi\omega_2)^2].$$

Разложим теперь движение нашей системы на поступательное со скоростями

$$\zeta\omega_2 - \eta\omega_3, \quad \xi\omega_3 - \zeta\omega_1, \quad \eta\omega_1 - \xi\omega_2$$

---

[1]) Stokes, Mathematical and Physical Papers, т. 1, стр. 65.

и вращательное относительно точки C. Вследствие этого вращательного движения жидкая масса первой полости получит скорости, имеющие потенциальную функцию φ', отличную от φ. Так как скорости нашей жидкой массы слагаются из скоростей ее центра тяжести и скоростей ее точек относительно этого центра тяжести, то по известной теореме механики ее живая сила будет равна живой силе в движении относительно центра тяжести, сложенной с половиною произведения массы на квадрат скорости центра тяжести. Отсюда следует, что

$$[\varphi, \varphi] = [\varphi', \varphi'] + M[(\zeta\omega_2 - \eta\omega_3)^2 + (\xi\omega_3 - \zeta\omega_1)^2 + (\eta\omega_1 - \xi\omega_2)^2].$$

Замечая, что $[\varphi, \varphi] = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, и сравнивая найденную формулу с предыдущею, находим:

$$f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = [\varphi', \varphi'].$$

Таким образом, уравнение центрального эллипсоида инерции первого эквивалентного тела может быть получено по формуле (11) в предположении, что неподвижная точка находится в центре первой полости. Мы видим из этого, что эквивалентные тела не зависят от места неподвижной точки O; так что, заменив все жидкие массы эквивалентными телами, мы вполне заменяем их механический эффект, будет ли твердое тело вращаться около какой-нибудь неподвижной точки или двигаться свободно (последнее видно из § 8). Из того обстоятельства, что эллипсоиды инерции эквивалентных тел заключают внутри себя эллипсоиды инерции соответственных жидких масс, следует, что *эквивалентные тела имеют относительно всякой оси меньшие моменты инерции, нежели соответствующие им жидкие массы.*

Переходим к предположению, что P, Q и R не равны нулю. Направляя оси Ox, Oy и Oz по главным осям эллипсоида, представленного уравнением (17), мы приведем это уравнение к виду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

а формулы (16) при этом обратятся в следующие:

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)\,\omega_2\omega_3 + R\omega_2 - Q\omega_3, \\ M &= B\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)\,\omega_3\omega_1 + P\omega_3 - R\omega_1, \\ N &= C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_1\omega_2 + Q\omega_1 - P\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Эти уравнения одинаковы с уравнениями движения твердого тела, к которому присоединен вращающийся жироскоп. *Ось вращения этого жироскопа образует с осями Ox, Oy, Oz углы, косинусы которых находятся в отношении*

$$P : Q : R,$$

а произведение начальной скорости жироскопа (при покоящемся твердом теле) *на момент инерции относительно оси вращения равно*

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Таким образом, эффект жидких масс, не имеющих начальных скоростей, тождествен с эффектами некоторых эквивалентных твердых тел; жидкие же массы в многосвязных полостях, получившие начальные скорости, производят, кроме того, еще влияние, подобное действию некоторого вращающегося жироскопа, присоединенного к телу.

Г. МЕТОД НЕЙМАНА.

§ 11. Вывод дифференциальных уравнений предыдущего параграфа методом Неймана. Решим нашу задачу о движении твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы, относительно неподвижной точки с помощью принципа Гамильтона. Для этого рядом с действительным движением нашей системы рассмотрим некоторые воображаемые движения ее, в которых положения твердого тела получаем из одновременных положений его в действительном движении, сообщая ему относительно подвижных осей *Oxyz*

бесконечно малые угловые перемещения $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3$; жидкость же движется без вращения частиц с теми же главными циркуляциями, как в действительном движении. Приняв, что в начале и в конце времени t имеем $\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta\theta_3 = 0$, найдем, что в эти моменты все материальные точки твердого тела в воображаемом движении займут те же места, как в действительном; относительно же частиц жидкости подобное заключение не имеет места (§ 6), поэтому, следуя Нейману, мы приложим принцип Гамильтона к одному твердому телу и напишем:

$$\int_0^t (\delta T' + L'\delta\theta_1 + M'\delta\theta_2 + N'\delta\theta_3 - \int\int p\,\delta s\cos\nu\,d\sigma)\,dt = 0, \quad (19)$$

где T' — живая сила тела, L', M', N' — суммы моментов сил, действующих на него, относительно осей Ox, Oy, Oz, а

$$-\int\int p\,\delta s\cos\nu\,d\sigma$$

— элементарная работа сил давления на стенки его полостей, совершенная при переходе тела из его действительного положения в одновременное положение в воображаемом движении.

Чтобы определить эту работу сил давления, возьмем неподвижные оси координат x', y', z' и напишем уравнения гидродинамики:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{d^2x'}{dt^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial y'} - \frac{d^2y'}{dt^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} = \frac{\partial U}{\partial z'} - \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Назовем через $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ бесконечно малые перемещения, которые надо сообщить частицам жидкости, чтобы перевести жидкие массы из их положения в действительном движении в одновременные положения в воображаемом движении: умножим вышенаписанные уравнения на

$\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ и, сложив их, сделаем во второй части некоторое преобразование:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) = \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' - \\ - \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\delta x' + \frac{dy'}{dt}\delta y' + \frac{dz'}{dt}\delta z'\right) + \delta\frac{V^2}{2}.$$

Заменяем в этом равенстве скорости жидкости произвольными от потенциальной функции скоростей Ф и, умножив его на массу частицы m, берем от обеих его частей сумму, распространенную на все жидкие массы:

$$\frac{1}{\rho}\sum m\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) = \\ = \delta\sum mU - \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\delta z'\right) + \delta\sum\frac{mV^2}{2}.$$

Здесь

$$-\sum mU = W, \quad \sum\frac{mV^2}{2} = T''$$

представляют потенциальную и кинетическую энергию жидких масс; далее по формулам (2) и (3) имеем:

$$\frac{1}{\rho}\sum m\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial p}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial p}{\partial z'}\delta z'\right) = -\int\int p\,\delta s\cos\nu\,d\sigma,$$

$$\sum m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\delta z'\right) = \\ = -\rho\int\int\Phi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma + \rho\int\int k\,\delta s'\cos\nu'\,d\sigma',$$

где интеграл с $d\sigma$ распространяется на две поверхности полостей, а интеграл с $d\sigma'$ — на одну сторону каждой перегородки. Подставляя, найдем формулу Неймана для определения работы сил давления:

$$-\int\int p\,ds\cos\nu\,d\sigma = \\ = \delta(T'' - W) + \frac{d}{dt}\rho\int\int\Phi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma - \frac{a}{dt}\rho\int\int k\,\delta s'\cos\nu'\,d\sigma'. \quad (20)$$

Внося эту формулу в формулу (19) и совершая интегрирование по времени в двух последних членах, получим:

$$\int_0^t [\delta(T' + T'' - W) + L'\delta\theta_1 + M'\delta\theta_2 + N'\delta\theta_3]\, dt - \\ - \rho \int\int k\, \delta s' \cos\nu'\, d\sigma' = 0, \qquad (21)$$

потому что в начале времени $\delta s = \delta s' = 0$, а в конце времени $\cos\nu = 0$, а $\cos\nu'$ не равен нулю. Переходим к преобразованию двукратного интеграла, входящего в полученную формулу. Рассматривая часть его, относящуюся к одной из перегородок, найдем, что она будет равна величине k, умноженной на

$$\int\int \delta s' \cos\nu'\, d\sigma'.$$

Так как в конце времени t положения перегородки в воображаемом и в действительном движениях совпадают, то этот интеграл представляет разность объемов жидкости, протекших во время t через рассматриваемую перегородку в воображаемом и действительном движениях жидкости относительно тела. По формуле (8) объем жидкости, протекшей во время t через перегородку, в действительном движении жидкости относительно тела будет:

$$\int_0^t dt \int\int \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'} + \frac{\partial\chi}{\partial n'} - \right. \\ \left. - \cos\alpha'(z\omega_2 - y\omega_3) - \cos\beta'(x\omega_3 - z\omega_1) - \cos\gamma'(y\omega_1 - x\omega_2)\right] d\sigma',$$

где n' — нормаль перегородки, взятая в сторону главного контура, а α', β', γ' — углы этой нормали с осями координат Ox, Oy, Oz. Разность таких объемов в воображаемом и действительном движении вследствие того, что

$$\delta\frac{\partial\chi}{\partial n'} = \frac{\partial\delta\chi}{\partial n'} = 0,$$

может быть представлена в виде:

$$\int_0^t dt\,\delta \int\int \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \cos\alpha'(z\omega_2 - y\omega_3) - \right.$$
$$\left. - \cos\beta'(x\omega_3 - z\omega_1) - \cos\gamma'(y\omega_1 - x\omega_2)\right] d\sigma'.$$

Если теперь введем обозначение

$$\Omega = -\rho \int\int k\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \cos\alpha'(z\omega_2 - y\omega_3) - \cos\beta'(x\omega_3 - z\omega_1) - \right.$$
$$\left. - \cos\gamma'(y\omega_1 - x\omega_2)\right] d\sigma', \qquad (22)$$

где интегралы распространяются на все перегородки, и положим

$$-\delta W + L'\delta\theta_1 + M'\delta\theta_2 + N\delta\theta_3 = L\delta\theta_1 + M\delta\theta_2 + N\delta\theta_3,$$

то наша формула (21) примет вид:

$$\int_0^t [\delta(T' + T'' + \Omega) + L\,\delta\theta_1 + M\,\delta\theta_2 + N\,\delta\theta_3]\,dt = 0.$$

Здесь, согласно обозначениям § 9,

$$T' = \tfrac{1}{2} f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$T'' = \tfrac{1}{2}[\varphi, \varphi] + \tfrac{1}{2}[\chi, \chi] + [\varphi, \chi] + \tfrac{1}{2}[\varphi_1, \varphi_1] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\chi_1, \chi_1] + [\varphi_1, \chi_1] + \cdots$$

$$[\varphi, \varphi] = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad [\varphi_1, \varphi_1] = f_1(\omega_1, \omega_2\ \omega_3), \ldots$$

По теореме Грина находим, что

$$[\varphi, \chi] + [\varphi_1, \chi_1] + \ldots = -\int\int \varphi \frac{\partial \chi}{\partial n}\, d\sigma,$$

где интеграл распространяется на все поверхности полостей и на обе стороны каждой перегородки. Так как на стенках полостей $\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$, а на стенках перегородок $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ имеет противоположные знаки для точек, лежащих с двух противопо-

ложных сторон перегородки, то

$$[\varphi, \chi] + [\varphi_1, \chi_1] + \ldots = 0.$$

С другой стороны, вследствие того, что главные циркуляции в действительном и воображаемых движениях одинаковы,

$$\delta[\chi, \chi] = \delta[\chi_1, \chi_1] = \ldots = 0.$$

На основании всего этого получаем:

$$\delta(T' + T'') = \delta \frac{1}{2}[f_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + f_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \ldots].$$

Переходим к преобразованию выражения Ω. По теореме Грина пишем равенство

$$\int\int \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int\int \varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma,$$

в котором интегралы распространены на все стенки полостей и обе стороны каждой перегородки. Так как $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ на стенках полостей равна нулю, а с двух противоположных сторон каждой перегородки имеет противоположные знаки, то вторая часть нашего равенства обращается в нуль, следовательно, равна нулю и его первая часть. Это можно написать так:

$$\int\int \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int\int k \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma',$$

где первый интеграл относится только к стенкам полостей, а второй — только к тем сторонам перегородок, нормаль которых направлена в сторону главных контуров. Преобразуем полученное равенство на основании формулы (5):

$$\int\int k \frac{\partial \varphi}{\partial n'} d\sigma' = \int\int \chi [\cos\alpha (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta (x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma (y\omega_1 - x\omega_2)] d\sigma.$$

Подставляем это равенство в выражение для Ω:

$$\Omega = -\rho \int\int \chi [\cos\alpha (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta (x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma (y\omega_1 - x\omega_2)] d\sigma + \rho \int\int k [\cos\alpha' (z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta' (x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma' (y\omega_1 - x\omega_2)] d\sigma'. \quad (23)$$

Если вообразим, что наши жидкие массы повернуты относительно осей Ox, Oy, Oz на бесконечно малые углы $\omega_1\delta t$, $\omega_2\delta t$, $\omega_3\delta t$, то перемещения их точек будут:

$$\delta x = (z\omega_2 - y\omega_3)\,\delta t, \quad \delta y = (x\omega_3 - z\omega_1)\,\delta t, \quad \delta z = (y\omega_1 - x\omega_2)\,\delta t;$$

проекции же этих перемещений на нормали dn и dn' выразятся через

$$\delta s \cos\nu = [\cos\alpha\,(z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta\,(x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma\,(y\omega_1 - x\omega_2)]\,\delta t,$$

$$\delta s' \cos\nu' = [\cos\alpha'\,(z\omega_2 - y\omega_3) + \cos\beta'\,(x\omega_3 - z\omega_1) + \cos\gamma'\,(y\omega_1 - x\omega_2)]\,\delta t;$$

так что

$$\Omega\,\delta t = -\rho\int\int \chi\,\delta s\cos\nu\,d\sigma + \rho\int\int k\,\delta s'\cos\nu'\,d\sigma'.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3), приходим к заключению, что $\Omega\,\delta t$ есть элементарная работа количеств движения жидких масс, движущихся с потенциалами скоростей χ, χ_1, ..., при сообщении им бесконечно малых вращений $\omega_1\delta t$, $\omega_2\delta t$, $\omega_3\delta t$. Но если назовем через P, Q, R проекции на оси Ox, Oy, Oz главного момента количеств движения жидких масс при покоящемся твердом теле, то найдем, что вышеупомянутая элементарная работа будет

$$P\omega_1\delta t + Q\omega_2\delta t + R\omega_3\delta t,$$

откуда

$$\Omega = P\omega_1 + Q\omega_2 + R\omega_3. \tag{24}$$

Вследствие всего сказанного формула Гамильтона принимает вид:

$$\int_0^t (\delta T + L\,\delta\theta_1 + M\,\delta\theta_2 + N\,\delta\theta_3)\,dt = 0,$$

где функция T определяется по формуле (14). Отсюда легко получить наши уравнения (16). Выражаем $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ с помощью $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$. Для этого будем рассматривать мгновенную угловую скорость нашего твердого тела как некоторый вектор и заметим, что изменения его проекций

$\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ происходят от двух причин: во-первых, оттого, что при переходе от действительного движения к воображаемому сам вектор ω изменяется, так как для получения скоростей тела в воображаемом движении надо к вращению в действительном движении прибавить вращение, составляющие которого суть $\frac{d\delta\theta_1}{dt}$, $\frac{d\delta\theta_2}{dt}$, $\frac{d\delta\theta_3}{dt}$; во-вторых — оттого, что подвижные оси Ox, Oy, Oz получают в воображаемом движении новое направление, вследствие, чего конец вектора ω получает относительно этих осей перемещения

$$\omega_2\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_2, \quad \omega_3\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_3, \quad \omega_1\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_1.$$

Соединяя изменения от этих двух причин, найдем:

$$\delta\omega_1 = \frac{d\delta\theta_1}{dt} + \omega_2\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_2,$$

$$\delta\omega_2 = \frac{d\delta\theta_2}{dt} + \omega_3\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_3,$$

$$\delta\omega_3 = \frac{d\delta\theta_3}{dt} + \omega_1\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_1.$$

Подставляя в формулу Гамильтона, представляем ее в виде уравнения

$$\int_0^t \left(\frac{\partial T}{\partial\omega_1}\frac{d\delta\theta_1}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\frac{d\delta\theta_2}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\frac{d\delta\theta_3}{dt}\right)dt + \int_0^t \left[\left(L + \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\omega_3 - \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\omega_2\right)\delta\theta_1 + \right.$$

$$\left. + \left(M + \frac{\partial T}{\partial\omega_3}\omega_1 - \frac{\partial T}{\partial\omega_1}\omega_3\right)\delta\theta_2 + \left(N + \frac{\partial T}{\partial\omega_1}\omega_2 - \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\omega_1\right)\delta\theta_3\right]dt = 0,$$

из которого прямо следуют уравнения (16).

ГЛАВА ВТОРАЯ.

А. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ПОЛОСТЬ.

§ 12. Эллипсоидальная полость. Эллиптическое вращение. Переходя к приложению нашей общей теории к примерам, мы остановимся сначала на случае эллипсоидальной полости, разобранном Ламбом. Предполагая, что полость вращается около ее центра и направив оси Ox, Oy, Oz по

осям эллиптической поверхности, ограничивающей ее, представим уравнение этой поверхности в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Косинусы углов внутренней нормали будут:

$$\cos\alpha=-\frac{hx}{a^2},\quad \cos\beta=-\frac{hy}{b^2},\quad \cos\gamma=-\frac{hz}{c^2},$$

где h — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, прикасающуюся к его поверхности в точке (x, y, z). Подставим эти величины косинусов в формулу (7) первой главы:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}=hyz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n}=hzx\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right),\quad \frac{\partial\psi_3}{\partial n}=hxy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

Положив $\psi_1=Ayz$, мы удовлетворим уравнению Лапласа; для того же, чтобы удовлетворить первому из вышенаписанных условий, которое принимает вид:

$$-Ahyz\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=hyz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

мы должны взять

$$A=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2},$$

откуда

$$\psi_1=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}yz.$$

Таким же образом найдем ψ_2 и ψ_3, так что вся функция φ будет:

$$\varphi=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\omega_1yz+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\omega_2zx+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\omega_3xy. \qquad (1)$$

Составляем уравнение эллипсоида инерции эквивалентного тела, пользуясь формулой (11) первой главы. Так как $[\psi_2, \psi_3]$, $[\psi_3, \psi_1]$, $[\psi_1, \psi_2]$ обращаются в нули, ибо они представляют интегралы, взятые от произведения двух различных координат, то главные оси искомого эллипсоида сов-

падут с осями полости, а его уравнение будет:

$$\frac{M}{5}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}x^2+\frac{M}{5}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}y^2+\frac{M}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}z^2=1, \qquad (2)$$

где M — масса жидкости в полости. Очевидно, что полуоси этого эллипсоида больше соответствующих полуосей эллипсоида инерции самой жидкой массы, который имеет уравнение

$$\frac{M}{5}(b^2+c^2)x^2+\frac{M}{5}(c^2+a^2)y^2+\frac{M}{5}(a^2+b^2)z^2=1, \qquad (3)$$

так как коэффициенты уравнения (2) получаются из коэффициентов уравнения (3) через умножение на величины

$$\left(\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right)^2, \quad \left(\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\right)^2, \quad \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2,$$

меньшие единицы. Если мы желаем дать эквивалентному телу форму эллипсоида, то должны определить его полуоси a', b', c' и плотность ρ' его вещества из формул:

$$b'^2+c'^2=\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2},$$

$$c'^2+a'^2=\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2},$$

$$a'^2+b'^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2},$$

$$\rho'=M:\frac{4}{3}\pi a'b'c'.$$

В частном случае, когда полость имеет форму шара, надо положить $a=b=c$, а потому $a'=b'=c'=0$, так что эквивалентное тело представляет в этом случае материальную точку, в которой сосредоточена вся масса M.

Пользуясь формулой (8) первой главы, в которой полагаем $\chi=0$ и заменяя φ формулой (1), находим скорости частиц жидкости относительно твердого тела:

$$\left.\begin{aligned} u&=a^2(qz-ry),\\ v&=b^2(rx-pz),\\ w&=c^2(py-qx),\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где для сокращения положено

$$p = -\frac{2\omega_1}{b^2+c^2}, \quad q = -\frac{2\omega_2}{c^2+a^2}, \quad r = -\frac{2\omega_3}{a^2+b^2}. \tag{5}$$

Линии тока рассматриваемого относительного движения выразятся дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{a^2(qz-ry)} = \frac{dy}{b^2(rx-pz)} = \frac{dz}{c^2(py-qx)},$$

которые дают нам интегралы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \text{const.},$$

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}+\frac{rz}{c^2} = \text{const.}$$

Эти интегралы показывают, что рассматриваемые линии тока представляют семейства эллипсов, по которым плоскости, сопряженные направлению $p:q:r$, пересекают семейство концентрических эллипсоидов, подобных полости.

Мы назовем найденное движение жидкости *эллиптическим вращением*. Формулы (4) показывают, что все частицы жидкости, лежащие на прямой

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

в рассматриваемый момент времени не имеют относительного движения.

Эту прямую, проходящую через центры всех эллипсов, по которым текут частицы жидкости, мы назовем осью эллиптического вращения. Формулы (5) позволяют по направлению оси вращения твердого тела найти направление оси эллиптического вращения заключенной в нем жидкости. Для этого стоит только провести к оси вращения тела перпендикулярную плоскость, прикасающуюся к эллипсоиду инерции, данному уравнением (3), и соединить точку касания с центром полости прямою, которая и будет искомою.

Так как знаки p, q, r противоположны знакам ω_1, ω_2, ω_3, то жидкая масса имеет около найденной оси эллиптическое вращение в сторону, обратную вращению тела. Если твердое

тело вращается относительно неподвижной оси, то и ось эллиптического вращения жидкой массы имеет неизменное положение внутри полости. Вышеописанные линии тока представляют при этом траектории относительного движения частиц жидкости; все частицы, лежащие в плоскости, проходящей через ось эллиптического вращения, будут оставаться в одной плоскости, вращаясь вместе с нею около этой оси; объем жидкости, заключенный между двумя такими плоскостями, не будет изменяться. Из всего этого следует, что рассматриваемое движение жидкой массы определяется изменением одного параметра. За такой параметр мы примем величину θ', которая равна произведению 2π на отношение объема жидкости, протекшей через какую-нибудь площадку, взятую внутри полости, к объему замкнутой трубки, образованной эллиптическими траекториями, проходящими через точки контура площадки. Понятно, что величина θ' не зависит от выбора площадки и обращается в так называемое угловое перемещение, когда эллиптическое вращение обращается в обыкновенное. Производная

$$\frac{d\theta'}{dt} = \omega'$$

есть величина, аналогичная угловой скорости. Определим ее. Для этого рассмотрим слой жидкости, заключенный между диаметральною плоскостью, сопряженною направлению $p : q : r$, и бесконечно к ней близкою параллельною плоскостью. Проведем из центра диаметральной плоскости какой-нибудь радиус-вектор и сделаем по нему перпендикулярное сечение нашего слоя. Полученный в сечении бесконечно малый прямоугольник примем за вышеупомянутую площадку. Величина ω' будет равна произведению 2π на отношение объема жидкой массы, протекшей в единицу времени (при неизменяющейся скорости) через построенный прямоугольник, к объему всего слоя, заключенного между нашими плоскостями; а так как это отношение может быть заменено отношением секторной скорости (vitesse

aréolaire) радиуса-вектора ко всей площади, описанной им при полном обороте, то

$$\omega'^2 = \frac{\pi^2}{s^2}[(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu)^2],$$

где s — площадь эллипса, описанного радиусом-вектором, x, y, z — координаты конца радиуса-вектора, а u, v, w — скорости, выражаемые по формулам (4). Мы находим по этим формулам, что

$$yw - zv = b^2c^2\left[p\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - x\left(\frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2}\right)\right];$$

но так как

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2} = 0,$$

то

$$yw - zv = b^2c^2p.$$

Так же получим:

$$zu - xw = c^2a^2q, \quad xv - yu = a^2b^2r.$$

Площадь s определяется с помощью длины перпендикуляра h, опущенного на нашу диаметральную плоскость из конца ее сопряженного диаметра:

$$s = \frac{\pi abc}{h}.$$

Подставляя найденные величины в формулу для ω'^2, находим

$$\omega' = h\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}p^2 + \frac{c^2a^2}{b^2}q^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}r^2};$$

то так как

$$h = \frac{\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{p}{a^4} + \frac{q^2}{b^4} + \frac{r^2}{c^4}}},$$

то

$$\omega' = abc\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}}.$$

Подставляя сюда величины p, q, r из формул (5), в которых берем

$$\omega_1 = \omega\cos\lambda, \quad \omega_2 = \omega\cos\mu, \quad \omega_3 = \omega\cos\nu,$$

найдем связь между ω' и ω:

$$\omega' = \omega\sqrt{\left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2\cos^2\lambda + \left(\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)^2\cos^2\mu + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2\cos^2\nu}.$$

Если же заменим здесь ω' на $\frac{d\theta'}{dt}$, а ω на $\frac{d\theta}{dt}$, где θ — угловое перемещение тела, и объинтегрируем, положив $\theta' = 0$ при $\theta = 0$, то получим подобную же связь между величинами θ' и θ:

$$\theta' = \theta\sqrt{\left(\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)^2\cos^2\lambda + \left(\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)^2\cos^2\mu + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2\cos^2\nu}. \quad (6)$$

Отсюда очевидно, что $\theta' < \theta$.

Таким образом, *твердое тело при своем вращении всегда упреждает жидкость, совершающую внутри полости эллиптическое вращение в обратную сторону.* Когда твердое тело совершает полный оборот и θ возрастет на 2π, θ' еще не возрастет на 2π, и жидкость не займет внутри полости прежнего места. Если корень в формуле (6) есть число соизмеримое, то можно найти такое число оборотов, после которого тело и жидкая масса займут в пространстве прежние места; в противном же случае наша система после нескольких оборотов может быть возвращена в свое первоначальное положение только посредством вращения на то же число оборотов в обратную сторону.

Б. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОЛОСТИ.

§ 13. Направления главных осей инерции эквивалентного тела. Предположим, что объем жидкости, заключенной в теле, ограничен цилиндрическою поверхностью и двумя плоскостями, нормальными к этой поверхности. Направим ось Oz параллельно образующей цилиндра, а плоскость Oxy возьмем так, чтобы она рассекала цилиндрическую полость пополам. Покажем, что при этом *одна из главных осей инер-*

ции эквивалентного тела будет направлена по оси Oz. Для этого обнаружим, что в формуле (11) первой главы

$$[\psi_2, \psi_3] = 0, \quad [\psi_3, \psi_1] = 0.$$

По теореме Грина и формуле (7) первой главы находим:

$$[\psi_2, \psi_3] = -\rho \int\int \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_3 \, d\sigma = -\rho \int\int \psi_3 (z \cos\alpha - x \cos\gamma) \, d\sigma,$$

где интеграл распространяется на всю поверхность полости. Функция ψ_3 будет в нашем случае зависеть только от x и y. Для точек, лежащих на поверхности цилиндра, надо положить $\cos\gamma = 0$, вследствие чего для двух точек, имеющих координаты x, y, z и $x, y, -z$, подинтегральные функции $\psi_3 z \cos\alpha$ будут равны по величине, но противоположны по знаку; на нижнем и верхнем дне цилиндра надо положить $\cos\alpha = 0$ и взять $\cos\gamma = +1$ для нижнего дна и $\cos\gamma = -1$ для верхнего дна, вследствие чего для точек с равными x, y подинтегральная функция $\psi_3 x \cos\gamma$ будет иметь на этих днах равные величины, но противоположные знаки. Таким образом, все элементы интеграла сокращаются, и мы получаем:

$$[\psi_2, \psi_3] = 0.$$

Точно так же докажем, что

$$[\psi_3, \psi_1] = 0.$$

§ 14. Общие формулы для относительных скоростей частиц жидкости и моментов инерции эквивалентных тел при вращении около оси, параллельной образующим цилиндра. Исследуем сначала движение жидкости, происходящее от вращения ω_3 около оси Oz. Потенциальная функция скоростей абсолютного движения выражается при этом через $\omega_3 \psi_3$, скорости же относительного движения по формуле (8) первой главы будут:

$$u = \omega_3 \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + y \right),$$

$$v = \omega_3 \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - x \right).$$

$$w = 0.$$

Введем вместо ψ_3 другую функцию $f(x, y)$, положив

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{7}$$

вследствие чего функция f, так же как и ψ_3, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Скорости относительного движения выразятся с помощью функции f в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega_3 \frac{\partial}{\partial y}\left(f + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\right), \\ v &= -\omega_3 \frac{\partial}{\partial x}\left(f + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\right), \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставив их в дифференциальное уравнение

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

и объинтегрировав его, найдем для траекторий относительного движения:

$$f + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}; \tag{10}$$

линии же тока абсолютного движения будут по формуле (7) иметь уравнения

$$f = \text{const.}$$

Так как контур перпендикулярного сечения нашей полости должен быть одною из линий семейства (10), то функция f на контуре сечения должна или равняться

$$-\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

или отличаться от этой функции на постоянную величину. Момент инерции эквивалентного тела относительно оси Oz может быть на основании формулы (7) выражен по f:

$$[\psi_3, \psi_3] = [f, f] = 2l\rho \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{11}$$

где интеграл распространяется на площадь контура, а $2l$ — длина образующей цилиндра. На основании теоремы Грина

можем представить этот момент инерции еще в таких видах:

$$[f, f] = -2l\rho \int f \frac{\partial f}{\partial n} ds = l\rho \int (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial n} ds, \qquad (12)$$

где ds есть элемент контура перпендикулярного сечения, по которому и совершается интеграция, а dn — элемент его внутренней нормали. Последний вид формулы (12) не может быть употреблен, если контур ограничен двумя линиями семейства (10), потому что тогда функция f на той и другой линии получается прибавлением к функции $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ различных постоянных величин.

Так как функция f внутри контура перпендикулярного сечения удовлетворяет уравнению (8) и имеет известное значение на самом контуре, то определение ее представляет решение задачи о распределении температуры в бесконечно длинном цилиндре по данной температуре на его поверхности; она решается с помощью тригонометрических строк, когда найдены изотермические координаты, соответствующие данному контуру. Но кроме этого, можно также пользоваться обратным приемом решения вопроса, который употреблял Сен-Венан в своей задаче о кручении призм, аналогичной нашей гидродинамической задаче. Этот прием заключается в предварительном задании функции f, удовлетворяющей уравнению (8), и в подборе входящих в нее параметров и постоянного в уравнении (10) таким образом, чтобы полученный контур имел простую форму.

§ 15. Полости в форме эллиптического цилиндра и треугольной призмы. Чтобы разъяснить прием Сен-Венана на простейших примерах, положим

$$f = \frac{k}{2}[(x + yi)^n + (x - yi)^n] = kr^n \cos n\eta,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \eta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

При $n = 2$ имеем:

$$f = k(x^2 - y^2).$$

так что формула (10) дает:

$$x^2\left(\frac{1}{2}+k\right)+y^2\left(\frac{1}{2}-k\right)=\text{const.} \tag{13}$$

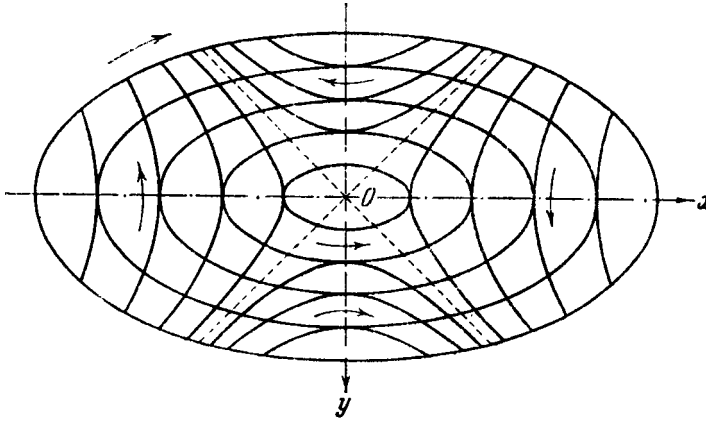
Приняв $1>2k>-1$, найдем, что траектории относительного движения будут подобные эллипсы, и полость будет иметь форму эллиптического цилиндра. Скорости относительного движения будут:

$$u=\omega_3(1-2k)\,y, \quad v=-\omega_3(1+2k)\,x,$$

откуда следует, что это движение есть эллиптическое вращение относительно оси цилиндра. Линии тока в абсолютном движении будут равносторонние гиперболы

$$k(x^2-y^2)=\text{const.}$$

На фигуре 6 представлены линии тока рассматриваемого относительного и абсолютного движений и указаны стрел-



Фиг. 6.

ками направления течений. Момент инерции эквивалентного тела определим по формуле (11):

$$[f, f]=8k^2l\rho\int\int(x^2+y^2)\,dx\,dy=k^2M(a^2+b^2),$$

где M — масса всей жидкости, а a и b — полуоси эллиптического контура, из которых первая будет большою полу-

осью при отрицательном k. Так как момент инерции эллиптического цилиндра относительно его оси есть

$$M\frac{a^2+b^2}{4},$$

то отношение момента инерции эквивалентного тела к моменту инерции соответствующей массы жидкости есть $4k^2$. Эта величина определится из уравнения

$$\frac{1+2k}{1-2k}=\frac{b^2}{a^2}$$

и будет

$$4k^2=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2. \tag{14}$$

При $n=3$ имеем:

$$f=k(x^3-3xy^2)=kr^3\cos 3\eta,$$

так что уравнения траекторий относительного движения по формуле (10) будут:

$$k(x^3-3xy^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)=c,$$

где $c=\text{const}$. Решаем это уравнение относительно y^2:

$$y^2=\frac{2kx^3+x^2-2c}{6kx-1}=\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3k}\right)^2+\frac{\frac{1}{27k^2}-2c}{6kx-1}.$$

Полагаем для большего удобства $k=\frac{1}{2a}$:

$$y^2=\frac{1}{3}\left(x+\frac{2a}{4}\right)^2+\frac{\frac{4a^2}{27}-2ac}{3x-a}. \tag{15}$$

Для контура берем ту траекторию, для которой

$$c=\frac{2a^2}{27}.$$

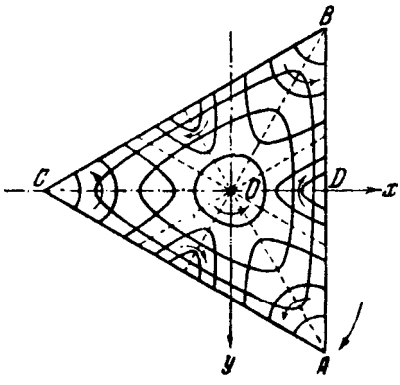
Эта траектория распадается на три прямые линии:

$$3x-a=0,$$

$$y-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{2a}{3}\right)=0,$$

$$y+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{2a}{3}\right)=0.$$

которые представляют три стороны равностороннего треугольника ABC, изображенного на фигуре 7. Высота этого треугольника $CD = a$, а стороны имеют длину $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.



Фиг. 7.

Траектория относительного движения строится с помощью уравнения (15), давая в нем числителю дроби положительные значения от 0 до $\frac{4}{27}a^3$, и имеют вид, представленный на фигуре; линии тока в абсолютном движении будут кубические гиперболы, которые представятся полярным уравнением

$$r^3 \cos 3\eta = \text{const.}$$

Момент инерции эквивалентного тела удобно вычислять по формуле (11), полагая в ней

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 = 9k^2 r^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{a}\right)^2 r^4;$$

таким образом, найдем, что

$$[f, f] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^2 l\rho \int\int (x^2 + y^2)^2\, dx\, dy = \frac{2}{5} M\left(\frac{a}{3}\right)^2. \qquad (16)$$

Так как момент инерции жидкости, заключенной в нашей треугольной призме, относительно ее оси есть $M\left(\frac{a}{3}\right)^2$, то *момент инерции эквивалентного тела около той же оси будет составлять только* $\frac{2}{5}$ *момента инерции жидкой массы.*

§ 16. Полости с контуром поперечного сечения в виде двух софокусных эллипсов. Обращаемся к контурам, образованным координатными линиями изотермической системы криволинейных координат. Пусть контур перпендикулярного

сечения данной цилиндрической полости ограничен двумя софокусными эллипсами с фокусным расстоянием c*). Направляя оси Ox и Oy по осям этих эллипсов, найдем соответственные изотермические координаты из положения:

$$\xi + i\eta = i \arccos \frac{x + iy}{c}$$

или

$$x + iy = c(\operatorname{ch}\xi \cos\eta + i \operatorname{sh}\xi \sin\eta),$$

где

$$\operatorname{ch}\xi = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}, \quad \operatorname{sh}\xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$$

суть так называемые гиперболические косинус и синус. Определим x и y:

$$x = c \operatorname{ch}\xi \cos\eta, \quad y = c \operatorname{sh}\xi \sin\eta. \tag{17}$$

Отсюда видно, что координатные линии имеют уравнения

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\xi} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\xi} = c^2, \quad \frac{x^2}{\cos^2\eta} - \frac{y^2}{\sin^2\eta} = c^2$$

и представляют семейства софокусных эллипсов и гипербол с фокусным расстоянием $2c$. Положим, что два из этих эллипсов, соответствующие параметрам $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$, ограничивают перпендикулярное сечение нашей полости с внешней и внутренней сторон. Уравнение (8), выраженное в прямоугольных изотермических координатах ξ, η, будет:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \tag{18}$$

а величина $r^2 = x^2 + y^2$ на основании уравнения (17) будет:

$$r^2 = c^2(\operatorname{ch}^2\xi \cos^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi \sin^2\eta);$$

она может быть преобразована с помощью формул:

$$(\operatorname{ch}^2\xi + \operatorname{sh}^2\xi)(\cos^2\eta + \sin^2\eta) = \operatorname{ch} 2\xi,$$

$$(\operatorname{ch}^2\xi - \operatorname{sh}^2\xi)(\cos^2\eta - \sin^2\eta) = \cos 2\eta$$

в

$$r^2 = \frac{c^2}{2}(\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta). \tag{19}$$

*) Аналогичная задача в теории кручения призм разобрана А. П. Соколовым (Задача о кручении призматических тел, § 8).

Искомая нами функция f должна внутри контура удовлетворять уравнению (18), на самом же контуре функция

$$f+\frac{c^2}{4}(\operatorname{ch} 2\xi+\cos 2\eta)$$

не должна зависеть от η. Мы удовлетворим этим требованиям, положив

$$f=(Ae^{2\xi}+Be^{-2\xi})\cos 2\eta$$

и выбрав A и B так, чтобы член, стоящий в скобках, обращался при $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$ в $-\frac{c^2}{4}$. Таким образом найдем, что

$$f=-\frac{c^2}{4}\frac{\operatorname{sh} 2(\xi_1-\xi)+\operatorname{sh} 2(\xi-\xi_2)}{\operatorname{sh} 2(\xi_1-\xi_2)}\cos 2\eta,$$

или

$$f=-\frac{c^2}{4}\frac{\operatorname{ch}(\xi_1+\xi_2-2\xi)}{\operatorname{ch}(\xi_1-\xi_2)}\cos 2\eta. \tag{20}$$

Траектории относительного движения на основании формулы (10) будут представлены уравнениями

$$\operatorname{ch} 2\xi+\frac{2\operatorname{sh}(\xi_1-\xi)\operatorname{sh}(\xi-\xi_2)}{\operatorname{ch}(\xi_1-\xi_2)}\cos 2\eta=\text{const}. \tag{21}$$

По этим траекториям частицы жидкости будут течь со скоростью V, которая в наших криволинейных координатах, на основании формулы (9), выражается через

$$V^2=\omega_3^2h^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f+\frac{1}{2}r^2\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(f+\frac{1}{2}r^2\right)\right)^2\right], \tag{22}$$

где h — первый дифференциальный параметр функций ξ и η:

$$\frac{1}{h^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2=c^2(\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta+\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\eta).$$

Это выражение дифференциального параметра может быть преобразовано на основании формул, послуживших нам для преобразования r^2:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{2}(\operatorname{ch} 2\xi-\cos 2\eta). \tag{23}$$

Составим величину скорости V для точек внутреннего контура. Так как на контуре

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(f+\frac{1}{2}r^2\right)=0,$$

то формула (22) дает нам на основании формул (19), (20) и (23):

$$V = \frac{\omega_3 c}{\sqrt{2(\operatorname{ch} 2\xi_2 - \cos 2\eta)}}\left[\operatorname{sh} 2\xi_2 + \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2)}\cos 2\eta\right].$$

Написанная величина будет тем больше, чем больше $\cos 2\eta$, так что наибольшую относительную скорость на внутреннем контуре имеют точки, лежащие на концах его большой оси, как это видно из формулы (17). Эта наибольшая скорость выражается формулою

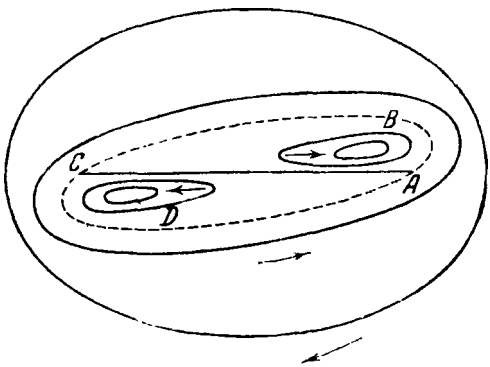
$$V = \frac{\omega_3 c}{\sqrt{2(\operatorname{ch} 2\xi_2 - 1)}}\left[\operatorname{sh} 2\xi_2 + \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2)}\right] \qquad (24)$$

и стремится к бесконечности при приближении ξ_2 к нулю. Так как при этом во всех остальных точках жидкости скорость остается конечною, то формула (24), начиная с известного значения ξ_2, дает наибольшую относительную скорость всего течения жидкости. Этого нельзя сказать вообще, так как на основании § 6 наибольшая относительная скорость может находиться и на внешнем контуре.

Случай $\xi_2 = 0$ соответствует полости, имеющей форму эллиптического цилиндра, внутри которого сделана прямоугольная пластинка, пересекающая нижнее и верхнее основания цилиндра по прямым, соединяющим фокусы. То обстоятельство, что при вращении этого цилиндра около оси, параллельной его образующей, наибольшая относительная скорость бесконечно велика, приводит нас на основании § 7 к заключению, что давление жидкости внутри такой полости тоже беспредельно велико. В действительности в этом случае происходит разрыв сплошности, на который указывает Гельмгольц [1]), и траектории частиц жидкости отступают от вида, данного уравнением (21). Внутри полости образуется некоторая поверхность раздела $ABCD$ (фиг. 8), с двух сторон которой жидкость будет течь с различными скоро-

[1]) Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

стями; но гидродинамические давления с той и другой стороны поверхности раздела должны быть, разумеется, одинаковы. Поэтому на основании формулы (9) первой главы заключаем, что при равномерном вращении разности квадратов скоростей относительного течения с обеих сторон поверхности раздела постоянны вдоль всей этой поверхности. Переходим к определению момента инерции эквивалентного тела. На основании формулы (12) имеем:



Фиг. 8.

$$[f, f] = 2l\rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{\xi_2}^{\xi_1} f \frac{df}{d\xi} \right) d\eta,$$

так как

$$dn = \frac{d\xi}{h}, \quad ds = \frac{d\eta}{h}.$$

Подставляем сюда функцию f из формулы (20):

$$[f, f] = \frac{lc^4\rho}{2} \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2)} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\eta \, d\eta = \frac{\pi}{2} lc^4\rho \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 - \xi_2)}{\operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2)}.$$

Если назовем через a, b, a', b' полуоси внешнего и внутреннего эллипса, то

$$c \operatorname{ch} \xi_1 = a, \quad c \operatorname{sh} \xi_1 = b, \quad c \operatorname{ch} \xi_2 = a', \quad c \operatorname{sh} \xi_2 = b',$$

вследствие чего найденный момент инерции получает вид:

$$[f, f] = \frac{Mc^4 (ba' - ab')}{4 (ab - a'b') (aa' - bb')}. \tag{25}$$

Для случая $b' = 0$ эта формула дает нам величину

$$[f, f] = \frac{Mc^4}{4a^2},$$

которая получается из момента инерции жидкой массы

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{4}$$

через умножение его на дробь

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2(a^2 + b^2)}.$$

Эта дробь более той, которая дается формулою (14).

§ 17. Полости с поперечным сечением в виде кругового сектора. Как второй пример рассмотрим цилиндрическую полость, перпендикулярное сечение которой имеет форму кругового сектора, соответствующего радиусу a и углу β *). Принимаем начало координат в центре круга и направляем ось Ox по одному из крайних радиусов сектора.

Соответственные изотермические координаты найдутся из уравнения

$$\xi + i\eta = \ln(x + iy),$$

из которого

$$\xi = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \eta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Функция f должна внутри сектора удовлетворять уравнению (18), а на его стенках должна обращаться в $-\frac{1}{2}e^{2\xi}$. Чтобы определить эту функцию, представляем ее суммою двух функций,

$$f = f_1 + f_2,$$

из которых первая есть

$$f_1 = -\frac{e^{2\xi}\cos(\beta - 2\eta)}{2\cos\beta}$$

и потому удовлетворяет уравнению (18) и имеет желаемую величину на крайних радиусах сектора, вторая же вследствие этого должна удовлетворять уравнению (18) внутри

*) Этот пример разобран Стоксом (Mathematical and Physical Papers т. I, стр. 305).

сектора, на его крайних радиусах должна обращаться в нуль, а на его дуге в

$$\frac{e^{2\xi}}{2}\left[\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1\right].$$

(Мы исключаем пока случай $\beta=\frac{\pi}{2}$, имея в виду от общей формулы момента инерции эквивалентного тела перейти к этому случаю в пределе.) Эту вторую функцию можно представить в виде тригонометрического ряда

$$f_2=\sum C_n e^{\frac{n\pi}{\beta}\xi}\sin\frac{n\pi}{\beta}\eta,$$

в котором n следует приписывать целые нечетные значения от 1 до ∞, потому что в пределах $0\leqslant\eta\leqslant\beta$ имеем разложение

$$\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1=\frac{16}{\pi}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\eta}{\beta}}{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2-4}+\frac{\sin\frac{3\pi\eta}{\beta}}{3\left[\left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^2-4\right]}+\frac{\sin\frac{5\pi\eta}{\beta}}{5\left[\left(\frac{5\pi}{\beta}\right)^2-4\right]}+\ldots\right\}.$$

Положив для сокращения письма $\frac{\pi}{\beta}=\nu$, найдем для определения коэффициентов C_n формулу

$$C_n=\frac{8a^2}{n\pi\left[(n\nu)^2-4\right]}\frac{1}{a^{n\nu}}.$$

Складывая найденную функцию f_2 с f_1 и выражая ξ по r, получим искомую функцию:

$$f=-\frac{r^2}{2}\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}+\frac{8a^2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{\sin n\nu\eta}{n\left[(n\nu)^2-4\right]}\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu}. \qquad (26)$$

При составлении уравнений траекторий относительного движения по формуле (10) мы разложим в них член

$$-\frac{r^2}{2}\left[\frac{\cos(\beta-2\eta)}{\cos\beta}-1\right]$$

по вышеприведенной строке, так что получим:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n\left[(n\nu)^2-4\right]}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu}-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\sin n\nu\eta=\text{const}. \qquad (27)$$

Переходя к определению величины скорости относительного движения, мы найдем ее только для точек, лежащих на крайних радиусах сектора. Полагая в формуле (22)

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f+\frac{1}{2}r^2\right)=0, \quad h=\frac{1}{r},$$

найдем:

$$V=-\omega_3 r \operatorname{tg}\beta+\frac{8\omega_3 a^\nu}{\pi}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}\frac{1}{n^2\nu^2-4}\left(\frac{r}{a}\right)^{n\nu-1}. \tag{28}$$

Всякий раз, как $\beta<\pi$, будем иметь $\nu>1$ и найдем, что скорость жидкости в центре дуги сектора равна нулю; если же $\beta>\pi$, то $\nu<1$ и скорость при $r=0$ обращается в ∞. Здесь мы опять встречаемся со случаем, при котором давление жидкости внутри полости должно бы быть бесконечно велико, если бы частицы текли в относительном движении по траекториям, данным уравнением (27); но такое беспредельное возрастание давления устраняется схождением частиц жидкости с контура перпендикулярного сечения в точке пересечения радиусов, как это указал Стокс в вышеупомянутом сочинении.

Для определения момента инерции эквивалентного тела пользуемся вторым видом формулы (12):

$$[f, f]=l\rho\int_0^a r\left|_{\beta}^{0}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)d\nu-a^3 l\rho\int_0^{\beta}\left(\left|_{a}^{\eta}\frac{\partial f}{\partial r}\right.\right)d\eta.\right.$$

Подставляя сюда формулу (26) и совершая указанные действия, получаем:

$$[f, f]=\frac{2Ma^{2\nu}}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{tg}\beta}{4}-\frac{16\nu}{\pi}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}\frac{1}{(n\nu-2)\,n\nu\,(n\nu+2)^2}\right\}. \tag{29}$$

Для $\beta=\frac{\pi}{2}$ первый и второй члены этой формулы обращаются в ∞, но разность этих членов стремится к конечному пределу. Положив $\frac{\pi}{2}-\beta=\mu$, найдем для этой разности:

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\mu}-\frac{(\pi-2\mu)^3}{\pi\mu\,(\pi-\mu)^2}\right\}=\frac{1}{\pi}.$$

Поэтому для рассматриваемого случая момент инерции эквивалентного тела будет:

$$[f, f] = \frac{2Ma^{2\nu}}{\pi^2}\left\{1 - 16\nu \sum_{n=3,5,\ldots} \frac{1}{(n\nu-2)\,n\nu\,(n\nu+2)^2}\right\}. \qquad (30)$$

Формулы (29) и (30) дают нам хорошо сходящиеся строки, с помощью которых можем вычислять моменты инерции эквивалентных тел для различных углов β. Таким образом, получаем следующий результат: если полость тела имеет форму круглого цилиндра, то момент инерции эквивалентного тела около оси цилиндра по формуле (14) равен нулю; если же разделим эту полость диаметральными перегородками на двое, четверо или восемь равных частей, то *момент инерции эквивалентного тела составит* 0,6211, 0,7904 *или* 0,9077 *от момента инерции всей жидкой массы.*

§ 18. Общие формулы для определения скоростей частиц жидкости и моментов инерции эквивалентных тел при вращении около оси, перпендикулярной к образующим. Переходим к исследованию вращательного движения около оси, перпендикулярной к образующей цилиндрической полости. Пусть вращение совершается около оси Ox. Абсолютные скорости жидкости будут при этом по формуле (6) первой главы иметь потенциальную функцию $\omega_1\psi_1$; относительные же ее скорости по формуле (8) той же главы будут:

$$u = \omega_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \quad v = \omega_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + z\right), \quad w = \omega_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - y\right).$$

Полагаем здесь $\psi_1 = F - yz$, тогда формулы скоростей относительного движения обратятся в

$$u = \omega_1 \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \omega_1 \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \omega_1\left(\frac{\partial F}{\partial z} - 2y\right); \qquad (31)$$

что же касается до функции F, то она должна внутри жидкости удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \qquad (32)$$

так как функция yz ему удовлетворяет; на стенках же цилиндра и его верхнем и нижнем основаниях она должна, по формуле (7) первой главы, давать

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \mp 2y. \tag{33}$$

Для более удобного определения момента инерции эквивалентного тела относительно оси Ox с помощью функции F обращаемся к формуле (13) первой главы. Полагая в ней $\chi = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ и заменяя относительные скорости u, v, w по формулам (31), находим:

$$[\psi_1, \psi_1] = \rho \int\int\int (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz -$$
$$- \rho \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz +$$
$$+ 4\rho \int\int\int \frac{\partial F}{\partial z}\, y\, dx\, dy\, dz - 4\rho \int\int\int y^2\, dx\, dy\, dz.$$

Первый интеграл представляет момент инерции жидкой массы, который мы назовем через A; второй интеграл может быть преобразован по теореме Грина и уравнениям (33) и соединен с третьим; в четвертом же можно совершить интеграцию по z. Таким образом, получаем:

$$[\psi_1, \psi_1] = A + 2\rho \int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F \right) y\, dx\, dy - 8\rho l \int\int y^2\, dx\, dy, \tag{34}$$

где двойная интеграция распространяется на контур перпендикулярного сечения.

Подобным же образом можем исследовать движение, происходящее от вращения ω_2, положив $\psi_2 = F' + xz$, и составить формулу для $[\psi_2, \psi_2]$, т. е. для момента инерции эквивалентного тела относительно оси Oy. Что же касается до $[\psi_1, \psi_2]$, то эту величину можно также вывести с помощью формулы (13) первой главы, положив в ней $\chi = 0$, $\omega_3 = 0$ и заменив u, v, w суммою относительных скоростей, происходящих от вращений ω_1 и ω_2. Сравнение коэффи-

циентов при произведении $\omega_1\omega_2$ даст нам тогда:

$$[\psi_1, \psi_2] = 9\rho \int\int\int xy\,dx\,dy\,dz -$$
$$- 2\rho \int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- 4\rho \int\int\int \left(x\frac{\partial F}{\partial z} - y\frac{\partial F'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Заменяем входящие сюда объемные интегралы интегралами, распространенными на площадь перпендикулярного сечения, и исключаем из них функцию F'. По теореме Грина, формулам (33) и аналогичной формуле для F' имеем:

$$\int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -2\int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F\right) x\,dx\,dy,$$
$$\int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F\right) y\,dx\,dy = -\int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F\right) x\,dx\,dy.$$

Поэтому

$$[\psi_1, \psi_2] = 18\rho l \int\int xy\,dx\,dy - 4\rho \int\int \left(\Big|_{-l}^{+l} F\right) x\,dx\,dy. \qquad (35)$$

Если полость симметрична относительно оси y, то этим свойством будет обладать и функция F. Поэтому в обоих интегралах формулы (35) подинтегральная функция будет при переходе от точки (x, y) к точке $(-x, y)$ сохранять величину, но менять знак, вследствие чего $[\psi_1, \psi_2] = 0$, и *наши оси координат будут главными осями инерции эквивалентного тела.*

Отыскание функции F, удовлетворяющей уравнениям (32) и (33), представляет большие затруднения, поэтому мы дадим решение этой задачи только в некоторых частных случаях.

§ 19. Полость в виде прямоугольного параллелепипеда. Предположим, что полость имеет форму прямоугольного параллелепипеда, который можем принять за цилиндр, дающий в сечении прямоугольник со сторонами a и b. Пусть ось Oz совпадает с ребром $2l$, а оси Ox и Oy идут по сторонам a и b среднего перпендикулярного сечения. Мы удо-

влетворим уравнению (32) и первому условию (33), положив

$$F = Cz + \sum C_n \operatorname{sh}\frac{n\pi z}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

где n суть целые числа. Составим производную по n от написанной функции F для верхнего и нижнего оснований полости

$$\frac{dF}{dn} = \mp\left(C + \sum C_n \frac{n\pi}{b}\operatorname{ch}\frac{n\pi l}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$$

и обратимся ко второму условию (33). Так как в пределах $0 \leqslant y \leqslant b$ имеем разложение

$$2y = b - \frac{8b}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi y}{b} + \ldots\right),$$

то в нашей сумме числу n надо приписывать только нечетные положительные значения. Для определения коэффициентов получаем формулы

$$C = b, \quad C_n = -\frac{8b^2}{\pi^3}\frac{1}{n^3\operatorname{ch}\frac{n\pi l}{b}},$$

так что искомая функция будет:

$$F = bz - \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^3}\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi z}{b}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi l}{b}}\cos\frac{n\pi y}{b}. \qquad (36)$$

Подставляя эту функцию в формулы (31), найдем скорости относительного движения жидкости, а по ним определим траектории, которые будут параллельны плоскости Ozy, ибо $u = 0$. Составим момент инерции эквивалентного тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси Ox. Для этого мы можем воспользоваться формулой (34), внося в нее величину F из формулы (36) и вычитая из ее второй части $\frac{Mb^2}{4}$. Так как

$$A - \frac{Mb^2}{4} = \frac{M(b^2 + 4l^2)}{12},$$

то искомый момент инерции, который мы обозначим через K, будет:

$$K = \frac{M(a^2+4l^2)}{12} - Mb^2\left\{\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \frac{b}{l} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^5} \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi l}{b}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi l}{b}}\right\}. \quad (37)$$

Мы можем в этой формуле всегда считать $2l < b$, так как от нашего произвола зависит, которое из двух ребер параллелепипеда, перпендикулярных к Ox, принять за $2l$. Строка, входящая в формулу (37), быстро сходится и может быть удобно вычисляема с помощью таблиц гиперболических тангенсов[1]). Для случая куба имеем $a = b = 2l$, поэтому

$$K = Ma^2\left\{\frac{64}{\pi^5}\sum \frac{1}{n^5}\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi}{2}} - \frac{1}{6}\right\} = 0{,}0261\, Ma^2.$$

Так как момент инерции куба есть $\frac{Ma^2}{6}$, то *момент инерции эквивалентного тела составляет только* 0,1565 *момента инерции жидкой массы.* Самому эквивалентному телу в этом случае можно дать форму шарика, радиус которого равен $0{,}2554a$.

§ 20. Полость, имеющая форму круглого цилиндра. Как второй пример рассмотрим полость, имеющую форму круглого цилиндра. Возьмем начало координат в центре полости и, положив $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\eta = \frac{y}{x}$, выразим уравнение (32) в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0. \quad (38)$$

Мы удовлетворим этому уравнению, положив

$$F = \sin\eta \sum C_n R_n \operatorname{sh}(\lambda_y z),$$

[1]) Стокс представляет момент инерции эквивалентного тела с помощью двух бесконечных строк (Mathematical and Physical Papers, т. I, стр. 64).

где R_n есть функция r, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2}\right)R_n = 0. \tag{39}$$

Если введем сюда новое независимое переменное, положив $r\lambda_n = \zeta$, то все функции R будут даны одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)R = 0. \tag{40}$$

Общий интеграл этого уравнения может быть выражен с помощью бесселевых функций первого порядка первого и второго родов [1]). Но, так как по смыслу нашей задачи при $r = 0$ должно получиться $R = 0$, потому что скорость $\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r_1}$ для точек, лежащих на оси цилиндра, не может быть бесконечною, то мы примем R значение бесселева интеграла первого порядка и первого рода:

$$R = J_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(\zeta\cos\theta)\sin^2\theta\, d\theta.$$

Что касается до λ_n, то он должен быть выбран таким образом, чтобы удолетворить первому условию (33). Если назовем через a радиус основания цилиндра, то найдем для определения величины λ_n уравнение

$$\frac{dJ_1(a\lambda_n)}{da} = 0. \tag{41}$$

Вместо того чтобы решать это уравнение относительно λ_n, мы можем определять корни ζ_n уравнения

$$\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta} = 0 \tag{42}$$

и полагать $\lambda_n = \frac{\zeta_n}{a}$. Известно, что все корни уравнения (42) действительны и представляют ряд беспредельно возрастаю-

[1]) Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen, стр. 105, 1868.

щих чисел, разность двух последовательных членов которого стремится к π. Пользуясь таблицами Ганзена, приложенными к курсу Ломмеля, мы вычислили несколько последовательных корней уравнения (42):

$$\zeta_1 = 1{,}8412; \quad \zeta_2 = 5{,}4315; \quad \zeta_3 = 8{,}5363;$$

$$\zeta_4 = 11{,}7060; \quad \zeta_5 = 14{,}8633; \quad \zeta_6 = 18{,}0155.$$

Переходим ко второму условию (33). Для этого берем от найденной функции

$$F = \sin\eta \sum C_n J_1(\lambda_n r) \operatorname{sh}(\lambda_n z)$$

производную по нормали для верхнего и нижнего дна цилиндра и приравниваем ее $\mp 2y$:

$$\mp \sin\eta \sum C_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \operatorname{ch}(\lambda_n l) = \mp 2r \sin\eta,$$

или

$$\sum C_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \operatorname{ch}(\lambda_n l) = 2r. \tag{43}$$

Для того чтобы из этого равенства определить коэффициенты C_n, выведем две вспомогательные формулы. По уравнению (39) имеем:

$$\frac{d^2 J_1(\lambda r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} = \left(\frac{1}{r^2} - \lambda^2\right) J_1(\lambda r),$$

$$\frac{d^2 J_1(\lambda_n r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_1(\lambda_n r)}{dr} = \left(\frac{1}{r^2} - \lambda_n^2\right) J_1(\lambda_n r),$$

где λ_n — корень уравнения (41), а λ — пока произвольная величина. Умножаем первое уравнение на $rJ_1(\lambda_n r)\,dr$, второе — на $rJ_1(\lambda r)\,dr$ и, совершив вычитание, берем от обеих частей полученного равенства интеграл от 0 до a:

$$a\left[\frac{dJ_1(\lambda a)}{da} J_1(\lambda_n a) - \frac{dJ_1(\lambda_n a)}{da} J_1(\lambda a)\right] = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\int_0^a (\lambda_n r) J_1(\lambda r)\, r\,dr;$$

отсюда, на основании формулы (41),

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda r)\, r\,dr = \frac{a}{\lambda_n^2 - \lambda^2}\frac{dJ_1(\lambda a)}{da} J_1(\lambda_n a).$$

Если допустим, что здесь λ есть тоже некоторый корень λ_m уравнения (41), то

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_m r)\, r\, dr = 0; \tag{44}$$

если же допустим, что λ стремится к величине λ_n, то надо обратиться к определению предельного значения второй части нашей формулы. Мы имеем по уравнению (39):

$$\lim \frac{\frac{dJ_1(\lambda a)}{da}}{\lambda_n^2 - \lambda^2} = -\frac{a}{2\lambda_n^2} \frac{d^2 J_1(\lambda_n a)}{da^2} =$$

$$= \frac{a}{2\lambda_n^2}\left[\frac{1}{a}\frac{dJ_1(\lambda_n a)}{da} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{a^2}\right) J_1(\lambda_n a)\right] =$$

$$= \frac{\lambda_n^2 a^2 - 1}{2a\lambda_n^2} J_1(\lambda_n a),$$

откуда следует, что

$$\int_0^a [J_1(\lambda_n r)]^2\, r\, dr = \frac{\lambda_n^2 a^2 - 1}{2\lambda_n^2} [J_1(\lambda_n a)]^2. \tag{45}$$

Умножаем равенство (43) на $J_1(\lambda_n r)\, r\, dr$ и берем от обеих его частей интеграл от 0 до a, пользуясь формулами (44) и (45). Это дает нам:

$$C_n = \frac{4\lambda_n}{(\lambda_n^2 a^2 - 1)\operatorname{ch} \lambda_n l\, [J_1(\lambda_n a)]^2} \int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2\, dr.$$

Чтобы определить вошедший сюда интеграл, вводим переменное ζ и пользуемся уравнением (40):

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2\, dr = \frac{1}{\lambda_n^3} \int_0^{\zeta_n} J_1(\zeta)\, \zeta^2\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^3} \int_0^{\zeta_n} \left(J_1(\zeta) - \zeta \frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta} - \zeta^2 \frac{d^2 J_1(\zeta)}{d\zeta^2}\right) d\zeta.$$

Интегрируем по частям, обращая внимание на уравнение (42):

$$\int_0^{\zeta_n} J_1(\zeta)\,d\zeta = J_1(\zeta_n)\zeta_n - \int_0^{\zeta_n} \zeta \frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta}\,d\zeta,$$

$$-2\int_0^{\zeta_n} \zeta \frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta}\,d\zeta = \int_0^{\zeta_n} \zeta^2 \frac{d^2J_1(\zeta)}{d\zeta^2}\,d\zeta.$$

Следовательно,

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\,r^2\,dr = \frac{J_1(\zeta_n)\,\zeta_n}{\lambda_n^3}. \tag{46}$$

Подставляем эту величину в формулу для C_n и заменяем в найденном результате λ_n на $\frac{\zeta_n}{a}$:

$$C_n = \frac{4a^2}{\zeta_n(\zeta_n^2-1)\operatorname{ch}\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)J_1(\zeta_n)}.$$

Теперь мы можем окончательно составить нашу функцию F:

$$F = 4a^2\sin\eta\sum \frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2-1)}\frac{J_1\left(\zeta_n\frac{r}{a}\right)}{J_1(\zeta_n)}\frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n\frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n\frac{l}{a}\right)}. \tag{47}$$

Внутреннее движение жидкости в цилиндрической полости по формулам (31) будет слагаться из движения, для которого найденная функция F есть потенциал скоростей, и из движения, параллельного оси цилиндра, со скоростями $-2r\omega_1\sin\eta$. Поэтому, обозначив для сокращения письма вторую часть уравнения (47) через $2\sin\eta\,f(r, z)$, найдем для определения движения в цилиндрических координатах уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = 2\omega_1\sin\eta\cdot\left(-r+\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{dr}{dt} = 2\omega_1\sin\eta\cdot\frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\omega_1\cos\eta\cdot\frac{f}{r^2}.$$

Определим с помощью этих формул уравнения траекторий частиц жидкости на поверхности цилиндрической полости. Так как при $r = a$ имеем $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$, то второе из вышенаписанных уравнений дает $r = \text{const.}$, а первое и третье по исключении dt и разделении переменных дают:

$$d \ln \cos \eta = \frac{2 \sum \frac{1}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)} \frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)} \frac{dz}{a}}{1 - 2 \sum \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} \frac{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}},$$

откуда по интеграции находим, что

$$\cos \eta = \cos \eta_0 \, e^{\chi(z)},$$

где η_0 есть значение η при $z = 0$, а

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{2 \sum \frac{1}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)} \frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)} \frac{dz}{a}}{1 - 2 \sum \frac{1}{(\zeta_n^2 - 1)} \frac{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{z}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}}.$$

Найденное уравнение представляет нам кривые линии двойной кривизны, расположенные симметрически относительно плоскостей Oxy и Ozx.

Переходим к определению момента инерции эквивалентного тела. Величины, независимые от функции F, в формуле (34) будут:

$$A = M\left(\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right); \quad -8\rho l \int\int y^2 \, dx \, dy = -Ma^2;$$

член же, зависящий от F, вследствие того, что значения этой функции при $z = l$ и $z = -l$ противоположны

по знаку, выразится интегралом

$$4\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{a} F r^2 \sin\eta \, d\eta \, dr =$$

$$= 16\rho a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\eta \, d\eta \sum \frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2-1)} \frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}{J_1(\zeta_n)\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)} \int_0^{a} J_1(\lambda_n r) r^2 \, dr.$$

Взявши интегралы во второй части, причем последний получается по формуле (46), составим искомый момент инерции эквивалентного тела:

$$[\psi_1, \psi_1] = M\left(\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right) -$$

$$- Ma^2\left\{1 - 8\frac{a}{l}\sum \frac{1}{\zeta_n^3(\zeta_n^2-1)} \frac{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{l}{a}\right)}\right\}. \quad (48)$$

Вычисление этой формулы производится с помощью вышеприведенных значений корней ζ_n и таблиц гиперболических тангенсов. Положив $a = l$, мы нашли $[\psi_1, \psi_1] = 0{,}0953\, Ma^2$, и так как момент инерции жидкой массы в этом случае есть $\frac{7}{12} Ma^2$, то найденный момент инерции эквивалентного тела составляет его 0,1633 часть.

В. О ПОЛОСТЯХ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ.

§ 21. Вращение около оси полости. Вращение около оси, перпендикулярной к оси полости. Потенциал скоростей. Дифференциальные уравнения линий тока и моменты инерции эквивалентных тел. Уравнения для присоединенных сферических функций первого рода и их некоторые свойства. Легко видеть, что вращательное движение около оси полости, имеющей форму тела вращения, не вызывает никакого абсолютного движения жидкости. Действительно, если направим ось Oz по оси вращения полости, то найдем:

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y},$$

откуда по формуле (7) первой главы убедимся, что $\frac{\partial\psi_3}{\partial n} = 0$, т. е. $\psi_3 = \text{const}$. Вследствие этого находим $[\psi_3, \psi_3] = [\psi_2, \psi_3] = [\psi_3, \psi_1] = 0$ и заключаем, что *эквивалентное тело представляет бесконечно тонкую палочку, расположенную по оси полости и имеющую массу жидкости M и длину, которая при точке O в центре полости будет*

$$\sqrt{\frac{12\,[\psi_1, \psi_1]}{M}}.$$

Весь вопрос состоит в определении движения жидкости, происходящего от вращения тела около оси, перпендикулярной к оси полости, например около оси Ox. Вообразим систему полярных координат, имеющих полюсом точку O, полярною осью Oz и первым меридианом плоскость Ozx; назовем радиус-вектор через r, полярный угол — через θ и долготу — через η. Условие $\Delta_2\psi_1 = 0$ представится в этих новых координатах таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2} = 0.$$

Предполагаем, что

$$\psi_1 = \sin\eta\cdot F(r,\ \theta)$$

и определяем функцию F уравнением

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) - \frac{F}{\sin^2\theta} = 0. \qquad (49)$$

Условие, стесняющее функцию F на поверхности полости, по первому уравнению (7) первой главы будет:

$$\sin\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial n} = y\cos\gamma - z\cos\beta.$$

Построим для рассматриваемой точки поверхности меридиональное сечение и проведем в нем через полюс O радиус-вектор r и линию On, идущую в направлении внутренней нормали точки. Угол θ считается от оси Oz до r так, чтобы он был менее 180°; угол же γ будем отсчитывать от Oz до вектора On в ту же сторону, как дугу θ,

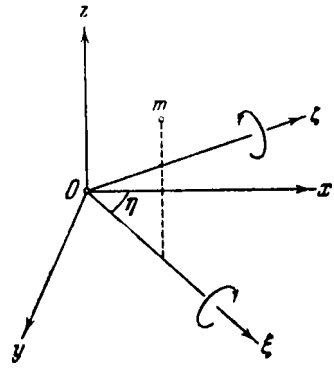
так что γ будет получать значения от 0° до 360°. Подставляя в вышенаписанную формулу

$$y = r \sin\theta \sin\eta, \quad z = r\cos\theta, \quad \cos\beta = \sin\gamma \sin\eta,$$

найдем, что

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -r\sin(\gamma - \theta) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(r^2). \tag{50}$$

Здесь направление элемента контура ds меридионального сечения (его половины) получим, повернув элемент внутренней нормали dn на прямой угол в плоскости меридионального сечения так, чтобы для наблюдателя, смотрящего с той стороны контура, в которую угол η возрастает, вращение пришлось против стрелки часов.



Фиг. 9.

Когда функция F будет найдена, то скорости относительного движения могут быть составлены по формуле (8) первой главы, но будет удобнее вывести их самостоятельно, замечая, что относительное движение слагается от абсолютного и вращательного движения в обратную сторону вращению тела. Проведя через точку жидкости m меридиональное сечение $zO\xi$, назовем проекцию радиуса-вектора $Om = r$ на ось $O\xi$ через ξ (фиг. 9): разложим угловую скорость ω_1, совершающуюся около оси Ox по часовой стрелке, на скорости $\omega_1\cos\eta$ и $\omega_1\sin\eta$, совершающиеся в том же направлении около оси $O\xi$ и оси $O\zeta$, перпендикулярной к плоскости $zO\xi$. От этих вращений точка m получит скорость $-z\omega_1\cos\eta$, перпендикулярную к плоскости $zO\xi$, и скорости $\xi\omega_1\sin\eta$, $-z\omega_1\sin\eta$, параллельные осям Oz и $O\xi$; скорости же абсолютного движения по направлению Oz, $O\xi$ и перпендикулярно к меридиональному сечению найдутся как соответствен-

ные производные от функции $F\sin\eta$. Таким образом, внутреннее движение жидкости выразится уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\omega_1 \sin\eta \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \xi\right), \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\omega_1 \sin\eta \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} + z\right), \\ \xi \frac{d\eta}{dt} &= -\omega_1 \cos\eta \cdot \left(\frac{F}{\xi} + z\right). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z} - \xi}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi} + z}, \tag{52}$$

т. е. *одно из семейств поверхностей тока в относительном движении есть семейство поверхностей вращения.* Когда уравнение (52) проинтегрировано, и z выражен в функции ξ, то η определяется квадратурою:

$$\ln\cos\eta = -\int \frac{\dfrac{1}{\xi}F + z}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi} + z}\, d\xi. \tag{53}$$

Эта формула дает уравнение траекторий частиц жидкости на соответствующей поверхности вращения.

Переходим к определению момента инерции $[\psi_1, \psi_1]$. По теореме Грина получаем формулу

$$[\psi_1, \psi_1] = -\rho \int\int \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\, d\sigma = -\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\eta\, d\eta \int F \frac{\partial F}{\partial n}\, \xi\, ds,$$

которая, по совершении интеграции по η и замене $\dfrac{\partial F}{\partial n}$ его величиною по формуле (50), обращается в

$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{\pi}{2}\rho \int F\xi\, d(r^2). \tag{54}$$

Интеграции здесь совершаются только по одной половине меридионального сечения в направлении, указанном при выводе формулы (50).

При решении задач о полостях, имеющих форму тел вращения, мы можем, так же как при исследовании цилиндрических полостей, или отыскивать функцию F по данной полости, или задаваться наперед функциею F, удовлетворяющею уравнению (49), и по уравнению (52) определять форму полости.

При употреблении этого последнего приема мы будем полагать

$$F = \sum B_n r^n \vartheta_n^{(1)}, \tag{55}$$

где n — целые и положительные числа, а $\vartheta_n^{(1)}$ суть сферические функции, принадлежащие к так называемым «*Zugeordnete Funktionen erster Art*». Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]\vartheta_n^{(1)} = 0, \tag{56}$$

которое получается при подстановке в уравнение (49) вместо F функции $r^n\vartheta_n^{(1)}$, и могут быть представлены произведением $\sin\theta$ на некоторую целую и рациональную функцию $(n-1)$ степени от $\cos\theta$. Полагая в уравнении (56)

$$\vartheta_n^{(1)} = \sin\theta \cdot T$$

и принимая за независимое переменное $\cos\theta = \mu$, находим, что

$$(1-\mu^2)\frac{d^2T}{d\mu^2} - 4\mu\frac{dT}{d\mu} + (n-1)(n+2)T = 0.$$

Подставляем сюда

$$T = C_n(\mu^{n-1} + a_1\mu^{n-3} + a_2\mu^{n-5} + \ldots),$$

находим, приравнивая нулю коэффициент при μ^{n-1}, тождество

$$(n-1)(n+2) - (n-1)(n+2) = 0;$$

приравнивая же нулю коэффициент при μ^{n-2k-1}, получаем:

$$a_k = -a_{k-1}\frac{(n-2k+1)(n-2k)}{2k(2n-2k+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\vartheta_n^{(1)} = C_n \sin\theta\left\{\cos^{n-1}\theta - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}\cos^{n-3}\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-5}\theta\ldots\right\}. \quad (57)$$

Кроме этой формы функции $\vartheta_n^{(1)}$, нам еще понадобится ее выражение однородною функциею n-й степени от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Это выражение могло бы быть получено из формулы (57) через умножение ее второго члена на $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, третьего — на $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2$ и т. д. Но удобнее для этой цели воспользоваться приемом Томсона и Тэта [1]). Положим, что

$$p = y + ix, \quad q = y - ix,$$

тогда

$$x = \frac{p-q}{2i}, \quad y = \frac{p+q}{2}, \quad pq = \xi^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

и уравнение Лапласа дает нам:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -4\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}.$$

Предполагаем, что функция T представляется в виде

$$T = \cos^{n-1}\theta + b_1\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta + b_2\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta + \ldots$$

Умножив ее на $r^n\sin\eta\sin\theta$, найдем, что функция

$$y(z^{n-1} + b_1 z^{n-3}\xi^2 + b_2 z^{n-5}\xi^4 + \ldots) =$$
$$= \frac{p+q}{2}(z^{n-1} + b_1 z^{n-3}pq + b_2 z^{n-5}p^2q^2 + \ldots)$$

[1] Natural Philosophy, ч. I, стр. 188, 1879. Обозначение $\vartheta_n^{(1)}$ мы заимствуем из этого же сочинения, стр. 205.

должна удовлетворять уравнению Лапласа. Это дает нам весьма простое соотношение между коэффициентами b:

$$b_k = -b_{k-1}\frac{(n-2k+1)(n-2k)}{4(k+1)k}.$$

Таким образом, получаем:

$$\vartheta_n^{(1)} = \sin\theta\left\{\cos^{n-1}\theta - \frac{(n-1)(n-2)}{4\cdot 2\cdot 1}\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta - \ldots\right\}. \quad (58)$$

Сравнивая коэффициент при наибольшей степени $\sin\theta$ в формуле (58) с коэффициентом наименьшей степени $\cos\theta$ в формуле (57), найдем величину постоянного C_n:

$$C_n = 2\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\ldots(n+1)}.$$

Функции $\vartheta_n^{(1)}$ играют в задаче о полостях, имеющих форму тел вращения, такую же роль, какую $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$ играют в цилиндрических полостях.

§ 22. Коническая полость. Для первого примера положим в формуле (55)

$$B_1 = k, \quad B_2 = l, \quad B_3 = 4m, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = 0, \ldots;$$

найдем по формуле (58)

$$F = k\xi + lz + m(4\xi z^2 - \xi^3).$$

Здесь k, l, m суть параметры, которыми мы можем располагать для получения более простой формы меридионального сечения. По формуле (52) найдем для поверхностей тока во внутреннем движении жидкости уравнение

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{8m\xi z + (l-1)\xi}{4mz^2 - 3m\xi^2 + (l+1)z + k},$$

которое можно привести к линейному виду:

$$\frac{d\xi^2}{dz} + \frac{3m}{4mz - \frac{1-l}{2}}\xi^2 - \frac{4mz^2 + (1+l)z + k}{4mz - \frac{1-l}{2}} = 0.$$

Полагаем для простоты $l = 1$, что соответствует известному выбору места начала координат на оси вращения полости.

Получаем:

$$\frac{d\xi^2}{dz}+\frac{3}{4z}\xi^2-z-\frac{1}{2m}-\frac{k}{4mz}=0.$$

Интеграл этого уравнения будет:

$$\xi^2=\frac{4}{11}\left(z^2+\frac{11}{14}\frac{z}{m}+\frac{11}{12}\frac{k}{m}\right)+\frac{\text{const.}}{z^{3/4}}.$$

Приписываем параметру k такое значение, чтобы трехчлен в скобках обратился в полный квадрат, т. е. полагаем

$$k=\frac{33}{196\,m},$$

тогда

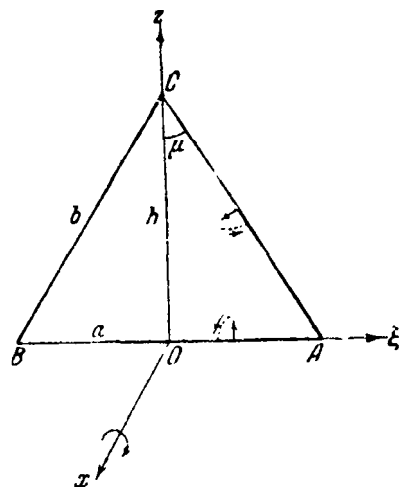
$$\xi^2=\frac{4}{11}(h-z)^2+\frac{\text{const.}}{z^{3/4}}, \quad (59)$$

где для сокращения положено

$$h=-\frac{11}{28\,m}.$$

Коэффициенты m и k выражаются по h следующим образом:

$$m=-\frac{11}{28h}, \quad k=-\frac{3}{7}h,$$



Фиг. 10.

так что рассматриваемая функция F обращается в

$$F=\frac{11}{28h}(\xi^3-4\xi z^2)+\xi z-\frac{3}{7}h\xi. \quad (60)$$

Для контура меридионального сечения полагаем в уравнении (59) const. $=0$. При таком положении это уравнение распадается на уравнения трех прямых линий:

$$z=0,$$

$$\xi-\frac{2}{\sqrt{11}}(h-z)=0,$$

$$\xi+\frac{2}{\sqrt{11}}(h-z)=0,$$

которые представляют три стороны равнобедренного треугольника ABC (фиг. 10), имеющего высоту h и основание

$$2a=\frac{4}{\sqrt{11}}h.$$

Обозначая через 2μ угол при вершине этого треугольника, найдем:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{2}{\sqrt{11}},$$

так что $\mu = 31^\circ 5' 27{,}3''$. Для получения момента инерции эквивалентного тела мы должны подставить F из формулы (60) в формулу (54) и совершить интеграцию по OA и AC. Повернув против часовой стрелки внутреннюю нормаль на контуре OA, получим направление от A к O, в котором надо совершить интеграцию; вместо этого можно изменить знак в интеграле формулы (54) и совершить интеграцию от O до A. Таким образом, найдем для контура OA:

$$-\pi\rho\int_0^a \left(\frac{11}{28h}\xi^3 - \frac{3}{7}h\xi\right)\xi^2 d\xi = \frac{Ma^2}{4},$$

где M — масса всей жидкости. Интеграцию по AC надо совершить от C до A. Приняв за переменное интеграции ξ, полагаем в формуле (54)

$$z = h - \frac{\sqrt{11}}{2}\xi, \quad r^2 = \xi^2 + \left(h - \frac{\sqrt{11}}{2}\xi\right)^2.$$

Находим:

$$\pi\rho\int_0^a \left(-\frac{110}{28h}\xi^3 + \frac{15}{14}\sqrt{11}\xi^2 - h\xi\right)\left(\frac{15}{4}\xi - \frac{\sqrt{11}}{2}h\right)\xi\, d\xi = \frac{Ma^2}{56}.$$

Из сказанного заключаем, что

$$[\psi_1, \psi_2] = \frac{Ma^2}{4} + \frac{Ma^2}{56} = \frac{15}{56}Ma^2. \tag{61}$$

Определив относительно той же оси Ox момент инерции жидкой массы, найдем для него величину

$$\pi\rho\left(\frac{ha^4}{20} + \frac{h^3a^2}{30}\right) = \frac{17}{40}Ma^2.$$

Вычитая из найденного момента инерции эквивалентного тела и этого момента инерции жидкой массы величину

$$\frac{Mh^2}{16} = \frac{11}{64}Ma^2,$$

получим моменты инерции эквивалентного тела и жидкой массы относительно оси, проходящей через центр тяжести конуса параллельно его основанию. Первый из них будет иметь величину

$$\frac{43}{448} Ma^2,$$

а второй

$$\frac{81}{320} Ma^2.$$

Таким образом, *в случае конической полости рассматриваемого вида момент инерции эквивалентного тела составляет* $\frac{215}{567}$ *от момента инерции жидкой массы.* Эта дробь близка к дроби $\frac{2}{5}$, найденной нами для трехгранной призмы.

Определим уравнения траекторий относительного движения, останавливаясь только на тех частицах жидкости, которые лежат на поверхности нашей конической полости. Для частиц, лежащих на дне конуса, мы должны подставить в формулу (53)

$$z = 0, \quad F = \frac{\sqrt{11}}{14a}(\xi^3 - 3a^2\xi), \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{3\sqrt{11}}{14a}(\xi^2 - a^2).$$

Это дает:

$$-\ln\cos\eta = \int\left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\xi - a} + \frac{1}{\xi + a}\right)\right]d\xi,$$

откуда

$$\cos\eta = \text{const.}\left(\frac{a^2 - \xi^2}{\xi^3}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{62}$$

При const. $= 0$ находим $\eta = \frac{\pi}{2}$, т. е. одна из траекторий будет направлена по диаметру BA (фиг. 11), перпендикулярному к оси вращения Ox; при const. $= \infty$ получаем $\xi = a$, что дает траекторию, совпадающую с окружностью основания. Все другие траектории будут представлены дугами кривых третьего порядка, проходящими через точки A и B.

Для получения траектории частиц, лежащих на боковой поверхности конуса, подставляем в формулу (53):

$$z = \frac{\sqrt{11}}{2}(a - \xi),$$

$$F = \frac{\sqrt{11}}{2a}\left(-\frac{10}{7}\xi^3 + \frac{15}{7}\xi^2 a - \xi a^2\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{11}}{2a}\left(-\frac{8}{7}\xi^2 + \frac{15}{7}a\xi - a^2\right)^{*}).$$

Это дает нам:

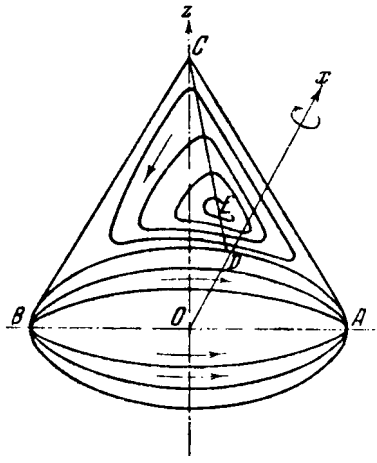
$$-\ln\cos\eta = \int\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4(a-\xi)}\right)d\xi,$$

откуда

$$\cos\eta = \text{const.}\,\frac{1}{\xi(a-\xi)^{1/4}}.$$

Если назовем через s расстояние точки от вершины конуса и через b — длину образующей конуса, то можем, изменив постоянное в найденном уравнении, заменить в нем ξ и a на s и b:

$$\cos\eta = \frac{\text{const.}}{s(b-s)^{1/4}}. \qquad (63)$$



Фиг. 11.

При const. $= 0$ мы удовлетворим этому уравнению, полагая или $\eta = \frac{\pi}{2}$, или $s = b$, т. е. траектория в этом случае представляется (фиг. 11) образующими CA и CB и полуокружностью ADB. Замечая далее, что знаменатель второй части

*) Надо сперва взять частную производную F [формула (60)] по ξ, а затем подставить $z = \frac{\sqrt{11}}{2}(a - \xi)$. (*Прим. ред.*)

уравнения (63) имеет наибольшее значение при $s=\frac{4}{5}b$, находим, что при const. $=\frac{4}{5}b\left(\frac{1}{5}b\right)^{1/4}$ траектория обращается в точку E, лежащую на образующей CD на расстоянии $\frac{1}{5}$ этой образующей от точки D. Все остальные траектории, соответствующие величинам постоянного между нулем и $\frac{4}{5}b$, представляют замкнутые кривые двойной кривизны, заключающие внутри себя точку E и заключенные внутри контура $ACBDA$. Наибольшее значение угла η для этих траекторий найдется из формулы

$$\cos\eta=\frac{\text{const.}}{\frac{4}{5}b\left(\frac{1}{5}b\right)^{1/4}}.$$

При отрицательных значениях const. найдем на задней стороне боковой поверхности конуса такие же траектории, как на передней его стороне. На фигуре 11 указаны стрелками направления течений жидкости.

§ 23. Односвязная и кольцевидная полости, ограниченные гиперболоидами. Для второго примера полагаем в формуле (55)

$$B_1=0,\quad B_2=k,\quad B_3=0,\quad B_4=4l,\quad B_5=0,\quad B_6=0,\ \ldots$$

Получаем

$$F=k\xi z+l(4\xi z^3-3\xi^3 z),$$

где k и l суть некоторые параметры. Составляем по формуле (52) дифференциальное уравнение поверхностей тока:

$$\frac{dz}{d\xi}=\frac{12\xi z^2-3\xi^3+m\xi}{4z^3-9\xi^2 z+nz},$$

где для сокращения положено

$$m=\frac{k-1}{l},\quad n=\frac{k+1}{l}.$$

Представив это дифференциальное уравнение в виде

$$dz^2(4z^2-9\xi^2+n)-d\xi^2(12z^2-3\xi^2+m)=0,$$

делаем подстановку

$$\xi^2 = p + \alpha^2, \quad z^2 = q + \beta^2,$$

в которой постоянные величины α^2 и β^2 выбираем так, чтобы

$$4\beta^2 - 9\alpha^2 + n = 0, \quad 12\beta^2 - 3\alpha^2 + m = 0.$$

Получаем однородное уравнение

$$dq\,(4q - 9p) - dp\,(12q - 8p) = 0,$$

или

$$d\,(4q^2 + 3p^2 - 21pq) = 3\,(q\,dp - p\,dq).$$

Это уравнение, по разделении на интегрирующий делитель

$$4q^2 + 3p^2 - 21pq$$

и совершении интеграции, дает нам:

$$(p - \lambda_1 q)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}\,(p - \lambda_2 q)^{\lambda_1 - \lambda_2 + 1} = \text{const.},$$

где λ_1 и λ_2 суть корни уравнения

$$\lambda^2 - 7\lambda + \frac{4}{3} = 0.$$

Эти корни суть:

$$\lambda_1 = 6{,}804, \quad \lambda_2 = 0{,}196,$$

так что наше уравнение будет иметь вид:

$$(p - \lambda_1 q)^{5{,}608}\,(p - \lambda_2 q)^{7{,}608} = \text{const.} \qquad (64)$$

Для меридионального сечения полости принимаем const. $= 0$; при этом уравнение (64) распадается на два уравнения:

$$p - \lambda_1 q = 0, \quad p - \lambda_2 q = 0,$$

или

$$\xi^2 - \lambda_1 z^2 = \alpha^2 - \lambda_1 \beta^2, \quad \xi^2 - \lambda_2 z^2 = \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2.$$

Найденные уравнения представляют две гиперболы (фиг. 12), пересекающиеся в точках $\xi = \pm\alpha$, $z = \pm\beta$. Асимптоты этих гипербол образуют с осью $O\xi$ углы $\mu_1 = 20°58'31''$, $\mu_2 = 66°7'12''$. Если

$$\lambda_1 > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 > \lambda_2,$$

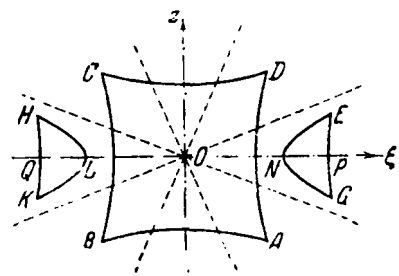
то действительная ось первой гиперболы будет направлена по Oz, а второй — по $O\xi$. Обе гиперболы в этом случае образуют, пересекаясь между собою, криволинейный четырехугольник $ABCD$, вписанный в прямоугольник со сторонами, равными 2α и 2β. Если же

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 > \lambda_1,$$

то обе гиперболы будут иметь действительную ось $O\xi$ и образуют, пересекаясь между собою, два симметрических замкнутых контура $EPGN$ и $HQKL$, расположенных вправо и влево от оси Oz. Наконец, при

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \lambda_2,$$

обе гиперболы имеют действительную ось Oz и образуют, пересекаясь между собою, два симметрических замкнутых контура, расположенных сверху и снизу от оси $O\xi$. Из этих трех случаев для нас наиболее интересен второй, так как в нем мы получаем *кольцевидную полость*. Поэтому при составлении момента инерции эквивалентного тела мы займемся только этим вторым случаем, предоставляя читателю распространить предложенный способ интеграции на первый и третий случаи. Согласно сказанному выше, мы должны в формуле (54) совершить интеграцию по контуру GNE в направлении от G до E и по контуру EPG — в направлении от E до G. Так как найденная нами функция F изменяет знак с изменением знака z, то искомый момент инерции представится разностью удвоенного интеграла формулы (54), взятого по NE, и подобного удвоенного интеграла, взятого по PE. Выражая k и l через α^2 и β^2, находим:



Фиг. 12

$$l = \frac{1}{3\alpha^2 + 4\beta^2}, \quad k = 2\frac{3\alpha^2 - 4\beta^2}{3\alpha^2 + 4\beta^2};$$

подставляя же эти величины в функцию F, получаем:

$$F = \frac{\xi z}{3\alpha^2 + 4\beta^2}[4z^2 - 3\xi^2 - 2(4\beta^2 - 3\alpha^2)]. \qquad (65)$$

Таким образом, искомый момент инерции эквивалентного тела представится разностью интегралов

$$\frac{\pi\rho}{4\beta^2 + 3\alpha^2}\int_0^\beta \xi^2 z\,[4z^2 - 3\xi^2 - 2(4\beta^2 - 3\alpha^2)]\,d(\xi^2 + z^2),$$

взятых по контурам NE и PE по независимому переменному z. Для получения первого интеграла надо подставить

$$\xi^2 = \alpha^2 - \lambda_1\beta^2 + \lambda_1 z^2,$$

что даст нам после интегрирования:

$$\frac{2\pi\rho(1+\lambda_1)\beta^3}{105(4\beta^2 + 3\alpha^2)}(105\alpha^4 - 196\alpha^2\beta^2 + 88\lambda_1\beta^4 - 24\lambda_1^2\beta^4).$$

Второй интеграл получаем, изменяя в найденном результате λ_1 на λ_2. Произведя вычисления и заменяя $\lambda_1 + \lambda_2$ через 7 и $\lambda_1\lambda_2$ через $\frac{4}{3}$, находим окончательно:

$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{2\pi\rho\beta^3(\lambda_1 - \lambda_2)}{105(4\beta^2 + 3\alpha^2)}(105\alpha^4 - 196\alpha^2\beta^2 - 608\beta^4). \qquad (66)$$

§ 24. Полость в форме полусферы. Рассмотрим теперь пример, в котором функция F определяется по заданной полости. Положим, что меридиональное сечение представляет полукруг ACB (фиг. 13), так что полость имеет форму полушара, и возьмем начало координат в центре сферы. По формуле (50) функция F на радиусе OA должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \xi,$$

а на дуге AC должна давать

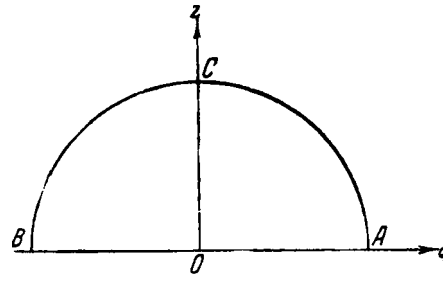
$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0.$$

Положим $F = z\xi + \Phi$, где $z\xi = r^2\vartheta_2^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (49); тогда функция Φ будет стеснена следующими условиями: внутри контура OAC она должна удовлетворять уравнению (49); на радиусе OC она должна обращаться в нуль; на дуге круга AC

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -a \sin 2\vartheta,$$

а на радиусе OA

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0.$$



Фиг. 13.

Посмотрим, нельзя ли удовлетворить всем этим условиям положением $\Phi = \sum A_n r^n \vartheta_n^{(1)}$. Первое и второе условия будут при этом удовлетворены; третье же условие даст

$$\sum A_n n a^{n-1} \vartheta_n^{(1)} = -a \sin 2\vartheta. \tag{67}$$

Вторая часть этого равенства может быть в пределах $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ разложена в тригонометрический ряд

$$-a \sin 2\vartheta = -\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\sin\vartheta}{3} + \frac{\sin 3\vartheta}{5} - \frac{\sin 5\vartheta}{21} + \ldots + (-1)^k \frac{\sin(2k-1)}{(2k-1)^2-4}\ldots\right);$$

останавливаясь в нем на k-том члене, можем все входящие сюда синусы нечетных дуг выразить линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}, \ldots, \vartheta_{2k-1}^{(1)}$ и, таким образом, представить вторую часть уравнения (67) с желаемою степенью точности через функции $\vartheta_n^{(1)}$ нечетного порядка: синусы нечетных дуг могут быть представлены линейными функциями от $\sin\vartheta$, $\sin\vartheta\cos^2\vartheta$, $\sin\vartheta\cos^4\vartheta$, ..., а эти члены по формуле (57) представляются линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}, \vartheta_5^{(1)}, \ldots$ Таким образом, мы можем удовлетворить условию (67), приписывая n только нечетные значения, чем удовлетворяется

четвертое условие, так как при $\theta = \frac{\pi}{2}$ для нечетных n имеем по уравнению (57):

$$\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta} = 0.$$

Для того чтобы определить коэффициенты A, напомним читателю две формулы относительно функций $\vartheta_n^{(1)}$. Считая указатели n и n' оба нечетными или оба четными, напишем на основании формулы (56):

$$\frac{\vartheta_{n'}^{(1)}}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta}\right) - \frac{\vartheta_n^{(1)}}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta}\right) + \\ + [n(n+1) - n'(n'+1)]\,\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)} = 0.$$

Умножим это равенство на $\sin\theta\,d\theta$ и возьмем от его первой части интеграл между пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$:

$$\left[\sin\theta\left(\vartheta_{n'}^{(1)}\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta} - \vartheta_n^{(1)}\frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = [n'(n'+1) - n(n+1)]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)}\sin\theta\,d\theta.$$

Первая часть обращается здесь в нуль, потому что при нижнем пределе $\sin\theta = 0$, а при верхнем для четных n и n'

$$\vartheta_n^{(1)} = \vartheta_{n'}^{(1)} = 0,$$

а для нечетных

$$\frac{d\vartheta_n^{(1)}}{d\theta} = \frac{d\vartheta_{n'}^{(1)}}{d\theta} = 0.$$

Таким образом, если n и n' суть неравные между собою четные или нечетные числа, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta_n^{(1)}\vartheta_{n'}^{(1)}\sin\theta\,d\theta = 0. \qquad (68)$$

Для получения подобной формулы при $n = n'$ заметим связь между $\vartheta_{n+1}^{(1)}$, $\vartheta_n^{(1)}$ и $\vartheta_{n-1}^{(1)}$, которая непосредственно проверяется формулою (57)

$$\frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n}\cos\theta - \frac{\vartheta_{n+1}^{(1)}}{C_{n+1}} = \frac{n^2-1}{4n^2-1}\frac{\vartheta_{n-1}^{(1)}}{C_{n-1}}.$$

Заменяем здесь n на $n-1$:

$$\frac{\vartheta_{n-1}^{(1)}}{C_{n-1}}\cos\theta - \frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n} = \frac{(n-1)^2-1}{4(n-1)^2-1}\frac{\vartheta_{n-2}^{(1)}}{C_{n-2}}.$$

Умножаем первое и второе равенства последовательно на

$$\frac{\vartheta_{n-1}^{(1)}}{C_{n-1}}\sin\theta\,d\theta, \quad \frac{\vartheta_n^{(1)}}{C_n}\sin\theta\,d\theta$$

и вычитаем их; потом берем от обеих частей полученного уравнения интеграл от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и обращаем внимание на формулу (68):

$$\frac{1}{C_n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta = \frac{n^2-1}{4n^2-1}\frac{1}{C_{n-1}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_{n-1}^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta.$$

Так как $C_1 = 1$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_1^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta = \frac{2}{3},$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}C_n^2\frac{(n^2-1)[(n-1)^2-1]\ldots 3}{(4n^2-1)[4(n-1)^2-1]\ldots 15}.$$

Подставляем сюда величину C_n и делаем сокращение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\vartheta_n^{(1)})^2\sin\theta\,d\theta = \frac{4}{n(n+1)(2n+1)}. \tag{69}$$

Пользуясь формулами (68) и (69), находим из уравнения (67) величину коэффициентов A:

$$A_n = -\frac{(n+1)(2n+1)}{2a^{n-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\vartheta_n^{(1)}) \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta.$$

Чтобы определить входящий сюда интеграл, выведем общую формулу для интеграла вида

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\vartheta_n^{(1)}) \cos^k\theta \sin^2\theta \, d\theta$$

при нечетном n. Замечаем предварительно, что этот интеграл обращается в нуль при

$$k = 0, \ 2, \ 4, \ \ldots, \ n-3,$$

потому что по формуле (57) можно выразить $\sin\theta$, $\sin\theta\cos^2\theta$, ..., $\sin\theta\cos^{n-3}\theta$ линейными функциями от $\vartheta_1^{(1)}$, $\vartheta_3^{(1)}$, ..., $\vartheta_{n-2}^{(1)}$ и получить интегралы вида (68) от произведения двух нечетных сферических функций. Принимаем за переменное интеграции $\cos\theta = \mu$ и обозначаем через 1, α, β, ..., ω коэффициенты во второй части формулы (57); получаем:

$$V = -\int_0^1 C_n [\mu^{n+1} + (\alpha - 1)\mu^{n-1} + (\beta - \alpha)\mu^{n-3} + \ldots - \omega] \mu^k \, d\mu =$$

$$= -C_n \left\{ \frac{1}{n+2+k} + \frac{\alpha-1}{n+k} + \frac{\beta-\alpha}{n-2+k} + \ldots - \frac{\omega}{1+k} \right\} =$$

$$= \frac{\varphi(k)}{(n+2+k)(n+k)(n-2+k)\ldots(1+k)}.$$

Здесь $\varphi(k)$ должна бы быть целою рациональною функциею от k степени $\frac{n+1}{2}$; но так как коэффициент при $k^{\frac{1}{2}(n+1)}$ есть

$$-C_n[1 + (\alpha - 1) + (\beta - \alpha) + \ldots - \omega] = 0,$$

то она будет степени $\frac{n-1}{2}$; при этом все $\frac{n-1}{2}$ корня уравнения $\varphi(k) = 0$ нам известны, так как они суть $k = 0, 2, 4, \ldots, n-3$.

Таким образом, находим, что

$$\varphi(k) = \lambda k(k-2)(k-4)\ldots(k-n+3).$$

Множитель λ будет коэффициентом при $k^{\frac{1}{2}(n-1)}$. Называя через s сумму знаменателей написанных выше дробей, получим:

$$\begin{aligned}\lambda = C_n[&-s+n+2+k+(-s+n+k)(\alpha-1)+\\&+(-s+n-2+k)(\beta-\alpha)+\ldots]=\\&=2C_n(1+\alpha+\beta+\ldots+\omega).\end{aligned}$$

Для определения этой величины стоит только сравнять вторые части формул (57) и (58) и, сократив их на $\sin\theta$, положить $\theta=0$; таким образом, получаем:

$$\lambda = 2.$$

На основании сказанного находим величину искомого интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta_n^{(1)} \cos^k\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2k(k-2)(k-4)\ldots(k-n+3)}{(n+2+k)(n+k)(n-2+k)\ldots(1+k)}.$$

Полагаем здесь $k=1$ и подставляем найденный результат в выражение коэффициента A_n:

$$A_n = -\frac{2n+1}{a^{n-2}(n+3)}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{-1}{n-3}\cdot\frac{-3}{n-5}\cdots\frac{-(n-4)}{2},$$

где для $n=1$ надо взять одну дробь, для $n=3$ — две дроби, для $n=5$ — три дроби и т. д. Искомая нами функция Φ будет:

$$\Phi = -\frac{3}{4}ra\vartheta_1^{(1)} +$$

$$+r^2\sum_{n=3,5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2n+1}{(n+3)(n-2)}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\vartheta_n^{(1)}. \quad (70)$$

Строка, обозначенная здесь знаком суммы, есть сходящаяся, потому что абсолютные величины функций $\vartheta_n^{(1)}$ и

величины дробей $\frac{r}{a}$ не могут быть более единицы, а ряд, составленный из коэффициентов,

$$Q = \sum \frac{1}{n+3} \frac{2n+1}{n-2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-1)},$$

есть сходящийся. Для доказательства этого последнего положения заменяем $(n+3)$ на $(n+2)$, так что каждый член ряда увеличивается, потом полагаем

$$\frac{1}{n+2} = 1 - \frac{n+1}{n+2};$$

тогда получается неравенство

$$Q < \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} + \\ + \frac{15}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} - \frac{15}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} + \ldots,$$

в котором вторая часть представляет знакопеременный ряд беспредельно убывающих членов.

Займемся теперь определением момента инерции эквивалентного тела. Интеграл в формуле (54) нам придется брать только по радиусу OA в направлении от A к O, так как на дуге AC имеем $dr^2 = 0$. Вследствие того что на радиусе OA функция F равна Ф,

$$[\psi_1, \psi_1] = -\pi\rho \int_0^a \Phi r^2 \, dr.$$

Функции $\vartheta_n^{(1)}$ на радиусе OA получают величины, которые найдём, полагая в формуле (58) $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\vartheta_n^{(1)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-1)} \cdot \frac{2}{n+1}.$$

Подставляя эти величины и производя интегрирование, находим, что момент инерции эквивалентного тела выражается следующею формулою:

$$[\psi_1, \psi_1] = \\ = 3Ma^2 \left\{ \frac{3}{32} - \sum_{n=3,5\ldots} \frac{2n+1}{(n+3)^2 (n+1)(n-2)} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-1)} \right]^2 \right\}. \quad (71)$$

Мы вычислили величину, даваемую этою формулою, с точностью до одной десятитысячной и нашли:

$$[\psi_1, \psi_1] = 0{,}2387\,Ma^2.$$

Отсюда получается интересный вывод: если будем вращать сферу, наполненную жидкостью, около ее диаметра, то момент инерции эквивалентного тела будет нуль; *если же разделим сферу плоскостью, проходящею через этот диаметр, на две полости, то момент инерции эквивалентного тела составит* 0,5968 *момента инерции отвердевшей жидкой массы.*

Г. О МНОГОСВЯЗНЫХ ПОЛОСТЯХ.

§ 25. Геометрическая интерпретация движения вокруг неподвижной точки твердого тела с присоединенным жироскопом. В конце § 10 первой главы было показано, что скорости, сообщаемые жидким массам в многосвязных полостях при покоящемся твердом теле, влияют на его движение так же, как присоединенный к нему вращающийся жироскоп. Рассмотрим здесь подробнее это влияние. Предположим, что центр жироскопа совпадает с неподвижною точкою O, и назовем через D и E моменты инерции жироскопа относительно осей, проходящих через точку O по направлению его оси вращения и перпендикулярно к ней. Предположим, что на жироскоп не действуют никакие силы, кроме сил давления тела на концы его оси, и докажем, по уравнениям Эйлера, что скорость n вращения жироскопа относительно его оси есть постоянная величина. Обращаясь после этого к составлению главного момента количеств движения всех материальных точек рассматриваемой системы относительно центра O, найдем, что он слагается из момента количеств движения твердого тела, момента Dn, направленного по оси жироскопа, и момента $E\omega'$, направленного по проекции ω' угловой скорости тела на плоскость, перпендикулярную к оси жироскопа. Этот последний момент может быть включен в главный момент количеств движения твердого тела, когда присоединим к телу материальную беско-

нечно тонкую палочку, направленную по оси жироскопа и имеющую относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку O, момент инерции E. Полученное таким образом твердое тело будем называть *преобразованным телом*. Рассуждая теперь, как в § 10, мы составим для движения рассматриваемой системы уравнения, подобные уравнению (18) первой главы. Роль P, Q и R будут играть проекции Dn, а уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

будет представлять эллипсоид инерции преобразованного тела. Хотя движение твердого тела с присоединенным к нему жироскопом рассматривалось некоторыми авторами[1]), но мы думаем, что для читателя будет не лишена интереса та геометрическая интерпретация этого движения, которая может быть получена для случая $L = M = N = 0$.

Известно, что движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку, интерпретируется или с помощью *конуса полоиды*, катящегося без скольжения по неподвижному *конусу герполоиды*, или с помощью конуса, ортогонального конусу *неизменяемой прямой* (место главного момента количеств движения в теле), который катится и скользит по *неизменяемой плоскости*[2]). Эту последнюю интерпретацию нам удалось распространить и на тот случай, когда к телу присоединен жироскоп. Умножаем уравнение (18) первой главы сперва на $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$, потом на

$$(A\omega_1 + P)\,dt, \quad (B\omega_2 + Q)\,dt, \quad (C\omega_3 + R)\,dt$$

и, сложив первую и вторую группы, берем интегралы от полученных уравнений:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = H, \tag{72}$$

$$(A\omega_1 + P)^2 + (B\omega_2 + Q)^2 + (C\omega_3 + R)^2 = G^2, \tag{73}$$

---

[1]) Hoppe, Ueber den Einfluss der Rotation eines Schwungrads auf die Bewegung eines damit verbundenen Körpers, Zeitschrift von Schlömilch, т. 16, стр. 167.

[2]) Routh, Rigid Dynamics, London, гл. IX, 1877.

где H и G суть постоянные величины, представляющие двойную живую силу преобразованного тела и величину главного момента количеств движения всей системы.

Построим эллипсоид Мак-Келлога

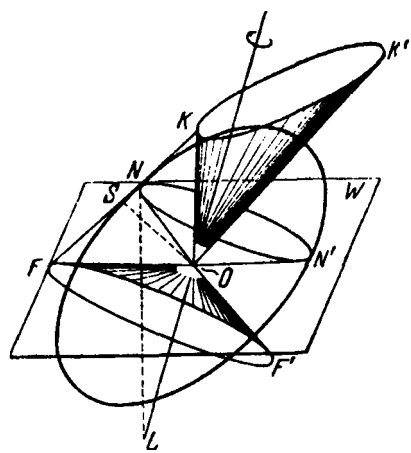
$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=\frac{1}{M}, \tag{74}$$

где M — масса преобразованного тела, и предположим, что главный момент G' количеств движения этого тела пересекает этот эллипсоид (фиг. 14) в точке $N(x, y, z)$, имеющей радиус $ON=r$; тогда

$$\frac{x}{A\omega_1}=\frac{y}{B\omega_2}=\frac{z}{C\omega_3}=\frac{r}{G'}. \tag{75}$$

Подставляем определенные отсюда величины x, y, z в уравнение (74) и обращаем внимание на уравнение (72):

$$G'=r\sqrt{MH}. \tag{76}$$



Фиг. 14.

Проведем в точке N к поверхности рассматриваемого эллипсоида касательную плоскость и опустим на нее из O перпендикуляр $OS=p$. Так как углы α, β, γ, образуемые этим перпендикуляром с осями Ox, Oy, Oz, удовлетворяют пропорции

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{x}{A}:\frac{y}{B}:\frac{z}{C},$$

то по формуле (75) заключаем, что направление этого перпендикуляра дает направление угловой скорости ω. Далее находим из уравнения (74)

$$p=\frac{1}{M\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}}};$$

откуда, по замене x, y, z их величинами из уравнений (75) и преобразовании по формуле (76), получаем:

$$\omega = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{H}{M}}. \tag{77}$$

Обращаемся теперь к построению конуса неизменяемой прямой. Проведем прямую

$$OL = \frac{Dn}{\sqrt{MH}},$$

лежащую на оси жироскопа так, что при взгляде из L к O вращение n совершалось бы против часовой стрелки; примем точку L за центр и опишем из него сферу радиусом

$$\frac{G}{\sqrt{MH}};$$

предположим, что эта сфера пересечет наш эллипсоид по некоторой кривой NN'; примем ее за направляющую конусов NON' и NLN', имеющих вершины в O и в L; потом из вершины O проведем конус KOK', образующие которого параллельны образующим конуса NLN'. Этот конус KOK' и будет искомым нами конусом неизменяемой прямой. Действительно, если момент G направляется внутри тела по образующим конуса NON', то его величина по формуле (76) получается умножением образующих ON на $\sqrt{MH}$; с другой стороны, момент Dn имеет направление LO и получается умножением этой длины на ту же величину; от сложения этих двух моментов получается момент, направленный по образующим OK, параллельным замыкающим сторонам LN треугольников LON; величина этого момента находится умножением LN на $\sqrt{MH}$, и потому она равна G, что и требовалось доказать. Так как главный момент количеств движения G должен сохранять в пространстве неизменное направление, то тело должно двигаться таким образом, что в каждый момент времени одна из образующих конуса KOK' перпендикулярна к неизменяемой плоскости W.

Такое движение получится, если построим в теле конус FOF', ортогональный конусу KOK', и предположим,

что движение тела получается вследствие того, что этот конус катится и скользит по плоскости W. Для того чтобы определить угловые скорости его вращения и скольжения (последняя есть угловая скорость вращения около оси OK), разложим вращение ω, совершающееся около OS, на два вращения, совершающиеся около соответственных образующих OK и OF. Величины θ и θ' угловых скоростей этих вращений определятся с помощью отрезков OK и OF, которые касательная плоскость, проведенная к эллипсоиду в точке N, отсекает на упомянутых образующих. Пользуясь фигурой 14 и формулой (77), находим, что

$$\theta = \frac{1}{OK}\sqrt{\frac{H}{M}}, \quad \theta' = \frac{1}{OF}\sqrt{\frac{H}{M}}. \tag{78}$$

Проводя касательные плоскости к эллипсоиду во всех точках кривой NN', отметим места точек пересечения этих плоскостей с соответственными образующими конусов KOK' и FOF'. Пусть эти места будут кривые KK' и FF'; по этим кривым обрежем наши конусы. Теперь все движение нашего твердого тела приводится к тому, что *конус FOF', прикасаясь постоянно к неизменяемой плоскости, скользит и катится по ней, причем угловые скорости скольжения и вращения обратно пропорциональны длинам образующих конуса неизменяемой прямой и ортогонального конуса.*

Когда $n = 0$ и точка L совпадает с O, тогда конус KOK' совпадает с NON', и потому угловая скорость скольжения есть постоянная величина

$$\theta = \frac{H}{G},$$

как это имеет место при движении твердого тела без жироскопа. Если n весьма велико, то точка L находится очень далеко от O, вследствие чего конус NLN' близок к цилиндру, имеющему в перпендикулярном сечении плоскую кривую NN'; конус KOK' делается весьма тонким, а конус FOF' — весьма плоским. Ось вращения жироскопа в этом случае будет приближенно сохранять в пространстве свое

положение. Какое бы конечное количество движения мы ни сообщили телу, мы изменим через это конус NON', а следовательно, и вид кривых FF' и KK', характеризующих катание и скольжение ортогонального конуса, но почти не изменим направления образующих OK, которые будут оставаться весьма близки к направлению оси жироскопа.

Относя этот результат к нашей гидродинамической задаче, приходим к заключению: *если жидким массам в многосвязных полостях сообщены при покоящемся твердом теле весьма быстрые движения* (когда некоторые из циркуляций k, k_1,... весьма велики), *так что P, Q и R получают весьма большие величины, то прямая, проведенная в теле по составляющей P, Q и R, остается приблизительно неподвижной, какое бы конечное количество движения ни было сообщено телу* [1]).

§ 26. Замечания по поводу определения проекций главного момента количеств движения частиц жидкости. Переходя теперь к примерам, заметим, что величины P, Q и R не зависят от места неподвижной точки. Это происходит от того, что при сложении начальных количеств движения по правилам статики мы получаем только пары, ибо центры тяжестей всех жидких масс, при неподвижном твердом теле, неподвижны.

Величины P, Q и R могут быть определяемы или как суммы моментов количеств движения относительно осей координат, когда известны скорости начального движения жидкостей, или по формулам (23) и (22) первой главы, когда известны функции χ или φ. Формула (22) дает, таким образом, возможность определить движение твердого тела, не определяя начального движения жидкости; но, к сожалению, самое определение функции φ для многосвязных поло-

[1]) Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883, стр. 256.

Мы сомневаемся в справедливости заключения Неймана, который предполагает, что при бесконечно больших k, k_1,... всякое прибавленное к телу конечное количество движения производит только малые колебания осей Ox, Oy, Oz.

стей весьма затруднительно. Что касается до функции χ, то для всех полостей вращения она дается формулою

$$\chi = \frac{k}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

где ось Oz считается направленной по оси вращения полости.

§ 27. Бесконечно тонкая замкнутая трубка произвольного вида и сечения. Как первый пример рассмотрим двусвязную полость, представляющую бесконечно тонкую замкнутую трубку произвольного вида и сечения. Предполагая, что тело неподвижно, а жидкость в трубке приведена в движение, найдем:

$$P = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_x}{dt},$$

$$Q = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_y}{dt},$$

$$R = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2\sum m\frac{d\sigma_z}{dt},$$

где $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ суть площади, описываемые во время dt проекциями радиусов-векторов частиц жидкости на плоскостях координат, а m — массы частиц жидкости. Называем через V скорость жидкости в трубке, через ds — элемент длины трубки, через dc — площадь ее перпендикулярного сечения и через dq — количество жидкости, протекшей через это сечение в единицу времени; подставляем в найденные формулы

$$dt = \frac{ds}{V}, \quad m = \rho\, dc\, ds, \quad V\, dc = dq;$$

получаем:

$$P = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_x}{ds} ds = 2\rho\, dq\sigma_x,$$

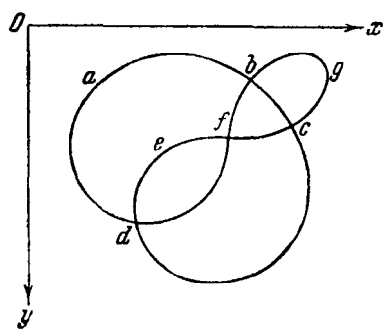
$$Q = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_y}{ds} ds = 2\rho\, dq\sigma_y,$$

$$R = 2\rho\, dq \int \frac{d\sigma_z}{ds} ds = 2\rho\, dq\sigma_z.$$

Так как здесь интеграцию надо было произвести вдоль всей длины трубки в направлении течения жидкости, то σ_x, σ_y, σ_z суть площади контуров, полученных при проектировании трубки на плоскости координат. Эти площади определяются по следующему правилу: если (фиг. 15) *abcdefcgbfda* будет проекция трубки на плоскость Oxy, написанная в направлении течения жидкости, то

$$\sigma_z = \text{пл } abcda - \text{пл } fbgcf + \text{пл } defd.$$

Входящая в наши формулы величина dq может быть определена с помощью циркуляции скорости, которую назовем через k. Мы имеем:



Фиг. 15.

$$k = \int V\,ds = dq \int \frac{ds}{d\sigma};$$

подставляем $d\sigma = d\sigma_0 \psi(s)$, где $d\sigma_0$ — постоянная малая площадь, и определяем dq:

$$dq = \frac{k\,d\sigma_0}{\int \frac{ds}{\psi(s)}}.$$

Для трубки с постоянным сечением $d\sigma_0$ имеем $\psi(s) = 1$, так что

$$dq = \frac{k\,d\sigma_0}{l},$$

где l — длина трубки. В этом предположении наши формулы принимают вид:

$$P = \frac{2\rho k\,d\sigma_0}{l}\sigma_x, \quad Q = \frac{2\rho k\,d\sigma_0}{l}\sigma_y, \quad R = \frac{2\rho k\,d\sigma_0}{l}\sigma_z. \tag{79}$$

Таким образом находятся величина и направление момента Dn жироскопа, заменяющего эффект начальных скоростей жидкости в нашей трубке. Определим для нее момент инерции эквивалентного тела. Для этого воспользуемся формулой (13) первой главы. Предположив, что при дви-

жении трубки жидкость будет двигаться по ней со скоростью $V+V'$, найдем по упомянутой формуле, что

$$f(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)=F(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)-\sum mV'^2.$$

Преобразуем здесь последнюю сумму:

$$\sum mV'^2=\rho\,dq'\int V'ds,$$

где dq' — количество жидкости, протекшей через сечение трубки от скорости V'. Выражаем, как это делали выше, dq' с помощью циркуляции скорости V':

$$\sum mV'^2=\frac{\rho\,dc_0}{\int\frac{ds}{\psi(s)}}\left(\int V'ds\right)^2.$$

Что касается входящей сюда циркуляции, то она должна быть равна по величине, но противоположна по знаку циркуляции скорости влечения по тому же контуру. Определим циркуляцию скорости влечения по теореме Стокса. Для этого разлагаем в каждой точке тела угловую скорость частицы ω на ω_1, ω_2, ω_3 и, таким образом, заменяем все вихревые нити в движении тела тремя системами прямолинейных вихревых нитей, параллельных осям координат. Составляя удвоенные суммы напряжений вихревых нитей, проходящих сквозь контур трубки, находим:

$$\int V'\,ds=2(\omega_1\sigma_x+\omega_2\sigma_y+\omega_3\sigma_z). \tag{80}$$

Таким образом,

$$\sum mV'^2=\frac{4\rho\,dc_0}{\int\frac{ds}{\psi(s)}}(\omega_1\sigma_x+\omega_2\sigma_y+\omega_3\sigma_z)^2.$$

Принимая для простоты $\psi(s)=1$, находим для эллипсоида инерции эквивалентного тела следующее уравнение:

$$F(x,\ y,\ z)-\frac{4\rho\,dc_0}{l}(x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z)^2=1. \tag{81}$$

Так как для случая $\psi(s)=1$ скорость V' есть величина постоянная вдоль всей трубки, то из формулы (80) получаем:

$$V'=\frac{2(\omega_1\sigma_x+\omega_2\sigma_y+\omega_3\sigma_z)}{l}. \tag{82}$$

При употреблении этой формулы надо наперед задаться направлением контура и в этом смысле определить σ_x, σ_y, σ_z, потом судить по знаку формулы (82), согласно ли это направление с направлением V' или нет. В первом случае должен получиться знак $(+)$, а во втором $(-)$.

§ 28. Полости вращения. В случае полостей вращения момент Dn направлен, очевидно, по оси полости; что же касается его величины, то она определяется весьма просто при помощи вышеприведенной функции χ. Если положим

$$x^2+y^2=\xi^2, \quad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\eta,$$

то наша функция χ будет

$$\chi=\frac{k}{2\pi}\eta.$$

Скорости жидкости будут перпендикулярны к ξ и выразятся производною

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\chi}{d\eta}=\frac{k}{2\pi\xi};$$

отсюда

$$Dn=\frac{k}{2\pi}\sum\frac{m}{\xi}\xi=\frac{Mk}{2\pi}, \tag{83}$$

где M — масса тела. Таким образом, *для всех кольцевидных полостей вращения главный момент начального количества движения равен произведению массы жидкости на циркуляцию скорости, разделенную на* 2π.

Пользуясь этим правилом, мы можем вполне решить задачу о движении тела, имеющего кольцевидную полость, меридиональное сечение которой образовано двумя пересекающимися гиперболами, ибо соответственный жироскоп найдется по формуле (83), а эквивалентное тело — по формуле (66).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

А. СЛУЧАИ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

§ 29. Определение скоростей частиц жидкости при неподвижном теле. Мы начнем эту главу исследованием нашего вопроса в случае, когда начальное движение жидкости есть вихревое, так как это исследование послужит постепенным переходом от вышерассмотренной задачи к более трудной задаче, получаемой при обращении внимания на трение жидкости [1]). Пусть Ox, Oy, Oz будут оси координат, направленные по осям инерции *преобразованного тела*, а u', v', w' — проекции на эти оси начальной скорости жидкости (при покоящемся теле). Эти скорости в односвязной полости вполне определяются по составляющим ξ, η, ζ угловых скоростей вращения частиц жидкости, которые суть

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

если же полость многосвязна, то надо еще дать величины циркуляций скорости по *главным контурам* (так как здесь циркуляции по *приводимым контурам* неодинаковы, то за главные контуры будем брать определенные контуры и будем для различных времен проводить их через одни и те же частицы жидкости).

Действительно, если бы существовало два течения, удовлетворяющих данным условиям, то, составив течение, скорости которого суть геометрические разности скоростей этих течений, мы нашли бы течение несжимаемой жидкости без

[1]) О случаях вихревого движения не упоминается в предисловии, так как мы прибавили эту статью, по совету Ф. А. Слудского, уже во время печатания сочинения.

вращения частиц, циркуляции которого по главным контурам суть нули, а такое течение по § 2 не может иметь места в неподвижной полости.

Задача об определении u', v', w' по вышеуказанным данным приводится к обыкновенной задаче гидродинамики об определении функции скоростей несжимаемой жидкости по нормальным скоростям на ее границах и главным циркуляциям. Построив линии вихрей, продолжаем их за границы жидкости так, чтобы все они замкнулись, и определяем для точек вне жидкости ξ, η, ζ из условия постоянства напряжения вихря вдоль вихревой трубки. Мы получаем, таким образом, новый объем, заключающий внутри себя нашу жидкую массу, для всех точек которого ξ, η, ζ известны. Так как поверхность, ограничивающая этот объем, есть поверхность вихрей, то на ней

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = 0,$$

где α, β, γ — углы ее внутренней нормали с осями координат. Составим интегралы:

$$A = \iiint \frac{\xi}{r}\, da\, db\, dc,$$

$$B = \iiint \frac{\eta}{r}\, da\, db\, dc,$$

$$C = \iiint \frac{\zeta}{r}\, da\, db\, dc,$$

распространенные на построенный объем, в которых r есть расстояние между точкою (x, y, z) и точкою объема (a, b, c); потом определяем скорость:

$$l = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \quad m = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right), \quad n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

некоторого течения жидкости и доказываем, что соответствующие ему компоненты вихря суть ξ, η, ζ. Мы имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_2 A + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

где по теореме Пуассона

$$\Delta_2 A = -4\pi\xi;$$

далее, на основании соображений § 4,

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=\int\int\int\left[\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]da\,db\,dc=$$

$$=-\int\int\frac{1}{r}(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\sigma=0;$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z}\right)=\xi.$$

Определив нормальные скорости найденного течения на поверхности полости, увидим, что они вообще не будут равны нулю; вследствие этого к найденному течению надо еще прибавить течение с потенциальною функциею скоростей f, которая вполне определяется по полученным нормальным скоростям и главным циркуляциям. Эти главные циркуляции равны разностям между данными циркуляциями и циркуляциями скоростей l, m, n. Определив f, получаем:

$$u'=l+\frac{\partial f}{\partial x},\quad v'=m+\frac{\partial f}{\partial y},\quad w'=n+\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2}$$

§ 30. Внутреннее движение жидкости в случае вращающейся полости. Дифференциальные уравнения задачи. Переходим к определению внутреннего движения жидкости в полости тела в предположении, что жидкость находится под действием сил, имеющих силовую функцию, а тело получает какое-нибудь движение.

Решение этого вопроса, подобно изложенному в § 6, удобно получается из теоремы Томсона. Отбрасывая поступательное движение, как не влияющее на внутреннее движение жидкости, делаем начало O наших подвижных осей Ox, Oy, Oz неподвижным. Выражаем проекции абсолютной скорости точки жидкости на эти оси через

$$v_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+u',\quad v_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+v',\quad v_3=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+w', \tag{3}$$

где функция φ определяется по § 6, а u', v', w' суть некоторые добавочные скорости, которые в начальный момент имеют величины, данные в § 29.

Так как течение с функцией скоростей φ не имеет вращений, то компоненты вихря в движении нашей жидкой массы выражаются по формуле (1); с другой стороны, так как $\Delta_2\varphi = 0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ равна нормальной скорости самих стенок, то течение u', v', w' не дает изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости. Выведем уравнения, вытекающие из того условия, что полные ускорения в абсолютном движении жидкости имеют однозначную потенциальную функцию. По теореме Томсона это условие требует, чтобы полная производная от циркуляции скорости по всякому замкнутому контуру была равна нулю. Вообразим неподвижные оси координат Ox', Oy', Oz', совпадающие в рассматриваемый момент времени с нашими подвижными осями, и построим бесконечно малый треугольник abc. Назовем координаты точек жидкости a, b и c относительно неподвижных осей через (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), площадь треугольника — через σ, ее проекции — через

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}[(y''-y')(z'''-z') - (z''-z')(y'''-y')],$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}[(z''-z')(x'''-x') - (x''-x')(z'''-z')],$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}[(x''-x')(y'''-y') - (y''-y')(x'''-x')],$$

проекции же угловой скорости частицы жидкости на неподвижные оси — через ξ', η', ζ'. Так как по теореме Стокса

$$(abc) = 2(\xi'\sigma_1 + \eta'\sigma_2 + \zeta'\sigma_3),$$

то мы должны иметь:

$$\frac{d}{dt}(\xi'\sigma_1 + \eta'\sigma_2 + \zeta'\sigma_3) = 0.$$

При составлении этой полной производной заметим, что $\frac{d\xi'}{dt}$ может быть рассматриваема как проекция на ось Ox'

скорости точки, лежащей в конце вектора, имеющего на подвижных осях составляющие ξ, η, ζ, вследствие чего

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \omega_2\zeta - \omega_3\eta;$$

с другой стороны, производная $\frac{d\sigma_1}{dt}$, на основании уравнений [1]):

$$\frac{d}{dt}(x'' - x') = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x'' - x') + \frac{\partial v_1}{\partial y}(y'' - y') + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z'' - z'),$$

$$\frac{d}{dt}(x''' - x') = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x''' - x') + \frac{\partial v_1}{\partial y}(y''' - y') + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z''' - z'),$$

. . . . . .

может быть представлена в виде

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\sigma_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x}\sigma_2 - \frac{\partial v_3}{\partial x}\sigma_3$$

и преобразована на основании условия несжимаемости в

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x}\sigma_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x}\sigma_3\right).$$

Таким образом, находим, что

$$\sigma_1\left(\frac{d\xi}{dt} + \omega_2\zeta - \omega_3\eta - \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) +$$

$$+\sigma_2\left(\frac{d\eta}{dt} + \omega_3\xi - \omega_1\zeta - \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) +$$

$$+\sigma_3\left(\frac{d\zeta}{dt} + \omega_1\eta - \omega_2\xi - \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) = 0.$$

Для того чтобы это условие было удовлетворено для всякого бесконечно малого контура, необходимо, чтобы во всякой точке жидкости удовлетворялись три уравнения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z} - \omega_2\zeta + \omega_3\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z} - \omega_3\xi + \omega_1\zeta,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z} - \omega_1\eta + \omega_2\xi.$$

[1]) Эти уравнения получаются как выражения для разности слагающих скоростей в бесконечно близких точках a и b, a и c и т. д. *(Прим. ред.)*

Так как они заключают в себе только величины, относящиеся к неподвижным осям, то все эти величины могут быть рассматриваемы как функции x, y, z и времени.

Обозначив через $\frac{\partial}{\partial t}$ взятую в этом смысле частную производную по времени и приписывая буквам u, v, w значения, даваемые формулой (8) первой главы при $\chi = 0$, подставим в первое из найденных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}(u+u') + \frac{\partial \xi}{\partial y}(v+v') + \frac{\partial \xi}{\partial z}(w+w');$$

получаем, после некоторых преобразований на основании формулы (3):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3 y) + u'\right] + \eta \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3 y) + u'\right] +$$
$$+ \zeta \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (\omega_2 z - \omega_3 y) + u'\right] -$$
$$- \frac{\partial \xi}{\partial x}(u+u') - \frac{\partial \xi}{\partial y}(v+v') - \frac{\partial \xi}{\partial z}(w+w').$$

Это уравнение вместе с двумя другими для осей Oy и Oz приводится на основании формулы (8) первой главы к следующим основным уравнениям нашей задачи:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \xi \frac{\partial (u+u')}{\partial x} + \eta \frac{\partial (u+u')}{\partial y} + \zeta \frac{\partial (u+u')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial \xi}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial \xi}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \xi \frac{\partial (v+v')}{\partial x} + \eta \frac{\partial (v+v')}{\partial y} + \zeta \frac{\partial (v+v')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial \eta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial \eta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial \eta}{\partial z}, \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \xi \frac{\partial (w+w')}{\partial x} + \eta \frac{\partial (w+w')}{\partial y} + \zeta \frac{\partial (w+w')}{\partial z} - \\
&\quad - (u+u')\frac{\partial \zeta}{\partial x} - (v+v')\frac{\partial \zeta}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial \zeta}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Мы вывели эти уравнения как необходимое следствие существования потенциальной функции полных ускорений, но легко видеть, наоборот, что они обусловливают это существование. Когда они удовлетворены во всякой точке жидкости и для всякого времени, тогда циркуляция скорости по всякому бесконечно малому треугольнику, построенному на одних и тех же точках жидкости, не будет изменяться со временем, а следовательно, циркуляция скорости по всякому конечному замкнутому контуру, проводимому через одни и те же точки жидкости, будет постоянна, если он обращаем в точку, так как всякий такой контур может быть разбит на бесконечно малые треугольные контуры. Отсюда, по теореме Томсона, следует существование потенциальной функции полных ускорений. В случае односвязной полости эта функция по § 2 будет однозначна; но если полость многосвязна, то надо еще выразить условие, что циркуляция скорости постоянна и для всех замкнутых контуров, в точку не обращаемых. Рассуждая, как в § 2, найдем, что условие будет удовлетворено для всех контуров, не обращаемых в точку, если оно удовлетворено для главных контуров.

Теперь мы имеем все данные, чтобы определить u', v', w', переходя от одного момента времени к другому, бесконечно близкому. Пусть для времени t скорости u', v', w' известны. Чтобы найти приращения du', dv', dw', соответствующие приращению времени dt, определяем из уравнения (4) бесконечно малые компоненты вихря $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ и отыскиваем по § 29 соответствующие этим вихрям бесконечно малые скорости l, m, n; потом находим нормальные составляющие этих скоростей на стенках полости и циркуляции по главным контурам, которые складываем с приращениями циркуляций от изменения вида контуров во время dt; определив по найденным нормальным скоростям и циркуляциям, взятым с обратным знаком, соответствующую функцию f, получаем искомые приращения скоростей du', dv', dw' по формуле (2).

От момента $t+dt$ переходим к моменту $t+2dt$ и т. д. Когда движение твердого тела не дано наперед, а даны внешние силы, его производящие, то для решения задачи о движении нашей системы мы должны к уравнению (4) прибавить еще дифференциальные уравнения движения твердого тела. Эти уравнения составляются подобно тому, как было указано в § 9 и § 10, с тою только разницею, что за P, Q и R мы должны принять компоненты главного момента количеств движения жидкости в течении u', v', w'. Так как u', v', w' изменяются со временем, то P, Q и R будут тоже изменяться, потому уравнения (16) первой главы для рассматриваемого случая дадут вместо (18) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{dP}{dt}+(C-B)\omega_2\omega_3+R\omega_2-Q\omega_3,\\ M &= B\frac{d\omega_2}{dt}+\frac{dQ}{dt}+(A-C)\omega_3\omega_1+P\omega_3-R\omega_1,\\ N &= C\frac{d\omega_3}{dt}+\frac{dR}{dt}+(B-A)\omega_1\omega_2+Q\omega_1-P\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Совместные уравнения (4) и (5) служат для полного решения задачи о движении нашей системы.

§ 31. Определение гидродинамического давления внутри полости. Если бы мы желали еще определить гидродинамическое давление внутри полости, то могли бы для этого воспользоваться формулою, которая отличается от формулы (9) первой главы добавочным членом. Для вывода этой формулы обратимся к рассмотрению полных ускорений частиц жидкости в их абсолютном движении, которое слагается из движения влечения и относительного движения со скоростями $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$. По теореме Кориолиса полное ускорение абсолютного движения представляется геометрическою суммою трех векторов: относительного ускорения, поворотного ускорения и ускорения влечения.

Присоединив к функции φ функцию $\alpha x+\beta y+\gamma z$, определяющую поступательное движение нашего тела,

положим, что

$$F = \varphi + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$u = \frac{\partial F}{\partial x} - (\alpha + z\omega_2 - y\omega_3),$$
$$v = \frac{\partial F}{\partial y} - (\beta + x\omega_3 - z\omega_1),$$
$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - (\gamma + y\omega_1 - x\omega_2)$$

(мы берем здесь α, β, γ вместо букв p, q и r в § 7, чтобы не смешивать с давлением p). Составляем проекции на ось Ox трех вышеупомянутых ускорений. Проекция ускорения относительного движения будет:

$$\frac{\partial(u+u')}{\partial t} + (u+u')\frac{\partial(u+u')}{\partial x} + (v+v')\frac{\partial(u+u')}{\partial y} + (w+w')\frac{\partial(u+u')}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dt} + z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right) -$$
$$- 2[\omega_2(w+w') - \omega_3(v+v')] + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')],$$

где V — скорость относительного движения; проекция поворотного ускорения будет:

$$2[\omega_2(w+w') - \omega_3(v+v')];$$

наконец, проекция ускорения влечения будет:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[(\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2] +$$
$$+ \frac{d\alpha'}{dt} + z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt},$$

где α', β', γ' суть проекции скорости точки O на неподвижные оси Ox', Oy', Oz' (взятые в § 30), так что

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \omega_2\gamma - \omega_3\beta =$$
$$= \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}[(\omega_2 z - \omega_3 y)\alpha + (\omega_3 x - \omega_1 z)\beta + (\omega_1 y - \omega_2 x)\gamma].$$

От сложения всех этих трех проекций получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2 - V'^2}{2}\right) + \frac{\partial u'}{\partial t} + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')],$$

где V' есть скорость влечения. Составив подобным образом проекции полного ускорения абсолютного движения на оси Oy и Oz, умножаем все три полученные проекции соответственно на dx, dy, dz и берем интеграл от их суммы. Тогда получится потенциальная функция полных ускорений абсолютного движения жидкости, вычитая которую из силовой функции U, найдем до постоянного (функции времени) $\frac{p}{\rho}$. Таким образом, получается следующая формула для определения гидродинамического давления:

$$\frac{p}{\rho} - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) -$$
$$- \int\Big[\Big(\frac{\partial u'}{\partial t} + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')]\Big)dx +$$
$$+ \Big(\frac{\partial v'}{\partial t} + 2[\zeta(u+u') - \xi(w+w')]\Big)dy +$$
$$+ \Big(\frac{\partial w'}{\partial t} + 2[\xi(v+v') - \eta(u+u')]\Big)dz\Big]. \quad (6)$$

Выражение, стоящее здесь под знаком интеграла, представляет полный дифференциал, в чем легко убедиться, составляя условия интегрируемости. Первое из этих условий может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (u+u')\Big(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Big) - (v+v')\frac{\partial \xi}{\partial y} - (w+w')\frac{\partial \xi}{\partial z} -$$
$$- \xi\Big[\frac{\partial(v+v')}{\partial y} + \frac{\partial(w+w')}{\partial z}\Big] + \eta\frac{\partial(u+u')}{\partial y} + \zeta\frac{\partial(u+u')}{\partial z}$$

и обращается, на основании условий несжимаемости для компонентов ξ, η, ζ и $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$, в первое из уравнений (4).

§ 32. Цилиндрическая полость, вращающаяся вокруг оси, параллельной образующим. Как первый пример рассмотрим движение жидкости в цилиндрической полости, образующие которой параллельны оси Oz при вращении тела около этой оси. Мы видели в § 14, что в этом случае $w = 0$, а u

и v суть функции x и y. Если в начальный момент u', v', w' удовлетворяют тому же условию, и следовательно, $\xi = \eta = 0$, то по прошествии бесконечно малого времени dt, по уравнениям (4), $d\xi = 0$, $d\eta = 0$, а $d\zeta$ есть некоторая функция x и y, откуда, на основании сказанного об определении du', dv', dw', придем к заключению, что $dw' = 0$, а du' и dv' суть функции x и y. Таким образом, переходя от одного момента времени к другому, убедимся, что во все время движения $w' = 0$, а u' и v' суть функции x и y. От уравнений (4) у нас остается только третье, которое будет иметь вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(u + u')\frac{\partial \zeta}{\partial x} - (v + v')\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \qquad (7)$$

Воспользуемся этим уравнением для определения таких значений u', v', которые не изменяются со временем, как бы тело ни вращалось около оси Oz. Предположив сначала, что тело неподвижно, подставляем в уравнение (7)

$$u = v = 0, \quad u' = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0;$$

получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

и заключаем, что

$$\zeta = \psi(f_1).$$

Потом, положив, что тело имеет какое-нибудь движение, подставляем в уравнение (7) найденную величину ζ и

$$u' = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad u = \omega_3 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad v = -\omega_3 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

где на основании уравнения (9) второй главы

$$f_2 = f + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

получаем

$$\omega_3 \psi'(f_1)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = 0$$

и заключаем, что

$$f_1 = \chi(f_2).$$

Таким образом, *для того чтобы течение u', v' было ламинентно, оно должно совершаться по траекториям, данным уравнением* (10) *второй главы*. Составим теперь ζ по формуле (1):

$$\zeta = -\frac{1}{2}\Delta_2 f_1 = -\frac{1}{2}\left\{\chi''\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right] + \chi'\Delta_2 f_2\right\}.$$

Так как $\Delta_2 f_2 = 2$, а первый дифференциальный параметр от f_2, вообще говоря, не есть функция от f_2, то необходимо иметь $\chi'' = 0$; отсюда

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= cf_2 + c_1, \\ \zeta &= -c, \\ u' &= c\frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ v' &= -c\frac{\partial f_2}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Обращаясь к уравнениям (5) и полагая в них $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $P = Q = L = M = 0$, $R = \text{const.}$, найдем одно уравнение

$$N = C\frac{d\omega_3}{dt},$$

показывающее, что тело будет вращаться около оси Oz так, как если бы жидкости не было сообщено никакого начального движения.

Положив, что тело вращается равномерно, и $c = -\omega_3$, найдем по уравнениям (8) и вышенаписанным значениям u и v, что $u + u' = 0$ и $v + v' = 0$. В этом случае жидкость не будет иметь относительного движения и будет двигаться так, как будто бы она отвердела; но если посредством действия внешней силы тело будет остановлено, то жидкость, сохранив без изменения свое течение u', v', начнет двигаться относительно тела со скоростями

$$u' = -\omega_3\frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad v' = \omega_3\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Это соображение дает весьма удобный способ проверять на опытах виды траекторий, найденные в §§ 15, 16 и 17. Мы сделали две цинковые цилиндрические коробки небольшой высоты, которые прикрывались сверху притертыми стеклами, а снизу имели шипы, с помощью которых их можно было прикрепить к колесу центробежной машины. Первая коробка имела в основании равносторонний треугольник, а вторая имела эллиптическое основание, к которому по линии фокусов была припаяна перпендикулярно прямоугольная перегородка, доходящая до плоскости стекла. Коробки наполнялись водою, содержащею в себе маленькие запятообразные водоросли, удельный вес которых был близок к единице, и прикрывались под водою стеклами, которые прижимались к их краям пинцетами. Приведя коробку посредством центробежной машины в равномерное вращение, мы сразу останавливали ее и наблюдали пути, описываемые водорослями. Пути эти для треугольной коробки были схожи с траекториями, изображенными на фигуре 7; в эллиптической же коробке получалась отчетливо линия раздела, которая оказалась приблизительно симметричной относительно осей эллипса; траектории же внутри этой линии были несколько сдвинуты в правую и левую стороны, как представлено на фигуре 8 (течение надо взять в обратную сторону).

§ 33. Полость в форме эллипсоида вращения. Для второго примера рассмотрим полость, имеющую форму эллипсоида вращения около оси Ox, центр которого совпадает с неподвижной точкой O.

Положим, что тело продолжительное время вращается равномерно около некоторой неподвижной оси, проходящей через точку O, вследствие чего жидкость в полости, увлекаясь трением, начинается двигаться вместе с телом, как одна неизменяемая система.

Когда такое движение установилось, подействуем на тело весьма большими силами, которые остановят его в весьма малый промежуток времени. В конце этого промежутка u, v, w

обращаются в нули, а во время его $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ имеют весьма большие величины; так как эти производные не входят в уравнения (4), то приращения $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ за время удара весьма малы; и u', v', w' можно принять неизменяющимися за это время.

В начале удара $u + u' = 0$, $v + v' = 0$, $w + w' = 0$, поэтому в конце его $u' = -u$, $v' = -v$, $w' = -w$, где u, v, w определяются по угловым скоростям до удара из формул (4) второй главы. Взявши в этих формулах вместо p, q, r величины $-p'$, $-q'$, $-r'$ и положив $b = c$, найдем, что в момент остановки тела жидкость будет двигаться со скоростями:

$$\left.\begin{aligned} u' &= a^2(q'z - r'y), \\ v' &= b^2(r'x - p'z), \\ w' &= b^2(p'y - q'x). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

После первого удара сообщим телу второй удар, от действия которого оно получает некоторые угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3, скорости же u', v', w' от этого удара тоже не изменяются; так что внутреннее движение жидкости под конец второго удара будет иметь скорости $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, где на основании формул (4) и (5) второй главы

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}(\omega_2 z - \omega_3 y), \\ v &= -2b^2\left(\frac{\omega_3 x}{a^2 + b^2} - \frac{\omega_1 z}{2b^2}\right), \\ w &= -2b^2\left(\frac{\omega_1 y}{2b^2} - \frac{\omega_2 x}{a^2 + b^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Произведя второй удар, предоставляем нашей системе двигаться по инерции и задаемся вопросом об определении ее движения, пренебрегая трением [1]).

[1]) Действительное движение будет схоже с подобным движением только в продолжение небольшого времени, пока трение, зародившись при поверхности полости, не даст ему совершенно другой характер.

Скорости u, v, w будут все время движения выражаться по формулам (10), в которых за ω_1, ω_2, ω_3 надо считать изменяющиеся со временем компоненты угловой скорости тела. Посмотрим, нельзя ли удовлетворить уравнениям (4) и (5), допуская, что u', v', w' все время движения выражаются формулами (9), в которых p', q', r' суть некоторые функции времени. Формулы (9), представляя эллиптическое вращение в нашей полости, дают течение без изменения объема, имеющее одною из поверхностей тока стенки полости. Определим с помощью их ξ, η, ζ и P, Q, R:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = b^2 p', \qquad \eta = \frac{a^2+b^2}{2} q', \qquad \zeta = \frac{a^2+b^2}{2} r', \\ &P = \frac{2Mb^4}{5} p', \quad Q = \frac{2Ma^2b^2}{5} q', \quad R = \frac{2Ma^2b^2}{5} r', \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где M — масса жидкости. Положив для простоты $B = C$, подставляем формулы (9), (10) и (11) в формулы (4) и (5) и делаем некоторые преобразования:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp'}{dt} = -\frac{a^2}{b^2}(\omega_2 r' - \omega_3 q'), \\ &\frac{dq'}{dt} = -\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} p'r' + \omega_1 r' - \frac{4b^4}{(a^2+b^2)^2}\omega_3 p', \\ &\frac{dr'}{dt} = \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2} p'q' - \omega_1 q' + \frac{4b^4}{(a^2+b^2)^2}\omega_2 p', \\ &\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \\ &\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{A-B}{B}\omega_1\omega_3 + \frac{2Ma^2b^4(a^2-b^2)}{5B(a^2+b^2)} p'r' - \\ &\qquad - \frac{2Mb^4}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 p'\omega_3, \\ &\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{A-B}{B}\omega_1\omega_2 - \frac{2Ma^2b^4(a^2-b^2)}{5B(a^2+b^2)} p'q' + \\ &\qquad + \frac{2Mb^4}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 p'\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Так как надлежащим выбором p', q', r', ω_1, ω_2, ω_3 можно всегда удовлетворить этим шести совместным уравнениям,

то сделанное нами предположение о виде скоростей u', v', w' справедливо. Нам удалось получить все интегралы интересующей нас задачи. Четвертое из уравнений (12) дает

$$\omega_1 = \text{const.} \tag{13}$$

Умножаем второе уравнение на q', третье — на r' и складываем:

$$q'\frac{dq'}{dt} + r'\frac{dr'}{dt} = \frac{4b^4p'}{(a^2+b^2)^2}(\omega_2 r' - \omega_3 q');$$

подставляем сюда $\omega_2 r' - \omega_3 q'$ из первого уравнения и интегрируем:

$$q'^2 + r'^2 = \text{const.} - \frac{4b^8}{a^2(a^2+b^2)^2}p'^2. \tag{14}$$

Умножим пятое уравнение на ω_2, шестое — на ω_3 и складываем:

$$\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{2Ma^2b^4}{5B}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}p'(\omega_2 r' - \omega_3 q');$$

преобразуем на основании первого уравнения и интегрируем:

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{const.} - \frac{2Mb^6}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)p'^2. \tag{15}$$

Исключаем из второго и пятого уравнений члены, содержащие $p'r'$, а из третьего и шестого — члены, содержащие $p'q'$:

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}\frac{dq'}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{A-B}{B}\omega_1\omega_3 - \frac{2Mb^4}{5B}\omega_3 p' + \frac{2Ma^2b^2}{5B}\omega_1 r',$$

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}\frac{dr'}{dt} + \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{A-B}{B}\omega_1\omega_2 + \frac{2Mb^4}{5B}\omega_2 p' - \frac{2Ma^2b^2}{5B}\omega_1 q';$$

умножаем эти уравнения соответственно на

$$\frac{2Ma^2b^2}{5B}q' + \omega_2, \quad \frac{2Ma^2b^2}{5B}r' + \omega_3,$$

складываем их, преобразуем по первому из уравнений (12) и интегрируем:

$$\left(\frac{2Ma^2b^2}{5B}q' + \omega_2\right)^2 + \left(\frac{2Ma^2b^2}{5B}r' + \omega_3\right)^2 = \text{const.} - \left(\frac{2Mb^4}{5B}p' + \frac{A\omega_1}{B}\right)^2;$$

пользуясь уравнениями (14) и (15), преобразуем найденный интеграл в

$$\omega_2 q' + \omega_3 r' = \text{const.} - \frac{b^4}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left\{\frac{Mb^2}{5B}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) - \frac{1}{2}\right\} p'^2 - \frac{Ab^2}{Ba^2}\omega_1 p'$$

и упрощаем его положением

$$B = \frac{\gamma M}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}, \qquad (16)$$

где $\gamma > 1$ на основании формулы (2) второй главы:

$$\omega_2 q' + \omega_3 r' = \text{const.} - \frac{b^4\,[2b^2 - \gamma\,(a^2-b^2)]}{2\gamma a^2\,(a^2+b^2)}\,p'^2 - \frac{Ab^2}{Ba^2}\omega_1 p'. \qquad (17)$$

Для дальнейшего интегрирования пишем тождество

$$(\omega_2^2 + \omega_3^2)(q'^2 + r'^2) - (\omega_2 q' + \omega_3 r')^2 = (\omega_2 r' - \omega_3 q')^2 \qquad (18)$$

и представляем его первую часть в виде $\frac{b^4}{a^4} f(p')$ на основании формул (14), (15) и (17), вторую же часть на основании первого из уравнений (12) представляем через

$$\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2;$$

тогда по разделении переменных и интегрировании находим:

$$t = \int \frac{dp'}{\sqrt{f(p')}}. \qquad (19)$$

Так как $f(p')$ есть многочлен четвертой степени от p', то найденный интеграл приводится к эллиптическому интегралу первого рода. Чтобы не усложнять формул, мы рассмотрим только тот случай, когда постоянная угловая скорость $\omega_1 = 0$, причем читатель увидит, что вся дальнейшая интеграция выполнима и без этого предположения. Формула (17) показывает, что при $\omega_1 = 0$ уравнение

$$f(p') = 0 \qquad (20)$$

будет биквадратное. Подставив в $f(p')$ начальное значение p', мы получим на основании уравнения (18) некоторую поло-

жительную величину; будем увеличивать p', изменяя его непрерывно до $+\infty$; при значении p', обращающем в нуль вторую часть формулы (15), функция $f(p')$, которая сама представляет первую часть формулы (18), умноженную на $\frac{a^4}{b^4}$, сделается отрицательной; наконец, при $p'=+\infty$ функция $f(p')$ будет иметь знак коэффициента n при p'^4 в уравнении (20), который имеет величину

$$n=\frac{8b^8a^2}{\gamma(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)}-\frac{b^4[2b^2-\gamma(a^2-b^2)]^2}{4\gamma^2(a^2+b^2)^2}. \qquad (21)$$

На основании сказанного следует, что при $n>0$ все четыре корня уравнения (20) будут действительны и представятся в виде $\pm\alpha$ и $\pm\beta$; в случае же $n<0$ корни будут или указанного вида, или они будут $\pm ix$ и $\pm\beta$.

Условимся в случае действительных корней брать $\beta>\alpha$. Формула (21) показывает нам, что при $a<b$ коэффициент n отрицателен, так что в этом случае корни могут быть или все действительные, или два мнимых. Мы должны теперь рассмотреть три случая:

1) $n>0$, все корни действительны, p' может изменяться между $-\alpha$ и $+\alpha$,

$$f(p')=n(\alpha^2-p'^2)(\beta^2-p'^2).$$

Полагаем, что $p'=0$ при $t=0$ и делаем в уравнении (19) подстановку $p'=\alpha x$; находим, что

$$t\beta\sqrt{n}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left[1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2x^2\right]}},$$

откуда

$$p'=\alpha\sin\operatorname{am}(t\beta\sqrt{n}) \qquad (22)$$

при модуле

$$k=\frac{\alpha}{\beta}.$$

2) $n<0$, два корня мнимых, p' может изменяться между $-\beta$ и $+\beta$,

$$f(p')=-n(\alpha^2+p'^2)(\beta^2-p'^2).$$

Полагаем $p' = \beta$ при $t = 0$ и делаем подстановку

$$p' = \beta\sqrt{1 - x^2};$$

получаем:

$$t\sqrt{-n(\alpha^2 + \beta^2)} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x^2\right)}},$$

откуда

$$p' = \beta \cos \operatorname{am}\left[t\sqrt{-n(\alpha^2 + \beta^2)}\right] \tag{23}$$

при модуле

$$k = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

3) $n < 0$, все корни действительны, p' может изменяться между α и β,

$$f(p') = -n(p'^2 - \alpha^2)(\beta^2 - p'^2).$$

Полагаем $p' = \beta$ при $t = 0$ и делаем подстановку

$$p' = \sqrt{\beta^2 - (\beta^2 - \alpha^2)x^2};$$

получаем:

$$t\beta\sqrt{-n} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1 - \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}x^2\right)}},$$

откуда

$$p' = \beta\Delta \operatorname{am}(t\beta\sqrt{-n}) \tag{24}$$

при модуле

$$k = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}.$$

Найденные формулы показывают, что p' при непрерывном возрастании t будет периодически изменяться в первом случае между $-\alpha$ и $+\alpha$, во втором — между $-\beta$ и $+\beta$ и в третьем — между α и β. Время T полного колеба-

ния для этих трех случаев будет:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{4}{\beta\sqrt{n}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha}{\beta}\right), \\ T &= \frac{4}{\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \\ T &= \frac{2}{\beta\sqrt{-n}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, третья из этих формул дает:

$$T = \frac{2}{\beta\sqrt{-n}} F\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \infty,$$

так что p' будет, начиная от значения β, постоянно уменьшаться, стремясь к нулю.

Определив p' в функции времени, мы можем на основании формул (14) и (15) выразить в функциях времени

$$\sqrt{q'^2+r'^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\omega_2^2+\omega_3^2}.$$

Определять отдельно q', r', ω_2, ω_3 мы не будем, так как, пользуясь тремя найденными величинами, легко отыскать интегралы, дающие положение тела в пространстве и внутреннее движение заключенной в нем жидкости во всякое время.

Вообразим (фиг. 16) сферу, проведенную радиусом единицы из центра O, и примем за ее полярную ось направление OP главного момента количеств движения всех точек нашей системы, а за плоскость ее экватора — *неизменяемую плоскость*. Назовем через θ и φ широту и долготу точки Q, в которой ось Ox пересекает эту сферу.

Разложим наш главный момент G на составляющие OH и OS, из которых первая идет по оси Ox, а вторая лежит в плоскости Oyz и имеет некоторое направление Oy''. Первая составляющая будет вследствие $\omega_1 = 0$ и формулы (11):

$$G\sin\theta = \frac{2Mb^4}{5} p',$$

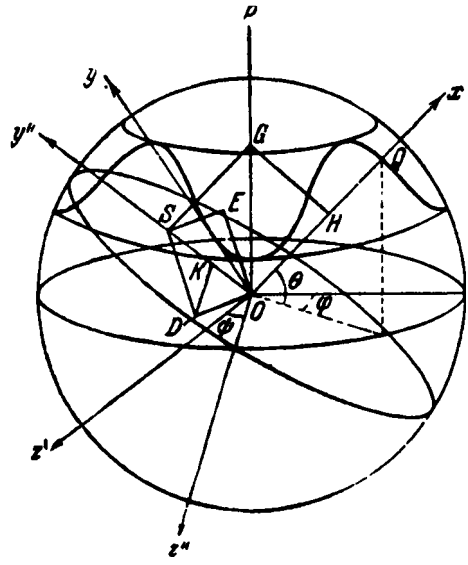
откуда

$$\sin\theta = \frac{2Mb^4}{5G} p', \qquad (26)$$

где p' должно быть заменено по формулам (22), (23) и (24). Положив

$$\sin\theta_1 = \frac{2Mb^4}{5G}\alpha, \quad \sin\theta_2 = \frac{2Mb^4}{5G}\beta,$$

найдем, что точка Q будет описывать волнообразный путь, заключенный между двумя параллельными кругами, которые имеют широты $\pm\theta_1$ в первом случае, $\pm\theta_2$ во втором случае и θ_1, θ_2 в третьем случае. Между этими кругами точка Q будет совершать свои колебания по закону маятника во времена, указанные формулами (25); при этом в тот момент, когда Q будет вступать на экватор (в первом и во втором случаях), p' будет обращаться в нуль.



Фиг. 16.

Переходим к составляющей главного момента $OS = G\cos\theta$. Она слагается геометрически из моментов

$$OD = B\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2},$$

$$OE = \frac{2Ma^2b^2}{5}\sqrt{q'^2 + r'^2}.$$

В параллелограмме $ODSE$ мы знаем, таким образом, стороны и диагональ; но, кроме того, легко определить проекцию OK момента OD на диагональ OS. Можно предположить, что все вращательное движение нашего твердого тела происходит от трех вращений: относительно оси OP, оси Ox и оси Oz'', перпендикулярной к двум первым, с угловыми скоростями

$$\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt}, \quad -\frac{d\theta}{dt},$$

где ψ есть угол между Oz'' и Oz. Так как оси двух последних вращений перпендикулярны к прямой OS, то проекция угловой скорости вращения тела на эту прямую будет $\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta$; отсюда следует, что

$$OK = B\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta.$$

Теперь мы можем, пользуясь фигурою 16, написать, что

$$B^2(\omega_2^2+\omega_3^2) - B^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos^2\theta = 4\frac{M^2a^4b^4}{25}(q'^2+r'^2) - \left(G - B\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos^2\theta;$$

отсюда определяем $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{2B} + \frac{25B^2(\omega_2^2+\omega_3^2) - 4M^2a^4b^4(q'^2+r'^2)}{50BG\cos^2\theta};$$

преобразуем на основании формул (14), (15), (16) и (26):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{2B}\left(1 + \frac{\gamma^3(a^2-b^2)^3 - 8a^2b^4}{2b^2(a^2+b^2)^2}\right) + \frac{m}{1 - \frac{4M^2b^8}{25G^2}p'^2}, \qquad (27)$$

где величина m может быть определена по начальным значениям p' и $\frac{d\varphi}{dt}$. Подставляем сюда p' из формул (22), (23) и (24) и, положив для сокращения письма

$$e = \frac{G}{2B}\left(1 + \frac{\gamma^3(a^2-b^2)^3 - 8a^2b^4}{2b^2(a^2+b^2)^2}\right),$$

производим интеграцию:

$$\varphi = et + l\int\frac{du}{1+\lambda\sin^2\operatorname{am}u}. \qquad (28)$$

В вошедшем сюда эллиптическом интеграле третьего рода надо приписывать модулю и аргументу u значения, указанные в формулах (22), (23), (24); что же касается параметра λ, то он для трех рассматриваемых случаев будет иметь величины:

$$\lambda = -\sin^2\theta_1,$$
$$\lambda = \operatorname{tg}^2\theta_2,$$
$$\lambda = \frac{\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1}{\cos^2\theta_2};$$

множителю l надо для этих трех случаев приписывать значения:

$$l = \frac{m}{\beta \sqrt{n}},$$

$$l = \frac{m}{\cos^2 \theta_2 \cdot \sqrt{-n(\alpha^2 + \beta^2)}},$$

$$l = \frac{m}{\cos^2 \theta_2 \cdot \beta \sqrt{-n}}.$$

Пользуясь формулой (28), можно определить разность долгот двух последовательных точек прикосновения кривой, описываемой точкою Q, с предельным параллельным кругом. Эта разность будет:

$$\varphi_0 = eT + nl\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, k\right), \tag{29}$$

где T, l, λ и k имеют для трех рассматриваемых случаев указанные значения, а n равно 4 в первом и втором случаях и равно 2 в третьем случае. При вычислении этой формулы следует выразить интеграл третьего рода $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, k\right)$ по известным правилам с помощью функций Якоби. Величины параметров λ показывают, что в первом случае мы будем иметь интеграл третьего рода первого класса, а во втором и третьем — четвертого класса.

Обращаемся к определению ψ. Припоминая сказанное о разложении вращения тела на три вращения около осей OP, Ox, Oz'', находим, что

$$\omega_1 = 0 = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta;$$

определяем отсюда $d\psi$ и преобразуем его на основании формул (27), (26), (22), (23), (24):

$$-\beta\sqrt{n}\,d\psi = e\sin\theta_1 \operatorname{sn} u\,du + \frac{m\sin\theta_1 \operatorname{sn} u}{1 - \sin^2\theta_1 \operatorname{sn}^2 u}\,du;$$

$$-\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}\,d\psi = e\sin\theta_2 \operatorname{cn} u\,du + \frac{m\sin\theta_2 \operatorname{cn} u}{1 - \sin^2\theta_2 \operatorname{cn}^2 u}\,du;$$

$$-\beta\sqrt{-n}\,d\psi = e\sin\theta_2\,\Delta\operatorname{am} u\,du + \frac{m\sin\theta_2\,\Delta\operatorname{am} u}{1 - \sin^2\theta_2\,\Delta^2\operatorname{am} u}\,du.$$

Совершая здесь интеграцию, находим, что все квадратуры выполняются с помощью логарифмических и круговых функций от эллиптических функций:

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta\sqrt{n}\,\psi + \text{const.} = \\
&\quad = e\sin\theta_2 \ln\left(\Delta\,\mathrm{am}\,u + \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\mathrm{am}\,u\right) + \\
&\qquad + \frac{m\,\mathrm{tg}\,\theta_2}{2\cos\theta_1}\ln\left(\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2\,\Delta\,\mathrm{am}\,u + \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\mathrm{am}\,u}{\cos\theta_1\sin\theta_2\,\Delta\,\mathrm{am}\,u - \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\mathrm{am}\,u}\right), \\
&\sqrt{-n(\alpha^2+\beta^2)}\,\psi + \text{const.} = \\
&\quad = e\sqrt{\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2}\,\arcsin\left(\Delta\,\mathrm{am}\,u\right) - \\
&\qquad - \frac{m\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2\sqrt{(1+\sin^2\theta_1)(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}} \times \\
&\qquad \times \mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{(1+\sin^2\theta_1)(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}}{\cos\theta_2\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}\right], \\
&\beta\sqrt{-n}\,\psi + \text{const.} = \\
&\quad = -e\sin\theta_2\,\mathrm{am}\,u - \frac{m\,\mathrm{tg}\,\theta_2}{\cos\theta_1}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (30)
$$

Теперь вопрос о движении нашего твердого тела при $\omega_1 = 0$ нами вполне разрешен. Если бы мы желали еще знать для всякого момента времени течение u', v', w', то могли бы рассматривать его как эллиптическое вращение, относимое к осям Ox, Oz'', Oy'' и определяемое параметрами p', r'', q'', имеющими то же значение, как p', r', q' в формуле (9). Величина p' дается формулами (22), (23), (24); r'' получаем, разделяя KS (фиг. 16) на $\frac{2Ma^2b^2}{5}$:

$$r'' = \frac{5\left(G - B\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\theta}{2Ma^2b^2};$$

q'' же можем определить, выражая сумму моментов количеств движения относительно оси Oz'', которая должна быть равна нулю:

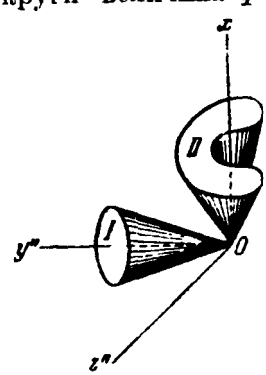
$$q'' = \frac{5B\frac{d\theta}{dt}}{2Ma^2b^2}.$$

Преобразуя эти величины r'' и q'' с помощью формул (27), (26), (22), (23), (24), находим для наших трех случаев:

$$\left.\begin{aligned} r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \frac{m}{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am}u}\sqrt{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am}u}\right),\\ r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \frac{m}{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am}u}\sqrt{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am}u}\right),\\ r'' &= \frac{5}{2Ma^2b^2}\left(G - eB - \frac{m}{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am}u}\sqrt{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am}u}\right); \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} q'' &= \frac{25GB\sin\theta_1\sin\theta_2\sqrt{n}}{4M^2a^2b^6}\,\frac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1\sin^2\operatorname{am}u}},\\ q'' &= -\frac{25GB\sin\theta_2\sqrt{-n(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)}}{4M^2a^2b^6}\,\frac{\sin\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2\cos^2\operatorname{am}u}},\\ q'' &= -\frac{25GB(\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_1)\sqrt{-n}}{4M^2a^2b^6}\,\frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2\Delta^2\operatorname{am}u}}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Мы видим из формул (32), что в момент вступления точки Q на предельные параллельные круги величина q'' обращается в нуль, а во всякое другое время имеет знак + или —, смотря по тому, идет ли точка Q вниз или вверх на фигуре 16. Далее формулы (31) показывают нам, что в моменты вступления точки Q на тот или другой предельный круг величина r'' в первом и втором случаях будет одинакова, в третьем же случае мы получим для этих моментов две различные величины r'', которые даже могут иметь различные знаки. Присоединяя к этому то обстоятельство, что в первом и втором случаях p'' изменяет знак, а в третьем — имеет постоянный знак, приходим к заключению, что ось эллиптического вращения течения u', v', w' в первом и втором случаях описывает (фиг. 17) конус вида I, а в третьем — вида II.



Фиг. 17.

Б. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

§ 34. Дифференциальные уравнения задачи и формула для гидродинамического давления. Принимая во внимание трение жидкости в полости движущегося тела, мы должны прибавить к силам, действующим на ее частицы, еще силы, проекции которых на оси Ox, Oy, Oz (взятые в § 29) суть

$$F_1 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_1, \quad F_2 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_2, \quad F_3 = \frac{\mu}{\rho}\Delta_2 v_3,$$

где μ — коэффициент внутреннего трения, а v_1, v_2, v_3 — скорости, выраженные формулой (3). Так как по условию несжимаемости имеем тождество

$$\Delta_2 v_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right),$$

которое на основании формул (3) и (1) дает:

$$\Delta_2 v_1 = -2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right),$$

то силы F_1, F_2, F_3 могут быть еще представлены формулами

$$F_1 = -\frac{4\mu}{\rho}\xi_1, \quad F_2 = -\frac{4\mu}{\rho}\eta_1, \quad F_3 = -\frac{4\mu}{\rho}\zeta_1, \tag{33}$$

в которых

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Вихри ξ_1, η_1, ζ_1 мы будем называть вихрями второго порядка, так как они суть вихри течения несжимаемой жидкости со скоростями ξ, η, ζ; подобным же образом мы будем называть вихрями третьего порядка и обозначать через ξ_2, η_2, ζ_2 вихри течения несжимаемой жидкости со скоростями ξ_1, η_1, ζ_1.

Кроме прибавления указанных сил, мы должны еще стеснить относительное течение жидкости при поверхности полости, выражая, что поверхностное трение уравновешивается тангенциальной составляющей внутреннего трения. Сила поверхностного трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости V, и выражается, вообще говоря, некоторою функциею $f(V)$. Рассматривая малые скорости, мы примем вместе со Стоксом [1])

$$f(V) = \nu V,$$

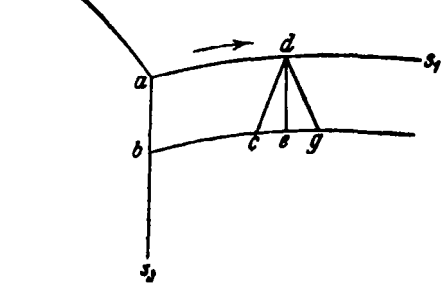
где ν есть коэффициент внешнего трения.

Для определения тангенциальной силы внутреннего трения построим на поверхности полости (фиг. 18) семейство линий тока (s_1) для относительного движения жидкости и семейство (s_2) линий, ортогональных линиям тока; проведем к поверхности нормаль as_3 и через нее поверхность тока s_1as_3; назовем через $2\theta_1$ и $2\theta_2$ скольжения, соответствующие прямым углам s_2as_3 и s_3as_1. Проекции искомой силы на касательные к as_1 и as_2 в точке a будут:

$$T_2 = 2\mu\theta_2, \quad T_1 = 2\mu\theta_1,$$

и так как эти силы должны уравновеситься поверхностным трением, то

$$\theta_1 = 0, \quad 2\mu\theta_2 = \nu V.$$



Фиг. 18.

Первое условие показывает, что *поверхность тока относительного движения, проведенная через нормаль к стенке полости, должна быть ортогональна этой стенке*. Чтобы определить θ_2 во втором уравнении, проведем по поверхности тока s_3as_1 линию тока bg бесконечно близко к as_1 и положим, что во время dt

[1]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, Mathematical and Physical Papers, т. I, стр. 75.

точки жидкости a и b переходят в их относительном движении в точки d и g. Проведя элемент dc ортогональной линии к линиям тока по поверхности $s_1 a s_3$ и отложив $be = ad$, найдем по фигуре 18, что

$$\theta_2 = \frac{1}{2dt}\frac{ce + eg}{cd};$$

но так как

$$\frac{1}{dt}\frac{ce}{cd} = \frac{\left(\frac{ce}{cd}\right)ad}{ad\ dt} = \frac{V}{R},$$

$$\frac{1}{dt}\frac{eg}{cd} = \frac{1}{cd}\left(\frac{bg}{dt} - \frac{be}{dt}\right) = \frac{dV}{ds_3},$$

то

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{V}{R}\right),$$

где R есть радиус нормальной кривизны поверхности стенок в направлении линии тока s_1. Таким образом, находим второе условие на поверхности:

$$V = \frac{\mu}{\nu}\left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{V}{R}\right). \qquad (34)$$

Для случая $\nu = \infty$ это условие дает $V = 0$, как это принимают в теории трубок Пуазейля.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений движения тела и заключенной в нем жидкости, пользуясь тем же самым способом рассуждения, каким мы пользовались для решения задачи без трения.

В нашем случае жидкая масса в полости должна быть в равновесии под действием сил, имеющих потенциальную функцию, сил инерции и сил трения: для этого необходимо, чтобы силы инерции вместе с силами трения имели потенциальную функцию, т. е. чтобы циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру равнялась циркуляции по этому контуру вектора (F_1, F_2, F_3). Так как вследствие формулы (33) для бесконечно малого треугольника, рассматриваемого в § 30, циркуля-

ция вектора (F_1, F_2, F_3) по теореме Стокса будет:

$$-\frac{8\mu}{\rho}(\xi_2\sigma_1+\eta_2\sigma_2+\zeta_2\sigma_3),$$

то вместо формул (4), в случае жидкости с трением мы должны взять

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(u+u')}{\partial x}+\eta\frac{\partial(u+u')}{\partial y}+\zeta\frac{\partial(u+u')}{\partial z}- \\
&\quad -(u+u')\frac{\partial\xi}{\partial x}-(v+v')\frac{\partial\xi}{\partial y}-(w+w')\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{4\mu}{\rho}\xi_2, \\
\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(v+v')}{\partial x}+\eta\frac{\partial(v+v')}{\partial y}+\zeta\frac{\partial(v+v')}{\partial z}- \\
&\quad -(u+u')\frac{\partial\eta}{\partial x}-(v+v')\frac{\partial\eta}{\partial y}-(w+w')\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{4\mu}{\rho}\eta_2, \\
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{\partial(w+w')}{\partial x}+\eta\frac{\partial(w+w')}{\partial y}+\zeta\frac{\partial(w+w')}{\partial z}- \\
&\quad -(u+u')\frac{\partial\zeta}{\partial x}-(v+v')\frac{\partial\zeta}{\partial y}-(w+w')\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{4\mu}{\rho}\zeta_2.
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Что касается дифференциальных уравнений движения твердого тела, то они и в задаче с трением выражаются формулами (5), так как силы трения не влияют на главный момент всех сил, действующих на рассматриваемую систему. Влияние этих сил на движение тела заключается только в изменении течения (u', v', w'), вместе с которым изменяются и P, Q, R.

Формулы (5) и (35) показывают нам, что в задаче об ударе вихревое движение жидкости, заключенной в полости, и трение ее частиц не играют никакой роли. Предположим, что в момент t на тело подействовали пары с весьма большими моментами L, M, N, которые в бесконечно малое время $t'-t$ изменили угловые скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$. Так как во вторые части формул (35) не входят $\frac{d\omega_1}{dt}, \frac{d\omega_2}{dt}, \frac{d\omega_3}{dt}$, то приращения $d\xi, d\eta, d\zeta$ за время удара $t'-t$ будут бесконечно малы, отсюда du', dv', dw', а следовательно, и dP, dQ, dR будут тоже бесконечно малы. Вследствие

этого формулы (5) дадут нам:

$$\omega_1' - \omega_1 = \frac{1}{A}\int_t^{t'} L\,dt,$$

$$\omega_2' - \omega_2 = \frac{1}{B}\int_t^{t'} M\,dt,$$

$$\omega_3' - \omega_3 = \frac{1}{C}\int_t^{t'} N\,dt.$$

Таким образом, *удар тел, заключающих в своих полостях жидкость, может быть рассматриваем как удар неизменяемых систем, когда прибавим к телам соответственные эквивалентные тела.*

Обращаемся затем к составлению величины гидродинамического давления. Мы можем воспользоваться всем изложенным в § 31 для получения проекций на оси Ox, Oy, Oz полного ускорения частицы жидкости. Вычитая из этих проекций силы трения F_1, F_2, F_3, данные формулами (33), мы должны получить частные производные по x, y, z от некоторой функции координат; вычитая же эту функцию из силовой функции, мы найдем до постоянного $\frac{p}{\rho}$:

$$\frac{p}{\rho} - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) -$$
$$- \int \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')] + \frac{4\mu}{\rho}\xi_1\right) dx + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + 2[\zeta(u+u') - \xi(w+w')] + \frac{4\mu}{\rho}\eta_1\right) dy +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + 2[\xi(v+v') - \eta(u+u')] + \frac{4\mu}{\rho}\zeta_1\right) dz \right\} \quad (36)$$

Легко показать, как это было сделано в § 31, что условия интегрируемости входящего сюда интеграла дают уравнения (35). Для устранения сомнения относительно нашей неопределенной функции времени τ просим читателя вообразить полое раскрывающееся яйцо, которое несколько

раздвинуто и заполнено жидкостью; потом приложить к нему две равные и противоположные силы P, стремящиеся закрыть его, но не могущие этого сделать вследствие несжимаемости жидкости. Пусть яйцу сообщено некоторое вращение. Составив по формуле (36) давление жидкости на разрез яйца и приравняв его P, читатель определит τ, которое вообще будет некоторою функцией времени. Но так как для абсолютно твердого тела вышеуказанная сила P неизвестна, то неизвестно и τ.

При решении задач, отнесенных к криволинейным координатам, мы будем вместо уравнений (35) прямо пользоваться этим условием интегрируемости, которое для большего удобства сформулируем в виде следующей теоремы: *частные производные по времени от u', v', w' вместе с поворотными ускорениями, которые определяются по вращению частицы и ее относительной скорости, и вихрями второго порядка, умноженными на $\frac{4\mu}{\rho}$, должны иметь потенциальную функцию.*

§ 35. Задача Гельмгольца о колебаниях около неподвижной оси шара, наполненного трущеюся жидкостью. Для первого примера рассмотрим задачу Гельмгольца о колебании около неподвижной оси тела, содержащего в своей шаровой полости радиуса a трущуюся жидкость и находящегося под действием пары, момент которой пропорционален угловому перемещению тела, считая от положения его равновесия. Примем в формуле (5) ось Ox за ось вращения тела и определим A, присоединив к твердому телу эквивалентное тело, которое в нашем случае будет материальною точкою, равною по массе жидкости и помещенною в центре шара.

При определении внутреннего движения жидкости и зависящей от него величины P можем предполагать, что стенки полости вращаются около диаметра, параллельного оси вращения. Примем этот диаметр за полярную ось системы полярных координат, в которых r, θ и φ представляют радиус-вектор, полярный угол и долготу. Согласно нашему воззрению, внутреннее движение жидкости слагается

из течения u, v, w, определяемого по формуле (8) первой главы (при $\chi = 0$), и течения u', v', w', происходящего от трения.

В нашей задаче первое течение будет:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\omega_1;$$

для второго же течения Гельмгольц берет

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \psi, \tag{37}$$

где ψ есть функция одного r.

Для этого второго течения мы должны определить вихри первого и второго порядка, что сделать весьма удобно, прилагая теорему Стокса[1]) к элементарным четырехугольникам, образованным координатными линиями, потом по найденным вихрям первого порядка следует определить поворотные ускорения скоростей $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, следуя правилу Кориолиса (надо проектировать скорость на плоскость, перпендикулярную к оси вихря, умножить ее на двойную угловую скорость вихря и повернуть на прямой угол в сторону вращения вихря). Компоненты составленных таким образом векторов по направлению элементов координатных линий написаны в следующей таблице:

Элементы	Вихри 1-го порядка	Вихри 2-го порядка	Поворотные ускорения
dr	$\dot{\psi}\cos\theta$	0	$(\omega_1 - \psi)\left(2r\dot{\psi} + r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin^2\theta$
$r\,d\theta$	$-\left(\psi + \frac{1}{2}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin\theta$	0	$r(\omega_1 - \psi)\,\dot{\psi}\sin 2\theta$
$r\sin\theta\,d\varphi$	0	$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{r}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\sin\theta$	0

[1]) Чтобы найти компоненту вихря в направлении данного элемента (см. приводимую таблицу), вычисляют циркуляцию по контуру элементар-

Прилагая теорему § 34 к величинам, данным в этой таблице, находим, что для существования движения, выраженного формулой (37), необходимо условие интегрируемости дифференциального выражения

$$(\omega_1 - \psi)\left(2r\psi + r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin^2\theta\, dr + (\omega_1 - \psi)\psi r^2 \sin 2\theta\, d\theta + \\ + \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right] r^2 \sin^2\theta\, d\varphi.$$

Так как здесь коэффициенты при dr и $d\theta$ не содержат φ, то коэффициент при $d\varphi$ должен быть некоторым постоянным c; но при таком предположении давление p в формуле (36) должно бы возрастать на $-2\pi c$ при обходе по параллельному кругу, потому $c = 0$, и

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right). \tag{38}$$

Остающаяся часть нашего дифференциального выражения может быть представлена в виде:

$$d\left[(\omega_1 - \psi)\psi r^2 \sin^2\theta\right] + r^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin^2\theta\, dr. \tag{39}$$

Если отбросить здесь последний член, коэффициент которого второго порядка относительно малой угловой скорости ψ, то требуемое условие будет удовлетворено, и в сделанном приближении движение может быть выражено формулами (37) и (38).

Обращаемся к интегрированию уравнения (38). Положим

$$\psi = e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\chi; \tag{40}$$

тогда

$$-\lambda^2\chi = \frac{4}{r}\frac{d\chi}{dr} + \frac{d^2\chi}{dr^2}.$$

ного четырехугольника (образованного координатными линиями), поверхность которого ортогональна к взятому элементу; затем применяют теорему Стокса. При вычислении компонент вихрей второго порядка найденные компоненты вихрей первого порядка принимают за линейные скорости точек жидкости в соответствующих направлениях. (*Прим. ред.*)

Это уравнение может быть приведено к линейному с постоянными коэффициентами. Для этого умножаем его на $r\,dr$ и интегрируем:

$$-\lambda^2 \int \chi r\,dr = 2\chi + \frac{d(\chi r)}{dr},$$

потом полагаем

$$\int \chi r\,dr = \frac{z}{r};$$

получаем:

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \lambda^2 z = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$z = C\sin\lambda r + C'\cos\lambda r,$$

поэтому

$$\chi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{C}{r}\sin\lambda r + \frac{C'}{r}\cos\lambda r\right).$$

Разлагая здесь синус и косинус в ряды, видим, что при приближении r к нулю χ будет стремиться к бесконечности, если C' не равно нулю, поэтому надо взять $C' = 0$. Таким образом, получаем:

$$\chi = C\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin\lambda r}{r}\right). \tag{41}$$

Подставив эту величину χ в формулу (40), найдем одно из частных значений функции ψ; определим для него производную от момента P по времени в формуле (5):

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi\rho\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{a}\frac{\partial\psi}{\partial t}r^4\,dr = \frac{8\pi\rho}{3}\int_0^{a}\frac{\partial\psi}{\partial t}r^4\,dr.$$

Последний интеграл на основании формулы (38) приводится к

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8\pi\mu}{3}\int_0^{a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}r^4\right)dr = 2Ma\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_a,$$

где M — масса жидкости, так что по формуле (40)

$$\frac{dP}{dt} = 2Ma\frac{\mu}{\rho}e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a. \tag{42}$$

Обращаясь теперь к формуле (5), назовем через φ_1 угловое перемещение твердого тела и положим

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad L = -k\varphi_1:$$

найдем, что

$$A\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k\varphi_1 + \frac{dP}{dt} = 0. \tag{43}$$

Вследствие формулы (42) один из частных интегралов этого уравнения будет:

$$\varphi_1 = -\frac{2Ma\frac{\mu}{\rho}}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4 + k} e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{2Ma\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^2}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4 + k} e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)_a. \tag{44}$$

Переходим к условиям при поверхности полости. Первое из этих условий в нашей задаче удовлетворяется, так как поверхность тока, проведенная через нормаль к шару, представляет конус, ортогональный к его поверхности. Обращаясь ко второму условию, полагаем в формуле (34)

$$V = (\psi - \omega_1) r \sin\theta, \quad R = a, \quad ds_3 = -dr;$$

находим по сокращении

$$\omega_1 - \psi_a = \frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_a. \tag{45}$$

Разлагаем в формуле (41) $\sin\lambda r$ в ряд и, произведя указанные действия, полагаем

$$\chi = -\frac{C\lambda^3}{3} Q,$$

где

$$Q = 1 - \frac{\lambda^2 r^2}{2\cdot 5} + \frac{\lambda^4 r^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \frac{\lambda^6 r^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$$

Формула (45) по подстановке в нее соответствующих величин из формул (40), (41), (44) и сокращении дает

уравнение для определения λ:

$$\left\{\frac{2Ma\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^2}{A\frac{\mu^2}{\rho^2}\lambda^4+k}-\frac{\mu}{\nu}\right\}\left(\frac{dQ}{dr}\right)_a-Q_a=0. \tag{46}$$

Это уравнение, как видно из вышенаписанной функции Q, не может иметь чисто мнимых корней, потому что при λ^2 отрицательном первая часть его будет некоторая отрицательная величина. Любек показал [1]), что оно может иметь только действительные корни и четыре мнимых корня вида

$$\pm(\sigma+i\tau);\quad \pm(\sigma-i\tau).$$

Так как все условия (формулы (38), (43), (45)), которым должна удовлетворять функция ψ, линейного вида, то общее ее выражение представится суммою частных решений:

$$\psi=\sum e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda t}\chi, \tag{47}$$

где сумма распространяется на все корни уравнения (46), а коэффициенты C, входящие в функции χ, определяются по начальным значениям φ_1, ω_1 и начальному движению жидкости.

Гельмгольц распространяет эту сумму только на мнимые корни; при этом, так как функция χ (формула (41)) с переменой знака λ не изменяет абсолютной величины, то он берет только два сопряженных корня. Пусть

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\sigma+i\tau=m(\sin\varepsilon+i\cos\varepsilon),\\ \bar{\lambda}&=\sigma-i\tau=m(\sin\varepsilon-i\cos\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

будут эти корни; положим для первого корня

$$C=-iB,$$

а для второго

$$C=+iB;$$

[1]) Lübek, Borchardts Journal, т. 77, стр. 26.

тогда ψ представится мнимою частью от выражения

$$2Be^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}\left(\frac{\lambda\cos\lambda r}{r^2}-\frac{\sin\lambda r}{r^3}\right).$$

Положив для сокращения

$$\frac{\mu}{\rho}m^2\cos 2\varepsilon=-\beta,\quad \frac{\mu}{\rho}m^2\sin 2\varepsilon=\gamma$$

и обращая внимание на формулы:

$$e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda^2 t}=e^{-\beta t}(\cos\gamma t-i\sin\gamma t),\quad \lambda=m(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon)i,$$
$$2\cos\lambda r=e^{\sigma r}(\cos\sigma r-i\sin\sigma r)+e^{-\sigma r}(\cos\sigma r+i\sin\sigma r),$$
$$2\sin\lambda r=i[e^{\sigma r}(\cos\sigma r-i\sin\sigma r)-e^{-\sigma r}(\cos\sigma r+i\sin\sigma r)],$$

находим, что

$$\psi=\frac{mB}{r^2}[e^{-\beta t+\sigma r}\cos(\sigma r+\gamma t+\varepsilon)+e^{-\beta t-\sigma r}\cos(\sigma r-\gamma t-\varepsilon)]-$$
$$-\frac{B}{r^3}[e^{-\beta t+\sigma r}\cos(\sigma r+\gamma t)-e^{-\beta t-\sigma r}\cos(\sigma r-\gamma t)]. \qquad (49)$$

Гельмгольц замечает, что здесь движение, соответствующее первому и третьему членам, передается в виде волны с уменьшающимся напряжением от поверхности к центру со скоростью $\frac{\gamma}{\sigma}$, а движение, соответствующее второму и четвертому членам, передается от центра поверхности тоже с уменьшающимся напряжением и с тою же скоростью.

Время полного колебания шара и заключенной в нем жидкости будет:

$$T=\frac{2\pi}{\gamma},$$

а логарифмический декремент убывания амплитуд будет:

$$\ln(\varphi_1)_n-\ln(\varphi_1)_{n+1}=\beta T.$$

Эти-то величины, наблюденные Пиотровским, и послужили Гельмгольцу для определения коэффициентов трения. Когда они известны, то известны γ и β, а следовательно, и величины

$$\operatorname{tg}2\varepsilon=\frac{\gamma}{\beta},\quad \frac{\mu}{\rho}m^2=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}; \qquad (50)$$

поэтому, подставив в уравнение (46) величину λ из формулы (48), приравняв нулю действительную и мнимую части и исключив ε и m с помощью формулы (50), мы будем иметь два уравнения для определения μ и ν.

§ 36. Задача Гельмгольца о колебаниях около неподвижной оси шара, наполненного трущеюся жидкостью (продолжение). Пока речь идет о движении твердого тела, то отброшенный нами член в дифференциальном выражении (39) не играет заметной роли в явлении; но когда является вопрос о виде траекторий частиц жидкости, то едва ли можно остановиться на предположении, что частицы движутся по параллельным кругам. Оказывается, что отброшенный нами член развивает силы, которые хотя и будут второго порядка (относительно ψ), но, действуя в одном и том же направлении, могут дать совершенно другой вид траекториям частиц жидкости. В этом параграфе мы вносим в рассматриваемую задачу второе приближение, при котором член, отброшенный в выражении (39), принимается во внимание, но силы трения и поворотные ускорения в течении жидкости, вызываемые этим членом, пренебрегаются. Полагаем, что к течению, данному формулой (37), присоединяется течение

$$\frac{dr}{dt} = q, \quad \frac{d\theta}{dt} = \vartheta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

и назовем через

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q', \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \vartheta'$$

частные производные от скоростей q и ϑ по времени. Вследствие этого к выражению (39) прибавляется

$$q'\,dr + r^2\vartheta'\,d\theta,$$

и нам надо выразить условие интегрируемости выражения

$$\left(q' + \frac{r^2}{2}\frac{\partial \psi^2}{\partial r}\sin^2\theta\right)dr + r^2\vartheta'\,d\theta.$$

Это условие будет:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\vartheta') - \frac{\partial q'}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi^2}{\partial r}r^2\sin 2\theta; \qquad (51)$$

присоединим к нему условие несжимаемости, которое в полярных координатах выражается следующим уравнением:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(q'r^2)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta'\sin\theta)=0. \tag{52}$$

Умножаем уравнение (51) на r^2 и берем от обеих частей его производную по r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^2\theta')\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2q')\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right]\sin 2\theta.$$

Исключаем отсюда q' с помощью формулы (52):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^2\theta')\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta'r^2\sin\theta)\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right]\sin 2\theta.$$

Если теперь сделаем подстановку

$$\theta'r^2=z\sin 2\theta,$$

то $\sin 2\theta$ сделается общим множителем, так что, сократив на него наше уравнение, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial z}{\partial r}\right)-6z=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right),$$

или

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+2r\frac{\partial z}{\partial r}-6z=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right). \tag{53}$$

Для того чтобы определить интеграл этого линейного уравнения с последним членом, мы должны сперва найти интеграл уравнения без последнего члена

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+2r\frac{\partial z}{\partial r}-6z=0,$$

который будет:

$$z=c_1r^{k_1}+c_2r^{k_2},$$

где k_1 и k_2 суть корни уравнения

$$k^2+k-6=0,$$

и потому $k_1=2$, $k_2=-3$. Таким образом,

$$z=c_1r^2+\frac{c_2}{r^3}. \tag{54}$$

Следуя способу Лагранжа, мы должны считать здесь постоянные c_1 и c_2 за функции r и определить их так, чтобы удовлетворить уравнению (53). Для этого берем:

$$r^2\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial c_2}{\partial r}=0,$$

$$2r^3\frac{\partial c_1}{\partial r}-\frac{3}{r^2}\frac{\partial c_2}{\partial r}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right);$$

отсюда следует, что

$$c_1=\frac{1}{10}\int_0^r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right)\frac{dr}{r^3}=\frac{1}{10}\left(r\frac{\partial\psi^2}{\partial r}+3\psi^2\right),$$

$$c_2=-\frac{1}{10}\int_0^r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi^2}{\partial r}r^4\right)r^2\,dr=-\frac{1}{10}\left(r^6\frac{\partial\psi^2}{\partial r}-2\psi^2r^5+10\int_0^r\psi^2r^4\,dr\right).$$

Общий интеграл уравнения (53) найдем, прибавляя ко второй части формулы (54) интеграл, получаемый от замены в этой формуле постоянных c_1 и c_2 найденными функциями.

Так как член $\frac{c_2}{r^3}$ в найденном таким образом интеграле будет обращаться в ∞ при $r=0$, а функция z должна везде внутри шара оставаться конечной, то мы должны положить $c_2=0$; таким образом, найдем:

$$z=c_1r^2+\frac{1}{2}\psi^2r^2-\frac{1}{r^2}\int_0^r\psi^2r^4\,dr.$$

Зная z, определяем ϑ':

$$\vartheta'=\left(c_1+\frac{\psi^2}{2}-\frac{1}{r^6}\int_0^r\psi^2r^4\,dr\right)\sin 2\vartheta.$$

Когда ϑ' известно, то q' можно определить из уравнения (52). Подставляя в это уравнение ϑ' и совершая интегрирование, находим, что

$$q'=\frac{2}{3}(3\sin^2\vartheta-2)r\left\{c_1+\frac{3}{2r^3}\int_0^r\psi^2r^2\,dr-\frac{3}{r^3}\int_0^r\frac{dr}{r^3}\left(\int_0^r\psi^2r^4\,dr\right)\right\}.$$

Делаем здесь в двукратном интеграле преобразование Дирихле:

$$\int_0^r \frac{dy}{y^3} \int_0^y \psi^2 x^4\, dx = \int_0^y \psi^2 x^4\, dx \int_x^r \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2} \int_0^r \psi^2 x^2\, dx - \frac{1}{2r^2} \int_0^r \psi^2 x^4\, dx,$$

вследствие чего

$$q' = \frac{2}{3}(3\sin^2\vartheta - 2)\, r \left(c_1 + \frac{3}{2r^5} \int_0^r \psi^2 r^4\, dr \right).$$

Постоянное c_1, вошедшее сюда, послужит нам для выполнения условия обращения q' в нуль на поверхности сферы; мы должны для этого взять

$$c_1 = -\frac{3}{2a^5} \int_0^a \psi^2 r^4\, dr,$$

так что

$$q' = (3\sin^2\vartheta - 2)\, r \left\{ \frac{1}{r^5} \int_0^r \psi^2 r^4\, dr - \frac{1}{a^5} \int_0^a \psi^2 r^4\, dr \right\}. \qquad (55)$$

Внося величину c_1 в формулу для ϑ', получаем:

$$\vartheta' = \sin 2\vartheta \left\{ \frac{\psi^2}{2} - \frac{1}{r^5} \int_0^r \psi^2 r^4\, dr - \frac{3}{2a^5} \int_0^a \psi^2 r^4\, dr \right\}. \qquad (56)$$

Формулы (55) и (56) решают нашу задачу, так как, зная q' и ϑ', сейчас же находим:

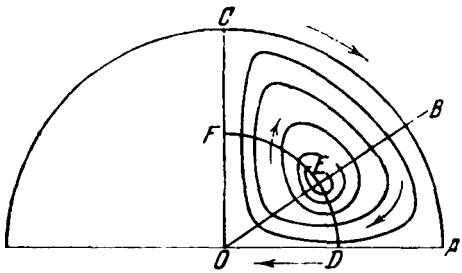
$$q = \int_0^t q'\, dt, \quad \vartheta = \int_0^t \vartheta'\, dt. \qquad (57)$$

Переходя к исследованию найденных формул, вообразим (фиг. 19) некоторое меридиональное сечение нашей полости и посмотрим, как совершается в нем найденное течение. Формулы (56), (55), (57) показывают, что при одинаковом радиусе ϑ и q изменяются пропорционально $\sin 2\vartheta$ и $3\sin^2\vartheta - 2$. Это значит, что на полярной оси OC

и экваторе OA скорость $\vartheta = 0$, а при $\theta = 45°$ она имеет наибольшую величину; скорость q обращается в нуль на радиусе OB, для которого

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е. $\theta = 54°44'8''$; для точек, лежащих выше этого радиуса, q будет иметь один знак, а для точек, лежащих ниже его, — другой.



Фиг. 19.

Для того чтобы определить, какой именно знак q будет соответствовать тем и другим точкам, возьмем производную по r от функции

$$w = \frac{1}{r^5}\int_0^r \psi^2 r^4\, dr - \frac{1}{a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\, dr,$$

входящей в формулу (55), и преобразуем результат с помощью интеграции по частям:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r^6}\int_0^r \frac{d\psi^2}{dr} r^5 dr.$$

Так как $w = 0$ при $r = a$, то при положительном значении этого интеграла для всякого r функция w будет внутри сферы отрицательна, а при отрицательном — положительна. Отсюда, обращая внимание на формулы (55) и (57), приходим к заключению: *если средний квадрат угловой скорости*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi^2\, dt$$

возрастает от центра к поверхности, то q положительно в угле COB и отрицательно в угле AOB, если же он убывает, — то наоборот.

Подобный же признак можно установить для знака скорости ϑ на поверхности сферы. Полагаем в формуле (56) $r = a$:

$$\vartheta'_a = \sin 2\theta\left(\frac{\psi_a^2}{2} - \frac{5}{2a^5}\int_0^a \psi^2 r^4\, dr\right);$$

интегрируем по частям:

$$\vartheta'_a = \frac{\sin 2\theta}{2a^5}\int_0^a \frac{\partial\psi^2}{\partial r} r^5\, dr.$$

Отсюда следует, что *в случае возрастания среднего квадрата угловой скорости от центра к поверхности жидкость течет от полюса к экватору, а в случае его убывания — от экватора к полюсу*. Зная вид функции ψ, можно отыскать круг DF, на котором $\vartheta' = 0$ и за которым течение жидкости по меридианам получает направление, обратное течению по поверхности.

На нашей фигуре представлено течение для того случая, в котором средний квадрат угловой скорости возрастает от центра к поверхности. Может случиться, что производная по r от среднего квадрата угловой скорости не будет иметь постоянного знака на всем радиусе; тогда о направлении течения по поверхности следует судить по знаку интеграла

$$\int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial r}\int_0^t \psi^2\, dt\right] r^5\, dr,$$

течение же жидкости по радиусам AO или CO может и не достигать до центра O.

Найденные нами результаты вполне оправдываются на опыте. Мы воспользовались стеклянным шаром центробежной машины (употребляемым для опыта со ртутью и водой) и наполнили его водой, в которой находились мелкие водоросли одинаковой с нею плотности. Когда шар из покоя приводился во вращательное движение и, следовательно, угловая скорость шла, убывая, от поверхности

к центру, водоросли двигались от полюса к экватору; когда же шар сначала был приведен в быстрое вращение, а потом остановлен, так что угловая скорость шла, убывая, от центра к поверхности, то замечалось движение водорослей от экватора к полюсам.

Весьма резкое явление представляло колебательное движение, которое мы сообщали шару, качая колесо машины однообразно в ту и другую сторону.

Здесь, как следует из соображений Гельмгольца, средний квадрат угловой скорости быстро уменьшается при передвижении к центру [1]), согласно с этим, после нескольких колебаний устанавливалось течение, подобное изображенному на фиг. 19; даже точка E, около которой крутились водоросли, лежала на радиусе, образующем с полярною осью угол, довольно близкий к 54°.

§ 37. Решение задачи § 27 с учетом трения. Для второго примера решим, принимая во внимание трение жидкости, задачу § 27. Рассматривая сначала трубку круглого сечения радиуса a, ось которой представляет произвольную замкнутую кривую, дадим приближенное решение задачи, пренебрегая кривизною трубки сравнительно с ее толщиною. Расположим наши подвижные оси координат x, y, z так, чтобы ось трубки касалась оси Ox в начале координат, и примем вследствие малой кривизны оси трубки, что частицы жидкости вблизи начала имеют относительно этих осей скорости, параллельные Ox и равные

$$v' + q,$$

где v' есть функция времени, определяемая по формуле (82) второй главы, а скорость q происходит от трения и представляет функцию времени и координат y, z. Положив

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta,$$

[1]) Wissenschaftliche Abhandlungen, т. I, на стр. 203 читаем: «Daraus geht hervor, wie schnell die Bewegung in kleiner Entfernung von Oberfläche bis zum Verschwinden schwächt».

находим на основании нашей теоремы, что дифференциальное выражение [1])

$$\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right]dx - (q + v')\frac{\partial q}{\partial y}dy - (q + v')\frac{\partial q}{\partial z}dz$$

должно быть полным дифференциалом. Так как здесь коэффициенты при dy и dz не зависят от x, то коэффициент при dx будет постоянное количество, и притом оно будет равно нулю, потому что давление p (в формуле (36)) не должно прирастать при обходе по оси трубки. Таким образом,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right)$$

или, если положим $q = s - v'$ [2]),

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right). \tag{58}$$

Что касается до остающейся части нашего дифференциального выражения, то она будет полным дифференциалом: $-d\frac{1}{2}(q + v')^2$.

Решим нашу задачу в предположении, что трубка сначала была неподвижна, потом сразу была приведена в движение с постоянною угловою скоростью около постоянной оси, так что v' есть постоянная величина. Уравнение (58), под условием конечности s, везде внутри трубки интегрируется с помощью бесселевых функций первого рода нулевого порядка:

$$s = \sum C_i e^{-\frac{\mu}{\rho}\lambda_i^2 t} J_0(\lambda_i r); \tag{59}$$

здесь бесселева функция $J_0(\lambda_i r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 J(\lambda_i r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0(\lambda_i r)}{dr} + \lambda_i^2 J_0(\lambda_i r) = 0, \tag{60}$$

---

[1]) Здесь автор предполагает, что q зависит только от r и t. (*Прим. ред.*)

[2]) Считая $v' = \text{const}$. (*Прим. ред.*)

которое подстановкою $\lambda_i r = \zeta$ обращается в

$$\frac{d^2 J_0(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} + J_0(\zeta) = 0.$$

Положив в формуле (34) $\nu = \infty$, найдем, что скорость относительного движения s должна обращаться в нуль при $r = a$; этому условию можно удовлетворить, приписывая в формуле (59) величинам λ_i значения

$$\lambda_i = \frac{\zeta_i}{a},$$

где ζ_i суть корни уравнения

$$J_0(\zeta) = 0.$$

Все эти корни действительны и представляют ряд беспредельно возрастающих величин, начиная с $\zeta_1 = 2{,}4048$.

Условие, служащее для определения коэффициентов C_i, состоит в том, что при $t = 0$ во всех точках трубки надо иметь $s = v'$. Мы получаем из формулы (59), что

$$\sum C_i J_0(\lambda_i r) = v'.$$

Пользуясь формулами

$$\int_0^a J_0(\lambda_i r)\, J_0(\lambda_k r)\, r\, dr = 0, \quad \int_0^a [J_0(\lambda_i r)]^2 r\, dr = \frac{a^2 (J_1 \zeta_i)^2}{2},$$

получаемыми из уравнения (60) и соотношения

$$\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} = -J_1(\zeta),$$

находим [1]):

$$C_i = \frac{2v'}{a^2 [J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^a J_0(\lambda_i r)\, r\, dr.$$

Здесь

$$\int_0^a J_0(\lambda_i r)\, r\, dr = \frac{a^2}{\zeta_i} J_1(\zeta_i),$$

[1]) Умножая обе части равенства $\sum C_i J_0(\lambda_i r) = v'$ на $J_0(\lambda_i r)\, r\, dr$ и интегрируя по r от 0 до a. (*Прим. ред.*)

поэтому

$$C_i = \frac{2v'}{\zeta_i J_1(\zeta_i)}.$$

Таким образом, относительная скорость в рассматриваемом движении будет:

$$s = 2v' \sum \frac{J_0(\lambda_i r)}{\zeta_i J_1(\zeta_i)} e^{-\frac{\mu}{\rho}\frac{\zeta_i^2}{a^2}t} \tag{61}$$

Эта формула показывает, что s быстро уменьшается с возрастанием времени, стремясь к нулю при приближении t к ∞. Но, несмотря на то, что скорость обращается в нуль только по прошествии бесконечно большого времени, пространства, пройденные частицами жидкости, и количество жидкости, протекшей через разрез трубки, будут конечны. Определим количество Q жидкости, протекшей через разрез трубки

$$Q = 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^a sr\,dr = \frac{4\pi a^4 \rho v'}{\mu} \sum \frac{1}{\zeta_i^2};$$

откуда, пользуясь равенством [1])

$$\sum \frac{1}{\zeta_i^2} = \frac{1}{32},$$

имеем:

$$Q = \frac{\pi a^4 \rho v'}{8\mu}. \tag{62}$$

Если угловая скорость вращения трубки и направление оси ее вращения изменяются со временем, то v' будет некоторая переменная величина, и тогда для решения вопроса можно будет или прибегнуть к тому способу, которым воспользовался И. С. Громека [2]), или обратиться к приему Римана [3]). Для нашей задачи удобнее прием Римана. Обо-

---

[1]) Это равенство дано у Струтта (Strutt) в «On Bessel's Functions», Philosoph. Magazine, 1872.

[2]) К теории движения жидкостей в узких цилиндрических трубках, Казань, 1882.

[3]) Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Physikalische Fragen, Braunschweig, 1869, § 52.

значаем через $\psi(t)$ вторую часть формулы (61) без множителя v', который в свою очередь обозначаем через $\chi(t)$.

Предполагаем, что трубка и жидкость сначала покоятся, потом трубка сразу получает движение, вызывающее в жидкости относительную скорость $\chi(0)$; если бы движение трубки осталось без перемены, то по прошествии времени t от действия трения скорость жидкости обратилась бы в $\chi(0)\psi(t)$; но по прошествии времени dt к движению тела прибавляется некоторое движение, сообщающее жидкости скорость $\chi'(dt)\,dt$; если бы после этого движение трубки не изменялось, то по прошествии времени $t-dt$ скорость жидкости стала бы $\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\,dt\,\psi(t-dt)$; но по прошествии следующего элемента времени dt скорость тела еще прирастает, вследствие чего скорость жидкости прирастает на $\chi'(2dt)\,dt$, так что, если бы после этого скорость тела не изменялась, то скорость жидкости через время $t-2dt$ обратилась бы в $\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\,dt\,\psi(t-dt)+\chi'(2dt)\,dt\,\psi(t-2dt)$. Продолжая рассуждать таким образом и разбив время t на n бесконечно малых промежутков, найдем, что скорость s в конце времени t будет:

$$s=\chi(0)\psi(t)+\chi'(dt)\,\psi(t-dt)\,dt+\chi'(2dt)\,\psi(t-2dt)\,dt+\ldots$$
$$\ldots+\chi'[(n-1)\,dt]\,\psi[t-(n-1)\,dt]\,dt,$$

или

$$s=\chi(0)\psi(t)+\int_0^t\chi'(x)\,\psi(t-x)\,dx.$$

Интегрируя по частям [1]), найдем формулу для q:

$$q=\int_0^t\chi(x)\,\psi'(t-x)\,dx. \qquad (63)$$

Для того чтобы выяснить влияние кривизны оси трубки на движение заключенной в ней жидкости, рассмотрим полость, имеющую форму тора, вращающуюся

1) Здесь надо принять во внимание, что $\psi(0)=1$, ибо в этом предположении определены C_i. (*Прим. ред.*)

с постоянною скоростью ω_3 около своей оси симметрии. Назовем через b радиус средней окружности трубки и через a, попрежнему, радиус сечения; отнесем движение жидкости к цилиндрическим координатам, начало O которых лежит в центре кольца, а ось Oz идет по оси кольца. Называя через $b+x$, z и φ цилиндрические координаты точки жидкости (φ отсчитывается от плоскости, неподвижной в кольце), выразим элемент дуги формулою

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + (b+x)^2 d\varphi^2.$$

Внутреннее течение, не зависящее от трения, будет:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_3, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Посмотрим, нельзя ли удовлетворить нашей теореме, положив, что к этому движению от трения прибавляется движение:

$$(b+x)\frac{d\varphi}{dt} = q, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Составим по теореме Стокса компоненты вихрей первого и второго порядков по направлениям элементов координатных линий, а также составляющие по этим направлениям поворотных ускорений; при этом в компонентах двух последних векторов будем пренебрегать отношением $\frac{x}{b}$. Получим таблицу [1]):

Элементы	Вихри 1-го порядка	Вихри 2-го порядка	Поворотные ускорения
dx	$-\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial z}$	0	$(\omega_3 b - q)\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b}\right)$
dz	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b+x}\right)$	0	$(\omega_3 b - q)\frac{\partial q}{\partial z}$
$(b+x)\,d\varphi$	0	$-\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right\}$	0

[1]) Смотри примечание редакции на стр. 282.

Мы видим, что выражение

$$(\omega_3 b - q)\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{b}\right) dx + (\omega_3 b - q)\frac{\partial q}{\partial z}\, dz + \\ + \left[\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right)\right](b + x)\, d\varphi$$

должно быть полным дифференциалом. Так как коэффициенты при dx и dz не содержат φ, то для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\right). \qquad (64)$$

Остающаяся часть выражения будет:

$$-d\frac{1}{2}(q - \omega_3 b)^2 + \left(\omega_3 q - \frac{q^2}{b}\right) dx;$$

так как здесь последний член не есть полный дифференциал, то сделанное нами предположение о том, что частицы жидкости не будут иметь скорости, направленной по плоскости сечения трубки, не может иметь места. Упомянутый член вызовет течение, которое при известном q легко может быть определено, даже принимая во внимание силы трения этого течения (они будут лежать в плоскости сечения), но дело в том, что сама скорость q зависит от этого течения. Не имея возможности решить задачу точно, мы должны решать ее приблизительно: по уравнению (64) определить q; по q отыскать течение в плоскостях сечения трубки и, зная это течение, поправить q, обратив внимание на эффект поворотных ускорений. Мы не станем здесь производить подобные вычисления, а обратимся к интегрированию уравнения (64). Так как мы решились отбрасывать в этом уравнении члены порядка $\frac{x}{b}$, то вместо него можем написать, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(1 - \frac{x}{2b}\right)\right] = \\ = \frac{\mu}{\rho}\left\{\left(1 - \frac{x}{2b}\right)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[q\left(1 - \frac{x}{2b}\right)\right] + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{b^2}\left(1 - \frac{x}{2b}\right)\right\},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[q\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right]-\frac{q}{b^2}\left(1-\frac{x}{2b}\right)\right\}.$$

Обинтегрировав это уравнение, придется разделить результат на $1-\frac{x}{2b}$, чтобы получить q, поэтому с принятою мерою точности можно определить q прямо из уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}-\frac{b}{b^2}\right)^{*}). \tag{64'}$$

Положим здесь

$$s=\omega_3 b\left(1+\frac{x}{b}\right)-q=\omega_3 b-q,$$

$$x=r\cos\theta,\quad z=r\sin\theta;$$

найдем:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{s}{b^2}{}^{**}). \tag{65}$$

При интегрировании этого уравнения с помощью формулы (59) мы должны будем в уравнении (60) заменить λ_i^2 на $\lambda_i^2+\frac{1}{b^2}$; вследствие этого в формуле (61) придется взять

---

*) С. А. Чаплыгин обратил внимание на то, что уравнение (64) подстановкой $q_1=qe^{\frac{x}{2b}}$ преобразуется в уравнение (64'), если в этом последнем заменить b через $b\frac{2}{\sqrt{5}}$. (*Прим. ред.*)

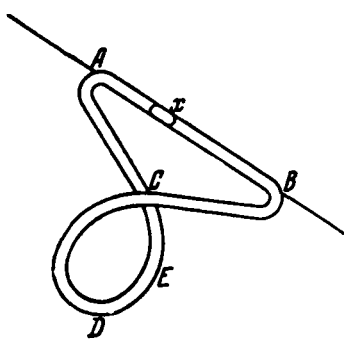
**) В уравнении (65) пропущен член $\frac{\mu\omega_3}{\rho b}$. Интегралом уравнения (65) будет $s=\omega_3 b-q$, где q удовлетворяет уравнению (64'). Если q представить рядом (59), заменив в показателе λ_i^2 через $\lambda_i^2+\frac{1}{b^2}$, определить C_i из условия $\sum C_i J_0(\lambda_i r)=\omega_3 b$, а λ_i взять прежними, то s удовлетворяет таким условиям: $s=0$ при $t=0$; $s=\omega_3 b$ при $r=a$. Таким образом, полученное решение s соответствует тому случаю, когда вращающуюся трубку мгновенно останавливают. (*Прим. ред.*)

вместо $\frac{\zeta_i^2}{a^2}$ величину $\frac{\zeta_i^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, а формула (62) обратится в

$$Q=\frac{4\pi a^4\rho\omega_3 b}{\mu}\sum\frac{1}{\zeta_i^2\left(\zeta_i^2+\frac{a^2}{b^2}\right)}. \qquad (66)$$

Эта формула показывает, что при малом отношении $\frac{a}{b}$ кривизна трубки не оказывает заметного влияния на количество жидкости, протекающей через разрез трубки.

Для проверки описанного движения жидкости на опыте мы приготовили несколько замкнутых стеклянных трубок, одна из которых представлена на фигуре 20. Все эти трубки имели прямую часть AB, которая служила осью вращения, и часть CDE, плоскость которой перпендикулярна к оси AB. Трубки заполнялись водою, причем в них оставлялся маленький воздушный пузырек x. К точкам A и B привязывались нитки, с помощью которых весь прибор приводился во вращение около оси AB, причем пузырек оставался хорошо виден. Как только трубка начинала вращаться, пузырек приходил в движение в сторону, указываемую формулою (82) второй главы. Но если вращение совершалось равномерно, то, пройдя некоторый путь, пузырек останавливался. Когда после этого мы мгновенно останавливали трубку, то пузырек шел назад и возвращался приблизительно на прежнее место. Это согласно с нашею теориею, потому что при сообщении трубке сразу некоторой угловой скорости жидкость внутри нее получает скорость v', от которой по формуле (62) пузырек должен пройти путь $\frac{Q}{\sigma}$, где σ — площадь сечения трубки; когда же



Фиг. 20.

трубка останавливается, то жидкость получает внутреннюю скорость $-v'$ и все движение повторяется в обратную сторону. Ввиду простоты формулы (62) было бы интересно произвести с замкнутыми трубками измерительные опыты, в которых по пути, пройденному пузырьком, определялось бы μ. Такие опыты мы надеемся сделать в скором времени.

§ 38. Теорема о предельном движении, которое получает полость произвольной формы по прошествии весьма большого времени. Оканчивая здесь наше сочинение, сделаем некоторые замечания о движении свободного тела, внутри которого заключена трущаяся жидкость. Как было указано в § 8, поступательное движение тела будет совершаться так, как будто жидкость отвердела, вращательное же движение около центра тяжести должно быть определено по формулам (5) и (35), причем последние могут быть заменены теоремою § 34. Интегрирование уравнений (5), даже в том случае, когда $L = M = N = 0$, а полость имеет форму шара или тонкой замкнутой трубки, представляет большие затруднения. Если бы, например, мы приняли последнюю форму полости, то должны бы были прежде определить P, Q и R по формулам § 27,

$$P = 2\rho\, dq\, \sigma_x, \quad Q = 2\rho\, dq\, \sigma_y, \quad R = 2\rho\, dq\, \sigma_z,$$

в которых количество dq протекшей жидкости от скорости q должно быть определено по формуле (63). Функция $\chi(x)$, в свою очередь, определялась бы по формуле (82) второй главы и зависела бы от ω_1, ω_2, ω_3. Таким образом, наши дифференциальные уравнения будут содержать ω_1, ω_2, ω_3 и их производные по времени как в явной форме, так и под знаками интегралов вида формулы (63), освободиться от которых посредством дифференцирования не явится возможности, так как в формулу (63) t входит еще в $\psi'(t-x)$. Но, несмотря на такую трудность задачи даже при простейших формах полости, мы можем для всякого произвольного вида полости указать то предельное

движение, которое получит тело по прошествии весьма большого времени.

Положив в уравнении (5) $L = M = N = 0$, умножаем их соответственно на ω_1, ω_2, ω_3 и складываем:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + \left(\omega_1\frac{dP}{dt} + \omega_2\frac{dQ}{dt} + \omega_3\frac{dR}{dt}\right) = 0;$$

умножая здесь второй член на δt, можем рассматривать его как элементарную работу сил, имеющих компоненты $m\frac{\partial u'}{\partial t}$, $m\frac{\partial v'}{\partial t}$, $m\frac{\partial w'}{\partial t}$ при бесконечно малом угловом перемещении $\omega\,\delta t$ около мгновенной оси вращения; поэтому

$$\left(\omega_1\frac{dP}{dt} + \omega_2\frac{dQ}{dt} + \omega_3\frac{dR}{dt}\right)\delta t =$$

$$= \sum m\left[\frac{\partial u'}{\partial t}(\omega_2 z - \omega_3 y)\delta t + \frac{\partial v'}{\partial t}(\omega_3 x - \omega_1 z)\delta t + \frac{\partial w'}{\partial t}(\omega_1 y - \omega_2 x)\delta t\right].$$

Отбрасываем множитель δt и подставляем сюда на основании формулы (8) первой главы (при $\chi = 0$)

$$\omega_2 z - \omega_3 y = -u + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\omega_3 x - \omega_1 z = -v + \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\omega_1 y - \omega_2 x = -w + \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

получаем:

$$\omega_1\frac{dP}{dt} + \omega_2\frac{dQ}{dt} + \omega_3\frac{dR}{dt} = -\sum m\left(u\frac{\partial u'}{\partial t} + v\frac{\partial v'}{\partial t} + w\frac{\partial w'}{\partial t}\right) +$$

$$+ \sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial t}\right).$$

Так как бесконечно малые приращения скорости du', dv', dw' удовлетворяют условию несжимаемости и имеют поверхностью тока стенки полости, то по § 4

$$\sum m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}du' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dv' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dw'\right) = 0.$$

Подставляя, находим, что

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) - \sum m\left(u\frac{\partial u'}{\partial t} + v\frac{\partial v'}{\partial t} + w\frac{\partial w'}{\partial t}\right) = 0. \quad (67)$$

Обращаемся затем к формуле (36). Положив в ней

$$s = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2) - \frac{p}{\rho} + U,$$

составим производные:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial t} + 2[\eta(w+w') - \zeta(v+v')] + 4\frac{\mu}{\rho}\xi_1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial t} + 2[\zeta(u+u') - \xi(w+w')] + 4\frac{\mu}{\rho}\eta_1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial t} + 2[\xi(v+v') - \eta(u+u')] + 4\frac{\mu}{\rho}\zeta_1.$$

Умножаем эти уравнения соответственно на $m(u+u')$, $m(v+v')$, $m(w+w')$ и, сложив их, берем от обеих частей полученного равенства сумму, распространенную на всю полость:

$$\sum m\left[\frac{\partial s}{\partial x}(u+u') + \frac{\partial s}{\partial y}(v+v') + \frac{\partial s}{\partial z}(w+w')\right] =$$

$$= \sum m\left(u\frac{\partial u'}{\partial t} + v\frac{\partial v'}{\partial t} + w\frac{\partial w'}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2) +$$

$$+ \frac{4\mu}{\rho}\sum m[(u+u')\xi_1 + (v+v')\eta_1 + (w+w')\zeta_1].$$

Сумма в первой части по § 4 обращается в нуль, потому что течение $u+u'$, $v+v'$, $w+w'$ не дает изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости. Определив первую сумму второй части, подставляем ее в формулу (67):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + \frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2)\right] =$$

$$= -\frac{4\mu}{\rho}\sum m[(u+u')\xi_1 + (v+v')\eta_1 + (w+w')\zeta_1]. \quad (68)$$

Переходим к формулам (3). Возвысим их в квадрат и, сложив, умножаем полученное равенство на $\frac{m}{2}$ и берем от обеих его частей сумму, распространенную на всю полость:

$$\frac{1}{2}\sum m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \sum m\left(u'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Так как здесь последняя сумма во второй части по § 4 равна нулю, ибо течение u', v', w' не даст изменения объема и имеет поверхностью тока стенки полости, то живая сила нашей жидкой массы равна сумме ее живых сил в движении, которое бы имело место при отсутствии трения, и в движении, которое вызывается трением. В первой части формулы (68)

$$\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)$$

представляет живую силу твердого тела и жидкости при отсутствии трения, поэтому вся первая часть формулы (68) представляет нам $\frac{d}{dt}T$, где T — живая сила всей системы. Итак,

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4\mu}{\rho}\sum m[(u+u')\xi_1 + (v+v')\eta_1 + (w+w')\zeta_1].$$

Здесь

$$\xi_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 u', \quad \eta_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 v', \quad \zeta_1 = -\frac{1}{4}\Delta_2 w',$$

а так как по формуле (8) второй главы

$$\Delta_2 u = 0, \quad \Delta_2 v = 0, \quad \Delta_2 w = 0,$$

то можно написать:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(u+u'), \\ \eta_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(v+v'), \\ \zeta_1 &= -\frac{1}{4}\Delta_2(w+w'); \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

получим:

$$\frac{dT}{dt} = \mu\int\int\int[(u+u')\Delta_2(u+u') + (v+v')\Delta_2(v+v') + (w+w')\Delta_2(w+w')]\,dx\,dy\,dz. \tag{70}$$

Преобразуем формулу (70) двумя способами. По теореме

Грина напишем:

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int\int \Big[(u+u')\frac{\partial(u+u')}{\partial n} + (v+v')\frac{\partial(v+v')}{\partial n} + (w+w')\frac{\partial(w+w')}{\partial n}\Big] d\sigma - \mu \int\int\int \{[\Delta_1(u+u')]^2 + [\Delta_1(v+v')]^2 + [\Delta_1(w+w')]^2\}\, dx\, dy\, dz, \quad (71)$$

где Δ_1 — знак первого дифференциального параметра; с другой стороны, заметив, что

$$\Delta_2(u+u') = \frac{1}{\mu}\Big(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\Big),$$

. . . . . .

где

$$N_1 = 2\mu\frac{\partial(u+u')}{\partial x}, \quad T_1 = \mu\Big[\frac{\partial(v+v')}{\partial z} + \frac{\partial(w+w')}{\partial y}\Big],$$

$$N_2 = 2\mu\frac{\partial(v+v')}{\partial y}, \quad T_2 = \mu\Big[\frac{\partial(w+w')}{\partial x} + \frac{\partial(u+u')}{\partial z}\Big],$$

$$N_3 = 2\mu\frac{\partial(w+w')}{\partial z}, \quad T_3 = \mu\Big[\frac{\partial(u+u')}{\partial y} + \frac{\partial(v+v')}{\partial x}\Big],$$

делаем преобразование второй части формулы (70) по теореме Клапейрона [1]):

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int\int [(u+u')^2 + (v+v')^2 + (w+w')^2]\, d\sigma - \frac{1}{\mu}\int\int\int \Big[\frac{N_1^2+N_2^2+N_3^2}{2} + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2\Big] dx\, dy\, dz. \quad (72)$$

Формула (72) показывает, что живая сила нашей системы, вообще говоря, будет постоянно убывать с возрастанием времени. Она перестанет убывать только в том случае, когда вторая часть формулы обратится в нуль, для

[1]) Lamé, Théorie de l'élasticité, § 32.

чего необходимо, чтобы внутри полости

$$N_1 = N_2 = N_3 = T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

а на поверхности ее

$$u + u' = 0, \quad v + v' = 0, \quad w + w' = 0. \tag{73}$$

Приняв это последнее условие и обращаясь к формуле (71), видим, что внутри полости

$$[\Delta_1 (u + u')]^2 = 0, \quad [\Delta_1 (v + v')]^2 = 0, \quad [\Delta_1 (w + w')]^2 = 0,$$

т. е. $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ должны быть постоянны; а так как на поверхности они равны нулю, то везде внутри полости должны быть удовлетворены уравнения (73). Это условие есть необходимое и достаточное для того, чтобы живая сила нашей системы перестала убывать и сделалась постоянной; так как по нему жидкость теряет свое относительное движение, то вся система начинает вращаться, как одна неизменяемая система. Переходя теперь к нашей теореме, вытекающей из формулы (36), и обращая внимание на формулы (73) и (69), видим, что дифференциальное выражение

$$\frac{\partial u'}{\partial t} dx + \frac{\partial v'}{\partial t} dy + \frac{\partial w'}{\partial t} dz$$

должно быть полным дифференциалом; это требует, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) = 0,$$

откуда по формуле (73) и формуле (8) первой главы

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, необходимо, чтобы ω_1, ω_2, ω_3 не изменялись со временем, а это возможно только тогда, когда тело начнет вращаться около оси инерции всех масс нашей системы (твердого тела и жидкости).

Нам предоставляется теперь сделать два предположения: или живая сила нашей системы будет постоянно убывать,

и система после весьма большого промежутка времени остановится, или мгновенная ось займет в пределе направление одной из главных осей инерции рассматриваемых масс, и система будет вращаться равномерно около этой оси, как одно твердое тело. Первое предположение невозможно, потому что главный момент количеств движения всех точек системы остается неизменным по величине и направлению; следовательно, нам остается только второе предположение.

Итак, *если в теле имеется какая-нибудь полость, наполненная трущеюся жидкостью, и такой системе сообщены какие-нибудь начальные скорости, то движение ее будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции рассматриваемых масс займет направление главного момента начальных количеств движения, и вся система будет вращаться около нее, как одно неизменяемое тело, с постоянною угловою скоростью, получаемою от разделения главного момента начальных количеств движения на момент инерции системы относительно этой оси.*

Не этою ли теоремою следует объяснить то обстоятельство, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих осей инерции?

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОСТАТИКИ [1]).

§ 1. Мы приводим здесь решение одной задачи о равновесии плавающего тела, которая находится в некоторой связи с интересными исследованиями Ф. А. Слудского о взаимном расположении поверхностей земного эллипсоида и геоида [2]). Эта задача состоит в следующем: жидкая масса плотности ρ заполняет беспредельное пространство, заключенное между двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на весьма большое расстояние h; в этот слой погружается конечное твердое тело плотности $\frac{\rho}{2}$, имеющее форму прямого цилиндра с произвольным основанием, так что плоскость основания параллельна плоскостям, ограничивающим слой. Определить глубину, на которую цилиндр войдет в жидкость, и изменение свободной поверхности жидкого слоя, принимая во внимание силы взаимного притяжения между частицами жидкости и частицами жидкости и цилиндра.

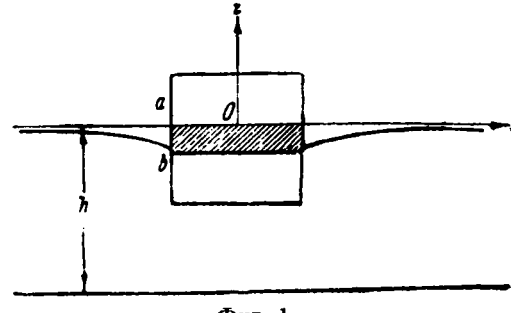
§ 2. На весьма большом расстоянии от цилиндра свободная поверхность жидкости будет горизонтальна; продолжив эту горизонтальную плоскость до пересечения с цилиндром, назовем (фиг. 1) через a часть высоты цилиндра, находящуюся над ней, и через b — часть высоты цилиндра, лежа-

---

[1]) Впервые напечатано в Известиях Московского общества испытателей природы, № 2, 1886.

[2]) La figure de la terre d'après les observations du pendule, Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, 1886.

щую ниже ее. Примем за начало прямоугольной системы координат центр тяжести O площади сечения цилиндра с вышеупомянутой плоскостью; ось Oz направим перпендикулярно к этой плоскости в сторону от слоя, а оси Ox и Oy — по этой плоскости. Будет показано, что разность $b-a$ есть величина порядка h^{-1}, а координата z свободной поверхности есть величина порядка h^{-2}; поэтому при составлении потенциала всех имеющихся масс, в котором пренебрегаются малые величины порядка h^{-1}, можно предположить, что $b=a$ и что свободная поверхность жидкости есть плоскость Oxy. Сделав это предположение, заменим массу плотности $\frac{\rho}{2}$, наполняющую погруженную часть цилиндра, двумя однородными массами плотностей ρ и $-\frac{\rho}{2}$, потом составляем потенциал трех масс: массы слоя плотности ρ, заключенного между плоскостями $z=0$ и $z=-h$, массы плотности $\frac{\rho}{2}$, заполняющей выступающую часть цилиндра, и массы плотности $-\frac{\rho}{2}$, заполняющей погруженную часть цилиндра. Пусть U и U' будут потенциалы первой массы для точки, имеющей положительную или отрицательную координату z, а V и V' — подобные потенциалы второй и третьей массы. Известно, что беспредельный слой толщины h и плотности ρ, заключенный между двумя параллельными плоскостями, притягивает внешнюю точку единицы массы с постоянной силой



Фиг. 1.

$$Z=-2\pi\mu\rho h,$$

где μ — коэффициент ньютонова притяжения. Этой силе

чен параллельными плоскостями, но при составлении V' мы уже не можем считать $b = a$. Назовем разность $b - a$, выражаемую по формуле (7), через 2δ и разобьем наш потенциал V' на потенциал ψ, принадлежащий (см. фиг. 1) верхнему и нижнему цилиндру толщины a и плотностей $\frac{\rho}{2}$ и $-\frac{\rho}{2}$, и на потенциал χ промежуточного цилиндрического слоя толщины 2δ и плотности $-\frac{\rho}{2}$. Легко видеть на фигуре, что при $z = -\delta$ мы получаем $\psi = 0$ и $\frac{d\chi}{dz} = 0$, вследствие чего, принимая z за малую величину порядка высшего, нежели h^{-1}, можем разложить функцию V' в следующую строку:

$$V' = \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) + \dots$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и замечая, что на свободной поверхности $p = 0$, найдем следующее уравнение свободной поверхности:

$$-2\pi\rho\mu hz - 2\pi\rho\mu z^2 + \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) = 0.$$

При составлении этой формулы мы принимали во внимание малые величины порядка h^{-1}; поэтому, разделив ее на h, получим формулу, верную до величин порядка h^{-2}:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta)\right] - \frac{z^2}{h}.$$

Если отбросим здесь члены второй части, содержащие z, которые весьма малы сравнительно с величиной z, находящейся в первой части, то искомое уравнение свободной поверхности представится в следующем простом виде:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}\delta\right]. \qquad (8)$$

Здесь χ, представляя потенциал отрицательных масс, помещенных в цилиндре бесконечно малой толщины 2δ, будет некоторой отрицательной величиной порядка h^{-1}, так что вся вторая часть формулы будет малой величиной порядка h^{-2}. Определим кривую, по которой найденная

поверхность пересекает плоскость Ozx. Вблизи цилиндра эта кривая будет зависеть от формы его основания, но при очень большом расстоянии x от цилиндра вид ее уже не зависит от этой формы и определяется по площади s. Действительно, при очень большом x можно положить, что

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho\delta s}{x},$$

или по формуле (7)

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho s b^2}{2xh};$$

с другой стороны, рассматривая $\frac{d\psi}{dz}$ как силу, направленную по оси Oz, находим:

$$\frac{d\psi}{dz} = 2sa\mu\,\frac{\rho}{2}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{\delta+\frac{a}{2}}{x} = \frac{\mu\rho s a^2}{2x^3}.$$

Отсюда следует, что на весьма большом расстоянии от цилиндра рассматриваемая кривая может быть представлена уравнением

$$z = -\frac{s}{4\pi h^2}\left(\frac{b^2}{x} - \frac{a^2b^2}{2x^3}\right).$$

Так как здесь последний член второй части может быть отброшен перед первым, то можно просто положить

$$z = -\frac{sb^2}{4\pi h^2}\,\frac{1}{x}. \qquad (9)$$

Таким образом, при приближении к нашему плавающему телу по свободной поверхности жидкости из бесконечной дали мы заметим, что эта свободная поверхность начнет опускаться вниз (к дну цилиндра), образуя поверхность вращения равносторонней гиперболы около ее асимптоты; при приближении же к цилиндру на конечное расстояние эта поверхность примет вид, зависящий от формы основания цилиндра.

чен параллельными плоскостями, но при составлении V' мы уже не можем считать $b = a$. Назовем разность $b - a$, выражаемую по формуле (7), через 2δ и разобьем наш потенциал V' на потенциал ψ, принадлежащий (см. фиг. 1) верхнему и нижнему цилиндру толщины a и плотностей $\frac{\rho}{2}$ и $-\frac{\rho}{2}$, и на потенциал χ промежуточного цилиндрического слоя толщины 2δ и плотности $-\frac{\rho}{2}$. Легко видеть на фигуре, что при $z = -\delta$ мы получаем $\psi = 0$ и $\frac{d\chi}{dz} = 0$, вследствие чего, принимая z за малую величину порядка высшего, нежели h^{-1}, можем разложить функцию V' в следующую строку:

$$V' = \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) + \dots$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и замечая, что на свободной поверхности $p = 0$, найдем следующее уравнение свободной поверхности:

$$-2\pi\rho\mu hz - 2\pi\rho\mu z^2 + \chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta) = 0.$$

При составлении этой формулы мы принимали во внимание малые величины порядка h^{-1}; поэтому, разделив ее на h, получим формулу, верную до величин порядка h^{-2}:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}(z+\delta)\right] - \frac{z^2}{h}.$$

Если отбросим здесь члены второй части, содержащие z, которые весьма малы сравнительно с величиной z, находящейся в первой части, то искомое уравнение свободной поверхности представится в следующем простом виде:

$$z = \frac{1}{2\pi\rho\mu h}\left[\chi_{z=-\delta} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=-\delta}\delta\right]. \qquad (8)$$

Здесь χ, представляя потенциал отрицательных масс, помещенных в цилиндре бесконечно малой толщины 2δ, будет некоторой отрицательной величиной порядка h^{-1}, так что вся вторая часть формулы будет малой величиной порядка h^{-2}. Определим кривую, по которой найденная

поверхность пересекает плоскость Ozx. Вблизи цилиндра эта кривая будет зависеть от формы его основания, но при очень большом расстоянии x от цилиндра вид ее уже не зависит от этой формы и определяется по площади s. Действительно, при очень большом x можно положить, что

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho\delta s}{x},$$

или по формуле (7)

$$\chi_{z=-\delta} = -\frac{\mu\rho s b^2}{2xh};$$

с другой стороны, рассматривая $\frac{d\psi}{dz}$ как силу, направленную по оси Oz, находим:

$$\frac{d\psi}{dz} = 2sa\mu\,\frac{\rho}{2}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{\delta+\frac{a}{2}}{x} = \frac{\mu\rho s a^2}{2x^3}.$$

Отсюда следует, что на весьма большом расстоянии от цилиндра рассматриваемая кривая может быть представлена уравнением

$$z = -\frac{s}{4\pi h^2}\left(\frac{b^2}{x} - \frac{a^2b^2}{2x^3}\right).$$

Так как здесь последний член второй части может быть отброшен перед первым, то можно просто положить

$$z = -\frac{sb^2}{4\pi h^2}\,\frac{1}{x}. \qquad (9)$$

Таким образом, при приближении к нашему плавающему телу по свободной поверхности жидкости из бесконечной дали мы заметим, что эта свободная поверхность начнет опускаться вниз (к дну цилиндра), образуя поверхность вращения равносторонней гиперболы около ее асимптоты; при приближении же к цилиндру на конечное расстояние эта поверхность примет вид, зависящий от формы основания цилиндра.

ЛЕКЦИИ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ [1]).

ВВЕДЕНИЕ.

Содержание моей вступительной лекции заключается в разъяснении роли, которую в настоящее время занимает гидродинамика в теоретической механике, и в изложении краткой программы предлагаемого мною курса.

Точные исследования древних ученых по теоретической механике относились только к статике. Динамика получила свое прочное основание только в конце XVII столетия в бессмертных сочинениях Галилея, Гюйгенса и Ньютона. Так как это время совпало с открытием анализа бесконечно малых, то динамика в продолжение XVIII столетия сделала громадные успехи. В работах Эйлера, трех Бернулли, Лопиталя и других ученых она обогатилась исследованием различных частных вопросов о движении материальных точек и твердых тел, а в знаменитых сочинениях Даламбера и Лагранжа получила точное формулирование своих принципов и широкое аналитическое развитие своих методов исследования. Свое главное приложение динамика XVIII века нашла в астрономических задачах, — и как блестяще было это приложение! Ньютон открыл закон всемирного тяготения и исследовал движение центров планет; Эйлер подверг теоретическому исследованию движение луны и показал, каково

---

[1]) Впервые напечатаны в Ученых записках Московского университета, вып. 7, 1887.

должно бы быть влияние на движение планет сопротивляющейся среды; Даламбер исследовал вращение планет около центра их тяжести и объяснил явление прецессии; Лагранж в своем методе изменения произвольных постоянных положил основание исследованию пертурбационной функции; наконец, в появившейся в 1799 г. небесной механике Лапласа приложение теоретической механики к астрономии достигло своего апогея.

Какая разница между этими великими завоеваниями человеческой мысли и теми скромными результатами, которые были достигнуты в изучении движения непрерывных систем — в изучении движения жидкого тела! От гидродинамики Даниила Бернулли у нас осталась только теорема его имени об установившемся движении и исследование удара струи о плоскость; гидродинамика Даламбера с его гипотезой шаровидных частичек вся отошла в Лету; Эйлер хотя и вывел уравнения гидродинамики как в их обыкновенной форме, так и в той, которая обыкновенно приписывается Лагранжу, но сам очень мало воспользовался ими и для решения задачи о сопротивлении среды прибегает к особой теории струй. Уравнениями Эйлера воспользовался Лагранж, доказав свою теорему о сохранении потенциала скоростей и исследовав теорию распространения волн на мелкой воде, но он не указал общего приема пользования уравнениями гидродинамики и не обнаружил даже, что эти уравнения вместе с поверхностными условиями вполне достаточны для решения задач, — положение, в котором впоследствии сомневались и некоторые авторы XVIII века. Чтобы не пропустить все относящееся к гидродинамике XVIII века, мы должны еще упомянуть здесь задачу о равновесии вращающегося жидкого эллипсоида вращения, решенную Маклореном и Лапласом, которая, впрочем, относится скорее к гидростатике, нежели к гидродинамике.

При своем дальнейшем развитии в XIX веке динамика пошла главным образом по направлению, указанному Лагранжем. Появляется школа аналитиков, которая ставит себе

задачей исследование общих уравнений движения с целью отыскания методов их интегрирования и установления новых принципов динамики. Сюда относятся глубокие исследования Пуассона, Гамильтона, Якоби, Лиувилля, Бура, Остроградского, Бертрана, которые подарили динамике много прекрасных теорем, но, надо сознаться, немного прибавили к старым интегралам XVIII столетия. Насколько мне известно, скобки Пуассона, теорема Лиувилля и способ последнего множителя Якоби исчерпывают все относящееся к этой области. Но если эти исследования немного дали интегралов, то они дали нам возможность подбирать типы вполне интегрируемых задач, подобно тому как это сделал Лиувилль в своих исследованиях по движению точки по поверхности, что, разумеется, тоже имеет свою цену. Рядом со школой аналитиков, как бы в противовес ей, возникает другая школа — механиков-геометров, которые стремятся «изучать вещи сами в себе». Я говорю о необычайно ясных и простых работах Пуансо, Кориолиса, Мебиуса и новейших английских ученых Сильвестра, Рута, Максвелла и Томсона; при этом я не могу не выразить своего удивления перед натуральной философией Томсона и Тэта, в которой самые сложные динамические задачи представляются с такой уже конкретностью, как задача о движении твердого тела в «новой теории вращения» [1]).

Переходя теперь к динамике систем частного вида, мы замечаем, что XIX век подвинул еще далее задачи о движении твердого тела благодаря преимущественно вышеупомянутому геометрическому направлению, но в основном астрономическом вопросе, т. е. в задаче о движении материальных точек под действием взаимного тяготения, ученые встретились с непреодолимыми трудностями. Несмотря на всевозможные новые методы интеграции, предлагаемые школой аналитиков, несмотря на обширные труды перво-

[1]) Н. Е. Жуковский говорит о классическом сочинении L. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris, 1852. (*Прим. ред.*)

классных математиков — Якоби, Серре и других, задача о трех телах ушла недалеко от рассмотрения простых частных случаев. Такая же участь постигла и теорию возмущенного движения. Если разложение в ряд пертурбационной функции и удовлетворяет практике астронома, то для математика исследование нескольких лишних членов ряда, сходимость которого не доказана для вечного времени, немного прибавляет к убеждению в прочности солнечной системы. Я думаю, что с точки зрения теоретического интереса следует искать иных способов доказательства этой теоремы, которые, может быть, заключаются в тех интегральных неравенствах, какие были разобраны Якоби и Слудским, или в том приеме, который обещает нам Пикар в своей статье «О кривых, определенных дифференциальным уравнением».

Но если XIX век дал нам немного для решения основной астрономической задачи, то его можно приветствовать как век блистательного развития динамики непрерывного тела. Оставляя в стороне результаты исследования колебательного движения упругого тела, я перехожу теперь к изложению успехов в области гидродинамики.

Здесь как знамение времени нужно отметить появившееся в начале нашего века сочинение Фурье, которое вместе с дальнейшими работами Пуассона, Гаусса, Грина, Ламе и других создало анализ математической физики, тот самый анализ, который явился также и ключом разрешения гидродинамических вопросов. Этот анализ сейчас же получил свое применение в обширных работах Коши и Пуассона о распространении волн на глубокой воде, в работах, которые вместе с позабытыми сочинениями Остроградского, Ренкина, Буссинеска, Релея и других вполне закончили этот интересный отдел гидродинамики.

Упомянув здесь сочинение Коши «О распространении волн», мы должны указать, что в этом сочинении знаменитого математика, независимо от его специальной темы, заключается еще вывод трех новых интегралов уравнений гидродинамики, которые известны теперь под видом прин-

ципа сохранения напряжения вихря, а также доказательство определенности гидродинамической задачи, которое я в своей «Кинематике жидкого тела» ошибочно приписывал Липшицу и Преображенскому. Коши сделал также весьма обстоятельные кинематические исследования изменения частицы. Но я не знаю, почему все эти результаты были забыты, и прошло более 40 лет прежде, нежели интегралы Коши появились снова в знаменитом сочинении Гельмгольца «Об интегралах уравнений динамики», облеченные в форму изящной теории вихрей. Такова сила удачной интерпретации: после Гельмгольца принцип сохранения вихря сделался общим достоянием и вошел во все последующие сочинения по гидродинамике. Сочинение Гельмгольца породило целый ряд примыкающих к нему работ как по гидрокинематике, так и по гидрокинетике. Останавливаясь только на последних, упомяну сочинения по движению вихрей В. Томсона, Гринхилля, Грёбли и недавнюю работу Д. Томсона о движении вихревых колец.

Еще ранее появления сочинения Томсона о движении вихрей наметилась другая весьма интересная задача о движении твердого тела в беспредельной жидкости. Если не ошибаемся, Пуассон был первым, разобравшим теоретически вопрос о колебании сферы в беспредельной жидкости. Окончательно эта задача была для колебательного движения решена Стоксом, а для поступательного — Лежен Дирихле. Клебш и Грин перешли к более трудному случаю движения эллипсоида. Общий вопрос о движении тел в жидкости разъяснил Томсон в его «Движении вихрей», и я полагаю, что это исследование — одно из самых обстоятельных, хотя его как будто заслонили дальнейшие работы Кирхгофа, Больцмана, Бьеркнеса и Неймана.

Чтобы закончить здесь очерк развития гидродинамики в нашем столетии, я должен еще указать, что задача о вращении жидкого эллипсоида, начатая Маклореном и Лапласом, получила свое дальнейшее развитие в исследованиях Якоби, Мейера, Лежен Дирихле и Римана, причем она в сочине-

ниях последних ученых вполне отошла в область гидродинамики, так как ученые эти рассматривали движения деформирующегося эллипсоида.

Вот все, относящееся к гидродинамике идеальной жидкости. Но наряду с этим разрабатывалась и теория движения жидкости с трением. В работах Стокса, Стефана, Гельмгольца, Любека, Буссинеска и других ученых мы находим обстоятельное исследование разных видов движения жидкостей с трением. Правильное употребление приемов вместе с внимательным изучением могущих образоваться разрывов сплошности приводит нас к результатам, хорошо оправдываемым на опыте, так что мы можем совершенно смело здесь повторить слова Гельмгольца о том, что «можно считать уравнения гидродинамики за истинные законы, управляющие движением физической жидкости».

Из всего сказанного мы можем теперь прийти к заключению, что главная часть успешных динамических исследований нашего века выпала на долю гидродинамики. Если в старое время гидродинамика изгонялась из курсов теоретической механики как недостойная этого названия, то теперь, разумеется, она должна занять видное место, являясь одной из блестящих глав механики.

Я перейду теперь к краткому изложению программы предлагаемого мною курса. Но прежде я обращаюсь к вам, мои будущие слушатели, чтобы отстранить от вас сомнение в излишней обширности того материала, о котором я упомяну. Вот уже 15 лет, как я с интересом занимаюсь гидродинамикой, я много передумал и переработал разных вопросов за это время. Я старался отбросить все, что не заключало в себе успешных результатов, и изложить возможно простым образом те выводы, которые к ним приводили. Таким образом, получился довольно сжатый курс, который я и хочу предложить вашему вниманию. Я расположил его на 10 двухчасовых лекций.

1. Деформация частицы жидкости. Разложение движения частицы на поступательное, вращательное и

движение, имеющее потенциал скоростей (такое разложение возможно только единственным способом). Угловая скорость вращения частицы. Поверхность удлинения Коши как поверхность равного потенциала. Переход на главные оси деформации. Коэффициент кубического расширения. Девиация радиусов-векторов и скошение прямых углов.

2. О течении жидкости. Линии токов и струйки жидкости. Критические точки. Вихревая нить и напряжение вихря. Теоремы Грина и Стокса. Невихревое движение в односвязном и многосвязном пространстве. Определенность гидродинамических задач. Бесконечная жидкая масса, покоящаяся в бесконечности. Вращение частицы по жидкой струйке, шаг закручивания линий тока, случай существования ортогональных поверхностей.

3. Уравнения гидродинамики и их интегралы. Уравнения гидродинамики в форме Эйлера. Теоремы Бернулли и Лагранжа. Сообщение движения жидкости импульсом. Теорема Томсона. Гельмгольцев принцип сохранения напряжения вихревой нити. Основные принципы динамики, отнесенные к жидкой массе. Определенность гидрокинетической задачи.

4. Установившееся движение. Необходимый и достаточный признак установившегося движения. Случаи движения без вращения: истечение из сосудов (Сен-Венан и Буссинеск), движение жидкого потока, омывающего неподвижные твердые тела. Исследования Ренкина. Построение свободной поверхности жидкости по методу Кирхгофа. Разрыв сплошности. Случай установившегося движения с одинаковым вращением для всех частиц.

5. О движении твердого тела в беспредельной жидкости. Сумма количеств движения в бесконечно длинном цилиндре и сумма моментов количеств движения в сфере. Импульсивные сила и пара, их неизменяемость Уравнения движения тела в беспредельной жидкости. Выражения импульсивных силы и пары как производных от живой силы, кажущееся изменение массы и моментов инер-

ции. Задача Клебша. Примеры движения при постоянном относительном течении. Решение задачи о движении тела вращения в плоскости, проходящей через ось вращения (Кирхгоф). Случай многозначного потенциала.

6. Кажущиеся взаимодействия тел, движущихся в беспредельной жидкости. Аналогия между скоростями точек жидкой массы, движущейся с потенциалом скоростей, и силами действия на единицу магнитной массы, магнитными массами и токами, расположенными на граничной поверхности. Теорема о гидродинамическом давлении на элемент поверхности движущегося тела (в обобщенном виде). Задача о кажущемся взаимодействии двух колец, погруженных в жидкую массу, движущуюся с многозначным потенциалом. Задача Бьеркнеса о взаимодействии двух пульсирующих шаров. Кажущиеся взаимодействия двух быстро движущихся шаров. Влияние стенок и свободной поверхности на движущиеся тела, объяснение рикошета. Неустойчивость поверхности раздела.

7. Движение вихрей. Теорема Бельтрами о скоростях внутри жидкой массы. Вихревая жидкая масса, помещенная внутри жидкости, движущейся с потенциалом скоростей. Движение бесконечно тонких прямолинейных вихрей. Принцип сохранения центра тяжести напряжений вихрей. Движение вихревых колец.

8. Движение жидкого эллипсоида. Сведение задачи о движении жидкого эллипсоида, вращающегося около одной из своих осей и деформирующегося, к задаче о движении материальной точки по поверхности $xyz = \text{const}$. Случай, рассмотренный Маклореном и Якоби. Случай вращающегося и деформирующегося эллипсоида вращения, найденный Лежен Дирихле. Теорема Дедекинда о взаимности обыкновенного и эллиптического вращения, приложение ее к получению из движения трехосного эллипсоида Якоби движения, найденного для трехосного эллипсоида Лежен Дирихле.

9. Движение волн. Волны с потенциалом скоростей на безграничной поверхности, стоячие волны. Теорема

Лагранжа о распространении волн на мелкой воде. Теория Коши и Пуассона. Волны с вращением частиц жидкости. Приложение теории Буссинеска к волнам Герстнера и Римана. О распространении волн в газовой массе.

10. Трение жидкости. Определение нормальных и тангенциальных слагающих трения жидкости. Уравнения гидродинамики трения, вторые вихри. Поверхностные условия. Движение жидкости в тонких трубках. Колебательные и вращательные движения шара. Теория Ренкина о сопротивлении судов. Роль трения жидкости в движении тел, движущихся в ней под действием внутренних сил.

Оканчивая теперь мое вступление, позволю себе, мои будущие слушатели, выразить надежду, что вы получите интерес и любовь к предмету, которым я сам занимался всегда с таким увлечением. Я думаю, что в настоящее время великих открытий в области аэронавигации и подводного плавания такая надежда не должна быть тщетной. Может быть, некоторым из вас и самим придется заняться гидродинамическими опытами, освещенными истинным пониманием теории, и внести свою лепту в сокровищницу науки.

ЛЕКЦИЯ 1.

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ ЖИДКОСТИ.

§ 1. Разложение движения частицы жидкости. Возьмем начало прямоугольных осей координат Ox, y, z в какой-нибудь точке O движущейся жидкой массы и назовем через u_0, v_0, w_0 компоненты относительно этих осей скорости точки O, а через u, v, w — подобные компоненты других точек жидкости. Допустим, что u, v, w суть непрерывные функции, которые для точек, весьма близких к O, могут быть разложены в строку Тейлора по x, y, z. Это условие непрерыв-

ности компонентов, скорости позволяет, несмотря на все разнообразие движений жидкости, указать некоторые общие законы движения бесконечно малой части ее, прилегающей к точке O, подобно тому как условие непрерывности поверхности позволяет установить законы для радиусов кривизны нормальных сечений, проведенных через точку поверхности. Такую бесконечно малую часть жидкости мы назовем *частицей жидкости*, а точку жидкости O, лежащую внутри частицы, — ее центром. Разлагая u, v, w в строку Тейлора по бесконечно малым координатам x, y, z и отбрасывая бесконечно малые члены выше первого порядка, представим скорости точек частицы жидкости следующими линейными функциями координат:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z,$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial z} z,$$

$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{\partial w}{\partial z} z.$$

Преобразуем первую из этих формул:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) z + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) y,$$

и, сделав такие же преобразования с двумя другими, положим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\sigma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\sigma_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sigma_3, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_3; \tag{3}$$

тогда найдем:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_2 z - \omega_3 y + \frac{\partial F}{\partial x}, \\ v &= v_0 + \omega_3 x - \omega_1 z + \frac{\partial F}{\partial y}, \\ w &= w_0 + \omega_1 y - \omega_2 x + \frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\varepsilon_1 yz + 2\varepsilon_2 zx + 2\varepsilon_3 xy). \qquad (5)$$

Формулы (4) показывают нам, что *движение частицы жидкости может быть разложено на три движения: поступательное со скоростью ее центра, вращательное относительно оси, проходящей через этот центр, и движение с потенциалом скоростей, при котором центр неподвижен* [1]).

Величины ω_1, ω_2, ω_3, определяемые формулами (3), являются компонентами угловой скорости вращения частицы, отложенной на оси ее вращения так, что наблюдатель, глядящий из конца полученного вектора в центр частицы, видит вращение по солнцу. Назовем этот вектор через ω и покажем, что формулы (3) дают для него одну и ту же величину и одно и то же направление, как бы ни были направлены оси координат.

Взяв другие оси Ox', Oy', Oz', составляем соответствующие им компоненты скорости u', v', w', проектируя на Ox', Oy', Oz' порознь скорости трех вышеупомянутых движений. Пусть ω_1', ω_2', ω_3' будут проекции ω на новые оси, u_0', v_0', w_0' — проекции на эти оси скорости поступательного движения, а F' — функция F, выраженная в новых координатах; тогда

$$\begin{aligned} u' &= u_0' + \omega_2' z' - \omega_3' y' + \frac{\partial F'}{\partial x'}, \\ v' &= v_0' + \omega_3' x' - \omega_1' z' + \frac{\partial F'}{\partial y'}, \\ w' &= w_0' + \omega_1' y' - \omega_2' x' + \frac{\partial F'}{\partial z'}. \end{aligned}$$

[1]) Эта теорема дана Гельмгольцем (Helmholtz), Journal von Borchardt, т. 55, 1858, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, § 1.

Взяв производную по y' от обеих частей последнего уравнения и производную по z' от обеих частей второго, вычитаем полученные уравнения:

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} = 2\omega_1'.$$

Это равенство вместе с двумя аналогичными доказывает желаемое.

Отбросив поступательное и вращательное движения частицы, мы будем заниматься исследованием третьего ее движения, которое назовем *деформацией*, так как только от него происходит изменение вида частицы. Деформация может быть рассматриваема как движение частицы относительно подвижных осей координат, которые имеют то же поступательное и вращательное движения, как и частица жидкости. Для простоты письма мы будем эти подвижные оси обозначать теми же буквами x, y, z, так что скорости деформации выразятся формулами:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{6}$$

Скорости деформации ортогональны к семейству поверхностей $F = \text{const}$ и обратно пропорциональны расстояниям dn между двумя бесконечно близкими поверхностями этого семейства, отличающимися на постоянное приращение dF.

§ 2. Коэффициенты линейного расширения радиусов-векторов частицы жидкости. Оси деформации. Проведем через центр частицы жидкости радиус-вектор r и, написав, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

возьмем от обеих частей этого равенства производную по времени:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}.$$

Подставляем сюда величины скоростей из формул (6) и делим на r^2

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{2F}{r^2}.$$

Найденная величина представляет *коэффициент линейного расширения* рассматриваемого радиуса, отнесенный к единице длины и времени. Мы будем обозначать его буквой ε и считать отрицательным, когда радиус укорачивается. Мы нашли, что

$$\varepsilon = \frac{2F}{r^2}; \tag{7}$$

подставляя сюда функцию F из формулы (5) и обозначая через α, β и γ углы r с осями координат, получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + 2\sigma_1 \cos\beta\cos\gamma + \\ + 2\sigma_2 \cos\gamma\cos\alpha + 2\sigma_3 \cos\alpha\cos\beta. \tag{8}$$

Если в формуле (8) положим $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то найдем, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Отсюда и из подобных соображений для осей Oy и Oz следует, что ε_1, ε_2, ε_3 суть коэффициенты линейного расширения радиусов, направленных по осям координат. Принимая в формуле (7), что r есть радиус-вектор точки поверхности $F = \text{const.}$, найдем, что числитель второй части этой формулы будет постоянная величина, так что *коэффициенты линейного расширения для различных направлений радиуса-вектора частицы обратно пропорциональны квадратам радиусов-векторов поверхности* $F = \text{const.}$ *). Будем называть эту поверхность *поверхностью расширения*; мы видим, что она является одной из поверхностей равного потенциала скоростей. Формула (5) показывает, что поверхность расширения есть эллипсоид или гиперболоид (в частном случае она может быть шар, цилиндр или две параллельные плоскости). Если она будет эллипсоидом, то вторая часть формулы (5) будет иметь постоянный знак при всяких действительных значениях x, y, z; этот знак и надо приписать постоянному числителю в формуле (7); если же поверхность расширения есть гиперболоид, то вторая часть формулы (5) для точек, лежащих внутри асимптоти-

*) Cauchy, Exercices de Mathématiques, второй год, стр. 69, 1827.

ческого конуса, получает один знак, а для точек, лежащих вне его, — другой; мы должны в этом случае приписывать постоянному $2F$ в формуле (7) поочередно тот и другой знаки и считать поверхностью расширения оба сопряженных гиперболоида, из которых один (для которого берем $+2F$) будет соответствовать расширению, а другой — сжатию; радиусы же, направленные по асимптотическому конусу, не будут изменять длины. Из формулы (7) следует, что радиусы, соответствующие наибольшему и наименьшему коэффициентам линейного расширения, будут направлены по главным осям поверхностей расширения, которые мы будем называть *осями деформации*. Так как скорости точек частицы при ее деформации направлены по нормалям семейства поверхностей $F = \text{const}$., то оси деформации дают нам направления трех единственных радиусов-векторов частицы, которые при рассматриваемом движении остаются неподвижны. На основании этого свойства мы можем определить направление осей деформации из уравнений:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{z} = \frac{2F}{r^2} = \varepsilon,$$

в которых ε по уравнению (7) есть коэффициент линейного расширения по направлению искомого неподвижного радиуса-вектора.

Из написанных уравнений на основании формулы (5) получаем:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon)x + \sigma_3 y + \sigma_2 z = 0;$$

$$\sigma_3 x + (\varepsilon_2 - \varepsilon)y + \sigma_1 z = 0;$$

$$\sigma_2 x + \sigma_1 y + (\varepsilon_3 - \varepsilon)z = 0.$$

Для того чтобы эти уравнения могли быть удовлетворены величинами x, y, z, не равными нулю, коэффициент линейного расширения ε должен удовлетворять условию:

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon^2 + (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2)\varepsilon -$$

$$- (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \varepsilon_1\sigma_1^2 - \varepsilon_2\sigma_2^2 - \varepsilon_3\sigma_3^2) = 0, \qquad (9)$$

Определив отсюда ε, мы найдем из двух вышенаписанных уравнений отношение $x:y:z$, соответствующее искомому направлению. Уравнение (9), как известно, имеет три действительных корня, которые мы обозначим через $e_1 > e_2 > e_3$. Так как коэффициент при ε^2 равен сумме корней с обратным знаком, то

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3,$$

или по уравнениям (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e_1 + e_2 + e_3. \tag{10}$$

На основании сказанного выше e_1 будет представлять наибольший, а e_3 — наименьший коэффициент линейного расширения радиусов-векторов частицы. Предположив, что оси Ox, Oy, Oz направлены по осям деформации, представим формулы (5) и (6) в виде:

$$F = \frac{1}{2}(e_1x^2 + e_2y^2 + e_3z^2), \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = e_1x, \quad \frac{dy}{dt} = e_2y, \quad \frac{dz}{dt} = e_3z. \tag{12}$$

Формулы (12) показывают, что частица жидкости, имеющая форму бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, стороны которого параллельны осям деформации, остается прямоугольным параллелепипедом и по прошествии времени dt.

§ 3. Коэффициент кубического расширения. Предположим, что частица жидкости имеет форму бесконечно малого шарика, уравнение которого есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

и определим ее вид по прошествии времени dt. На основании уравнений (12) точка жидкой частицы, имеющая координаты x, y, z, будет по прошествии времени dt иметь координаты:

$$x_1 = x(1 + e_1\,dt), \quad y_1 = y(1 + e_2\,dt), \quad z_1 = z(1 + e_3\,dt).$$

Определив отсюда x, y, z и подставив их в уравнение сферы, получим уравнение эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{a^2(1+e_1\,dt)^2}+\frac{y_1^2}{a^2(1+e_2\,dt)^2}+\frac{z_1^2}{a^2(1+e_3\,dt)^2}=1.$$

Объем сферы будет:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

а объем эллипсоида:

$$V'=\frac{4}{3}\pi a^3(1+e_1\,dt)(1+e_2\,dt)(1+e_3\,dt),$$

так что приращение объема будет:

$$V'-V=\frac{4}{3}\pi a^3(e_1+e_2+e_3)\,dt.$$

Разделяя это приращение на объем V и время dt, найдем коэффициент кубического расширения θ жидкой частицы, отнесенный к единице объема и времени:

$$\theta=e_1+e_2+e_3$$

или по (10)

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{13}$$

где x, y, z — какие-нибудь прямоугольные оси координат. Если θ отрицательно, то частица жидкости сжимается.

§ 4. Девиация радиусов-векторов в плоскости. Скошение прямых углов. Проведем через центр частицы плоскость s, которую примем за плоскость координат Oxy при составлении формулы (5). На этой плоскости возьмем точку, бесконечно близкую от центра, и определим ее место радиусом r и углом φ, который этот радиус образует с осью Ox. Определим проекцию скорости этой точки на направление элемента дуги $r\,d\varphi$, проведенной из центра O радиусом r. Эта проекция будет:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

где в выражении F, данном формулой (5), надо подставить: $z = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Мы найдем, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = r[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\varphi\sin\varphi + \sigma_3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)].$$

Разделяя эту скорость на r и делая некоторые преобразования, найдем угловую скорость σ рассматриваемого радиуса в плоскости s:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + \sigma_3\cos 2\varphi. \qquad (14)$$

Мы назовем эту угловую скорость *девиацией* радиуса-вектора в плоскости s. Так как вторая часть формулы (14) имеет для φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ равные величины, но различные знаки, то *девиации в плоскости двух взаимно перпендикулярных радиусов равны и противоположны*. Вообразив в плоскости s два радиуса r и r', образующие с осью Ox углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, увидим на основании этой теоремы, что прямой угол между r и r' уменьшится во время dt на

$$2\sigma\, dt = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + 2\sigma_3\cos 2\varphi]\, dt.$$

Разделив это уменьшение прямого угла на dt, получим величину, которую назовем *коэффициентом скошения*, отнесенным к единице времени:

$$2\sigma = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi + 2\sigma_3\cos 2\varphi.$$

Если примем здесь $\varphi = 0$, то найдем, что

$$2\sigma = 2\sigma_3.$$

На основании этого равенства и подобных равенств для плоскостей Ozx и Oyz приходим к заключению, что $2\sigma_1$, $2\sigma_2$, $2\sigma_3$ суть коэффициенты скошения координатных углов. Если коэффициент скошения прямого угла отрицателен, то этот угол увеличивается.

Предположим для большей простоты, что оси Ox и Oy направляются по главным осям кривой второго порядка, по которой плоскость s пересекает поверхность расширения,

и назовем эти оси *осями деформации плоскости s*. Формула (14) примет в этом предположении вид:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin 2\varphi. \qquad (15)$$

Это равенство показывает, что *радиусы-векторы плоскости, направленные по ее осям деформации, не имеют девиации в плоскости; все же остальные радиусы движутся по направлению от оси деформации с меньшим коэффициентом расширения к оси деформации с большим коэффициентом расширения.* Кроме того, так как вторая часть формулы (15) имеет одну и ту же величину для φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$, то *два радиуса-вектора, лежащие на плоскости внутри прямого угла, образованного осями ее деформации и наклоненные к его сторонам под равными углами, имеют одинаковые девиации, направленные в одну сторону.* Наибольшая по абсолютной величине девиация получается из формулы (15) при $\varphi = 45°$:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

так что прямой угол, стороны которого делят пополам прямые вертикальные углы, не имеющие скошения, имеет наибольшее скошение.

§ 5. Конусы девиаций. Скошение перпендикуляра к плоскости. Предположим, что в формулах (12) e_1, e_2, e_3 не изменяются со временем, и определим траектории точек частицы жидкости. Дифференциальные уравнения этих траекторий будут:

$$\frac{dx}{e_1 x} = \frac{dy}{e_2 y} = \frac{dz}{e_3 z};$$

интегрируя их, находим:

$$x^{\frac{1}{e_1}} = a y^{\frac{1}{e_2}} = b z^{\frac{1}{e_3}},$$

где a и b — произвольные постоянные.

Если приравняем каждую из частей вышенаписанного равенства некоторому переменному ξ и определим x, y, z,

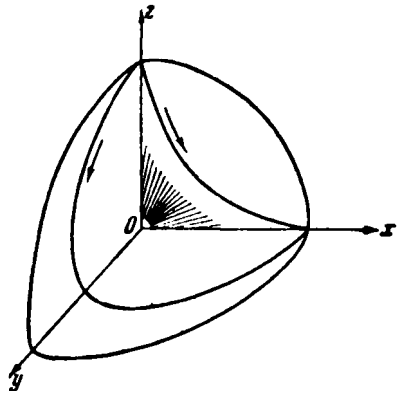
то найдем:

$$x = \xi^{e_1}, \quad y = a^{-e_3}\xi^{e_3}, \quad z = b^{-e_3}\xi^{e_3}.$$

Возведем эти уравнения в степени $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$, $e_1 - e_2$ и перемножим:

$$x^{e_2-e_3}y^{e_3-e_1}z^{e_1-e_2} = \text{const.} \tag{16}$$

Так как первая часть этого уравнения нулевого измерения относительно координат, то оно представляет нам некоторую коническую поверхность, по которой перемещаются радиусы-векторы частицы при ее деформации. Если e_1, e_2, e_3 изменяются со временем, то можно сказать, что радиусы-векторы перемещаются по поверхности (16) только в продолжение времени dt. Будем называть найденное семейство поверхностей *конусами девиаций*[1]). Принимая попрежнему $e_1 > e_2 > e_3$, увидим, что все конусы девиаций проходят через оси Ox и Oz (фиг. 1), потому что, представив уравнение (16) в виде:



Фиг. 1.

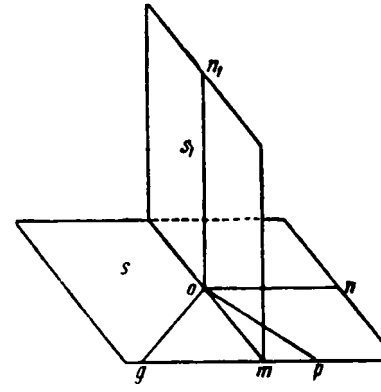
$$x^{e_2-e_3}z^{e_1-e_3} = \text{const.}\, y^{e_1-e_3},$$

мы удовлетворим ему положением $z = 0$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 0$. Чтобы определить скорость, с которой какой-нибудь радиус частицы r перемещается по конусу девиаций, проведем через этот радиус плоскость s, прикасающуюся к упомянутому конусу. Если назовем через φ угол между r и одной из осей деформации плоскости s, то искомая нами скорость, отнесенная к единице длины радиуса, выразится формулой (15). Определенную таким образом величину σ мы

[1]) Свойства конусов девиаций изложены более подробно в нашем сочинении «Кинематика жидкого тела», § 8 (стр. 31 настоящего тома).

будем называть *девиацией радиуса-вектора в пространстве*. Из формулы (15) следует, что радиусы-векторы движутся по конусу девиаций, направляясь от радиуса-вектора с наименьшим коэффициентом расширения к радиусу-вектору с наибольшим коэффициентом расширения, как это представлено стрелками на фигуре 1. Так как в рассматриваемом случае вся девиация радиуса r лежит в плоскости s, то все точки частицы жидкости, находящиеся в плоскости s, будут лежать по прошествии времени dt в некоторой плоскости s', которая пересечет плоскость s по радиусу r. В этом смысле радиус r называется *характеристикой плоскости* s. Предположив, что проекции радиуса r на оси координат суть x, y, z, найдем из уравнения (16), что косинусы углов нормали плоскости s с осями координат находятся в отношении

$$(e_2 - e_3)\,yz : (e_3 - e_1)\,zx : \\ : (e_1 - e_2)\,xy.$$



Фиг. 2.

Если теперь примем, наоборот, радиус $r_1 = on_1$ (фиг. 2), представляющий нормаль плоскости s, за характеристику некоторой плоскости s_1 и будем искать нормаль on этой плоскости, то найдем для ее направления отношения косинусов:

$$(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\,x^2yz : (e_3 - e_1)(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\,xy^2z : \\ : (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\,xyz^2,$$

т. е.

$$x : y : z.$$

Таким образом, *нормаль и характеристика плоскости представляют собой две взаимные прямые линии*. Движение плоскости s, образованной точками частицы, приводится к ее вращению около характеристики on с угловой скоростью,

равной девиации радиуса *от* в плоскости s_1. По первой теореме § 4 эта девиация равна и противоположна девиации радиуса on_1 в той же плоскости; но так как девиация радиуса on_1 в плоскости s_1 представляет всю его девиацию в пространстве, то *перемещение нормали плоскости s от движения этой плоскости равно и прямо противоположно перемещению радиуса частицы жидкости, направленного по этой нормали.*

Из этой теоремы следует, что проекция перемещенного радиуса-вектора on_1 на перемещенную плоскость s (перемещение совершается во время dt) пойдет по направлению *от*, так что из всех прямых углов, образованных радиусом on_1 и радиусом, лежащим в плоскости s, угол n_1ot имеет наибольший по абсолютной величине коэффициент скошения.

Назовем его *коэффициентом скошения перпендикуляра к плоскости.* Этот коэффициент равен двойной девиации радиуса on_1 в пространстве; коэффициент же скошения всякого другого прямого угла n_1op равен двойной проекции этой девиации на радиус *ор*. Отсюда следует, что, *отложив на радиусах ор и од величины скошений прямых углов* pon_1 и don_1 *и построив на плоскости s вектор, имеющий эти две проекции на радиусах ор и од, мы найдем направление от и коэффициент скошения перпендикуляра* on_1 *к плоскости s.*

§ 6. О радиусах и плоскостях частицы жидкости, не изменяющих своего направления. Прибавляя к скоростям, данным формулами (12), скорости вращательного движения частицы, мы получим скорости ее точек относительно осей, движущихся поступательно со скоростью ее центра. Отношение проекций $x : y : z$ радиуса r, который в этом движении остается неподвижен в продолжение времени dt, найдем из уравнений:

$$\frac{e_1x + \omega_2z - \omega_3y}{x} = \frac{e_2y + \omega_3x - \omega_1z}{y} = \frac{e_3z + \omega_1y - \omega_2x}{z} = \frac{2F}{r^2} = \varepsilon,$$

в которых ε — коэффициент линейного расширения по напра

влению искомого радиуса. Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned}(e_1-\varepsilon)x-\omega_3 y+\omega_2 z&=0,\\ \omega_3 x+(e_2-\varepsilon)y-\omega_1 z&=0,\\ -\omega_2 x+\omega_1 y+(e_3-\varepsilon)z&=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для того чтобы эти уравнения удовлетворялись величинами x, y, z, не равными нулю, необходимо, чтобы коэффициент линейного расширения обращал в нуль их определитель, т. е.

$$(\varepsilon-e_1)(\varepsilon-e_2)(\varepsilon-e_3)+\omega_1^2(\varepsilon-e_1)+\omega_2^2(\varepsilon-e_2)+\omega_3^2(\varepsilon-e_3)=0. \tag{18}$$

Так как это уравнение имеет по крайней мере один действительный корень, то в рассматриваемом движении существует по крайней мере один неподвижный радиус-вектор r. Его направление найдем из формул (17), внеся в них найденную величину ε.

Переходя затем к отысканию неподвижной плоскости s, проходящей через центр частицы, заметим, что по теореме § 5 о движении нормали плоскости следует, что неподвижный радиус частицы при изменении ее вращения в прямо противоположное дает направление нормали неподвижной плоскости. Мы найдем поэтому направление нормали неподвижной плоскости из тех же уравнений (17), изменив в них знаки при ω_1, ω_2, ω_3. Но так как от этого уравнение (18) не изменяется, то найденный нами коэффициент линейного расширения для неподвижного радиуса будет также коэффициентом линейного расширения по направлению нормали неподвижной плоскости и послужит для ее определения.

Когда неподвижный радиус и соответствующая ему (с тем же ε) неподвижная плоскость будут найдены, то разыскание других неподвижных радиусов и плоскостей легко производится из рассмотрения девиаций радиусов частицы жидкости в неподвижной плоскости s. Называя через ω_s проекцию ω на нормаль к плоскости s, найдем на основании

сказанного в конце § 4, что при

$$\omega_3^2 < \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

в плоскости s будут существовать два различных или два слившихся неподвижных радиуса, которые с осями деформации плоскости s образуют равные углы. Обозначая через c_1 и c_2 коэффициенты расширения этих радиусов, найдем:

$$c_1 = \varepsilon_1 \cos^2\varphi + \varepsilon_2 \sin^2\varphi,$$

$$c_2 = \varepsilon_1 \sin^2\varphi + \varepsilon_2 \cos^2\varphi,$$

так что

$$c_1 + c_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{19}$$

Если же

$$\omega_3^2 > \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2,$$

то неподвижных радиусов в плоскости s не существует. В первом случае мы будем иметь три неподвижных радиуса, через которые пройдут три неподвижных плоскости, причем в частном случае два радиуса и две плоскости могут между собой слиться; во втором же случае будет существовать только один неподвижный радиус и одна неподвижная плоскость. Останавливаясь на предположении о трех неподвижных радиусах примем их за косоугольные оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Компоненты скорости точки частицы в рассматриваемом движении относительно этих осей должны иметь вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = c_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = c_2\eta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = c_3\zeta,$$

потому что первый компонент должен быть равен нулю для всех точек плоскости $O\eta\zeta$ и т. д. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 в этих формулах суть, очевидно, коэффициенты линейных расширений неподвижных радиусов. Поступая, как в § 5, найдем, что в рассматриваемом движении скорости точек частицы будут направлены по кривым

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}} = b\zeta^{\frac{1}{c_3}}, \tag{20}$$

а перемещения радиусов-векторов во время dt будут совершаться по конусам:

$$\xi c_3 - c_2 \eta c_3 - c_1 \zeta c_1 - c_3 = \text{const.}$$

В случае существования только одного неподвижного радиуса-вектора скорости точек частицы в неподвижной плоскости s относительно осей деформации этой плоскости будут:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \omega_3 y,$$
$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 y + \omega_3 x;$$

поэтому дифференциальное уравнение семейства кривых, дающих направления этих скоростей, представится в виде:

$$\frac{dx}{\varepsilon_1 x - \omega_3 y} = \frac{dy}{\varepsilon_2 y + \omega_3 x},$$

или

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(y\,dx + x\,dy) - 2\omega_3 (x\,dx + y\,dy) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(y\,dx - x\,dy).$$

Это уравнение по разделении на интегрирующий делитель

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) xy - \omega_3 (x^2 + y^2)$$

и интеграции дает:

$$\ln \{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) xy - \omega_3 (x^2 + y^2) \} =$$
$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{y}{x} - \omega_3 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} + \text{const.} \qquad (21)$$

Переходя от рассматриваемого относительного движения частицы к ее абсолютному движению, мы должны будем еще прибавить поступательное движение; тогда найдем, что неподвижные радиусы-векторы и плоскости обратятся в радиусы-векторы и плоскости, не изменяющие своего направления [1]).

[1]) Вопрос о радиусах и плоскостях, не изменяющих своего направлении, был разъяснен Бертраном в его Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide, Comptes Rendus, т. LXVI. Более подробные исследования можно найти в сочинении автора «Кинематика жидкого тела», §§ 10—13 (стр. 37 настоящего тома).

§ 7. Изменение объема частицы жидкости за конечный промежуток времени. До сих пор мы рассматривали движение частицы жидкости в продолжение бесконечно малого времени dt; в некоторых вопросах гидродинамики полезно знать изменение частицы за конечный промежуток времени. Здесь мы встречаемся с подобным же исследованием линейных формул, как в § 1. Если примем попрежнему что центр частицы жидкости в начальный момент времени лежит в начале неподвижных прямоугольных координат, а по прошествии времени t занимает положение (x_0, y_0, z_0), и назовем через a, b, c — начальные, а через x, y, z — конечные координаты точек жидкости, то найдем для точек частицы:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{\partial x}{\partial a} a + \frac{\partial x}{\partial b} b + \frac{\partial x}{\partial c} c, \\ y - y_0 &= \frac{\partial y}{\partial a} a + \frac{\partial y}{\partial b} b + \frac{\partial y}{\partial c} c, \\ z - z_0 &= \frac{\partial z}{\partial a} a + \frac{\partial z}{\partial b} b + \frac{\partial z}{\partial c} c. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Пусть в начале времени частица имела форму треугольной пирамиды, ребра которой направлены по осям координат и равны соответственно a, b и c. Во время t концы этих ребер будут иметь координаты x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', для которых по формулам (22) получаем:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{\partial x}{\partial a} a, \quad x' - x_0 = \frac{\partial x}{\partial b} b, \quad x'' - x_0 = \frac{\partial x}{\partial c} c, \\ y - y_0 &= \frac{\partial y}{\partial a} a, \quad y' - y_0 = \frac{\partial y}{\partial b} b, \quad y'' - y_0 = \frac{\partial y}{\partial c} c, \\ z - z_0 &= \frac{\partial z}{\partial a} a, \quad z' - z_0 = \frac{\partial z}{\partial b} b, \quad z'' - z_0 = \frac{\partial z}{\partial c} c. \end{aligned}$$

Первоначальный объем треугольной пирамиды V будет:

$$V = \frac{1}{6} abc,$$

а объем ее V' во время t выразится с помощью определителя:

$$V' = \frac{1}{\theta}\begin{vmatrix} a\frac{\partial x}{\partial a} & b\frac{\partial x}{\partial b} & c\frac{\partial x}{\partial c} \\ a\frac{\partial y}{\partial a} & b\frac{\partial y}{\partial b} & c\frac{\partial y}{\partial c} \\ a\frac{\partial z}{\partial a} & b\frac{\partial z}{\partial b} & c\frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{abc}{\theta}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, обозначая здесь через ϑ коэффициент кубического расширения жидкости, отнесенный к единице объема, получим:

$$\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} - 1. \qquad (23)$$

ЛЕКЦИЯ II.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

§ 8. Линии и поверхности токов. Теорема Клебша и ее приложения. Мы назовем *течением жидкости* движение жидкой массы в данный момент времени, определенное для каждой точки рассматриваемого пространства величиной и направлением скорости V, т. е. ее компонентами u, v, w на некоторых прямоугольных осях. Мы будем считать u, v, w непрерывными функциями координат; если же внутри жидкой массы существует *поверхность раздела*, при переходе через которую скорость V изменяется скачком, то мы будем в отдельности рассматривать ту и другую часть жидкой массы, прилегающую к поверхности раздела. Понятно, что при этом в случае несжимаемой жидкости необходимо, чтобы нормальные составляющие скорости с обеих сторон поверхности раздела были одинаковы, в случае же газообразного тела эти скорости должны быть обратно пропорциональны плотностям соприкоснувшихся масс. Семейство линий, каса-

тельные которых дают направления скоростей течения жидкости, мы будем называть *линиями тока*. Если течение жидкости не изменяется со временем, т. е. жидкость имеет *установившееся движение*, то линии токов суть траектории точек жидкости. Дифференциальные уравнения линий токов суть

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{1}$$

Всякий интеграл этого уравнения

$$f(x, y, z) = c$$

представляет поверхность, проходящую через линии токов. Мы назовем такую поверхность *поверхностью тока*. Семейство линий тока будет найдено, когда определим два интеграла уравнений (1), т. е. найдем два семейства поверхностей тока. Вообразив внутри жидкой массы бесконечно малую замкнутую линию и проведя через все ее точки линии токов, получим поверхность тока, имеющую форму бесконечно тонкой трубки. Вся жидкая масса может быть с помощью таких трубок разбита на бесконечно тонкие нити, которые мы будем называть *струйками жидкости*. Обозначая через dq площадь перпендикулярного сечения струйки жидкости, найдем, что количество жидкости, протекающей через это сечение, отнесенное к единице времени, будет $V\,dq$; для всякого же косого сечения, площадь которого есть $d\sigma$, оно выразится через $V\cos\lambda\,d\sigma$, где λ — угол V с нормалью к $d\sigma$.

В случае несжимаемой жидкости, скорости которой на основании уравнения (13) первой лекции должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

вдоль всей жидкой струйки $V\,dq$ есть постоянная величина. Условившись строить все струйки жидкости с одной и той же величиной $V\,dq$, напишем, что количество жидкости,

протекающее через поверхность Σ, ограничивающую рассматриваемую массу, равно нулю:

$$\iint V \cos\lambda \, d\sigma = 0, \tag{3}$$

где направления нормалей элементов $d\sigma$ берем внутрь жидкой массы. При дальнейшем изложении мы будем брать такие же направления нормалей. Так как для всех элементов $d\sigma$, вырезанных на поверхности Σ струйками жидкости, $V\cos\lambda\, d\sigma$ одинаково по абсолютной величине, но имеет знак $(+)$ или $(-)$, смотря по тому, входит ли струйка внутрь рассматриваемого пространства или выходит из него, то уравнение (3) показывает, что для всей поверхности Σ число тех и других концов струек будет одинаково. Таким образом, ни одна струйка не может оканчиваться внутри жидкой массы, и все струйки будут или лежать своими концами на поверхности Σ, или будут замкнуты.

Интегрирование уравнений (1) при существовании условия (2) облегчается с помощью следующей теоремы Клебша. *Если найдено семейство поверхностей тока $f(x, y, z) = c$ несжимаемой жидкой массы, то уравнение проекций линий тока с одной из таких поверхностей на плоскость Oxy найдется интегрированием уравнения*

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}(u\,dy - v\,dx) = 0,$$

первая часть которого, по исключении z с помощью уравнения $f(x, y, z) = c$, представит полный дифференциал [1]).

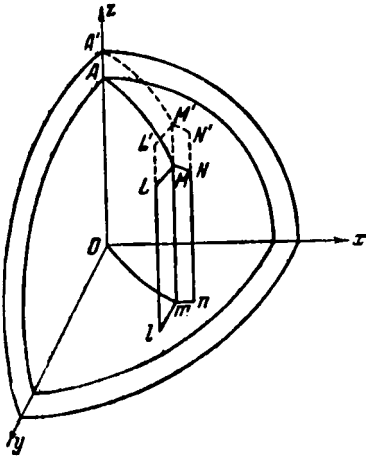
Пусть (фиг. 3) ALN есть поверхность тока, соответствующая уравнению

$$f(x, y, z) = c,$$

а $A'L'N'$ — поверхность тока, получаемая при возрастании c на dc. Проведем по первой поверхности произвольную

[1]) Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen Borchardts Journal, т. LVI. Легко видеть, что теорема Клебша является частным случаем принципа последнего множителя.

линию AM и, спроектировав ее на плоскость Oxy, продолжим проектирующий цилиндр $omMA$ до пересечения по кривой $A'M'$ с поверхностью $A'L'N'$. Назовем через Q отнесенное к единице времени количество жидкости, протекающей через бесконечно тонкую цилиндрическую ленту $AMM'A'$. Вследствие несжимаемости жидкости это количество не зависит от вида кривой AM, а только от места точки M, поэтому величина Q есть функция координат x, y точки m. Предположим, что точка m продвинулась параллельно оси Ox на бесконечно малый путь $mn = dx$, вследствие чего точка M перешла по поверхности ALN в точку N. Поверхность нашей бесконечно тонкой ленты увеличивается при этом на площадь параллелограма $MM'N'N$, равную $MM' \cdot mn = MM'\,dx$, поэтому Q прирастает на [1])



Фиг. 3.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = -\,vMM'\,dx.$$

Если бы точка m продвинулась параллельно оси Oy на путь $ml = dy$, то поверхность ленты увеличилась бы на площадь параллелограма $M'MLL'$, равную $MM' \cdot ml = MM'\,dy$, а объем Q возрос бы на

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\,dy = u MM'\,dy.$$

Бесконечно малую величину MM' найдем, определив dz из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,dz = dc.$$

[1]) Мы полагаем, что Q представляет количество жидкости, протекшей с левой стороны ленты на правую.

Подставляя эту величину и складывая оба найденные приращения Q, находим:

$$dQ = \frac{dc}{\frac{\partial f}{\partial z}}(-v\,dx + u\,dy).$$

Так как первая часть этого равенства есть полный дифференциал от некоторой функции x и y, то этим свойством должна обладать и вторая его часть по исключении из нее z с помощью уравнения

$$f(x,\ y,\ z) = c.$$

Если мы будем передвигать M по линии тока, начертанной на поверхности MLN, то Q не должно изменяться, поэтому

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}(u\,dy - v\,dx) = 0 \qquad (4)$$

есть дифференциальное уравнение проекций линий тока на плоскость Oxy. Желаемое, таким образом, доказано.

Предположив, что mn и ml на фигуре 3 суть элементы координатных линий в какой-нибудь системе криволинейных ортогональных координат на плоскости Oxy, а u и v представляют проекции скорости точки M на направления этих элементов, найдем с помощью рассуждения, аналогичного вышеприведенному, дифференциальное уравнение проекций линий тока в заданных координатах. Так, например, для полярных координат вместо уравнения (4) получим:

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}(u\,dr - v\,r\,d\theta) = 0, \qquad (5)$$

где v — проекция скорости на радиус-вектор r, а u — на направление элемента дуги $r\,d\theta$.

Приложим теорему Клебша к течению жидкости, совершающемуся параллельно плоскости Oxy. В этом случае

одно из семейств поверхностей тока есть

$$z = c$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1,$$

так что по уравнению (4) выражение

$$u\,dy - v\,dx = 0 \tag{6}$$

должно быть полным дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, что, впрочем, прямо видим из уравнения (2), полагая в нем $w = 0$. На основании сказанного выше функция $\psi(x, y)$ равна $Q : dc$, т. е. представляет объем жидкости, протекшей через цилиндрическую ленту единицы высоты в единицу времени.

Интеграция уравнения (6) дает нам семейство линий тока:

$$\psi(x, y) = \text{const}.$$

Скорости же u и v выражаются через производные от функции ψ таким образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Если бы мы желали провести в рассматриваемой плоскости семейство линий, ортогональных к линиям тока, то должны бы были интегрировать уравнение

$$u\,dx + v\,dy = 0. \tag{8}$$

Первая часть этого уравнения, вообще говоря, не будет полным дифференциалом; но если проекции угловых скоростей частиц жидкости на ось Oz суть нули, то по формулам (3) первой лекции

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

и первая часть уравнения (8) будет полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y)$. Интегрируя уравнение (8)

в этом случае, найдем семейство искомых отрогональных линий:

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

Скорости же u и v могут быть с помощью функции $\varphi(x, y)$ выражены так:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{9}$$

Сравнение формул (7) и (9) приводит нас к связи между функциями ψ и φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{10}$$

из которой следует, что

$$\varphi + i\psi = F(x + iy). \tag{11}$$

Если теперь, наоборот, возьмем какую-нибудь функцию F от полной мнимой величины и определим по уравнению (11) функции φ и ψ, то по произволу можем принять одну из этих функций за потенциал скоростей *плоского течения*[1]) без сжатия и вращения, а другую — за функцию, определяющую линии токов.

Действительно, положив

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

найдем из уравнений (10), что жидкость движется без изменения объема:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \tag{12}$$

далее из тех же уравнений следует, что уравнение (6) обращается в

$$d\psi = 0,$$

и уравнения линий тока суть

$$\psi = \text{const.}$$

---

[1]) Мы будем называть так течение, параллельное плоскости Oxy, при котором u и v суть функции x и y.

Как второй пример для приложения теоремы Клебша возьмем течение жидкости, совершающееся в плоскостях, проходящих через ось Ox. Уравнение известного семейства поверхностей тока будет здесь:

$$\frac{z}{y} = c,$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y},$$

или в полярных координатах

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

По формуле (5)

$$r \sin \theta (u\, dr - vr\, d\theta) = 0 \qquad (13)$$

будет дифференциальное уравнение проекций линий токов на плоскость Oxy, причем надо положить:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = cr \sin \theta.$$

Рассматриваемый пример представляет наибольший интерес в предположении, что течение жидкости симметрично относительно оси Ox; тогда во всех меридиональных плоскостях, проходящих через эту ось, линии токов одинаковы, и нам достаточно отыскать линии токов в плоскости Oxy, которые найдутся, положив в формуле (13) $z = 0$.

§ 9. Критические точки. Для лучшего уяснения расположения линий токов течения жидкости следует обращать внимание на *критические точки*. Мы называем так точки, в которых некоторые из линий тока пересекаются или обращаются в бесконечно малые замкнутые кривые. Для простоты изложения остановимся сначала на плоском течении несжимаемой жидкости. Рассматривая какую-нибудь точку линии тока в плоскости Oxy, мы заметим, что тангенс угла ее касательной с осью Ox

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

есть величина вполне определенная до тех пор, пока u и v конечны; но если $u = v = 0$, то этот тангенс обращается в $\frac{0}{0}$, и для исследования вида линий токов в расстоянии, бесконечно близком от упомянутой покоящейся точки жидкости, нам следует обратиться к рассмотрению движения частицы жидкости, имеющей эту точку центром. Возьмем начало координат в этом центре и направим оси Ox и Oy по осям деформации плоскости Oxy, которая в нашем случае будет одной из неподвижных плоскостей s. На основании § 6 заключаем, что в случае

$$\omega_3^2 < \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

частица будет иметь два неподвижных радиуса, которые представят нам направления касательных двух пересекающихся линий тока. Принимая эти касательные за косоугольные оси координат $O\xi$ и $O\eta$, найдем по уравнениям (20) первой лекции, что линии токов, бесконечно близкие от критической точки, будут иметь уравнение

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}},$$

и, так как по формуле (19) той же лекции в случае плоского течения несжимаемой жидкости

$$c_1 + c_2 = 0,$$

то для рассматриваемого случая получаем гиперболы:

$$\xi\eta = a^{c_1}.$$

Если движение жидкости совершается так же и без вращения частиц, то оси $O\xi$ и $O\eta$ будут направлены по осям деформации Ox и Oy, и гиперболы будут равносторонние.

В случае

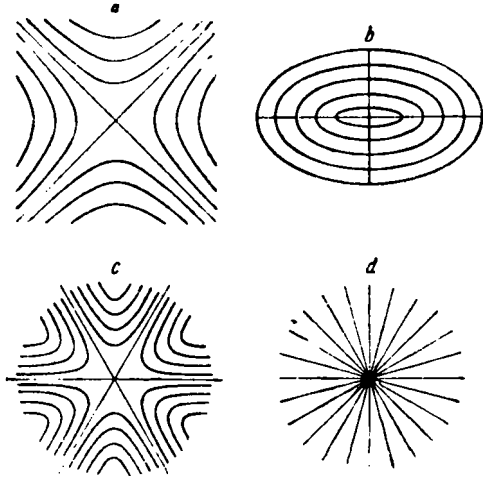
$$\omega_3^2 > \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2$$

в плоскости s не будет существовать неподвижных радиусов, и мы не получим линий тока, проходящих через точку O. Уравнения линий токов в бесконечной близости от O будут даны формулой (21) первой лекции, в которой надо поло-

жить $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Мы получим вследствие этого:

$$\omega_3 (x^2 + y^2) - xy (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \text{const.}$$

и придем на основании вышенаписанного неравенства к заключению, что линии токов, бесконечно близкие точке O, представляют эллипсы, имеющие эту точку центром. Два вида рассмотренных критических точек представлены на фигуре 4 под буквами a и b. Точки первого вида мы будем называть *узлами*, а второго — *полюсами*. Кроме таких простейших критических точек *первого порядка*, могут быть еще критические точки *порядка* n, через которые могут проходить $n+1$ линий тока. Они получаются, когда в рассматриваемой точке обращаются в нуль компоненты скорости жидкости и все их производные по x и y до $n-1$-го порядка, так что для определения линий тока в бесконечной близости от критической точки приходится пользоваться производными порядка n.



Фиг. 4.

Возьмем, например, плоское течение жидкости без сжатия и вращения, для которого потенциальная функция скоростей φ получается из уравнения:

$$(x + iy)^{n+1} = \varphi + i\psi,$$

где n — целое число, большее единицы. Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, находим:

$$\varphi = r^{n+1}\cos(n+1)\theta, \quad \psi = r^{n+1}\sin(n+1)\theta.$$

Первая из этих формул показывает, что при $r = 0$ компоненты скорости и их $n-1$ производные обращаются

в нули; второе же дает нам уравнение линий тока:

$$r^{n+1}\sin(n+1)\theta = \text{const.},$$

которое при const. $= 0$ представляет $n+1$ прямых, проходящих через критическую точку под равными углами, как это представлено на фигуре 4 под буквой c для критической точки второго порядка[1]).

В случае плоского течения сжимаемой жидкости в критической точке первого порядка может пересекаться бесчисленное множество линий тока. Если, например, в уравнении

$$\xi^{\frac{1}{c_1}} = a\eta^{\frac{1}{c_2}}$$

положим $c_1 = c_2$, то найдем, что линии тока в бесконечной близости от критической точки предстаются уравнениями

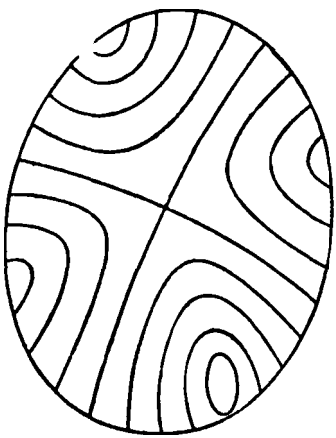
$$\xi = a^{c_1}\eta,$$

т. е. будут прямые, проходящие через эту точку, как это изображено на фигуре 4 под буквой d. Такую критическую точку мы будем называть *точкой схода*.

Все сказанное о плоском течении переносится на течение жидкости, совершающееся между двумя бесконечно близкими поверхностями тока. Если жидкость несжимаема и нормальное расстояние во всех местах рассматриваемых поверхностей одинаково, то их критические точки будут иметь вид a, b или c; если же при несжимаемой жидкости нормальное расстояние между поверхностями тока изменяется, то $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ не равно нулю, и критические точки будут иметь вид, как при сжимаемой жидкости в плоском течении. Так как в § 6 было показано, что всякой неподвижной плоскости s соответствует неподвижный радиус, не лежащий в этой плоскости, то через каждую критическую точку на поверхности тока проходит линия тока, не лежащая в этой поверх-

[1]) О критических точках порядка n см. в сочинении Haton de la Goupillière, Nouvelle théorie générale de lignes isothermes, Comptes Rendus, т. XVIII, 1-й семестр, стр. 621. Теория критических точек первого порядка изложена подробно в «Кинематике жидкого тела», § 20 (стр. 90 настоящего тома).

ности; притом, если эта критическая точка — узел, то через эту линию тока проходят две поверхности тока. В случае течения жидкости без вращения ее частиц все три поверхности тока, проходящие через критическую точку, пересекаются в ней под прямыми углами.



Фиг. 5.

Укажем в конце этого параграфа на некоторые расположения линий токов течения несжимаемой жидкости при существовании в нём критических точек первого порядка. Если плоское течение совершается внутри замкнутой линии тока, ограничивающей односвязное пространство, то внутри этого пространства должен быть по крайней мере один полюс; далее можно прибавлять по одному узлу и одному полюсу, так что число всех полюсов выйдет всегда на единицу более числа узлов.

В односвязном жидком слое постоянной толщины, заключенном между двумя бесконечно близкими замкнутыми поверхностями тока, критические точки распределяются так: необходимо должны существовать по крайней мере два полюса; далее можно прибавлять по одному узлу и одному полюсу, так что число полюсов будет всегда на два более числа узлов. На фигуре 5 представлены линии токов в таком бесконечно тонком слое, причем имеется один узел и три полюса, из которых два изображены, а третий лежит за чертежом.

§ 10. Вихревые нити. Теорема Стокса. Условие существования поверхностей, ортогональных к линиям тока. Если известно течение жидкости, заполняющей данное пространство, то на основании формул (3) первой лекции для всякой точки этого пространства известны компоненты ω_1, ω_2, ω_3 угловых скоростей вращения частиц жидкости. Предпо-

ложим, что эти компоненты представляются непрерывными функциями координат, и построим семейство линий, касательные которых направлены по осям вращения частиц жидкости. Эти линии, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3}, \tag{14}$$

мы будем называть *линиями вихрей*, а всякую проходящую через них поверхность — *поверхностью вихря*. Вообразив внутри жидкой массы бесконечно малую замкнутую линию и проведя через все ее точки линии вихрей, мы получим поверхность вихря, имеющую форму бесконечно тонкой трубки. Вся рассматриваемая жидкая масса может быть с помощью таких трубок разбита на бесконечно тонкие нити, которые мы будем называть *вихревыми нитями*. Так как на основании формул (3) первой лекции

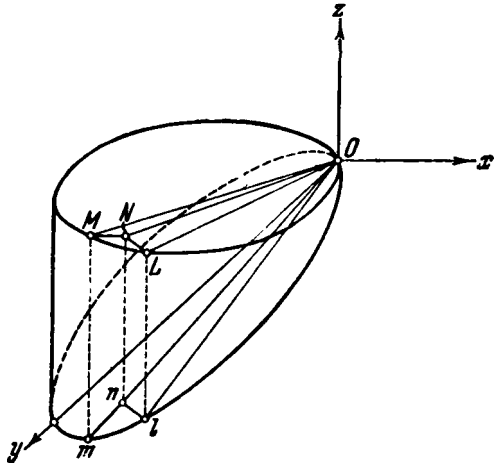
$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

то компоненты угловых скоростей ω_1, ω_2, ω_3 могут быть рассматриваемы как компоненты скоростей несжимаемой жидкости, а вихревые нити — как струйки жидкости. Таким образом, все сказанное о струйках несжимаемой жидкости переносится на вихревые нити. Обозначая площадь сечения вихревой нити через dq, назовем произведение $\omega\, dq$ *напряжением вихря*. Эта величина будет постоянна вдоль вихревых нитей, которые должны быть или замкнутыми, или должны лежать своими концами на границах жидкой массы. Мы предполагали пока, что внутри рассматриваемых границ ω_1, ω_2, ω_3 непрерывны, но далее будет показано, что упомянутые свойства вихревых нитей остаются верны и в том случае, когда u, v, w изменяются непрерывно, а ω_1, ω_2, ω_3 при переходе через некоторую *поверхность раздела*[1]), проведенную внутри рассматриваемого пространства, изменяются скачком.

[1]) Это будет поверхность раздела для компонентов вихря, а выше мы имели поверхность раздела скоростей.

Так как ω_1, ω_2, ω_3 могут быть рассматриваемы как скорости несжимаемой жидкости, то при интеграции уравнений (14) мы можем пользоваться теоремой Клебша.

Переходим теперь к исследованию *циркуляции скорости* по данному контуру, лежащему внутри рассматриваемой жидкой массы. Мы будем называть таким образом взятый по данному контуру интеграл: $\int V\cos\theta\, ds$, где V — скорость жидкости, ds — элемент дуги контура, а θ — угол между V и ds. Для сокращения письма будем обозначать циркуляцию скорости скобкой, в которую вписан контур. Определим, чему равна циркуляция скорости по бесконечно малому замкнутому контуру. Пусть (фиг. 6) *OLMO* будет такой контур. Предполагаем, что начало наших прямоугольных осей координат *Oxyz* находится в точке *O* и ось *Oz* направлена по угловой скорости ω частицы жидкости, имеющей точку *O* центром и заключающей в себе контур *OLMO*. На основании § 1 скорость V для каждой точки рассматриваемого контура будет слагаться из скорости движения, имеющего потенциальную функцию скоростей (происходящего от поступательного движения частицы и ее деформации), и из скорости вращательного движения частицы около оси *Oz*. Обозначив вышеупомянутую функцию скоростей через $\varphi(x, y, z)$, найдем, что



Фиг. 6.

$$(OLMO) = \int V\cos\theta\, ds = \int \frac{\partial\varphi}{\partial s}\, ds + \int r\omega\cos\lambda\, ds,$$

где r — проекция радиуса-вектора точки контура на плоскость Oxy, а λ — угол между элементом контура ds и скоростью ωr вращательного движения рассматриваемой точки контура. Пусть OL и OM — два радиуса контура, проведенные к концам элемента $LM = ds$. Проектируем их на плоскость Oxy и проводим радиусом $OL = r$ дугу $ln = r\,d\mu$, где μ — угол между r и Ox. Эта дуга будет равна дуге LN, отсекаемой проектирующими плоскостями OLl и OMm на окружности круга, описываемого точкой L при ее вращении около оси Oz. Соединив точки N и M, находим из прямоугольного треугольника LMN:

$$\cos\lambda\, ds = LN = r\,d\mu.$$

Отсюда следует, что

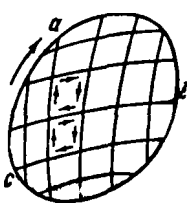
$$(OLMO) = \int \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds + \omega \int r^2\,d\mu.$$

Так как первый интеграл во второй части этого равенства, взятый по замкнутому контуру, обращается в нуль, а второй интеграл представляет двойную площадь dq проекции нашего бесконечно малого контура на плоскость Oxy, то

$$(OLMO) = 2\omega\,dq.$$

Легко увидеть, что dq есть не что иное, как площадь перпендикулярного сечения вихревой нити, построенной на нашем бесконечно малом замкнутом контуре $OLMO$, так что определенная нами циркуляция скорости равна двойному напряжению этой вихревой нити. Напряжение вихревой нити следует здесь приписывать знак + или —, смотря по тому, берем ли мы направление контура $OLMO$ в сторону вращения частицы жидкости или в обратную сторону. Переходим к определению циркуляции скорости по конечному замкнутому контуру, *обращаемому в точку*. Мы будем называть таким образом всякий контур, который может быть обращен в точку посредством непрерывного изменения, не выходя из пространства, занятого рассматриваемой жидкостью. Через такой контур всегда можно провести

поверхность, которая вся будет лежать в жидкости. Вообразим (фиг. 7), что такая поверхность проведена через данный контур *abca*, и построим на ней два семейства линий, которые разделят площадь контура на бесконечно малые части. Нетрудно видеть, что циркуляция (*abca*) может быть заменена суммой циркуляций, взятых по всем полученным бесконечно малым контурам в том же направлении, потому что при таком суммировании циркуляции скорости по всем внутренним линиям сократятся, и останется циркуляция по заданному контуру. Так как циркуляция по всякому бесконечно малому замкнутому контуру равна двойному напряжению вихревой нити, построенной на этом контуре, то сумма всех таких циркуляций будет равна сумме двойных напряжений всех вихревых нитей, проходящих через контур *abca*.



Фиг. 7.

Отсюда получается теорема Стокса [1]: *циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, обращаемому в точку, равна двойной сумме напряжений всех вихревых нитей, проходящих сквозь этот контур.* Напряжения вихревых нитей следует считать положительными, если вращение частиц жидкости совершается в ту сторону, в которую берем циркуляцию, и отрицательными, если оно совершается в обратную сторону.

Так как сумма напряжений вихревых нитей, проходящих сквозь контур *abca*, равна отнесенному к единице времени количеству жидкости, протекшей через поверхность, проведенную через этот контур, при течении жидкости с компонентами скоростей ω_1, ω_2, ω_3, то, обозначая через α, β, γ углы нормали к элементу поверхности с осями координат, можем выразить доказанную теорему формулой:

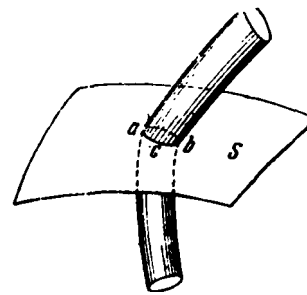
$$(abca) = 2\int\int (\omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \cos\beta + \omega_3 \cos\gamma)\, d\sigma. \qquad (16)$$

При этом направление нормали поверхности берется в

[1]) Stokes, Cambridge University Calendar, 1854.

ту сторону, глядя из которой направление контура идет по солнцу.

Пользуясь теоремой Стокса, легко распространить теорему о постоянстве напряжения вихревой нити на тот случай, когда при непрерывно изменяющихся u, v, w величины ω_1, ω_2, ω_3 изменяются скачком при переходе через некоторую поверхность раздела S, лежащую внутри жидкой массы. При этом (фиг. 8) вихревая струйка, проходя через S, переломится и будет состоять из двух половин, лежащих с двух сторон этой поверхности, смыкающихся на ней по некоторому бесконечно малому контуру abc. Обозначая через $\omega\, dq$ и $\omega'\, dq'$ напряжения обеих половин вихревой нити, найдем по теореме Стокса:

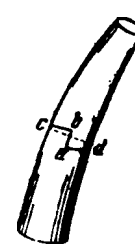


Фиг. 8.

$$(abca) = 2\omega\, dq = 2\omega'\, dq',$$

что и требовалось доказать.

Другое приложение теоремы Стокса мы сделаем при отыскании условия существования семейства поверхностей, ортогональных данному семейству линий тока. Вообразим (фиг. 9) струйку жидкости и проведем по ее поверхности кривую $adcb$, ортогональную к линиям токов. Эта кривая, вообще говоря, не будет сомкнута, а, начавшись в точке a на линии тока ab, она придет на эту линию в точку b. Назовем через h бесконечно малую величину ab и через $d\sigma$ — площадь сечения струйки плоскостью, проходящей через точку a перпендикулярно к линии тока, и напишем по теореме Стокса, что



Фиг. 9.

$$(abcda) = 2\omega \cos\lambda\, d\sigma,$$

где λ — угол между ω и V в точке a. Но $(bcda) = 0$, так

как кривая *bcda* ортогональна скоростям, а $(ab) = hV$, поэтому

$$hV = 2\omega \cos\lambda \, d\sigma. \tag{17}$$

Если существует семейство ортогональных поверхностей, то $h = 0$, и потому

$$\omega \cos\lambda = \omega_1 \frac{u}{V} + \omega_2 \frac{v}{V} + \omega_3 \frac{w}{V} = 0.$$

Подставляя сюда величины ω_1, ω_2, ω_3 из формул (3) первой лекции, находим условие существования семейства ортогональных поверхностей:

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{18}$$

Это условие требует, чтобы линии вихрей были ортогональны линиям тока.

ЛЕКЦИЯ III.

НЕВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.

§ 11. Свойства потенциала скоростей невихревого течения несжимаемой жидкости. Принцип Дирихле. Случай многосвязного пространства. Течение жидкости, при котором все частицы ее не имеют вращения, мы будем называть *невихревым*, течение же жидкости с вращением частиц будем называть *вихревым*. Пусть масса несжимаемой жидкости находится в односвязном замкнутом пространстве Σ, т. е. в таком, внутри которого могут быть проведены только замкнутые контуры, обращаемые в точку. Рассматривая невихревое течение такой массы, заключаем из условия несжимаемости, что все его струйки жидкости должны или лежать своими концами на границах пространства Σ, или быть замкнутыми, и жидкость должна течь вдоль всякой струйки постоянно в одном и том же направлении. Из этого последнего обстоятельства следует, что струйки не могут быть замкнуты, так как в этом случае мы получили бы замкнутый контур, обращаемый в точку, циркуляция по которому в направлении скорости была бы некоторая конеч

ная положительная величина, а по теореме Стокса эта циркуляция должна быть равна нулю. Таким образом, все струйки рассматриваемого течения будут лежать своими концами на границах пространства Σ. Взяв внутри этого пространства Σ постоянную точку a и проведя через нее два разомкнутых контура acb и adb, получим по теореме Стокса:

$$0 = (acbda) = (acb) + (bda),$$

откуда

$$(acb) = (adb).$$

Таким образом, циркуляция скорости по контуру, соединяющему постоянную точку a с переменной точкой b, не зависит от формы контура и потому является функцией координат x, y, z точки b. Обозначив эту функцию через $F(x, y, z)$, найдем:

$$F(x, y, z) = \int V \cos\theta \, ds, \tag{1}$$

где интеграл берется по какому-нибудь контуру acb. Если этот контур прирастает на элемент пути $bb' = ds$, то

$$\frac{\partial F}{\partial s} = V \cos\theta.$$

Эта формула показывает, что функция F для рассматриваемого течения жидкости есть потенциал скоростей. Скорости u, v, w определяются, таким образом, частными производными:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{2}$$

Так как эти скорости удовлетворяют уравнению несжимаемости, то наша функция F должна для всех точек пространства Σ удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta_2 F = 0. \tag{3}$$

Из формулы (1) следует, что при данном невихревом течении несжимаемой жидкости функция F определена до

постоянного, которое зависит от точки a, так как, приняв за такую точку вместо a некоторую точку a', мы увеличим функцию F на $(a'a)$. Та же формула показывает, что при перемещении точки b вдоль линии тока в направлении течения жидкости функция F постоянно возрастает, и так как все струйки лежат своими концами на границах пространства Σ, то нигде внутри его функция F не может иметь наибольшей или наименьшей величины. Из этой последней теоремы следует в свою очередь, что нигде внутри пространства Σ скорость V не может иметь наибольшей величины [1]). Действительно, проведя ось Ox параллельно скорости какой-нибудь точки A, мы выразим эту скорость через $\frac{\partial F}{\partial x}$. Но так как

$$\Delta_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0,$$

то относительно $\frac{\partial F}{\partial x}$ заключаем, так же как и относительно F, что нигде внутри пространства Σ функция $\frac{\partial F}{\partial x}$ не имеет наибольшей величины. Таким образом, всегда существует точка B, бесконечно близкая точке A, для которой $\frac{\partial F}{\partial x}$ имеет бо́льшую величину, нежели для точки A, а скорость

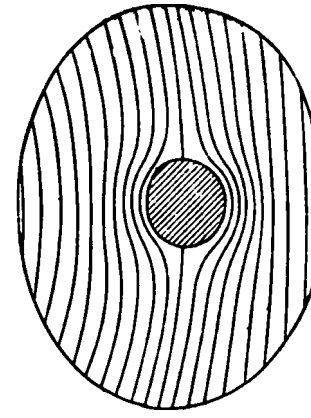
$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

и подавно более скорости в точке A.

Перейдем теперь к доказательству принципа *Дирихле*, который по отношению к гидродинамике состоит в следующем: *невихревое течение несжимаемой жидкости в односвязном пространстве Σ вполне определено, когда на одних границах пространства дана потенциальная функция скоростей F, а на других — нормальная скорость* $\frac{\partial F}{\partial n}$. Заметим сначала, что в рассматриваемом пространстве не может существовать невихревого течения несжимаемой жидкости, для которого

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, стр. 184.

на всех границах $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ или $F = \text{const.}$, так как в первом случае границы явились бы поверхностями тока и струйки могли бы быть только замкнутыми, что невозможно, а во втором случае струйки хотя и лежали бы своими концами на границах пространства, но функция F при передвижении по струйке по направлению движения жидкости должна была бы непременно возрастать и не могла бы иметь равных значений на концах струйки. Точно так же не может существовать невихревого течения несжимаемой жидкости, для которого на одних границах $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$, а на других $F = \text{const}$. Здесь все струйки должны бы лежать своими концами на тех границах, для которых $F = \text{const.}$, причем некоторые из струек будут прилегать к границам, для которых $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ (фиг. 10); при передвижении вдоль каждой струйки в направлении течения жидкости функция F должна возрастать и не может иметь равных значений на концах струйки. Всякий раз, когда дано невихревое течение жидкости, обладающее упомянутыми свойствами, следует прийти к заключению, что скорости этого течения равны нулю.



Фиг. 10.

Предположим теперь, что в нашем пространстве Σ даны два невихревых течения несжимаемой жидкости, определенные потенциальными функциями F и F', причем на некоторых границах пространства Σ имеем $F = F'$, а на других

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F'}{\partial n}.$$

Составляем течение несжимаемой жидкости, скорости которого представляются геометрическими разностями скоро-

стей данных течений. Это течение будет тоже невихревое и определится потенциалом скоростей $F'' = F - F'$. Так как на одних границах пространства Σ имеем $F'' = 0$, а на других

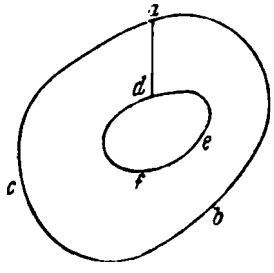
$$\frac{\partial F''}{\partial n} = 0,$$

то скорости полученного течения суть нули, т. е. оба течения одинаковы, что и требовалось доказать. Если на некоторых из границ имеем $F = F'$, то везде внутри Σ имеем $F = F'$; если же на всех границах пространства

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F'}{\partial n},$$

то из сказанного надо заключить, что везде внутри Σ

$$F = F' + \text{const}.$$



Фиг. 11.

До сих пор мы предполагали, что пространство Σ односвязно; если бы оно было многосвязно, то в нем можно бы было проводить замкнутые контуры, в точку не обращаемые. Всякое многосвязное пространство может быть обращено в односвязное с помощью проведения нескольких перегородок, которые мы прибавляем к его границам. Если многосвязное пространство обращается в односвязное с помощью проведения n перегородок, то мы будем называть его $n+1$-связным пространством.

Два замкнутых контура, которые могут быть преобразованы из одного в другой посредством непрерывного изменения, не выходя из данного многосвязного пространства, мы будем называть *приводимыми контурами*. Легко показать, что при невихревом течении жидкости в многосвязном пространстве циркуляции скорости по приводимым контурам равны между собой. Пусть (фиг. 11) *abca* и *defd* будут два приводимых замкнутых контура. Проведя соединительный контур *ad*, найдём, что замкнутый контур *abcadfeda*, в ко-

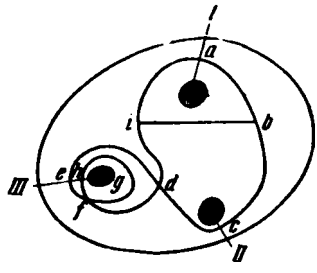
тором линию ad считаем двойной, обращаем в точку; поэтому

$$(abcadfeda) = (abca) + (dfed) = 0,$$

или

$$(abca) = (defd).$$

Обратив $n+1$-связное пространство с помощью n перегородок в односвязное, можно провести n замкнутых контуров, не обращаемых в точку и не приводимых из одного в другой, из которых каждый пересекает только одну перегородку в одной точке. Мы будем называть такие контуры *главными контурами*, а соответствующие им циркуляции скорости — *главными циркуляциями*. Докажем, что циркуляция скорости невихревого течения в многосвязном пространстве по всякому замкнутому контуру выражается с помощью главных циркуляций. Возьмем, например, контур $abcdefghfdia$ в четырехсвязном пространстве (фиг. 12) и, проведя в нем линию ib, напишем, что



Фиг. 12.

$$(abcdefghfdia) = (abia) + (ibcdi) + (defd) + (fghf).$$

Обозначая здесь через k_1, k_2, k_3 главные циркуляции, соответствующие перегородкам *I*, *II*, *III*, находим:

$$(abcdefghfdia) = k_1 + k_2 - 2k_3.$$

Это рассуждение показывает, что в многосвязном пространстве циркуляция скорости невихревого течения по всякому замкнутому контуру равна нулю, если главные циркуляции скорости суть нули. В этом предположении невихревое течение несжимаемой жидкости может, так же как в односвязном пространстве, совершаться только разомкнутыми струйками, концы которых лежат на границах пространства. Если же некоторые из главных циркуляций не суть нули, то струйки невихревого течения несжимаемой

жидкости могут быть замкнутые; при этом они должны пересекать такие перегородки, для которых главные циркуляции не равны нулю. Когда $n+1$-связное пространство посредством n перегородок обращено в односвязное, то по данному течению жидкости мы можем для полученного таким образом пространства определить потенциальную функцию скоростей F по формуле (1).

Взяв с двух противоположных сторон какой-нибудь перегородки сливающиеся точки b и b', проведем контур $abb'a$, не пересекающий других перегородок и пересекающий рассматриваемую только один раз. Так как этот контур обращаем в главный контур рассматриваемой перегородки, то, называя соответственную главную циркуляцию через k, найдем, что

$$(abb'a) = (ab) - (ab') = k.$$

Таким образом, при переходе через рассматриваемую перегородку в направлении главного контура потенциальная функция скоростей $F(x, y, z)$ убывает скачком на величину k. Отсюда заключаем, что для течения жидкости в многосвязном пространстве потенциальная функция скоростей может быть многозначной, причем при переходе через каждую перегородку она будет убывать на циркуляцию главного контура, соответствующего этой перегородке. Если все главные циркуляции скорости суть нули, то потенциальная функция скорости в многосвязном пространстве будет однозначна. Вышеприведенный принцип Дирихле для многосвязного пространства выражается так: *невихревое течение несжимаемой жидкости в многосвязном пространстве* Σ *вполне определено, если для некоторых из границ пространства дано* F, *а для других дано* $\frac{\partial F}{\partial n}$, *и если известны все главные циркуляции скорости.* Вообразив два течения жидкости, определенные потенциальными функциями скоростей F и F' и удовлетворяющие всем вышеупомянутым условиям, составим течение несжимаемой жидкости, скорости которого — геометрические разности скоростей двух воображаемых тече-

ний. Это новое течение будет, очевидно, невихревое и все его главные циркуляции будут нули, и так как соответствующая ему потенциальная функция скоростей $F'' = F - F'$ будет на одних границах равна нулю, а на других

$$\frac{\partial F''}{\partial n} = 0,$$

то по предыдущему везде внутри Σ скорости составленного течения будут равны нулю, что и доказывает желаемое.

§ 12. Теорема Гриня. Беспредельная жидкая масса. Вообразим внутри пространства Σ (односвязного или многосвязного) течение сжимаемой жидкости со скоростями lF, mF, nF, где l, m и n — компоненты некоторого вектора, которые внутри пространства Σ конечны и непрерывны, а F — некоторая функция координат, обладающая тем же свойством. Допустим, что производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial l}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z}$$

внутри пространства Σ везде конечны, и притом три последних удовлетворяют условию

$$\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Вследствие этого условия коэффициент кубического расширения рассматриваемого течения по формуле (13) первой лекции представится в виде:

$$\theta = l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Напишем теперь, что количество жидкости, протекшей через границы пространства Σ внутрь его, равно сумме уменьшений объема всех частиц жидкости, заключенных в этом пространстве:

$$\int\int F(l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= -\int\int\int_{\Sigma}\left(l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

где двукратный интеграл распространяется на границы пространства Σ, а трехкратный на это пространство, величины же α, β, γ — углы внутренней нормали элемента поверхности $d\sigma$ с осями координат. Формула (5) будет одинаково справедлива и в том случае, когда при переходе через некоторую поверхность внутри пространства Σ некоторые из шести вышенаписанных производных по x, y, z изменяются скачком, так как тогда можно разбить с помощью упомянутой поверхности пространство Σ на две половины и, доказав формулу (5) для каждой из них, сложить полученные равенства. Эта формула будет нам весьма полезна при изложении многих вопросов гидродинамики, теперь же мы приложим ее к выводу теоремы Грина. Для этого положим, что

$$l = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad m = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad n = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где φ — функция координат, удовлетворяющая на основании условия (4) уравнению Лапласа:

$$\Delta_2 \varphi = 0.$$

Получим:

$$\int\int F \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\int\int\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (6)$$

Это равенство и есть известная формула Грина. Если в ней обе функции F и φ конечны и непрерывны внутри пространства Σ и внутри его удовлетворяют уравнению Лапласа, то эти две функции могут быть переставлены, вследствие чего

$$\int\int \varphi \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = \int\int F \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \qquad (7)$$

Вообразив внутри пространства Σ некоторую точку A, назовем через r расстояние от нее других точек пространства Σ, из которого исключим часть, заключенную внутри сферы, проведенной из центра A бесконечно малым радиусом ρ. Для полученного таким образом пространства напи-

шем формулу (7), приняв в ней

$$\varphi = \frac{1}{r},$$

так как

$$\Delta_2 \frac{1}{r} = 0;$$

найдем, что

$$\frac{1}{\rho^2}\int\int F\,d\sigma' + \frac{1}{\rho}\int\int \frac{\partial F}{\partial \rho}\,d\sigma' = \int\int F \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,d\sigma,$$

где $d\sigma'$ — элемент поверхности бесконечно малой сферы. Так как первый интеграл в первой части этого равенства равен $4\pi\rho^2 F$, где F есть значение функции в точке A, а второй интеграл равен нулю, то

$$F = \frac{1}{4\pi}\int\int F \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (8)$$

При выводе формул (6), (7), (8) мы предполагали, что функция F внутри пространства Σ изменяется непрерывно; если бы при переходе через некоторые поверхности внутри его она изменялась бы скачком, то можно бы пользоваться теми же формулами, прибавив упомянутые поверхности к границам пространства.

Приложим формулу (8) к исследованию невихревого течения беспредельной массы несжимаемой жидкости, *покоящейся в бесконечности*. Так называет Кирхгоф [1]) жидкую массу, скорости которой приближаются к нулю при бесконечном возрастании расстояния точек жидкости от конечных границ ее. Докажем, что *потенциальная функция скоростей F невихревого течения несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, для всех бесконечно удаленных точек есть одна и та же постоянная величина C.* Пусть (фиг. 13) A будет точка жидкости, находящаяся на конечном расстоянии от конечных границ рассматриваемой жидкой массы. Проведем из этой точки, как из центра, сферу радиуса R,

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, стр. 190.

охватывающую все внутренние границы жидкости, и обозначим через Σ пространство, ограниченное этой сферой и этими границами. Прилагая к такому пространству формулу (8), найдем для определения значения функции F в точке A:

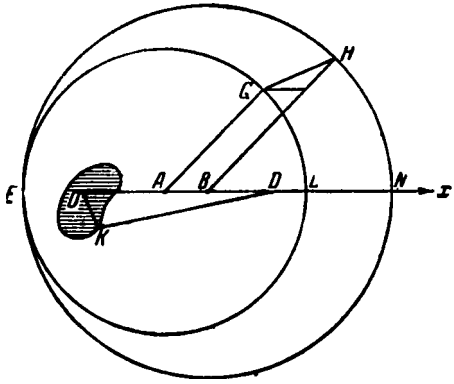
$$F = \frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi R^2}\int\int F\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi R}\int\int \frac{\partial F}{\partial R}\,d\sigma', \quad (9)$$

где два первых интеграла распространяются на внутренние границы, а два вторых — на поверхность сферы. Проведем из центра A радиусом, равным единице, сферу и, назвав элемент ее поверхности через $d\omega$, положим в третьем интеграле формулы (9)

$$d\sigma' = R^2 d\omega;$$

получим:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int F\,d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\int\int F\,d\omega.$$



Фиг. 13.

Если отнесенное к единице времени количество жидкости, протекшей через внутренние границы пространства Σ, назовем через $4\pi M$, то

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial F}{\partial R}\,d\sigma' = M,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{4\pi}\int\int F\,d\omega\right) = \frac{M}{R^2}.$$

Умножаем на dR и интегрируем:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int F\,d\omega = -\frac{M}{R} + C;$$

здесь постоянное C не зависит от R и может быть определено, приняв $R=\infty$, так что

$$C=\left(\frac{1}{4\pi}\int\int F\,d\omega\right)_{R=\infty} \tag{10}$$

Делаем подстановки найденных интегралов в формулу (9):

$$F=\frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\partial F}{\partial n}\frac{1}{r}\,d\sigma+C. \tag{11}$$

Обнаружим, что входящее сюда постоянное C остается одно и то же, где бы точка A ни находилась, даже если бы она удалилась от внутренних границ жидкой массы на бесконечно большое расстояние.

Предположим, как это представлено на фигуре 13, что ось координат Ox проходит через точку A, и передвинем центр сферы единицы радиуса, на поверхность которой распространена интеграция в формуле (10), из A в бесконечно близкую точку B на расстояние $AB=dx$; при этом передвижении мы будем брать для определения F, стоящего под интегралом в формуле (10), вместо бесконечно большой величины R бесконечно большую величину $R+dx$. Это значит, что сперва мы брали значения F на бесконечно большой сфере EGL, имеющей центр в A, а теперь будем брать их на сфере EHN, имеющей центр в B и прикасающейся к прежней сфере в точке E. Проведя параллельные радиусы AG и BH, найдем на обеих сферах соответственные точки G и H. Полагая $GH=dl$, выразим приращение C при переходе из точки A в точку B через

$$dC=\frac{dx}{4\pi}\int\int\frac{\partial F}{\partial l}\frac{dl}{dx}\,d\omega; \tag{12}$$

здесь производная $\frac{\partial F}{\partial l}$ представляет скорость точки жидкости G по направлению GH и является бесконечно малой величиной вследствие того, что скорости в бесконечности равны нулю. Отношение же $\frac{dl}{dx}$ есть конечная величина,

которая, как легко видеть на фигуре, выражается через

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{2(1+\cos\theta)},$$

где $\theta = \angle GAL$.

Назовем через ε наибольшую абсолютную величину из всех произведений $\frac{\partial F}{\partial l}\frac{dl}{dx}$, которые будут нам встречаться при составлении dC по формуле (12), в предположении, что вышеупомянутый центр передвигается от A до D. Эта величина ε вследствие бесконечной малости всех $\frac{\partial F}{\partial l}$ будет сама бесконечно мала. Для всех приращений dC при передвижении центра по линии AD будем на основании формулы (12) иметь неравенство

$$dC < \varepsilon\, dx,$$

интегрируя обе части которого между точками A и D, найдем:

$$C' - C < AD \cdot \varepsilon, \tag{13}$$

где C' — значение постоянного в точке D. Если AD имеет конечную длину, то из формулы (13) получаем $C' = C$, но это заключение будет иметь место и при бесконечной длине AD, так как вследствие независимости R от AD мы всегда можем вообразить R бесконечно большой величиной настолько большего порядка против AD, что

$$AD \cdot \varepsilon = 0.$$

Прилагая формулу (11) к бесконечно удаленной точке D подставляем в нее

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - 2\frac{b}{a}\cos\alpha + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $a = OD$, b — радиус-вектор KO некоторой точки K, принадлежащей внутренним границам, а

$$\alpha = \angle KOx$$

есть полярный угол этой точки. Разлагая в ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{P_1}{a^2} + \frac{P_2}{a^3} + \cdots$$

и подставляя в формулу (11), найдем, что

$$F = C + \frac{M}{a} + \frac{M_1}{a^2} + \frac{M_2}{a^3} + \dots \qquad (14)$$

Здесь M представляет разделенное на 4π количество жидкости, протекшей через внутренние границы, а M_1, M_2, ..., так же, как и P_1, P_2, ... суть сферические функции первого, второго и т. д. порядков.

Мы видим, что для всех бесконечно удаленных точек функция F представляет одну и ту же постоянную величину C, что и требовалось доказать [1]). Кроме того, из формулы (14) следует, что *при M, не равном нулю, скорости в бесконечности будут бесконечно малые величины порядка a^{-2}, а при $M = 0$ они будут бесконечно малые величины порядка a^{-3}.*

Останавливаясь на случае $M = 0$, проведем из точки O сферу радиуса a и определим число струек n, проходящих через элемент площади $a^2 d\omega$ этой сферы. Если dQ будет отнесенное к единице времени бесконечно малое количество жидкости, протекающее через сечение каждой струйки, то

$$n = a^2 \frac{\partial F}{\partial a} \frac{d\omega}{dQ}.$$

Это число при возрастании a стремится к нулю, так как по формуле (14) при бесконечно большом a

$$n = -\frac{2}{a} \frac{d\omega}{dQ} M_1 = 0.$$

Отсюда следует, что при $M = 0$ с возрастанием радиуса сферы число струек, ее пересекающих, все уменьшается, т. е. эти струйки, загибаясь, возвращаются назад на внутренние границы, и так как при $a = \infty$ ни одна струйка не пересекает сферу, то *все они лежат своими концами на внутренних границах жидкой массы.*

Эта теорема позволяет нам распространить принцип Дирихле на беспредельную жидкую массу: *невихревое тече-*

[1]) Другое доказательство см. Lamb, Hydrodynamics, 1884, §§ 50, 51, 52 [есть русский перевод: Ламб, Гидродинамика, Москва, 1947].

ние беспредельной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, определяется, если на конечных границах известны: на одних $\frac{\partial F}{\partial n}$, *на других* F, *и дано отнесенное к единице времени количество жидкости* $4\pi M$, *протекающей через все конечные границы* [1]). Предположив, что при наложенных условиях существуют два течения с потенциалами скоростей F и F', найдем, что течение с потенциалом скоростей $F'' = F - F'$ имеет на одних поверхностях конечных границ $\frac{\partial F''}{\partial n} = 0$, на других $F'' = 0$, количество протекающей через эти границы жидкости есть нуль; следовательно, все струйки этого течения должны начинаться и кончаться на конечных границах, для которых $F'' = 0$. Но такое течение невозможно, так как, идя по струйке в направлении течения жидкости, мы получим постоянное возрастание функции F''. Таким образом, скорости течения с потенциалом скоростей F'' будут нули, и мы найдем

$$F = F',$$

или

$$F = F' + \text{const}.$$

Так как при $M = 0$ все струйки лежат своими концами на внутренних границах, то получаемое при этом течение жидкости, покоящейся в бесконечности, может быть рассматриваемо как предельный случай движения несжимаемой жидкой массы, заключенной внутри замкнутого со всех сторон неподвижного сосуда при бесконечном возрастании размеров этого сосуда (причем все стенки его удаляются на бесконечное расстояние от конечных границ жидкой массы). Поясним это примером. Пусть конечные границы жидкой массы представляются поверхностью шара, движущегося со скоростью q; тогда на поверхности сферы мы должны иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = q \cos \theta, \tag{15}$$

[1]) Если на всех конечных границах дано $\frac{\partial F}{\partial n}$, то не нужно давать $4\pi M$.

где θ — угол рассматриваемого радиуса сферы с направлением скорости q. Приняв начало декартовых и полярных координат в центре сферы и направив ось Ox, которую примем за полярную, по направлению скорости q, попробуем удовлетворить искомому течению потенциальной функцией

$$F = A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -A\frac{x}{r^3} = -A\frac{\cos\theta}{r^2},$$

где A — постоянное, а r — радиус-вектор. Очевидно, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа и дает в бесконечности скорость, равную нулю; для того же, чтобы удовлетворить на поверхности сферы условию (15), нам следует только положить

$$A = \frac{q}{2}b^3,$$

где b — радиус сферы. Таким образом, рассматриваемое течение несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, будет иметь потенциал скоростей

$$F = -\frac{qb^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}. \tag{16}$$

Если бы мы искали решение задачи о движении нашей сферы внутри жидкой массы, ограниченной снаружи неподвижной поверхностью концентрической сферы радиуса a, то могли бы найти соответствующую потенциальную функцию скоростей, приняв

$$F = -A\frac{x}{r^3} + Bx = -A\frac{\cos\theta}{r^2} + Br\cos\theta$$

и выбрав A и B так, чтобы на внутренней сфере удовлетворялось уравнение (15), а на внешней

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0.$$

Это дает нам

$$2\frac{A}{b^3} + B = q, \quad 2\frac{A}{a^3} + B = 0,$$

откуда следует, что

$$A = \frac{qa^3b^3}{2(a^3 - b^3)}, \quad B = -\frac{qb^3}{a^3 - b^3}.$$

Подставляя эти величины постоянных коэффициентов, находим искомую потенциальную функцию скоростей:

$$F = -\frac{qb^3a^3}{2(a^3-b^3)}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{a^3}\right)\cos\theta. \tag{17}$$

Мы видим, что при возрастании a до бесконечности формула (17) обращается в (16), так что линии токов второго течения по мере возрастания a все ближе и ближе подходят к линиям токов первого. Определим эти линии токов с помощью формулы (13) второй лекции, в которую подставим:

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} = \frac{qb^3a^3}{2(a^3-b^3)}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{2}{a^3}\right)\sin\theta,$$
$$v = \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{qb^3a^3}{a^3-b^3}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right)\cos\theta;$$

найдем:

$$\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{a^3}\right)\sin^2\theta\,dr + 2\left(\frac{r^2}{a^3}-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0.$$

Интеграл этого уравнения будет:

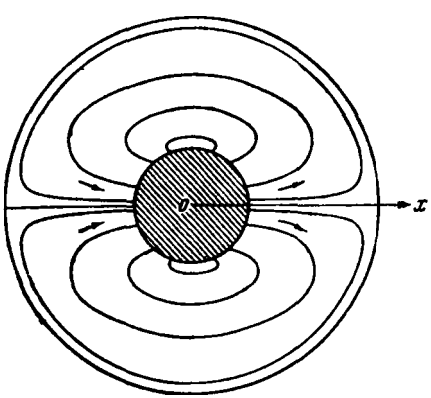
$$\left(\frac{r^2}{a^3}-\frac{1}{r}\right)\sin^2\theta = \text{const}. \tag{18}$$

При const. $= 0$ это уравнение удовлетворяется положениями:

$$\sin\theta = 0$$

или

$$r = a,$$



Фиг. 14.

т. е. линии токов представляют ось Ox и окружность радиуса a. Все остальные линии токов начинаются и кончаются на внутренней сфере, как это изображено на фигуре 14. Точки пересечения Ox с внешней сферой будут здесь критическими точками первого порядка, в которых линии токов пересекаются под прямым углом. При $a = \infty$

формула (18) обращается в

$$\frac{\sin^2\theta}{r} = \text{const.} \tag{19}$$

и дает нам семейство линий токов жидкой массы, покоящейся в бесконечности, вид которых будет схож с представленным на фигуре 14.

ЛЕКЦИЯ IV.

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ.

§ 13. Теорема Бельтрами. Если имеем в пространстве Σ вихревое течение сжимаемой жидкости, то для его определения достаточно знать: во всех точках рассматриваемого пространства Σ величины θ, ω_1, ω_2, ω_3, на одних граничных поверхностях его — нормальные составляющие скорости, на других — тангенциальные, циркуляции скорости по разомкнутым контурам, соединяющим граничные поверхности, на которых даны тангенциальные скорости, и циркуляции скорости по всем главным контурам. Это вытекает из принципа Дирихле. Вообразив два течения, удовлетворяющие всем вышеупомянутым данным, и составив течение, скорости которого суть геометрические разности скоростей этих двух течений, мы получим невихревое течение несжимаемой жидкости, в котором одни граничные поверхности суть поверхности тока, другие — поверхности равного потенциала скоростей, циркуляции же по всем главным контурам суть нули. В таком течении все скорости должны быть равны нулю, и, следовательно, оба воображаемых течения будут одинаковы.

Если мы сумеем по указанным данным определить тангенциальные скорости на тех границах, на которых даны нормальные скорости, и нормальные скорости на тех, на которых даны тангенциальные, то легко найдем скорости жидкости во всем пространстве Σ, подобно тому как с помощью формулы (11) третьей лекции по F и $\frac{\partial F}{\partial n}$ на грани-

цах пространства определяем F для всего пространства. Это делается с помощью теоремы Бельтрами, выводом которой мы теперь займемся.

Возьмем три интеграла:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{u}{r}\,da\,db\,dc, \\ Q &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{v}{r}\,da\,db\,dc, \\ R &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{w}{r}\,da\,db\,dc, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где интеграция распространяется на весь объем пространства Σ, r — расстояние точки этого пространства (a, b, c) от данной точки (x, y, z), а u, v, w — компоненты скорости точки (a, b, c). От составленных таким образом трех функций переменных x, y, z составим три новые функции, подобно тому как составляются двойные компоненты угловых скоростей частиц жидкости по компонентам скоростей точек жидкости:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[w\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\,db\,dc.$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

то по формулам (3) первой лекции

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{r}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{w}{r}\right)\right] da\,db\,dc + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc.$$

Здесь подинтегральная функция в первом интеграле может быть рассматриваема как коэффициент кубического расширения течения с компонентами скоростей

$$0, \quad -\frac{w}{r}, \quad \frac{v}{r};$$

вследствие этого

$$\int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{v}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{w}{r}\right)\right]da\,db\,dc=-\int\int\frac{1}{r}(v\cos\gamma-w\cos\beta)\,d\sigma,$$

где двойная интеграция распространяется на граничные поверхности пространства Σ, а α, β и γ суть углы внутренней нормали элемента $d\sigma$ этих поверхностей с осями координат. Подставляя, найдем, что

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(w\cos\beta-v\cos\gamma)\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc.$$

Полагаем для сокращения письма:

$$\left.\begin{aligned}L&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_1}{r}\,da\,db\,dc,\\M&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_2}{r}\,da\,db\,dc,\\N&=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\omega_3}{r}\,da\,db\,dc,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}L'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(w\cos\beta-v\cos\gamma)\,d\sigma,\\M'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(u\cos\gamma-w\cos\alpha)\,d\sigma,\\N'&=\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(v\cos\alpha-u\cos\beta)\,d\sigma.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Тогда найденная функция и две ей аналогичные будут:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=L+L',$$
$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=M+M',$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=N+N'.$$

От этих трех функций переменных x, y, z составляем тем же способом три новые функции:

$$\frac{\partial(N+N')}{\partial y}-\frac{\partial(M+M')}{\partial z}=-\Delta_2 P+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right).\qquad(5)$$

Функцию P, данную формулой (1), можно рассматривать

как потенциал масс, заполняющих пространство Σ, с плотностью $u : 4\pi$; поэтому на основании теоремы Пуассона

$$-\Delta_2 P = u.$$

Второй член второй части формулы (5) преобразуется на основании уравнений (1) и (2) таким образом:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int\left[u\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)+v\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)+w\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right]da\,db\,dc=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{w}{r}\right)\right]da\,db\,dc+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)da\,db\,dc.$$

Во втором интеграле

$$\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}=0,$$

а в первом — подинтегральная функция может быть рассматриваема как коэффициент кубического расширения течения со скоростями

$$\frac{u}{r},\quad \frac{v}{r},\quad \frac{w}{r},$$

так что

$$\int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{w}{r}\right)\right]da\,db\,dc=$$

$$=-\int\int\frac{1}{r}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Положив для сокращения

$$S'=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{1}{r}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\sigma, \tag{6}$$

$$S=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{\theta}{r}\,da\,db\,dc, \tag{7}$$

найдем на основании сказанного из уравнения (5) формулу для u, которая вместе с двумя аналогичными формулами

для v и w представится в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial(N+N')}{\partial y} - \frac{\partial(M+M')}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(S+S'), \\ v &= \frac{\partial(L+L')}{\partial z} - \frac{\partial(N+N')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(S+S'), \\ w &= \frac{\partial(M+M')}{\partial x} - \frac{\partial(L+L')}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(S+S'). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Если бы точка (x, y, z) лежала вне пространства Σ, то мы получили бы по теореме Лапласа

$$\Delta_2 P = \Delta_2 Q = \Delta_2 R = 0,$$

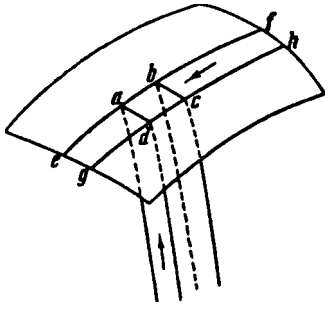
и потому первые части формул (8) были бы нули. Рассматривая вторые части формул (8), замечаем, что они аналогичны силам действия на единицу магнитной массы (мы считаем магнитную массу положительной при южном магнетизме) магнитных масс, имеющих потенциал $S+S'$, и гальванических токов, имеющих детерминанты тока: $L+L'$, $M+M'$, $N+N'$. Условившись называть через V_n и V_s нормальную и тангенциальную скорости жидкости на границах пространства Σ (нормаль n, как всегда, направлена внутрь Σ), получаем из формул (8), (5), (4), (6), (7) теорему Бельтрами [1]).

Скорость точки жидкости (x, y, z) внутри пространства Σ выражается силой, происходящей от действия на единицу магнитной массы, помещенной в этой точке, следующих факторов: 1) *магнитной массы, заполняющей все пространство Σ, с плотностью $\theta : 4\pi$*; 2) *магнитного слоя, покрывающего границы этого пространства, с поверхностной плотностью $V_n : 4\pi$*; 3) *гальванических токов, текущих по всем вихревым нитям рассматриваемого течения, с силой тока, равной отношению напряжения вихревых нитей $\omega\, dq$ к 2π, в сторону вектора ω*; 4) *гальванических токов, текущих на граничных поверхностях по линиям, ортогональным линиям токов, в направлении, по-*

[1]) Beltrami, Dell'idrodinamica razionale, §§ 15, 16, 17. Memorie dell'accademia delle scienze dell'istituto di Bologna, серия III, т. II. Следует сказать, что Бельтрами принадлежит только соединение в одно целое различных теорем, указанных Гельмгольцем, Рохом и Больцманом.

лучаемом от поворота скорости V_s по часовой стрелке на прямой угол около внутренней нормали n, с силой тока $V_s ds : 4\pi$, где ds — расстояние между двумя бесконечно близкими ортогональными линиями.

Сила тока $\omega\, dq : 2\pi$ вдоль всякой вихревой нити постоянна на основании § 10; что же касается силы тока $V_s ds : 4\pi$, то она изменяется при передвижении по поверхностной ленте, заключенной между двумя бесконечно близкими ортогональными линиями, и это изменение происходит так, как будто новое количество электричества приносится на эту ленту или уносится с нее вихревыми струйками [1]). Действительно, пусть (фиг. 15) ef и gh будут две бесконечно близкие ортогональные линии, ограничивающие поверхностную ленту. Вырежем из нее бесконечно малый прямоугольник $abcd$ и построим на нем вихревую нить, идущую внутрь пространства Σ; потом напишем по теореме Стокса, что



Фиг. 15.

$$V_s' ad - V_s bc = 2\omega\, dq,$$

где V_s и V_s' — тангенциальные скорости в точках c и d, а $\omega\, dq$ — напряжение вихревой нити, построенной на контуре $abcd$. Разделив написанное равенство на 4π, найдем, что количество электричества, протекшее через разрез ленты ad, более количества электричества, протекшего через разрез ее bc, на количество электричества, притекшего по вихревой нити, построенной на контуре $abcd$, что и требовалось доказать.

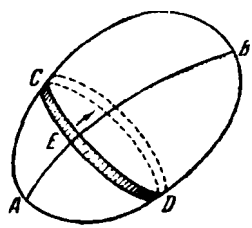
Если $\theta = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, т. е. рассматривается невихревое течение несжимаемой жидкости, то скорости будут выражаться силами, происходящими только от магнитных масс

[1]) Это обстоятельство указано Н. Н. Шиллером, Киевские университетские известия, 1881.

и токов, расположенных на границах пространства. Потенциал магнитных масс будет при этом по формуле (6):

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,d\sigma, \tag{9}$$

где F — потенциал скоростей рассматриваемого невихревого течения. Что же касается поверхностных токов, то все они на основании сказанного выше должны иметь постоянную силу тока и быть замкнутыми. (На односвязной граничной поверхности они будут иметь расположение, указанное в конце § 9.) Действие каждого такого тока, как известно, имеет потенциал сил, который равен потенциалу двойного магнитного слоя, расположенного на поверхности, проходящей через контур слоя[1]). Пусть пространство рассматриваемого течения односвязно, и все линии, идущие по его граничной поверхности в направлении V_s, пересекаются в *точках схода* A и B (фиг. 16), так что ортогональные линии имеют эти точки полюсами. Потенциал тока, идущего по одной из лент CD, ограниченной двумя бесконечно близкими ортогональными линиями, может быть выражен двойным интегралом



Фиг. 16.

$$-\frac{V_s ds}{4\pi}\int\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

распространенным на поверхность CAD. Определяя место каждой из лент CD с помощью отрезка $AE = s$, который она отсекает на одной из линий AB, направленных по V_s, обозначим часть двойного интеграла, относящуюся к какой-

[1]) Поверхностная плотность двойного слоя получается так: проведем через рассматриваемую точку сквозь контур тока прямую, которую будем считать направленной в ту сторону, глядя из которой ток идет по солнцу; эта прямая пересечет двойной слой толщины dn в двух точках, которые, считая по направлению прямой, пусть будут A и B; в A надо взять плотность $\frac{i}{dn}$, а в B плотность $-\frac{i}{dn}$, где i — сила тока.

нибудь ленте CD, через $f(s)\,ds$, так что весь вышенаписанный потенциал представится в виде

$$-\frac{V_s ds}{4\pi}\int f(s)\,ds.$$

Составляем сумму подобных потенциалов, взятых для всех поверхностных токов:

$$S''=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0}\left\{\int_0^{s} f(s)\,ds\right\}V_s ds,$$

где $s_0=AB$. Интегрируем по частям:

$$S''=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0} f(s)\,ds\int_0^{s_0} V_s ds+\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0}\left\{\int_0^{s} V_s ds\right\}f(s)\,ds.$$

Так как на основании формулы (1) третьей лекции

$$\int_0^{s} V_s ds=F,$$

и для внутренней точки $(x,\ y,\ z)$

$$\int_0^{s_0} f(s)\,ds=\int\int\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=4\pi,$$

потому что интеграция распространяется на всю граничную поверхность, то

$$S''=\text{const.}+\frac{1}{4\pi}\int\int F\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma, \qquad (10)$$

где интеграция распространяется на всю граничную поверхность. По теореме Бельтрами мы должны иметь для рассматриваемого течения

$$F=S'+S''+\text{const.},$$

что на основании формул (9) и (10) вполне согласно с формулой (8) третьей лекции.

Если $\theta=\omega_1=\omega_2=\omega_3=0, V_n=0$, то мы будем иметь невихревое течение несжимаемой жидкости, ограниченное поверхностями тока. Такое течение может, как было показан

в § 11, совершаться только в многосвязном пространстве. Скорости всех точек жидкости будут при этом выражаться одними силами действия токов, расположенных на ее границах. Эти токи будут действовать на единицу магнитной массы, помещенную на граничной поверхности, силой, направленной по этой поверхности и равной V. Припомним из теории электромагнитных взаимодействий следующую теорему: если вектор R представляет силу действия магнитного поля на единицу магнитной массы, помещенной в его начальной точке, то сила действия этого поля на элемент тока dc, помещенный в той же точке, выразится геометрически скоростью конца вектора R при его вращении около dc с угловой скоростью idc, где i — сила тока, в сторону часовой стрелки для наблюдателя, глядящего с той стороны, куда идет ток. Так как элемент поверхностного тока будет направлен по элементу dc ортогональных линий и будет иметь силу тока $i = V\,ds : 4\pi$, то на основании вышенаписанной теоремы сила R' действия на него всех поверхностных токов будет равна

$$R' = \frac{1}{4\pi} V^2\, dc\, ds,$$

или, положив $dc\, ds = d\sigma$,

$$R' = \frac{1}{4\pi} V^2\, d\sigma; \tag{11}$$

направление же этой силы будет на основании сказанного в конце теоремы Бельтрами совпадать с внутренней нормалью граничной поверхности. Вообразив, что жидкая масса отвердела, и покрыв ее поверхность токами, пробегающими по деформируемым проводникам в том же направлении и с той же силой тока, как вышеупомянутые фиктивные токи, мы увидим, что все такие токи, взаимодействуя друг на друга, останутся в равновесии.

§ 14. Жидкие массы, соприкасающиеся по поверхностям раздела. Так как скорости, определяемые по теореме Бельтрами для точек, лежащих вне пространства, занятого рассматриваемой массой, равны нулю, то эту теорему удобно

применять зараз к нескольким движущимся жидким массам, соприкасающимся по поверхностям раздела. Рассмотрим здесь два подобных случая.

Предположим, что внутри массы несжимаемой жидкости покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое движение, находится масса несжимаемой жидкости, движущаяся таким вихревым движением, что на поверхности раздела обе массы имеют одинаковые нормальные и тангенциальные скорости. В этом случае рассматриваемая поверхность является только поверхностью раздела компонентов вихря, и так как циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру на этой поверхности для обоих течений одинакова, то эта поверхность будет непременно поверхностью вихря внутреннего течения. Ограничим наружную жидкую массу бесконечно большой сферой и сложим скорости, которые дает для нее теорема Бельтрами, с подобными же выражениями скоростей для внутренней жидкой массы. Мы увидим, что при этом силы, получаемые от магнитных масс и токов, расположенных на поверхности раздела, взаимно уничтожатся (вследствие равенства нормальных и тангенциальных скоростей), силы, происходящие от магнитных масс и токов, расположенных на бесконечно удаленной сфере, будут бесконечно малыми величинами порядка a^{-3}, где a — радиус сферы (по § 12), и у нас останутся только силы, происходящие от токов, текущих по имеющимся вихревым нитям. Эти силы и выразят скорости обеих жидких масс. Мы будем называть жидкую массу с вихревым течением, погруженную в жидкость, имеющую невихревое течение, *вихревой массой*. Понятно, что сказанное нами одинаково приложимо как к одной, так и ко многим вихревым массам, погруженным в беспредельную жидкость, покоящуюся в бесконечности и имеющую невихревое течение. *Скорости этого невихревого течения, равно как и скорости всех вихревых масс, геометрически равны силам, действующим на единицу магнитной массы гальванических токов, пробегающих по всем имеющимся вихревым нитям с силой тока* $\omega : 2\pi$.

Для второго случая вообразим, что внутри массы несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое течение, находится несжимаемая жидкая масса, имеющая тоже невихревое течение, причем на поверхности раздела обеих масс равны только нормальные скорости. Ограничивая беспредельную жидкую массу бесконечно большой сферой, сложим скорости, которые даст для нее теорема Бельтрами, с подобными же скоростями для внутренней жидкой массы.

При этом сложении силы, происходящие от магнитных масс на поверхности раздела, взаимно уничтожаются (вследствие равенства нормальных скоростей), силы, происходящие от магнитных масс и токов на бесконечно удаленной сфере, будут бесконечно малы, и у нас остаются только силы, происходящие от токов, расположенных на поверхности раздела. Эти токи будут иметь компоненты:

$$\left.\begin{aligned} L' &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(w-w')\cos\beta-(v-v')\cos\gamma\right]d\sigma,\\ M &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(u-u')\cos\gamma-(w-w')\cos\alpha\right]d\sigma,\\ N' &= \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{1}{r}\left[(v-v')\cos\alpha-(u-u')\cos\beta\right]d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где u, v, w — скорости внутреннего, u', v', w' — скорости внешнего течения, а α, β, γ — углы нормали к поверхности раздела, взятой внутрь жидкой массы.

Таким образом, *скорости обоих течений жидкости представляются здесь силами, происходящими от токов, идущих по поверхностям раздела перпендикулярно к геометрическим разностям скоростей течений с силами тока*

$$ds\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2}:4\pi,$$

где ds — ширина поверхностной ленты.

Если заменим поверхность раздела бесконечно тонким слоем, внутри которого жидкость имеет вихревое движе-

ние, и предположим, что скорости u, v, w при переходе через этот слой, изменяясь непрерывно, обращаются в u', v', w', то приведем разбираемый здесь случай к вышеисследованному и придем к заключению, что скорости всей жидкой массы выражаются силами действия токов, протекающих по вихревым нитям воображаемой вихревой массы. Такую бесконечно тонкую вихревую массу называют *вихревым слоем*. Направление вихревых нитей вихревого слоя и соответствующие им напряжения вихря могут быть определены из сравнения формул (12) с формулами (3). Если ε будет бесконечно малая толщина вихревого слоя, то компоненты угловых скоростей частиц слоя будут:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(w-w')\cos\beta - (v-v')\cos\gamma}{2\varepsilon}, \\ \omega_2 &= \frac{(u-u')\cos\gamma - (w-w')\cos\alpha}{2\varepsilon}, \\ \omega_3 &= \frac{(v-v')\cos\alpha - (u-u')\cos\beta}{2\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

При бесконечно большой скорости вращательного движения частицы вихревого слоя претерпевают бесконечно большую деформацию, так как коэффициент скошения перпендикуляра к плоскости, прикасающейся к поверхности раздела, бесконечно велик.

Поясним рассматриваемый случай примером. Положим, что жидкая масса, имеющая форму шара радиуса b, движется поступательно со скоростью q внутри беспредельной массы несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности и имеющей невихревое течение. Примем центр шара за полюс полярных координат, полярная ось которых направлена по скорости поступательного движения q. Для внутреннего течения жидкости на поверхности сферы скорости v направлены по меридианам ее и выражаются так:

$$v_s = -q\sin\theta.$$

Мы пишем здесь знак (—), чтобы показать, что v_s напра

влены в сторону, противоположную отсчету полярной дуги θ. Для внешнего течения тангенциальные скорости v'_s на поверхности сферы тоже направлены по ее меридианам и выражаются на основании формулы (16) третьей лекции через

$$v'_s = \frac{1}{b}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{qb\cos\theta}{2}\right) = \frac{q\sin\theta}{2}.$$

Поворачивая первую скорость на прямой угол по часовой стрелке около внутренней нормали сферы, а вторую — около внешней нормали ее, получим гальванические токи, текущие по параллельным кругам сферы с силами тока

$$\frac{3q\sin\theta}{8\pi} b\, d\theta \tag{14}$$

по направлению часовой стрелки для наблюдателя, глядящего с той стороны, в которую движется сфера. Определим потенциал этих токов для внешней и внутренней точек сферы. Проводим через все токи плоскости параллельных кругов и покрываем их магнитными массами, имеющими поверхностную плотность

$$-\frac{3q}{8\pi} b\sin\theta\, d\theta.$$

Такое распределение магнитных масс будет тождественно с объемным распределением масс в бесконечно тонком слое, заключенном между двумя плоскостями параллельных кругов, проходящих через края поверхностной ленты ширины $b\, d\theta$ с объемной плотностью $-\frac{3q}{8\pi}$. Все такие слои будут представлять нам сферу радиуса b, наполненную однородной магнитной массой плотности $-\frac{3q}{8\pi}$.

Чтобы получить двойные магнитные слои, продвинем эту сферу в направлении полярной оси на расстояние dx и изменим ее плотность на $\frac{3q}{8\pi}$. Сумма потенциалов обеих сфер на каждую внешнюю точку, разделенная на dx, будет искомым потенциалом на внешнюю магнитную массу всех

наших токов. Этот потенциал есть:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3q}{8\pi}\cdot\frac{4}{3}\pi b^3\cdot\frac{1}{r}\right)=-\frac{b^3qx}{2r^3}=-\frac{qb^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{15}$$

где положено $x=r\cos\theta$. Это вполне согласно с формулой (16) третьей лекции.

Повторяя такое же рассуждение относительно внутренней точки, мы должны заметить, что при отбрасывании токов, плоскости которых бесконечно близки к рассматриваемой точке, сумма потенциалов на эту точку всех других токов может быть представлена формулой

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3q}{8\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi r^2\right)=-\frac{1}{2}qx, \tag{16}$$

так что изменение потенциала при передвижении единицы магнитной массы на dx будет слагаться из $-\frac{1}{2}q\,dx$ и того приращения, которое получается вследствие того, что рассматриваемая точка проходит сквозь плоскости некоторых из отброшенных токов.

Если $dx=b\sin\theta\,d\theta$, то сумма сил токов для всех токов, через плоскости которых проходит единица магнитной массы при передвижении на dx, будет дана формулой (14), и потому потенциал их должен возрасти [1]) на

$$4\pi\,\frac{3q\sin\theta}{8\pi}b\,d\theta=\frac{3}{2}q\,dx. \tag{17}$$

Складывая оба приращения потенциала (16) и (17) и деля сумму на dx, найдем, что скорость внутренней точки по направлению полярной оси будет q. Скорость же по направлению, перпендикулярному к полярной оси, будет нуль, потому что при передвижении в этом направлении потенциал (16) не изменяется и точка не пересекает плоскостей токов. Таким образом, мы видим, что данное поверхностное распределение токов развивает силы, выражающие не только скорости внешнего, но и скорости внутреннего течения жидкости.

[1]) Известно, что при прохождении через двойной магнитный слой потенциал возрастает на $-4\pi i$, если идем из той стороны, из которой ток кажется [идущим] по солнцу.

ЛЕКЦИЯ V.

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 15. Уравнения гидродинамики в формах Эйлера и Лагранжа. Формулы Бернулли и Лагранжа. Назвав через ρ плотность жидкости, через p — гидростатическое давление и через X, Y, Z — составляющие действующих сил, отнесенные к единице массы, напишем уравнения равновесия жидкости:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Если в этих уравнениях заменим силы действующие силами потерянными и будем под p разуметь гидродинамическое давление, то по началу Даламбера получим уравнения движения жидкой массы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где d представляет дифференциал по времени функции, отнесенной к определенной частице жидкости. Мы будем рассматривать только такие случаи, в которых силы X, Y, Z имеют силовую функцию U, а плотность ρ или постоянна (для несжимаемой жидкости), или есть известная функция p (для газообразных тел, изменяющихся по определенному процессу). Положив при таком предположении, что

$$\int\frac{dp}{\rho} = P, \tag{2}$$

можем написать уравнения (1) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти уравнения вместе с присоединенными к ним условием неизменяемости массы частицы жидкости и граничными условиями служат для решения вопросов о движении жидкости. Их можно представить в форме Эйлера или в форме Лагранжа [1]). В первом случае за неизвестные задачи принимаются компоненты скорости u, v, w и давление p, рассматриваемые как функции координат данной точки пространства и времени t. Полное изменение скорости, отнесенной к данной точке жидкости, будет при этом происходить и от того, что t изменяется, и от того, что место точки изменяется, вследствие чего

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w,$$

где ∂ — изменение по времени, совершающееся в данной точке пространства. Подставив это и подобные выражения в формулы (3), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial(U-P)}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Сюда следует прибавить условие неизменяемости массы частицы жидкости. Назовем бесконечно малый объем частицы жидкости через V и напишем, что

$$\frac{d}{dt}\ln(\rho V) = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \theta = 0,$$

где θ—коэффициент кубического расширения, который определяется по формуле (13) первой лекции, так что

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (*)$$

[1]) Hankel в своем сочинении Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861, указывает, что обе формы уравнений принадлежат Эйлеру; но вследствие того, что за уравнениями (7) установилось название лагранжевых, мы будем их тоже так называть.

Когда жидкость несжимаема, то $d\rho = 0$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

для газообразной же жидкости формулу (*) можно написать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (4) с прибавленными к ним уравнениями (5) или (6) и суть уравнения гидродинамики в форме Эйлера.

Для составления лагранжевой формы уравнений гидродинамики будем рассматривать x, y, z и p как функции начальных координат a, b, c точек жидкости и времени t. Умножаем уравнения (3) на

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a}$$

и складываем. Тогда получится уравнение, которое вместе с двумя аналогичными можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial a}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial b}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Сюда следует прибавить условие неизменяемости массы частицы жидкости за все время движения t. Обозначая через V_0 и ρ_0 начальные объем и плотность частицы и через V и ρ — ее объем и плотность во время t, находим, что

$$V\rho - V_0\rho_0 = (V - V_0)\rho + V_0(\rho - \rho_0) = 0,$$

или, деля на $V_0\rho$,

$$\vartheta + 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 0,$$

где коэффициент кубического расширения ϑ определяется по формуле (23) первой лекции, так что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho}. \tag{8}$$

Что касается граничных условий, которые должны быть приняты во внимание при той и другой форме уравнений гидродинамики, то они требуют, чтобы на свободной поверхности жидкой массы p имело данную величину, а на поверхностях стенок надо, чтобы нормальные составляющие скоростей прилегающих точек жидкости равнялись нулю, если стенка неподвижна, и равнялись бы нормальным скоростям точек самой стенки, если она движется.

Ко всему этому следует еще прибавить, что гидродинамическое давление p во всех точках жидкой массы должно быть положительно и должно изменяться непрерывно при переходе от одной точки к другой.

Уравнения (4) могут быть еще представлены в иной форме, весьма удобной для многих выводов, с помощью компонентов вихря ω_1, ω_2 ω_3. По первому из уравнений (4)

$$\frac{\partial}{\partial x}(U - P) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)w - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)v$$

Обозначая здесь через V скорость точки жидкости и обращая внимание на формулы (3) первой лекции, преобразуем это уравнение вместе с двумя аналогичными в такие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если рассматриваемое движение жидкости есть установившееся, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Умножив в этом предположении формулы (9) соответственно на дифференциалы dx, dy, dz, находящиеся в отношении

$$dx : dy : dz = u : v : w,$$

и сложив полученные уравнения, найдем, что

$$d\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

где d обозначает изменение при передвижении по линии тока (траектории). Интегрируем:

$$U - P - \frac{V^2}{2} = \text{const}. \tag{10}$$

Этот интеграл, в котором постоянное зависит от взятой линии тока, и есть формула Бернулли.

Аналогичная формула Лагранжа получается, когда течение жидкости в начальный момент времени было невихревое, и силы имеют силовую функцию; тогда, как будет показано ниже, течение все время будет невихревое, т. е. во все время движения

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Подставляем это в формулы (9):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что многочлен, стоящий в скобках, постоянен для всех точек жидкости:

$$U - P - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial F}{\partial t} = \text{const}., \tag{11}$$

где постоянное есть функция времени.

§ 16. Теорема Томсона. Принцип сохранения вихрей. Выделим мысленно ряд точек жидкости, лежащих в начальный момент времени на некоторой замкнутой кривой, уравнение которой с помощью параметра σ выражается в виде [1]):

$$a = \varphi(\sigma), \quad b = \varphi_1(\sigma), \quad c = \varphi_2(\sigma).$$

Относя уравнения (7) к рассматриваемым точкам жидкости, умножаем их соответственно на

$$\frac{da}{d\sigma}, \quad \frac{db}{d\sigma}, \quad \frac{dc}{d\sigma}$$

и складываем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\sigma} = \frac{d(U-P)}{d\sigma},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\sigma}\right) - \\ - \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{d(U-P)}{d\sigma}.$$

Назовем через ds элемент дуги замкнутого контура, на котором будут лежать рассматриваемые точки жидкости во время t, и через θ — угол между ds и скоростью V; тогда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = V^2,$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\sigma} = \frac{V\,ds\cos\theta}{d\sigma}.$$

Подставляем в вышенаписанное уравнение и преобразуем его в

$$\frac{d}{dt}(V\,ds\cos\theta) = d\left(U - P + \frac{V^2}{2}\right).$$

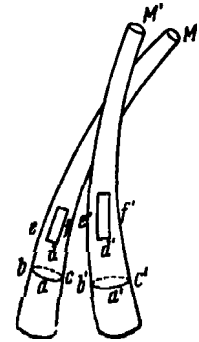
Берем от обеих частей этого равенства интеграл, распространенный на изменение σ вдоль всего замкнутого контура:

$$\frac{d}{dt}\left(\int V\,ds\cos\theta\right) = 0. \tag{12}$$

[1]) За такой параметр удобно принять длину кривой, считаемую от некоторой ее точки.

Это равенство дает нам теорему Томсона [1]): *если силы, под действием которых движется жидкость, имеют силовую функцию, то циркуляция скорости по замкнутому контуру, проводимому постоянно через одни и те же точки жидкости, не изменяется со временем.*

Пользуясь теоремой Томсона, легко обнаружить знаменитый принцип Гельмгольца сохранения вихрей. Вообразим (фиг. 17) в начальный момент времени некоторую вихревую нить M и проведем на ее поверхности два бесконечно малых замкнутых контура: контур def, обращаемый в точку, не сходя с поверхности нити, и контур abc, охватывающий нить. По прошествии времени t жидкость, заполняющая трубку M, будет заполнять некоторую бесконечно тонкую трубку M'; точки же жидкости, лежащие на контурах def и abc, будут лежать на контурах $d'e'f'$ и $a'b'c'$. По теореме Томсона циркуляции скорости по этим новым контурам будут те же, какие были по старым. Так как контур def лежит на поверхности вихря, то $(def)=0$, а следовательно, и $(d'e'f')=0$, и так как это рассуждение применимо ко всякому бесконечно малому контуру рассматриваемого вида, то заключаем, что поверхность трубки M' есть поверхность вихря, т. е. бесконечно тонкая масса жидкости, заполняющая эту трубку, есть вихревая нить. Далее (abc) есть двойное напряжение вихревой нити M, а $(a'b'c')$ есть двойное напряжение вихревой нити M'; так как $(abc)=(a'b'c')$, то напряжения обоих вихрей одинаковы.



Фиг. 17.

Таким образом, *при движении жидкости под действием сил, имеющих силовую функцию, часть жидкой массы, образующая вихревую нить, движется, оставаясь вихревой нитью с постоянным напряжением вихря.* Этот замечательный

[1]) Thomson, On vortex motion, Philos. Trans. R. S., Edinburg, стр. 274, 1869.

принцип был установлен Гельмгольцем [1]), которому принадлежит введение в гидродинамику учения о вихревых нитях, но три интеграла уравнений (7), из которых этот принцип прямо вытекает, были даны много раньше Коши [2]).

Если бы в начальный момент времени течение жидкости было невихревое, то циркуляции скорости по всем замкнутым контурам, обращаемым в точки, были бы равны нулю. По теореме Томсона при существовании силовой функции это свойство циркуляций останется во все время движения, т. е. *во все время движения жидкость будет иметь невихревое течение.* Эта теорема, являющаяся частным случаем принципа сохранения вихрей, была доказана в первый раз Лагранжем [3]). Пользуясь теоремой Томсона, сделаем здесь еще одно интересное заключение о движении несжимаемой жидкости, движущейся под действием сил, имеющих однозначную в рассматриваемом пространстве силовую функцию, внутри замкнутого многосвязного сосуда. Предположив, что начальное течение жидкости есть невихревое, мы должны будем по § 11 допустить, что циркуляции скорости по всем замкнутым контурам, обращаемым в точки, суть нули, а некоторые из циркуляций по главным контурам имеют конечные величины. Отсюда по теореме Томсона следует, что во все время движения жидкость будет иметь внутри сосуда невихревое течение с теми же главными циркуляциями. Но так как (§ 11) главные циркуляции вполне определяют рассматриваемое течение, то *оно все время будет оставаться неизменным, каковы бы ни были действующие силы.*

§ 17. Об определенности уравнений гидродинамики. Рассматривая уравнения движения газообразного тела, для которого дана связь между p и ρ, мы замечаем, что здесь

[1]) Helmholtz, Ueber Integrale der hydrodinamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, § 2, Journal von Borchardt т. 55, 1858.

[2]) Cauchy, Sur la théorie des ondes, ч. 2, § 4, Savants étrangers, 1815.

[3]) Lagrange, Mécanique analytique, т. II, отдел X, § 16.

все искомые величины определяются по прошествии элемента времени dt, если они были известны в начале этого времени. Действительно, если в некоторый момент времени t мы знаем u, v, w и ρ, то, определив по ρ давление p и функцию P (формула (2)), найдем из уравнений (4) и (6) du, dv, dw, dp, т. е. будем знать u, v, w, ρ для момента времени $t+dt$. Это показывает, что, задавшись начальными значениями u, v, w, ρ и переходя затем последовательно от одного момента к другому, бесконечно близкому, мы определим u, v, w, ρ для всего времени движения. Разумеется, такое определение невыполнимо практически, но сделанное рассуждение показывает, что данные уравнения гидродинамики вполне достаточны для решения задачи.

Рассмотрение с этой точки зрения задачи о движении несжимаемой жидкости представляет бо́льшие трудности, так как в этом случае плотность ρ постоянна и не может служить для определения гидродинамического давления. Здесь нам дают только величины u, v, w в начальный момент времени для всех точек жидкой массы и величину $P=\frac{p}{\rho}$ во все время движения для всех точек свободных поверхностей ее; но можно показать, что и этих данных вполне достаточно для определения u, v, w во всякое время. Пусть во время t нам известны u, v, w. Относя к этому времени уравнения (4), берем от обеих частей их соответственно производные по x, y, z и складываем все полученные уравнения, обратив внимание на уравнение (5):

$$\Delta_2(U-P)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

где Δ_2 — знак второго дифференциального параметра. Пользуясь знаком первого дифференциального параметра, т. е. полагая

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=(\Delta u)^2 \text{ и т. д.},$$

и обращая внимание на формулы компонентов угловой скорости ω вращения частицы жидкости, можем найденное

уравнение написать еще так:

$$\Delta_2 (U - P) = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 - 4\omega^2. \qquad (13)$$

Эта величина известна нам во всех точках жидкой массы; на всех же свободных поверхностях ее мы знаем самую функцию $U - P$. Покажем, что на всех неподвижных стенках мы можем определить нормальную производную этой функции. Назовем через α, β, γ углы внутренней нормали n неподвижной стенки с осями координат и, умножив уравнения (3) соответственно на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, сложим их:

$$\frac{\partial (U - P)}{\partial n} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma = \frac{V^2}{\rho}\cos\theta,$$

где V — скорость точки жидкости, прилегающей к стенке, ρ — радиус кривизны траектории этой точки, а θ — угол между ρ и n. Так как по теореме Менье между ρ и радиусом кривизны r нормального сечения поверхности стенки, проведенного через направление V, имеется связь

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{r},$$

то [1])

$$\frac{\partial (U - P)}{\partial n} = \frac{V^2}{r}. \qquad (14)$$

По принципу Дирихле при указанных данных может существовать внутри рассматриваемого пространства только одна, совершенно определенная функция $U - P$, которая вместе со своими производными конечна и непрерывна в рассматриваемом пространстве. Действительно, если бы существовали две такие функции, то, составляя их разность, мы

[1]) Если бы рассматриваемая твердая стенка была в движении, то, назвав через V скорость относительного движения точки жидкости по стенке, через Ω — проекцию угловой скорости вращения стенки на ее касательную плоскость, через k — нормальную составляющую полного ускорения самой стенки и через φ — угол между V и Ω, считаемый по часовой стрелке от V к Ω около нормали n, мы нашли бы

$$\frac{\partial}{\partial n}(U - P) = \frac{V^2}{r} - 2V\Omega\sin\varphi + k.$$

нашли бы функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, которая на некоторых из граничных поверхностей равняется нулю, а на других имеет нормальную производную, равную нулю; такая функция по § 11 везде внутри рассматриваемого пространства равна нулю.

Когда функция $U - P$ будет определена, то из уравнений (4) найдем ∂u, ∂v, ∂w и, следовательно, будем знать u, v, w для времени $t + dt$.

Это показывает, что, задавшись величинами u, v, w в начальный момент времени и дав значение P на свободных поверхностях во всякое время, мы можем, переходя от одного момента времени к другому, бесконечно близкому, определить u, v, w для всякого времени [1]). Таким образом, уравнения (4) и (5) вместе с поверхностными условиями и начальными значениями u, v, w вполне достаточны для определения движения несжимаемой жидкой массы [2]).

Предполагая, что функция U вместе со своими производными конечна и непрерывна внутри пространства, занимаемого несжимаемой жидкостью, и однозначна в нем (т. е. циркуляция силы по всякому замкнутому контуру в этом пространстве равна нулю), замечаем из сказанного выше, что для определения движения несжимаемой жидкости нам нужно знать только величину U на свободных поверхностях ее. Это приводит нас к весьма важному заключению, на которое, как мне кажется, не было указано с достаточной

---

[1]) В. В. Преображенский предложил воспользоваться этим соображением для того, чтобы выразить u, v, w и P в виде бесконечных строк. Отчеты Казанского съезда, 1873.

[2]) Основания для суждения об определенности уравнений гидродинамики при малых скоростях даны в заметке Коши к его сочинению Sur la théorie des ondes, заметка XX, Savants étrangers, 1815. Впоследствии Липшиц и Д. К. Бобылев показали, как определить давление при конечных скоростях и при существовании трения: Lipschiz, Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne, Annali di Matematica pura ed applicata, серия II, т. VI; Бобылев, Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik, Mathematische Annalen von Neumann, т. VI, 1873.

определенностью: *силовая функция сил, действующих на частицы движущейся несжимаемой жидкости, оказывает влияние на движение этой жидкости только своим значением на ее свободных поверхностях.* Если нет свободных поверхностей, то силы, действующие на частицы жидкой массы, не оказывают никакого влияния на их движения. Если бы имелась только одна свободная поверхность, находящаяся под постоянным внешним давлением, и нам удалось бы найти движение несжимаемой жидкости, удовлетворяющее ее кинематическим условиям, при котором полные ускорения имеют потенциальную функцию (циркуляция полного ускорения по всякому замкнутому контуру равна нулю), то оставалось бы только посмотреть, будет ли для всех точек свободной поверхности проекция полного ускорения на касательную плоскость геометрически равна проекции на эту плоскость действующей силы. Если бы и это имело место, то найденное движение жидкости было бы ее истинным движением.

Можно сказать, таким образом, что силы движут несжимаемую жидкую массу, только действуя на ее свободную поверхность. Но все эти заключения справедливы в предположении, что можно во всякой точке жидкой массы дать значение функции U, которое будет непрерывно изменяться при переходе от одной точки к другой. Если бы циркуляция действующей силы по некоторым замкнутым контурам не равнялась нулю, т. е. мы могли бы задать значения функции U для каждой точки пространства только так, что при переходе через некоторую поверхность они бы изменялись скачком, то для такой силовой функции наши заключения были бы несправедливы. Поясним это примером.

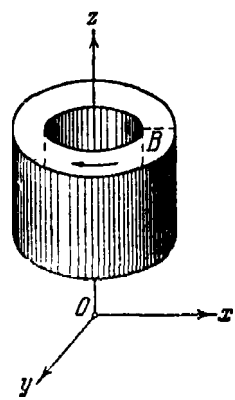
Пусть (фиг. 18) несжимаемая жидкая масса заключена между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров. Направим ось Oz прямоугольных осей координат по оси цилиндров и предположим, что силовая функ-

ция U выражается формулой

$$U = k \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = k\varphi, \tag{15}$$

где φ — угол, образуемый с осью Ox радиусом-вектором проекции рассматриваемой точки на плоскость Oxy. Если бы в рассматриваемом сосуде существовала перегородка B, то в нем жидкая масса могла бы находиться в равновесии. При этом гидростатическое давление было бы

$$p = k\rho\varphi + \text{const.}$$



Фиг. 18.

и отличалось бы с двух сторон перегородки на $2\pi k\rho$. Отняв перегородку B, мы получили бы движение жидкости, несмотря на то, что она заключена в замкнутом сосуде. Определим это движение, заметив, что оно будет совершаться по кругам около оси Oz со скоростями V, зависящими только от r и t. Положив в формулах (9) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, умножаем первую формулу на $\cos\varphi$, вторую на $\sin\varphi$ и складываем; потом умножаем первую на $-\sin\varphi$, вторую на $\cos\varphi$ и опять складываем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0,$$

то из первого уравнения получаем:

$$P = -\frac{V^2}{2} + \text{const.}, \tag{16}$$

а из второго по формуле (15) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{r}$$

или

$$V = \frac{kt}{r}. \tag{17}$$

Таким образом, рассматриваемые силы будут двигать жидкую массу с беспредельно возрастающими скоростями.

ЛЕКЦИЯ VI.

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ.

§ 18. Признак установившегося движения. Положим, что нам дано установившееся течение жидкости под действием сил, имеющих силовую функцию. Вообразив поверхность тока, проходящую через какую-нибудь линию вихрей, придем к заключению, что эта поверхность будет описана точками жидкости, лежащими на этой линии, и так как по теореме Гельмгольца эти точки будут все время движения оставаться на линии вихрей, то построенная нами поверхность тока должна быть также и поверхностью вихрей. Отсюда вытекает первый признак установившегося движения: *одно из семейств линий тока должно быть семейством поверхностей вихря.* Рассматривая одну из поверхностей такого семейства, заметим, что по теореме Бернулли трехчлен

$$\lambda = U - P - \frac{V^2}{2} \tag{1}$$

не изменяет своей величины, когда мы перемещаемся вдоль линий тока этой поверхности; но, с другой стороны, этот трехчлен не изменяется также, когда мы перемещаемся по поверхности вдоль линий вихря, так как, умножая уравнения (9) пятой лекции соответственно на dx, dy, dz в предположении

$$dx : dy : dz = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3,$$

находим для установившегося течения:

$$d\left(U - P - \frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

где d — изменение по линии вихрей.

Если функция λ не изменяется как при передвижении по линиям тока рассматриваемой поверхности, так и по имеющимся на ней линиям вихря, то она остается на ней постоянной. Таким образом, уравнения рассматриваемого семейства поверхностей представляются формулой (1), где λ — параметр семейства. Пользуясь функцией λ, напишем уравнения (9) пятой лекции в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial x} &= 2(\omega_2 w - \omega_3 v), \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} &= 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} &= 2(\omega_1 v - \omega_2 u). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Возводим в квадрат и складываем:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 =$$
$$= 4\left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w)^2\right],$$

или

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = 2\omega V \sin\theta, \qquad (3)$$

где векторы ω и V имеют значения, указанные в пятой лекции, θ — угол между ними, а dn — элемент нормали, заключенный между двумя бесконечно близкими поверхностями семейства (1).

Формула (3) дает нам второй признак установившегося движения: *объем бесконечно тонкого параллелепипеда, построенного на V, ω и dn, постоянен на каждой из поверхностей семейства* (1)*).

При этом, если жидкость несжимаема, то не зная наперед P, мы находим семейство (1) по первому признаку

*) Эти признаки даны в сочинении H. Lamb, Hydrodynamics, § 145.

и смотрим, удовлетворён ли на этом семействе второй признак. Если же имеем жидкость, сжимаемую по известному процессу, то P вполне определяется по ρ, так что, зная ρ, мы получаем по формуле (1) семейство искомых поверхностей и должны посмотреть, удовлетворяются ли на этом семействе признаки первый и второй. Докажем, что указанные признаки являются достаточными условиями установившегося движения (вместе с граничными условиями). Предполагая, что жидкость сжимаема по известному процессу найдем по первому признаку:

$$\frac{2(\omega_2 w - \omega_3 v)}{\frac{\partial\lambda}{\partial x}} = \frac{2(\omega_3 u - \omega_1 w)}{\frac{\partial\lambda}{\partial y}} = \frac{2(\omega_1 v - \omega_2 u)}{\frac{\partial\lambda}{\partial z}};$$

по второму признаку знаменатель отношения этой пропорции, который может быть представлен в виде

$$\frac{2\omega V \sin\theta}{\frac{\partial\lambda}{\partial n}},$$

есть единица. Вследствие этого будут удовлетворены уравнения (2), которые по сравнении с уравнениями (9) пятой лекции приводят нас к заключению, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Переходим к несжимаемой жидкости. Допустив, что уравнение семейства поверхностей токов, совпадающих с поверхностями вихрей, есть

$$f(x, y, z) = \text{const.},$$

напишем, что

$$\frac{2(\omega_2 w - \omega_3 v)}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{2(\omega_3 u - \omega_1 w)}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{2(\omega_1 v - \omega_2 u)}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{2\omega V \sin\theta}{\frac{\partial f}{\partial n}}.$$

По второму признаку последнее отношение должно быть некоторой функцией от f; представим ее в виде $\varphi'(f) = \frac{d}{df}\varphi(f)$ и напишем на основании уравнений (9) пятой лекции, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda - \varphi), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda - \varphi), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda - \varphi).$$

Взяв от этих уравнений соответственно частные производные по x, y, z и сложив их, найдём под условием несжимаемости жидкости:

$$\Delta_2(\lambda - \varphi) = 0.$$

Если границы рассматриваемой жидкой массы суть неподвижные стенки, то, называя через α, β, γ углы с осями координат нормали к поверхности стенок, умножим наши уравнения на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и сложим:

$$\frac{\partial(\lambda - \varphi)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial t}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) = 0,$$

где dn — элемент нормали к поверхности стенок. Так как на границах жидкой массы функция $\lambda - \varphi$ имеет нормальную производную, равную нулю, а везде внутри жидкой массы удовлетворяет уравнению Лапласа, то

$$\lambda = \varphi + \text{const.};$$

следовательно, везде внутри жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Подобное же доказательство распространяется и на случай, когда данное течение есть течение жидкости, покоящейся в бесконечности.

Укажем теперь на некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, при которых изложенные признаки удовлетворяются. Если несжимаемая жидкость движется без вращения частиц, то всякая поверхность тока может быть принята за поверхность вихрей, и объём вышеупомянутого параллелепипеда равен нулю, посему такое течение есть установившееся. Если жидкость движется параллельно плоскости Oxy так, что u и v не зависят от z, то первый признак, очевидно, удовлетворяется, ибо цилиндрические поверхности тока с образующей, параллельной оси Oz, суть поверхности вихрей. Для удовлетворения второго признака необходимо, чтобы на всякой линии тока ω_3 было постоянно. Действительно, мы имеем $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $Vdp = \text{const.}$ по условию

несжимаемости; следовательно, остается удовлетворить условию $\omega_3 = \text{const}$.

Если нам не даны u и v, а даны только линии тока на плоскости Oxy, то легко узнать, соответствует ли это семейство линий установившемуся течению, и если оно соответствует, то определить это течение. Пусть

$$f(\psi) = \text{const}.$$

будет заданное семейство линий тока, где ψ — функция, по которой u и v выражаются формулами (7) второй лекции. Составляя по этим формулам ω_3, найдем:

$$\omega_3 = -\frac{1}{2}\Delta_2\psi. \tag{4}$$

Если по заданным линиям тока существует установившееся движение, то $\Delta_2\psi$ должно быть функцией от f. Составим теперь

$$\Delta_2 f = f'\Delta_2\psi + f''\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = f'\Delta_2\psi + \frac{f''}{f'^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right].$$

Мы видим, что в случае существования установившегося течения по заданным линиям тока должна иметься такая функция $\mu(f)$, при которой

$$\Delta_2 f - \mu(\Delta f)^2$$

есть функция одного f. Если подобная функция μ существует, то данное семейство линий соответствует установившемуся течению, которое определяется из уравнения

$$\frac{f''}{f'^2} = \mu. \tag{5}$$

Как последний пример установившегося движения несжимаемой жидкости укажем движение, которое может быть названо *винтовым*. Это такое движение, при котором линии вихрей совпадают с линиями тока. В этом случае любое семейство поверхностей тока является поверхностями вихря, и так как $\theta = 0$, то вторая часть формулы (3) обращается в нуль. Так как для винтового установившегося движения вторые части формул (9) пятой лекции суть нули то функ-

ция λ, данная формулой (1), будет для такого движения постоянна во всей жидкой массе. На основании сказанного в конце § 10 заключаем, что траектории винтового движения не имеют ортогональных поверхностей [1]).

§ 19. Истечение жидкости из сосудов. Теоретические исследования об истечении жидкости из сосудов заключаются главным образом в работах Сен-Венана [2]), Буссинеска [3]) и в методе Кирхгофа [4]) для определения вида струи вытекающей жидкости. Все эти авторы рассматривают установившееся невихревое течение несжимаемой жидкости и определяют соответствующую ему потенциальную функцию скоростей.

Сен-Венан разлагает эту функцию в тригонометрический ряд, считая заранее известными нормальные скорости жидкости на площади дна и на некотором горизонтальном поршне, прикрывающем сосуд сверху. Рассмотрим здесь только самую простую из задач, решенных Сен-Венаном. Вообразим сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, на середине дна которого сделано поперечное прямоугольное отверстие, идущее от одного края дна до другого. Пусть высота жидкости в сосуде будет h, длина сосуда $2a$, измерение отверстия в направлении длины сосуда $2b$. Возьмем начало прямоугольных осей координат в центре отверстия и направим ось Oy по вертикальной линии вверх, ось Ox — по направлению длины сосуда, а ось Oz — по направлению его ширины.

Приняв, что скорость поршня есть q, а нормальная скорость жидкости на площади отверстия выражается неко-

---

[1]) Подробно о винтовом движении жидкости см. в сочинении И. С. Громеки, Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости, Казань, 1881.

[2]) Saint-Venant, Comptes rendus, т. LXVII, 1868, стр. 131, 203, 278.

[3]) Boussinesq, Comptes rendus, т. LXX, 1870, стр. 33, 177.

[4]) Kirchhoff, Crelles Journal, т. 70, 1869, стр. 289. Полнее о том же см. его Vorlesungen über Mathematische Physik, лекция 22.

торой симметрической функцией $f(x)$, мы придем к заключению, что потенциальная функция φ будет зависеть только от x и y, причем на оси Oy скорости будут нули. Таким образом, нам придется определять функцию φ по следующим условиям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{везде внутри жидкости;}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-q \qquad \text{при } y=h;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \text{при } a>x>b, \quad y=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-f(x) \qquad \text{при } b>x>0, \quad y=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=a.$$

Мы удовлетворим первому из этих условий, положив

$$\varphi=-qy+\sum Ae^{nx+my},$$

где

$$n^2+m^2=0$$

или

$$n=\pm im.$$

Подставляя и приводя к тригонометрическому виду, найдем:

$$\varphi=-qy+\sum e^{my}(B\cos mx+B'\sin mx).$$

Чтобы удовлетворить пятому условию, надо положить все $B'=0$, а чтобы удовлетворить второму, следует принять коэффициенты B при положительном и отрицательном m находящимися в отношении

$$e^{-mh}:e^{mh},$$

вследствие чего получаем:

$$\varphi=-qy+\sum C(e^{m(h-y)}+e^{-m(h-y)})\cos mx.$$

Наконец, для удовлетворения шестого условия надо принять

$$m = \frac{\pi k}{a},$$

где k — целое число. Таким образом,

$$\varphi = -qy + \sum C_k \left(e^{\frac{\pi k (h-y)}{a}} + e^{-\frac{\pi k (h-y)}{a}} \right) \cos \frac{\pi k x}{a}. \qquad (6)$$

Остается теперь определить коэффициенты C на основании третьего и четвертого условий, которые дают нам

$$-\sum C_k \frac{\pi k}{a} \left(e^{\frac{\pi k h}{a}} - e^{-\frac{\pi k h}{a}} \right) \cos \frac{\pi k x}{a} = F(x), \qquad (7)$$

где для $b > x > 0$

$$F(x) = q - f(x),$$

а для $a > x > b$

$$F(x) = q.$$

Умножая формулу (7) на $\cos \frac{\pi k x}{a} dx$ и взяв от обеих ее частей интеграл в пределах от 0 до a, находим для определения C_k формулу:

$$C_k \frac{\pi k}{2} \left(e^{\frac{\pi k h}{a}} - e^{-\frac{\pi k h}{a}} \right) = \int_0^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{a} dx. \qquad (8)$$

Определяя отсюда C_k и подставляя в формулу (6) находим искомую потенциальную функцию скоростей:

$$\varphi = -qy + \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{k} \int_0^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{a} dx \, \frac{e^{\frac{\pi k}{a}(h-y)} + e^{-\frac{\pi k}{a}(h-y)}}{e^{\frac{\pi k h}{a}} - e^{-\frac{\pi k h}{a}}} \cos \frac{\pi k x}{a}. \qquad (9)$$

Если умножим формулу (7) на dx и возьмем от обеих ее частей интегралы от 0 до a, то получим связь между q и $f(x)$:

$$0 = qa - \int_0^b f(x) dx.$$

Эта связь есть прямое следствие условия несжимаемости жидкости. Для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей этой связи, найдем по формуле (9) скорость во всякой точке сосуда. Сен-Венан останавливается на предположении о постоянстве $f(x)$, но это последнее предположение не имеет места при истечении жидкости.

Исследования Буссинеска тоже опираются на предположение, что нормальные скорости жидкости на площади отверстия сосуда известны. Он предполагает, что размеры сосуда весьма велики сравнительно с размерами отверстия, и сводит задачу к отысканию невихревого течения несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности. Это течение будет ограничено бесконечным горизонтальным дном сосуда, на котором расположим на конечном расстоянии друг от друга несколько отверстий.

Скорости жидкости в бесконечном расстоянии от отверстий должны быть равны нулю, на плоскости дна нормальные составляющие скоростей должны быть нули, а на площади отверстий они должны равняться некоторым данным величинам $-v_n$. Покажем, что потенциальная функция скоростей искомого течения выражается потенциалом масс, покрывающих площади всех отверстий с плотностью

$$\gamma = \frac{v_n}{2\pi}.$$

Действительно, если притягиваемая точка единицы массы бесконечно удалена от площадей отверстий, то сила притяжения на нее взятых масс есть нуль; если она находится на плоскости дна, то сила притяжения направлена по дну и не имеет нормальной составляющей; если же она находится на площади одного из отверстий, то по известной теореме о притяжении бесконечно тонкого слоя нормальная сила притяжения будет

$$-2\pi\gamma = -v_n.$$

Известно, что при приближении притягиваемой точки к краю бесконечно тонкой пластинки сила притяжения

устремляется к бесконечности, если плотность масс, покрывающих пластинку, на ее краях не равна нулю; поэтому для того чтобы течение жидкости имело везде конечные скорости, мы должны будем принять v_n на краях всех отверстий равной нулю.

Рассмотрим по способу Буссинеска решенную выше задачу, считая в ней a, h и ширину сосуда весьма большими сравнительно с b. Сохраняя принятое положение осей и указанное значение $f(x)$, найдем:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} f(\xi)\, d\xi \int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2+(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}, \tag{10}$$

где $2c$ есть весьма большая ширина сосуда. Положим в последнем интеграле

$$\zeta - z = \zeta', \quad y^2+(x-\xi)^2 = m^2$$

и напишем вследствие большого значения c, что

$$\int_{-c}^{+c} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2+(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}} = 2\int_0^c \frac{d\zeta'}{\sqrt{m^2+\zeta'^2}} =$$

$$= 2\ln 2c - \ln[y^2+(x-\xi)^2].$$

Подставляем этот результат, отбросив в нем постоянную величину, в формулу (10):

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{+b} f(\xi)\ln[y^2+(x-\xi)^2]\, d\xi. \tag{11}$$

Функция $f(\xi)$ есть функция от ξ^2 и так как она должна обращаться в нуль на краях отверстия, то она должна иметь множителем $(b^2-\xi^2)$. Кроме того, Буссинеск предполагает, что скорость жидкости в центре отверстия есть нуль, и пробует удовлетворить наблюдениям посредством положения

$$f(\xi) = k\xi^2(b^2-\xi^2). \tag{12}$$

Тогда

$$\varphi = -\frac{k}{2\pi}\int_{-b}^{+b} \xi^2(b^2-\xi^2)\ln[y^2+(x-\xi)^2]\, d\xi. \tag{13}$$

Входящее сюда постоянное k определяется по величине скорости на краю отверстия, т. е. при $y=0$, $x=b$. Так как эта скорость может быть определена по формуле Бернулли (мы полагаем, что жидкость в сосуде ограничена сверху свободной поверхностью), то

$$\sqrt{2gh} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{k}{\pi}\int_{-b}^{+b} \xi^2 (b+\xi)\, d\xi = \frac{2kb^4}{3\pi},$$

откуда

$$k = \frac{3\pi\sqrt{2gh}}{2b^4}.$$

Зная k, легко можем определить по формуле (12) секундный объем Q жидкости, протекающей через единицу ширины отверстия:

$$Q = 2k\int_0^b \xi^2 (b^2-\xi^2)\, d\xi = \frac{4kb^5}{15},$$

или, подставляя k,

$$Q = \frac{\pi}{5}\, 2b\sqrt{2gh} = 0{,}62832 \cdot 2b\sqrt{2gh}. \qquad (14)$$

До сих пор мы рассматривали нормальные скорости жидкости на площади отверстия как данные задачи. Перейдем теперь к изложению метода Кирхгофа, который позволяет зараз отыскивать все течение жидкой массы, включая в него и струю жидкости. Основная мысль этого метода заключается в рассмотрении величин, характеризующих искомое течение, как функций параметров φ и ψ, значение которых указано в § 8, т. е. φ есть потенциальная функция скоростей, а ψ — количество протекающей жидкости, отсчитываемое от какой-нибудь линии тока. Напишем по формуле (11) второй лекции, что

$$F(x+iy) = \varphi + i\psi, \qquad (15)$$

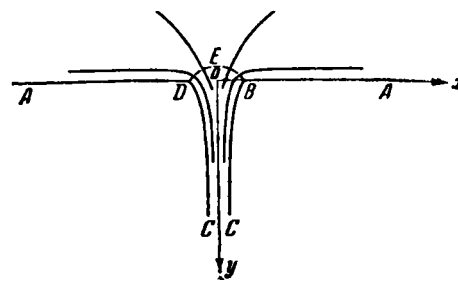
и возьмем от обеих частей производную по x:

$$F'(x+iy) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

или по формуле (10) второй лекции:

$$F'(x+iy)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{16}$$

Расположим оси координат, как представлено на фигуре 19, и предположим, что струя вытекает из весьма большого сосуда, где она находилась под напором, в пустоту, где на нее не действуют никакие силы. Назовем через V скорость внутри жидкости, через w — величину этой скорости на поверхности струи, которая по теореме Бернулли должна быть постоянна, через θ — угол V с осью Ox. Найдем:



Фиг. 19.

$$V=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

кроме того, назовем через ϑ величину

$$\vartheta=\ln\frac{w}{V}. \tag{18}$$

На основании сделанных обозначений можем теперь дать формуле (16) следующий вид:

$$F'(x+iy)=we^{-(\vartheta+i\theta)}; \tag{19}$$

отсюда заключаем, что $\vartheta+i\theta$ есть функция от $x+iy$, а следовательно, по формуле (15) есть функция от $\varphi+i\psi$. Таким образом, функции ϑ и θ будут везде внутри жидкой массы удовлетворять уравнению Лапласа как относительно переменных x и y, так и относительно переменных φ и ψ. На стенках сосуда AB и DA должно получиться:

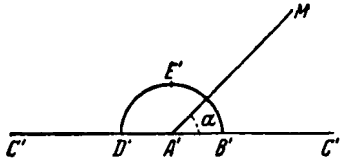
$$\pi=\theta \text{ или } 0=\theta, \quad 0=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}; \tag{20}$$

на поверхности же струи BC и DC мы должны иметь:

$$\vartheta = 0,$$

$$0 = \frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta = -\frac{\partial\theta}{\partial n}, \quad (21)$$

где ds и dn — элементы линии тока и ортогональной линии, отсчитываемые в ту сторону, в которую φ и ψ возрастают. Посмотрим теперь, в каких пределах изменяются φ и ψ внутри нашей жидкой массы. Примем $\psi = 0$ на линии тока ABC; при переходе от этой линии к другим, расположенным вправо, ψ будет все возрастать и достигает на линии тока ADC величины Q, где Q — количество жидкости, проходящее в единицу времени через единицу ширины отверстия. Далее, проведя через точку B ортогональную линию BED к линиям тока, условимся на ней считать $\varphi = 0$; при переходе по линиям тока вниз и вверх от этой линии функция φ будет возрастать от 0 до ∞ и убывать от 0 до $-\infty$.



Фиг. 20.

Изменяющиеся таким образом φ и ψ могут быть представлены на фигуре 20 с помощью полярных координат r и α, имеющих полюс A' и полярную ось $A'B'C'$. Примем:

$$\alpha = \frac{\pi}{Q}\psi, \quad r = e^{\frac{\pi}{Q}\varphi}. \quad (22)$$

При этом всем значениям φ и ψ внутри нашего течения будут соответствовать на плоскости фигуры 20 точки, лежащие сверху от полярной оси; бесконечно удалённые точки жидкости в сосуде будут представлены точкой A', а бесконечно удаленные точки струи — бесконечно удаленными точками плоскости фигуры 20. Проведя из A' полукруг $B'E'D'$ радиусом, равным единице, найдем, что он будет соответствовать ортогональной линии BED; все точки, лежащие внутри этого полукруга, представят нам точки

сосуда, а точки, лежащие вне его, — точки струи жидкости; линии тока ABC и ADC будут представлены прямыми $A'B'C'$ и $A'D'C'$, где соответственные точки названы одинаковыми буквами.

Так как из формулы (22) следует, что

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{\frac{\pi}{Q}(\varphi + i\psi)},$$

где $\varphi + i\psi$ есть функция от $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то, следовательно, от этого последнего мнимого переменного зависит также и $\vartheta + i\theta$. Функции ϑ и θ, рассматриваемые как функции полярных координат r и α, будут во всех точках плоскости фигуры 20, лежащих выше $C'C'$, удовлетворять уравнению Лапласа; в бесконечности мы должны иметь $\vartheta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$; на прямой же $C'C'$ на основании формул (20) и (21) мы должны иметь:

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } C'B';$$

$$\theta = \pi, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } B'A';$$

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } A'D';$$

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0 \text{ на } D'C'.$$

Из принципа Дирихле явствует, что этими условиями ϑ и θ вполне определяются как функции от r и α, а следовательно, по формуле (22) — и как функции от φ и ψ. Примем ϑ и θ за параметры, определяющие искомое нами течение. Для того чтобы найти их по указанным свойствам, положим:

$$\frac{1}{r}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} = -\cos[i(\vartheta + i\theta)]. \tag{23}$$

Отсюда, введя для сокращения обозначения гиперболических функций, т. е. приняв

$$\operatorname{ch}\vartheta = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}, \quad \operatorname{sh}\vartheta = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2},$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\cos\alpha &= -\cos\theta\operatorname{ch}\vartheta, \\ \frac{1}{r}\sin\alpha &= \sin\theta\operatorname{sh}\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Определенные по этим формулам функции ϑ и θ, очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа; при $r=\infty$ получается $\vartheta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$. Далее, при $\alpha=0$ и $\infty>r>1$ получаем $\vartheta=0$, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=0$ и $1>r>0$ получаем $\theta=\pi$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=\pi$ и $1>r>0$ получаем $\theta=0$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}=0$; при $\alpha=\pi$ и $\infty>r>1$ получаем $\vartheta=0$, $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0$. Таким образом, все условия, наложенные на искомые функции, будут удовлетворены. Подставляем в формулу (24) соответственные величины из формулы (22):

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\operatorname{ch}\vartheta &= -e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}\cos\frac{\pi}{Q}\psi, \\ \sin\theta\operatorname{sh}\vartheta &= e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}\sin\frac{\pi}{Q}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

По этим формулам определим ϑ и θ через φ и ψ, после чего сейчас же можем выразить через φ и ψ также и x и y. Имеем:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial x}{\partial\psi}d\psi=\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi-\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\psi,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial y}{\partial\psi}d\psi=\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\psi;$$

подставляем сюда в знаменатели $d\varphi=V\,ds$:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{V}(\cos\theta\,d\varphi-\sin\theta\,d\psi), \\ dy &= \frac{1}{V}(\sin\theta\,d\varphi+\cos\theta\,d\psi). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Внося во вторые части формул (26) θ и V, получим полные дифференциалы, интегрируя которые, определим x и y через φ и ψ и, следовательно, будем знать искомое течение.

Воспользуемся формулами (26) для получения линии тока BC, ограничивающей нашу струю. Для этой линии тока $\psi = 0$, $d\psi = 0$, $V = w$, $\vartheta = 0$, поэтому

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = w \int_0^{s} ds,$$

или

$$\varphi = ws,$$

и по первой формуле (25)

$$\cos\vartheta = -e^{-\frac{\pi}{Q} ws}$$

Переходим к первой формуле (26):

$$dx = -e^{-\frac{\pi}{Q} ws} ds,$$

или, интегрируя,

$$x = \text{const.} + \frac{Q}{\pi w} e^{-\frac{\pi}{Q} ws}$$

Постоянное определяется под условием $x = b$ при $s = 0$ и равно $b - \frac{Q}{\pi w}$, так что

$$x = b - \frac{Q}{\pi w}(1 - e^{-\frac{\pi}{Q} ws}). \tag{27}$$

Это уравнение представляет нам очертание струи с помощью координаты x и дуги s. Мы видим, что найденная кривая имеет асимптоту, отстоящую от оси струи на расстоянии

$$b - \frac{Q}{\pi w}.$$

Найденное расстояние асимптоты представляет половину длины сечения струи в ее наиболее сжатом месте, посему, умножив это расстояние на $2w$, мы должны получить Q:

$$2bw - 2\frac{Q}{\pi} = Q.$$

Отсюда легко определить Q:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + 2} 2bw = 0{,}611 \cdot 2bw. \tag{28}$$

Заметим, оканчивая этот параграф[1]), что по теории Кирхгофа скорость в центре отверстия не будет равна нулю, как предполагает Буссинеск, потому что для получения ϑ, соответствующего этой скорости, надо будет взять во второй формуле (25)

$$\psi = \frac{Q}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi > 0,$$

что дает:

$$\operatorname{sh}\vartheta = e^{-\frac{\pi}{Q}\varphi}.$$

§ 20. Неподвижные твердые тела в бесконечном потоке жидкости. Мы будем теперь рассматривать невихревое течение беспредельного потока несжимаемой жидкости, обтекающей неподвижное твердое тело, в предположении, что на бесконечном расстоянии от этого тела все скорости точек жидкости равны w и параллельны оси Ox. Если вообразим, что телу и рассматриваемой жидкой массе сообщено по направлению оси Ox поступательное движение со скоростью $-w$, то получим невихревое течение несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности, в которой наше твердое тело движется поступательно со скоростью $-w$. Так как по § 12 кинематическая задача об отыскании такого течения имеет вполне определенное решение, то и поставленная в этом параграфе задача вполне определенна. Можно даже заметить, что, найдя потенциальную функцию скоростей φ_1 второго течения и прибавив к ней wx, мы получим потенциальную функцию скоростей:

$$\varphi = \varphi_1 + wx \tag{29}$$

первого течения.

Остановимся сначала на плоском течении несжимаемой жидкости. Если ψ_1 будет функция, сопряженная φ_1, т. е. такая функция, при которой $\varphi_1 + i\psi_1$ есть функция от $x + iy$, то функция ψ, сопряженная φ, найдется по фор-

[1]) Более обстоятельное исследование о сжатии струи см. Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Philosophical Magazine, т. II, 1876, стр. 44.

мулам (10) второй лекции:

$$d\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = w\, dy + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx,$$

или

$$\psi = wy + \psi_1. \tag{30}$$

Формула (30) позволяет нам с удобством разыскивать различные плоские течения и соответственные им обтекаемые контуры. Стоит только взять за ψ_1 некоторую функцию координат x, y, производные которой по координатам обращаются в бесконечности в нули и которая удовлетворяет уравнению Лапласа, потом представить семейство линий тока уравнением

$$\beta = wy + \psi_1 \tag{31}$$

и искать значение параметра β, при котором линия тока представляет замкнутую кривую; эту кривую и можно принять за контур обтекаемого тела.

Положим, что на оси Ox расположено несколько точек с массами m, m_1, m_2, ..., притягивающих обратно пропорционально расстоянию и прямо пропорционально массам, и, назвав через ξ, ξ_1, ... абсциссы этих точек, приравняем ψ_1 проекции на Oy силы притяжения этих масс на точку единицы массы:

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\sum m \ln [y^2 + (x-\xi)^2] = -\sum \frac{my}{y^2 + (x-\xi)^2},$$

где сумма распространяется на все точки. Очевидно, что составленная таким образом функция ψ_1 удовлетворяет всем вышеупомянутым условиям. Функция ψ и уравнение линий тока будут при этом:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= y\left(w - \sum \frac{m}{y^2 + (x-\xi)^2}\right), \\ \beta &= y\left(w - \sum \frac{m}{y^2 + (x-\xi)^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

При $\beta = 0$ линии тока представляются частью прямой $y = 0$ и частью замкнутым контуром:

$$\sum \frac{m}{y^2 + (x - \xi)^2} = w, \tag{33}$$

который мы и примем за контур обтекаемого тела.

В частном случае, когда имеется одна только масса m, помещенная в начале координат, уравнение (33) обращается в

$$x^2 + y^2 = \frac{m}{w} = a^2$$

а контур, ему соответствующий, — в круг. Уравнение линий тока течения, обтекающего наш круглый цилиндр, будет:

$$\beta = yw\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right);$$

скорости же найдутся по формулам (7) второй лекции с помощью функции

$$\psi = wy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

и будут:

$$u = w\left[1 - \frac{a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right],$$

$$v = -w\frac{2a^2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

что удобнее представить в полярных координатах:

$$u = w\left(1 - \frac{a^2 \cos 2\alpha}{r^2}\right), \quad v = -wa^2\frac{\sin 2\alpha}{r^2}.$$

Определив отсюда скорость V и подставив в формулу (11) пятой лекции, найдем для нашего случая

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{w^2}{2}\left(1 + \frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\alpha\right). \tag{34}$$

Обозначая через p_0 давление в бесконечности, находим, что постоянное есть

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w^2}{2},$$

так что

$$p = p_0 - \rho\frac{a^2w^2}{2r^2}\left(\frac{a^2}{r^2} + 2\right) + 2\rho\frac{a^2w^2}{r^2}\cos^2\alpha.$$

Наименьшую величину p получает при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $r = a$; она будет:

$$p = p_0 - \frac{3}{2} w^2 \rho.$$

Отсюда следует, что для возможности рассматриваемого движения необходимо условие

$$p_0 > \frac{3}{2} w^2 \rho.$$

Для второго примера возьмем случай, исследованный Ренкином [1]). Предположим в формуле (32) $m = k\,d\xi$ и заменим в ней сумму интегралом, распространенным от $-c$ до $+c$:

$$\beta = wy - k \int_{-c}^{+c} \frac{y\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2} = wy - k\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x+c}\right).$$

При $\beta = 0$ линия тока распадается на прямую $y = 0$ и овал, данный уравнением:

$$y = \frac{k}{w}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x+c}\right) = \frac{k}{w}\theta, \qquad (35)$$

где θ — угол между радиусами-векторами, идущими к точке кривой от точек $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, которые Ренкин называет фокусами овала. Полуоси овала a и b, из которых первая проходит через фокусы, найдутся из уравнения (35) (для определения a надо положить $\frac{dx}{dy} = 0$) и будут:

$$a = \sqrt{c^2 + 2c\frac{k}{w}}, \quad b \operatorname{tg} \frac{wb}{2k} = c.$$

Пользуясь углом θ, мы с удобством построим как самый овал, так и все линии токов. Для этого надо брать точки пересечения прямых, параллельных оси Ox, и дуг кругов, проходящих через фокусы и вмещающих углы θ, под условием, что

$$y = \frac{\beta}{w} + \frac{k}{w}\theta.$$

[1]) Rankine, On plane water-lines in two dimensions, Miscellaneous cientific papers, London, стр. 495, 1881.

Положив в формуле (32)

$$\omega = k\sqrt{c^2 - \xi^2}\, d\xi,$$

мы могли бы получить течение жидкости, обтекающей эллиптический цилиндр, но при этом пришлось бы иметь дело с довольно сложным интегралом, так что эту задачу удобнее решать прямо по формулам (30) и (31). Назовем через ϑ и θ некоторые параметры и положим

$$x + iy = c \cdot \cos[i(\vartheta + i\theta)],$$

откуда

$$x = c \operatorname{ch}\vartheta \cos\theta, \quad y = c \operatorname{sh}\vartheta \sin\theta. \tag{36}$$

Легко усмотреть, что кривые $\vartheta = \text{const.}$ и $\theta = \text{const.}$ соответствуют эллипсам и гиперболам с фокусным расстоянием c. Действительно, из формул (36) имеем:

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2\vartheta} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2\vartheta} = 1,$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2\theta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2\theta} = 1,$$

где полуоси эллипса $c \operatorname{ch}\vartheta$ и $c \operatorname{sh}\vartheta$ удовлетворяют условию

$$c^2 \operatorname{ch}^2\vartheta - c^2 \operatorname{sh}^2\vartheta = c^2,$$

а полуоси гиперболы $c\cos\theta$ и $c\sin\theta$ — условию

$$c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta = c^2.$$

Так как $\operatorname{tg}\theta$ равен отношению мнимой полуоси гиперболы к действительной, то θ есть угол асимптоты гиперболы с осью Ox. Из формул (36) видно, что, изменяя параметр ϑ от 0 до ∞, а параметр θ от 0 до 2π, мы проходим через все точки плоскости Oxy. Всякая функция от мнимого переменного $\vartheta + i\theta$ будет функцией от $x + iy$ и, следовательно, ее действительная и мнимая части удовлетворяют уравнению Лапласа. Полагаем

$$\varphi_1 + i\psi_1 = kce^{-(\vartheta + i\theta)},$$

так что

$$\psi_1 = -kce^{-\vartheta}\sin\theta.$$

Эта функция обращается в бесконечности в нуль, и потому

мы можем подставить ее в формулу (31). Сделав эту подстановку и исключив $\sin\theta$ с помощью формулы (36), найдем:

$$\beta = y\left(w - \frac{2k}{e^{2\vartheta} - 1}\right).$$

При $\beta = 0$ линия тока распадается на прямую $y = 0$ и эллипс, определенный параметром

$$\vartheta = \frac{1}{2}\ln\frac{w + 2k}{w}. \qquad (37)$$

Заметим, что во всех рассматриваемых примерах точки пересечения прямой линии тока с контуром тела суть критические и в них скорость жидкости равна нулю.

Переходим к течению жидкости в трех измерениях. Вообразив внутри жидкости прямоугольные оси координат $Oxyz$, расположим на оси Ox притягивающие центры с массами m, m_1, ... на расстояниях от начала ξ, ξ_1, ... и составим компонент по оси Ox силы их ньютонова притяжения на точку единицы массы. Назовем этот компонент через $-\varphi_1$:

$$\varphi_1 = \sum \frac{m(x - \xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как функция φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и производные ее по координатам обращаются в бесконечности в нули, то ее можно подставить в формулу (29):

$$\varphi = wx + \sum \frac{m(x - \xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (38)$$

Эта потенциальная функция скоростей представляет некоторое течение, симметричное относительно оси Ox; поэтому одни из поверхностей тока будут плоскости, проходящие через эту ось. Найдем по теореме Клебша другие поверхности тока. Подставляем в формулу (4) второй лекции

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y}$$

и величины компонентов скорости u и v, определенные из

формулы (38). Положив в полученном результате $z=0$, находим для линий тока на плоскости Oxy:

$$wy\,dy+\sum\frac{my\,dy}{r^3}-3\sum\frac{m(x-\xi)^2y\,dy}{r^5}+3\sum\frac{m(x-\xi)y^2\,dx}{r^5}=$$

$$=wy\,dy-2\sum\frac{my\,dy}{r^3}+3y^2\sum\frac{m[(x-\xi)\,dx+y\,dy]}{r^5}=0,$$

где

$$r=[(x-\xi)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируем:

$$\beta=y^2\left(\frac{w}{2}-\sum\frac{m}{r^3}\right). \tag{39}$$

Так как во всех плоскостях, проходящих через ось Ox, линии тока одинаковы, то уравнение (39) можно считать за уравнение семейства поверхностей тока, которые суть поверхности вращения. При $\beta=0$ уравнение такой поверхности тока распадается на

$$y=0$$

и

$$\sum\frac{m}{r^3}=\frac{w}{2}. \tag{40}$$

Это последнее уравнение мы можем принять за уравнение тела вращения, которое обтекает рассматриваемый нами поток жидкости[1]).

В случае одного притягивающего центра, помещенного в начале координат, получаем из формулы (40):

$$r=\sqrt[3]{\frac{2m}{w}}=a$$

и убеждаемся, что обтекаемое тело есть шар. Уравнение (39) принимает при этом вид:

$$\beta=\frac{wy^2}{2}\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right).$$

Если бы мы желали определить давление во всякой точке потока, то для этого было бы удобно выразить формулу (38)

[1]) В такой форме задача о телах вращения в бесконечном потоке жидкости была решена Hoppe, Poggendorffs Annalen, т. 93, стр. 321.

в полярных координатах r, α и определить компоненты скорости по направлению dr и дуги $r\,d\alpha$ из формул:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = w\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\alpha, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -w\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)\sin\alpha,$$

так что

$$V^2 = w^2\left(1 + \frac{a^3}{r^3} + \frac{1}{4}\frac{a^6}{r^6}\right) - 3w^2\frac{a^3}{r^3}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\cos^2\alpha.$$

Подставляя эту величину в формулу (11) пятой лекции и полагая в бесконечности $p = p_0$, находим:

$$p = p_0 - \frac{\rho w^2}{2}\left(\frac{a^3}{r^3} + \frac{1}{4}\frac{a^6}{r^6}\right) + \frac{3\rho w^2}{2}\frac{a^3}{r^3}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\cos^2\alpha. \quad (41)$$

Наименьшую величину p здесь получаем тоже при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $r = a$; она будет:

$$p = p_0 - \frac{5}{8}w^2\rho,$$

так что рассматриваемое течение возможно под условием [1])

$$p_0 > \frac{5}{8}w^2\rho.$$

Рассмотрим еще один пример, в котором обтекаемое тело не есть тело вращения. Пусть обтекаемое тело есть эллипсоид, имеющий уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для определения функции φ_1 в формуле (29) можно здесь воспользоваться выражением силы притяжения однородным эллипсоидом материальной точки. Назовем составляющую этой силы по оси Ox через X и покажем, что

$$\varphi_1 = -kX.$$

Эта функция для внешних точек удовлетворяет уравнению Лапласа и производные ее по координатам обращаются

[1]) Если это условье не соблюдено, то в течении жидкости образуется поверхность раздела. См. об этом случае W. Thomson, Philosophical Magazine, т. 23, 1887, стр. 255.

в бесконечности в нуль. Составим для поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -k\frac{\partial X}{\partial n},$$

где dn — элемент нормали, направленной внутрь жидкости. Называя через dn_1 элемент нормали, направленной внутрь эллипсоида, напишем известное соотношение из теории притяжения:

$$\frac{\partial X}{\partial n} + \frac{\partial X}{\partial n_1} = 4\pi\cos\alpha,$$

где α — угол элемента dn с осью Ox (мы принимаем плотность притягивающего эллипсоида и коэффициент притяжения за единицу). Но для точки, лежащей внутри эллипсоида, имеем:

$$X = -Ax,$$

где A — известная функция от a, b, c; поэтому

$$\frac{\partial X}{\partial n} = (4\pi - A)\cos\alpha,$$

и нам остается только положить

$$k = \frac{w}{4\pi - A}$$

для того, чтобы удовлетворить на поверхности эллипсоида условию

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -w\cos\alpha.$$

Мы видим, таким образом, что потенциальная функция течения, обтекающего по направлению оси Ox наш эллипсоид, есть

$$\varphi = w\left(x + \frac{X}{A - 4\pi}\right). \qquad (42)$$

Переходим теперь к определению равнодействующей P по оси Ox сил давления жидкости на обтекаемое ей тело. Из формул (34) и (41) заключаем, что для цилиндра и шара $P = 0$, потому что элементы поверхности того и другого тела, соответствующие углам α и $\pi - \alpha$, подвержены рав-

ным давлениям p. Покажем, что *при всякой форме тела* $P=0$. На основании формулы (29)

$$\frac{p}{\rho}=\text{const.}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+w\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]. \qquad (43)$$

Проводим из начала координат (которое возьмем внутри тела) как центра сферу бесконечно большим радиусом и прилагаем формулу (5) третьей лекции к объему, ограниченному этой сферой и поверхностью рассматриваемого тела, приняв в ней

$$F=p, \quad l=1, \quad m=0, \quad n=0.$$

Это дает нам:

$$\iint p\cos\alpha\,d\sigma=$$

$$=\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+w\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy\,dz.$$

Полученный здесь объемный интеграл приводим опять к поверхностному по формуле (5) третьей лекции, делая положения:

$$F=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad l=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+w, \quad m=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad n=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.$$

Получаем:

$$\iint p\cos\alpha\,d\sigma=$$

$$=-\rho\iint\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+w\right)\cos\alpha+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos\gamma\right]d\sigma. \qquad (44)$$

Рассматриваем сначала интегралы первой и второй части, распространенные на поверхность тела. В первой части имеем $-P$, во второй же части интеграл равен нулю, ибо на поверхности тела

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+w\right)\cos\alpha+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos\gamma=0.$$

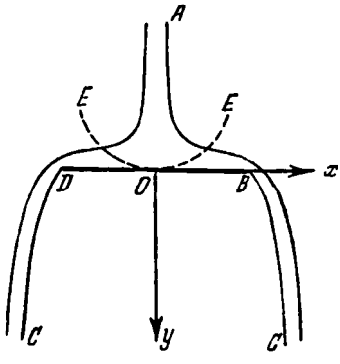
Переходя затем к интегралам, распространенным на поверхность бесконечно большой сферы, замечаем, что

в первой и второй части (по подстановке p из формулы (43)) сокращается

$$\rho \int\int w \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma;$$

остающиеся же члены равны нулю, ибо под интегралы входят квадраты и произведения производных от φ_1 по координатам, т. е. члены четвертого порядка относительно единицы, деленной на радиус сферы, как это видно из формулы (14) третьей лекции. Таким образом, уравнение (44) приводится к

$$P = 0. \qquad (45)$$

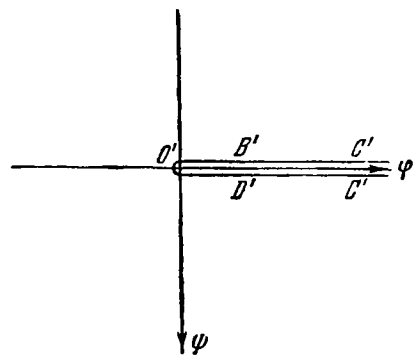


Фиг. 21.

Этот парадоксальный результат получается потому, что не приняты во внимание факторы, обусловливающие сопротивление жидкости: трение жидкости, образование вихрей и образование поверхностей раздела в течении жидкости. В этой лекции мы займемся только последним фактором сопротивления, который в телах, ограниченных угловатыми контурами, играет главную роль. Теоретические исследования этого вопроса относятся только к плоскому течению несжимаемой жидкости и опираются на применение метода Кирхгофа, объясненного в предыдущем параграфе.

Положим, что в поток жидкости, движущейся в бесконечности с постоянной скоростью w, погружена пластинка, перпендикулярная к этой скорости, и расположим относительно ее оси координат, как представлено на фигуре 21. Точка O, лежащая посреди пластинки, будет критической, и все линии тока рассматриваемого течения лежат: одни — вправо от линии тока $AOBC$, а другие — влево от $AODC$. Линии тока BC и DC являются линиями раздела; мы пред-

положим, что между этими линиями жидкость имеет постоянное давление p_0 (на самом деле здесь будет некоторое вихревое движение, и давление, хотя мало, но будет изменяться). Будем приписывать буквам φ, ψ, ϑ, θ значения, принятые в конце § 19, и посмотрим, как изменяются ψ и φ в нашей задаче. На линиях тока $AOBC$ и $AODC$ будем считать $\psi = 0$ и предположим, что при переходе от линии тока $AOBC$ в правую сторону ψ убывает, а при переходе от $AODC$ в левую сторону ψ возрастает[1]), и так как количество протекающей жидкости с правой и левой сторон пластинки бесконечно велико, то возрастание идет до $+\infty$, а убывание до $-\infty$. Проведя через O ортогональ EOE к линиям тока, примем на ней $\varphi = 0$. Переходя от этой ортогонали по линиям тока вниз, мы будем иметь возрастание φ от 0 до $+\infty$, а вверх — убывание φ от 0 до $-\infty$. Если будем теперь на фигуре 22 рассматривать φ и ψ как абсциссу и ординату некоторой точки, то пространство, занимаемое на фигуре 21 исследуемым течением, будет на фигуре 22 представлено всеми точками плоскости. Посмотрим, какими условиями стеснены θ и ϑ на границах течения. В бесконечности $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = 0$: на OB имеем $\theta = 0$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0$; на OD имеем $\theta = \pi$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0$; наконец, на BC и DC имеем $\vartheta = 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0$. Назовем через φ_0 величину, на которую возрастает φ при переходе от O к B или D, и отложим на фигуре 22 отрезок $O'B' = \varphi_0$. Линии тока OBC и ODC представятся



Фиг. 22.

[1]) Соображая изменение ψ, надо удовлетворить знакам u и v в формуле (7) второй лекции.

на фигуре 22 прямой $O'C'$; для различия этих двух линий будем предполагать, что плоскость на фигуре 22 разрезана по $O'C'$, так что верхняя часть разреза $O'B'C'$ соответствует линии тока OBC, а нижняя часть разреза $O'D'C'$ — линии тока ODC.

Функции θ и ϑ, удовлетворяя во всех точках плоскости фигуры 22 уравнению Лапласа, дают в бесконечных точках ее $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = 0$; далее, на краях разреза $O'C'$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\text{на } O'B' \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} = 0,\\
&\text{» } C'B' \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = 0,\\
&\text{» } O'D' \quad \theta = \pi, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} = 0,\\
&\text{» } D'C' \quad \vartheta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = 0.
\end{aligned}$$

Мы удовлетворим всем этим условиям, положив

$$\left(\frac{\varphi + i\psi}{\varphi_0}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\cos[i(\vartheta + i\theta)]. \tag{46}$$

Действительно, введя полярные координаты

$$\varphi = r\cos\alpha, \quad \psi = r\sin\alpha, \tag{47}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varphi_0}{r}}\cos\frac{\alpha}{2} &= -\operatorname{ch}\vartheta\cos\theta,\\
\sqrt{\frac{\varphi_0}{r}}\sin\frac{\alpha}{2} &= \operatorname{sh}\vartheta\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Из этих формул следует, что при $r = \infty$ имеем $\vartheta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$; при $\alpha = 0$ и $r < \varphi_0$ имеем $\theta = \pi$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0$; при $\alpha = 0$ и $r > \varphi_0$ имеем $\vartheta = 0$ и $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0$; при $\alpha = 2\pi$ и $r < \varphi_0$ имеем $\vartheta = 0$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = 0$; наконец, при $\alpha = 2\pi$ и $r > \varphi_0$ получаем $\vartheta = 0$ и $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0$.

Определив с помощью формул (47) и (48) через φ и ψ функции ϑ и θ и подставив в формулы (26), выразим x и y по φ и ψ, так что будем знать искомое течение.

Мы остановимся здесь только на решении двух вопросов: определении равнодействующей P сил давления на пластинку и определении вида кривой BC. Положив в первой формуле (48) $\theta = 0$, $\alpha = 2\pi$, $r = \varphi$, найдем для определения скорости жидкости на поверхности пластинки:

$$\operatorname{ch}\vartheta = \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}},$$

или, заменяя гиперболический косинус и подставляя значение ϑ из формулы (18),

$$\frac{V}{w} + \frac{w}{V} = 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{V}{w} &= \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} - \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}, \\ \frac{w}{V} &= \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} + \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Считая силу P положительной по направлению скорости w, напишем, что

$$P = \int (p - p_0)\, dx = \frac{\rho}{2}\int (w^2 - V^2)\, dx =$$

$$= \frac{\rho w}{2}\int \left(\frac{w}{V} - \frac{V}{w}\right) V\, dx = \rho w \int \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}\; V\, dx.$$

Но $V\, dx = d\varphi$, поэтому

$$P = 2\rho w \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}\, d\varphi.$$

Этот интеграл удобно взять, введя новое переменное

$$\varphi = \varphi_0 \sin^2\chi;$$

тогда

$$P = 4\rho w \varphi_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\chi\, d\chi = \rho w \varphi_0 \pi.$$

Исключим отсюда φ_0 с помощью длины пластинки $2b$. Мы имеем:

$$b = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{V} = \frac{1}{w}\int_0^{\varphi_0} \frac{w}{V}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}}\, d\varphi + \frac{1}{w}\int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} - 1}\, d\varphi = \frac{\varphi_0}{2w}(4 + \pi),$$

так что

$$\varphi_0 = \frac{2bw}{4+\pi}. \tag{50}$$

Подставляя эту величину в выражение для P, находим:

$$P = \frac{2b\rho w^2\pi}{4+\pi}. \tag{51}$$

Мы видим отсюда, что сила давления потока жидкости на пластинку, происходящая от образования поверхностей раздела, пропорциональна площади пластинки, плотности жидкости и квадрату скорости потока.

Переходим к составлению уравнения линии тока BC. На этой линии имеем $\vartheta = 0$, $\alpha = 2\pi$, $\tau = \varphi$, поэтому из первой формулы (48)

$$\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi}} = \cos\vartheta,$$

или, так как $\varphi = \varphi_0 + sw$,

$$\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_0 + sw}} = \frac{dx}{ds}.$$

Интегрируем:

$$x = 2\frac{\varphi_0}{w}\sqrt{1 + \frac{w}{\varphi_0}s} + \text{const}. \tag{52}$$

Мы видим отсюда, что расстояние между линиями тока BC и DC будет беспредельно возрастать [1]).

---

[1]) О силе давления потока жидкости на погруженные в него тела см. следующие сочинения: Rayleigh, On the Resistance of fluids. Philosophical Magazine, т. 2, 1876, стр. 431; Бобылев Д. К., Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две плоские стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом, Журнал Русского физико-химического общества, 1881; Мещерский И. В., К вопросу о сопротивлении жидкостей, Журнал Русского физико-химического общества, 1887.

§ 21. Примеры на вихревое установившееся течение жидкости. Мы сказали в § 18, что плоское течение несжимаемой жидкости, совершающееся параллельно плоскости Oxy, будет установившимся, если ω_3 есть постоянная величина на линиях тока. Это условие, разумеется, будет удовлетворено, если ω_3 есть постоянная величина для всего течения. Рассмотрим здесь подобные течения. Эта задача, как заметил Томсон [1]), имеет следующий практический смысл: заключив жидкую массу в цилиндрический сосуд, будем вращать его равномерно около оси, параллельной его образующей, с угловой скоростью ω_3 до тех пор, пока вся жидкость не начнет двигаться как одно твердое тело; потом сразу остановим сосуд; тогда по принципу сохранения вихрей все частицы жидкости будут продолжать вращаться со скоростью ω_3, и мы получим вышеупомянутое течение жидкости (оно скоро будет нарушено влиянием трения о стенки сосуда).

Решение задачи сводится к отысканию функции ψ, удовлетворяющей уравнению (4) при данном ω_3 внутри сосуда и обращающейся на его контуре в постоянную величину. Мы удовлетворим первому условию, положив

$$\psi = \psi_1 - \frac{1}{2}\omega_3 (x^2 + y^2), \tag{53}$$

где ψ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа; для удовлетворения второго условия надо будет выбрать ψ_1 так, чтобы на контуре сосуда

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\omega_3 (x^2 + y^2) + \text{const}.$$

Этими условиями, как известно из принципа Дирихле, ψ_1 вполне определяется. Но удобно поступить иначе: не задавая наперед формы сосуда, принять за нее одну из замкнутых линий из семейства линий тока:

$$\beta = \psi_1 - \frac{1}{2}\omega_3 (x^2 + y^2), \tag{54}$$

где β — параметр семейства. Возьмем некоторые примеры

[1]) Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, т. III и IV, 1866.

Мы удовлетворим уравнению Лапласа положением

$$\psi_1 = k(y^2 - x^2),$$

так что уравнение (54) можно написать в виде:

$$x^2\left(\frac{\omega_3}{2} + k\right) + y^2\left(\frac{\omega_3}{2} - k\right) + \beta = 0.$$

При $2k < \omega_3$ и $\beta < 0$ будем иметь для линий тока семейство подобных концентрических эллипсов, один из которых может быть принят за контур сосуда.

Для второго примера сделаем положение

$$\psi_1 = k(3xy^2 - x^3),$$

которое, как легко увидеть, тоже удовлетворяет уравнению Лапласа, и определим y^2 из уравнения

$$\beta = k(3xy^2 - x^3) - \frac{1}{2}\omega_3(x^2 + y^2).$$

Найдем:

$$y^2 = \frac{2kx^3 + \omega_3 x^2 + 2\beta}{6kx - \omega_3},$$

или, по разделении:

$$y^2 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{\frac{4a^3}{27} + \frac{\beta}{k}}{3x - a},$$

где

$$a = \frac{\omega_3}{2k}.$$

Если примем для контура основания нашего сосуда линию тока со значением

$$\beta = -\frac{4a^3}{27}k,$$

то найдем, что этот контур будет равносторонний треугольник, образованный тремя прямыми:

$$3x - a = 0,$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0,$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 0.$$

Высота треугольника есть a, а сторона имеет длину $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

ЛЕКЦИЯ VII.

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В БЕСПРЕДЕЛЬНОЙ МАССЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.

§ 22. О сохранении импульсивных силы и пары. Прежде всего установим надлежащий взгляд на беспредельную массу жидкости. По нашему мнению, о подобной массе можно рассуждать только как о предельном случае конечной массы, которая или заключена в сосуд, или имеет свободную поверхность под внешним давлением. Для простоты будем принимать этот сосуд или эту свободную поверхность сферическими и будем предполагать, что радиус сферы устремляется к бесконечности. Допустим для большей общности, что в жидкость погружено несколько твердых или деформирующихся тел и что в начальный момент жидкость имеет невихревое движение и покоится в бесконечности. По принципу сохранения вихрей в случае существования потенциала сил, действующих на частицы жидкости, движение все время будет невихревое; докажем, что *все время жидкость будет покоиться в бесконечности.* Вообразим, что жидкость заключена в сферический сосуд конечного радиуса a, и проведем из его центра сферу радиусом $b < a$ так, чтобы она охватывала все внутренние тела. По принципу Дирихле потенциальная функция скоростей F для пространства, заключенного между сферами a и b, будет вполне определена, если известна ее нормальная производная на сфере b. Эта последняя вполне определяется по движению тел. Положим, что она известна, и представим ее в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \ldots, \qquad (1)$$

где S_i — сферическая функция порядка i. Известно, что сама функция F для рассматриваемого пространства может быть тоже выражена с помощью сферических функций:

$$F = C + \frac{M}{r} + \frac{M_1}{r^2} + \frac{M_2}{r^3} + \ldots + N_1 r + N_2 r^2 + \ldots, \qquad (2)$$

где M_i и N_i — сферические функции порядка i, а r — расстояние рассматриваемой точки от центра сфер. Так как на сфере a

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

то, подставляя сюда формулы (2), найдем:

$$iN_i a^{i-1} - \frac{M_i(i+1)}{a^{i+2}} = 0, \tag{4}$$

$$M = 0. \tag{5}$$

Далее, по формуле (1) найдем, что

$$iN_i b^{i-1} - \frac{M_i(i+1)}{b^{i+2}} = S_i, \tag{6}$$

$$S_0 = 0.$$

Из формул (4) и (6) имеем:

$$N_i = -\frac{S_i b^{i+2}}{i(a^{2i+1} - b^{2i+1})},$$

$$M_i = -\frac{S_i b^{i+2}}{\left(1 - \frac{b^{2i+1}}{a^{2i+1}}\right)(i+1)}. \tag{7}$$

При $a = \infty$ получаем $N_i = 0$ и, следовательно,

$$F = C + \frac{M_1}{r^2} + \frac{M_2}{r^3} + \ldots, \tag{8}$$

что показывает нам (§ 12), что жидкость будет все время покоиться в бесконечности. Так как величина $4\pi M$ представляет количество жидкости, протекшей через все внутренние границы, то из уравнения (5) заключаем, что *беспредельная масса несжимаемой жидкости только тогда может быть заключена в бесконечно большом замкнутом сосуде, когда сумма объемов всех внутренних тел не изменяется.*

Предположим теперь, что жидкость ограничена сферой конечного радиуса a и на ее поверхности производится во всякий момент времени такое внешнее давление, что она сохраняет форму сферы. Это давление по формуле (11) пятой лекции будет:

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] + \text{const.}, \tag{9}$$

где F для всякого момента времени определяется по формулам (2) и (7). При этом M не будет нулем, так как в рассматриваемом случае уравнение (3) заменяется уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial r} = S_0 \frac{b^2}{a^2}.$$

Полагая $a = \infty$, найдем по предыдущему $N_\ell = 0$, вследствие чего функция F обращается в

$$F = C + \frac{M}{r} + \frac{M_1}{r^2} + \dots, \tag{10}$$

а уравнение (9) дает:

$$\frac{p}{\rho} = U + \text{const}.$$

Отсюда видно, что если на свободную поверхность бесконечно большой сферы будет производиться внешнее давление, равное гидростатическому, то жидкость все время движения будет покоиться в бесконечности.

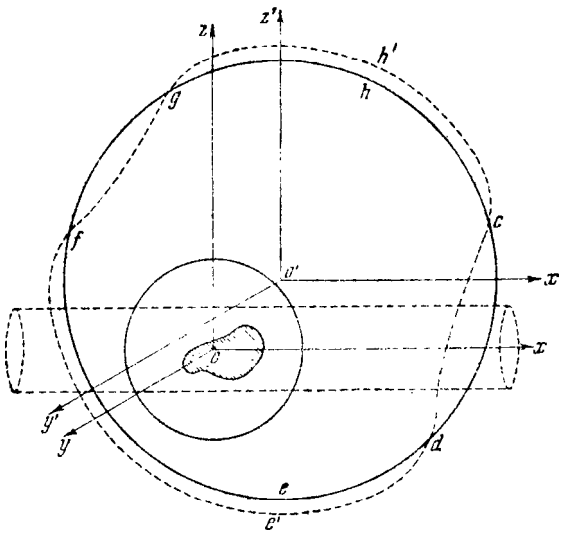
Поясним теперь, что мы будем звать *импульсивными силой и парой*. Рассматривая количества движения масс, составляющих погруженные тела, как силы, заменим их одной силой N, проходящей через начало O координат x, y, z (фиг. 23), и парой G; назовем через N_1, N_2, N_3, G_1, G_2, G_3 компоненты по осям координат этой силы и момента этой пары; потом сложим упомянутую силу и пару с силой P и парой H, которые бы получились, если бы на поверхности всех погруженных тел производилось нормальное давление Fp. Обозначая через P_1, P_2, P_3, H_1, H_2, H_3 компоненты этой последней силы и пары, найдем от сложения силу Q и пару момента K с компонентами:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= N_1 + P_1; \quad K_1 = G_1 + H_1, \\ Q_2 &= N_2 + P_2; \quad K_2 = G_2 + H_2, \\ Q_3 &= N_3 + P_3; \quad K_3 = G_3 + H_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эту силу Q и пару с моментом K мы и будем называть импульсивной силой и импульсивной парой.

Докажем, что *проекция импульсивной силы на ось Ox равна сумме количеств движения по оси Ox всех масс, заклю-*

ченных внутри прямого цилиндра, который охватывает все внутренние тела, имеет образующую, параллельную Ox, и основания которого бесконечно удалены от погруженных тел. Для этого следует только обнаружить, что P_1 есть сумма количеств движения по оси *Ox* всей жидкости, заключенной в упомянутом цилиндре. Называя через α, β, γ углы,



Фиг. 23.

которые нормаль к поверхностям тел, направленная внутрь жидкости, образует с осями, напишем:

$$P_1 = -\rho \int\int F \cos\alpha \, d\sigma, \tag{12}$$

где интеграция распространяется на поверхности тел.

Преобразуем этот интеграл по формуле (5) третьей лекции, относя ее к пространству, ограниченному поверхностью цилиндра и поверхностью тел; заменяя F на $F\rho$ и полагая

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

найдем:

$$-\int\int F\rho \cos\alpha \, d\sigma = \int\int\int \rho \frac{\partial F}{\partial x} \, dx \, dy \, dz.$$

Здесь интеграл первой части может быть отнесен к поверхностям тел, так как на боковой поверхности цилиндра $\cos\alpha = 0$, на его бесконечно удаленных основаниях $F = C$, а $\cos\alpha$ на правом основании равен -1, а на левом $+1$. Желаемое, таким образом, доказано. Что касается K_1, то легко обнаружить, что *проекция на ось Ox момента импульсивной пары равна сумме моментов количеств движения относительно оси Ox всех масс, заключенных в шаре, центр которого лежит на оси Ox и который охватывает все внутренние тела.* Построив (фиг. 23) такую сферу, имеющую начало в O, мы должны будем обнаружить, что H_1 есть сумма моментов относительно Ox всей жидкости, в ней заключенной. Мы имеем:

$$H_1 = -\int\int F\rho\,(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma, \tag{13}$$

где интеграция распространяется на поверхности погруженных тел. Прилагаем формулу (5) третьей лекции к объему, ограниченному поверхностями тел и поверхностью сферы; заменив F на $F\rho$ и положив в этой формуле

$$l = 0, \quad m = -z, \quad n = y,$$

получаем:

$$-\int\int F\rho\,(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma = \int\int\int \rho\left(y\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz,$$

где интеграл первой части может быть отнесен только к поверхностям тел, ибо на поверхности сферы

$$y : z = \cos\beta : \cos\gamma.$$

Из данного доказательства следует, что сумма моментов количеств движения относительно оси Ox жидкости, заключенной между двумя сферами, проведенными так, что они охватывают все тела и имеют центры на оси Ox, равна нулю. В этом, впрочем, легко убедиться самостоятельно. Разбив рассматриваемый объем на бесконечно тонкие кольца, имеющие центры на оси Ox, мы найдем, что сумма моментов относительно Ox жидкости, заключенной во вся-

ком кольце, равна произведению его радиуса, плотности, площади перпендикулярного сечения и циркуляции скорости по оси кольца, а последний производитель есть нуль. Возьмем теперь (фиг. 23) точку O', имеющую координаты ξ, η, ζ, и примем ее за начало новых осей координат $O'x'y'z'$, параллельных прежним. Заменяя по правилам статики все пары и силы, приложенные в точке O, парами и силами, приложенными в точке O', найдем, что силы не изменятся, моменты же пар получат известное изменение, так что вместо момента K мы получим момент K', компоненты которого на осях $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ будут:

$$\left.\begin{aligned} K_1' &= K_1 - (\eta Q_3 - \zeta Q_2); \\ K_2' &= K_2 - (\zeta Q_1 - \xi Q_3); \\ K_3' &= K_3 - (\xi Q_2 - \eta Q_1). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Проведем из точки O' как из центра сферу радиусом a, охватывающую все внутренние тела, и будем рассматривать содержимое в этой сфере как свободную систему, присоединив к ее поверхности соответствующие силы гидродинамического давления. Для такой системы можем написать, что сумма моментов всех действующих сил относительно оси $O'x'$ равна производной по времени от суммы моментов относительно той же оси количеств движения всех материальных точек системы. Сумма моментов сил, действующих на взятую нами систему, сложится из суммы моментов L_1' внешних сил, действующих на погруженные тела, и суммы моментов M_1' сил, имеющих силовую функцию U и действующих на частицы жидкости, потому что силы гидродинамического давления, приложенные к поверхности сферы, пересекают ось $O'x'$ и не имеют относительно ее моментов.

Укажем простое значение M_1':

$$M_1' = \int\int\int \rho \left(y' \frac{\partial U}{\partial z'} - z' \frac{\partial U}{\partial y'} \right) dx'\, dy'\, dz',$$

где интеграция распространяется на объем, заключенный между поверхностями тел и поверхностью сферы. Прилагая к этому объему формулу (5) третьей лекции, положим в ней

$$F = \rho U, \quad l = 0, \quad m = -z', \quad n = y';$$

найдем:

$$-\int\int \rho U(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)\,d\sigma = \\ = \int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'dy'dz' = M_1',$$

где интеграл первой части можно считать отнесенным только к поверхности тел, потому что на поверхности сферы

$$\cos\gamma : \cos\beta = z' : y'.$$

Полагая, что функция U представляет непрерывную однозначную функцию также и внутри объемов тел, напишем формулу (5) третьей лекции для этих объемов, сделав в ней то же положение, как выше, и заметив, что углы нормали, направленной внутрь тел, имеют косинусы $-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma$; получим:

$$\int\int \rho U(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)\,d\sigma = \int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'dy'dz',$$

где тройная интеграция относится уже к объемам тел. Таким образом,

$$M_1' = -\int\int\int \rho\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx'dy'dz', \tag{15}$$

т. е. M_1' *есть взятая с обратным знаком сумма моментов сил, которые бы действовали на жидкость, наполняющую объемы тел.* Это есть обобщение закона Архимеда.

Что касается бесконечно малого изменения во время dt моментов количеств движения масс, ограниченных во время t проведенной радиусом a сферой $cdefgh$ (фиг. 23), то оно сложится из dK_1' и из разности суммы моментов количеств движения в объеме $cde'fgh'$ и в сфере $cdefgh$, где $cde'fgh'$ есть форма рассматриваемой массы жидкости во время $t + dt$.

Эта последняя разность будет:

$$dt\int\int \rho \frac{\partial F}{\partial r}\, d\sigma \cdot \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial F}{\partial \psi} \cdot r\cos\theta = dt\rho a^2 \int\int \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \psi}\cos\theta\, d\psi\, d\theta,$$

где θ и ψ — широта и долгота, считая за полярную ось $O'x'$.

На основании всего сказанного получим:

$$\frac{dK_1'}{dt} + \rho a^2 \int\int \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \psi}\cos\theta\, d\psi\, d\theta = L_1' + M_1'.$$

Второй член, входящий в эту формулу, не должен зависеть от радиуса a, потому что все остальные члены формулы от него не зависят. Поэтому мы можем определить величину рассматриваемого члена, положив $a = \infty$, при этом $\frac{\partial F}{\partial r}$ будет по формуле (10) порядка a^{-2}, а $\frac{\partial F}{\partial \psi}$ будет порядка a^{-1}, так что второй член есть нуль. Таким образом,

$$\frac{dK_1'}{dt} = L_1' + M_1'.$$

Подставим в эту формулу вместо K_1' его величину из формул (14) и заменим подобными же формулами L_1' и M_1'. Пусть все силы, действующие на тела, приводятся к одной силе R, действующей на точку O, и к одной паре момента L, которым по осям x, y, z соответствуют компоненты R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, а все взятые в обратную сторону силы действия на жидкости, которые бы наполняли объемы тел, приводятся к силе S и паре с моментом M, имеющим по этим осям компоненты S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3. Мы получим:

$$\frac{dK_1}{dt} - \eta\frac{dQ_3}{dt} + \zeta\frac{dQ_2}{dt} = L_1 + M_1 - \eta(R_3 + S_3) + \zeta(R_2 + S_2).$$

Прибавляя к этим формулам еще две аналогичные и замечая, что ξ, η, ζ суть величины совершенно произвольные, получим шесть уравнений, которые будут удовлетворены во все время движения тел:

$$\left.\begin{array}{lll} R_1 + S_1 = \frac{dQ_1}{dt}; & R_2 + S_2 = \frac{dQ_2}{dt}; & R_3 + S_3 = \frac{dQ_3}{dt}; \\ L_1 + M_1 = \frac{dK_1}{dt}; & L_2 + M_2 = \frac{dK_2}{dt}; & L_3 + M_3 = \frac{dK_3}{dt}. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Эти уравнения показывают, что *сила и момент пары, получаемые из всех внешних сил, действующих на тела, и из сил, определяемых по обобщенному закону Архимеда, геометрически равны геометрическим производным импульсивной силы и момента импульсивной пары.*

Пользуясь уравнениями (16), мы можем теперь объяснить значения терминов «импульсивная сила» и «пара». Положим, что то движение, которое имеют жидкость и тела, получено из покоя в продолжение бесконечно малого промежутка времени τ действием на тела бесконечно больших сил. Написав для каждого момента времени в промежутке τ уравнения (16), умножим их на dt и возьмем от обеих частей их интегралы от 0 до τ; получим, отбрасывая бесконечно малые величины, что

$$Q_1 = \int_0^\tau R_1\, dt, \quad K_1 = \int_0^\tau L_1\, dt, \ldots \tag{17}$$

Таким образом, Q и K имеют то самое значение, которое в теории мгновенных сил дают импульсивной силе и моменту импульсивной пары.

Останавливаясь на предположении:

$$R_1 + S_1 = R_2 + S_2 = R_3 + S_3 = 0,$$
$$L_1 + M_1 = L_2 + M_2 = L_3 + M_3 = 0,$$

найдем из уравнений (15) и (16) теорему, которая может быть названа принципом сохранения импульсивных силы и пары[1]). *При отсутствии силы и пары, происходящих от сложения внешних сил, действующих на погруженные тела, и сил, определяемых по обобщенному закону Архимеда, импульсивные сила и пара остаются все время неизменными.*

Согласно теореме Пуансо мы можем заменить импульсивные пару и силу импульсивной парой и импульсивной силой, направленной по оси пары. Прямая, по которой

[1]) Данное нами доказательство этого принципа заимствовано у Томсона, Thomson, On vortex motion, Philos. Trans., R. S., Edinburg, 1869.

в этом случае направляется импульсивная сила, играет важную роль в теории движения твердого тела в жидкости. Мы будем ее называть *осью импульсивных сил.*

§ 23. О трех поверхностях второго порядка, управляющих движением твердого тела в беспредельной жидкости. Когда имеется только одно твердое тело, то функцию F абсолютного движения жидкости удобнее выражать относительно осей координат, неизменяемо соединенных с телом, так как при этом является возможность дать осям относительно тела самое выгодное положение. Пусть оси, соединенные с телом, в данный момент времени совпадают с неподвижными осями $Oxyz$ предыдущего параграфа. Назовем через u, v, w компоненты поступательного, а через ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты вращательного движения твердого тела по этим осям. Тогда на поверхности тела должно быть удовлетворено условие

$$\frac{\partial F}{\partial n} = (u + \omega_2 z - \omega_3 y)\cos\alpha + (v + \omega_3 x - \omega_1 z)\cos\beta + \\ + (w + \omega_1 y - \omega_2 x)\cos\gamma. \qquad (18)$$

Если положим

$$F = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w + \psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \psi_3 \omega_3, \qquad (19)$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 однозначны, удовлетворяют уравнению Лапласа и имеют в бесконечности производные порядка a^{-3}, то для удовлетворения уравнения (18) надо, чтобы на поверхности тела

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos\alpha, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos\beta, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos\gamma, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial n} &= y\cos\gamma - z\cos\beta, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = z\cos\alpha - x\cos\gamma, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial n} &= x\cos\beta - y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Зная F, определим по формулам (12) и (13) P_1 и H_1, которые на основании формул (20) могут быть напи-

саны в виде:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= -\rho \int\int F \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma, \\ H_1 &= -\rho \int\int F \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Здесь интеграция распространяется только на поверхности тел; но мы можем вообразить, что она распространяется и на поверхность сферы бесконечного радиуса a, ибо на этой сфере подинтегральная функция будет порядка a^{-3}. При таком предположении вторые части формул (21) могут быть преобразованы по формуле Грина (§ 12) в объемные интегралы, распространенные на пространство, заключенное между телом и бесконечно удаленной сферой. Для сокращения введем обозначения:

$$(F,\ \varphi_1) = \int\int\int \rho \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Получим по формуле (19):

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= u(\varphi_1,\ \varphi_1) + v\ (\varphi_2,\ \varphi_1) + w(\varphi_3,\ \varphi_1) + \\ &\quad + \omega_1(\psi_1,\ \varphi_1) + \omega_2(\psi_2,\ \varphi_1) + \omega_3(\psi_3,\ \varphi_1), \\ H_1 &= u(\varphi_1, \psi_1) + v\ (\varphi_2,\ \psi_1) + w\ (\varphi_3,\ \psi_1) + \\ &\quad + \omega_1(\psi_1,\ \psi_1) + \omega_2(\psi_2,\ \psi_1) + \omega_3(\psi_3,\ \psi_1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эти формулы позволяют установить связь между компонентами векторов P и H и живой силой всей рассматриваемой жидкой массы. Называя последнюю через T_1, найдем:

$$\begin{aligned} 2T_1 = (F,\ F) &= (\varphi_1,\ \varphi_1)u^2 + (\varphi_2,\ \varphi_2)v^2 + (\varphi_3,\ \varphi_3)w^2 + \\ &+ 2(\varphi_2,\ \varphi_3)vw + 2(\varphi_3,\ \varphi_1)wu + 2(\varphi_1,\ \varphi_2)uv + \\ &+ (\psi_1,\ \psi_1)\omega_1^2 + (\psi_2,\ \psi_2)\omega_2^2 + (\psi_3,\ \psi_3)\omega_3^2 + \\ &+ 2(\psi_2,\ \psi_3)\omega_2\omega_3 + 2(\psi_3,\ \psi_1)\omega_3\omega_1 + 2(\psi_1,\ \psi_2)\omega_1\omega_2 + \\ &+ 2(\psi_1,\ \varphi_1)\omega_1 u + 2(\psi_2,\ \varphi_1)\omega_2 u + 2(\psi_3,\ \varphi_1)\omega_3 u + \\ &+ 2(\psi_1,\ \varphi_2)\omega_1 v + 2(\psi_2,\ \varphi_2)\omega_2 v + 2(\psi_3,\ \varphi_2)\omega_3 v + \\ &+ 2(\psi_1,\ \varphi_3)\omega_1 w + 2(\psi_2,\ \varphi_3)\omega_2 w + 2(\psi_3,\ \varphi_3)\omega_3 w. \end{aligned} \tag{23}$$

Из этой формулы видно, что

$$P_1 = \frac{\partial T_1}{\partial u}, \quad H_1 = \frac{\partial T_1}{\partial \omega_1}, \ldots \tag{24}$$

Назовем через T_2 однородную функцию второго измерения относительно u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3, представляющую живую силу твердого тела, и припомним формулы динамики:

$$N_1 = \frac{\partial T_2}{\partial u}, \quad G_1 = \frac{\partial T_2}{\partial \omega_1}, \ldots \tag{25}$$

Из уравнений (11) следует, что импульсивная сила и импульсивная пара выражаются с помощью живой силы $T = T_1 + T_2$ всей рассматриваемой системы формулами:

$$Q_1 = \frac{\partial T}{\partial u}, \quad K_1 = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \ldots \tag{26}$$

Складывая вторую часть формулы (23) с выражением двойной живой силы твердого тела, найдем выражение вида:

$$\begin{aligned} 2T = {} & a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv + \\ & + b_{11}\omega_1^2 + b_{22}\omega_2^2 + b_{33}\omega_3^2 + 2b_{23}\omega_2\omega_3 + 2b_{31}\omega_3\omega_1 + 2b_{12}\omega_1\omega_2 + \\ & + 2c_{11}u\omega_1 + 2c_{12}u\omega_2 + 2c_{13}u\omega_3 + \\ & + 2c_{21}v\omega_1 + 2c_{22}v\omega_2 + 2c_{23}v\omega_3 + \\ & + 2c_{31}w\omega_1 + 2c_{32}w\omega_2 + 2c_{33}w\omega_3. \end{aligned} \tag{27}$$

Надлежащим выбором начала координат можно всегда достигнуть, чтобы в этой формуле коэффициенты при $u\omega_2$ и $v\omega_1$ и т. д. были одинаковы. Пусть ξ, η, ζ будут координаты относительно прежних осей начала O' новых осей, параллельных прежним. Тогда между скоростями u, v, w старого начала O и скоростями u', v', w' нового O' будет существовать связь:

$$\begin{aligned} u &= u' - (\omega_2\zeta - \omega_3\eta), \\ v &= v' - (\omega_3\xi - \omega_1\zeta), \\ w &= w' - (\omega_1\eta - \omega_2\xi). \end{aligned}$$

Подставив это в формулу (27) и допустив для простоты, что вследствие выбора первоначальных осей $a_{23} = a_{31} = a_{23} = 0$, найдем, что коэффициенты при $u'\omega_2$, $v'\omega_1$, ... примут вид:

$$c'_{12} = c_{12} - a_{11}\zeta, \quad c'_{21} = c_{21} + a_{22}\zeta, \quad \ldots$$

Эти формулы дают нам возможность выбрать ξ, η, ζ так, чтобы

$$c'_{12} = c'_{21}, \quad c'_{23} = c'_{32}, \quad c'_{31} = c'_{13}.$$

Для этого стоит только положить:

$$\xi = \frac{c_{23} - c_{32}}{a_{22} + a_{33}}, \quad \eta = \frac{c_{31} - c_{13}}{a_{33} + a_{11}}, \quad \zeta = \frac{c_{12} - c_{21}}{a_{11} + a_{22}}. \tag{28}$$

Точка, определенная этими уравнениями, играет важную роль в движении твердого тела в беспредельной жидкости; мы будем звать ее *центральной точкой*. Рассмотрим теперь в связи с формулой (27) три поверхности второго порядка, из которых первые две имеют место при всяких осях, последняя же может иметь значение только тогда, когда начало координат есть центральная точка. Эти поверхности представляются уравнениями:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = f_1(x, y, z) = 1; \tag{29}$$

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy = f_2(x, y, z) = 1; \tag{30}$$

$$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{23}yz + 2c_{31}zx + 2c_{12}xy = f_3(x, y, z) = 1. \tag{31}$$

Первые две поверхности суть эллипсоиды, потому что первые их части представляют двойную живую силу при положении $u = x$, $v = y$, $w = z$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ и при положении $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = z$.

Разъясним значения этих поверхностей. Предположим, что наше твердое тело может иметь только поступательное движение в направлении радиуса-вектора r эллипсоида (29), и посмотрим, какой импульсивной силой Q следует подей

ствовать в этом направлении, чтобы тело получило скорость V. По формулам (26), (27) и (29)

$$Q = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{x}{r} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{y}{r} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{z}{r} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V}{r^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x + \frac{\partial f_1}{\partial y}y + \frac{\partial f_1}{\partial z}z\right) = \frac{V}{r^2}f_1(x, y, z) = \frac{V}{r^2},$$

или

$$Q = \mu V, \quad \mu = \frac{1}{r^2}. \tag{32}$$

Величину μ мы будем звать *измененной массой тела в направлении* r. Формулы (32) показывают, что эллипсоид (29) получается, если отложим на радиусах-векторах, проходящих через точку O, длины

$$r = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Мы будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом измененных масс*. То обстоятельство, что изменение начала координат не изменяет первых шести членов формулы (27), показывает, что эллипсоид измененных масс один и тот же для всякой точки тела. Если направим оси координат по главным осям эллипсоида измененных масс, то уравнение (29) примет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 1,$$

причем две из величин a_{11}, a_{22}, a_{33} будут представлять наибольшую и наименьшую измененную массу.

Покажем, что *измененная масса во всяком направлении более массы тела*. Задавшись каким-нибудь направлением, возьмем его за направление оси Ox в формуле (27) и заметим, что для этого направления

$$\mu = a_{11},$$

или, обращая внимание на формулу (23) и припоминая выражение для живой силы T_2,

$$\mu = M + (\varphi_1, \varphi_1), \tag{33}$$

где M — масса тела. Это равенство доказывает желаемое. Предположим теперь, что для тела, погруженного в жидкость

возможно только вращение около радиуса-вектора r' эллипсоида (30), и определим момент импульсивной пары K, плоскость которой перпендикулярна r' и которая сообщает телу угловую скорость ω. По формулам (26) и (27)

$$K = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{x}{r'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{y}{r'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{z}{r'} =$$

$$= \frac{\omega}{2r'^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}x + \frac{\partial f_2}{\partial y}y + \frac{\partial f_2}{\partial z}z\right) = \frac{\omega}{r'^2}f_2(x, y, z) = \frac{\omega}{r'^2},$$

или

$$K = \nu\omega, \quad \nu = \frac{1}{r'^2}. \tag{34}$$

Величину ν мы будем называть *измененным моментом инерции относительно оси* r'. Формулы (34) показывают, что эллипсоид (30) получается, если отложим на радиусах-векторах, проходящих через точку O, длины

$$r' = \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Мы будем называть этот эллипсоид *эллипсоидом измененных моментов инерции*. Этот эллипсоид будет изменяться с изменением начала координат. Но какую бы точку мы ни взяли за центр эллипсоида, всегда *измененный момент инерции относительно всякой оси более момента инерции тела относительно этой оси*. Действительно, если примем эту ось за ось Ox, то по формуле (23) и по известному выражению живой силы твердого тела

$$\nu = b_{11} = J_1 + (\psi_1, \psi_1), \tag{35}$$

где J_1 — момент инерции тела около оси Ox.

Переходим к рассмотрению поверхности (31), которая, как мы сказали, может иметь значение только для центральной точки и представляет некоторый эллипсоид или гиперболоид. Проведем некоторый радиус-вектор r'' этой поверхности и предположим, что наше твердое тело может только вращаться около этого радиуса и скользить вдоль него. Если бы тело не было погружено в жидкость, то для сообщения ему одного вращения ω около упомянутой оси r''

нужно бы было подействовать только парой, ось которой можно принять направленной по r''; но в нашем случае, кроме импульсивной пары, момент которой определяется по формуле (34), следует еще употребить импульсивную силу Q, которая найдется, полагая $u = v = w = 0$ в формуле

$$Q = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{x}{r''} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{y}{r''} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{z}{r''},$$

т. е. будет:

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\omega}{r''^2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}x + \frac{\partial f_3}{\partial y}y + \frac{\partial f_3}{\partial z}z\right) = \frac{\omega}{r''^2},$$

или

$$Q = \lambda\omega, \quad \lambda = \frac{1}{r''^2}. \tag{36}$$

Точно так же мы можем показать, что для сообщения нашему телу поступательного движения со скоростью V вдоль радиуса r'', кроме импульсивной силы, определяемой по формуле (32), надо еще употребить импульсивную пару, момент которой по направлению r'' будет:

$$K = \lambda V. \tag{37}$$

Таким образом, выясняется механическое значение поверхности (31) и множителя λ. Если эта поверхность есть гиперболоид, то по направлению асимптотического конуса $\lambda = 0$, и поступательное движение в этом направлении получается только от действия импульсивной силы.

Подобно тому как все влияние твердого тела в пустоте на его движение характеризуется его массой и центральным эллипсоидом инерции, все влияние твердого тела в жидкости на сообщаемое ему движение характеризуется тремя указанными поверхностями. Когда эти три поверхности даны и известны векторы V и ω, то весьма просто построить геометрически векторы Q и K. Определяем точки пересечения A и C вектора V с поверхностями (29) и (31), а также точки пересечения B и D вектора ω с поверхностями (30) и (31); проводим через точки A, B, C, D касательные плоскости к соответственным поверхностям второго порядка и

опускаем на эти плоскости из O перпендикуляры OA', OB', OC', OD'; по направлению этих перпендикуляров откладываем векторы

$$\frac{V}{OA\cdot OA'},\quad \frac{\omega}{OB\cdot OB'},\quad \frac{V}{OC\cdot OC'},\quad \frac{\omega}{OD\cdot OD'}.$$

Складывая геометрически первый и четвертый векторы, найдем Q, а складывая второй и третий — найдем K.

Рассмотрим теперь частные случаи, при которых функция $2T$, а следовательно, и уравнения трех вышеупомянутых поверхностей упрощаются. Будем предполагать, что уравнение (27) отнесено к осям, имеющим начало в центральной точке, и рассмотрим особые расположения тела относительно этих осей.

1) Тело симметрично как по форме, так и по расположению масс относительно плоскости Oxz. В этом предположении живая сила не должна изменяться при изменении v, ω_1 и ω_3 на $-v$, $-\omega_1$, $-\omega_3$, поэтому

$$a_{12}=a_{23}=b_{12}=b_{23}=0,$$
$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=c_{13}=c_{31}=0. \tag{38}$$

2) Тело симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz. Здесь к условиям (38) прибавляются аналогичные условия для симметрии относительно плоскости Oyz, что дает еще

$$a_{13}=b_{13}=c_{23}=0.$$

Вследствие этого живая сила получает вид:

$$2T=a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+b_{11}\omega_1^2+b_{22}\omega_2^2+b_{33}\omega_3^2+ \\ +2c_{12}(u\omega_2+v\omega_1). \tag{39}$$

3) Тело симметрично относительно всех трех плоскостей координат. Здесь прибавляется лишнее условие $c_{12}=0$, так что

$$2T=a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+b_{11}\omega_1^2+b_{22}\omega_2^2+b_{33}\omega_3^2. \tag{40}$$

4) Данное тело есть тело вращения относительно оси Oz. В этом случае живая сила должна иметь вид формулы (39); кроме того, она должна обладать тем свойством, что она

не изменяется при повороте векторов ω и V около оси Oz на $\frac{\pi}{2}$, т. е. при замене ω_1, ω_2, u, v на ω_2, $-\omega_1$, v, $-u$. Это положение требует, чтобы

$$a_{11} = a_{22}, \quad b_{11} = b_{22}, \quad c_{12} = 0.$$

Живая сила при этом принимает вид:

$$2T = a_{11}(u^2 + v^2) + a_{33}w^2 + b_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_{33}\omega_3^2. \qquad (41)$$

5) Тело обладает тем свойством, что, будучи повернуто около оси Oz на π, не изменяет своего внешнего вида (примером может служить пароходный винт с двумя лопастями). Выражение $2T$ не должно изменяться от поворота на π около оси Oz векторов ω и V, т. е. от замены u, v, ω_1, ω_2 на $-u$, $-v$, $-\omega_1$, $-\omega_2$. Это дает

$$a_{13} = a_{23} = b_{13} = b_{23} = 0,$$

$$c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0,$$

так что

$$2T = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + b_{11}\omega_1^2 + b_{22}\omega_2^2 + b_{33}\omega_3^2 + 2b_{12}\omega_1\omega_2 + 2c_{11}u\omega_1 + 2c_{22}v\omega_2 + 2c_{33}w\omega_3 + 2c_{12}(u\omega_2 + v\omega_1). \qquad (42)$$

6) Если тело, имея свойство, указанное в случае (5), обладает еще тем свойством, что не изменяет вида при повороте относительно оси Oz на $\frac{\pi}{2}$ (пароходный винт с четырьмя лопастями), то, рассуждая как в случае (4), найдем:

$$a_{11} = a_{22}, \quad b_{11} = b_{22};$$

$$a_{12} = b_{12} = 0;$$

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{12} = 0,$$

откуда

$$2T = a_{11}(u^2 + v^2) + a_{33}w^2 + b_{11}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_{33}\omega_3^2 + 2c_{11}(u\omega_1 + v\omega_2) + 2c_{33}w\omega_3. \qquad (43)$$

Сравнивая этот последний случай с (4), видим, что в обоих случаях эллипсоиды измененных масс и моментов

инерции суть эллипсоиды вращения около оси Oz, но между обоими этими случаями есть существенное различие. В случае (4) всякая импульсивная сила, действуя на центральную точку, сообщает телу только поступательное движение, а всякая импульсивная пара — только вращательное движение (если бы $a_{11} = a_{33}$, то этот случай вполне был бы схож с движением тела вращения в пустоте); между тем в случае (6) от действия одной импульсивной силы или одной импульсивной пары получается поступательное и вращательное движения.

Если, например, мы имеем импульсивную пару K, момент которой направлен по Oz, то тело начнет двигаться по направлению этой оси и вращаться около нее со скоростями w и ω_3, определяемыми из уравнений:

$$0 = a_{33}w + c_{33}\omega_3,$$
$$K = b_{33}\omega_3 + c_{33}w.$$

Отсюда

$$w = \frac{Kc_{33}}{c_{33}^2 - b_{33}a_{33}}, \quad \omega_3 = \frac{Ka_{33}}{a_{33}b_{33} - c_{33}^2}. \tag{44}$$

Таким образом, объясняется, отчего от действия пары пароходный винт получает, кроме вращения, еще поступательное движение.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим для примера изменение массы и моментов инерции в теле, имеющем форму шара или эллипсоида. В случае шара, разумеется, может быть речь только об изменении массы, которое для всех направлений одинаково. По формуле (33) масса прирастает на

$$(\varphi_1, \varphi_1) = -\rho\int\int \varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\, d\sigma = -\rho\int\int \varphi_1 \cos\alpha\, d\sigma. \tag{45}$$

На основании формулы (16) четвертой лекции мы должны в случае шара положить

$$\varphi_1 = -\frac{b^3}{2}\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

где b — радиус шара; получаем:

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{b}{2}\rho \int\int \cos^2\alpha\, d\sigma = \pi b^3 \rho \int_0^{\pi} \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3}\pi b^3 \rho,$$

и, следовательно,

$$\mu = M + \frac{2}{3}\pi b^3 \rho. \tag{46}$$

Таким образом, *динамический эффект жидкости, в которую погружен шар, состоит в том, что масса шара увеличивается на половину массы вытесненной им жидкости.*

Переходим к эллипсоиду. Направив оси координат по его осям, представим уравнение эллипсоида в виде

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{y^2}{1+\varepsilon'^2} + z^2 = c^2,$$

где c — наименьшая полуось эллипсоида. Так как вследствие симметрии рассматриваемого тела относительно осей координат (случай 3) эллипсоиды измененных масс и измененных моментов инерции имеют оси, направленные по осям координат, то нам достаточно определить измененные массы и измененные моменты инерции только для радиусов-векторов, идущих по этим осям. На основании формулы (42) шестой лекции мы должны подставить в формулу (45)

$$\varphi_1 = -\frac{Ax}{4\pi - A},$$

так что

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{A\rho}{4\pi - A}\int\int x \cos\alpha\, d\sigma.$$

Прилагаем сюда формулу (5) третьей лекции, считая в ней

$$F = x, \quad l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0$$

и относя ее к объему эллипсоида:

$$(\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{A\rho}{4\pi - A}\int\int\int dx\, dy\, dz = \frac{A}{4\pi - A}\rho U,$$

где U — объем эллипсоида. Так же найдем (φ_2, φ_2) и (φ_3, φ_3), так что все три измененные массы будут:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= M + \frac{A}{4\pi - A}\rho U, \\ a_{22} &= M + \frac{B}{4\pi - B}\rho U, \\ a_{33} &= M + \frac{C}{4\pi - C}\rho U. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Сюда следует прибавить формулы из теории притяжения:

$$\left.\begin{aligned} A &= q\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\varepsilon^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\varepsilon'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ B &= q\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\varepsilon^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= q\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\varepsilon^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где

$$q = 4\pi(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если данный эллипсоид есть эллипсоид вращения около малой оси, то

$$\left.\begin{aligned} A = B &= 2\pi\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon\right), \\ C &= 4\pi\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\operatorname{arc\,tg}\,\varepsilon\right). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Приложим эти формулы к случаю бесконечно тонкого диска, в который обращается наш эллипсоид при $\varepsilon = \infty$. Разлагаем вторые части формулы (49) по нисходящим степеням ε и ограничиваемся членами порядка ε^{-1}:

$$A = B = \frac{\pi^2}{\varepsilon}, \quad C = 4\pi - \frac{2\pi^2}{\varepsilon}. \tag{50}$$

Подстановка этих формул в уравнения (47) дает:

$$a_{11} = a_{22} = M; \quad a_{33} = M + \frac{8}{3} a^3 \rho, \tag{51}$$

где a — радиус диска.

Таким образом, несмотря на бесконечно малый объем жидкости, вытесняемой бесконечно тонким диском, кажущееся приращение его массы для движения, перпендикулярного к плоскости диска, есть конечная величина, пропорциональная кубу радиуса диска.

Для определения измененных моментов инерции погруженного в беспредельную жидкость эллипсоида мы должны предварительно определить ψ_1, ψ_2, ψ_3. Легко усмотреть, что выражение

$$\psi_1 = k(yZ - zY), \tag{52}$$

где Z и Y — компоненты по осям координат силы притяжения эллипсоидом внешней точки (произведение коэффициента притяжения на плотность берем равным единице), удовлетворяет уравнению Лапласа; с другой стороны, оно обращается в бесконечности в величину порядка a^{-2}; на поверхности же тела имеем по известной теореме из теории притяжения

$$\frac{\partial Y}{\partial n} + \frac{\partial Y}{\partial n'} = 4\pi \cos\beta,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n} + \frac{\partial Z}{\partial n'} = 4\pi \cos\gamma,$$

где dn — элемент нормали, направленной внутрь жидкости, а dn' — элемент нормали, направленной внутрь эллипсоида. Так как при составлении производных по $\partial n'$ нужно брать

$$Y = -By, \quad Z = -Cz,$$

то

$$\frac{\partial Y}{\partial n} = (4\pi - B)\cos\beta,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = (4\pi - C)\cos\gamma,$$

и по формуле (52)

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = k[(4\pi - C + B)y\cos\gamma - (4\pi - B + C)z\cos\beta].$$

Подставляя в четвертое из уравнений (20) и замечая, что для эллипсоида

$$y : z = \cos\beta\,(1+\varepsilon'^2) : \cos\gamma,$$

имеем для определения k уравнение:

$$k\,[(4\pi - C + B)(1+\varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)] = \varepsilon'^2,$$

откуда

$$k = \frac{\varepsilon'^2}{(4\pi - C + B)(1+\varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)}. \tag{53}$$

Формулы (52) и (53) определяют ψ_1; подобным же образом найдем ψ_2 и ψ_3. Теперь мы можем составить величину

$$(\psi_1, \psi_1) = -\rho \int\int \psi_1 (y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma =$$

$$= k\rho\,(C - B) \int\int yz\,(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma.$$

Пользуясь формулой (5) третьей лекции, в которой возьмем

$$F = yz, \quad l = 0, \quad m = -z, \quad n = y$$

и которую отнесем к объему эллипсоида, напишем, что

$$(\psi_1, \psi_1) = k\rho\,(C - B) \int\int\int (y^2 - z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{5}\,k\,(C - B)\,\rho U (b^2 - c^2),$$

или, подставляя величину k,

$$(\psi_1, \psi_1) = \frac{c^2\varepsilon'^4\,(C - B)}{5\,[(4\pi - C + B)(1+\varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)]}\,U\rho.$$

Подобным же образом найдем (ψ_2, ψ_2) и (ψ_3, ψ_3), так что, обозначая через J_1, J_2, J_3 моменты инерции эллипсоида относительно его главных осей, найдем по формуле (35):

$$\left.\begin{aligned}
b_{11} &= J_1 + \frac{1}{5}\,\frac{c^2\varepsilon'^4\,(C - B)\,U\rho}{(4\pi - C + B)(1+\varepsilon'^2) - (4\pi - B + C)}, \\
b_{22} &= J_2 + \frac{1}{5}\,\frac{c^2\varepsilon^4\,(C - A)\,U\rho}{(4\pi - C + A)(1+\varepsilon^2) - (4\pi - A + C)}, \\
b_{33} &= J_3 + \frac{1}{5}\,\frac{c^2\,(\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2\,(B - A)\,U\rho}{(4\pi - B + A)(1+\varepsilon^2) - (4\pi - A + B)(1+\varepsilon'^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Приложим эти формулы к бесконечно тонкому диску. Для этого подставим вместо A, B и C их величины из формул (50); получим:

$$b_{11} = b_{22} = J_1 + \frac{16}{45} a^5 \rho, \quad b_{33} = J_3, \tag{55}$$

где a — радиус диска. Мы видим, что изменение момента инерции диска относительно его диаметра есть тоже конечная величина, пропорциональная пятой степени диаметра диска.

§ 24. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости и их интеграция. Мы теперь будем рассматривать три системы осей координат: подвижные оси x, y, z, неизменяемо соединенные с телом, неподвижные оси x', y', z', которые в момент времени t совпадают с подвижными, и оси x'', y'', z'', начало которых всегда совпадает с началом подвижных осей, но которые остаются параллельными неподвижным осям. Так как все три системы осей в момент времени t совпадают, то компоненты всякого вектора в этот момент относительно каждой системы одинаковы; но это не имеет места относительно производных от компонентов по времени. Будем приписывать величинам, относящимся ко вторым и третьим осям, значки ($'$) и ($''$) и напишем для времени t формулы (16) в виде:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + S_1 &= \frac{dQ_1''}{dt}, & L_1 + M_1 &= \frac{dK_1'}{dt}, \\ R_2 + S_2 &= \frac{dQ_2''}{dt}, & L_2 + M_2 &= \frac{dK_2'}{dt}, \\ R_3 + S_3 &= \frac{dQ_3''}{dt}, & L_3 + M_3 &= \frac{dK_3'}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Вообразив точку A, помещенную в конце вектора Q, начало которого лежит в начале подвижных осей, заметим, что

$$\frac{dQ_1''}{dt}, \quad \frac{dQ_2''}{dt}, \quad \frac{dQ_3''}{dt}$$

суть проекции на оси x'', y'', z'' скорости точки A относительно этих осей, которая слагается по правилу параллелограмма из скорости точки A относительно осей x, y, z и скорости влечения точки A вследствие вращения этих осей. На основании этого замечания имеем для момента t:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ_1''}{dt} &= \frac{dQ_1}{dt} + \omega_2 Q_3 - \omega_3 Q_2,\\ \frac{dQ_2''}{dt} &= \frac{dQ_2}{dt} + \omega_3 Q_1 - \omega_1 Q_3,\\ \frac{dQ_3''}{dt} &= \frac{dQ_3}{dt} + \omega_1 Q_2 - \omega_2 Q_1.\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Далее, по прошествии бесконечно малого времени τ по формулам, аналогичным формуле (14), имеем:

$$\begin{aligned}K_1' &= K_1'' + Q_3 v\tau - Q_2 w\tau,\\ K_2' &= K_2'' + Q_1 w\tau - Q_3 u\tau,\\ K_3' &= K_3'' + Q_2 u\tau - Q_1 v\tau.\end{aligned}$$

Беря отсюда производные по времени, мы получим во второй части производные

$$\frac{dK_1''}{dt}, \quad \frac{dK_2''}{dt}, \quad \frac{dK_3''}{dt},$$

которые следует определить по формулам, аналогичным (57). Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dK_1'}{dt} &= \frac{dK_1}{dt} + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 + Q_3 v - Q_2 w,\\ \frac{dK_2}{dt} &= \frac{dK_2}{dt} + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 + Q_1 w - Q_3 u,\\ \frac{dK_3'}{dt} &= \frac{dK_3}{dt} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + Q_2 u - Q_1 v.\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Подставляя выражения (57) и (58) в (56), получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + S_1 &= \frac{dQ_1}{dt} + \omega_2 Q_3 - \omega_3 Q_2, \\ R_2 + S_2 &= \frac{dQ_2}{dt} + \omega_3 Q_1 - \omega_1 Q_3, \\ R_3 + S_3 &= \frac{dQ_3}{dt} + \omega_1 Q_2 - \omega_2 Q_1; \\ L_1 + M_1 &= \frac{dK_1}{dt} + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 + vQ_3 - wQ_2, \\ L_2 + M_2 &= \frac{dK_2}{dt} + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 + wQ_1 - uQ_3, \\ L_3 + M_3 &= \frac{dK_3}{dt} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + uQ_2 - vQ_1. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Так как эти уравнения содержат только величины, относящиеся к подвижным осям, то их и можно принять за дифференциальные уравнения движения твердого тела, выраженные относительно этих осей. Определив из них u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 как функции времени, мы уже легко можем найти положение подвижных осей относительно неподвижных во всякое время. Мы рассмотрим здесь только задачу о движении твердого тела в жидкости по инерции, т. е. только тот случай, когда

$$R_1 + S_1 = R_2 + S_2 = R_3 + S_3 = 0,$$
$$L_1 + M_1 = L_2 + M_2 = L_3 + M_3 = 0.$$

Уравнения (59) обращаются при этом в следующие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= Q_2\omega_3 - Q_3\omega_2, \\ \frac{dQ_2}{dt} &= Q_3\omega_1 - Q_1\omega_3, \\ \frac{dQ_3}{dt} &= Q_1\omega_2 - Q_2\omega_1; \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= Q_2 w - Q_3 v + K_2\omega_3 - K_3\omega_2, \\ \frac{dK_2}{dt} &= Q_3 u - Q_1 w + K_3\omega_1 - K_1\omega_3, \\ \frac{dK_3}{dt} &= Q_1 v - Q_2 u + K_1\omega_2 - K_2\omega_1, \end{aligned}\right\} \quad (60')$$

где вместо Q_1, Q_2, Q_3, K_1, K_2, K_3 надо подставить величины, данные формулами (26) и (27). Мы можем сейчас же получить три интеграла этих уравнений. Умножаем первые три уравнения (60) на Q_1, Q_2, Q_3, складываем их и интегрируем полученное уравнение: потом умножаем все шесть уравнений соответственно на K_1, K_2, K_3, Q_1, Q_2, Q_3, складываем и интегрируем; получаем:

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \text{const.}, \tag{61}$$

$$K_1Q_1 + K_2Q_2 + K_3Q_3 = \text{const.} \tag{62}$$

Эти два интеграла являются следствием принципа сохранения импульсивных силы и пары. Первый интеграл показывает, что импульсивная сила Q постоянна по величине, а второй, — что проекция момента импульсивной пары на направление импульсивной силы постоянна.

Для получения третьего интеграла умножаем наши шесть уравнений (60) соотв ственно на u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 и, сложив их, преобразуем результат по формулам (26):

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)v + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)w + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right)\omega_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right)\omega_2 +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right)\omega_3 = \frac{d(2T)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} -$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{d\omega_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{dT}{dt}.$$

Отсюда получаем интеграл живых сил:

$$T = \text{const.} \tag{63}$$

Дальнейшая же интеграция уравнений (60) при произвольной форме тела и произвольных начальных данных до сих пор еще не осуществлена, и окончательное решение задачи о движении твердого тела в жидкости известно только в некоторых частных случаях. Во-первых, разобраны случаи установившегося движения (установившегося относительно подвижных осей, т. е. когда u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 постоянны), во-вторых, дано полное решение задачи в предположении,

что тело приведено в движение с помощью импульсивной пары[1]) и, в третьих, вполне решена задача о движении в жидкости тела вращения[2]).

Обращаясь к случаю установившегося движения, посмотрим прежде, не может ли тело иметь поступательное равномерно-прямолинейное движение. Положив в формулах (60) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ и приняв в них u, v, w, Q_1, Q_2, Q_3, K_1, K_2, K_3 постоянными, мы удовлетворим им, если

$$\frac{u}{Q_1} = \frac{v}{Q_2} = \frac{w}{Q_3}. \tag{64}$$

Для истолкования смысла этой пропорции назовем через x, y, z координаты точки, в которой вектор V пересекает эллипсоид измененных масс, и представим на основании формулы (29) эту пропорцию в виде:

$$x : \frac{\partial f_1}{\partial x} = y : \frac{\partial f_1}{\partial y} = z : \frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что *для всякого твердого тела, погруженного в жидкость, существуют только три направления, по которым оно вследствие инерции может двигаться поступательным прямолинейно-равномерным движением, и эти направления суть направления осей эллипсоида измененных масс.* При этом, если рассматриваемое тело симметрично относительно трех плоскостей координат, т. е. его живая сила выражается формулой (40), то легко решить вопрос о том, которые из этих трех поступательных движений будут устойчивы. Пусть тело движется поступательно по направлению Ox со скоростью c. Предположив, что оно подвергнулось некоторому бесконечно малому возмущению, будем считать величины v, w, ω_1, ω_2, ω_3 бесконечно малыми

---

[1]) Это решение дано Ламбом, см. Lamb, Hydrodynamics, § 114.

[2]) Общее решение дано Кирхгофом в Borchardt's Journal, т. 71; подробности же были разработаны Кепке в Math. Annalen, т. 12 и Шюльке в Grunnert's Archiv, ч. 68, 1882.

и полагать $u = c + u'$, где u' бесконечно мало. По формулам (60) и (40) получим:

$$a_{11}\frac{du'}{dt} = 0,\quad a_{22}\frac{dv}{dt} = -a_{11}c\omega_3,\quad a_{33}\frac{dw}{dt} = a_{11}c\omega_2,$$

$$b_{11}\frac{d\omega_1}{dt} = 0,\quad b_{22}\frac{d\omega_2}{dt} = cw(a_{33} - a_{11}),\qquad b_{33}\frac{d\omega_3}{dt} = cv(a_{11} - a_{22}).$$

Отсюда

$$a_{22}\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{a_{11}}{b_{33}}(a_{22} - a_{11})c^2v,$$
$$a_{33}\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{a_{11}}{b_{22}}(a_{33} - a_{11})c^2w. \tag{65}$$

Эти уравнения показывают, что *прочно только то поступательное движение, которое совершается по направлению оси, соответствующей наибольшей измененной массе.*

Если все точки поверхности, представленной уравнением (31), удаляются в бесконечность, т. е. $c_{11} = c_{22} = \ldots = 0$, то для тела возможны по инерции три равномерных вращения около осей эллипсоида измененных моментов инерции, построенного для центральной точки, ибо уравнения (60) удовлетворяются при постоянных ω_1, ω_2, ω_3, K_1, K_2, K_3 и при $u = v = w = 0$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, если

$$\frac{\omega_1}{K_1} = \frac{\omega_2}{K_2} = \frac{\omega_3}{K_3}; \tag{66}$$

эта же последняя пропорция может быть представлена в виде:

$$x : \frac{\partial f_2}{\partial x} = y : \frac{\partial f_2}{\partial y} = z : \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

где x, y, z — координаты точки, в которой вектор ω пересекает эллипсоид, выраженный уравнением (30).

Общим случаем установившегося движения будет винтовое движение тела, которое найдем, приравнивая вторые части формул (60) нулю. Из полученных таким образом шести уравнений будут независимы только четыре, так как, умножив первые три на ω_1, ω_2, ω_3 и сложив, получаем

$0 = 0$, и то же самое получаем, умножив все шесть уравнений соответственно на $u, v, w, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ и сложив. Четырем независимым уравнениям мы можем удовлетворить множеством значений u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3, а складывая найденные поступательные и вращательные движения, мы получим винтовые установившиеся движения. Легко увидеть, что все полученные нами шесть уравнений будут удовлетворены, если

$$\frac{\omega_1}{Q_1} = \frac{\omega_2}{Q_2} = \frac{\omega_3}{Q_3} = \frac{u}{K_1 - \lambda Q_1} = \frac{v}{K_2 - \lambda Q_2} = \frac{w}{K_3 - \lambda Q_3}, \qquad (67)$$

где λ — произвольная величина. Равенство первых трех отношений пропорции показывает, что мгновенная ось вращения должна быть направлена по импульсивной силе Q; равенство последних трех показывает, что момент импульсивной пары разлагается на два вектора, из которых один направлен по оси вращения, а другой — по вектору V; наконец, равенство между собой тех и других отношений показывает, что компонент момента импульсивной пары по направлению вектора V относится к Q так, как V относится к ω. На основании способа сложения поступательного и вращательного движений в одно винтовое и правила замены силы и пары силой и парой, ось которой направлена по силе, следует, что при указанных условиях мы получим винтовое движение, *ось вращения и скольжения* которого совпадает с *осью импульсивных сил*. Из сказанного в § 18 ясно, что такое движение тела будет установившимся.

Условия (67) неприложимы в случае $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, но при этом, как явствует из формул (60), мы удовлетворим условию установившегося движения формулой (66). Легко показать, что эта формула дает нам три установившихся винтовых движения, совершающихся около взаимно перпендикулярных непересекающихся винтовых осей. Поместив начало координат в центральной точке, направим оси по главным осям эллипсоида измененных масс. Из условия равенства нулю компонентов импульсивной силы опреде-

ляем компоненты скорости поступательного движения:

$$u = -\frac{1}{a_{11}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_1}, \quad v = -\frac{1}{a_{22}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_2}, \quad w = -\frac{1}{a_{33}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_3}. \tag{68}$$

Подставляем отсюда u, v, w во вторые формулы (26):

$$K_1 = \frac{\partial f_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{2\partial\omega_1} - \left[\frac{c_{11}}{2a_{11}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial\omega_1} + \frac{c_{21}}{2a_{22}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial\omega_2} + \frac{c_{31}}{2a_{33}}\frac{\partial f_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial\omega_3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial\omega_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_{11}}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1^2}\frac{\partial f_3}{\partial\omega_1} + \frac{1}{a_{22}}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\frac{\partial f_3}{\partial\omega_2} + \frac{1}{a_{33}}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega_1\partial\omega_3}\frac{\partial f_3}{\partial\omega_3}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\omega_1}\left\{f_2 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_1}\right)^2 + \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_2}\right)^2 + \frac{1}{a_{33}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_3}\right)^2\right]\right\}.$$

Положив для сокращения письма

$$\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = f_2 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_1}\right)^2 + \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_2}\right)^2 + \frac{1}{a_{33}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega_3}\right)^2\right], \tag{69}$$

получим:

$$K_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_1}, \quad K_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}, \quad K_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega_3}. \tag{70}$$

Построим поверхность

$$\psi(x, y, z) = 1 \tag{71}$$

и, назвав через x, y, z координаты точки ее пересечения с вектором ω, представим формулу (66) в виде:

$$x : \frac{\partial\psi}{\partial x} = y : \frac{\partial\psi}{\partial y} = z : \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Отсюда заключаем, что вектор ω должен быть направлен по одной из главных осей поверхности (71). Присоединив к вращению ω поступательное движение со скоростью, определенной по формулам (68), мы получим три винтовых движения, совершающихся относительно осей вращения и скольжения, параллельных осям поверхности (71).

Переходим к неустановившимся движениям твердого тела, погруженного в жидкость. Если одна точка тела

неподвижна, то его движение определится по трем последним уравнениям (60′), приняв за начало координат неподвижную точку. Если для удобства направим оси координат по главным осям эллипсоида измененных моментов инерции, то найдем вследствие $u = v = w = 0$:

$$\left.\begin{aligned} b_{11}\frac{d\omega_1}{dt} &= \omega_2\omega_3(b_{22} - b_{33}),\\ b_{22}\frac{d\omega_2}{dt} &= \omega_3\omega_1(b_{33} - b_{11}),\\ b_{33}\frac{d\omega_3}{dt} &= \omega_1\omega_2(b_{11} - b_{22}). \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Так как эти уравнения одинаковы с уравнениями Эйлера для движения в пустоте твердого тела, имеющего неподвижную точку, то замечаем, что *весь эффект жидкости на движение тела, имеющего неподвижную точку, состоит в изменении его эллипсоида инерции*[1]). Так же просто решается задача о движении свободного тела в жидкости, когда оно получило свое движение только от импульсивной пары. Поместив начало координат в центральной точке и направив оси по главным осям поверхности (71), пишем три последних уравнения (60), приняв в них $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ и заменив K_1, K_2, K_3 по формулам (70):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_1}\right) &= \omega_3\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_2} - \omega_2\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_3},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_2}\right) &= \omega_1\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_3} - \omega_3\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_1},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_3}\right) &= \omega_2\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_1} - \omega_1\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\omega_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

[1]) Мы можем получить этот эффект, присоединив к данному телу некоторое добавочное твердое тело, которое назовем *эквивалентным телом*. Эквивалентное тело может иметь моменты инерции, значительно превосходящие моменты инерции массы жидкости, наполняющей объем тела (как было показано в конце § 23). Этим отличается рассматриваемая задача от задачи о движении твердого тела, содержащего внутри себя жидкость, где момент инерции эквивалентного тела относительно всякой

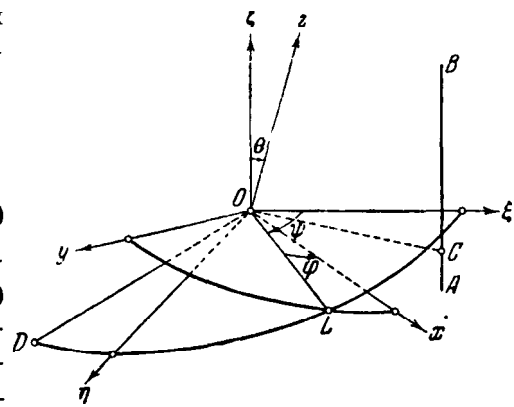
Это суть тоже формулы, аналогичные формулам Эйлера. Роль эллипсоида инерции играет здесь поверхность (71), которая, вообще говоря, может быть и не эллипсоидом. Когда вращательное движение тела будет найдено, то поступательное определится из формул (68).

Переходим к задаче о движении тела вращения. Представив живую силу формулой (41), увидим, что вторая часть шестого из уравнений (60) обращается в нуль, так что к трем найденным интегралам присоединяется еще интеграл

$$K_3 = \text{const.},$$

или

$$\omega_3 = \text{const.} \quad (74)$$



Фиг. 24.

Дальнейшую интеграцию формул (60) производить нет нужды, потому что, пользуясь четырьмя найденными интегралами и принципом сохранения импульсивной силы и пары, можно определить параметры, характеризующие положение тела в пространстве во всякое время.

Вообразим оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, имеющие, так же как и оси Ox, Oy, Oz, начало в центральной точке, и предположим, что эти оси остаются при передвижении тела сами себе параллельными, причем ось $O\zeta$ параллельна оси импульсивных сил (т. е. по ней направляется вектор Q). Пусть (фиг. 24), θ, φ и ψ будут три эйлеровых угла, определяющих положение осей Ox, Oy, Oz относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, где θ есть угол между $O\zeta$ и Oz, φ — угол между

оси менее момента инерции заключенной жидкости. См. сочинение автора «О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные капельной жидкостью», § 9, Журнал Русского физико-химического общества, 1885 [стр. 152 настоящего тома].

Ox и прямой OL, по которой плоскость Oxy пересекает $O\xi\tau_1$, ψ — угол между OL и $O\xi$. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= a_{11}u = -Q\sin\varphi\sin\theta,\\ Q_2 &= a_{11}v = Q\cos\varphi\sin\theta,\\ Q_3 &= a_{33}w = Q\cos\theta;\\ \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta,\\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\omega_3 = -\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta. \tag{76}$$

Определяем отсюда u, v, w, ω_1, ω_2 и подставляем в формулы (63) и (62):

$$b_{11}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\sin^2\theta\right] + b_{33}\omega_3^2 + \frac{1}{a_{11}}Q^2\sin^2\theta + \frac{1}{a_{33}}Q^2\cos^2\theta = \text{const.}, \tag{77}$$

$$b_{11}Q\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta + b_{33}Q\omega_3\cos\theta = \text{const.} \tag{78}$$

Подставляя величину $\frac{d\psi}{dt}$, определенную из уравнения (78), в уравнение (77), мы определим t квадратурой через θ, потом из (78) и (76) выразим квадратурами через θ параметры ψ и φ. После этого надо будет перейти к определению места точки O. Опускаем из нее перпендикуляр OC на ось AB импульсивных сил и называем длину этого перпендикуляра через r, а угол его с OL — через ϑ. Из чертежа находим:

$$\cos(xOC) = \cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(yOC) = \cos\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(zOC) = \sin\vartheta\sin\theta.$$

Так как все импульсивные силы приводятся к силе Q, направленной по AB, и к паре, ось которой есть AB, то проекция момента K на OC должна быть нулем:

$$b_{11}\omega_1(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\theta) + b_{11}\omega_2(\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi\cos\theta) + b_{33}\omega_3\sin\vartheta\sin\theta = 0,$$

или по (75)

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\vartheta - \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\sin\theta\cos\theta + \frac{b_{33}}{b_{11}}\omega_3\sin\vartheta\sin\theta = 0. \qquad (79$$

Отсюда, зная θ и ψ, определим ϑ:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\theta - \dfrac{b_{33}}{b_{11}}\omega_3\sin\theta}. \qquad (80)$$

Теперь надо определить r. Для этого проводим из O прямую OD, перпендикулярную $O\zeta$ и OC, и замечаем, что она образует с осями Ox, Oy, Oz углы:

$$\cos(xOD) = \sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(yOD) = \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(zOD) = -\cos\vartheta\sin\theta.$$

Пользуясь этими формулами, составляем проекцию K на OD и замечаем что эта проекция должна быть равна $-Qr$:

$$-Qr = b_{11}\omega_1(\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\theta) +$$
$$+ b_{11}\omega_2(\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\theta) - b_{33}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta =$$
$$= b_{11}\left(\sin\vartheta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\sin\theta\cos\vartheta\right) - b_{33}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta.$$

Отсюда имеем:

$$r = \frac{b_{33}}{Q}\omega_3\cos\vartheta\sin\theta - \frac{b_{11}}{Q}\left(\sin\vartheta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\sin\theta\cos\vartheta\right), \qquad (81)$$

или по формуле (79)

$$r = -\frac{b_{11}}{Q}\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\sin\vartheta}. \qquad (82)$$

Остается определить расстояние h центральной точки от некоторой неподвижной плоскости, перпендикулярной к оси импульсивных сил. Производная от этого расстояния по времени будет проекция скорости V на ось $O\zeta$. Вследствие этого по формулам (75) находим:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{a_{11}}(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta) + \frac{Q}{a_{33}}\cos^2\theta,$$

или

$$\frac{dh}{dt} = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{11}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{33}}\right). \qquad (83)$$

Формулы (80), (82) и (83), из которых только последняя требует интеграции, определяют положение центральной точки. Остановимся на двух частных случаях. Во-первых, рассмотрим движение тела вращения, когда $\omega_3 = 0$ и в уравнении (78) постоянное есть нуль. Тогда $\frac{d\psi}{dt} = 0$ и по (80) имеем $\operatorname{tg}\vartheta = \infty$, т. е. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Ось вращения при этом случае будет все время оставаться в неподвижной плоскости, проходящей через ось импульсивных сил AB. Колебание оси вращения в этой плоскости будет дано формулой (77), из которой

$$dt = \frac{d2\theta}{\sqrt{\text{const.} - 2\frac{a_{11} - a_{33}}{b_{11}a_{11}a_{33}}Q^2\cos 2\theta}} \quad (84)$$

Эта формула показывает, что угол 2θ будет изменяться по закону маятника; при этом с изменением скорости колебания будет изменяться расстояние r, определяясь формулой

$$r = -\frac{b_{11}}{Q}\frac{d\theta}{dt},$$

величина же h выразится квадратурой по формуле (83).

Во-вторых, сделаем предположение, что θ и $\frac{d\psi}{dt}$ постоянны. Обе эти величины найдутся из формул (77) и (78). Далее из формулы (80) найдем $\vartheta = 0$; что же касается r, то его нельзя определить по формуле (82), так как она получает неопределенный вид, а следует определить из уравнения (81), которое дает:

$$r = \frac{b_{33}\omega_3}{Q}\sin\theta;$$

наконец, величина h по формуле (83) будет:

$$h = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{11}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{33}}\right)t + \text{const.}$$

Так как ось нашего тела вращения перпендикулярна все время к OC, величины r и θ постоянны, а величины ψ и h изменяются пропорционально времени, то эта ось будет

иметь относительно оси AC импульсивных сил равномерное винтовое движение; тело же, кроме этого, будет еще вращаться около своей оси вращения с угловой скоростью ω_3.

§ 25. Случай многозначности потенциальной функции скоростей. Когда пространство, ограниченное поверхностью тела и бесконечно удаленной сферой многосвязно, то потенциальная функция скоростей (§ 11) может быть многозначна, при это циркуляции скорости по всем главным контурам во все время движения тела не должны изменяться (§ 16). Положим для простоты, что пространство двусвязно и что циркуляция скорости по главному контуру есть k; тогда для ставления потенциала скоростей мы должны будем к функции F, определенной в § 23, прибавить функцию χ, которая во всем рассматриваемом пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа, на поверхности тела дает

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0, \tag{85}$$

в бесконечности обращается в постоянную величину, а с двух сторон перегородки, делающей наше пространство односвязным, имеет значения, разнящиеся на величину k. Таким образом, потенциальная функция скоростей будет:

$$F + \chi,$$

где χ не зависит от u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3 и обращается в нуль при $k = 0$.

Вследствие прибавления к функции F функции χ компоненты импульсивной силы и момента импульсивной пары будут слагаться из величин, данных формулами (26), и величин

$$\left.\begin{aligned} P_1' &= -\rho \int\int \chi \cos\alpha \, d\sigma, \\ H_1' &= -\rho \int\int \chi (y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

где интеграция распространяется на поверхность тела. Что касается живой силы жидкости, то она слагается из живой

силы движения, определенного функцией F, и живой силы движения, определенного функцией χ. Действительно,

$$(F+\chi,\ F+\chi)=(F,\ F)+(\chi,\ \chi)+2(F,\ \chi).$$

Но по теореме Грина

$$(F,\ \chi)=-\rho\int\int F\frac{\partial\chi}{\partial n}\,d\sigma;$$

где интеграция распространяется на поверхность тела, поверхности обеих сторон перегородки и на поверхность бесконечно удаленной сферы. Интеграл, взятый по поверхности тела, обращается в нуль по формуле (85); оба интеграла, взятые по той и другой стороне перегородки, взаимно уничтожаются, так как для них $\frac{\partial\chi}{\partial n}$ имеет равные величины, но различные знаки; наконец, на бесконечно удаленной сфере F постоянно и

$$F\int\int\frac{\partial\chi}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Таким образом,

$$(F,\ \chi)=0$$

и

$$(F+\chi,\ F+\chi)=(F,\ F)+(\chi,\ \chi).$$

Второе слагаемое в выражении живой силы жидкости не зависит от движения тела и имеет вид ck^2, где c — положительная постоянная величина

Обращаясь затем к уравнениям (60), мы должны будем подставить в них

$$Q_1=\frac{\partial T}{\partial u}+P_1',\quad K_1=\frac{\partial T}{\partial\omega_1}+H_1',\quad \ldots \tag{87}$$

и так как

$$\frac{dP_1'}{dt}=\frac{dH_1'}{dt}=\ldots=0,$$

то эта подстановка повлияет только на вторые части уравнений. Полученные таким образом уравнения будут удовлетворены при $u=v=w=0$, $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$. Это показывает

нам, что жидкость, текущая с многозначным потенциалом скоростей сквозь отверстия в теле, не стремится привести его в движение. Так как первые части уравнений (60) остаются без перемены, то интеграл (63) показывает постоянство живой силы тела и жидкости в движении, определенном функцией F: в интегралах же (61) и (62) надо сделать подстановку (87).

Рассмотрим движение круглого кольца. Вообразим, что оно сначала неподвижно и жидкость течет сквозь него с многозначным потенциалом скоростей; потом кольцо приведено в движение и предоставлено инерции. На основании формулы (41) того обстоятельства, что поверхности $\chi = \text{const}$ будут поверхности вращения около оси кольца, симметричные относительно плоскости его экватора, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = a_{11}u, \quad Q_2 = a_{11}v, \quad Q_3 = a_{33}w + P_3'; \\ &K_1 = b_{11}\omega_1, \quad K_2 = b_{11}\omega_2, \quad K_3 = b_{33}\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Внеся эти формулы в уравнения (75), найдем, что рассматриваемое движение окончательно определяется по формулам (77), (78), (80), (82) и формуле

$$\frac{d\theta}{dt} = Q\left(\frac{\sin^2\theta}{a_{11}} + \frac{\cos^2\theta}{a_{33}}\right) - \frac{P_3'}{a_{33}}\cos\theta. \tag{89}$$

Но таким образом нельзя исследовать движение в случае $Q = 0$, ибо тогда нет оси импульсивных сил. В этом случае надо прямо пользоваться уравнениями (60). Мы удовлетворяем, например, этим уравнениям, положив

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0, \quad K_2 = K_3 = 0, \quad K_1 = \text{const.},$$

что имеет на основании формул (88) место при

$$u = v = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad w = -\frac{P_3'}{a_{33}}, \quad \omega_1 = \text{const}.$$

Складывая поступательное движение по направлению оси Oz с вращением около оси Ox, получим вращение около

параллельной оси, лежащей в плоскости Oxy на расстоянии

$$\frac{P'_3}{a_{33}\omega_1}$$

от оси Ox. *Все движение приводится, таким образом, к равномерному вращению кольца около оси, лежащей в плоскости его экватора.*

ЛЕКЦИЯ VIII.

О КАЖУЩЕМСЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В БЕСПРЕДЕЛЬНОЙ МАССЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ.

§ 26. Движение в беспредельной массе несжимаемой жидкости двух твердых шаров. В предыдущей лекции мы исследовали движение твердого тела в беспредельной жидкости, не прибегая к определению сил гидродинамического давления жидкости на поверхность тела, потому что хотели познакомить читателя с импульсивными силой и парой, которые играют столь важную роль в задаче о движении одного тела; теперь же мы будем следовать общему приему, т. е. будем определять потенциальную функцию скоростей F, удовлетворяющую уравнению Лапласа, обращающуюся в бесконечности в постоянную величину и имеющую на поверхности тел данную нормальную производную; потом, найдя гидродинамическое давление по формуле

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] + \text{const.}, \qquad (1)$$

будем определять силы и пары, происходящие от его действия на поверхности тел.

Начнем с изложения приближенного решения интересной задачи о движении в жидкости двух шаров[1]). Пусть a и b будут радиусы шаров, c — расстояние их центров O и O', а q и q' — их скорости. Примем c весьма большим сравни-

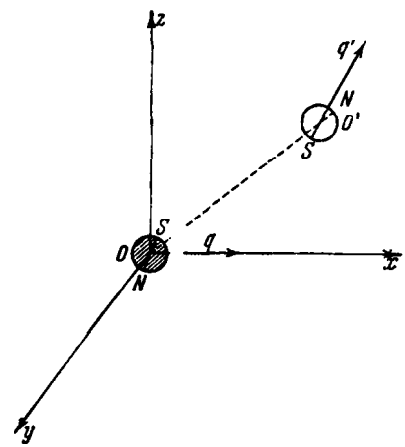
[1]) Точное решение см. у Неймана, Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, стр. 194, Leipzig, 1883.

тельно с a и b и будем при решении задачи ограничиваться членами порядка c^{-1}.

Возьмем (фиг. 25) начало осей координат в центре O и направим ось Ox по скорости q. Если F_1 будет потенциальная функция скоростей в предположении, что второй шар имеет скорость q', а первый неподвижен, и F_2 — потенциальная функция скоростей в предположении, что первый шар имеет скорость q, а второй — неподвижен, то

$$F = F_1 + F_2.$$

Назовем через α, β, γ углы скорости q' с осями координат и, разложив ее на три компонента, составим по формуле (16) третьей лекции потенциальную функцию скорости F_1', которая имела бы место, если бы первого шара не было:



Фиг. 25.

$$F_1' = \frac{b^3 q'}{2}\left[\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\beta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) + \cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)\right],$$

где r' — расстояние точки (x, y, z) от O'. Называя через ξ, η, ζ координаты точки O' и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

представим полученную формулу в виде:

$$F_1' = -\frac{b^3 q'}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r'}\right)\cos\gamma\right],$$

и на g, мы получим:

$$\int_{-l}^{+l} (p_0 - p)\, dx + 2lh'\rho g.$$

Предположим, что центр тяжести плавающего тела при покое находится над точкой S (§ 4) на высоте H над ватерлинией. При качании его ордината z будет равна

$$\zeta_0 - H\cos\Theta,$$

или вследствие малости угла Θ

$$\zeta_0 - H.$$

Поэтому проекция ускорения центра тяжести на ось Oz равняется $\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}$ и закон движения центра тяжести дает нам уравнение:

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = -\int_{-l}^{+l} (p - p_0)\, dx + 2g\rho lh', \tag{71}$$

[тождественное с уравнением (37).

Под знак интеграла мы должны подставить значение $p - p_0$ для точек дна плавающего тела, которое мы найдем по формуле (69), заменив в ней z на основании уравнения (58) через $z = \zeta_0 + h' + \Theta x$. Сделав эту подстановку и совершив интегрирование, мы будем иметь:

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = -\frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - 2\frac{l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} - 2g\rho l\zeta_0 + 2gl\rho f,$$

или

$$\left(M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\right)\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + 2\frac{l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + 2gl\rho\zeta_0 - 2gl\rho f = 0, \tag{72}$$

линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и со второй частью, которым и определяются колебания плавающего тела в вертикальном направлении. Это уравнение тождественно с (38), в него не входят ни угол Θ, ни его производные, следова-

Подставляем это выражение в формулу (2):

$$F_1' = -\frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\cos\theta +$$
$$+ \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\sin\theta\cos\psi + \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r\sin\theta\sin\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos^2\theta - \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\cos^2\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{4}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\sin^2\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos\theta\sin\theta\cos\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\cos\theta\sin\theta\sin\psi -$$
$$- \frac{b^3q'}{2}\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] r^2\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi + \ldots \qquad (4)$$

Такова была бы потенциальная функция скоростей, если бы не было первого шара. Предположив, что этот шар имеется и что он неподвижен, прибавим к F_1' некоторую новую функцию F_1'', удовлетворяющую уравнению Лапласа, обращающуюся в бесконечности в постоянную величину и дающую при $r = a$

$$\frac{\partial}{\partial r}(F_1' + F_1'') = 0. \qquad (5)$$

Легко усмотреть, что этим свойством обладает функция:

$$F_1'' = \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin\theta\cos\psi}{r^2} +$$
$$+ \frac{b^3a^3q'}{4}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin\theta\sin\psi}{r^2} - \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\cos^2\theta}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{6}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^3}\right) -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3} -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3} -$$
$$- \frac{b^3a^5q'}{3}\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi}{r^3} + \ldots \qquad (6)$$

Действительно, она обращается в бесконечности в нуль и удовлетворяет на поверхности первой сферы условию (5); кроме того, она удовлетворяет и уравнению Лапласа, так как

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{ra^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^3} = \frac{1}{ra^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$

. . . . . .

Через прибавление F_1' к F_1 мы удовлетворяем условию при поверхности первого шара в предположении его неподвижности, а нарушаем этим нормальные условия при поверхности второго шара; но это нарушение не должно быть принято во внимание при условленной степени точности, так как от функции F_1'' при поверхности второго шара получаются скорости порядка c^{-6}. Таким образом, мы можем принять

$$F_1 = F_1' + F_1'',$$

что по формулам (4) и (6) обращается при $r = a$ в

$$\begin{aligned}
F_1 = &-\frac{b^3q'}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{3}{4}ab^3q'\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta + \\
&+\frac{3}{4}ab^3q'\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi + \\
&+\frac{3}{4}ab^3q'\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\sin\psi - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\cos^2\theta\right) - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\sin^2\theta\cos^2\psi\right) - \\
&-\frac{5}{12}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\left(\frac{4}{15}+\sin^2\theta\sin^2\psi\right) - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau_1}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta\sin\theta\cos\psi - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta\sin\theta\sin\psi - \\
&-\frac{5}{6}a^2b^3q'\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\,\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi + \ldots \qquad (7)
\end{aligned}$$

Что касается значения функции F_2 при поверхности первого шара, то мы можем просто положить

$$F_2 = -\frac{qa^3}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{q}{2}a\cos\theta, \tag{8}$$

так как из предыдущего следует, что влияние второго шара введет в значение функции F_2 при поверхности первого шара члены порядка c^{-5}.

Переходим теперь к определению гидродинамического давления p. Предположим, что наши оси Ox, Oy, Oz соединены с первым шаром и двигаются с ним, оставаясь сами себе параллельными. Если для простоты допустим, что движение обоих шаров прямолинейно, то потенциальная функция скоростей жидкости в ее относительном движении на осях Ox, Oy, Oz будет

$$F = F_1 + F_2 - qx. \tag{9}$$

По теореме Кориолиса мы можем в нашей задаче об относительном движении определять p по формуле (1), если прибавим к точкам жидкости силы, имеющие силовую функцию

$$U = -\frac{dq}{dt}x. \tag{10}$$

Частная производная по времени от функции (9) будет:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(q'\cos\alpha - q) + \frac{\partial F_1}{\partial \eta}q'\cos\beta + \frac{\partial F_1}{\partial \zeta}q'\cos\gamma + \frac{\partial F_1}{\partial q'}\frac{dq'}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial q}\frac{dq}{dt} - x\frac{dq}{dt}. \tag{11}$$

Подставляя формулы (11), (10), (9) и (8) в формулу (1), напишем ее так:

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} = \text{const.} &+ \frac{1}{2}a\cos\theta\frac{dq}{dt} - \frac{3}{4}ab^3\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta + \right.\\ &+ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi + \left.\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\sin\psi\right\}\frac{dq'}{dt} -\\ &- \frac{3}{4}ab^3q'^2\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\cos\psi + \right.\\ &+ \left.\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\sin\theta\sin\psi\right\} + \frac{\partial F_1}{\partial\xi}q - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - q\right)^2 + \right.\\ &+ \left.\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right]. \end{aligned}\tag{12}$$

Мы не пишем здесь членов порядка c^{-4} при множителе $\frac{dq'}{dt}$, потому что имеются с этим множителем члены порядка c^{-3}. Так как

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{a^3 q}{2}\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right),$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{3a^3 q}{2}\frac{xy}{r^5},$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{3a^3 q}{2}\frac{xz}{r^5},$$

то равнодействующая сил давления жидкости на первый шар, происходящая от присутствия в формуле (12) членов

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - q\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right],$$

есть нуль, как это было показано в шестой лекции; далее, от удвоенных произведений в формуле (12) остается только ($r = a$) член

$$\frac{3}{2} q \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

ибо на поверхности первой сферы

$$-3a^3 q \frac{x}{r^5}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} x + \frac{\partial F_1}{\partial y} y + \frac{\partial F_1}{\partial z} z\right) = 0.$$

Что касается сил давления, происходящих от присутствия в формуле (12) членов

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2\right],$$

то ими можно пренебречь, ибо эти члены порядка c^{-6}.

Докажем теперь, что силы, происходящие от члена

$$\frac{3}{2} q \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

уничтожаются силами, происходящими от члена

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} q. \tag{13}$$

Для этого заметим сначала, что вследствие равенства нулю на первой сфере нормальной производной от F_1 производ-

ная $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ является проекцией на ось Ox скорости $\frac{1}{a}\frac{\partial F}{\partial \theta}$, так что

$$\frac{3}{2}q\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{3}{2}\frac{q}{a}\frac{\partial F_1}{\partial \theta}\sin\theta. \tag{14}$$

Потом, подставив в выражения (13) и (14) величину F_1 из формулы (7), умножаем полученное на $-a^2\cos\theta\sin\theta\,d\psi\,d\theta$ и берем интегралы по всей первой сфере. При этом не равны нулю будут только те интегралы, в которые войдут $\cos\theta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ в четных степенях. Вследствие этого от выражения (13) получаем составляющую по оси Ox:

$$-\frac{3}{4}a^3b^3q'q\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = -\pi a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right];$$

а от выражения (14) находим по оси Ox силу:

$$\frac{3}{4}a^3b^3qq'\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta - \right.$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta -$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta\right\}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi = \pi, \quad \int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right],$$

то последняя сила приводится к

$$\pi a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]$$

и сокращается с вышенайденной силой.

Для определения компонентов сил давления по оси Oy умножаем выражения (13) и (14) на $-a^2\cos\psi\sin^2\theta\,d\psi\,d\theta$ и

совершаем интеграции по поверхности первой сферы. При этом от выражений (13) и (14) получается только по одному члену, содержащему $\cos\theta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ в четных степенях. Именно, от (13) имеем:

$$-\frac{3}{4}a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=$$

$$=-\pi a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right],$$

а от (14):

$$-\frac{5}{4}a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin^3\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{5}{4}a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\pi\left(\frac{4}{15}-\frac{16}{15}\right)=\pi a^3b^3qq'\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right].$$

Подобным же образом докажем, что и составляющие силы по оси Oz, происходящие от присутствия в выражении давления членов (13) и (14), взаимно уничтожаются.

После этого замечания на основании формулы (12) получим следующие простые выражения сил P, Q, R, с которыми жидкость действует на первый шар:

$$\left.\begin{aligned}
P&=-\frac{2\pi a^3}{3}\rho\frac{dq}{dt}+\pi\rho a^3b^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt}+\\
&\qquad+\pi\rho a^3b^3q'^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right],\\
Q&=\pi\rho a^3b^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt}+\pi\rho a^3b^3q'^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right],\\
R&=\pi\rho a^3b^3\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right]\frac{dq'}{dt}+\pi\rho a^3b^3q'^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Эти формулы показывают, что в случае равномерного движения на первый шар действует сила порядка c^{-4}, имеющая силовую функцию

$$S=-\pi\rho a^3b^3q'^2\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{c}\right).\qquad(16)$$

Мы берем в этой функции знак —, потому что производные по координатам точки O' равны отрицательным производным по координатам точки O. Эта силовая функция есть та, которая выражает действие на бесконечно малый магнит, помещенный в точке O, бесконечно малого магнита, помещенного в точке O'. Оба магнита, как это показано на фигуре 25, имеют оси, параллельные q'; при этом магнит O обращается в сторону q' южным полюсом, а магнит O' — северным. Отсюда следует, что *два шара, движущиеся равномерно по линии, соединяющей их центры, отталкиваются, а движущиеся перпендикулярно к этой линии — притягиваются.* Так как действие на данный шар зависит только от движения другого шара, то в рассматриваемой задаче действие не равно противодействию. Если $a = b$ и скорости q и q' равны и симметрично расположены относительно плоскости, проведенной через середину прямой OO' перпендикулярно к ней, то эта плоскость является поверхностью тока и может быть принята за неподвижную стенку. Вследствие этого влияние стенки таково, как будто на данный движущийся шар действует другой движущийся шар, представляющий его зеркальное изображение в стенке. Отсюда на основании сказанного выше следует, что *шар, идущий равномерно по перпендикулярному направлению к стенке, ею отталкивается, а идущий параллельно стенке — ею притягивается.* Вероятно, в этом обстоятельстве заключается причина рикошета.

Обращаясь к предположению, что скорости q и q' изменяются со временем, видим, что изменение q вызывает только силу инерции, которая должна быть соединена с силой инерции от массы шара O через увеличение этой массы на половину массы вытесненной воды. Производная же скорости второго шара влияет на первый шар силой порядка c^{-3}. Эта сила равна силе действия бесконечно малого магнита, помещенного в O', на единицу магнитной массы (южный магнетизм), помещенной в O. Ось магнита направлена по ускорению $\frac{dq'}{dt}$ южным полюсом,

а магнитный момент равен

$$\pi\rho a^3 b^3 \frac{dq'}{dt}.$$

Таким образом, *шар, идущий по направлению радиуса от другого шара ускоренным движением, притягивает его, а шар, идущий от него замедленным движением, отталкивает его.*

Рассматривая в случае переменного движения шара неподвижную плоскую стену и заменяя ее действие действием изображения, мы придем к заключению, что *присутствие стены производит кажущееся изменение массы шара, различное в различных направлениях и выражаемое некоторым эллипсоидом измененных масс.* Определим этот эллипсоид. Возьмем начало осей Ox, Oy, Oz в центре шара и направим ось Ox перпендикулярно к стене, расстояние до которой пусть будет $\frac{c}{2}$; тогда расстояние до изображения O' будет c. Если α, β, γ суть углы с осями ускорения $\frac{dq}{dt}$, то углы ускорения $\frac{dq'}{dt}$ изображения будут $180° - \alpha$, β, γ. Вследствие этого мы должны взять

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{c}\right)\cos\gamma.$$

Так как координаты изображения суть: $\xi = c$, $\eta = \zeta = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{2}{c^3}\cos\alpha,$$
$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c^3}\cos\beta,$$
$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c^3}\cos\gamma.$$

Подставляем это в формулы (15), в которых предполагаем, что $\frac{dq}{dt}$ образует с осями углы α, β, γ, и отбрасываем члены порядка c^{-4}:

$$P = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\alpha,$$
$$Q = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\beta,$$
$$R = -\frac{4\pi a^3}{3}\rho\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{dq}{dt}\cos\gamma.$$

Отсюда следует, что эллипсоид измененных масс имеет на наших осях следующее уравнение:

$$\left(M+\frac{2}{3}\pi a^3\rho+\frac{2\pi a^6\rho}{c^3}\right)x^2+\left(M+\frac{2}{3}\pi a^3\rho+\frac{\pi a^6\rho}{c^3}\right)y^2+$$
$$+\left(M+\frac{2}{3}\pi a^3\rho+\frac{\pi a^6\rho}{c^3}\right)z^2=1. \quad (17)$$

Мы видим, что *приращение массы от влияния стены по направлению, перпендикулярному к стене, вдвое более приращения массы по направлению, параллельному стене.*

§ 27. Пульсирующие шары Бьеркнеса. Бьеркнес сделал подробные теоретические и опытные исследования над определением кажущегося взаимодействия пульсирующих шаров [1]).

Мы рассмотрим здесь только простейший случай, когда центры O и O' двух шаров неподвижны и их расстояние $OO'=c$ весьма велико сравнительно с радиусами шаров a и b во всякое время. Назовем через q и q' производные от a и b по времени, r и r' — расстояния точки жидкости от O и O' и через θ — угол r с OO'. Начало координат примем в центре первого шара и ось Ox направим по OO'. По предыдущему представим потенциальную функцию скоростей в виде:

$$F=F_1+F_2, \quad (18)$$

где F_1 — потенциальная функция скоростей при неизменяемости первого, а F_2 — при неизменяемости второго шара. При решении нашей задачи мы будем ограничиваться членами порядка c^{-2}. Если бы не было первого шара, то потенциальная функция скоростей была бы

$$F_1'=-\frac{q'b^2}{r'}.$$

[1]) Bjerknes, Vorläufige Mitteilungen über die Druckkräfte, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations- und Contraktions Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen. Videnskabselsk Forhandtl. Christiania, 1875. Извлечение из этой работы см. в Repertorium für reine und angewandte Mathematik, стр. 264, 1876. Другая работа Бьеркнеса на ту же тему напечатана в Göttingen Nachrichten, 1876.

Разлагаем ее в ряд для точек, весьма близких к поверхности первого шара:

$$F_1' = -q'b^2(c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{q'b^2}{c} - \frac{q'b^2}{c^2} r\cos\theta + \dots \qquad (19)$$

Для того чтобы нормальные скорости на поверхности первого шара были равны нулю, прибавим к F_1' функцию

$$F_1'' = -\frac{-q'b^2a^3\cos\theta}{2c^2}\frac{}{r^2} + \dots, \qquad (20)$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа и дает при $r = a$

$$\frac{\partial}{\partial r}(F_1' + F_2'') = 0.$$

Так как скорости на поверхности второго шара от функции скоростей F_1'' будут порядка c^{-3}, то при нашем приближении можно принять

$$F_1 = F_1' + F_1''. \qquad (21)$$

Что касается F_2, то при поверхности первого шара можно в принятом приближении принять

$$F_2 = -\frac{qa^2}{r}. \qquad (22)$$

Таким образом, при поверхности первого шара получаем

$$F = -\frac{qa^2}{r} - \frac{q'b^2}{c} - \frac{q'b^2}{c^2} r\cos\theta - \frac{q'b^2a^3\cos\theta}{2c^2}\frac{}{r^2} + \dots \qquad (23)$$

Обозначаем объемы первого и второго шаров через m и m_1, а производные от объемов по времени через $\dot{m}$ и $\dot{m}_1$, так что

$$\dot{m} = 4\pi a^2 q, \quad \dot{m}_1 = 4\pi b^2 q',$$

и представляем формулу (23) в таком виде:

$$F = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\dot{m}}{r} - \frac{\dot{m}_1}{c} - \frac{\dot{m}_1 r\cos\theta}{c^2} - \frac{a^3\dot{m}_1\cos\theta}{2c^2r^2}\right). \qquad (24)$$

Составляем производную от этой функции по времени для данной точки пространства, имеющей радиус $r = a$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi a}\frac{d\dot{m}}{dt} - \frac{1}{4\pi c}\frac{d\dot{m}_1}{dt} - \frac{3}{8\pi c^2}\left(a\frac{d\dot{m}_1}{dt} + \dot{m}_1\frac{da}{dt}\right)\cos\theta.$$

Но

$$\frac{da}{dt} = q = \frac{\dot{m}}{4\pi a^2}, \quad a = \frac{3m}{4\pi a^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi a}\frac{d\dot{m}}{dt} - \frac{1}{4\pi c}\frac{d\dot{m}_1}{dt} - \frac{3}{32\pi^2 c^2 a^2}\left(3m\frac{d\dot{m}_1}{dt} + \dot{m}\dot{m}_1\right)\cos\theta,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a}\frac{d\dot{m}}{dt} + \frac{1}{c}\frac{d\dot{m}_1}{dt}\right) - \\ - \frac{3}{32\pi^2 c^2 a^2}\left[3\frac{d}{dt}(m\dot{m}_1) - 2\dot{m}\dot{m}_1\right]\cos\theta. \qquad (25)$$

Далее, по формуле (24) при $r = a$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = q, \quad \frac{1}{a}\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{3}{8\pi c^2}\dot{m}_1\sin\theta;$$

отсюда видно, что V^2 будет зависеть только от $\sin^2\theta$ и не повлияет на равнодействующую гидродинамического давления. Эта равнодействующая найдется по формулам (1) и (25) и будет с точностью до членов порядка c^{-2}:

$$P = -\frac{3}{8\pi c^2}\frac{d}{dt}(m\dot{m}_1) + \frac{\dot{m}\dot{m}_1}{4\pi c^2}. \qquad (26)$$

Если допустим, что шары имеют одновременные гармонические колебания в одной фазе или разнящиеся на половину волны, то надо принять

$$\dot{m} = k\sin\frac{2\pi}{T}t, \quad \dot{m}_1 = k_1\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

или

$$\dot{m} = k\sin\frac{2\pi}{T}t, \quad \dot{m}_1 = k_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right).$$

Делая такие подстановки в формулу (26) и определяя среднюю силу за время, кратное от T, найдем:

$$P = \pm \frac{kk_1}{8\pi c^2}. \tag{27}$$

Эта формула приводит нас к следующему интересному результату: *два одновременно пульсирующих шара притягиваются по закону Ньютона, если колеблются в одинаковых фазах, и отталкиваются по этому закону, если колеблются в противоположных фазах.*

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ МЕТОДА КИРХГОФА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ ПРИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ, ДАННОЙ НА НЕИЗВЕСТНОЙ ЛИНИИ ТОКА [1]).

§ 1. Краткий обзор литературы вопроса. Один из замечательных результатов современных исследований в области гидродинамики представляется нам в разрешении задач, в которых разыскивается течение жидкости в двух измерениях, стесненное частью стенками сосудов, частью неизвестной наперед линией тока, на которой обыкновенно принимают скорость данной постоянной величиной. Начало для решения таких задач было положено в 1868 г. Гельмгольцем [2]), который определил вид струи жидкости, втекающей из беспредельного пространства в канал, заключенный между двумя параллельными плоскостями. В том же году Кирхгоф [3]) предложил общий прием решения подобных задач. Прием этот дает различные течения с линиями тока, на которых скорость постоянна, в зависимости от того, какое значение приписывается некоторой произвольной функции, но не позволяет направляться на решение определенной задачи.

---

[1]) Впервые опубликовано в Математическом сборнике, т. 15, вып. 1, 1890, стр. 121—278.

[2]) Helmholtz, Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1868.

[3]) Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Borchardt's Journal, т. 70, 1869.

Ввиду этого в 1876 г. Кирхгоф видоизменил свой метод [1]), сведя выбор произвольной функции к конформному преобразованию некоторой области мнимого переменного

$$\zeta = \frac{1}{v}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

где v — скорость жидкости, а ϑ — ее угол с осью Ox, в область мнимого переменного

$$\omega = \varphi + \psi i,$$

где φ — потенциал скоростей, а ψ — количество жидкости, протекающей между начальной и рассматриваемой линиями тока. При этом область ω берется между двумя параллельными прямыми, на которых ψ постоянно, а область ζ выбирается по скорости на границах искомого течения.

Кирхгоф приложил свой прием к определению вида струи, вытекающей из весьма большого сосуда, ограниченного двумя плоскими стенками, и к определению течений беспредельного потока и струи конечной ширины, ударяющихся о плоскую стенку и образующих за нею поверхности раздела, на которых скорость постоянна. При исследовании этих задач Кирхгоф ограничивался только определением линий тока. Более детальная разработка их была сделана Релеем [2]) в 1876 г., напечатавшим две заметки, из которых одна посвящена вопросу о количестве истекающей жидкости и о сжатии струи, а другая — вопросу о давлении беспредельного потока на погруженную в него пластинку.

В 1881 г. Д. К. Бобылев [3]) исследовал давление, производимое потоком беспредельной ширины, на равнобокий клин. Эта задача для неравнобокого клина при потоке,

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik, 21-я лекция, 1876.

[2]) Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Philosophical Magazine, т. II, 1876, стр. 144; On the Resistance of Fluids, там же, стр. 431.

[3]) Бобылев Д. К., Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины, на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом, Журнал Русского Физико-химического общества, т. XIII, 1881, стр. 63.

направление которого образует угол с осью клина, была разрешена в 1885 г. Герлахом [1]) и исследована более обстоятельно в 1886 г. И. В. Мещерским [2]), причем последний выполнил квадратуры, входящие в задачу, и дал таблицы для определения силы давления потока в зависимости от угла клина и от направления потока. Наконец, в недавно появившемся сочинении А. П. Котельникова [3]) та же задача решается для удара струи конечной ширины, причем, переходя к пределу и допуская ширину струи бесконечно большой, А. П. Котельников получает из своих формул формулы Мещерского. Расширение области задач, решаемых методом Кирхгофа, было сделано Фохтом [4]), который исследовал вопрос о соударении между собой двух и нескольких струй. Критическую оценку метода Кирхгофа мы имеем в сочинении Бриллуэна [5]).

Во всех упомянутых работах авторы придерживались метода Кирхгофа, и попытка видоизменить этот метод была только сделана в сочинении Планка [6]), который, задавшись мыслью об освобождении метода от теории мнимого переменного с целью его распространения на пространство трех измерений, сводит задачу к отысканию функции переменного l и функции переменного m таким образом, чтобы некоторое выражение, зависящее от этих функций и их про-

---

[1]) Gerlach, Einige Bemerkungen über den Widerstand, der eine ebene Platte und ein Keil von einer gleichförmigströmenden Flüssigkeit erfährt, Civilingenieur, т. XXXI, 1885.

[2]) Мещерский И. В., К вопросу о сопротивлении жидкостей, Журнал Русского Физико-химического общества, т. XVIII, 1886.

[3]) Котельников А. П., О давлении жидкой струи на клин, Собрание протоколов секции физико-математических наук в Казани, т. VIII, 1889.

[4]) Voigt, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, Mathematische Annalen, т. XXVIII, 1886, стр. 14.

[5]) Brillouin, Questions d'Hydrodynamique, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, т. I, 1887.

[6]) Planck, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, Wiedemann Annalen, т. XXI, стр. 499, 1884.

изводных, было функцией от ml. Но, не говоря уже о задачах трех измерений, автор не разрешил с помощью своего метода ни одной новой задачи, а разобрал только некоторые из простейших задач Кирхгофа.

По нашему мнению, главным недостатком метода Планка является то обстоятельство, что в нем, так же как и в первоначальном методе Кирхгофа, мы не можем направиться на решение определенной задачи. Конформное преобразование, введенное Кирхгофом, устраняет это затруднение, но зато вводит в задачу лишнюю, иногда очень трудную операцию. Ввиду того, что число известных конформных преобразований замкнутой области в область, ограниченную двумя параллельными прямыми, невелико, невелико и число задач, решаемых методом Кирхгофа. При этом важным обстоятельством является то, что обыкновенно рассматривали область переменного ζ, ограниченную или конечным контуром, или контуром, имеющим две уходящие в бесконечность прямые, и тем стесняли течение жидкости условием: иметь не более одной нулевой критической точки[1]).

В предлагаемом нами изменении метода Кирхгофа мы даем возможность обратиться к решению определенной задачи, не прибегая наперед к конформному преобразованию областей контуров, соответствующих данной задаче, и тем устраняем, как это было в первоначальном методе Кирхгофа, лишнюю операцию. При этом мы не стесняем задачи ни числом нулевых критических точек, ни числом струй. Вследствие этого нашим методом удалось решить много новых задач, которые не поддавались методу Кирхгофа.

§ 2. Изложение метода Кирхгофа. Припомним сначала, в чем состоит метод Кирхгофа. Называя через x и y прямоугольные координаты точки жидкости и полагая

$$x + yi = z,$$

[1]) Точка, в которой скорость равна нулю. См. наше сочинение «Кинематика жидкого тела», Математический сборник, т. VIII, 1876, стр. 179 (стр. 5 настоящего тома).

найдем для невихревого течения несжимаемой жидкости в двух измерениях:

$$\varphi + \psi i = \omega = F(z), \tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = F'(z).$$

Но

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = v \cos \theta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \sin \theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поэтому

$$v(\cos \theta - i \sin \theta) = F'(z),$$

или

$$\frac{1}{v}(\cos \theta + i \sin \theta) = \zeta = \frac{1}{F'(z)}. \tag{3}$$

Формулы (3) и (1) показывают, что

$$\zeta = f(\omega), \tag{4}$$

где f есть функция, которая должна быть выбрана по решаемой задаче. Прежде нежели сделать это, поясним, в каком направлении функции φ и ψ возрастают.

Если умножим уравнения (2) соответственно на

$$dx = ds \cos \theta,$$
$$dy = ds \sin \theta,$$

где ds — элемент линии тока, и сложим, то получим:

$$d\varphi = v\, ds. \tag{5}$$

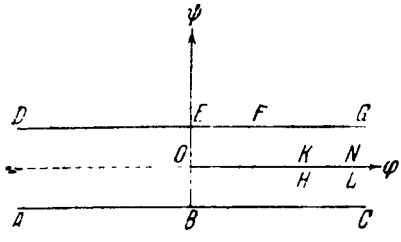
Если же умножим их соответственно на

$$dy = d\sigma \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$dx = d\sigma \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $d\sigma$ — элемент эквипотенциальной линии, и вычтем второе из первого, то найдем, что

$$d\psi = v\, d\sigma. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) показывают, что φ возрастает в направлении скорости, а ψ возрастает в том направлении эквипотенциальной линии, которое получаем, *повернув вектор, представляющий скорость, около его начала на прямой угол в сторону от положительной оси Ox к положительной оси Oy.* Кроме того, из формулы (6) прямо видно, что ψ *есть количество протекающей жидкости.*



Фиг. 1.

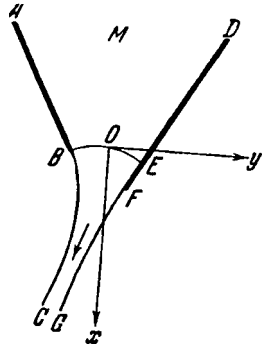
Принимая (фиг. 1) это количество на какой-нибудь линии тока равным нулю, представим эту линию на плоскости (φ, ψ) осью абсцисс $O\varphi$. Граничные же линии тока нашего течения будут иметь уравнения:

$$\psi = -Q, \quad \psi = Q',$$

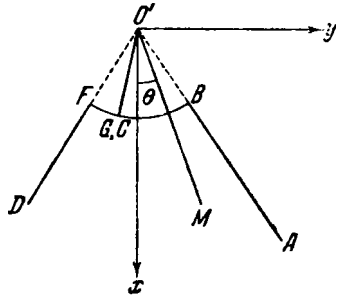
где Q и Q' — количества жидкости, протекающей между ними и нашей начальной линией тока, и представятся на фигуре 1 параллелями AC и DG оси абсцисс. Полагая, что на какой-нибудь эквипотенциальной линии $\varphi = 0$, представим ее отрезком оси ординат BE; отходя же от этой эквипотенциальной линии в направлении течения жидкости и в обратном направлении, будем иметь изменение φ от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$. Таким образом, все рассматриваемое течение будет представлено на фигуре 1 областью переменного ω, заключенной между параллельными прямыми AC и DG. Для построения области переменного ζ обратимся к какой-нибудь частной задаче.

Положим, что жидкость вытекает из сосуда, ограниченного бесконечными плоскими стенками AB и DF, и образует струю $BCGF$, на граничных линиях тока которой скорость имеет постоянную величину w (фиг. 2). Приняв $\psi = 0$ на какой-нибудь промежуточной линии тока, проходящей через O, будем по нашему правилу иметь влево от этой линии отрицательные значения ψ, а вправо поло-

жительные, так что линии тока ABC и DFG будут на фигуре 1 параллельными прямыми ABC и DFG. Построив на фигуре 3 область переменного ζ, мы увидим, что она будет ограничена контуром $ABCGFD$, составленным дугой круга BF и продолжением двух ее радиусов BA и FD, причем



Фиг. 2.



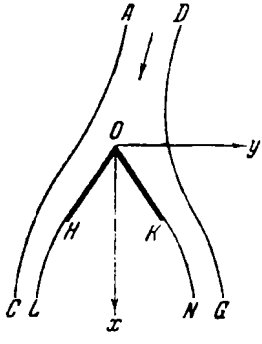
Фиг. 3.

точки, представленные на фигурах 3 и 2 одинаковыми буквами, суть соответственные. Радиусы BA и FD будут соответствовать стенкам сосуда и давать постоянное направление скорости, а дуги BC и FG будут соответствовать контурам струи и давать постоянную величину скорости $\left(O'B = \frac{1}{w}\right)$. Так как наибольшее значение скорости и наибольшее или наименьшее значение θ может соответствовать только точкам, лежащим на фигуре 2 на границах течения [1]),

---

[1]) Относительно скорости см. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik, стр. 186. Что касается θ, то из наших формул (1) и (3) получаем: $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$, а это, как известно, приводит к заключению, что функция θ может иметь максимум или минимум только на границах рассматриваемого течения жидкости. Из формул (1) и (3) следует также, что $\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln v}{\partial y^2} = 0$. Это уравнение приводит к мысли, что наименьшее значение скорости может быть только нуль.

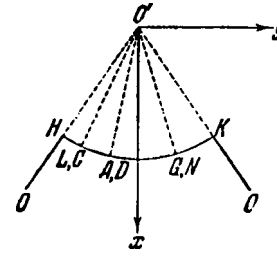
то всякая точка M, радиус-вектор которой на фигуре 3 представляет обратную скорость точки M на фигуре 2 и образует с осью Ox тот же угол θ, какой образует эта скорость, будет лежать внутри контура $ABCGFD$. Таким образом, область, ограниченная на фигуре 3 этим контуром, будет областью ζ рассматриваемого течения. Для определения функции f мы должны будем сделать конформное преобразование области ζ (фиг. 3) в область ω (фиг. 1) так, чтобы точки A, B, C, G, F, D были соответственными в той и другой областях. Критической точкой в этом примере является бесконечно удаленная часть сосуда, что соответствует на фигуре 3 бесконечно удаленной части области ζ.



Фиг. 4.

Положим теперь, что струя жидкости (фиг. 4), имеющая на свободной поверхности скорость v, встречает на своем пути некоторый клин HOK и, ударяясь о него, разделяется на две струи. Примем за линию тока $\psi = 0$ ту линию тока, которая проходит через вершину клина O и, образуя здесь критическую точку, разделяется на две части OHL и OKN. Так как на фигуре 1 в рассматриваемом случае верхняя и нижняя части прямой $O\varphi$ соответствуют точкам жидкости, имеющим различные скорости, то следует принять, что вышеуказанная область переменного ω имеет по положительной оси $O\varphi$ разрез, причем точки K и N, лежащие на верхней стороне разреза, соответствуют на фигуре 4 правой струе, а точки H и L, лежащие на нижней стороне разреза, соответствуют на фигуре 4 левой струе. Область переменного ζ ограничивается в рассматриваемом случае так же, как в предыдущем, частью дуги круга и продолжением двух ее радиусов; только соответственные точки здесь располагаются иначе, как это можно видеть, сличая одинаковые буквы на фигурах 3 и 4. Для определения функции f

мы должны будем сделать конформное преобразование областей ζ и ω, представленных на фигурах 5 и 1, так, чтобы параллели AC и DG соответствовали одноименным дугам кругов, а нижняя и верхняя части разреза $O\varphi$ представлялись контурами OHL и OKN, состоящими из радиусов и дуг круга. Конформные преобразования в обеих задачах Кирхгоф предлагает получать с помощью данного им преобразования областей луночек [1]). До сих пор удалось применить теорию луночек во второй задаче только для случая $Q = Q'$.



Фиг. 5.

Собственно говоря, если не считать исследования Фохта, который пользуется листами Римана, двумя вышеупомянутыми случаями исчерпываются все задачи, разобранные методом Кирхгофа, так как случай удара на клин или пластинку беспредельного потока найдется из второго случая, если положить, как это сделал А. П. Котельников,

$$Q = Q' = \infty.$$

При этом прямые AC и DG отодвигаются в бесконечность, так что область ω будет представлена всей плоскостью (φ, ψ) с разрезом $O\varphi$; радиусы же $O'C$, $O'A$, $O'D$ и $O'G$ на фигуре 5 сливаются в один.

Когда функция f найдена, то разыскание течения жидкости уже не представляет никакого труда. Из уравнений (1), (3) и (4) имеем:

$$f(\omega) = \frac{1}{\frac{d\omega}{dz}},$$

или

$$z = \int f(\omega)\, d\omega.$$

Сравнивая в этом уравнении действительные и мнимые

[1]) Vorlesungen, стр. 286.

части, выразим x и y в функциях φ и ψ. Для определения же уравнений линий тока останется только исключить из выражений для x и y величину φ.

§ 3. Изложение метода автора. Переходим к разъяснению нашего метода. Вместо мнимого переменного ζ мы рассматриваем мнимое переменное

$$\vartheta + i\theta = \ln w\zeta = \ln\left(\frac{w}{v}\right) + i\theta, \tag{7}$$

так что

$$\vartheta = \ln\left(\frac{w}{v}\right). \tag{8}$$

В силу уравнения (4) мнимое переменное $\vartheta + i\theta$ должно быть функцией от мнимого переменного $\varphi + \psi i$. Мы устанавливаем эту зависимость таким образом. Строим прямоугольные оси координат $O\xi\eta$ и рассматриваем мнимое переменное $u = \xi + i\eta$ в области, ограниченной осью абсцисс и соответствующей положительным значениям координат η. Потом полагаем:

$$\varphi + i\psi = \chi(u), \quad \vartheta + i\theta = \phi(u). \tag{9}$$

Здесь функции $\chi(u)$ и $\phi(u)$ в рассматриваемой области конечны, однозначны и могут обращаться в бесконечность и изменяться скачком только при обходе по бесконечно малым полуокружностям некоторых точек, лежащих на оси $O\xi$; в бесконечно удаленных точках области функции ϕ и χ могут обращаться в бесконечность, причем функция ϕ может быть только бесконечностью логарифмического порядка. Таким образом, каждой точке u рассматриваемой области соответствуют вполне определенные значения φ, ψ, ϑ, θ.

Выразив эти переменные по ξ и η, рассмотрим семейства взаимно ортогональных изотермических линий:

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}$$

и семейства взаимно ортогональных изотермических линий

$$\vartheta = \text{const.}, \quad \theta = \text{const}$$

Два первых семейства линий условимся называть *образующей сетью*, а два вторых — *направляющей сетью*. На образующую сеть мы налагаем то условие, чтобы ось ξ, являющаяся границей рассматриваемого нами пространства, вся состояла из ветвей линий $\psi = \text{const.}$, а на направляющую — то условие, чтобы ось $O\xi$ состояла поочередно из ветвей линий $\vartheta = \text{const.}$ и $0 = \text{const.}$ При таком выборе сетей границы рассматриваемого течения, которые соответствуют оси $O\xi$, будут состоять из линий тока, на которых поочередно то $0 = \text{const.}$, то $\vartheta = \text{const.}$, т. е. получаются или стенки сосудов, или контуры свободных струй.

Мы удовлетворим условию, наложенному на образующую сеть, если положим:

$$\chi = F(u) + \alpha_1 \ln\left(\frac{u-\gamma_1}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \ln\left(\frac{u-\gamma_2}{\beta_2}\right) + \alpha_3 \ln\left(\frac{u-\gamma_3}{\beta_3}\right) + \ldots, \quad (10)$$

где $F(u)$ — некоторая алгебраическая рациональная целая функция с действительными коэффициентами [1]), а α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, ... суть некоторые действительные количества. В самом деле, идя по оси $O\xi$, т. е. приписывая u действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, мы будем иметь мнимую часть в формуле (10) равной той или другой постоянной величине, посему вся ось $O\xi$ будет состоять из различных линий $\psi = \text{const.}$ При этом, так как обход по всякому бесконечно малому полукругу точки $(\gamma, 0)$ дает функции χ приращение $-\pi\alpha i$ то число ветвей образующей сети, составляющих ось $O\xi$, будет на единицу более числа этих точек. Будем называть эти точки *полюсами образующей сети. Число полюсов образующей сети соответствует числу струй данной задачи* (если не считать струи с бесконечным количеством протекающей жидкости, которая соответствует функции $F(u)$), а *абсолютная величина* $\pi\alpha$ *дает количество жидкости, которое несет*

1) Функция $F(u)$, соответствующая струе с бесконечным количеством протекающей жидкости, не должна быть выше второй степени; в противном случае будет многозначность изображения. Эта же функция может содержать мнимое постоянное, как, например, в § 10 этой работы. (*Прим. ред.*)

всякая струя, так как приращение функции ψ есть количество жидкости, протекающее между соответствующими линиями тока.

Для удовлетворения условия, наложенного на направляющую сеть, пишем:

$$\phi = m \int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{(u-c_1)(u-c_2)(u-c_3)\ldots}}. \qquad (11)$$

Здесь $f(u)$ есть алгебраическая рациональная функция с действительными коэффициентами, могущая иметь точки бесконечности только на оси $O\xi$ или в бесконечности, причем в последнем случае порядок ее бесконечности должен быть менее порядка бесконечности корня не менее, нежели на 1; $c_1, c_2, c_3, \ldots$ суть действительные величины; m есть величина, равная 1 или i; интеграция совершается по какому-нибудь контуру, лежащему внутри области, от некоторой постоянной точки до рассматриваемой точки u (так как все точки бесконечности и разветвления подинтегральной функции лежат на границе рассматриваемой нами области, то значение интеграла не зависит от пути интеграции). Для простоты рассуждения возьмем начало интеграции на оси абсцисс и посмотрим, что будет, когда интегрирование совершается по этой оси. Точки $(c, 0)$ будем называть *фокусами направляющей сети*. Если число фокусов есть n и $c_1 < c_2 < c_3 \ldots$, то при изменении u от $-\infty$ до c_1 будем иметь в выражении ϕ постоянную действительную или мнимую часть, смотря по тому, будет ли мнимо или действительно $\frac{m}{(i)^n}$. Положим, что это количество действительно. Тогда при изменении u от $-\infty$ до c_1 постоянна мнимая часть функции ϕ, т. е. мы имеем $\vartheta = \text{const.}$; при изменении u от c_1 до c_2 постоянной сделается действительная часть функции ϕ, и мы будем иметь $\vartheta = \text{const.}$ и т. д. Таким образом, вся ось $O\xi$ будет поочередно состоять из линий направляющей сети $\vartheta = \text{const.}$ и $\vartheta = \text{const.}$, что и было желательно. Мы видим теперь, что всякий раз, как ветвь образующей сети, лежащая на оси $O\xi$, вся будет заклю-

чена между двумя смежными фокусами направляющей сети, вся она будет представлять или стенку сосуда, или границу свободной струи; всякий же раз, как ветвь образующей сети на оси $O\xi$ захватывает пространство с несколькими фокусами направляющей сети, она будет представлять линию тока, которая является поочередно то контуром стенок сосуда, то контуром свободной струи.

Предполагая, что все точки бесконечности функции $f(u)$ однократны, разложим ее на простые дроби:

$$f(u) = F_1(u) + \frac{A_1}{u-e_1} + \frac{A_2}{u-e_2} + \frac{A_3}{u-e_3} + \dots, \qquad (12)$$

где $F_1(u)$ — некоторая целая и рациональная функция u, а A_1, A_2, A_3, ..., e_1, e_2, e_3, ... суть действительные величины. Мы будем называть точки $(e, 0)$ *полюсами направляющей сети* и будем всегда выбирать их так, чтобы они лежали на фокальных отрезках (отрезок оси $O\xi$ между двумя смежными фокусами), на которых $\theta = \text{const}$. Тогда при обходе полюса e направляющей сети по бесконечно малому полукругу в направлении возрастающего ξ функция ϕ получает приращение

$$-\frac{A\pi i}{\sqrt{(e-c)(e-c_1)(e-c_2)\dots}},$$

и, следовательно, угол θ изменяется при передвижении по рассматриваемой стенке сосуда сразу на

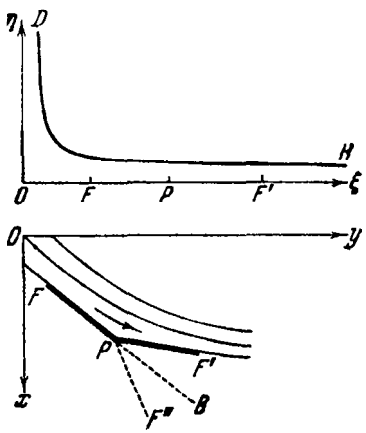
$$\Delta\theta = -\frac{A\pi}{\sqrt{(e-c)(e-c_1)(e-c_2)\dots}}, \qquad (13)$$

причем эта величина будет по условию действительна. Это значит, что в рассматриваемом месте стенка преломляется, образуя со своим прежним направлением угол $\Delta\theta$. Что касается величины скорости в этой точке, то она, на основании формул (12) и (13), может быть представлена так:

$$\ln\frac{w}{v} = -\frac{\Delta\theta}{\pi}\Big|_{u=e}^{u=e}\ln(c-u) + B,$$

где B — конечная величина. Мы видим из этой формулы,

что при $\Delta\theta > 0$ вторая часть стремится к $+\infty$, и v в точке e обращается в нуль; если же $\Delta\theta < 0$, то вторая часть стремится к $-\infty$, и v в точке e обращается в бесконечность. Чтобы разобрать геометрический смысл этого условия, обратимся к фигуре 6. Пусть линия $\psi = \text{const.}$ образующей сети есть $\eta O \xi$, причем, идя в направлении от η к ξ, мы имеем возрастание параметра φ: тогда, по нашему правилу, переход к бесконечно близкой линии DH, на которой ψ постоянно, соответствует положительному приращению φ. Отсюда заключаем, что, отходя от границы FPF' действительного течения жидкости внутрь ее, мы будем иметь положительное приращение φ. Если жидкость течет в направлении FPF', то по указанному правилу построяемое нами течение должно получиться от стенки FPF' вверх. Пусть P будет полюс направляющей сети, в котором θ прирастает на $\Delta\theta$; ему будет соответствовать на стенке сосуда вершина P угла $FPF' < \pi$, если $\Delta\theta > 0$, или угла $FPF'' > \pi$, если $\Delta\theta < 0$. В первом случае скорость в точке P будет равна нулю, а во втором она будет равна бесконечности. Таким образом, *всякий раз, как стенки сосуда, составляющие одну и ту же линию тока, образуют между собой угол менее двух прямых, в вершине этого угла получается критическая точка со скоростью нуль; всякий же раз, как этот угол тупой, скорость будет равна бесконечности и невозможно течение жидкости, при котором обе стенки составляют одну линию тока.*



Фиг. 6.

Когда направляющая и образующая сети заданы, то мы знаем величину и направление скорости для данного значения ψ любой линии тока. Действительно, идя в плоскости (ξ, η) по кривой $\psi = \text{const.}$, будем по направляющей

сети определять для всякой точки кривой значения θ и ϑ. Для решения различных задач на течения жидкости с образованием неизвестных наперед свободных поверхностей струй имеют собственно интерес выражения θ и ϑ в функциях φ на границе течения, так как, зная θ на свободной поверхности струи, мы определяем вид поверхности струи, а зная ϑ на стенке сосуда, мы определяем давление жидкости на эту стенку.

Умножив уравнение (5) соответственно на $\cos\theta$ и $\sin\theta$, будем иметь для определения вида поверхностей струй уравнения:

$$dx = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \cos\theta \, d\varphi,$$

$$dy = \frac{1}{w} e^{\vartheta} \sin\theta \, d\varphi.$$

При этом, если на контуре струи постоянная скорость есть w, то $e^{\vartheta} = 1$, и уравнения обращаются в

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{w} \cos\theta \, d\varphi, \\ dy &= \frac{1}{w} \sin\theta \, d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Написав же величину гидродинамического давления p при отсутствии внешних сил и при давлении, равном нулю для $v = w$, получим:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) = \frac{vw}{2}\left(\frac{w}{v} - \frac{v}{w}\right),$$

или

$$p = \frac{\rho}{2} vw (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}),$$

где ρ — плотность жидкости.

Определяем из уравнения (5) ds и, умножив на него обе части написанного уравнения, берем от них интеграл вдоль всей стенки. Получим величину всего давления P на стенку:

$$P = \rho w \int \operatorname{sh}\vartheta \, d\varphi. \tag{15}$$

К этой формуле надо еще прибавить формулу, выражаю-

щую длину стенки, которая получается интегрированием уравнения

$$ds = \frac{d\varphi}{v} = \frac{1}{w} e^{\theta}\, d\varphi.$$

Она будет:

$$s = \frac{1}{w} \int e^{\theta}\, d\varphi. \tag{16}$$

Так как при переходе по оси ξ через фокус величина θ изменяется непрерывно, то при сходе со стенки сосуда поверхность струи соприкасается с этой стенкой. Что касается кривизны контура струи в этом месте, то, как показал Кирхгоф, она равна бесконечности, т. е. радиус кривизны контура струи в этом месте равен нулю. С нашей точки зрения, эту теорему можно доказать так. Из формулы (7) следует, что кривые $\theta = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ образуют на плоскости (x, y), к которой мы относим течение жидкости, изотермическую сеть. Первый дифференциальный параметр h функций θ и ϑ может быть с помощью криволинейных координат φ и ψ, которым соответствует первый дифференциальный параметр v, представлен в таком виде:

$$h = \sqrt{v^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + v^2 \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2}.$$

Но касательная к линии тока образует с осью Ox угол θ, а касательная к эквипотенциальной линии — угол $\theta + \frac{\pi}{2}$, поэтому радиусы кривизны ρ и ρ' этих линий выразятся так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{d\theta}{ds},$$

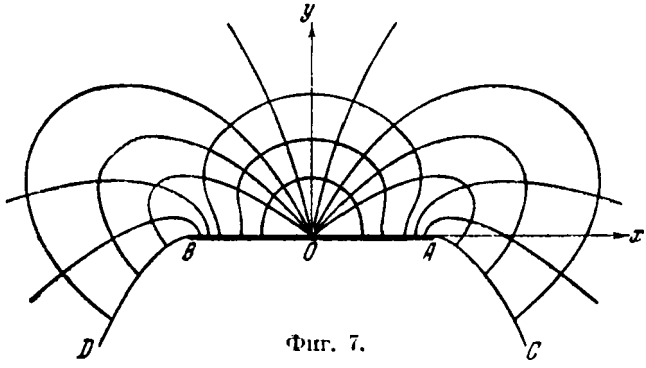
или по формулам (5) и (6)

$$\frac{1}{\rho} = v \frac{d\theta}{d\varphi}, \quad \frac{1}{\rho'} = v \frac{d\theta}{d\psi}.$$

Отсюда следует, что

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho'}\right)^2}.$$

Для упомянутой изотермической сети $\vartheta = \text{const.}$ и $\theta = \text{const.}$, точка A, в которой жидкость покидает стенку (фиг. 7), является критической точкой с бесконечным значением дифференциального параметра h. Ибо, как видно на фигуре, линии $\vartheta = \text{const.}$ должны быть перпендикулярны к стенке OA, а одна из них должна слиться с контуром струи AC; точно так же линии $\theta = \text{const.}$ должны быть перпендикулярны к AC, а одна из них должна слиться с OA. Таким образом, в точке A имеем $h = \infty$. Но, идя по контуру струи



Фиг. 7.

от точки C к точке A, мы будем иметь, несмотря на беспредельное возрастание h, постоянно

$$\frac{1}{\rho'} = v\frac{d\theta}{d\psi} = v\frac{d\vartheta}{d\varphi} = 0,$$

поэтому величина ρ при приближении к точке A по линии CA будет стремиться к нулю.

§ 4. Истечение жидкости из сосудов, ограниченных двумя плоскими бесконечными симметричными стенками. Мы приложим сначала наш метод исследования к задачам, уже разобранным методом Кирхгофа, для того чтобы читатель мог сравнить простоту анализа в том и другом способах, а потом перейдем к решению многих новых задач. Полагаем в формуле (11):

$$c_1 = -c_2 = c, \quad m = i, \quad f(u) = -\frac{cq}{u},$$

где q — некоторое отвлеченное число, и берем за нижний предел интеграции $u = \infty$. Получаем:

$$\phi = -qi \int \frac{c}{u} \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}} = qi \int \frac{d\left(\frac{c}{u}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{u}\right)^2}} = qi \arcsin\left(\frac{c}{u}\right). \quad (17)$$

Отсюда по формуле (9) следует, что

$$\frac{c}{u} = \sin\left(\frac{\theta}{q} - i\frac{\vartheta}{q}\right).$$

Положим

$$u = r(\cos\lambda + i\sin\lambda),$$

где r и λ суть полярные координаты точки (ξ, η) при полярной оси, направленной по $O\xi$, и при полюсе в O. Тогда при сравнении действительных и мнимых частей получаем:

$$\frac{c}{r}\cos\lambda = \sin\frac{\theta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}, \quad \frac{c}{r}\sin\lambda = \cos\frac{\theta}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q}. \quad (18)$$

Чтобы выяснить, какова будет построенная нами направляющая сеть, заметим, что в случае связи

$$\frac{\xi}{c} = \sin\frac{\theta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}, \quad \frac{\eta}{c} = \cos\frac{\theta}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q} \quad (19)$$

семейства линий $\vartheta = \text{const.}$ и $\theta = \text{const.}$ суть однофокусные эллипсы и гиперболы с фокусным расстоянием $2c$. Уравнения их таковы:

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{q}} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\vartheta}{q}} = c^2, \quad \frac{\xi^2}{\sin^2\frac{\theta}{q}} - \frac{\eta^2}{\cos^2\frac{\theta}{q}} = c^2.$$

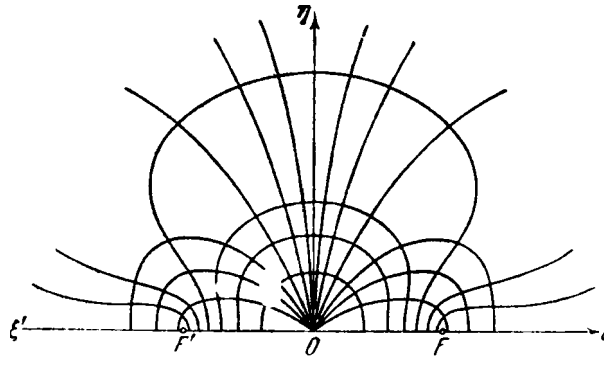
При этом параметр $\frac{\theta}{q}$ представляет угол, который асимптота рассматриваемой ветви гиперболы образует с осью $O\eta$, считаемый положительным, когда он отсчитывается от этой оси вправо, а параметр $\frac{\vartheta}{q}$ связан с эксцентриситетом e соответственного эллипса условием

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} = \frac{1}{e}$$

и может получать всякие положительные значения от 0 до ∞.

Сравнение формул (19) и (18) показывает, что найденная нами направляющая сеть получается из упомянутой эллиптической сети с помощью преобразования посредством обратных радиусов-векторов, причем центром преобразования является начало координат осей $O\xi\eta$, и произведение радиусов-векторов должно равняться c^2.

Все ветви гипербол обратятся при этом в кривые, проходящие через точку O и пересекающие под прямым углом ось $O\xi$ вне фокального отрезка FF' (фиг. 8). При этом каса-



Фиг. 8.

тельные, проведенные к этим кривым в точке O, будут образовывать с осью $O\eta$ углы, представляющие значения параметра $\frac{\theta}{q}$. Ветви гипербол, бесконечно близкие к оси $O\eta$, обратятся в кривые, которые, направляясь из точки O по этой оси, охватят в бесконечности всю рассматриваемую область. Все эллипсы обратятся в замкнутые кривые, пересекающие фокальный отрезок FF' в двух симметричных точках, причем эллипс, который совпадал с фокальным отрезком FF', представится бесконечными отрезками оси абсцисс $F\xi$ и $F'\xi'$ и кривой, охватывающей в бесконечности всю рассматриваемую область. Таким образом, построенная направляющая сеть дает для всех бесконечных точек рассматриваемой области $\theta = 0$ и $\vartheta = 0$.

Для построения образующей сети полагаем в формуле (10):

$$F(u) = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = c,$$
$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0.$$

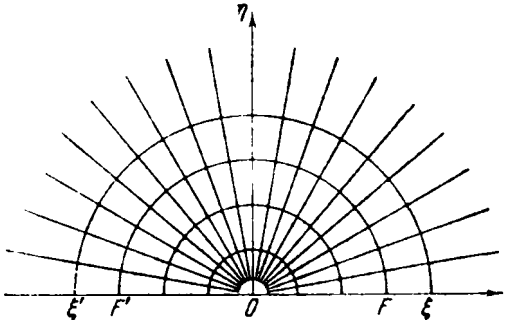
Получаем:

$$\chi = \alpha \ln \frac{u}{c},$$

и

$$\varphi = \alpha \ln \frac{r}{c}, \quad \psi = \alpha\lambda. \tag{20}$$

Это показывает, что образующая сеть представляется системой концентрических кругов и их радиусов (фиг. 9).



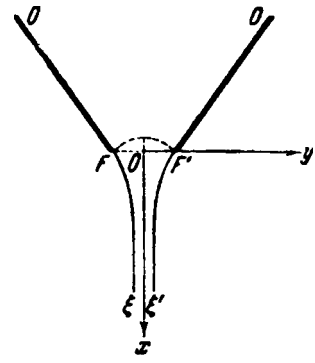
Фиг. 9.

При $\lambda = 0$ имеем $\psi = 0$, а при $\lambda = \pi$ имеем $\psi = \alpha\pi$, так что все количество протекающей жидкости есть

$$Q = \pi\alpha. \tag{21}$$

Предположим теперь, что фигуры 8 и 9 друг на друга наложены так, что оси $O\xi\eta$ обеих фигур совпадают; тогда для всяких данных φ и ψ на образующей сети мы сейчас же найдем величины ϑ и θ по направляющей сети. Пусть мы идем по линии образующей сети $\psi = 0$, которая в действительном течении жидкости соответствует одной из граничных линий тока. На наших совмещенных плоскостях $O\xi\eta$ это соответствует перемещению по оси $O\xi$. Если мы перемещаемся от начала O в положительную сторону оси абсцисс, то это соответствует по формулам (20) изменению параметра φ от $-\infty$ до $+\infty$, причем $\varphi = 0$ в точке F; на линии же тока это соответствует перемещению в направлении течения жидкости. На отрезке оси абсцисс OF будем иметь $\frac{\vartheta}{q} = \frac{\pi}{2}$, или $\vartheta = q\frac{\pi}{2}$, а на бесконечном ее отрезке $F\xi$ будем иметь

$\vartheta = 0$. В действительном течении жидкости это соответствует стенке сосуда OF, наклоненной к оси Ox под углом $q\frac{\pi}{2}$, и контуру струи $F\xi$ (фиг. 10). Согласно данному нами правилу, при отступлении от начертанной линии тока $OF\xi$ направо, мы будем иметь возрастание ψ, поэтому исследуемое течение располагается направо от этой линии тока. Если будем теперь перемещаться на фигурах 8 и 9 по оси абсцисс от точки O влево, т. е. пойдем по линии направляющей сети $\psi = \pi\alpha$, то будем иметь изменение параметра φ опять от $-\infty$ до $+\infty$ при $\varphi = 0$ в точке F', и на линии тока действительного течения мы будем перемещаться в направлении движения жидкости. На отрезке оси абсцисс OF' мы будем иметь $\frac{\vartheta}{q} = -\frac{\pi}{2}$, или $\vartheta = -q\frac{\pi}{2}$, на бесконечном отрезке $F'\xi'$ будем иметь $\vartheta = 0$. В действительном течении жидкости это соответствует стенке сосуда OF', наклоненной к оси Ox под углом $-q\frac{\pi}{2}$, и контуру струи $F'\xi'$.



Фиг. 10.

Мы получили, таким образом, решение задачи об истечении в пустоту жидкости, находящейся под некоторым напором в сосуде $OFF'O$, стенки которого симметричны относительно оси. На фигуре 10 эта ось симметрии принята за ось Ox, а начало координат взято на прямой FF', соответствующей отверстию сосуда. На основании сказанного выше на ортогонали FF' к линиям тока мы будем иметь

$$\varphi = 0.$$

Обратимся к определению вида контура струи и количества вытекающей жидкости. Пишем по уравнению (14):

$$dy = \frac{1}{w}\sin\vartheta\, d\varphi.$$

Далее полагаем в первом уравнении (18) $\vartheta = 0$, $\lambda = 0$ и пишем его рядом с первым уравнением (20):

$$\frac{c}{r} = \sin\frac{\theta}{q}, \quad \varphi = \alpha \ln\frac{r}{c}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = -\alpha \ln\sin\frac{\theta}{q}, \quad d\varphi = -\frac{\alpha}{q}\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right)d\theta.$$

Подставляем эту величину $d\varphi$ в формулу для dy и интегрируем:

$$y = -\frac{\alpha}{qw}\int \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right)d\theta + \text{const}.$$

Произвольное постоянное определяем под условием, что в точке F имеем $y = -b$, где $2b$ — ширина отверстия сосуда и $\theta = \frac{\pi}{2}q$. Получаем:

$$b + y = \frac{\alpha}{qw}\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}q} \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right)d\theta. \tag{22}$$

Эта формула устанавливает связь между ординатой y и углом θ наклонения касательной контура $F\xi$ к оси Ox, поэтому ее можно рассматривать как уравнение контура $F\xi$. Что касается контура $F'\xi'$, то он будет представлять кривую, симметричную $F\xi$. Уравнение (22) служит для определения количества Q вытекающей жидкости. В бесконечных частях струи мы имеем:

$$\theta = 0, \quad y = -\frac{Q}{2w}.$$

Подставляя эти значения в формулу (22) и заменяя в ней коэффициент α его значением, определенным из формулы (21), получаем:

$$b - \frac{Q}{2w} = \frac{Q}{\pi q w}\int_{0}^{\frac{\pi q}{2}} \sin\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{q}\right)d\theta.$$

Определяем отсюда Q и вводим при этом новое переменное интеграции, положив $\frac{\theta}{q} = \sigma$:

$$Q = 2bw\pi : \left[\pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(q\sigma)\operatorname{ctg}\sigma\, d\sigma\right]. \tag{23}$$

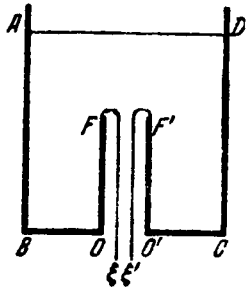
Эта формула позволяет определять количество вытекающей жидкости при различных значениях q.

Для $q = 1$, т. е. при истечении из отверстия, сделанного в плоском дне весьма большого сосуда, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sigma\, d\sigma &= 1, \\ Q = \frac{\pi}{\pi + 2} 2bw &= 0{,}61 \cdot 2bw. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

При $q = 2$ имеем разобранное Релеем истечение жидкости из весьма большого сосуда $ABCD$ в отверстие между двумя параллельными плоскостями OF и $O'F'$, перпендикулярными к стенке сосуда BC и проникающими внутрь его (фиг. 11). В этом случае

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\sigma\, d\sigma &= \frac{\pi}{2}, \\ Q &= bw, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$



Фиг. 11.

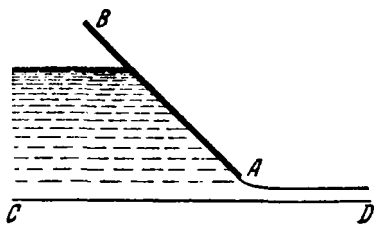
что вполне согласно с опытом Борда.

При $q = \frac{1}{2}$ имеем истечение жидкости из сосуда, стенки которого наклонены к оси симметрии под углом в 45°. Если заменим эту ось симметрии, которая соответствует линии тока, неподвижной стенкой CD, то будем иметь истечение жидкости из впуска с напором при угле наклонения щита AB

в 45° к горизонту (фиг. 12). Получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\sigma}{2}\cos\sigma\, d\sigma}{\sin\sigma} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\frac{\sigma}{2}-1}{\cos\frac{\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{2} = \sqrt{2}+\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \\ &\frac{Q}{2} = \frac{\pi}{\pi+1{,}07}\,bw = 0{,}75\,bw; \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

здесь $\frac{Q}{2}$ есть количество жидкости, вытекающей из впуска. Мы видим, что это количество более того, которое вытекло бы при вертикальном щите.



Фиг. 12.

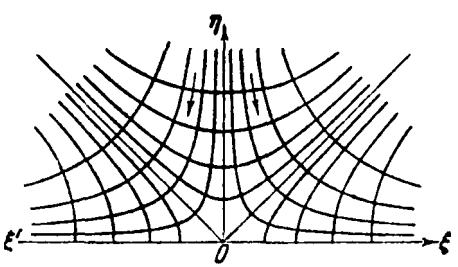
§ 5. Удар беспредельного потока на симметричный клин, ось которого направлена по направлению течения потока. За направляющую сеть в этой задаче принимаем направляющую сеть, изображенную на фигуре 8, а для получения образующей сети полагаем в формуле (10):

$$F(u) = ku^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0.$$

Это дает нам:

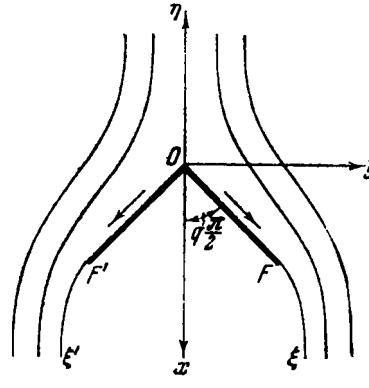
$$\chi = ku^2 \quad \varphi = k(\xi^2 - \eta^2), \quad \psi = 2k\xi\eta. \quad (27)$$

Линии $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$ представляют семейства взаимно ортогональных равносторонних гипербол (фиг. 13). При $\psi = 0$ имеем две гиперболы, сливающиеся сначала с осью $O\eta$ и поворачивающиеся в точке O под прямым углом так, что одна гипербола сливается с правой половиной оси абсцисс, а другая — с левой. Изменяя ψ от 0 до $+\infty$, получим гиперболы правой половины рас-



Фиг. 13.

сматриваемой полуплоскости, а изменяя ψ от 0 до $-\infty$, получим гиперболы левой половины этой полуплоскости. Изменение φ от $-\infty$ до $+\infty$ дает нам передвижение по гиперболам $\psi = \text{const}$. в направлении, указанном на фигуре стрелками. Наложив фигуру 13 на фигуру 8 так, чтобы оси $O\xi\eta$ совпали, пойдем по линии $\psi = 0$, изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$. На ηO параметр $\frac{\theta}{q}$ направляющей сети будет нуль, и потому $\theta = 0$; на отрезке оси абсцисс OF этот параметр будет иметь значение $\frac{\pi}{2}$, и потому $\theta = q\frac{\pi}{2}$; на бесконечном отрезке оси абсцисс $F\xi$ будем иметь $\vartheta = 0$; на отрезке оси абсцисс OF' параметр $\frac{\theta}{q}$ будет иметь значение $-\frac{\pi}{2}$ и потому $\theta = -q\frac{\pi}{2}$; на бесконечном же отрезке $F'\xi'$ будем иметь $\vartheta = 0$. В действительном течении жидкости это будет соответствовать (фиг. 14): линии тока ηO, направленной по оси Ox, которая в критической точке O разделится на две прямые линии тока OF и OF', соответствующие щекам клина: в точках же F и F' эти прямые линии тока перейдут в бесконечные ветви $F\xi$ и $F'\xi'$ контуров струи. Жидкость будет течь в направлении, указанном на фигуре стрелками. Согласно данному правилу вправо от $\eta OF\xi$ функция ψ должна возрастать, а влево от $\eta OF'\xi'$ она должна убывать. Согласно фигуре 13 это показывает, что поток жидкости расположится вправо и влево от контуров $\eta OF\xi$ и $\eta OF'\xi'$. Количество протекающей жидкости с той и другой стороны будет бесконечно велико, ибо ψ изменяется от 0 до $+\infty$ и $-\infty$. При этом везде в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = 0$, т. е. скорость потока имеет постоянную величину w и направлена параллельно оси Ox.



Фиг. 14.

Главным вопросом в рассматриваемой задаче является определение давления потока на клин. По формулам (18) и (27) имеем на отрезке OF оси $O\xi$:

$$\frac{c}{r} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q},$$

$$\varphi = kr^2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{kc^2}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\vartheta}{q}}. \tag{28}$$

Подставляем эту величину φ в формулу (15):

$$P = \rho k c^2 w \int_{\infty}^{0} \operatorname{sh}\vartheta d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\vartheta}{q}}\right) = -\rho k c^2 w \int_{0}^{\infty} \operatorname{sh}\vartheta d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\vartheta}{q}}\right)$$

Интегрируем по частям, замечая, что вследствие $q<2$ члены от подстановки обращаются в нуль; потом умножаем полученную величину P на $2\sin\left(q\frac{\pi}{2}\right)$, чтобы получить равнодействующую R сил давления на клин, направленную по оси Ox. Получаем:

$$R = 2\rho w \varphi_0 \sin\frac{q\pi}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\vartheta}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\vartheta}{q}} d\vartheta, \tag{29}$$

где φ_0 по формуле (28) есть значение φ при $\vartheta = 0$, т. е. в точке F.

Чтобы взять входящий сюда интеграл, делаем подстановку

$$e^{-2\vartheta} = \sigma^q, \quad \operatorname{ch}^2\left(\frac{\vartheta}{q}\right) = \frac{1}{4}(1+\sigma)^2\sigma^{-1},$$

$$e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} = \sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}}, \quad d\vartheta = -\frac{q d\sigma}{2\sigma}.$$

Это дает нам:

$$R = 2\rho w \varphi_0 q \sin\frac{q\pi}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma =$$

$$= 2\rho w \varphi_0 q \sin\frac{q\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}}\,d\sigma}{(1+\sigma)^2} + \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}\,d\sigma}{(1+\sigma)^2}\right).$$

Преобразуем каждый из входящих сюда интегралов. В первом совершаем интеграцию по частям:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{q}{2}-1}}{1+\sigma}\,d\sigma;$$

во втором пишем:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = -\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{2-q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma + \int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{1+\sigma}\,d\sigma$$

и берем первый интеграл второй части последнего равенства по частям:

$$-\int_0^1 \frac{\sigma^{\frac{2-q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = \frac{1}{2} - \left(1-\frac{q}{2}\right)\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{1+\sigma}\,d\sigma,$$

так что

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma = \frac{1}{2} + \frac{q}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{1+\sigma}\,d\sigma.$$

Подставляем в формулу для R:

$$R = \rho w \varphi_0 q^2 \sin\frac{q\pi}{2}\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}} - 1}{1+\sigma}\,d\sigma,$$

где q заключено между 0 и 2. Для всех таких значений q имеем [1]):

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}} + \sigma^{\frac{q}{2}-1}}{1+\sigma}\, d\sigma = \frac{\pi}{\sin\frac{q\pi}{2}}.$$

Поэтому сила давления потока на клин представляется такой формулой:

$$R = \pi\rho w q^2 \varphi_0. \tag{30}$$

Теперь надо выразить φ_0 с помощью длины s бока клина. Для этого пользуемся формулой (16), в которую подставляем значение $d\varphi$ из формулы (28):

$$s = -\frac{\varphi_0}{w}\int_0^\infty e^\vartheta d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{q}}\right).$$

Интегрируем по частям:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + \int_0^\infty \frac{e^\vartheta}{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{q}}\, d\vartheta\right).$$

Полагаем здесь также, что

$$e^{-2\vartheta} = \sigma^q.$$

Получаем:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + 2q\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{(1+\sigma)^2}\, d\sigma\right).$$

Преобразуем по предыдущему:

$$s = \frac{\varphi_0}{w}\left(1 + q + q^2\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{q}{2}}}{1+\sigma}\, d\sigma\right). \tag{31}$$

Формулы (31) и (30), которые были выведены Д. К. Бобылевым [2]), вполне решают вопрос об определении силы дав-

[1]) Bertrand, Traité de calcul intégral, § 144, Paris, 1870.

[2]) Журнал Русского физико-химического общества, т. XIII, стр. 63

ления потока на равнобокий клин, ось которого направлена по течению потока. Определив из формулы (31) φ_0 по s и подставив в (30), мы найдем силу R, которая будет пропорциональна w^2 и s. Д. К. Бобылев берет интеграл, входящий в формулу (31), для случая соизмеримого q и составляет таблицы величины R для различных углов клина. Из этих таблиц следует, что при одном и том же s наибольшая величина R соответствует углу $q\pi$, заключенному между 200 и 220°. Для определения силы удара потока на пластинку мы должны в наших формулах положить $q = 1$. Это даст:

$$\int_0^1 \frac{\sigma^{-\frac{1}{2}}}{1+\sigma}\, d\sigma = \frac{\pi}{2}, \quad s = \frac{\varphi_0}{w}\left(2 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{32}$$

$$R = \frac{\pi}{4+\pi}\, 2\rho s w^2 = 0{,}44 \cdot 2\rho s w^2.$$

§ 6. Истечение из сосудов, ограниченных двумя плоскими бесконечными несимметричными стенками. Если стенки сосуда несимметрично расположены относительно прямой, делящей угол между ними пополам и равноотстоящей от краев отверстия, то симметричная направляющая сеть, представленная на фигуре 8, должна быть заменена аналогичной несимметричной направляющей сетью. Полагаем в формуле (11):

$$c_1 = -c_2 = c, \quad m = i,$$

$$f(u) = -\frac{q\sqrt{c^2 - e^2}}{u - e},$$

где $e < c$. Получаем:

$$\phi = -qi \int \frac{\sqrt{c^2 - e^2}}{u - e} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

Вводим сюда новое переменное, положив

$$u' = u - e,$$

и делаем некоторые преобразования:

$$\varphi = qi\int \frac{d\dfrac{\sqrt{c^2-e^2}}{u'}}{\sqrt{1+\dfrac{2e}{u'}-\dfrac{c^2-e^2}{u'^2}}} = qi\int \frac{d\dfrac{c^2-e^2}{cu'}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{c^2-e^2}{cu'}-\dfrac{e}{c}\right)^2}} =$$

$$= qi\arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu'}-\frac{e}{c}\right), \qquad (33)$$

где за нижний предел интеграции по u принято $u=\dfrac{c^2}{e}$, следовательно,

$$u' = \frac{c^2-e^2}{c}.$$

Отсюда по формуле (9) следует, что

$$\frac{c^2-e^2}{u'} = e + c\sin\left(\frac{\theta}{q} - i\frac{\vartheta}{q}\right).$$

Если положим здесь

$$u' = r(\cos\lambda + i\sin\lambda),$$

где r и λ будут полярные координаты точки плоскости $O\xi\eta$ относительно полюса $(e, 0)$, то найдем, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{c^2-e^2}{r}\cos\lambda &= e + c\sin\frac{\theta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q},\\ \frac{c^2-e^2}{r}\sin\lambda &= c\cos\frac{\theta}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q}.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Из сравнения этих формул с формулами (19) заключаем, что координаты ξ и η точки эллиптической сети, определяемые параметрами θ и ϑ, и полярные координаты r и λ точки нашей новой направляющей сети при тех же параметрах связаны уравнениями:

$$\frac{c^2-e^2}{r}\cos\lambda = e+\xi, \quad \frac{c^2-e^2}{r}\sin\lambda = \eta.$$

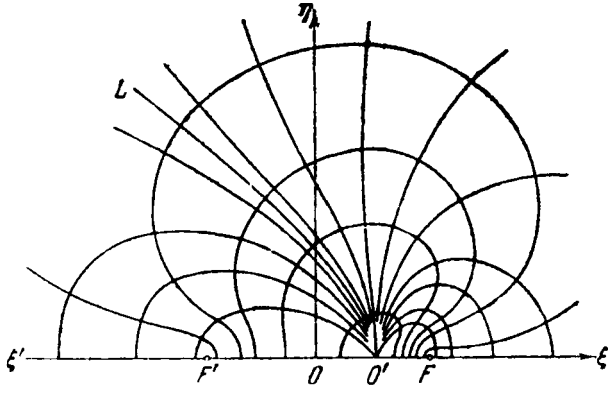
Это показывает, что определяемая нами направляющая сеть может быть получена из эллиптической сети с помощью преобразования последней посредством обратных радиусов-векторов из центра преобразования $(-e, 0)$, причем произведение радиусов равно c^2-e^2, и с помощью передвижения найденной в этом преобразовании сети в направлении

оси $O\xi$ на расстояние $2e$. Легко усмотреть, что при таком преобразовании плоскости точки F и F', отстоящие от O на расстояние c, переходят сами в себя. Действительно, после преобразования с помощью обратных векторов точка F отстоит от полюса $(-c, 0)$ на расстояние

$$\frac{c^2-e^2}{c+e}=c-e,$$

а после передвижения вправо на $2e$ точка F отстоит от O на расстояние $c-e+e=c$.

Таким образом, получается сеть, представленная на фигуре 15. Все ветви гипербол переходят в ней в кривые,



Фиг. 15.

проходящие через полюс O', отстоящий от начала O на расстояние e. Параметры этих кривых $\frac{\theta}{q}$ будут выражаться углами, которые их касательные в точке O' образуют с осью $O\eta$. Все эти кривые будут пересекать ось $O\xi$ под прямым углом вне отрезка FF'. При этом та гипербола, которая в эллиптической сети проходила через точку $(-e, 0)$, обратится в рассматриваемой сети в кривую $O'L$, разделяющую ветви кривых $\frac{\theta}{q}=\text{const}$., идущих направо и налево, и охватывающую в бесконечности все рассматриваемое пространство. Линии $\frac{\theta}{q}=\text{const}$., которые преобразуются

из эллипсов эллиптической сети, будут замкнутые кривые, пересекающие под прямым углом ось $O\xi$ внутри фокусного отрезка FF'. Бесконечно тонкий эллипс, сливающийся в эллиптической сети с отрезком FF', представляется в рассматриваемой сети частью оси абсцисс вне отрезка FF' и охватывает в бесконечности все рассматриваемое пространство. Таким образом, в рассматриваемой сети все точки бесконечности имеют параметр $\frac{\vartheta}{q}=0$ и параметр $\frac{\theta}{q}$, равный углу $-\frac{\mu}{q}$, который касательная к кривой $O'L$ в точке O' образует с осью $O\eta$. Этот угол найдем, полагая в формуле (34) $\theta=0$, $r=\infty$, $\theta=-\mu$, что дает:

$$\sin\frac{\mu}{q}=\frac{e}{c}. \tag{35}$$

Определив отсюда e и поставляя его в формулы (34), представим их в виде:

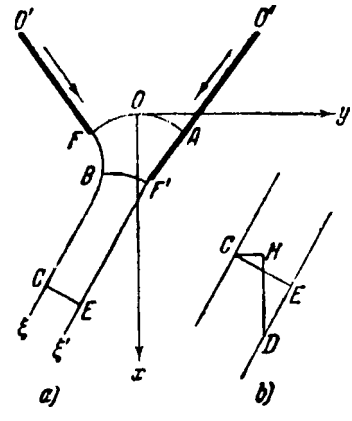
$$\left.\begin{aligned}\frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda&=\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q},\\ \frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda&=\cos\frac{\theta}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

За образующую сеть для решения предложенной задачи мы примем сеть, представленную на фигуре 9. Налагаем эту сеть на фигуру 15 так, чтобы точка O фигуры 9 совпала с полюсом O' фигуры 15 и чтобы ось $O\xi$ пошла по $O'\xi$, а оси $O\eta$ были направлены в одну сторону. Заменяем в формулах (20) c на $c-e$:

$$\varphi=\alpha\ln\frac{r}{c-e},\quad \psi=\alpha\lambda. \tag{37}$$

Посмотрим, как расположится теперь течение жидкости, даваемое нашими сетями. Идя по прямой $O'F$, будем иметь: $\psi=0$, φ изменяется от $-\infty$ до 0, $\theta=\frac{q\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0; идя далее по прямой $F\xi$, будем иметь: $\psi=0$, φ изменяется от 0 до $+\infty$, $\vartheta=0$ и θ изменяется от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует в действительном движении жидкости (фиг. 16, a) стенке сосуда $O'F$ и контуру струи $F\xi$.

причем на эквипотенциальной линии FA принято $\varphi = 0$. С другой стороны, идя по прямой $O'F'$, мы будем иметь: $\psi = \pi\alpha$, φ изменяется от $-\infty$ до φ_0, $\theta = -\frac{q\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0; идя далее по прямой $F'\xi'$, будем иметь: $\psi = \pi\alpha$, φ изменяется от φ_0 до $+\infty$, $\theta = 0$ и ϑ изменяется от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует в действительном движении жидкости стенке сосуда $O'F'$ и контуру струи $F'\xi'$. Мы видим, что оба контура струи образуют в бесконечности с осью Ox угол $-\mu$, определяемый по формуле (35).



Фиг. 16.

Согласно правилу об изменении ψ следует, что рассматриваемое течение жидкости будет лежать направо от линии тока $O'F\xi$ и налево от линии тока $O'F'\xi'$. Возьмем начало координат O на эквипотенциальной линии FA и предположим, что ось Ox, которая, как мы видели, делит угол между стенками сосуда пополам, равно отстоит от краев F и F' отверстия сосуда [1]).

Обратимся к составлению уравнений контуров струи и к определению количества вытекающей жидкости. Мы имеем по формулам (36) и (37) на отрезках $F\xi$ и $F'\xi'$, соответствующих контурам струи $F\xi$ и $F'\xi'$

$$\zeta = \pm c\,\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}} = c\left(1 - \sin\frac{\mu}{q}\right)e^{\frac{\varphi}{\varkappa}},$$

1) Правильнее было бы опустить слова «которая, как мы видели» и «... равно отстоит от краев F и F' отверстия сосуда ...», потому что биссектриса угла между стенками несимметричного сосуда не может равно отстоять от точек F и F'. Сам автор после формулы (39) пишет: ... $x_0' - x_0 = 2a$, $y_0' - y_0 = 2b$, где x_0, y_0, x_0' и y_0' — координаты краев отверстия F и F'. (*Прим. ред.*)

откуда следует, что

$$d\xi = -\frac{\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\cdot\frac{\alpha\, d\theta}{q}. \tag{38}$$

Подставляя эту величину в формулы (14), получим:

$$dx = -\frac{\alpha}{qw}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta, \qquad dy = -\frac{\alpha}{qw}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta.$$

Совершая интеграцию и приписывая координатам контура $F'\xi'$ обозначения x' и y' для отличия от координат x и y контура $F''\xi$, находим:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{\alpha}{qw}\int_{\frac{q\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta + x_0,\\
y &= -\frac{\alpha}{qw}\int_{\frac{q\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta + y_0,\\
x' &= -\frac{\alpha}{qw}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta + x'_0,\\
y' &= -\frac{\alpha}{qw}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}d\theta + y'_0,
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где x_0, y_0, x_0', y_0' суть координаты краев отверстия F и F'. В первых двух интегралах верхний предел θ получает для различных точек контура значения от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$, а во вторых двух интегралах значения от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Если положим, что

$$x_0' - x_0 = 2a, \quad y_0' - y_0 = 2b,$$

и вычтем из третьей формулы (39) первую, а из четвертой вторую, приняв при этом для верхних пределов в первых двух формулах $\theta = -\mu + \varepsilon$, а во вторых двух $\theta = -\mu - \varepsilon'$, где ε и ε' бесконечно малы, то найдем:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= 2a - \\ &- \frac{\alpha}{qw}\left\{\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'} \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta + \int_{-\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta\right\}, \\ y' - y &= 2b - \\ &- \frac{\alpha}{qw}\left\{\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'} \frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta + \int_{-\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Вторые части этих формул при произвольных бесконечно малых величинах ε и ε' произвольны. Легко усмотреть, что при этом и первые части их остаются неопределенными, так как они представляют разность координат двух каких-нибудь бесконечно удаленных точек, взятых на правом и левом контурах струи.

Другое дело будет, если мы наложим на ε и ε' некоторое условие. Предположим, что значения $\theta = -\mu - \varepsilon'$ и $\theta = -\mu + \varepsilon$ соответствуют бесконечно удаленным точкам струи D и C, в которых разность потенциалов скоростей

есть φ_0, т. е. имеет ту же величину, как в точках F' и F (фиг. 16). Тогда по формуле (38) имеем:

$$\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{-\mu-\varepsilon'} \frac{\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta + \int_{\mu+\varepsilon}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\frac{\theta}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\,d\theta = 0. \qquad (41)$$

На основании этого условия мы можем вторым частям формулы (40) дать вполне определенный вид:

$$\left.\begin{aligned} x'-x &= 2a + \frac{\alpha}{qw}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta,\\ y'-y &= 2b - \frac{\alpha}{qw}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\sin\mu+\sin\theta}{\sin\frac{\mu}{q}+\sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (40')$$

Проведем (фиг. 16) через точку C эквипотенциальную линию CE, которая будет прямая, перпендикулярная к контурам струи. Очевидно [1]), что длина этого перпендикулярного сечения $CE = \frac{Q}{w}$; что же касается до отрезка ED, то $ED = \frac{\varphi_0}{w}$. Если теперь проведем через точки C и D прямые CH и DH, параллельные осям координат, то увидим, что $DH = x' - x$ и $CH = y' - y$. На основании этого

[1]) Перед формулой (41) автор говорит, что в точках C и D (фиг. 16, b) разность потенциалов скоростей есть φ_0. Отрезок CE есть эквипотенциальная линия; следовательно, разность потенциалов в точках D и E тоже будет φ_0. Поэтому

$$w = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{\varphi_0}{ED}, \quad ED = \frac{\varphi_0}{w},$$

что и написано в тексте. (*Прим. ред.*)

замечания получаем:

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= \frac{Q}{w}\sin\mu + \frac{\varphi_0}{w}\cos\mu, \\ y' - y &= \frac{Q}{w}\cos\mu - \frac{\varphi_0}{w}\sin\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (40'')$$

По формуле (21) находим, что

$$\alpha = \frac{Q}{\pi}.$$

Далее, на основании формулы (37), имеем:

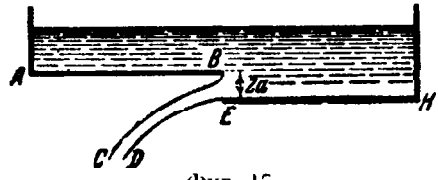
$$\varphi_0 = \frac{Q}{\pi}\ln\frac{c+e}{c-e} = \frac{Q}{\pi}\ln\frac{1+\sin\frac{\mu}{q}}{1-\sin\frac{\mu}{q}} = \frac{2Q}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right). \qquad (42)$$

Сравнивая формулы (40′) и (40″) и пользуясь (42), получим:

$$\left.\begin{aligned} 2a + \frac{Q}{q\pi w}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta &= \\ = \frac{Q}{w}\left[\sin\mu + \frac{2\cos\mu}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right)\right], & \\ 2b - \frac{Q}{q\pi w}\int_{-\frac{q\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{2}} \frac{\sin\mu + \sin\theta}{\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta}{q}}\cos\frac{\theta}{q}\,d\theta &= \\ = \frac{Q}{w}\left[\cos\mu - \frac{2\sin\mu}{\pi}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2q}\right)\right]. & \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Уравнения (43) позволяют нам при данных a, b и q определить количество вытекающей жидкости Q и угол μ, образуемый струей с бисектором угла между стенками сосуда. Для примера рассмотрим случай $q=1$, $b=0$, который соответствует истечению из весьма большого сосуда, дно которого состоит из двух горизонтальных плоскостей AB и EH, расположенных на различной высоте, но схо-

дящихся краями B и E на одну вертикальную плоскость, на которой и образуется отверстие ширины $2a$ (фиг. 17).



Фиг. 17.

При сделанном предположении формулы (43) обращаются в такие:

$$\left.\begin{aligned} 2a\pi &= Q\left[\pi\sin\mu + 2\cos\mu\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right) - \right.\\ &\qquad \left. - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\mu+\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\right], \\ \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right) &= \frac{2+\pi\cos\mu}{2\sin\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Последнее из этих уравнений служит для определения угла μ, который не зависит от a. Решая его, мы найдем, что $\mu = 68°52'$. По первому уравнению определяется количество вытекающей жидкости. Входящий в него интеграл легко берется:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\mu+\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\mu+\sin\theta}\cos\theta\,d\theta +$$

$$+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu-\cos\theta}{\sin\mu-\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = -2\sin\mu\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\mu+\cos\theta} =$$

$$= -\pi\sin\mu + 2\sin\mu\cos\mu\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\mu+\cos\theta} =$$

$$= -\pi\sin\mu + \cos\mu\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right).$$

Следовательно, находим:

$$Q = \frac{\pi}{2\pi \sin\mu + \cos\mu \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)} 2aw = 0{,}96 \cdot 2aw. \qquad (45)$$

Таким образом, *в рассмотренной задаче конец струи будет образовывать с дном сосуда угол в* 21°8′, *а коэффициент истечения будет* 0,96, т. е. более того, который имеется в формуле (24)*).

§ 7. Удар беспредельного потока о несимметрично относительно него расположенный неравнобокий клин. Для решения этой задачи берем направляющую сеть, представленную на фигуре 15, и образующую сеть, представленную на фигуре 13. Налагаем эти сети друг на друга так, чтобы точка O фигуры 13 совпала с точкой O' фигуры 15 и чтобы оси $O\xi$ и $O'\xi$ совпали. Мы увидим, что во всех бесконечно удаленных точках течения жидкости $\vartheta = 0$ и угол θ есть постоянная величина $-\mu$, определяемая из формулы (35):

$$\mu = q \arcsin \frac{e}{c}. \qquad (46)$$

---

*) Этот вывод неточен. В интегрировании выражения

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu - \cos\theta}{\sin\mu + \sin\theta} \cos\theta \, d\theta$$

вкралась описка: этот интеграл равен

$$-\pi \sin\mu + 2\cos\mu \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right),$$

а не

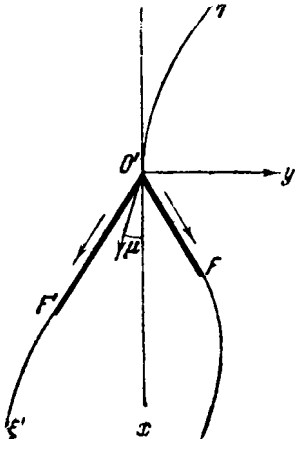
$$-\pi \sin\mu + \cos\mu \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right).$$

Поэтому

$$Q = \frac{1}{2\sin\mu} \cdot 2aw \approx 0{,}54 \cdot 2aw,$$

а не $0{,}96 \cdot 2aw$, и, следовательно, коэффициент истечения будет равен 0,54, т. е. он меньше, а не больше того, который имеется в формуле (24). (*Прим. ред.*)

Это будет угол, который бисектор угла между щеками клина образует с направлением потока. Идя затем по оси $\eta O'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от $-\infty$ до 0, ϑ изменяется от $-\mu$ до 0 и ϑ изменяется от 0 до ∞; идя далее по $O'F$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от 0 до φ_0, $\vartheta = \frac{q\pi}{2}$, ϑ изменяется от ∞ до 0; идя еще далее по $F\xi$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от φ_0 до ∞, $\vartheta = 0$ и ϑ изменяется от $\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует (фиг. 18) в действительном движении жидкости линии тока $\eta O' F\xi$, состоящей из кривой линии $\eta O'$, доходящей до критической точки O', из щеки клина $O'F$ и из контура струи $F\xi$. С другой стороны, идя по оси $\eta O'$ будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от $-\infty$ до 0, ϑ изменяется от $-\mu$ до 0 и ϑ изменяется от 0 до ∞; идя далее по $O'F'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от 0 до φ_0', $\vartheta = -\frac{q\pi}{2}$, ϑ изменяется от ∞ до 0; идя еще далее по $F'\xi'$, будем иметь: $\psi = 0$, φ изменяется от φ_0' до ∞, $\vartheta = 0$ и ϑ изменяется от $-\frac{q\pi}{2}$ до $-\mu$. Это соответствует в действительном движении жидкости линии тока $\eta O' F'\xi'$, которую, собственно говоря, можно считать вместе с вышеописанной за одну и ту же линию тока, разделяющуюся в критической точке O' на две. Во второй ее половине $O'F'$ представляет вторую щеку клина, а $F'\xi'$ — вторую граничную линию струи.



Фиг. 18.

Легко усмотреть согласно данному правилу, что рассматриваемое течение жидкости заполнит всю плоскость $O'xy$, располагаясь направо от $\eta O' F\xi$ и налево от $\eta O' F'\xi'$. Начало осей $O'xy$ мы берем в вершине клина O', так что $O'x$ будет бисектором угла клина $q\pi$.

Определим силу давления потока на клин. Для этого выражаем φ по ϑ на отрезках $O'F$ и $O'F'$. По формулам (27) и (36) имеем на этих отрезках:

$$\varphi = kr^2, \quad \frac{c}{r}\cos^2\frac{\mu}{q} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} \mp \sin\frac{\mu}{q},$$

где верхний знак относится к отрезку $O'F$, а нижний — к отрезку $O'F'$. Отсюда получаем:

$$\varphi = kc^2\left(\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} \mp \sin\frac{\mu}{q}}\right)^2. \tag{47}$$

Если положим здесь

$$\vartheta = 0,$$

то найдем φ_0 и φ_0':

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= kc^2\frac{\cos^4\frac{\mu}{q}}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}, \\ \varphi_0' &= kc^2\frac{\cos^4\frac{\mu}{q}}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Подставляем $d\varphi$ из формул (47) в формулу (15) и составляем силы P и P' давлений потока на правую и левую щеки клина:

$$P = -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty \operatorname{sh}\vartheta\, d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}}\right)^2,$$

$$P' = -\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty \operatorname{sh}\vartheta\, d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}}\right)^2.$$

Совершаем интегрирование по частям, заметив, что $q<2$:

$$\left.\begin{aligned} P &= \rho w \cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\,d\vartheta,\\ P' &= \rho w \cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\,d\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Вводим новое переменное:

$$e^{-\vartheta}=\sigma^q,\quad d\vartheta=-q\frac{d\sigma}{\sigma},\quad e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}=\sigma^q+\sigma^{-q},$$

$$\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}=\frac{4\sigma^2}{\left(\sigma^2+2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2},$$

$$\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}=\frac{4\sigma^2}{\left(\sigma^2-2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2q\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^1 \frac{(\sigma^q+\sigma^{-q})\,\sigma}{\left(\sigma^2+2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\,d\sigma,\\ P' &= 2q\rho w\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^1 \frac{(\sigma^q+\sigma^{-q})\,\sigma}{\left(\sigma^2-2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Что касается длин боков клина $O'F=s$ и $O'F'=s'$, то они найдутся по формулам (16) и (47):

$$\left.\begin{aligned} s &= -\frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty e^{\vartheta}\,d\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2},\\ s' &= -\frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\int_0^\infty e^{\vartheta}\,d\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Совершаем интегрирование по частям, обращая внимание на условие $q < 2$:

$$s = \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\left\{\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\int_0^\infty\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\right\},$$

$$s' = \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\left\{\frac{1}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+\int_0^\infty\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}\right\}.$$

Полагаем здесь тоже, что

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q.$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\left\{\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{\left(\sigma^2+2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\right\},\\ s' &= \frac{1}{w}\cos^4\frac{\mu}{q}\cdot kc^2\left\{\frac{1}{\left(1-\sin\frac{\mu}{q}\right)^2}+4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{\left(\sigma^2-2\sigma\sin\frac{\mu}{q}+1\right)^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Формулы (50) и (52) совпадают с теми, которые были выведены И. В. Мещерским[1]); из них следует, что во всех случаях $P' > P$ и $s' > s$. Исключая kc^2, определим P и P' и установим связь между s, s', μ и q. Эта связь получается через составление $\frac{s}{s'}$ из формул (52). Таким образом, при данном угле наклонения μ и данном угле клина $q\pi$ длины щек его должны иметь данное отношение для того, чтобы было возможно рассматриваемое нами течение жидкости. Если отношение щек клина не будет такое, *то получаемое течение жидкости не будет давать раздельную линию тока $\eta O'$, проходящую через вершину клина и делящую угол клина пополам,*

[1]) Журнал Русского физико-химического общества, т. XVIII, стр. 342.

а будет соответствовать иной раздельной линии тока, как это показано в § 12. И. В. Мещерский выполняет интеграцию в формулах (50) и (52) для всякого $q < 2$. Отсылая читателя к его работе, мы рассмотрим здесь только случай $q = 1$, соответствующий пластинке и разобранный еще в сочинении Релея. В этом случае сила давления на пластинку $R = P + P'$ выразится по формуле (49) через

$$R = 2\rho w \cos^4 \mu \cdot kc^2 \int_0^\infty \frac{1 + \sin^2 \mu + \operatorname{sh}^2 \vartheta}{(\cos^2 \mu + \operatorname{sh}^2 \vartheta)^2}\, d(\operatorname{sh} \vartheta).$$

Полагаем $\operatorname{sh} \vartheta = z$:

$$R = 2\rho w \cos^4 \mu \cdot kc^2 \left[\int_0^\infty \frac{z^2\, dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} + (1 + \sin^2 \mu) \int_0^\infty \frac{dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} \right]$$

Мы имеем:

$$\int \frac{z^2\, dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} = -\frac{z}{2(\cos^2 \mu + z^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\cos^2 \mu + z^2} =$$

$$= \frac{-z}{2(\cos^2 \mu + z^2)} + \frac{1}{2 \cos \mu} \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\cos \mu}\right),$$

$$\int \frac{dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} = \frac{1}{\cos^2 \mu} \int \frac{dz}{\cos^2 \mu + z^2} - \frac{1}{\cos^2 \mu} \int \frac{z^2\, dz}{(\cos^2 \mu + z^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cos^3 \mu} \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\cos \mu}\right) + \frac{z}{2 \cos^2 \mu} \cdot \frac{1}{(\cos^2 \mu + z^2)}.$$

Подставляя эти неопределенные интегралы в нашу формулу и обращая внимание на пределы интеграции, получаем:

$$R = \rho w \cos \mu \cdot kc^2 \pi. \tag{53}$$

Что касается до формул (52), то они обращаются в

$$s = \frac{1}{w} \cos^4 \mu \cdot kc^2 \left[\frac{1}{(1 + \sin \mu)^2} + 4 \int_0^1 \frac{dz}{(z^2 + 2z \sin \mu + 1)^2} \right],$$

$$s' = \frac{1}{w} \cos^4 \mu \cdot kc^2 \left[\frac{1}{(1 - \sin \mu)^2} + 4 \int_0^1 \frac{dz}{(z^2 - 2z \sin \mu + 1)^2} \right].$$

Входящие сюда интегралы легко могут быть приведены к вышеописанным. Положив

$$z = \sigma + \sin\mu,$$

найдем

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2 + 2\sigma\sin\mu + 1)^2} = \int_{\sin\mu}^{1+\sin\mu} \frac{dz}{(z^2 + \cos^2\mu)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\mu}\left[\frac{1}{\cos\mu}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\sin\mu}{\cos\mu} - \mu\right) + \left(\frac{1}{2} - \sin\mu\right)\right].$$

Так же получим:

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2 - 2\sigma\sin\mu + 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\mu}\left[\frac{1}{\cos\mu}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\sin\mu}{\cos\mu} + \mu\right) + \left(\frac{1}{2} + \sin\mu\right)\right].$$

Подставляем это в выражения для s и s' и составляем сумму $s + s' = 2b$, обращая внимание на равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1+\sin\mu}{\cos\mu} + \operatorname{arctg}\frac{1-\sin\mu}{\cos\mu} = \frac{\pi}{2}.$$

Получим:

$$2b = \frac{kc^2}{w}(\pi\cos\mu + 4). \tag{54}$$

Исключая из формул (53) и (54) величину kc^2, получаем формулу Релея для силы давления потока на пластинку, поставленную под углом $\frac{\pi}{2} - \mu$ к направлению потока:

$$R = \frac{\pi\cos\mu}{4 + \pi\cos\mu} 2bw^2\rho. \tag{55}$$

Эта формула отличается от (32) тем, что вместо π в коэффициенте взято $\pi\cos\mu$.

§ 8. Удар струи о симметрично расположенный относительно нее равнобокий клин. Эта задача разрешается с помощью направляющей сети, представленной на фигуре 8, и с помощью образующей сети, которая должна иметь два полюса, так как струя после удара о пластинку разделяется

на две струи. Для получения этой образующей сети полагаем в формуле (10), что

$$F(u)=0,\quad \alpha_1=\alpha_2=-\alpha,\quad \alpha_3=\alpha_4=\ldots=0,$$
$$\beta_1=-\beta,\quad \beta_2=\beta,\quad \gamma_1=\gamma,\quad \gamma_2=-\gamma.$$

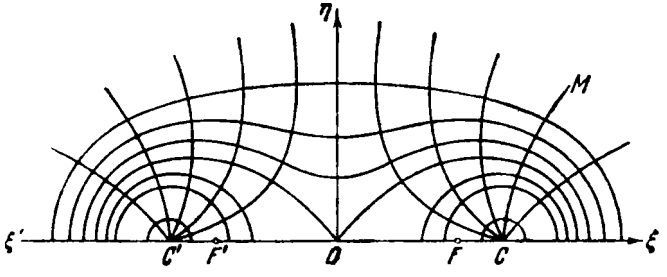
Получаем:

$$\chi=-\alpha\ln\frac{u^2-\gamma^2}{\beta^2}+\alpha\pi i$$

и

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=-\frac{\alpha}{2}\ln\frac{[(\xi-\gamma)^2+\eta^2]\,[(\xi+\gamma)^2+\eta^2]}{\beta^4},\\ \psi&=\alpha\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi+\gamma}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

Эта сеть состоит из овалов Кассини (фиг. 19), имеющих фокусами точки C и C' с координатами $(\gamma,\ 0)$, $(-\gamma,\ 0)$, и

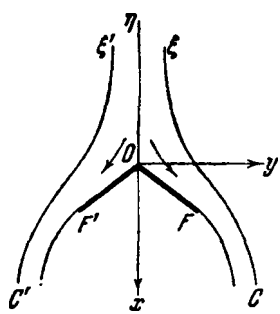


Фиг. 19.

из равносторонних гипербол, проходящих через эти точки. Так как параметр ψ по формуле (56) равен умноженной на α разности углов MCC' и $MC'C$, то, приближая точку M по какой-нибудь гиперболе к полюсу C, усматриваем, что ψ есть умноженный на α угол, образуемый касательной гиперболы в точке C с прямой CC'; если же гипербола проходит через полюс C', то для нее ψ есть умноженный на $-\alpha$ угол касательной гиперболы в полюсе C' с прямой $C'C$. Гиперболы, для которых $\psi=0$, представляются отрезками осей $O\eta$ и OC или $O\eta$ и OC'; гиперболы же, для которых $\psi=\alpha\pi$ и $\psi=-\alpha\pi$, представятся отрезками $C\xi$ и $C'\xi'$. Изменяя ψ от $-\alpha\pi$ до

$+\alpha\pi$, мы проходим через все гиперболы, заполняющие нашу полуплоскость. Изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$, мы передвигаемся по гиперболам от бесконечно удаленного овала Кассини к полюсу C или C'.

Предположим, что $\gamma > c$ и наложим образующую сеть фигуры 19 на направляющую сеть фигуры 8 так, чтобы оси координат совпали. При этом полюсы C и C' лягут вне фокального отрезка FF'. Посмотрим, каково будет течение жидкости, определяемое нашими сетями. При $\psi = 0$ будем иметь: $\vartheta = 0$ на ηO, $\vartheta = \frac{q\pi}{2}$ на OF, $\vartheta = 0$ на FC, $\vartheta = -\frac{q\pi}{2}$ на OF', $\vartheta = 0$ на $F'C'$. Это соответствует прямой линии тока ηO (фиг. 20), которая в критической точке O разделяется на две половины, идя по стенкам клина OF и OF' и образуя внутренние контуры FC и $F'C'$ сбегающих струй. Так как от η до C и C' функция φ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, то жидкость течет по найденной линии тока в направлении, указанном на фигуре стрелками. При $\psi = \alpha\pi$ будем иметь отрезок оси абсцисс ξC, на всем протяжении которого $\vartheta = 0$. Это соответствует правому крайнему контуру струи ξC. При $\psi = -\alpha\pi$ будем иметь отрезок оси абсцисс $\xi' C'$, на всем протяжении которого $\vartheta = 0$. Это соответствует левому крайнему контуру струи $\xi' C'$.



Фиг. 20.

Займемся определением силы давления струи на щеку клина OF. По формулам (18) и (56) имеем на отрезке OF:

$$\frac{c}{\tau} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}, \quad \varphi = -\alpha \ln \frac{\gamma^2 - \tau^2}{\beta^2}.$$

Будем считать $\varphi = 0$ в точке O и для этого положим $\beta = \gamma$, так что последняя формула примет вид:

$$\varphi = -\alpha \ln\left(1 - \frac{\tau^2}{\gamma^2}\right).$$

Подставляем сюда величину r:

$$\varphi = -\alpha \ln\left(1 - \frac{c^2}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\vartheta}{q}}\right).$$

Определяем отсюда $d\varphi$:

$$d\varphi = -\frac{2\alpha c^2}{q\gamma^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\vartheta}{q}\, d\vartheta}{\left(1 - \frac{c^2}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\vartheta}{q}}\right) \operatorname{ch}^3 \frac{\vartheta}{q}}. \tag{57}$$

Подставляем величину этого дифференциала в формулу (15):

$$P = 2\rho w \alpha \frac{c^2}{q\gamma^2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \vartheta \operatorname{sh} \frac{\vartheta}{q}}{\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\vartheta}{q} - \frac{c^2}{\gamma^2}\right) \operatorname{ch} \frac{\vartheta}{q}}\, d\vartheta. \tag{58}$$

Вводим новое переменное, положив

$$e^{-\vartheta} = \sigma^q, \quad d\vartheta = -\frac{q\, d\sigma}{\sigma}.$$

Получаем:

$$P = \frac{4\rho w \alpha c^2}{\gamma^2} \int_0^1 \frac{(1-\sigma^2)(\sigma - q - \sigma^q)\sigma\, d\sigma}{\left(1 + 2\frac{c^2}{\gamma}\sigma + \sigma^2\right)\left(1 - 2\frac{c}{\gamma}\sigma + \sigma^2\right)(1+\sigma^2)}. \tag{59}$$

По этой величине P определим всю силу давления струи на клин, которая будет $R = 2P \sin\frac{q\pi}{2}$. Переходим к определению длины щек клина. Для этого подставляем формулу (57) в выражение (16):

$$s = \frac{2c^2\alpha}{w\gamma^2 q} \int_0^\infty \frac{e^\vartheta \operatorname{sh} \frac{\vartheta}{q}\, d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}^2 \frac{\vartheta}{q} - \frac{c^2}{\gamma^2}\right) \operatorname{ch} \frac{\vartheta}{q}}. \tag{60}$$

Вводим сюда то же переменное интеграции σ, какое было введено выше:

$$s = \frac{8ac^2}{w\gamma^2} \int_0^1 \frac{(1-\sigma^2)\,\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{\left(1+2\frac{c}{\gamma}\,\sigma+\sigma^2\right)\left(1-2\frac{c}{\gamma}\,\sigma+\sigma^2\right)(1+\sigma^2)}. \qquad (61)$$

Формулы (59) и (61) совпадут с формулами А. П. Котельникова, если последние применим к равнобокому клину, положив входящую в них величину b равной нулю [1]). Исключение коэффициента $\frac{ac^2}{\gamma^2}$ из формул (59) и (61) позволяет определить P по q, s, w и $\frac{c}{\gamma}$. Что же касается величины $\frac{c}{\gamma}$, то она должна быть определена из формулы (61), в которой на основании сказанного в начале этого параграфа об изменении ψ следует положить

$$a = \frac{Q}{2\pi},$$

где Q — все количество жидкости, протекающей в секунду. А. П. Котельников совершает все интеграции, входящие в его формулы для какого-нибудь $q < 2$. Мы остановимся здесь только на случае $q = 1$, соответствующем пластинке. Для этого случая будет удобнее воспользоваться прямо формулами (58) и (60). Положив $c = \gamma \sin \nu$, представим эти формулы в виде:

$$R = 4\rho w a \sin^2 \nu \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \vartheta \operatorname{ch} \vartheta\, d\vartheta}{(\operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \nu) \operatorname{ch}^2 \vartheta},$$

$$s = \frac{2a}{w} \sin^2 \nu \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} \vartheta + \operatorname{ch} \vartheta) \operatorname{sh} \vartheta\, d\vartheta}{(\operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \nu) \operatorname{ch} \vartheta} =$$

$$= \frac{2a}{w} \sin^2 \nu \left\{ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \vartheta \operatorname{ch} \vartheta\, d\vartheta}{(\operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \nu) \operatorname{ch}^2 \vartheta} + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \vartheta\, d\vartheta}{\operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \nu} \right\}.$$

[1]) Протокол 89 заседания Секции физико-математических наук в Казани, 1889, стр. 22.

Вводим в интеграл первой формулы и в одинаковый с ним интеграл второй формулы подстановку $\operatorname{sh}\vartheta = z$, а во второй интеграл формулы второй вводим подстановку $\operatorname{ch}\vartheta = z$. Получаем:

$$R = 4\rho w\alpha \sin^2\nu \int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{(z^2+\cos^2\nu)(1+z^2)},$$

$$s = \frac{2\alpha}{w}\sin^2\nu\left\{\int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{(z^2+\cos^2\nu)(1+z^2)} + \int_1^\infty \frac{dz}{z^2-\sin^2\nu}\right\}.$$

Берем интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{(z^2+\cos^2\nu)(1+z^2)} = \frac{1}{\sin^2\nu}\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} - \frac{\cos^2\nu}{\sin^2\nu}\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+\cos^2\nu} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\nu}\cdot\frac{\pi}{2}(1-\cos\nu),$$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z^2-\sin^2\nu} = \frac{1}{2\sin\nu}\ln\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}.$$

Подставляя, находим:

$$R = 2\pi w\rho\alpha(1-\cos\nu),$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\left\{\pi(1-\cos\nu) + \sin\nu\ln\left(\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}\right)\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$R = \frac{\pi}{\pi + \dfrac{\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\ln\left(\dfrac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}\right)}\,2s\rho w^2, \tag{62}$$

где вспомогательный угол ν определяется из формулы:

$$\pi(1-\cos\nu) + \sin\nu\ln\left(\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}\right) = \frac{2s\pi w}{Q}. \tag{63}$$

При $Q = \infty$ получаем

$$\nu = 0, \quad \lim \frac{\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}\right) = 4,$$

так что формула (62) обращается при этом в формулу (32) для силы удара беспредельного потока.

Если бы мы, воспользовавшись образующей сетью фигуры 19, за направляющую сеть приняли сеть фигуры 15, то получили бы удар косой струи о клин, т. е. ту самую задачу, которую разобрал А. П. Котельников. Но при этом в задаче останется указанное А. П. Котельниковым ограничение, требующее, чтобы, ударившись о клин, струя разделилась на две струи, несущие каждая одно и то же количество жидкости. Задача перестала бы быть стеснена этим ограничением, если бы при направляющей сети фигуры 15 мы взяли образующую сеть фигуры 21, которая будет описана в следующем параграфе.

§ 9. О соударении двух струй жидкости. Мы рассмотрим здесь задачу Фохта о соударении струй, ограничиваясь только случаем двух струй, несущих из бесконечности равные количества жидкости с равными скоростями. Эта задача решена у Фохта только для того случая, когда угол между направлениями струй в бесконечности есть прямой; мы же разрешим ее для всякого угла между направлениями струй.

Для решения предложенной задачи мы построим образующую сеть несколько более общего вида, нежели образующая сеть фигуры 19. Именно при всех положениях, которые были приняты для построения сети фигуры 19, будем считать: $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = -\alpha'$, где $\alpha' > \alpha$, и $\beta_1 = -\beta$, $\beta_2 = \beta'$, где

$$\beta = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'}\gamma, \quad \beta' = \frac{2\alpha'}{\alpha + \alpha'}\gamma.$$

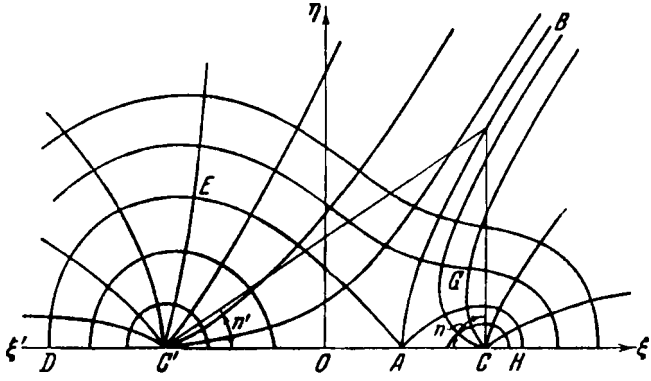
Тогда формулы (56) обратятся в

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\alpha}{2}\left[(\xi-\gamma)^2+\eta^2\right] - \frac{\alpha'}{2}\ln\left[(\xi+\gamma)^2+\eta^2\right] + \\ &\qquad + \alpha\ln\beta + \alpha'\ln\beta', \\ \psi &= \alpha\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\gamma_1}{\xi-\gamma}\right) - \alpha'\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi+\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Легко увидеть, что условие $\psi = 0$ будет удовлетворено всеми точками (фиг. 21) отрезка оси абсцисс CC', заключенного между полюсами $(\gamma, 0)$ и $(-\gamma, 0)$: кроме того, это условие будет удовлетворено точками, лежащими на кривой AB, для которых между углами ν и ν' существует соотношение

$$\nu = \frac{\alpha'}{\alpha}\nu'.$$

Так как вследствие того, что A есть критическая точка, кривая BA пересекает CC' под прямым углом, то написан-

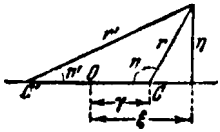


Фиг. 21.

ное соотношение между углами ν и ν' приводит нас к заключению, что $CA = \beta$ и $C'A = \beta'$, где β и β' имеют вышеуказанные значения [1]).

---

[1]) Из приложенного чертежа очевидно, что мы имеем такие соотношения:



$$\eta_1 = (\xi - \gamma)\operatorname{tg}(\pi - \nu); \qquad \pi - \nu = \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta_1}{\xi - \gamma}\right);$$

$$\eta_1 = (\xi + \gamma)\operatorname{tg}\nu': \qquad \nu' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta_1}{\xi + \gamma}\right).$$

Следовательно, ψ принимает вид:

$$\psi = \alpha\pi - \alpha(\pi - \nu) - \alpha'\nu' = \alpha\nu - \alpha'\nu'.$$

При $\psi = \alpha\pi$ будем иметь бесконечный отрезок на оси абсцисс $C\xi$, а при $\psi = -\alpha'\pi$ будем иметь бесконечный отрезок на оси абсцисс $C'\xi'$. При изменении ψ от 0 до $\alpha\pi$ будем получать линии $\psi = \text{const.}$, проходящие через полюс C и заключенные внутри контура $BA\xi$; а при изменении ψ от 0 до $-\alpha'\pi$ будем получать кривые $\psi = \text{const.}$, проходящие через полюс C' и заключенные внутри контура $BA\xi'$.

Линия $\varphi = 0$ имеет вид $DEAGH$; она проходит через точку A (что следует из обращения в нуль второй части первой из формул (64) при $\eta = 0$, $\gamma - \xi = \beta$, $\gamma + \xi = \beta'$) и охватывает полюсы C и C'. При изменении φ от 0 до $-\infty$ мы будем получать линии $\varphi = \text{const.}$, охватывающие кривую $DEAGH$, а при изменении φ от 0 до $+\infty$ мы будем иметь линии $\varphi = \text{const.}$, состоящие каждая из двух замкнутых кривых, охватывающих полюсы C и C' и лежащих внутри петель AGH и AED, причем при $\varphi = \infty$ эти кривые обратятся в полюсы C и C'.

Положив $\psi = 0$, имеем: или $n = n' = 0$, что соответствует точкам отрезка $C'C'$, или

$$\alpha n = \alpha' n'.$$

т. е.

$$n = \frac{\alpha'}{\alpha} n'.$$

Далее, мы имеем:

$$r \sin n = r' \sin n';$$

для малых n и n' это соотношение можно написать в виде:

$$rn = r'n',$$

откуда

$$\frac{r'}{r} = \frac{n}{n'} = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

следовательно,

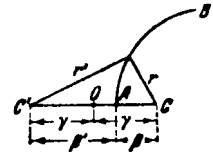
$$\frac{r + r'}{r} = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha},$$

но из чертежа видно, что

$$\lim_{n \to 0} (r + r') = 2\gamma, \quad \lim_{n \to 0} r = \beta,$$

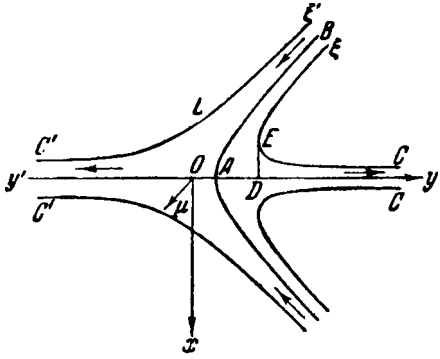
поэтому

$$\frac{2\gamma}{\beta} = \frac{\alpha' + \alpha}{\alpha}, \quad \beta = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'} \gamma,$$



и мы получили формулы, предшествующие формуле (64). (*Прим. ред.*)

Примем для решения предложенной задачи направляющую сеть фигуры 15, допустив, что $c = \gamma$ и $e = \gamma \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' + \alpha}$, т. е. что фокусное расстояние FF' направляющей сети равно расстоянию CC' между полюсами нашей образующей сети и что расстояние $O'O$ полюса O' направляющей сети равно расстоянию AO точки A образующей сети. Предположим, что направляющая сеть фигуры 15 наложена на образующую сеть фигуры 21 так, что фокусы F и F' совпадают с полюсами C и C'; тогда и полюс O' совпадает с точкой A.



Фиг. 22.

Допуская, что $q = 1$, будем иметь для всех бесконечно удаленных точек, от которых идет течение, $\vartheta = 0$ и $\theta = -\mu$. При этом по формуле (35) и выше данному значению e следует, что

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha + \alpha'} = \sin\mu,$$

откуда

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1 + \sin\mu}{1 - \sin\mu}. \qquad (65)$$

Пойдем по линии $\psi = 0$, изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$. На кривой BA будем иметь: ϑ изменяется от 0 до ∞ и θ изменяется от $-\mu$ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 22) линии тока BA. Поворачивая затем на отрезок оси абсцисс AC, будем иметь на нем: $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока AC. Если же мы повернем при значении $\psi = 0$ по оси абсцисс налево вдоль отрезка AC', то будем иметь на нем: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и ϑ изменяется от ∞ до 0, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока AC'. Для линии тока $\psi = \pi\alpha$ мы должны итти по отрезку оси абсцисс ξC,

на котором $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\mu$ до $\frac{\pi}{2}$, так что в действительном течении жидкости получим при этом правый контур струи ξC. Наконец, при $\psi = -\pi a'$, мы должны итти по отрезку оси абсцисс $\xi' C'$, на котором $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\mu$ до $-\frac{\pi}{2}$, что соответствует левому контуру струи $\xi' C'$.

Мы получили, таким образом, решение задачи об ударе струи о плоскость yy'. Если вообразим снизу плоскости yy' другую струю, симметричную первой, то имеем право (вследствие равенства давлений сверху и снизу плоскости) плоскость отнять и получить решение задачи о соударении двух одинаковых струй, направляющихся друг к другу из бесконечности под углом $\pi - 2\mu$.

Вследствие сказанного выше все количество жидкости в каждой из струй есть

$$Q = \pi a + \pi a'.$$

Эта масса по соударении разбивается на две:

$$Q_1 = \pi a \quad \text{и} \quad Q_2 = \pi a',$$

причем первая течет направо, а вторая налево. Из формулы (65) следует, что

$$Q_1 = \frac{Q}{2}(1 - \sin\mu), \quad Q_2 = \frac{Q}{2}(1 + \sin\mu). \tag{66}$$

Отсюда видно, что при μ близком к $\frac{\pi}{2}$, т. е. при очень остром угле между соударяющимися струями, Q_1 мало, и количество жидкости, попадающее в возвратную струю CC, невелико.

Составим уравнения контуров свободных поверхностей наших струй. Из формул (36) и (64) имеем для отрезков $C\xi$ и $C'\xi'$:

$$\pm \frac{c}{r}\cos^2\mu = \sin\mu + \sin\theta,$$

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\{(1 - \sin\mu)\ln[r \mp c(1 - \sin\mu)] + (1 + \sin\mu)\ln[r \pm c(1 + \sin\mu)]\} + \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \pm\frac{c}{r}\cos^2\mu - \sin\mu, \\ \cos\theta &= \sqrt{1-\left(\frac{c}{r}\cos^2\mu \mp \sin\mu\right)^2}, \\ d\varphi &= -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1-\sin\mu}{r \mp c(1-\sin\mu)} + \frac{1+\sin\mu}{r \pm c(1+\sin\mu)}\right]dr. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Подставляем формулы (67) в формулы (14) и вводим новое независимое переменное $\sigma = \frac{c}{r}$. Находим:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{Q}{2\pi w}\left(\pm\cos^2\mu - \frac{\sin\mu}{\sigma}\right)\times \\ &\quad\times\left(\frac{1-\sin\mu}{1\mp(1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1\pm(1+\sin\mu)\sigma}\right)d\sigma, \\ dx &= \frac{Q}{2\pi w}\sqrt{1-(\pm\sigma\cos^2\mu - \sin\mu)^2}\times \\ &\quad\times\left(\frac{1-\sin\mu}{1\mp(1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1\pm(1+\sin\mu)\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

где параметр σ получает значения от 0 до

$$\sigma = \frac{1}{1\pm\sin\mu}.$$

Для интеграции первого уравнения представляем его в виде:

$$dy = \frac{Q}{2\pi w}\left[-\frac{2\sin\mu}{\sigma} \pm \frac{(1-\sin\mu)^2}{1\mp(1-\sin\mu)\sigma} \pm \frac{(1+\sin\mu)^2}{1\pm(1+\sin\mu)\sigma}\right]d\sigma.$$

Интегрируем:

$$y = \frac{Q}{2\pi w}\Big\{-2\sin\mu\ln\sigma - (1-\sin\mu)\ln[1\mp(1-\sin\mu)\sigma] + \\ + (1+\sin\mu)\ln[1\pm(1+\sin\mu)\sigma]\Big\} + C, \tag{69}$$

где C — произвольное постоянное, зависящее от места начала координат O. Мы видим, что при верхнем знаке y обращается в $+\infty$ при $\sigma = 0$ и при $\sigma = 1:(1-\sin\mu)$, т. е. контур струи имеет вид ξEC; при нижнем же знаке y обращается в $+\infty$ при $\sigma = 0$ и обращается в $-\infty$ при $\sigma = 1:(1+\sin\mu)$, что соответствует контуру струи $\xi' LC'$.

Рассматривая первую формулу (68), видим, что при нижнем знаке dy не обращается в нуль ни для каких из указанных значений σ; при верхнем же знаке мы имеем $dy = 0$ при

$$\sigma = \frac{\sin\mu}{\cos^2\mu} = \frac{\sin\mu}{1-\sin^2\mu}.$$

Подставляя это значение σ в формулу (69), находим наименьшее значение $y_{\min} = OD$; оно будет:

$$y_{\min} = \frac{Q}{2\pi w}\Big\{-2\sin\mu\ln\sin\mu + (1+\sin\mu)\ln(1+\sin\mu) - \\ -(1-\sin\mu)\ln(1-\sin\mu)\Big\} + C.$$

Теперь следует интегрировать вторую из формул (68) и, выразив x по параметру σ, исключить этот параметр из полученной формулы и формулы (69). Но будет несколько проще установить связь между координатой y и дугой s определяемой кривой. Для этого пишем по формулам (68):

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{Q}{2\pi w}\left(\frac{1-\sin\mu}{1\mp(1-\sin\mu)\sigma} + \frac{1+\sin\mu}{1\pm(1+\sin\mu)\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} = \\ = -\frac{Q}{2\pi w}\left(\mp\frac{(1-\sin\mu)^2}{1\mp(1-\sin\mu)\sigma} + \pm\frac{(1+\sin\mu)^2}{1\pm(1+\sin\mu)\sigma} - \frac{2}{\sigma}\right)d\sigma.$$

Интегрируем:

$$s = -\frac{Q}{2\pi w}\{(1-\sin\mu)\ln[1\mp(1-\sin\mu)\sigma] + \\ +(1+\sin\mu)\ln[1\pm(1+\sin\mu)\sigma] - 2\ln\sigma\} + C', \quad (70)$$

где C' зависит от начала счета дуг.

Исключение σ между уравнениями (69) и (70) дает нам искомую связь между y и s.

§ 10. Удар бесконечно широкого потока о пластинку, поставленную при его свободной поверхности. В предыдущих параграфах мы изложили с помощью нашей теории почти весь материал различных исследований по интересующему нас вопросу. Читатель видит, что весь этот материал получается весьма просто с помощью направляющих сетей фигур 8 и 15. Прежде нежели перейти к задачам, решаемым с помощью новых направляющих сетей, покажем, что

и задачи, относящиеся к этим двум сетям, еще далеко не исчерпаны. Так, в конце § 8 было сказано, что исследования А. П. Котельникова относятся к случаю, при котором струя после удара о клин разбивается на две половины с равными количествами протекающей жидкости, и что это стеснение может быть устранено, когда при направляющей сети фигур 8 или 15 возьмем образующую сеть фигуры 21. Исследуем в этом параграфе тот интересный случай, в котором одна из половин разбившейся струи несет бесконечное количество жидкости, а другая — конечное. Образующая сеть этой задачи может быть получена из образующей сети фигуры 21 при $\alpha = \infty$ и $\gamma = \infty$; но мы построим ее здесь прямо из нашей общей формулы (10). Полагаем (функция $F(u)$ может иметь мнимое постоянное) в этой формуле:

$$F(u) = \alpha\left(\pi i - \frac{u}{\gamma}\right),$$

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \beta_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0, \quad \gamma_1 = \gamma.$$

Это дает нам:

$$\chi = \frac{\alpha}{\gamma}\left(-u + \gamma\pi i - \gamma \ln\frac{u-\gamma}{\gamma}\right)$$

и

$$\varphi = -\frac{\alpha}{\gamma}\left[\xi + \frac{\gamma}{2}\ln\frac{(\xi-\gamma)^2+\eta^2}{\gamma^2}\right],$$

$$\psi = \frac{\alpha}{\gamma}\left[\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}\right)\gamma - \eta\right]. \qquad (71)$$

Линия $\psi = 0$ дается в полученной образующей сети уравнением:

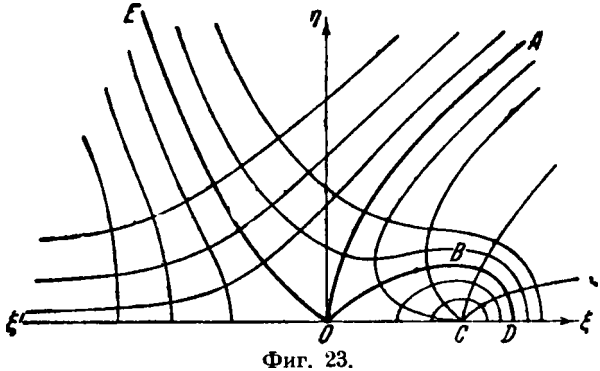
$$\eta = \gamma\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}\right).$$

Эта линия состоит (фиг. 23) из части оси абсцисс $\xi' C$, так как для всех точек этого отрезка $\eta = 0$ и

$$\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma} = \pi,$$

и из кривой ветви OA, легко построяемой по написанному уравнению. При $\psi = \alpha\pi$ получим для соответственной линии

образующей сети отрезок оси абсцисс $C\xi$; для значений же ψ между 0 и $a\pi$ будем иметь линии образующей сети, выходящие из полюса C и заполняющие все пространство ξCOA. Для изменения ψ от 0 до $-\infty$ будем иметь кривые образующей сети, заполняющие всю остальную полуплоскость,



Фиг. 23.

как это представлено на фигуре 23. Кривая образующей сети $\varphi = 0$ будет иметь уравнение

$$(\xi - \gamma)^2 + \eta^2 = \gamma^2 e^{-\frac{2\xi}{\gamma}}$$

и представится на нашей полуплоскости кривой $EOBD$ с кратной точкой в начале координат O. Все кривые $\varphi = \text{const.}$ при изменении постоянного от 0 до ∞ будут состоять из двух ветвей, из которых одна замкнутая заключена внутри петли OBD, а другая разомкнутая лежит влево от кривой OE. При изменении же постоянного от 0 до $-\infty$ будем получать кривые, расположенные влево от кривой $EOBD$.

Предположим теперь, что направляющая сеть фигуры 8, для которой $c < \gamma$ и $q = 1$, наложена на образующую сеть фигуры 23 так, что оси координат совпадают, и посмотрим, какое при этом получится течение жидкости. Идя по линии тока $\psi = 0$, будем иметь на линии AO угол θ и величину ϑ изменяющимися, что дает в действительном течении жидкости некоторую линию тока AO (фиг. 24). Переходя при том же значении $\psi = 0$ в точке O на отрезок оси абсцисс OF

Полагаем $\operatorname{tg}\omega = z$:

$$P = \frac{8\rho w c^2 a}{\gamma(\gamma + c)} \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2\,(e^2+z^2)},$$

где

$$e^2 = \frac{\gamma - c}{\gamma + c}.$$

Назовем интеграл, входящий в эту формулу, через V и напишем:

$$V = \frac{1}{1-e^2}\left\{\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} - e^2 \int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)\,(e^2+z^2)}\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} - \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)\,(e^2+z^2)} = \frac{1}{1-e^2}\left(-\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} + \int_0^1 \frac{dz}{e^2+z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}\operatorname{arctg}\frac{1}{e}\right),$$

$$V = \frac{\gamma + c}{2c}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right).$$

Таким образом,

$$P = \frac{4\rho w c a}{\gamma}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right),$$

а следовательно,

$$P' = \frac{4\rho w c a}{\gamma}\left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}}\right).$$

Складывая P с P' и замечая, что

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}} = \frac{\pi}{2},$$

найдем искомую силу R давления потока о пластинку:

$$R = \pi\rho w c a\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right]. \qquad (74)$$

Переходим к определению длин $OF = s$ и $OF' = s'$. Для этого подставляем в формулу (16) величину $d\varphi$ из формул (73) и на основании формул (72) полагаем, что

$$e^{\vartheta} = \operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta = \frac{c}{r} + \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1}.$$

Получаем:

$$s = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c \frac{dr}{\gamma - r} - \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma - r}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c \frac{dr}{\gamma + r} + \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma + r}\right).$$

Первые интегралы, входящие в эти формулы, берутся прямо, вторые же нами уже взяты при определении величин P и P'. Поэтому прямо получаем:

$$s = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\ln\frac{\gamma}{\gamma - c} + 1 + \frac{\pi\gamma}{2c} - 2\frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\ln\frac{\gamma + c}{\gamma} - 1 + \frac{\pi\gamma}{2c} - 2\frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}}\right).$$

Составляя сумму этих величин, найдем ширину пластинки $2b$:

$$2b = \frac{\alpha}{w}\left\{\frac{c}{\gamma}\ln\frac{1 + \frac{c}{\gamma}}{1 - \frac{c}{\gamma}} + \pi\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right)\right\}. \tag{75}$$

Исключаем α из формул (74) и (75):

$$R = \frac{\pi}{\pi + \dfrac{\frac{c}{\gamma}\ln\left(\dfrac{1 + \frac{c}{\gamma}}{1 - \frac{c}{\gamma}}\right)}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}}}\,2bpw^2. \tag{76}$$

Сюда входит отношение $\frac{c}{\gamma}$, которое должно быть определено из формулы (75) по замене в ней α на $\frac{Q}{\pi}$. Если сделаем эту замену и положим $\frac{c}{\gamma} = \sin\nu$, то формулы (75) и

Полагаем $\operatorname{tg}\omega = z$:

$$P = \frac{8\rho w c^2 \alpha}{\gamma(\gamma + c)} \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^2\,(e^2+z^2)},$$

где

$$e^2 = \frac{\gamma - c}{\gamma + c}.$$

Назовем интеграл, входящий в эту формулу, через V и напишем:

$$V = \frac{1}{1-e^2}\left\{\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} - e^2 \int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)\,(e^2+z^2)}\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} - \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z^2)\,(e^2+z^2)} = \frac{1}{1-e^2}\left(-\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} + \int_0^1 \frac{dz}{e^2+z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}\operatorname{arctg}\frac{1}{e}\right),$$

$$V = \frac{\gamma + c}{2c}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right).$$

Таким образом,

$$P = \frac{4\rho w c \alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right),$$

а следовательно,

$$P' = \frac{4\rho w c \alpha}{\gamma}\left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{8c} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{2c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}}\right).$$

Складывая P с P' и замечая, что

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}} = \frac{\pi}{2},$$

найдем искомую силу R давления потока о пластинку:

$$R = \pi\rho w c \alpha\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right]. \qquad (74)$$

Переходим к определению длин $OF = s$ и $OF' = s'$. Для этого подставляем в формулу (16) величину $d\varphi$ из формул (73) и на основании формул (72) полагаем, что

$$e^{\vartheta} = \operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta = \frac{c}{r} + \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1}.$$

Получаем:

$$s = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c \frac{dr}{\gamma - r} - \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma - r}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha}{w\gamma}\left(c\int_0^c \frac{dr}{\gamma + r} + \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\,\frac{dr}{\gamma + r}\right).$$

Первые интегралы, входящие в эти формулы, берутся прямо, вторые же нами уже взяты при определении величин P и P'. Поэтому прямо получаем:

$$s = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\ln\frac{\gamma}{\gamma - c} + 1 + \frac{\pi\gamma}{2c} - 2\frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma - c}}\right),$$

$$s' = \frac{\alpha c}{w\gamma}\left(\ln\frac{\gamma + c}{\gamma} - 1 + \frac{\pi\gamma}{2c} - 2\frac{\sqrt{\gamma^2 - c^2}}{c}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma - c}{\gamma + c}}\right).$$

Составляя сумму этих величин, найдем ширину пластинки $2b$:

$$2b = \frac{\alpha}{w}\left\{\frac{c}{\gamma}\ln\frac{1 + \frac{c}{\gamma}}{1 - \frac{c}{\gamma}} + \pi\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}\right)\right\}. \tag{75}$$

Исключаем α из формул (74) и (75):

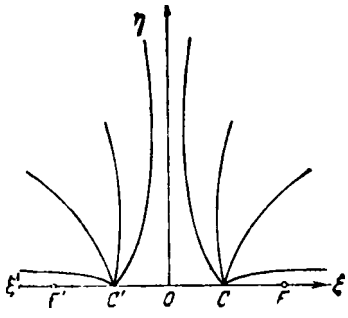
$$R = \frac{\pi}{\pi + \dfrac{\frac{c}{\gamma}\ln\left(\dfrac{1 + \frac{c}{\gamma}}{1 - \frac{c}{\gamma}}\right)}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2}}}\,2bpw^2. \tag{76}$$

Сюда входит отношение $\frac{c}{\gamma}$, которое должно быть определено из формулы (75) по замене в ней α на $\frac{Q}{\pi}$. Если сделаем эту замену и положим $\frac{c}{\gamma} = \sin\varepsilon$, то формулы (75) и

(76) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2b\pi w}{Q} &= \pi(1-\cos\nu)+\sin\nu\ln\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}, \\ R &= \frac{\pi}{\pi+\dfrac{\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\ln\dfrac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}}\,2bpw. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Сравнение этих формул с формулами (63) и (62) приводит нас к интересному заключению. *Бесконечный поток скорости w, ударяющий в край пластинки и бросающий через нее количество жидкости Q, производит на пластинку то же давление, как струйка, пущенная на середину пластинки из бесконечной дали со скоростью w и с количеством жидкости Q.*



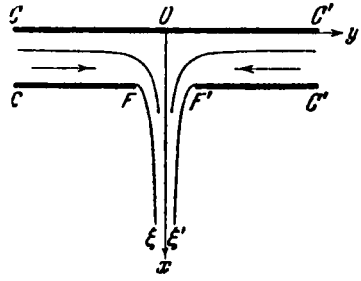
Фиг. 25.

§ 11. Истечение жидкости из дна сосуда, прикрытого сверху и имеющего бесконечную ширину и конечную вышину. Эта задача решается с помощью тех же сетей фигур 19 и 8, с помощью которых была разрешена задача § 8, с той только разницей, что там мы брали $\gamma > c$, а теперь предположим $\gamma < c$, вследствие чего фокусы F и F' попадут за полюсы C и C' (фиг. 25). Напишем формулы (56), изменяя в них применительно к нашей задаче α на $-\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha}{2}\ln\frac{[(\xi-\gamma)^2+\eta^2]\,[(\xi+\gamma)^2+\eta^2]}{\xi^4}, \\ \psi &= -\alpha\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi+\gamma}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Значению $\psi = 0$ соответствует на фигуре 25 ось ординат ηO и отрезки оси абсцисс OC' и OC; линии $\psi = -\alpha\pi$ и $\psi = \alpha\pi$ соответствуют отрезкам оси абсцисс $C\xi$ и $C'\xi'$; изменение φ от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует переходу от полюсов C и

C' к бесконечно удаленным точкам. При значении $\psi = 0$ можем итти на фигуре 25 или по $CO\eta$, или по $C'O\eta$, что в действительном течении жидкости фигуры 26 соответствует части CO крышки сосуда и средней линии тока Ox или части $C'O$ крышки сосуда и средней линии тока Ox. Значению $\psi = -\pi a$ соответствует на фигуре 25 конечный отрезок оси абсцисс CF и бесконечный отрезок ее $F\xi$, что дает на фигуре 26 часть дна сосуда CF и левый контур струи $F\xi$. Значению $\psi = \pi a$ соответствуют на фигуре 25 конечный отрезок оси абсцисс $C'F'$ и бесконечный отрезок ее $F'\xi'$, что дает на фигуре 26 часть дна сосуда $C'F'$ и правый контур струи $F'\xi'$.



Фиг. 26.

Для определения количества вытекающей жидкости

$$Q = 2\pi a$$

по скорости w, высоте сосуда $2h$ и ширине $2b$ отверстия составим уравнение контура $F\xi$. По формулам (78) и (18) имеем для этого контура при $q = 1$:

$$\frac{c}{r} = \sin\vartheta, \quad \varphi = \alpha \ln\frac{r^2 - \gamma^2}{\beta^2}, \quad d\varphi = \frac{2\alpha r\, dr}{r^2 - \gamma^2}. \tag{79}$$

Подставляем эти величины в формулу (14):

$$dy = \frac{2\alpha c}{w}\,\frac{dr}{r^2 - \gamma^2}.$$

Интегрируем и заменяем α через Q:

$$y = \text{const.} - \frac{Q}{2\pi w}\cdot\frac{c}{\gamma}\ln\frac{r+\gamma}{r-\gamma}. \tag{80}$$

Исключая из этого уравнения и из второго уравнения (79) r и заменяя φ через sw, где s — длина дуги контура, которая при надлежащем выборе β может отсчитываться от F, получим связь между y и s. Связь эту можно рассматривать как уравнение кривой $F\xi$. Но для определения Q удобно воспользоваться прямо уравнением (80).

Замечаем, что в точке F при $r = c$ имеем:

$$y = -b,$$

а в бесконечно удаленной точке ζ при $r = \infty$ имеем:

$$y = -\frac{Q}{2w}.$$

Получаем по формуле (80):

$$b - \frac{Q}{2w} = \frac{Q}{2\pi w} \cdot \frac{c}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{\gamma}{c}}{1 - \frac{\gamma}{c}}.$$

Отсюда следует, что

$$Q = \frac{\pi}{\pi + \frac{c}{\gamma} \ln \frac{1 + \frac{\gamma}{c}}{1 - \frac{\gamma}{c}}} 2bw.$$

Для определения входящей сюда величины $\frac{c}{\gamma}$ надо рассмотреть скорость v жидкости в сосуде на бесконечном расстоянии от отверстия FF'. С одной стороны, эта скорость есть $v = Q : 2h$, а с другой — она определяется по величине ϑ в точке C, которая на основании формулы (18) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{ch} \vartheta = \frac{c}{\gamma}.$$

Из этой формулы

$$v = we^{-\vartheta} = w\left[\frac{c}{\gamma} - \sqrt{\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 - 1}\right].$$

Сравнение обеих величин v дает нам соотношение:

$$\frac{Q}{2wh} = \frac{c}{\gamma}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2}\right].$$

Если положим

$$\frac{\gamma}{c} = \sin \nu,$$

то найдем:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + \frac{1}{\sin\nu} \ln \frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}} 2bw, \tag{81}$$

$$\frac{b}{h} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi \sin\nu} \ln \frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu}\right). \tag{82}$$

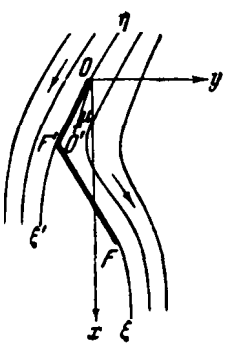
Если вместо логарифма дроби напишем разность логарифмов и развернем их в ряды по степеням $\sin\nu$, то получим:

$$\frac{1}{\sin\nu} \ln \frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu} = 2\left(1 + \frac{1}{3}\sin^2\nu + \frac{1}{5}\sin^4\nu + \frac{1}{7}\sin^6\nu + \ldots\right).$$

Из формулы (82) следует, что при $h = \infty$ надо взять $\nu = 0$; полученная же строка показывает, что в этом случае формула (81) обращается в формулу (24). Если же высота h конечна, то количество вытекающей жидкости, даваемое формулой (81), будет менее количества, даваемого формулой (24), и будет уменьшаться с увеличением угла ν, т. е. с убыванием h.

§ 12. Об ударе беспредельного потока жидкости о ломаную пластинку в случае, когда жидкость вступает на нее по направлению края. Рассматривая в § 7 удар беспредельного потока о две пластинки, образующие двугранный угол, мы сказали, что в основе исследований И. В. Мещерского лежит предположение, что раздельная линия тока проходит через вершину угла между пластинками и образует на ней критическую точку, между тем как возможны еще и другие невихревые течения жидкости, этим условием не обладающие. Если направление скорости в бесконечности, проведенное через вершину угла между пластинками (мы считаем за угол тот, который менее 180°), лежит вне этого угла, то, кроме упомянутого расположения раздельной линии тока, можно еще рассматривать те случаи, когда эта линия проходит под прямым углом через критическую точку, лежащую на той или другой пластинке, и, разбившись в этой точке на две ветви, идет в одну сторону вдоль части одной пластинки, а в другую — вдоль оставшейся

части первой пластинки и вдоль второй пластинки, образуя в вершине угла между пластинками вторую критическую точку. Такие течения жидкости, как имеющие две критические точки, могут быть исследованы с помощью направляющей сети, о которой говорится в начале § 15. Если же направление скорости потока в бесконечности, проведенное через вершину угла между пластинками, попадает внутрь этого угла, то, кроме предположения И. В. Мещерского о раздельной линии тока, могут быть еще рассматриваемы невихревые течения, при которых поток обтекает ту или другую пластинку тем способом, который исследован Релеем (разумеется, при этом нужно, чтобы контуры струй, сошедших с одной пластинки, не пересекали другой). Это течение возможно тоже, когда направление скорости в бесконечности попадает внутрь угла, смежного с углом пластинки, но здесь при известном отношении между длинами пластинок возможно еще одно невихревое течение жидкости, которое мы и рассмотрим в этом параграфе, как последний пример на направляющие сети фигур 15 и 8. Это есть случай, который изображен на фигуре 27, в котором раздельная линия тока вступает на одну из пластинок по направлению ее края. Он имеет, по мнению Парсеваля[1]), важное значение для воздухоплавания, так как представляет особое расположение, при котором устраняется развитие вихрей, имеющих место при весьма косом ударе о пластинку и являющихся следствием очень крутого поворота линий тока в передней стороне пластинки.



Фиг. 27.

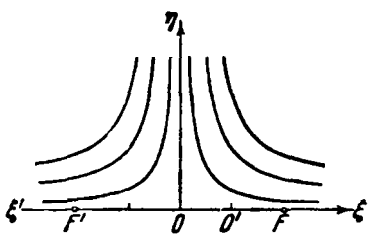
Наложим (фиг. 28) направляющую сеть фигуры 15 на образующую сеть фигуры 13 так, чтобы оси абсцисс совпали

[1]) Parseval, Die Mechanik des Vogelflugs, Wiesbaden, 1889, стр. 24, 25.

и чтобы полюс O' фигуры 15 лег на фигуре 13 на расстоянии $OO' = \gamma$ вправо от O, причем это расстояние менее $O'F$, т. е.

$$\gamma < c\left(1 + \sin\frac{\mu}{q}\right).$$

Идя при $\psi = 0$ на фигуре 28 по оси ординат $O\eta$, мы получим в действительном течении на фигуре 27 некоторую линию тока ηO, которая в бесконечности образует с осью Ox угол $-\mu$. Поворачивая затем при том же значении $\psi = 0$ вправо, мы найдем, что отрезкам оси абсцисс OO', $O'F$ и $F\xi$ соответствуют на фигуре 27 пластинка OO', образующая с осью Ox угол $-\frac{q\pi}{2}$, пластинка $O'F$, образующая с осью Ox угол $\frac{q\pi}{2}$, и контур струи $F\xi$. При повороте же по оси абсцисс налево мы найдем, что отрезкам OF'' и $F''\xi'$ на фигуре 28 соответствуют на фигуре 27 пластинка OF'' и контур струи $F'\xi'$. То обстоятельство, что $OO' = OF''$, дает нам уравнение, служащее для определения γ.



Фиг. 28.

Назовем: через P силу давления потока на пластинку $O'F$, через s — ее длину, через P' — силу давления потока на сторону второй пластинки OO' и через s' — ее длину, наконец, через P'' силу давления потока на сторону второй пластинки OF''. Положив для сокращения письма $\frac{\mu}{q} = \nu$, получим по формулам (36) и (27) для отрезков оси абсцисс $O'F$, OO' и OF'' следующие величины φ:

$$\varphi = k\left(\gamma + \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2, \quad \varphi = k\left(\gamma - \frac{c\cdot\cos^2\nu}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2,$$

$$\varphi = k\left(\frac{c\cdot\cos^2\nu}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu} - \gamma\right)^2.$$

Переходим к определению s:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[-\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu}\int_0^\infty e^{\vartheta}\, d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)\right].$$

Интегрируем по частям:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1+\sin\nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu\,(1+\sin\nu)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{e^{\vartheta} d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu\right)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^\infty \frac{e^{\vartheta} d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right].$$

Делаем подстановку (84):

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1+\sin\nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu\,(1+\sin\nu)} + \right.$$

$$\left. + 4q\int_0^1 \frac{\sigma - q + 1\, d\sigma}{(\sigma^2 + 2\sigma\sin\nu + 1)^2} + \frac{4\gamma q}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^1 \frac{\sigma - q\, d\sigma}{\sigma^2 + 2\sigma\sin\nu + 1}\right]. \quad (87)$$

Прежде нежели определить s', выведем условие, вытекающее из двух последних формул (83). Сравнивая вторые части этих формул, находим:

$$\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\gamma - \frac{c \cdot \cos^2\nu}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2 = 0,$$

или

$$\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2 - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right) = 0.$$

Интегрируем по частям и вводим подстановку (84):

$$-\frac{1}{(1-\sin\nu)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu\,(1-\sin\nu)}-$$

$$-4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^1\frac{\sigma^{-q}\,d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}=0. \quad (88)$$

Из этого уравнения мы можем определить $\frac{\gamma}{c}$.

Теперь остается только преобразовать пятую из формул (83) для определения s'. Пишем:

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)^2-\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)\right].$$

Интегрируем по частям:

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right].$$

Вводим подстановку (84):

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-4q\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q}d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}\right], \quad (89)$$

где нижний предел σ_1 определяется из условия

$$\sigma_1=e^{-\frac{\vartheta_1}{q}}.$$

Переходим к определению s:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[-\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2 \nu}\int_0^\infty e^{\vartheta}\, d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right)\right].$$

Интегрируем по частям:

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1+\sin\nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu\,(1+\sin\nu)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{e^{\vartheta} d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu\right)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^\infty \frac{e^{\vartheta} d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} + \sin\nu}\right].$$

Делаем подстановку (84):

$$s = \frac{kc^2 \cos^4 \nu}{w}\left[\frac{1}{(1+\sin\nu)^2} + \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu\,(1+\sin\nu)} + \right.$$

$$\left. + 4q\int_0^1 \frac{\sigma^{-q+1}\, d\sigma}{(\sigma^2 + 2\sigma\sin\nu + 1)^2} + \frac{4\gamma q}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^1 \frac{\sigma^{-q}\, d\sigma}{\sigma^2 + 2\sigma\sin\nu + 1}\right]. \quad (87)$$

Прежде нежели определить s', выведем условие, вытекающее из двух последних формул (83). Сравнивая вторые части этих формул, находим:

$$\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\gamma - \frac{c \cdot \cos^2\nu}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2 = 0,$$

или

$$\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right)^2 - \frac{2\gamma}{c \cdot \cos^2\nu}\int_0^\infty e^{\vartheta} d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} - \sin\nu}\right) = 0.$$

Интегрируем по частям и вводим подстановку (84):

$$-\frac{1}{(1-\sin\nu)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu\,(1-\sin\nu)}-$$

$$-4q\int_0^1\frac{\sigma^{-q+1}\,d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^1\frac{\sigma^{-q}\,d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}=0. \quad (88)$$

Из этого уравнения мы можем определить $\frac{\gamma}{c}$.

Теперь остается только преобразовать пятую из формул (83) для определения s'. Пишем:

$$s'=\frac{kc^3\cos^4\nu}{w}\left[\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)^2-\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}e^{\vartheta}d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right)\right].$$

Интегрируем по частям:

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma}{c\cdot\cos^2\nu}\int_{\vartheta_1}^{\infty}\frac{e^{\vartheta}\,d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}-\sin\nu}\right].$$

Вводим подстановку (84):

$$s'=\frac{kc^2\cos^4\nu}{w}\left[-\frac{e^{\vartheta_1}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)^2}+\frac{2\gamma e^{\vartheta_1}}{c\cdot\cos^2\nu\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}-\sin\nu\right)}-\right.$$

$$\left.-4q\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q+1}d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2}+\frac{4\gamma q}{c\cdot\cos^2\nu}\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^{-q}d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}\right], \quad (89)$$

где нижний предел σ_1 определяется из условия

$$\sigma_1=e^{-\frac{\vartheta_1}{q}}.$$

Что же касается до $\frac{\vartheta_1}{q}$, то эта величина вполне определяется по $\frac{\gamma}{c}$, так как из первой формулы (36) имеем:

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} = \sin\nu + \frac{c}{\gamma}\cos^2\nu. \tag{90}$$

Формулы (85), (86), (87), (88), (89) и (90) решают предложенную задачу. Задавшись углом $\frac{q\pi}{2}$ и меньшим его углом μ, мы будем знать ν, что позволит из формулы (88) определить $\frac{\gamma}{c}$. После того формулы (87) и (89) дадут нам отношение между s и s', которое позволит выбрать только одну из пластинок произвольной. Составляя далее из формул (85), (86), (87) и (89) отношения $P:s$ и $(P'-P''):s'$, мы определим средние силы гидродинамического давления потока на ту и другую пластинки. В задаче о воздухоплавании имеет интерес тот случай, когда угол $\frac{q\pi}{2}$ и, следовательно, μ малы $\left(\text{в нашей задаче } \mu \text{ менее } \frac{q\pi}{2}\right)$. На этом случае мы и остановимся здесь подробнее. Полагая в формуле (88) q весьма малой величиной, имеем:

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\cos^2\nu}{2(1-\sin\nu)} = \frac{1+\sin\nu}{2}.$$

Внося эту величину в формулу (90), находим:

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} = 2 - \sin\nu.$$

Обращаясь затем к формулам (87) и (86), имеем при сделанном предположении:

$$s = \frac{2kc^2}{w}(1-\sin\nu), \quad s' = \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2\ ^*). \tag{91}$$

---

*) Из формулы (89) получается $s' = \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2 e^{\vartheta_1}$, а не $s' = \frac{kc^2}{4w}(1+\sin\nu)^2$. (*Прим. ред.*)

Что касается до давлений P и $P'-P''$, то они будут в нашем предположении малыми величинами первого порядка относительно q. Берем интегралы, которые войдут в выражения этих величин:

$$2\int_0^1 \frac{\sigma\, d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} =$$

$$=\int_0^1 \frac{(2\sigma+2\sin\nu)\, d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} - 2\sin\nu\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} =$$

$$=-\frac{1}{2(1+\sin\nu)}+1-2\sin\nu\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2}\,.$$

Но при выводе формулы (54) мы имели:

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\mu+1)^2} = \frac{1}{2\cos^3\nu}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\sin\nu}{\cos\nu}-\nu\right)+$$

$$+\frac{1}{4\cos^2\nu}-\frac{\sin\nu}{2\cos^2\nu}=\frac{1}{2\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{1}{4\cos^2\nu}-\frac{\sin\nu}{2\cos^2\nu}\,,$$

поэтому

$$2\int_0^1 \frac{\sigma\, d\sigma}{(\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1)^2} = -\frac{\sin\nu}{\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)-\frac{1}{2(1+\sin\nu)}+\frac{2-\sin\nu}{2\cos^2\nu}\,.$$

Изменяя знак ν, получим отсюда, что

$$2\int_0^1 \frac{\sigma\, d\sigma}{(\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1)^2} = \frac{\sin\nu}{\cos^3\nu}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\nu}{2}\right)-\frac{1}{2(1-\sin\nu)}+\frac{2+\sin\nu}{2\cos^2\nu}\,.$$

Далее,

$$2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2+2\sigma\sin\nu+1} = 2\int_0^1 \frac{d\sigma}{(\sigma+\sin\nu)^2+\cos^2\nu} =$$

$$=\frac{2}{\cos\nu}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\sin\nu}{\cos\nu}-\nu\right)=\frac{2}{\cos\nu}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right),$$

$$2\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2-2\sigma\sin\nu+1}=\frac{2}{\cos\nu}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\nu}{2}\right).$$

С помощью найденных величин интегралов получаем:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2k\rho wc^2q\left[\cos\nu\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\cos^2\nu}{2}\right],\\ P'-P'' &= 2k\rho wc^2q\left[\cos\nu\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\nu}{2}\right)-\frac{\cos^2\nu}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Называя через R и R' составляющие этих сил давления по направлению, обратному оси Oy (фиг. 27), и по направлению, совпадающему с Ox, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} R &= \pi k\rho wc^2q\cos\nu\ ^*),\\ R' &= 2k\rho wc^2q(\cos^2\nu-\nu\cos\nu)\sin\frac{q\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Любопытно, что сила R положительна при остром угле ν, тогда как по теории Ньютона она должна бы быть отрицательна всякий раз, как $OF'>F'F$. Если предположим теперь, что наша пластинка (фиг. 27) $OO'F$ движется в спокойном воздухе по направлению, противоположному Ox, то это будет соответствовать рассмотренному течению жидкости при $\nu=0$ (при этом сеть фигуры 15 обращается в сеть фигуры 8). Мы получаем:

$$s'=\frac{s}{8},\quad R=\alpha s\rho w^2,\quad R'=\frac{2}{\pi}\alpha^2 s\rho w^2, \qquad (94)$$

где положено

$$\alpha=\frac{q\pi}{2}.$$

§ 13. Истечение жидкости из сосуда конечной ширины и бесконечно большой длины. Мы перейдем теперь к решению задач, в которых отыскиваются течения жидкости со многими критическими точками и которые поэтому требуют направляющей сети с несколькими полюсами. Для решения предложенной задачи берем направляющую сеть с двумя фокусами и двумя полюсами и полагаем в нашей формуле (11):

$$c_1=-c_2=c,\quad m=i,\quad f(u)=-q\sqrt{c^2-e^2}\left(\frac{1}{u-c}+\frac{1}{u+e}\right),$$

*) Из формулы (92) получается $R=\pi k\rho wc^2q\cos\frac{q\pi}{2}\cos\nu$, а не $R=\pi k\rho wc^2q\cos\nu$. (*Прим. ред.*)

где $e < c$. Получаем:

$$\phi = -qi\sqrt{c^2-e^2}\left[\int \frac{du}{(u-e)\sqrt{u^2-c^2}} + \int \frac{du}{(u+e)\sqrt{u^2-c^2}}\right].$$

Вводим в первом интеграле новое переменное $u_1 = u - e$, а во втором новое переменное $u_2 = u + e$.

Это дает при надлежащем нижнем пределе:

$$\phi = qi\left\{\int \frac{d\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right)^2}} + \int \frac{d\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right)^2}}\right\} =$$

$$= qi \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right) + qi \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right). \qquad (95)$$

Сделаем положения:

$$\vartheta_1 + \theta_1 i = iq \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_1}-\frac{e}{c}\right),$$

$$\vartheta_2 + \theta_2 i = iq \arcsin\left(\frac{c^2-e^2}{cu_2}+\frac{e}{c}\right),$$

так что по формуле (9)

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2. \qquad (96)$$

Переходя от обратных тригонометрических функций к прямым и полагая для сокращения письма, что

$$\frac{e}{c} = \sin\frac{\mu}{q},$$

получим:

$$c\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{u_1} - \sin\frac{\mu}{q} = \sin\left(\frac{\theta_1}{q} - i\frac{\vartheta_1}{q}\right),$$

$$c\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{u_2} + \sin\frac{\mu}{q} = \sin\left(\frac{\theta_2}{q} - i\frac{\vartheta_2}{q}\right).$$

Вводим сюда подстановки:

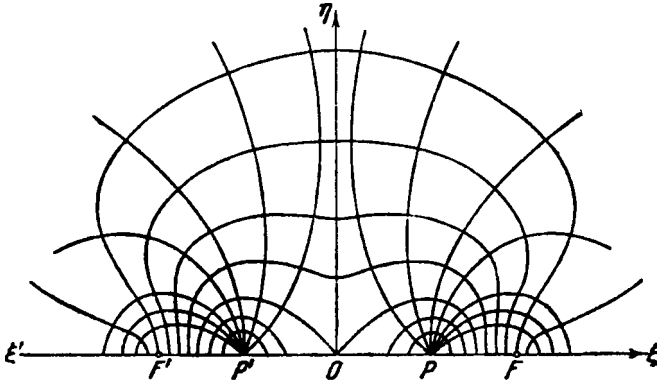
$$u_1 = r_1(\cos\lambda_1 + i\sin\lambda_1), \quad u_2 = r_2(\cos\lambda_2 + i\sin\lambda_2),$$

где r_1 и r_2 суть радиусы-векторы рассматриваемой точки относительно полюсов $(c, 0)$, $(-c, 0)$, а λ_1 и λ_2 суть углы

этих радиусов-векторов с осью $O\xi$. Раскрыв синусы и сравнивая действительные и мнимые части, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda_1 = \sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta_1}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q},\\
&\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda_1 = \cos\frac{\theta_1}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{q},\\
&\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q}\cos\lambda_2 = -\sin\frac{\mu}{q} + \sin\frac{\theta_2}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{q},\\
&\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q}\sin\lambda_2 = \cos\frac{\theta_2}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{q}.
\end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

Сравнивая эти формулы с (36) и обращая внимание на формулу (96), приходим к заключению, что найденная



Фиг. 29.

нами направляющая сеть получается из сложения двух направляющих сетей, из которых одна есть сеть фигуры 15, дающая в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = -\mu$, а другая есть симметричная ей сеть относительно оси $O\eta$, дающая в бесконечности $\vartheta = 0$ и $\theta = \mu$. При этом под сложением сетей подразумеваем построение сети, изотермические параметры которой равны сумме изотермических параметров слагаемых сетей. Это замечание вполне выясняет вид построенной сети, которая изображена на фигуре 29. Эта сеть симметрична относительно осей; она имеет два фокуса F и F' на расстоянии c от начала координат и два полюса P и P'

на расстоянии e, меньшем c, от этого начала. Все линии $\vartheta = \text{const.}$ проходят в ней через полюсы P или P' и пересекают еще раз ось абсцисс вне фокального отрезка FF' под прямым углом. На PF мы получаем $\theta_1 = q\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = q\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\vartheta = q\pi.$$

На PP' имеем $\theta_1 = -q\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = q\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\vartheta = 0.$$

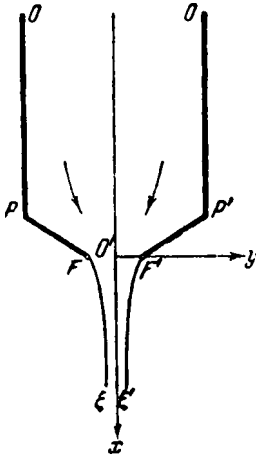
Очевидно, что $\vartheta = 0$ точно так же и для всех точек оси $O\eta$, ибо на ней θ_1 и θ_2 имеют равные по величине, но противоположные по знаку значения, а также и для всех бесконечно удаленных точек, ибо в бесконечности $\theta_1 = -\mu$, $\theta_2 = \mu$. На $P'F'$ имеем $\theta_1 = -\frac{q\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{q\pi}{2}$, а потому $\vartheta = -q\pi$. Из сказанного следует, что при изменении ϑ от $q\pi$ до 0 линии $\vartheta = \text{const.}$ изменяются от PF до линии $PO\eta$, причем последняя в бесконечности охватывает всю правую часть рассматриваемой области; при изменении же ϑ от 0 до $-q\pi$ линии $\vartheta = \text{const.}$ изменяются от $PO\eta$ до $P'F'$, причем первая в бесконечности охватывает всю левую часть рассматриваемой области. Линии $\vartheta = \text{const.}$ при ϑ очень большом представляют две бесконечно малые замкнутые кривые, охватывающие полюсы P и P'; с уменьшением ϑ они расширяются и, пройдя через кривую с кратной точкой в O, начинают охватывать оба полюса, все более и более расширяясь, причем они всегда пересекают ось абсцисс под прямым углом на фокальном отрезке FF'. При $\vartheta = 0$ мы получаем линию, идущую на конечном расстоянии по отрезкам оси абсцисс $F\xi$ и $F\xi'$ и охватывающую в бесконечности всю рассматриваемую область. Значение $\vartheta = \vartheta_0$ для линии с кратной точкой найдется, полагая в первой формуле (97): $r_1 = e$, $\lambda_1 = -\pi$, $\frac{\theta_1}{q} = -\frac{\pi}{2}$. Это дает:

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} = \sin\frac{\mu}{q} + \frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin\frac{\mu}{q}} = \frac{1}{\sin\frac{\mu}{q}},$$

откуда

$$\vartheta_0 = 2\vartheta_1 = 2q \ln\left(\frac{1+\cos\frac{\psi}{q}}{\sin\frac{\psi}{q}}\right). \qquad (98)$$

За образующую сеть принимаем сеть фигуры 9 и налагаем ее на найденную направляющую сеть так, чтобы оси координат совпали. Идя по линии $\psi = 0$, будем иметь: $\vartheta = 0$ на пространстве от O до P, что соответствует в действительном течении на фигуре 30 бесконечной стенке сосуда OP; $\vartheta = q\pi$ на пространстве от P до F, что соответствует в действительном течении части дна сосуда PF, образующего со стенкой OP угол $\pi(1-q)$: наконец, $\vartheta = 0$ на пространстве от F до ξ, что соответствует на фигуре 30 левому контуру струи $F\xi$. Аналогичным образом, идя по линии $\psi = \pi$, получаем в действительном течении правый граничный контур $OP'F'\xi'$. Вследствие симметрии задачи оба контура будут симметрично расположены относительно оси $O'x$, когда возьмем начало координат посреди отверстия сосуда FF'. По известному правилу относительно изменения ψ заключаем, что найденное течение будет заключено между данными контурами, как это и потребно для нашей задачи. Определим количество истекающей жидкости



Фиг. 30.

$$Q = 2\pi.$$

Для этого рассмотрим контур струи $F\xi$. По формулам (97) имеем на отрезке оси абсцисс $F\xi$:

$$\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\psi}{q} = \sin\frac{\vartheta_1}{q} + \sin\frac{\psi}{q}, \quad \frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\psi}{q} = \sin\frac{\vartheta_1}{q} - \sin\frac{\psi}{q}.$$

Подставляем сюда выражения радиусов r_1 и r_2 по расстоянию r от точки O:

$$r_1 = r - e = r - c\sin\frac{\mu}{q},$$

$$r_2 = r + e = r + c\sin\frac{\mu}{q}.$$

Потом определяем $\sin\frac{\theta_1}{q}$ и $\sin\frac{\theta_2}{q}$:

$$\sin\frac{\theta_1}{q} = \frac{c - r\sin\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}}, \quad \sin\frac{\theta_2}{q} = \frac{c + r\sin\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\frac{\theta_1}{q} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}}, \quad \cos\frac{\theta_2}{q} = \frac{\sqrt{r^2 - c^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Далее,

$$\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{q} = 1 - 2c^2\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}},$$

или по (96)

$$\cos\frac{\theta}{q} = 1 - 2c^2\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Определяем отсюда r:

$$r = c\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin^2\frac{\theta}{2q}} + \sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Подставляем эту величину в первую из формул (29)

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\sin^2\frac{\theta}{2q}} + \sin^2\frac{\mu}{q}\right).$$

Теперь нам остается только подставить это значение φ во вторую формулу (14), чтобы получить дифференциальную связь между y и θ:

$$dy = -\frac{\alpha}{2wq}\frac{\cos\frac{\theta}{2q}\sin\theta\,d\theta}{\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2q}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\right)\sin\frac{\theta}{2q}}.$$

Называя ширину отверстия через $2b$ и замечая, что $\alpha = \frac{Q}{\pi}$ и ширина струи в бесконечности есть $\frac{Q}{w}$, интегрируем наше уравнение, изменяя θ от πq до 0:

$$b - \frac{Q}{2w} = -\frac{Q}{2\pi qw}\int_{\pi q}^{0}\frac{\cos\frac{\theta}{2q}\sin\theta\,d\theta}{\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2q}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\right)\sin\frac{\theta}{2q}}.$$

Отсюда получаем искомое количество вытекающей жидкости:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + \frac{1}{q}\int_{0}^{\pi q}\frac{\cos\frac{\theta}{2q}\sin\theta\,d\theta}{\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2q}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\right)\sin\frac{\theta}{2q}}}\,2bw. \tag{99}$$

Входящий сюда неизвестный угол μ определяется по отношению ширины сосуда $2a$ к ширине отверстия $2b$ из некоторого трансцендентного уравнения, получаемого при составлении другого выражения для Q.

По формулам (98) и (8) находим, что скорость жидкости в сосуде на весьма большом расстоянии от отверстия есть:

$$v = w\left(\frac{\sin\frac{\mu}{q}}{1+\cos\frac{\mu}{q}}\right)^{2q}. \tag{100}$$

Поэтому

$$Q = 2awc\left(\frac{\sin\frac{\mu}{q}}{1+\cos\frac{\mu}{q}}\right)^{2q} = 2aw\left(\operatorname{tg}\frac{\mu}{2q}\right)^{2q}.$$

Из сравнения этой формулы с (99) получаем искомое уравнение:

$$\frac{b}{a}=\left(\operatorname{tg}\frac{\mu}{2q}\right)^{2q}\left[1+\frac{1}{\pi q}\int_0^{\pi q}\frac{\cos\frac{\theta}{2q}\sin\theta\,d\theta}{\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2q}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\right)\sin\frac{\theta}{2q}}\right]. \qquad (101)$$

Остановимся на предположении $q=\frac{1}{2}$, т. е. рассмотрим истечение жидкости из прямоугольного сосуда. Мы имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu\sin^2\theta}=\frac{1}{\operatorname{tg}2\mu}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2\mu\sin\theta)=\frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}.$$

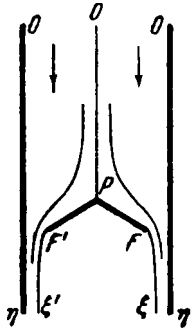
Поэтому формулы (100) и (101) принимают в рассматриваемом случае следующий вид:

$$Q=\frac{\pi}{\pi+2\frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}}2bw,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tg}\mu\left(1+\frac{2}{\pi}\frac{2\mu}{\operatorname{tg}2\mu}\right). \qquad (102)$$

При $a=\infty$ $\mu=0$ и выражение для Q обращается в выражение, данное формулой (24). Вообще же количество жидкости, даваемое формулой (102), более того, которое получается из формулы (24), ибо дуга менее своего тангенса. Таким образом, *прибавление боковых стенок увеличивает количество истекающей жидкости против сосуда весьма большой ширины.*

§ 14. Удар потока, заключенного между двумя параллельными стенками, на симметрично относительно него расположенный равнобокий клин. Задача, решенная в предыдущем параграфе, при несколько ином расположении границ течения жидкости обращается в задачу об ударе потока, заключенного между двумя параллельными стенками, на симметрично относительно него расположенный равнобокий клин. Предположим, что к сосуду, изображенному на фигуре 30, приставлен слева такой же сосуд так, что его вертикальная стенка совпадает со стенкой OP и что из обоих сосудов жидкость вытекает с одной и той же скоростью w.

Так как во всех точках стенки OP скорости жидкости с правой и с левой сторон будут одинаковы, то эту стенку можно отнять; с другой стороны, так как в правом и левом сосудах осевые линии суть линии тока, то их можно заменить стенками иекоторого канала. Мы получим течение жидкости в канале $O\eta O\eta$, внутри которого помещен равнобокий клин FPF' (фиг. 31). Определим силу давления на этот клин.



Фиг. 31.

По формулам (97) имеем для отрезка PF:

$$\frac{c}{r_1}\cos^2\frac{\mu}{q} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} + \sin\frac{\mu}{q},$$
$$\frac{c}{r_2}\cos^2\frac{\mu}{q} = \operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} - \sin\frac{\mu}{q}.$$

Подставляем сюда, как и в предыдущем параграфе,

$$r_1 = r - c\sin\frac{\mu}{q}, \quad r_2 = r + c\sin\frac{\mu}{q},$$

и определяем $\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q}$ и $\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{q}$:

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{q} = \frac{c - r\sin\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}}, \quad \operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{q} = \frac{c + r\sin\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}.$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{q} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r - c\sin\frac{\mu}{q}}, \quad \operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{q} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2}\cos\frac{\mu}{q}}{r + c\sin\frac{\mu}{q}}$$

и

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{q} = -1 + \frac{2c^2\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Эта формула вследствие уравнений (96) обращается в

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} = -1 + \frac{2c^2\cos^2\frac{\mu}{q}}{r^2 - c^2\sin^2\frac{\mu}{q}}.$$

Определим отсюда r:

$$r = c\sqrt{\sin^2\frac{\mu}{q} + \frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2q}}}.$$

Подставляем эту величину в первую из формул (20):

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{\cos^2\frac{\mu}{q}}{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2q}} + \sin^2\frac{\mu}{q}\right).$$

Определяем $d\varphi$:

$$d\varphi = -\frac{\alpha}{2q}\frac{\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2q}}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2q}\right)},$$

Вносим эту величину $d\varphi$ в формулы (15) и (16):

$$\left.\begin{aligned} P &= \rho w\frac{\alpha}{2q}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\vartheta\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2q}\,d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2q}\right)}, \\ s &= \frac{\alpha}{2qw}\int_0^\infty \frac{e^\vartheta\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2q}\,d\vartheta}{\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2q}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{q}\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2q}\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Входящая сюда величина ρ определяется по формуле (101), что же касается связи между скоростью струи w и скоростью потока v, то она дается формулой (100). Здесь любопытно заметить, что формулы (100) и (101) позволяют по данной скорости v и гидродинамическому давлению внутри потока определить скорость w и гидродинамическое давление за клином (следовательно, определить величину недавления Дюбуа).

Обращаемся к случаю пластинки. Для этого полагаем в формулах (103) $q = \frac{1}{2}$. Получаем:

$$P = \rho w \alpha \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2\vartheta \operatorname{ch}\vartheta\, d\vartheta}{\operatorname{ch}^2\vartheta\,(1+\operatorname{tg}^2 2\mu \operatorname{ch}^2\vartheta)},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{(\operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta)\operatorname{sh}\vartheta\, d\vartheta}{\operatorname{ch}\vartheta\,(1+\operatorname{tg}^2 2\mu \operatorname{ch}^2\vartheta)} =$$

$$= \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2\vartheta \operatorname{ch}\vartheta\, d\vartheta}{\operatorname{ch}^2\vartheta\,(1+\operatorname{tg}^2 2\mu \operatorname{ch}^2\vartheta)} + \frac{\alpha}{w}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\vartheta\, d\vartheta}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu \operatorname{ch}^2\vartheta}.$$

Делаем в интеграле, входящем в P, и в первом интеграле, входящем в s, подстановку $\operatorname{sh}\vartheta = z$, а во втором интеграле, входящем в s, подстановку $\operatorname{ch}\vartheta = z$. Получаем:

$$P = \rho w \alpha \cos^2 2\mu \int_0^\infty \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\cos^2 2\mu \int_0^\infty \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)} + \frac{\alpha}{w}\int_1^\infty \frac{dz}{1+\operatorname{tg}^2 2\mu \cdot z^2}.$$

Берем интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)(1+\sin^2 2\mu \cdot z^2)} = \frac{1}{\cos^2 2\mu}\left(\int_0^\infty \frac{dz}{1+\sin^2 2\mu \cdot z^2} - \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu \cos^2 2\mu},$$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{1+z^2\operatorname{tg}^2 2\mu} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\mu}\left(\frac{\pi}{2} - 2\mu\right).$$

Подставляя, получим:

$$P = \frac{\pi \rho w \alpha}{2}\cdot\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu},$$

$$s = \frac{\alpha}{w}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\sin 2\mu}{\sin 2\mu}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\mu}\left(\frac{\pi}{2} - 2\mu\right)\right].$$

Та же величина для s могла бы быть получена из формул § 13, взяв $s = a - b$. Отсюда следует, что вся сила давления на пластинку $R = 2P$ есть

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\dfrac{\cos 2\mu}{1 - \sin 2\mu}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\mu\right)} 2\rho s w^2.$$

Так как

$$\frac{1 - \sin 2\mu}{\cos 2\mu} = \frac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\mu\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\mu\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right),$$

то найденная сила давления может быть еще представлена так:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 4\dfrac{\dfrac{\pi}{4} - \mu}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \mu\right)}} 2\rho s w^2. \qquad (104)$$

Входящий сюда угол μ определяется по второй формуле (102), в которой $2a$ надо считать за ширину потока и положить $b = a - s$. Сила давления, определяемая формулой (104), всегда более той, которая давалась формулой (32). Это увеличение еще будет заметнее, если введем в формулу (104) вместо скорости w скорость потока в канале v, которая по формуле (100) выражается уравнением

$$v = w \operatorname{tg} \mu,$$

где $\mu < \frac{\pi}{4}\left(\text{ибо } 2\mu < \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, *прибавление стенок канала увеличивает силу давления потока на пластинку.*

§ 15. Удар беспредельного потока жидкости в прямоугольный сосуд, поставленный отверстием навстречу потока. Направляющая сеть фигуры 29 была построена нами сложением двух сетей фигуры 15 с одинаковыми c и q и различными по знаку, но одинаковыми по величине углами μ. Подобным образом может быть получена направляющая сеть более общего вида с двумя фокусами и со многими полюсами на фокальном отрезке. Для этого надо сложить

много сетей, подобных сети фигуры 15, с одинаковыми c и различными p и q. Когда при такой направляющей сети употребим образующую сеть фигуры 9, поместив полюс ее O в одном из полюсов P направляющей сети, то получим решение задачи об истечении жидкости из многогранного сосуда, ограниченного несколькими конечными стенками и двумя бесконечными расходящимися стенками; если мы поместим полюс O на отрезке оси абсцисс между двумя полюсами P и P', то получим решение задачи об истечении жидкости из многогранного сосуда, две бесконечные стороны которого параллельны. Когда же при упомянутой направляющей сети мы возьмем образующую сеть фигуры 13, то будем иметь решение задачи об ударе бесконечного потока на многогранную пластинку. При этом, если точка O образующей сети фигуры 13 помещена в одном из полюсов P направляющей сети, то раздельная линия тока будет вступать на пластинку, образуя на ней критическую точку; если же точка O помещена на одном из отрезков PP', то раздельная линия тока будет вступать на пластинку по направлению одной из ее сторон, как это было в задаче § 12.

Рассмотрим здесь удар беспредельного потока жидкости в прямоугольный сосуд, поставленный отверстием навстречу потока. Направляющую сеть этой задачи получим из сложения направляющей сети фигуры 29 с направляющей сетью фигуры 8, считая в них величины q различными. Вследствие этого параметры ϑ и θ этой направляющей сети выражаются суммами:

$$\vartheta = \vartheta' + \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad \theta = \theta' + \theta_1 + \theta_2, \tag{105}$$

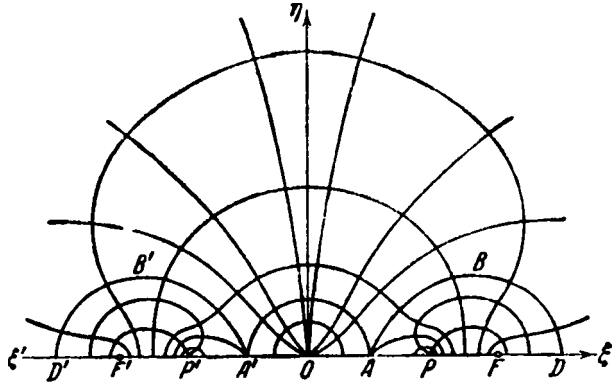
где ϑ' и θ' определяются из уравнений [1]):

$$\frac{c}{r}\cos\lambda = \sin\frac{\theta'}{q'}\operatorname{ch}\frac{\vartheta'}{q'}, \quad \frac{c}{r}\sin\lambda = \cos\frac{\theta'}{q'}\operatorname{sh}\frac{\vartheta'}{q'}, \tag{106}$$

а ϑ_1, ϑ_2, θ_1 и θ_2 из уравнений (97). Эта сеть (фиг. 32) симметрична относительно осей; она имеет два фокуса F, F'

[1]) См. уравнения (18). (*Прим. ред.*)

и три полюса P, O и P'. Все линии $\theta = \text{const.}$ проходят в ней через один из полюсов и пересекают во второй раз ось абсцисс вне фокального отрезка FF' под прямым углом. Мы имеем: в бесконечности по формулам (105) $\theta = 0$, на отрезке PF угол $\theta = \pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$, на отрезке PO угол $\theta = \frac{\pi q'}{2}$; на отрезке OP' угол $\theta = -\frac{\pi q'}{2}$, наконец, на отрезке $P'F'$ угол $\theta = -\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$. При изменении θ от $\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$ до $\frac{\pi q'}{2}$ линии $\theta = \text{const.}$ изменяются от PF до $PABD$; при изме-

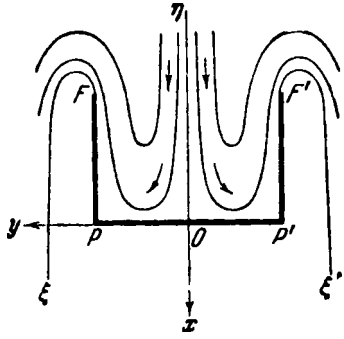


Фиг. 32.

нении θ от $\frac{\pi q'}{2}$ до $-\frac{\pi q'}{2}$ линии $\theta = \text{const.}$ изменяются от $OABD$ до $OA'B'D'$; наконец, при изменении θ от $-\frac{\pi q'}{2}$ до $-\pi\left(q + \frac{q'}{2}\right)$ линии $\theta = \text{const.}$ изменяются от $P'A'B'D'$ до $P'F'$. Линия $\theta = 0$ идет на конечном расстоянии по оси $O\eta$ и, разделяясь в бесконечности на правую и левую ветви, охватывает всю рассматриваемую область.

Линии $\theta = \text{const.}$ при θ очень большом представляют три бесконечно малые замкнутые кривые, охватывающие полюсы P, O и P', с уменьшением θ они расширяются и, пройдя через кривую с двумя кратными точками в A и A', начинают охватывать все три полюса, все более и более

расширяясь, причем они всегда пересекают ось абсцисс под прямым углом на фокальном отрезке FF'. При $\vartheta = 0$ мы получаем линию, идущую на конечном расстоянии по отрезкам оси абсцисс $F\xi$ и $F'\xi'$ и охватывающую в бесконечности всю рассматриваемую область. Предположим, что образующая сеть фигуры 13 наложена на направляющую сеть фигуры 32 так, что оси координат совпадают, причем применительно к нашей задаче положим $q = \frac{1}{2}$, $q' = 1$. Идя по линии $\psi = 0$, мы будем иметь: на ηO угол $\theta = 0$, на OP угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, на PF угол $\theta = \pi$, на $F\xi$ величина $\vartheta = 0$, на OP' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, на $P'F'$ угол $\theta = -\pi$, на $F'\xi'$ величина $\vartheta = 0$. Это соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 33): раздельной линии тока ηO, левой половине дна сосуда OP, его стенке PF и левому контуру струи $F\xi$ или правой половине дна сосуда OP', стенке $F'F'$ и правому контуру струи $F'\xi'$. Обращаемся к определению величины ϑ на дне и стенках сосуда. По формулам (106) и (97) имеем на отрезках OP и PF (причем верхние знаки соответствуют первому, а нижние знаки — второму отрезку):



Фиг. 33.

$$\operatorname{ch}\vartheta' = \frac{c}{r}, \quad \operatorname{ch} 2\vartheta_1 = \frac{c}{r_1}\cos^2 2\mu \pm \sin 2\mu,$$

$$\operatorname{ch} 2\vartheta_2 = \frac{c}{r_2}\cos^2 2\mu + \sin 2\mu.$$

Полагаем здесь:

$$r = c\sin 2\nu, \quad r_1 = \pm c(\sin 2\mu - \sin 2\nu),$$

$$r_2 = c(\sin 2\mu + \sin 2\nu).$$

Получаем:

$$\operatorname{ch}\vartheta' = \frac{1}{\sin 2\nu},$$

$$\operatorname{ch} 2\vartheta_1 = \pm\frac{1-\sin 2\nu \sin 2\mu}{\sin 2\mu - \sin 2\nu},$$

$$\operatorname{ch} 2\vartheta_2 = \frac{1+\sin 2\nu \sin 2\mu}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}.$$

Первая из этих формул дает нам:

$$\operatorname{sh}\vartheta' = \frac{\cos 2\nu}{\sin 2\nu},$$

и следовательно,

$$e^{\vartheta'} = \frac{\cos\nu}{\sin\nu}. \tag{107}$$

Далее, две вторые формулы дают:

$$\operatorname{ch}\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\vartheta_1 + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1\mp\sin 2\nu)(1\pm\sin 2\mu)}{\pm\sin 2\mu \mp \sin 2\nu}},$$

$$\operatorname{sh}\vartheta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\vartheta_1 - 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1\pm\sin 2\nu)(1\mp\sin 2\mu)}{\mp\sin 2\mu \mp \sin 2\nu}},$$

$$\operatorname{ch}\vartheta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\vartheta_2 + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1+\sin 2\nu)(1+\sin 2\mu)}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}},$$

$$\operatorname{sh}\vartheta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\vartheta_2 - 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1-\sin 2\nu)(1-\sin 2\mu)}{\sin 2\mu + \sin 2\nu}}.$$

Отсюда получаем:

$$e^{\vartheta_1} = \sqrt{\frac{\cos(\mu+\nu)}{\pm\sin(\mu-\nu)}}, \quad e^{\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\cos(\mu-\nu)}{\sin(\mu+\nu)}}. \tag{108}$$

Теперь по формуле (105) имеем:

$$\left.\begin{aligned} e^{\vartheta} &= \frac{\cos\nu}{\sin\nu}\sqrt{\frac{\cos 2\nu + \cos 2\mu}{\pm(\cos 2\nu - \cos 2\mu)}}, \\ \operatorname{sh}\vartheta &= \frac{\cos 2\mu + \cos^2 2\nu}{\sin 2\nu \sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

причем последняя формула написана только для отрезка OP.

Эти формулы в соединении с формулой (27) позволят нам определить давление $R = 2P$ на дно нашего прямоугольного сосуда и величины дна $PP' = 2b$ и сторон его $PF = P'F' = a$. Мы имеем:

$$\varphi = \varkappa c^2 \sin^2 2\nu, \quad d\varphi = 4\varkappa c^2 \sin 2\nu \cos 2\nu \, d\nu. \tag{110}$$

Подставляем величины (109) и (110) в формулу (15):

$$R = 8\rho w \varkappa c^2 \int_0^{\mu} \frac{\cos 2\mu + \cos^2 2\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} \cos 2\nu \, d\nu.$$

Берем интегралы:

$$\int_0^{\mu} \frac{\cos 2\nu \, d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\mu} \frac{\cos^3 2\nu \, d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} =$$

$$= \cos^2 2\mu \int_0^{\mu} \frac{\cos 2\nu \, d\nu}{\sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu}} + \int_0^{\mu} \sqrt{\sin^2 2\mu - \sin^2 2\nu} \cos 2\nu \, d\nu =$$

$$= \frac{\pi \cos^2 2\mu}{4} + \frac{\pi \sin^2 2\mu}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \sin^2 2\mu.$$

Подставляем их:

$$R = 2\rho w \varkappa c^2 \pi \left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2} \sin^2 2\mu\right). \tag{111}$$

Для определения b и a подставляем формулы (109) и (110) в (16):

$$b = \frac{4\varkappa c^2}{w} \int_0^{\mu} \sqrt{\frac{(1 + \cos 2\nu)(\cos 2\nu + \cos 2\mu)}{(1 - \cos 2\nu)(\cos 2\nu - \cos 2\mu)}} \sin 2\nu \cos 2\nu \, d\nu,$$

$$a = \frac{4\varkappa c^2}{w} \int_{\mu}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{(1 + \cos 2\nu)(\cos 2\nu + \cos 2\mu)}{(1 - \cos 2\nu)(\cos 2\mu - \cos 2\nu)}} \sin 2\nu \cos 2\nu \, d\nu.$$

Вводим подстановку $\cos 2\nu = z$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{2ac^2}{w}\int\limits_{\cos 2\mu}^{1}\frac{(1+z)(\cos 2\mu + z)}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}}\,z\,dz = \\ &= \frac{2ac^2}{w}[A\cos 2\mu + B(1+\cos 2\mu) + C], \\ a &= \frac{2ac^2}{w}\int\limits_{0}^{\cos 2\mu}\frac{(1+z)(\cos 2\mu + z)}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}}\,z\,dz = \\ &= \frac{2ac^2}{w}[A'\cos 2\mu + B'(1+\cos 2\mu) + C'], \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

где

$$A = \int\limits_{\cos 2\mu}^{1}\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}}, \quad A' = \int\limits_{0}^{\cos 2\mu}\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}},$$

$$B = \int\limits_{\cos 2\mu}^{1}\frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}}, \quad B' = \int\limits_{0}^{\cos 2\mu}\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}},$$

$$C = \int\limits_{\cos 2\mu}^{1}\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\cos^2 2\mu)}}, \quad C' = \int\limits_{0}^{\cos 2\mu}\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2 2\mu - z^2)}}.$$

Чтобы взять эти интегралы, положим, что

$$z^2 = 1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu.$$

Для двух первых интегралов эта подстановка дает:

$$A = \int\limits_{0}^{1}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$A' = \int\limits_{1}^{\frac{1}{\sin 2\mu}}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} = \ln \operatorname{ctg}\mu.$$

Точно так же окончательно берутся два последних интеграла:

$$C = \int_0^1 \frac{(1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu)\, d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} =$$

$$= \cos^2 2\mu \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} + \sin^2 2\mu \int_0^1 \sqrt{1 - \sigma^2}\, d\sigma =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos^2 2\mu + \frac{\pi}{4} \sin^2 2\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sin^2 2\mu.$$

$$C' = \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{(1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} =$$

$$= \cos^2 2\mu \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} - \sin^2 2\mu \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \sqrt{\sigma^2 - 1}\, d\sigma =$$

$$= \cos^2 2\mu \ln \operatorname{ctg} \mu - \frac{1}{2} \cos 2\mu + \frac{1}{2} \sin^2 2\mu \ln \operatorname{ctg} \mu.$$

Что касается до интегралов B и B', то они приводятся к эллиптическим. Мы имеем:

$$B = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu}\, d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}, \quad B' = \int_1^{\frac{1}{\sin 2\mu}} \frac{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 2\mu}\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}.$$

Полагаем в первом интеграле $\sigma = \sin \alpha$:

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 2\mu \sin^2 \alpha}\, d\alpha = E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right).$$

Во втором интеграле полагаем

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^2 2\mu} (1 - \cos^2 2\mu \sin^2 \alpha).$$

Это дает:

$$B' = \cos^2 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2 \alpha}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 2\mu \sin^2 \alpha} \, d\alpha = F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставим теперь все найденные интегралы в формулы (112):

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{2ac^2}{w}\left\{\frac{\pi}{2}\left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) + \right. \\ &\qquad \left. + (1 + \cos 2\mu) E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \\ a &= \frac{2ac^2}{w}\left\{\ln \operatorname{ctg} \mu \left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) - \frac{1}{2}\cos 2\mu + \right. \\ &\qquad \left. + (1 + \cos 2\mu)\left[F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Исключая ac^2 из формулы (111) и первой формулы (113), находим величину силы давления потока на наш прямоугольный сосуд:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\dfrac{(1 + \cos 2\mu) E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu}} 2bpw^2. \quad (114)$$

Входящий сюда угол μ определяется из трансцендентного уравнения, получаемого из формул (113):

$$\frac{a}{b}\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) + (1 + \cos 2\mu) E\left(\sin 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \ln \operatorname{ctg} \mu \left(1 + \cos 2\mu - \frac{1}{2}\sin^2 2\mu\right) - \frac{1}{2}\cos 2\mu +$$

$$+ (1 + \cos 2\mu)\left[F\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos 2\mu, \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (115)$$

Если $a = 0$, то уравнение удовлетворяется положением $\mu = \frac{\pi}{4}$, так как $F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = E\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Величина R обращается

при этом в величину, данную формулой (32), ибо $E\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Этого и следовало ожидать, так как сосуд наш обращается при этом в пластинку. Если же $a = \infty$, т. е. сосуд весьма длинен, то мы удовлетворим уравнению (115), полагая $\mu = 0$. Величина R обращается при этом в

$$R = b\rho w^2.$$

§ 16. Истечение жидкости из бесконечного сосуда в наставку. Эта задача решается с помощью направляющей сети с четырьмя фокусами, которая получается из нашей общей формулы (11), если положить в ней:

$$c_1 = -c_2 = c, \quad c_3 = -c_4 = c', \quad m = 1, \quad f(u) = \frac{2qcc'}{u}.$$

Это дает нам:

$$\phi = q\int \frac{2cc'\,du}{u\sqrt{(c'^2-u^2)(c^2-u^2)}} = qi\int \frac{cc'\,d\frac{1}{u^2}}{\sqrt{-1+(c'^2+c^2)\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2c^2}{u^4}}} =$$

$$= qi\int \frac{\frac{2c^2c'^2}{c'^2-c^2}\,d\left(\frac{1}{u^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2c'^2c^2}{c'^2-c^2}\,\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}\right)^2}} =$$

$$= qi\arcsin\left(\frac{2c'^2c^2}{c'^2-c^2}\,\frac{1}{u^2}-\frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2}\right)-\beta i, \qquad (116)$$

где β — некоторое произвольное постоянное. Далее, по формуле (9):

$$\frac{c'^2c^2}{c'+c}\,\frac{1}{u^2} = \frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)} + \frac{c'-c}{2}\sin\left(\frac{\theta+\beta}{q} - i\,\frac{\vartheta}{q}\right).$$

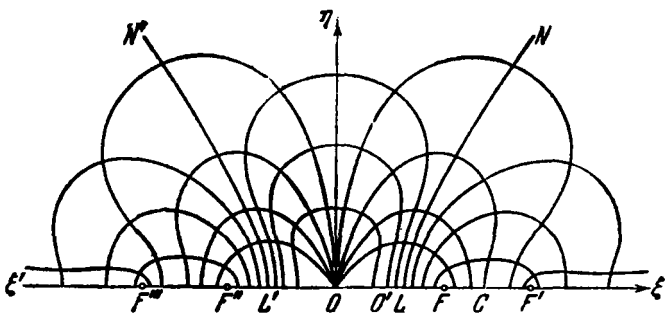
Положим, что

$$u = r(\cos\lambda + i\sin\lambda).$$

Тогда при сравнении действительной и мнимой частей получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{c'^2c^2}{c'+c}\,\frac{\cos 2\lambda}{r^2} &= \frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)} + \frac{c'-c}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q},\\ \frac{c'^2c^2}{c'+c}\,\frac{\sin 2\lambda}{r^2} &= \frac{c'-c}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{q}\operatorname{h}\frac{\vartheta}{q}.\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Сравнение этих формул с формулами (19) показывает нам, каким образом рассматриваемая изотермическая сеть может быть получена из эллиптической сети (роль параметра θ играет в формуле (117) $\theta+\beta$). Пусть $OF=c$ и $OF''=c'$ (фиг. 34). Построим эллиптическую сеть с фокаль-



Фиг. 34.

ным отрезком FF''. Потом возьмем некоторый центр преобразования O' между O и F на расстоянии

$$O'O=\frac{cc'}{c+c'}$$

от начала координат и, следовательно, на расстоянии

$$\frac{c'+c}{2}-\frac{cc'}{c'+c}=\frac{c'^2+c^2}{2(c'+c)}$$

от центра C эллиптической сети. Приняв центр преобразования O' за полюс и ось $O'\xi$ за полярную ось, каждой точке эллиптической сети построим соответственную точку, уменьшая полярный угол в два раза и заменяя радиус-вектор новым таким образом, чтобы произведение квадрата нового радиуса-вектора на прежний радиус-вектор равнялось

$$\frac{c'^2c^2}{c+c'}.$$

После такого преобразования фокусы F и F'' эллиптической сети заменяются четырьмя точками, расположенными симметрично относительно точки O' (эллиптическая сеть с полной плоскости преобразуется на полуплоскость). При этом

точки, соответственные F, будут отстоять от O' на расстояние

$$\sqrt{\frac{c'^2c^2}{c+c'}} : O'F = \sqrt{\frac{c'^2c^2}{c+c'} : \left(c - \frac{cc'}{c+c'}\right)} = c',$$

а точки, соответственные F', будут отстоять на расстояние c. Если теперь передвинем всю полученную сеть по оси абсцисс влево на расстояние $\frac{cc'}{c+c'}$, то она расположится симметрично относительно осей координат, причем фокус эллиптической сети F' будет в новой сети представлен фокусами F и F''', а фокус эллиптической сети F будет в новой сети представлен фокусами F' и F''''.

Такое происхождение рассматриваемой сети из эллиптической разъясняет нам ее вид. Так как точка O' соответствует параметрам

$$\frac{\theta+\beta}{q} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\vartheta}{q} = \frac{\vartheta_0}{q},$$

где

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_0}{q} = \frac{c'^2+c^2}{c'^2-c^2} - 2\frac{c'+c}{c'-c}, \tag{118}$$

то эти значения параметров будут иметь все бесконечно удаленные точки нашей области. На отрезке оси абсцисс $\xi F'$ мы будем иметь $\theta+\beta = -q\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0; на отрезке $F'F$ мы будет иметь $\vartheta = 0$, и $\theta+\beta$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}q$ до $+\frac{\pi}{2}q$; на отрезке FO будем иметь $\theta+\beta = \frac{\pi}{2}q$, и ϑ изменяется от 0 до ∞; на оси ординат $O\eta$ будем иметь $\theta+\beta = -\frac{\pi}{2}q$, и ϑ изменяется от ∞ до ϑ_0; на отрезке оси абсцисс OF'' будем иметь $\theta+\beta = -\frac{3}{2}\pi q$, и ϑ изменяется от ∞ до 0; на отрезке $F''F'''$ будем иметь: $\theta+\beta$ изменяется от $-\frac{3}{2}\pi q$ до $-\frac{\pi}{2}q$, и $\vartheta = 0$; наконец, на отрезке $F'''\xi'$ будем иметь $\theta+\beta = -\frac{\pi}{2}q$, и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. Так как бесконечные точки всех гипербол эллиптической сети после преобразования и передвижения попадут в точку O, то все

линии $\vartheta = \text{const.}$ пройдут через эту точку. Они пересекут ось абсцисс еще на отрезках FF' и $F''F'''$ под прямым углом, как это представлено на фигуре 34. Что касается до линий $\vartheta = \text{const.}$, которые преобразуются из эллипсов, то они будут пересекать ось абсцисс вне фокальных отрезков FF'' и $F''F'''$. Два эллипса эллиптической сети, из которых один лежит своим контуром на бесконечно малое расстояние вправо от O', а другой — влево от O', обратятся после преобразования и передвижения в кривые LN и $L'N'$, которые в бесконечности разделяются каждая на две и охватывают всю рассматриваемую область.

Применительно к нашей задаче положим в формулах (117)

$$q = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{\pi}{4}$$

и введем в них для сокращения подстановку $c = c' \cos \nu$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2c^2}{\sin^2 \nu} \frac{\cos 2\lambda}{r^2} &= \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} - \cos 2\vartheta \operatorname{ch} 2\vartheta, \\ \frac{2c^2}{\sin^2 \nu} \frac{\sin 2\lambda}{r^2} &= \sin 2\vartheta \operatorname{sh} 2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

Что касается до формулы (118), то она при этом обратится в

$$\operatorname{ch} 2\vartheta_0 = \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu},$$

откуда

$$\operatorname{sh} 2\vartheta_0 = \frac{2 \cos \nu}{\sin^2 \nu}.$$

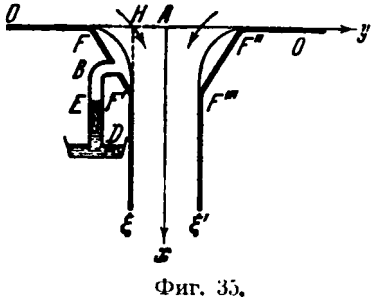
Вычитая первые и вторые части этих формул, определим скорость v, соответствующую ϑ_0:

$$e^{-2\vartheta_0} = \left(\frac{v}{w}\right)^2 = \frac{(1 - \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu}, \quad v = w \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}. \tag{120}$$

За образующую сеть примем сеть фигуры 9 и наложим ее на направляющую сеть фигуры 34 так, чтобы оси координат совпали. Все точки бесконечности рассматриваемого течения представятся на фигуре 34 точкой O, поэтому во всех этих точках скорость будет бесконечно мала и будет иметь всевозможные направления, изменяющиеся от $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

до $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Идя по линии $\psi = 0$, соответствующей на фигуре 34 оси $O\xi$, мы будем иметь: на отрезке OF угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке FF'' величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, на отрезке $F''\xi$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. В действительном течении жидкости (фиг. 35) это будет соответствовать горизонтальной стенке сосуда OF, контуру струи FF' и стенке наставки $F'\xi$.

Подобным же образом, идя по линии $\psi = \pi\alpha$, мы будем иметь: на OF''' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F'''F'''' \vartheta = 0$, и θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0; на $F''''\xi'$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. Это будет соответствовать в действительном течении жидкости правому граничному контуру $OF'''F''''\xi'$, который при надлежащем выборе начала координат A симметричен левому граничному контуру $OFF'\xi$.



Фиг. 35.

Составим уравнение контура FF''. По формулам (119) и (20) имеем для отрезка FF'':

$$\varphi = \alpha \ln \frac{r}{c}, \quad \cos 2\vartheta = \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} - \frac{2c^2}{r^2 \sin^2 \nu} \tag{121}$$

Отсюда имеем:

$$\cos 2\vartheta = \frac{1 + \cos^2 \nu - 2e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}{\sin^2 \nu},$$

$$\sin \vartheta = \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}.$$

Подставляем эти величины в формулу (14):

$$dx = \frac{1}{w \sin \nu} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}\, d\varphi, \quad dy = \frac{1}{w \sin \nu} \sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}} - \cos^2 \nu}\, d\varphi.$$

Чтобы взять интегралы, делаем в первой формуле подстановку

$$1-e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}=\sigma^2,\quad d\varphi=\frac{\alpha\sigma\,d\sigma}{1-\sigma^2},$$

а во второй подстановку

$$e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}-\cos^2\nu=\sigma^2,\quad d\varphi=-\frac{\alpha\sigma\,d\sigma}{\cos^2\nu+\sigma^2}.$$

Получаем:

$$\int\sqrt{1-e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}\,d\varphi=\alpha\int\frac{\sigma^2\,d\sigma}{1-\sigma^2}=\alpha\left(-\sigma+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)+\text{const.},$$

$$\int\sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}-\cos^2\nu}\,d\varphi=-\alpha\int\frac{\sigma^2\,d\sigma}{\sigma^2+\cos^2\nu}=$$

$$=\alpha\left(-\sigma+\cos\nu\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\cos\nu}\right)+\text{const.}$$

Таким образом, уравнение контура струи выразится так:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\alpha}{w\sin\nu}\left(-\sqrt{1-e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}}{1-\sqrt{1-e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}}}\right)+\text{const.},\\ y&=\frac{\alpha}{w\sin\nu}\left(-\sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}-\cos^2\nu}+\cos\nu\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^{-\frac{2\varphi}{\alpha}}-\cos^2\nu}}{\cos\nu}\right)+\text{const.}\end{aligned}\right\}\quad(122)$$

Замечаем, что на основании формулы (121) в точках F и F' мы имеем:

$$\varphi=0\quad\text{и}\quad\varphi=-\alpha\ln\cos\nu.$$

Назовем ширину отверстия входной воронки FF'' через $2b$, ширину наставки $F''F'''$ через $2a$ и вышину воронки $F'H$ через l. Координаты точек F и F'' будут при этом $(0,-b)$ и $(l,-a)$. Составляем по формуле (122) разности этих координат, а из формулы (120) определяем a:

$$\left.\begin{aligned}l&=\frac{Q}{\pi w}\left[-1+\frac{1}{\sin\nu}\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\right],\\ b-a&=\frac{Q}{\pi w}\left(1-\frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right),\quad a=\frac{Q}{2v}=\frac{Q}{2w}\operatorname{ctg}\frac{\nu}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(123)$$

Задавшись углом ν $\left(\text{который, по предположению, менее } \frac{\pi}{2}\right)$, определим из этих формул размеры воронки с помощью отношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left[\frac{1}{\sin\nu}\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)-1\right], \\ \frac{b-a}{a} &= \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Что же касается количества Q истекающей жидкости, то оно представится формулой:

$$Q = \frac{\pi}{\pi + 2\left[\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right)\right]}\,2bc. \qquad (125)$$

Величина, стоящая здесь в знаменателе множителем при 2, положительна, ибо она может быть представлена в виде двух положительных членов:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2};$$

с другой стороны, эта величина менее единицы, ибо при вычитании из нее единицы мы получаем отрицательную величину

$$-\left(1-\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right).$$

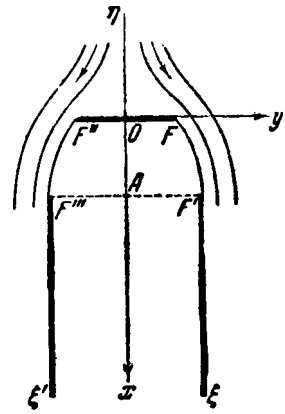
Это показывает, что формула (125) дает большее количество вытекающей жидкости, нежели формула (24), т. е. *прибавление наставки увеличивает количество вытекающей жидкости.*

Предположим, что к стенке воронки против контура струи FF прикреплена пьезометрическая трубка BD, и определим высоту $ED = h$, на которую жидкость (той же плотности, как текущая жидкость) поднимется в этой трубке.

Полагая, что давление на поверхность жидкости сосуда D и на жидкость, вытекающую из весьма длинной наставки, одно и то же, получим:

$$h = \frac{w^2 - v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\nu}{2} - 1\right).$$

§ 17. Об ударе потока жидкости о пластинку, прикрывающую вход в канал с параллельными стенками. Наложим на направляющую сеть фигуры 34 $\left(\text{при } q = \frac{1}{2} \text{ и } \beta = -\frac{\pi}{4}\right)$ образующую сеть фигуры 13 так, чтобы оси координат совпали. Во всех бесконечно удаленных точках рассматриваемого течения жидкости мы получим при этом $\theta = 0$ и скорость v, определяемую по формуле (120), так что течение будет соответствовать беспредельному потоку жидкости. Идя по линии $\psi = 0$, будем иметь: на ηO угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞, на OF' угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на FF' величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, на $F''\xi$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0, равным образом на OF''' угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F''F'''$ величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, на $F'''\xi'$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от 0 до ϑ_0. Это соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 36) раздельной линии тока $O\eta$, которая, дойдя до пластинки FF'', разбивается в критической точке O на две ветви: левая ветвь обтекает часть пластинки OF, образует контур струи FF'' и потом переходит на внешнюю стенку канала $F''\xi$; правая же ветвь обтекает часть пластинки OF''', образует контур струи $F'''F''''$ и потом переходит на внешнюю часть левой стенки канала $F''''\xi'$. Определим уравнения



Фиг. 36.

контура струи FF'. По формулам (119) и (27) имеем на отрезках OF и FF':

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= kr^2, \\ \operatorname{ch} 2\vartheta &= \frac{2\frac{c^2}{r^2} - 1 - \cos^2\nu}{\sin^2\nu}, \\ \cos 2\theta &= \frac{1 + \cos^2\nu - 2\frac{c^2}{r^2}}{\sin^2\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

причем первая формула относится к обоим отрезкам, вторая — к отрезку OF и третья — к отрезку FF'.

Переходим от функций от 2ϑ и 2θ к функциям от ϑ и θ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh}\vartheta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1}, & \operatorname{ch}\vartheta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2} - \cos^2\nu}, \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{\frac{c^2}{r^2} - \cos^2\nu}, & \cos\theta &= \frac{1}{\sin\nu}\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

На основании первых формул из групп (126) и (127) и формулы (15) получим для силы R давления потока на пластинку выражение:

$$2P = R = \frac{4\rho wk}{\sin\nu}\int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\, dr = \frac{\rho wkc^2\pi}{\sin\nu}. \tag{128}$$

Далее, называя длину пластинки через $2b$, будем иметь по формулам (126), (127), (16):

$$\begin{aligned} b &= \frac{2k}{w}\int_0^c (\operatorname{ch}\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta)\, r\, dr = \\ &= \frac{2k}{w\sin\nu}\left(\int_0^c \sqrt{c^2 - r^2}\, dr + \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2\cos^2\nu}\, dr\right) = \\ &= \frac{c^2k}{w\sin\nu}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\nu + \frac{\pi - 2\nu}{2\cos\nu}\right). \end{aligned} \tag{129}$$

Из формул (128) и (129) следует, что

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\left(\sin\nu + \frac{\pi - 2\nu}{2\cos\nu}\right)} 2bw^2\rho. \tag{130}$$

Эта формула дает бо́льшую величину R, нежели формула (32), так как в знаменателе множитель при 2 при изменении ν от $\frac{\pi}{2}$ до 0 идет, уменьшаясь от 2 до $\frac{\pi}{2}$. Коэффициент еще более увеличивается, если мы вместо w введем в формулу (130) скорость потока v из формулы (120).

Подставляем $\sin\theta$ и $\cos\theta$ из двух последних формул (127) и величину $d\varphi$ из первой формулы (126) в формулу (14):

$$dx = \frac{2k}{w\sin\nu}\sqrt{r^2 - c^2}\,dr, \quad dy = \frac{2k}{w\sin\nu}\sqrt{c^2 - r^2\cos^2\nu}\,dr.$$

Интегрируем:

$$x = \frac{kc^2}{w\sin\nu}\left[\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1} - \ln\left(\frac{r}{c} + \sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}\right)\right] + \text{const.},$$

$$y = \frac{kc^2}{w\sin\nu\cos\nu}\left(\frac{r}{c}\cos\nu\sqrt{1 - \cos^2\nu\,\frac{r^2}{c^2}} + \arcsin\frac{r\cos\nu}{c}\right) + \text{const.}$$

Произвольные постоянные определяем под условием, что в точке F при $r = c$ имеем $x = 0$, $y = b$. После этого определения уравнения получают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kc^2}{w\sin\nu}\left[\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1} - \ln\left(\frac{r}{c} + \sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}\right)\right], \\ y - b &= \frac{kc^2}{w\sin\nu\cos\nu}\left[\frac{r}{c}\cos\nu\sqrt{1 - \cos^2\nu\,\frac{r^2}{c^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin\left(\frac{r}{c}\cos\nu\right) - \sin\nu\cos\nu - \frac{\pi}{2} + \nu\right]. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Исключая отсюда $\frac{r}{c}$ и потом определяя постоянное kc^2 по формулам (129), найдем уравнение контура FF'.

Называя ширину канала $F'F'''$ через $2a$ и расстояние OA пластинки от отверстия канала через l, отнесем урав-

нения (131) к точке F', в которой $r=\frac{c}{\cos\nu}$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{kc^2}{w}\left[\frac{1}{\cos^2\nu}+\frac{1}{\sin\nu}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\right], \\ a-b &= \frac{kc^2}{w}\left(\frac{\nu}{\sin\nu\cos\nu}-1\right). \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

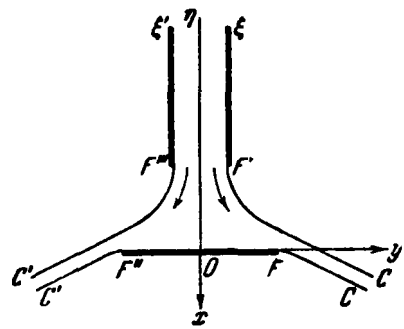
Отсюда и из формулы (129) получим пропорции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{a-b} &= \frac{\operatorname{tg}\nu+\cos\nu\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)}{\nu-\sin\nu\cos\nu}, \\ \frac{a}{a-b} &= \frac{\pi(1+\cos\nu)}{2(\nu-\sin\nu\cos\nu)}, \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

которые при данном ν позволяют определить размеры пластинки и ее расстояние от отверстия канала, при условии возможности рассматриваемого течения жидкости.

§ 18. Удар о пластинку струи жидкости, выходящей из канала с параллельными стенками. Приняв ту же направляющую сеть фигуры 34 $\left(\text{при } q=\frac{1}{2} \text{ и } \beta=-\frac{\pi}{4}\right)$, наложим на нее образующую сеть фигуры 19 так, чтобы оси координат совпали. Допустим, что $c'>e>c$, т. е. полюсы C и C' образующей сети попадают на фокальные отрезки FF' и $F''F'''$ направляющей сети. Назовем через θ_1 величину параметра θ для фокуса $C(e,\ 0)$ образующей сети. Идя по линии $\psi=0$, мы будем иметь (фиг. 34): на линии ηO угол $\theta=0$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞, на OF угол $\theta=\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на FC $\vartheta=0$, и θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до θ_1, на OF'' угол $\theta=-\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ∞ до 0, на $F''C'$ величина $\vartheta=0$, и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\theta_1$. Это соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 37) раздельной линии тока ηO, которая в критической точке O разбивается на две половины: правая идет по части пластинки OF и образует контур струи FC, а левая идет по части пластинки OF'' и образует контур струи $F''C'$. Идя по линии $\psi=\pi\alpha$, будем иметь: на отрезке

$\xi F'$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0, на отрезке $F'C$ величина $\vartheta = 0$, и θ изменяется от 0 до θ_1. Это соответствует на фигуре 37 правой стенке канала $\xi F'$ и верхнему контуру $F'C$ правой струи. При $\psi = -\pi\alpha$ будем иметь: на отрезке $\xi' F'''$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до 0, на отрезке $F'''C'$ величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от 0 до $-\theta_1$. Это соответствует на фигуре 37 левой стенке канала $\xi' F'''$ и верхнему контуру $F'''C'$ левой струи.



Фиг. 37.

Определим теперь уравнения контуров FC и $F'C$. По формулам (56) и (119) имеем при $\gamma = e$ для отрезков CF и CF':

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\alpha \ln [\pm (e^2 - r^2)] + 2\alpha \ln \beta, \\ \cos 2\theta &= \frac{1 + \cos^2 \nu - 2\frac{c^2}{r^2}}{\sin^2 \nu}, \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - \cos^2 \nu}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

При этом из двух последних формул определяется угол θ_1, который образует направление струи в бесконечно удаленной точке C с осью Ox. Для этого стоит только положить $r = e$:

$$\left.\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{\frac{c^2}{e^2} - \cos^2 \nu}, \\ \cos \theta_1 &= \frac{1}{\sin \nu} \sqrt{1 - \frac{c^2}{e^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

Подставляем величину $d\varphi$, а также и значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$ из формул (134) в формулы (14):

$$dx = \frac{2a}{w\sin\nu}\frac{\sqrt{r^2-c^2}}{e^2-r^2}\,dr,$$

$$dy = \frac{2a}{w\sin\nu}\frac{\sqrt{c^2-r^2\cos^2\nu}}{e^2-r^2}\,dr,$$

где применительно к контуру FC надо брать $c<r<e$, а к контуру $F'C$ надо брать $e<r<\frac{c}{\cos\nu}$. Интегрируем:

$$x = \frac{2a}{w\sin\nu}\left\{(e^2-c^2)\int\frac{dr}{(e^2-r^2)\sqrt{r^2-c^2}} - \int\frac{dr}{\sqrt{e^2-c^2}}\right\} + \text{const.},$$

$$y = \frac{2a}{w\sin\nu}\left\{(c^2-e^2\cos^2\nu)\int\frac{dr}{(e^2-r^2)\sqrt{c^2-r^2\cos^2\nu)}} + \right.$$

$$\left. + \cos^2\nu\int\frac{dr}{\sqrt{c^2-r^2\cos^2\nu}}\right\} + \text{const.}$$

Выполняем интегрирования, пользуясь для первых интегралов, входящих во вторые части наших уравнений, подстановкой

$$r = \frac{ez}{\sqrt{z^2\pm 1}}.$$

Получаем:

$$x = \frac{2a}{w\sin\nu}\left[\frac{\sqrt{e^2-c^2}}{e}\ln\left(z+\sqrt{z^2\mp\frac{c^2}{e^2-c^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \ln\left(r+\sqrt{r^2-c^2}\right)\right] + \text{const.},$$

$$y = \frac{2a}{w\sin\nu}\left[\frac{\sqrt{c^2-e^2\cos^2\nu}}{e}\ln\left(z+\sqrt{z^2\pm\frac{c^2}{c^2-e^2\cos^2\nu}}\right) - \right.$$

$$\left. - \cos\nu\arccos\left(\frac{r\cos\nu}{c}\right)\right] + \text{const.}$$

Для определения постоянных обращаем внимание на координаты точек F и F', которые пусть будут $(0, b)$, $(-h, a)$. Определив постоянные и заменив z его величи-

ной, найдем:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{2\alpha}{w\sin\nu}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2}\ln\frac{\left[\frac{r}{c}\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sqrt{\left(\frac{r}{e}\right)^2-1}\right]}{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-\left(\frac{r}{e}\right)^2}}-\right.\\
&\qquad\left.-\ln\left[\frac{r}{e}+\sqrt{\left(\frac{r}{e}\right)^2-1}\right]\right\},\\
y &= \frac{2\alpha}{w\sin\nu}\left\{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-\cos^2\nu}\times\right.\\
&\quad\times\ln\frac{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}\left[\frac{r}{c}\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{e}{c}\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2\cos^2\nu}\right]}{\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-\left(\frac{r}{e}\right)^2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{e}{c}\sin\nu\right]}-\\
&\qquad\left.-\cos\nu\left(\arccos\frac{r\cos\nu}{c}-\nu\right)\right\}+b,\\
x' &= \frac{2\alpha}{w\sin\nu}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2}\times\right.\\
&\quad\times\ln\frac{\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}\left[\frac{r'}{c}\sqrt{\left(\frac{e}{e}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sqrt{\left(\frac{r'}{c}\right)^2-1}\right]}{\sqrt{\left(\frac{r'}{e}\right)^2-\left(\frac{e}{c}\right)^2}\left[\sqrt{\left(\frac{e}{c}\right)^2-1}+\frac{e}{c}\sin\nu\right]}-\\
&\qquad\left.-\ln\left[\frac{\cos\nu}{1+\sin\nu}\left(\frac{r'}{c}+\sqrt{\left(\frac{r'}{e}\right)^2-1}\right)\right]\right\}-h,\\
y' &= \frac{2\alpha}{w\sin\nu}\left\{\sqrt{\left(\frac{e}{e}\right)^2-\cos^2\nu}\times\right.\\
&\quad\times\ln\frac{\frac{r'}{c}\sqrt{1-\left(\frac{e}{c}\right)^2\cos^2\nu}+\frac{e}{c}\sqrt{1-\left(\frac{r'}{c}\right)^2\cos^2\nu}}{\sqrt{\left(\frac{r'}{c}\right)^2-\left(\frac{e}{c}\right)^2}}-\\
&\qquad\left.-\cos\nu\arccos\frac{r'\cos\nu}{e}\right\}+a,
\end{aligned}
\right\}\qquad(136)
$$

где индексы поставлены при величинах, относящихся к контуру $F'C$. Исключая из первых двух уравнений (136) величину $\frac{r}{c}$, а из вторых двух $\frac{r'}{c}$, найдем уравнение контуров FC и $F'C$. Но для нас имеет, главным образом, интерес установление связей между постоянными величинами, входящими в нашу задачу. Для получения таких связей обращаемся к бесконечно удаленной точке струи C, в которой $r=r'=e$. При таком положении все координаты x, y, x', y' обращаются в бесконечность и разности $x'-x$ и $y'-y$

делаются неопределенными. Но эта неопределенность устраняется предположением, что мы составляем разности координат точек, лежащих на одной эквипотенциальной линии, так как при таком допущении имеем из первой формулы (134):

$$c^2 - r^2 = r'^2 - c^2.$$

Для точки C' пишем:

$$x - x' = \frac{Q}{2w}\sin\theta_1, \quad y' - y = \frac{Q}{2w}\cos\theta_1.$$

Кроме того, мы положим, что

$$a = \frac{Q}{2\pi}$$

и воспользуемся формулами (135). На основании сказанного получим из формул (136):

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{2w}\sin\theta_1 &= h - \frac{Q}{\pi w}\left[\cos\theta_1 \ln\frac{\sin\theta_1}{1+\cos\theta_1} - \ln\frac{\cos\nu}{1+\sin\nu}\right], \\ \frac{Q}{2w}\cos\theta_1 &= a - b - \frac{Q}{\pi w}\left[\sin\theta_1 \ln\frac{\cos\theta_1}{1+\sin\theta_1} + \nu\cos\nu\right]^{*}). \end{aligned}\right\} \quad (137)$$

Сюда следует прибавить еще уравнение (120), которому можно дать вид:

$$\frac{Q}{2a} = w\,\mathrm{tg}\,\frac{\nu}{2}. \quad (138)$$

Из уравнений (137) и (138) мы можем по данным a, b, h, w определить вспомогательные углы ν, θ_1 и количество Q вытекающей жидкости.

Найдем теперь силу давления струи на пластинку FF''. По формуле (15) и первой из формул (127) имеем:

$$P = \frac{2\rho w}{\sin\nu}\int_0^c \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 1}\, d\varphi.$$

---

*) В формуле (137) для $\frac{Q}{2w}\sin\theta_1$ перед вторым логарифмом должен стоять коэффициент $\frac{1}{\sin\nu}$; точно так же во второй формуле (137) последний член должен быть не $+\nu\cos\nu$, а $+\nu\,\mathrm{ctg}\,\nu$; это отражается и на формуле (140) (см. примечание к стр. 599). (*Прим. ред.*)

Подставляем сюда величину $d\varphi$ из первой формулы (134), в которой для отрезка OF надо взять знак (+):

$$R=\frac{4\rho w a}{\sin\nu}\int_0^c\frac{\sqrt{c^2-r^2}}{c^2-r^2}dr=\frac{4\rho w a}{\sin\nu}\left[(c^2-e^2)\int_0^c\frac{dr}{(c^2-r^2)\sqrt{c^2-r^2}}+\int_0^c\frac{dr}{\sqrt{c^2-r^2}}\right].$$

Преобразуем первый интеграл формулы, положив

$$r=\frac{ez}{\sqrt{z^2+1}},$$

и выполняем интегрирование:

$$P=\frac{2\rho w a}{\sin\nu}\pi\left(1-\frac{\sqrt{c^2-e^2}}{e}\right).$$

Выражаем здесь a и $\frac{c}{e}$ через Q и θ_1:

$$P=\rho w Q\left(\frac{1}{\sin\nu}-\cos\theta_1\right). \qquad (139)$$

В частном случае, когда $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, вторая формула (137) при конечных Q, w, a требует, чтобы $b=\infty$, т. е. пластинка обратилась в беспредельную стену. Первая же формула (137) на основании формулы (138) принимает вид:

$$\frac{h}{a}=\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left[1-2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{*}). \qquad (140)$$

Давая здесь ν разные значения, мы будем получать отношение расстояния канала от стены к половине ширины канала. Что же касается до силы давления P, то она по данному углу ν определится формулой:

$$P=\frac{\rho Q w}{\sin\nu}=\frac{b\rho w^2}{\cos^2\frac{\nu}{2}}. \qquad (141)$$

По формулам (141) и (140) удобно составить таблицы, выражающие величину P в зависимости от отношения $\frac{h}{a}$.

*) Вследствие исправления, указанного в примечании на стр. 598, эта формула должна быть заменена такой:

$$\frac{h}{a}=\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\left[1-\frac{2}{\pi\sin\nu}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\right]. \qquad (Прим.\ ред.)$$

При $\frac{h}{a} = \infty$ имеем из (140) $\nu = \frac{\pi}{2}$, и уравнение (141) обращается в известную формулу гидравлики:

$$P = \rho Q w.$$

§ 19. Концентрированіе струи жидкости. Рассмотрим задачу о концентрировании струи жидкости посредством воронки, поставленной на пути струи. Эта задача разрешается с помощью направляющей сети, получаемой при рассматривании эллиптического интеграла первого вида. Берем в формуле (11) четыре множителя под корнем и полагаем в ней

$$c_1 = -c_2 = c, \quad c_3 = -c_4 = c', \quad f(u) = c'q, \quad m = i;$$

потом, полагая $c' > c$, делаем в ней подстановку

$$u = cu'.$$

Находим при надлежащем выборе произвольного постоянного:

$$\phi = iq \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} + \omega' q, \tag{142}$$

где $k = \frac{c}{c'}$, а ω' есть полный эллиптический интеграл при дополнительном модуле $k' = \sqrt{1-k^2}$. Полный эллиптический интеграл при модуле k мы будем обозначать через ω. Подставляя величину ϕ из формулы (9) и определяя u' или u, находим:

$$\frac{u}{c} = \sin \operatorname{am}\left[\frac{\theta}{q} + \left(\omega' - \frac{\vartheta}{q}\right) i\right]. \tag{143}$$

Так как

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i + \omega' i\right) = \frac{1}{k \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i\right)},$$

то найденная формула может быть написана еще так:

$$\frac{c'}{u} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\vartheta}{q} i\right). \tag{144}$$

Формулы (143) и (144) показывают нам, что в начале координат $\theta = 0$ и $\vartheta = \omega' q$, а во всех бесконечно удаленных

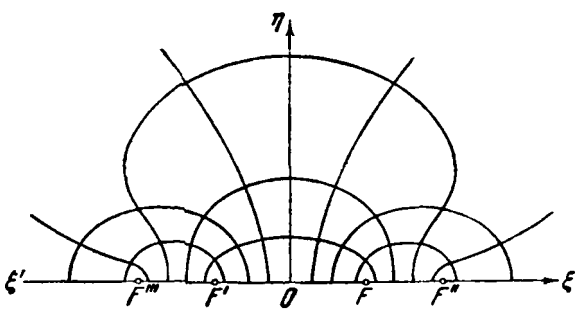
точках нашей полуплоскости $\vartheta = 0$ и $\vartheta = 0$. При $c = 0$ имеем $k = 0$, синус амплитуды обращается в обыкновенный синус, и формула (144) дает нам сеть фигуры 8; если же $c' = \infty$, то мы имеем также $k = 0$, и формула (143) дает нам обыкновенную эллиптическую сеть.

При c и c' конечных мы получим сеть, представленную на фигуре 38. Уравнения этой сети найдем, раскрывая в формуле (144) синус амплитуды и пользуясь известными формулами:

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q} i\right) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right), \qquad \cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q} i\right) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q} i\right) = \frac{\Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)},$$

где $\operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)$ есть амплитуда при модуле k'. Введя вместо



Фиг. 38.

координат ξ, η рассматриваемой точки ее полярные координаты r, λ, получаем:

$$\frac{c' \cos \lambda}{r} = \frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) + k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}, \tag{145}$$

$$\frac{c' \sin \lambda}{r} = \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \sin \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) \cos \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right) + k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\vartheta}{q}, k'\right)}. \tag{145'}$$

При $\lambda = \frac{\pi}{2}$ имеем $\theta = 0$; при $\lambda = 0$ и $r < c$ получим $\vartheta = \omega' q$ и $0 < \theta < \omega q$; при $\lambda = 0$ и $c < r < c'$ получаем $\theta = \omega q$ и $\omega' q > \vartheta > 0$; наконец, при $\lambda = 0$ и $r > c'$ имеем $\vartheta = 0$ и $\omega q > \theta > 0$. Если положим $\lambda = \pi$, то найдем такое же изменение θ и ϑ, как и в случае $\lambda = 0$, только θ будет отрицательно.

Из сказанного следует (фиг. 38), что линии направляющей сети $\theta = \text{const}$. пересекают ось $O\xi$ вне фокальных отрезков FF'' и $F'F'''$ ($OF = c$, $OF'' = c'$). При $\theta = 0$ линия этого семейства идет по оси $O\eta$ и охватывает в бесконечности всю рассматриваемую область. При θ, изменяющемся от 0 до ωq, мы получаем линии $\theta = \text{const}$. правой стороны, которые, охватывая фокальный отрезок FF'' и постоянно суживаясь, переходят в этот отрезок при $\theta = \omega q$. При θ, изменяющемся от 0 до $-\omega q$, мы получаем линии $\theta = \text{const}$. левой стороны, охватывающие фокальный отрезок $F'F'''$ и переходящие в этот отрезок при $\theta = -\omega q$. Линии направляющей сети $\vartheta = \text{const}$. охватывают фокальный отрезок FF' и пересекают $O\xi$ на фокальных отрезках FF'' и $F'F'''$. При изменении ϑ от $\omega' q$ до 0 эти линии изменяются от линии, совпадающей с фокальным отрезком FF', до линии, идущей по отрезкам оси абсцисс $F'\xi$ и $F'''\xi'$ и охватывающей в бесконечности всю рассматриваемую область.

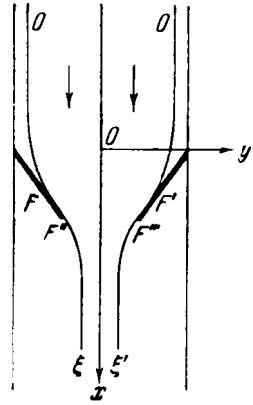
Любопытно заметить, что линия $\vartheta = \frac{\omega' q}{2}$ есть круг, описанный радиусом $\sqrt{cc'}$ из начала координат. Это вытекает из формул (143) и (144), которые при упомянутом значении ϑ дают:

$$\frac{u}{c} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} + \frac{\omega' i}{2}\right), \quad \frac{c'}{u} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q} - \frac{\omega' i}{2}\right).$$

Если назовем через ρ модуль u, то модуль второй части первой формулы будет $\frac{\rho}{c}$. Перемножая формулы, найдем, что

$$\frac{c'}{c} = \frac{\rho^2}{c^2}, \quad \rho = \sqrt{cc'}.$$

За образующую сеть в рассматриваемой нами задаче примем сеть фигуры 9 и наложим ее на направляющую сеть фигуры 38 так, чтобы оси координат совпали. Идя по линии $\psi = 0$, т. е. по оси $O\xi$, в направлении возрастающего φ, будем иметь: на отрезке OF величина $\vartheta = \omega' q$, и угол θ изменяется от 0 до ωq, на отрезке FF''' угол $\theta = \omega q$, и величина ϑ изменяется от $\omega' q$ до 0, на отрезке $F'''\xi$ величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от ωq до 0. Это соответствует в действительном течении жидкости (фиг. 39): границе струи OF, стенке воронки FF''' и границе $F'''\xi$ сконцентрированной струи жидкости. Идя по линии $\psi = \frac{Q}{2}$, т. е. по оси $O\eta$, будем иметь: во всех точках этой линии $\theta = 0$, что соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока, направленной по оси симметрии фигуры 39. Следуя же в направлении возрастающего φ по линии $\psi = Q$, т. е. по отрезку $O\xi'$ оси абсцисс, будем иметь: на OF' величина $\vartheta = \omega' q$ и θ изменяется от 0 до $-\omega q$, на $F'F'''$ угол $\theta = -\omega q$ и ϑ изменяется от $\omega' q$ до 0, на $F'''\xi'$ $\vartheta = 0$ и θ изменяется от $-\omega q$ до 0. Это соответствует в действительном течении жидкости: правому контуру струи OF', правой стенке воронки $F'F'''$ и правому контуру сконцентрированной струи $F'''\xi'$.



Фиг. 39.

Вопросом, подлежащим разрешению в этой задаче, является вопрос о зависимости сжатия струи от формы воронки. Назовем: через $2a$ ширину FF' струи при входе в воронку и через $2b$ ее ширину $F'F'''$ при выходе из воронки, через 2μ угол между стенками воронки, через v скорость струи до входа в воронку и через w ее скорость по выходе из воронки. На основании сказанного выше имеем:

$$v = we^{-\omega' q}, \quad \mu = \omega q. \tag{146}$$

Обращаемся к составлению уравнений контуров струи. По формуле (20) имеем:

$$\varphi = \alpha \ln \frac{r}{c}.$$

С другой стороны, из первой формулы (145) находим для отрезков OF и $F''\xi$:

$$\frac{r}{c} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right), \quad \frac{r}{c} = \frac{1}{k \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}.$$

Отсюда для первого и второго отрезков соответственно находим:

$$\varphi = \alpha \ln \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right), \quad \varphi = -\alpha \ln \sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) - \alpha \ln k.$$

Определив $d\varphi$ и подставив его в формулу (14), получим дифференциальные уравнения контуров OF и $F''\xi$:

$$dy = \frac{\alpha}{qv} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta \, d\theta,$$

$$dy = -\frac{\alpha}{qw} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta \, d\theta.$$

Интегрируем эти уравнения и определяем произвольные постоянные под условием, что при $\theta = \omega q$ в первом уравнении $y = -a$, а во втором $y = -b$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} a + y &= \frac{\alpha}{qv} \int_{q\omega}^{\theta} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta \, d\theta, \\ b + y &= \frac{\alpha}{qw} \int_{q\omega}^{\theta} \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right) \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{\theta}{q}\right)} \sin\theta \, d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Обращаясь к бесконечно далеким точкам O и ξ, лежащим в начале и конце нашей струи, мы должны положить для точки O угол $\theta = 0$ и

$$y = -\frac{Q}{2r},$$

а для точки ξ угол $\theta = 0$ и

$$y = -\frac{Q}{2w}.$$

Делая эту подстановку и выражая α через $\frac{Q}{\pi}$, найдем:

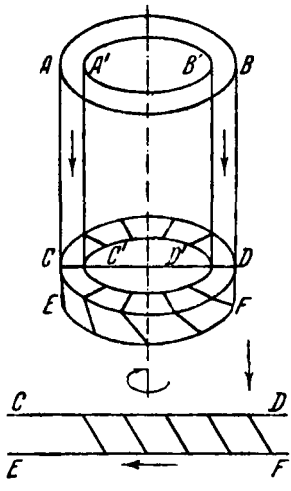
$$\frac{\frac{Q}{2v} - a}{\frac{Q}{2v}} = \frac{b - \frac{Q}{2w}}{\frac{Q}{2w}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega} \frac{\cos \operatorname{am} \sigma \, \Delta \operatorname{am} \sigma}{\sin \operatorname{am} \sigma} \sin(\sigma q)\, d\sigma. \qquad (148)$$

Здесь в интеграле введено новое переменное $\frac{\theta}{q} = \sigma$. Формула (148) показывает нам, что *сжатие струи при входе ее в воронку и при выходе из воронки одинаково.*

Задавшись величинами μ и q, мы будем иметь по формуле (146) величину ω и определим по таблицам эллиптических интегралов k и ω'; потом выразим w по v и определим из формулы (148) сжатие струи; после этого сейчас же найдем по данному b величины Q и a.

§ 20. Теоретические данные для исследования действия турбин. Оканчивая наше сочинение, сделаем приложение данного метода к теории турбин. Пусть вода под напором вступает в пространство, ограниченное двумя концентрическими цилиндрами $ABDC$ и $A'B'D'C'$, из него переходит на колесо осевой турбины $CDFE$ и, пройдя между перьями колеса, изливается в воздух, образуя в нем свободные струи (фиг. 40). Предполагая, что диаметр колеса турбины DC весьма значителен сравнительно с шириной колеса CC', позволим себе рассматривать течение воды между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями как движение между двумя плоскостями, т. е. как невихревое движение в двух измерениях. При таком воззрении колесо турбины заменится рядом параллельных пластинок, заклю-

ченных между параллельными прямыми CD и EF и движущихся в направлении стрелки под действием беспредельного потока жидкости, притекающего сверху из бесконечной дали перпендикулярно к CD. Сообщив всей жидкой массе и пластинкам скорость полосы $CDFE$, взятую в обратном направлении, мы будем иметь случай удара беспредельного потока о бесконечно длинный ряд неподвижных пластинок, причем скорость потока v в бесконечности образует с направлением CD некоторый угол. Пройдя через ряд неподвижных пластинок, наш поток весь разобьется на свободные струи, скорость на поверхности которых будет некоторой постоянной величиной w. Для исследования подобного течения жидкости мы должны будем воспользоваться сетями с бесконечным множеством полюсов и фокусов. Полагаем в формуле (10):



Фиг. 40.

$$F(u)=0,\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=-\alpha,\quad \gamma_1=0,\quad \gamma_2=(a+b),$$
$$\gamma_3=-(a+b),\quad \gamma_4=2(a+b),\quad \gamma_5=-2(a+b),$$
$$\gamma_6=3(a+b),\quad \gamma_7=-3(a+b),\ \ldots,\quad \beta_1=\frac{a+b}{\pi},$$
$$\beta_2=\beta_3=a+b,\quad \beta_4=\beta_5=2(a+b),\quad \beta_6=\beta_7=3(a+b),\ \ldots$$

Получаем:

$$\chi=-\alpha\ln\left\{\left(\frac{\pi u}{a+b}\right)\left(1-\frac{u}{a+b}\right)\left(1+\frac{u}{a+b}\right)\left(1-\frac{u}{2(a+b)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1+\frac{u}{2(a+b)}\right)\left(1-\frac{u}{3(a+b)}\right)\left(1+\frac{u}{3(a+b)}\right)\ldots\right\}.$$

Это выражение преобразуется с помощью известного разложения синуса в бесконечный ряд:

$$\sin z=z\prod_{k=1}^{k=+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Это дает нам:

$$\chi = -\alpha \ln \sin \frac{\pi u}{a+b}, \tag{149}$$

или

$$\chi = -\alpha \ln \left[\sin \frac{\pi\xi}{a+b} \operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a+b} + \cos \frac{\pi\xi}{a+b} \operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a+b} i \right].$$

Подставляем величину χ из формулы (9) и сравниваем действительные и мнимые части:

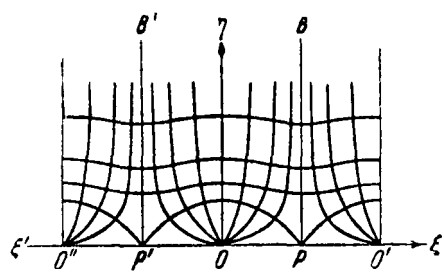
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\alpha}{2} \ln \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi\eta}{a+b} - \cos \frac{2\pi\xi}{a+b} \right), \\ \psi &= \alpha\pi - \alpha \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{th} \frac{\pi\eta}{a+b}}{\operatorname{tg} \frac{\pi\xi}{a+b}} \right) \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Мы прибавили здесь постоянное $\alpha\pi$, так как к функции χ всегда можно прибавить некоторое мнимое постоянное.

При $\xi = 0$ и $\eta = 0$ получаем из формулы (150) $\varphi = \infty$ и ψ неопределенное, что показывает (фиг. 41), что начало координат будет полюсом образующей сети, через который пройдет пучок линий $\psi = \text{const}$. При

$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{a+b}{2} < \xi < 0$$

будем иметь $\psi = 0$; то же будем иметь при $\xi = -\frac{a+b}{2}$ и всяком положительном η. Это показывает, что линия $\psi = 0$ будет состоять из отрезка оси абсцисс OP'' и параллели оси ординат $P'B'$. При $\xi = 0$ имеем $\psi = \frac{\alpha\pi}{2}$, т. е. ось ординат есть линия $\psi = \frac{\alpha\pi}{2}$. Наконец, при



Фиг. 41.

$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2} > \xi > 0$$

будем иметь $\psi = \alpha\pi$, и соответственная кривая будет представлена отрезком оси абсцисс OP и параллелью оси орди-

нат PB. Таким образом, при изменении ψ от 0 до $\pi\alpha$ линии $\psi = \text{const.}$, проходя через полюс O, изменяются от $OP'B'$ до OPB. При $\eta = \infty$ $\varphi = -\infty$ и возрастает до $+\infty$ при передвижении по линиям $\psi = \text{const.}$ до полюса O. Так как φ и ψ суть периодические функции ξ с периодом $\pi(a+b)$, то вся полуплоскость разобьется на полосы, в которых кривые образующей сети будут иметь то же расположение, как на полосе $B'P'PB$.

Для получения направляющей сети полагаем в формуле (11):

$$c_1 = \frac{a+b}{2} - \partial, \qquad c_2 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right),$$

$$c_3 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) + (a+b), \qquad c_4 = \frac{a+b}{2} - \partial - (a+b),$$

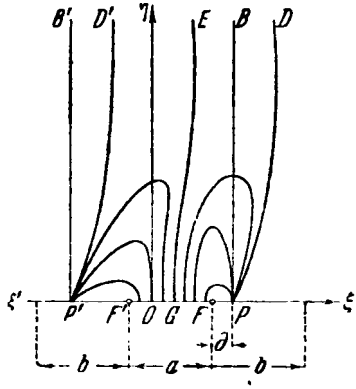
$$c_5 = \frac{a+b}{2} - \partial + (a+b), \qquad c_6 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) - (a+b),$$

$$c_7 = -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right) + 2(a+b), \qquad c_8 = \frac{a+b}{2} - \partial - 2(a+b), \ldots,$$

$$f(u) = \frac{A}{\left[1 - \frac{2u}{a+b}\right]\left[1 + \frac{2u}{a+b}\right]\left[1 - \frac{2u}{3(a+b)}\right]\left[1 + \frac{2u}{3(a+b)}\right]\ldots},$$

$$m = i^{n-1},$$

где A — постоянная величина, а n есть бесконечно большое число половины всех фокусов образующей сети.



Фиг. 42.

Все эти фокусы (фиг. 42) F'', F, F''', F'''', ... отстоят друг от друга поочередно на расстоянии a или b. Кроме фокусов, наша направляющая сеть при сделанных положениях будет еще иметь бесконечное множество полюсов P', P, P'', ..., которые все располагаются на фокальных отрезках b и отстоят от их левых концов на расстоянии ∂; при этом мы будем брать $\partial < \frac{b}{2}$. Начало координат O

мы берем посреди двух смежных полюсов P и P', так что

$$OP = OP' = \frac{a+b}{2}.$$

Легко увидеть, что $c_1 > -c_2$, так как неравенство

$$\frac{a+b}{2} - \partial > \frac{a-b}{2} + \partial$$

приводится к $\partial < \frac{b}{2}$.

Произведя указанные подстановки в формулу (11) и обратив внимание на вышеприведенное разложение синуса, а также на разложение

$$\cos z = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{2z}{\pi(2k+1)}\right],$$

получаем:

$$\varphi = A' \int \frac{du}{\cos\left(\frac{\pi u}{a+b}\right) \sqrt{\sin\pi \frac{\left(u+\partial-\frac{b}{2}\right)+\frac{a}{2}}{a+b} \sin\pi \frac{\left(u+\partial-\frac{b}{2}\right)-\frac{a}{2}}{a+b}}} =$$

$$= A' \int \frac{du}{\cos\left(\frac{\pi u}{a+b}\right) \sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi a}{a+b} - \cos\frac{\pi[2u-(b-2\partial)]}{a+b}\right]}}.$$

Введем подстановки:

$$\frac{\pi u}{a+b} = z, \quad \frac{\pi a}{a+b} = \nu, \quad \frac{\pi(b-2\partial)}{a+b} = \mu, \tag{151}$$

потом, умножив числитель и знаменатель на i, представим наш интеграл в таком виде:

$$\varphi = -qi \int \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu + \cos\mu)}{\sin\nu}\right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu + \cos\mu) - \sin\mu}{\sin\nu}\right]^2}} =$$

$$= -qi \arcsin\left[\frac{\operatorname{tg} z(\cos\nu + \cos\mu) - \sin\mu}{\sin\nu}\right]. \tag{152}$$

где q — некоторая постоянная величина. Замечая теперь, что

$$\sin\left(\frac{\vartheta}{q}i-\frac{\theta}{q}\right)=-\sin\frac{\theta}{q}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}+i\cos\frac{\theta}{q}\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{a+b}(\xi+i\eta)\left\{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{a+b}\right\}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}-\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{a+b}+i\left\{\operatorname{th}\frac{\pi\eta}{a+b}+\operatorname{th}\frac{\pi\eta}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{\pi\xi}{a+b}\right\},$$

получаем из формулы (151) основные формулы рассматриваемой направляющей сети:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}\,\frac{1-\operatorname{th}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{th}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}-\frac{\sin\mu}{\sin\nu}=-\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q}\sin\frac{\theta}{q},\\&\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{th}\frac{\pi\eta}{a+b}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi\xi}{a+b}\operatorname{th}^2\dfrac{\pi\eta}{a+b}}-\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{q}\cos\frac{\theta}{q}.\end{aligned}\right\}\quad(153)$$

Из этих формул следует, что найденная направляющая сеть дает при $\eta=\infty$ величины θ_0 и ϑ_0, определяемые по уравнениям:

$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta_0}{q}\sin\frac{\theta_0}{q}=\frac{\sin\mu}{\sin\nu},\quad \operatorname{sh}\frac{\vartheta_0}{q}\cos\frac{\theta_0}{q}=\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}.\qquad(154)$$

Эти величины являются, таким образом, эллиптическими координатами точки

$$\xi=\frac{\sin\mu}{\sin\nu},\quad \eta=\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}$$

при фокусном расстоянии эллипсов, равном 2. Очевидно, что

$$\sin\frac{\theta_0}{q}<\frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

При

$$\xi=\pm\frac{a+b}{2},\quad \eta=0$$

имеем $\vartheta=\infty$, и θ есть неопределенная величина. Это показывает нам, что точки P и P' суть полюсы направляющей

сети, о чем было уже сказано выше. При $\xi = 0$ и $\eta = 0$ имеем $\vartheta = 0$, и угол θ обращается в величину θ_1, определяемую из уравнения

$$\sin\frac{\theta_1}{q} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu}, \tag{155}$$

где $\mu < \nu$, потому что это условие приводит к неравенству $b - 2\partial < a$, или

$$\frac{a-b}{2} + \partial > 0.$$

Условие $\eta = 0$ может быть формулами (153) удовлетворено, во-первых, положением

$$\vartheta = 0, \quad \sin\frac{\theta}{q} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}$$

и, во-вторых, положением

$$\theta = \pm\frac{\pi q}{2}, \quad \pm\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}.$$

Так как $\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{q} > 1$, то второе положение имеет место при

$$\frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} > 1,$$
$$\frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} < -1.$$

Это дает нам:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} < -\frac{\sin\nu - \sin\mu}{\cos\nu + \cos\mu}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} > \frac{\sin\nu + \sin\mu}{\cos\nu + \cos\mu},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} < -\operatorname{tg}\frac{\nu-\mu}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} > \operatorname{tg}\frac{\nu+\mu}{2}.$$

Отсюда по формуле (151) имеем:

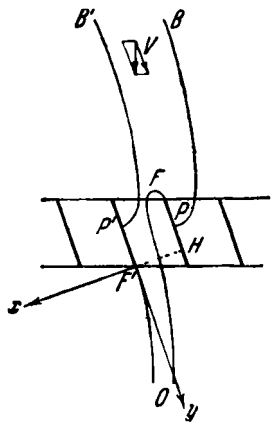
$$\xi < -\left(\frac{a-b}{2} + \partial\right), \quad \xi > \frac{a+b}{2} - \partial,$$

т. е. $\xi < c_2$ или $\xi > c_1$. Совершенно так же найдем, что положение первое будет иметь место при $\xi > c_2$ или $\xi < c_1$, причем в первом случае угол θ будет положительная величина, а во втором — отрицательная.

Из сказанного следует (фиг. 42), что на отрезке оси абсцисс $P'F'$ имеем $\theta = \frac{\pi}{2}q$, и ϑ изменяется от ∞ до 0; на

отрезке FO величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $\frac{\pi q}{2}$ до θ_1; на отрезке OF величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от θ_1 до $-\frac{\pi q}{2}$; наконец, на отрезке FP имеем $\theta = -\frac{\pi q}{2}$, и ϑ изменяется от 0 до ∞.

На фигуре 42 изображены линии $\theta = \text{const.}$ рассматриваемой направляющей сети в предположении, что константа принимает значения от $\frac{\pi q}{2}$ до $-\frac{\pi q}{2}$. При $\theta = \frac{\pi q}{2}$ получаем отрезок PF'; с убыванием θ кривые, выходя из полюса P, пересекают ось абсцисс на фокальном отрезке $F'F$, причем эта точка пересечения для линии $\theta = \theta_1$ есть начало координат O; кривая $\theta = \theta_0$ представляется бесконечными ветвями: $P'D'$, EG и DP; при $\theta < \theta_0$ мы получаем линии $\theta = \text{const.}$, проходящие уже через полюс P и приближающиеся с уменьшением θ к отрезку PF, с которым они сливаются при $\theta = -\frac{\pi q}{2}$. Так как формулы (153) суть периодические относительно ξ и имеют период $a + b$, то все кривые $\theta = \text{const.}$ направляющей сети получатся через повторение комплекса линий $D'P'PD$.



Фиг. 43.

Примем в построенной направляющей сети $q = 1$ и наложим на нее образующую сеть (фиг. 41) так, чтобы оси координат совпали; тогда и точки P и P' образующей сети лягут на одноименные точки направляющей.

Идя по линии $\psi = 0$ в сторону возрастающего φ, мы будем иметь: на $B'P'$ величина ϑ изменяется от θ_0 до ∞, и угол θ изменяется от θ_0 до 0, на отрезке $P'F'$ угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, и величина ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке $F'O$ величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до θ_1. Это будет соответствовать в действительном течении жидкости на фигуре 43 линии тока $B'P'$, части пера турбины $P'F'$

и контуру струи $F'O$. Если же мы пойдем по линии $\psi = \alpha\pi$, то будем иметь: на прямой BP величина ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞, и угол θ изменяется от θ_0 до 0, на отрезке PF угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, и величина ϑ изменяется от ∞ до 0, на отрезке FO величина $\vartheta = 0$, и угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до θ_1. Это будет соответствовать в действительном течении жидкости: линии тока BP, части пера турбины PF и контуру струи FO.

С помощью двух найденных линий тока мы выделим из текущей жидкости часть $B'P'F'OFPB$, причем при координатах, изображенных на фигуре 43, будет удовлетворено условие, требующее возрастания функции ψ от линии тока $B'P'F'O$ до линии тока $BPFO$. При дальнейшем возрастании или убывании ψ на целое число $\alpha\pi$ мы будем иметь повторение таких же масс текущей жидкости, расположенных вправо и влево от массы, изображенной на фигуре 43.

Положим теперь, что длина пера турбины есть l, т. е.

$$P'F' + PF = l,$$

расстояние между двумя последовательными перьями есть $F'H = h$, расстояние подошвы перпендикуляра, опущенного из нижнего конца пера на смежное перо, от верхнего конца этого смежного пера есть $HF = e$, сила давления жидкости на все перо есть P, и постараемся определить все эти величины.

На отрезках $P'F'$ и PF имеем по формулам (150) и (153):

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\ln\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\xi}{a+b}\right),$$

$$\mp \operatorname{ch}\vartheta = \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b} - \frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

Исключаем отсюда ξ:

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\ln\frac{(\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta \mp \sin\mu)^2}{(\cos\nu + \cos\mu)^2 + (\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta \mp \sin\mu)^2}.$$

Подставляем $d\varphi$ в формулу (16), заменяя в ней e^{ϑ} на $\operatorname{sh}\vartheta + \operatorname{ch}\vartheta$:

$$\left.\begin{aligned} P'F' &= \frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{sh}\vartheta+\operatorname{sh}^2\vartheta}{D'}d\vartheta,\\ PF &= \frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{sh}\vartheta+\operatorname{sh}^2\vartheta}{D}d\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

где

$$D' = (\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta - \sin\mu)[(\cos\nu+\cos\mu)^2 + (\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta - \sin\mu)^2],$$
$$D = (\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta + \sin\mu)[(\cos\nu+\cos\mu)^2 + (\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta + \sin\mu)^2].$$

Так как первый интеграл получается из второго изменением знака угла μ, то мы можем взять только второй интеграл и в полученном результате сделать изменение знака μ. Разбиваем интеграл, входящий в PF, на два интеграла M и N по двум слагаемым числителя и делаем в первом интеграле подстановку:

$$\sin\nu\operatorname{ch}\vartheta + \sin\mu = \sigma.$$

Получаем, обозначая $\sin\nu+\sin\mu$ через σ_1:

$$M = \frac{1}{\sin^2\nu}\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{(\sigma-\sin\mu)\,d\sigma}{\sigma[(\cos\nu+\cos\mu)^2+\sigma^2]} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2\nu}\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{d\sigma}{(\cos\nu+\cos\mu)^2+\sigma^2} - \frac{\sin\mu}{\sin^2\nu}\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{\frac{d\sigma}{\sigma^3}}{\left(\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sigma}\right)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu+\mu}{2}\right)(\cos\nu+\cos\mu) + \right.$$
$$\left. + \sin\mu\ln\sin\frac{\nu+\mu}{2}\right].$$

Интеграл N представляем в виде:

$$N = 8\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sh}^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{d\vartheta}{2}}{L},$$

где

$$L = \left[2\sin\nu\,\mathrm{ch}^2\frac{\vartheta}{2} - (\sin\nu - \sin\mu)\right] \times$$
$$\times \left\{(\cos\nu + \cos\mu)^2 + \left[2\sin\nu\,\mathrm{ch}^2\frac{\vartheta}{2} - (\sin\nu - \sin\mu)\right]^2\right\};$$

потом делаем в нем подстановку $\mathrm{th}\frac{\vartheta}{2} = \sigma$. Тогда

$$N = 8\int_0^1 \frac{\sigma^2\,d\sigma}{S},$$

где

$$S = [2\sin\nu - (\sin\nu - \sin\mu)(1-\sigma^2)] \times$$
$$\times \{(\cos\nu + \cos\mu)^2 (1-\sigma^2)^2 + [2\sin\nu - (\sin\nu - \sin\mu)(1-\sigma^2)]^2\}.$$

Определим корни знаменателя. Первый множитель, будучи приравнен нулю, дает:

$$1 - \sigma^2 = \frac{2\sin\nu}{\sin\nu - \sin\mu}, \quad \sigma = \pm i\sqrt{\frac{\sin\nu + \sin\mu}{\sin\nu - \sin\mu}}.$$

Подобным образом, приравнивая нулю второй множитель, получаем:

$$1 - \sigma^2 = \frac{2\sin\nu}{\sin\nu - \sin\mu \pm i(\cos\nu + \cos\mu)} =$$
$$= \frac{\sin\nu}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}}\left(\sin\frac{\nu-\mu}{2} \mp i\cos\frac{\nu-\mu}{2}\right),$$
$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\cos\frac{\nu-\mu}{2}}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}}}\left(\cos\frac{\nu}{2} \pm i\sin\frac{\nu}{2}\right).$$

Предположив, что рациональная дробь, входящая в наш интеграл N, разложена по этим шести корням в простые дроби, составляем по известной формуле коэффициенты этих дробей. Коэффициенты, соответствующие двум первым корням будут заключены в формуле

$$\pm i\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{8\sin^2\nu\,(\cos\nu + \cos\mu)^2};$$

коэффициенты же, соответствующие следующим четырем корням, — в формуле

$$\pm\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{8\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\left(\sin\frac{\mu}{2}\mp i\cos\frac{\mu}{2}\right).$$

Пользуясь найденными корнями и коэффициентами, получаем:

$$N=-2\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\times$$

$$\times\left\{\sin\frac{\mu}{2}\ln\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}-2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}+2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}-\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{\mu}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin\frac{\mu}{2}}\right\}$$

Подставляем найденные интегралы M и N во вторую формулу (156):

$$PF=\frac{\alpha}{w\sin\nu}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu+\mu}{2}\right)(\cos\nu+\cos\mu)+\sin\mu\ln\sin\frac{\nu+\mu}{2}-\right.$$

$$-2\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}+$$

$$+\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\mu}{2}\ln\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}-2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}{\cos\frac{\nu+\mu}{2}+2\cos\frac{\nu}{2}\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}+\cos\frac{\nu-\mu}{2}}-\right.$$

$$\left.\left.-2\cos\frac{\mu}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin\frac{\mu}{2}}\right)\right]. \quad (157)$$

Изменив знак при угле μ, мы получим из этой формулы $P'F'$. Сложив составленную таким образом величину $P'F'$ с выше-написанной величиной PF и заменив α на $\frac{Q}{\pi}$, найдем:

$$l = \frac{Q}{w}\left(\frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\,\frac{\pi-\nu}{\pi} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\ln\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\sin\nu} - \frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu}\right). \quad (158)$$

Определим величину давления P, которое сложится из давления P_1 на площадку PF и из давления P_1' на площадку PF'. Мы имеем по формуле (15):

$$P_1 = \varkappa\rho w \sin\nu(\cos\nu + \cos\mu)^2 N,$$

$$P_1' = \varkappa\rho w \sin\nu(\cos\nu + \cos\mu)^2 N',$$

где N' есть интеграл, полученный из N через изменение знака μ. Так как интеграл N нами взят, то мы можем прямо написать величину давления на всю лопатку:

$$P = Q\rho w\left(2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\sin\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu}\right). \quad (159)$$

Переходим к определению уравнений контуров струи $F'O$ и FO. Пишем по формулам (150) и (153):

$$\varphi = -\frac{a}{2}\ln\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\xi}{a+b}\right),$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} - \frac{\cos\nu + \cos\mu}{\sin\nu}\operatorname{tg}\frac{\pi\xi}{a+b}.$$

Исключаем ξ:

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2}\ln\frac{(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2}{(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2}. \qquad (160)$$

Подставляем отсюда величину $d\varphi$ в формулы (14) и совершаем интеграцию по θ:

$$x' = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{R},$$

$$y' = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{R},$$

$$x = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{R}-h,$$

$$y = -\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{R}-e,$$

где

$$R=[\sin\nu\sin\theta-\sin\mu][(\cos\nu+\cos\mu)^2+(\sin\nu\sin\theta-\sin\mu)^2].$$

Здесь x', y' обозначают координаты контура $F'O$, а x, y — координаты контура FO.

Составляем по написанным формулам разности $x'-x$ и $y'-y$ для бесконечно удаленных точек контуров струи:

$$\left.\begin{aligned} x'-x&=\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1-\varepsilon}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{R}+\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{R}\right)+h,\\ y'-y&=\frac{\alpha}{w}\sin\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1-\varepsilon}\frac{\cos\theta\sin\theta\,d\theta}{R}+\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta\,d\theta}{R}\right)+e.\end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Здесь ε и ε' суть некоторые бесконечно малые положительные величины. При произвольности этих величин вторые части формулы (161) делаются неопределенными. Мы устраним эту неопределенность, предположив, что обе бесконечно удаленные точки контуров струи лежат на одной и той же эквипотенциальной линии.

Составляя по формуле (160) разность значений φ в точках F'' и F, найдем для нее величину

$$\alpha \ln \frac{\sin \frac{\nu + \mu}{2}}{\sin \frac{\nu - \mu}{2}}.$$

Представляя эту разность еще интегралами, распространенными на рассматриваемые контуры струи, будем иметь:

$$\alpha \ln \frac{\sin \frac{\nu + \mu}{2}}{\sin \frac{\nu - \mu}{2}} = \alpha \sin \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1 - \varepsilon} \frac{\cos \theta \, d\theta}{R} + \int_{\theta_1 - \varepsilon'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{R} \right). \quad (162)$$

Умножив обе части этого уравнения на $\frac{\sin \mu}{m \sin \nu}$, придаем их к соответствующим частям второго уравнения (161). Получим:

$$y' - y - \frac{\alpha \sin \mu}{w \sin \nu} \ln \frac{\sin \frac{\nu + \mu}{2}}{\sin \frac{\nu - \mu}{2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{w} (\cos \nu + \cos \mu)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{(\cos \mu + \cos \nu)^2 + (\sin \theta \sin \nu - \sin \mu)^2} + c.$$

Здесь подинтегральная функция уже не обращается между пределами в бесконечность, и потому можно опустить ве-

личины ε и ε'. Совершаем интеграцию и подставляем:

$$\alpha = \frac{Q}{\pi},$$

$$y' - y = -\frac{Q}{w}\cos\theta_1 = -\frac{Q}{w}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\right)^2} =$$

$$= -\frac{Q}{w}\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu} \text{ *)}.$$

Получаем:

$$-\frac{Q}{w}\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu} + \frac{Q}{\pi w}\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\ln\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} =$$

$$= \frac{Q}{\pi w}\frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\cos\nu+\cos\mu} + \operatorname{arctg}\frac{\sin\nu+\sin\mu}{\cos\nu+\cos\mu}\right) + c.$$

Замечая, что величина, стоящая во второй части в скобках, есть

$$\frac{\nu-\mu}{2} + \frac{\nu+\mu}{2} = \nu,$$

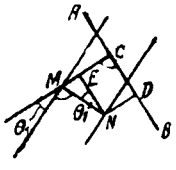
определяем из формулы c:

$$c = \frac{Q}{w}\left(-\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{\sin\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\frac{\sin\mu}{\sin\nu}\ln\frac{\sin\frac{\nu+\mu}{2}}{\sin\frac{\nu-\mu}{2}} - \frac{\cos\nu+\cos\mu}{\sin\nu}\frac{\nu}{\pi}\right). \quad (163)$$

---

*) Пусть $AB \| EN \| y$, а $MC \| ND \| x$, где MN — ортогональная линия в струе в бесконечности. Тогда



$$MN = \frac{Q}{w}, \quad -EN = y' - y;$$

отсюда

$$y' - y = -MN\cos\theta_1 = -\frac{Q}{w}\cos\theta_1.$$

(*Прим. ред.*)

Переходим к определению h. Вводим в первое уравнение (161) подстановку

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

и пишем его сначала, не обращая внимания на то, что подинтегральная функция обращается между пределами в бесконечность:

$$x' - x = \frac{a}{w} \sin \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \lambda \, d\lambda}{R'} + h =$$

$$= \frac{a}{w} \sin \nu (\cos \nu + \cos \mu)^2 N' + h,$$

где

$$R' = [\sin \nu \cos \lambda - \sin \mu] [(\cos \nu + \cos \mu)^2 + (\sin \nu \cos \lambda - \sin \mu)^2]$$

Что касается величины N', то ей можно дать вид:

$$N' = 8 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \frac{\lambda}{2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} \frac{d\lambda}{2}}{L'},$$

где

$$L' = \left[2 \sin \nu \cos^2 \frac{\lambda}{2} - (\sin \nu + \sin \mu)\right] \times$$

$$\times \left\{(\cos \nu + \cos \mu)^2 + \left[2 \sin \nu \cos^2 \frac{\lambda}{2} - (\sin \nu + \sin \mu)\right]^2\right\}.$$

Положим здесь

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \sigma;$$

найдем:

$$N' = 8 \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2 \, d\sigma}{L'},$$

где

$$L' = [2\sin\nu - (\sin\nu + \sin\mu)(1+\sigma^2)]\times$$

$$\times\{(\cos\nu+\cos\mu)^2(1+\sigma^2)^2 + [2\sin\nu - (\sin\nu+\sin\mu)(1+\sigma^2)]^2\}.$$

Определим корни знаменателя. Первый множитель, будучи приравнен нулю, дает:

$$1+\sigma^2 = \frac{2\sin\nu}{\sin\nu+\sin\mu},$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}.$$

Приравнивая же нулю второй множитель, получаем:

$$1+\sigma^2 = \frac{2\sin\nu}{\sin\nu+\sin\mu\pm i(\cos\mu+\cos\nu)} =$$

$$= \frac{\sin\nu}{\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\left(\sin\frac{\nu+\mu}{2}\mp i\cos\frac{\nu+\mu}{2}\right),$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\cos\frac{\nu+\mu}{2}}{\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}\left(-\sin\frac{\nu}{2}\pm i\cos\frac{\nu}{2}\right).$$

Коэффициенты разложения подинтегральной функции по этим шести корням будут:

$$\mp\frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{8\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2},$$

$$\pm\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{8\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\left(-\cos\frac{\mu}{2}\pm i\sin\frac{\mu}{2}\right).$$

Пользуясь найденными корнями и коэффициентами,

получаем:

$$N' = \frac{\sqrt{\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)}}{8\sin^2\nu(\cos\nu+\cos\mu)^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sigma+\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}}-\frac{1}{\sigma-\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}}}\right)d\sigma -$$

$$-\frac{\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{4\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2}\pi\sin\frac{\mu}{2}\ ^*).$$

Представим вошедший сюда интеграл в следующем виде:

$$\int_{\sigma_1+\varepsilon''}^{\infty}\ln\frac{\sigma+\sigma_1}{\sigma-\sigma_1}+\int_0^{\sigma_1-\varepsilon'''}\ln\frac{\sigma_1+\sigma}{\sigma_1-\sigma}=\ln\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'''},$$

где

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{\sin\nu-\sin\mu}{\sin\nu+\sin\mu}},$$

а ε'' и ε''' суть некоторые бесконечно малые величины, зависящие от ε и ε'. Из формулы (160) легко усмотреть, что точки той и другой струи, имеющие одинаковое φ, дают углы θ и θ':

$$\sin\theta=\frac{p+\sin\mu}{\sin\nu},\quad \sin\theta'=\frac{-p+\sin\mu}{\sin\nu},$$

где p — некоторая переменная величина. Отсюда следует, что

$$\cos\theta\cdot\varepsilon=\frac{dp}{\sin\nu};\quad \cos\theta'\cdot\varepsilon'=\frac{dp}{\sin\nu},$$

---

*) Автор забывает умножить интеграл на коэффициент 8. Поэтому множитель перед интегралом не должен иметь восьмерки в знаменателе, и последний член будет равен:

$$\frac{2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu(\cos\mu+\cos\nu)^2}\pi\sin\frac{\mu}{2}.$$

Все дальнейшие вычисления исправлены в соответствии с этим замечанием. (*Прим. ред.*)

а потому для бесконечно удаленных точек струи, для которых $\cos\theta = \cos\theta'$, имеем:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 1.$$

Но

$$\sigma = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

потому

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right)},$$

$$\varepsilon''' = \frac{\varepsilon'}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right)},$$

$$\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon''} = 1.$$

Мы находим, таким образом:

$$N' = \frac{2\sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}}{\sin^2\nu\,(\cos\mu + \cos\nu)^2}\,\pi\sin\frac{\mu}{2}.$$

Так как для бесконечно удаленных точек струи (согласно формуле (155))

$$x' - x = \frac{Q}{w}\sin\theta_1 = \frac{Q}{w}\frac{\sin\mu}{\sin\nu},$$

то первая формула (161) получает окончательный вид:

$$h = \frac{2Q}{w}\frac{\sin\frac{\mu}{2}}{\sin\nu}\left(\cos\frac{\mu}{2} - \sqrt{\cos\frac{\nu+\mu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}}\right) \qquad (164)$$

Теперь вся задача решена.

Задавшись углами μ и ν, мы определим по формуле (155) угол θ_1, а по формуле (154) — угол θ_0 и установим связь между v и w, которая вместе с теоремой Бернулли определит эти скорости. Далее по формулам (158), (163) и (164) определим размеры турбины, а по формуле (159) — силу давления на ее лопатки.

После этого следует определить абсолютную скорость жидкости по направлению, перпендикулярному к полосе CD (фиг. 40). Потом будет уже легко вычислить работу турбины.

В частном случае, когда $\mu = 0$, мы получаем на фигуре 42 $2\partial = b$. Образующая сеть делается симметричной относительно оси $O\eta$, причем линии $P'D'$, GE, PD сливаются с прямыми $P'B'$, $O\eta$, PB и дают $\theta = \theta_0 = 0$, что видно из формулы (154); точно так же из формулы (155) следует $\theta_1 = 0$. Фигура 43 обращается при этом в фигуру 30, причем кривые линии тока $P'B'$ и PB фигуры 43 переходят в прямые линии тока PO и $P'O$ фигуры 30.

Формула (163) может в этом предположении быть представлена в виде

$$Q = -\frac{\pi}{\pi + 2\frac{\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}}\, ew.$$

Это совпадает с формулой (102), если принять во внимание, что в нашем случае $e = -2b$ и $\frac{\nu}{4} = \mu$. Последнее следует из того, что по (154)

$$c = w \operatorname{tg}\frac{\nu}{4}.$$

§ 21. Заключение. Приведенных примеров достаточно, чтобы выяснить достоинство предлагаемого нами метода исследования. Остается еще много интересных задач, которые могут быть с помощью его разрешены. Так, весьма интересны случаи течения жидкости, при которых на контуре свободной струи получается точка перегиба. Они могли бы быть исследованы с помощью формулы (11) в предположении, что $f(u)$ обращается в нуль в некоторых точках, лежащих на фокальных отрезках, соответствующих контурам струй.

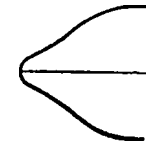
При некотором видоизменении функции ϕ возможно также решение задач об ударе беспредельного потока на

тела, ограниченные кривыми контурами, и об истечении жидкости из сосудов с кривыми стенками. Мы решили несколько таких задач, но нам не удалось при этом получить простых видов контуров. Так, нам не удалось, несмотря на продолжительные изыскания, решить задачу об ударе беспредельного потока на круглый цилиндр. Может быть, эта задача могла бы быть разрешена, как предельный случай задачи об ударе потока на многогранный контур, причем в пределе выходящие углы дали бы конечное значение для скорости.



О ФОРМЕ СУДОВ [1]).

§ 1. Насколько мне известно, до сих пор не рассматривалось течение беспредельного потока жидкости, обтекающего тела с остроносыми контурами. Вопрос о невихревом течении беспредельного потока несжимаемой жидкости в двух измерениях, обтекающего контуры различных форм, был весьма обстоятельно исследован Ренкином [2]), но он не нашел своим методом вполне остроносых форм, а только формы вида, представленного на фигуре 1. Чтобы распространить фрикционную теорию Ренкина на суда, желательно бы знать течение потока, обтекающего контуры, нос и корма которых образованы вогнутыми кривыми, прикасающимися к оси симметрии всего контура.



Фиг. 1.

Для изыскания таких течений мы предполагаем рассматривать прямоугольные декартовы координаты x, y каждой точки жидкости как функции некоторых изотермических параметров λ и μ, которые в свою очередь суть функции от изотермических параметров φ и ψ, представляющих потенциал скоростей и количество жидкости, протекающее между постоянной и данной линиями тока.

---

[1]) Сообщено 8. IV 1887 в физико-математической комиссии Общества любителей естествознания и впервые напечатано в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. III, вып. 1, 1890.

[2]) Rankine, On plane waterlines in two dimensions. Miscelloneous, Scientific Papers, стр. 495.

Отсюда и из формул (2) следует, что x и y на весьма далеком расстоянии от судна выражаются через λ и μ с помощью формул:

$$x = \frac{k}{w}\cos\mu\,\mathrm{ch}\,\lambda, \quad y = \frac{k}{w}\sin\mu\,\mathrm{sh}\,\lambda. \tag{4}$$

Так как

$$x + yi = f(\varphi + \psi i)$$

и, следовательно, по формуле (1)

$$x + yi = F(\mu - \lambda i), \tag{5}$$

где f и F — знаки некоторых функций, то

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial \mu}. \tag{6}$$

Это — дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворить искомые нами функции, выражающие x и y по параметрам λ и μ.

Мы удовлетворим этим уравнениям, а также и уравнениям (4) в бесконечности, если положим, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}\left(\cos\mu\,\mathrm{ch}\lambda - \sum A_m e^{-m\lambda}\cos m\mu\right), \\ y &= \frac{k}{w}\left(\sin\mu\,\mathrm{sh}\,\lambda + \sum A_m e^{-m\lambda}\sin m\mu\right), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где сумма распространяется на какие-нибудь положительные значения m. Но, для того чтобы контур был симметричен относительно осей координат и линия тока $\psi = 0$ имела вышеуказанный вид, нужно приписывать m только положительные целые нечетные значения. Действительно, в этом предположении при $\mu = \pi$ и изменении λ от ∞ до 0 будем иметь $y = 0$ и изменение x от $-\infty$ до

$$-OA = -\frac{k}{w}\left(1 - \sum A_m\right).$$

При $\lambda = 0$ и μ, изменяющемся от π до 0 или от π до 2π, будем иметь одинаковые для того и другого предположения значения x и противоположные по знаку, но равные по величине значения y, что соответствует контурам ABC

и ADC. При этом достаточно рассматривать один верхний контур, для которого получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}\left(\cos\mu - \sum A_m \cos m\mu\right), \\ y &= \frac{k}{w}\sum A_m \sin m\mu \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

при параметре μ, изменяющемся от 0 до π.

Наконец, при $\mu = 0$ и λ, изменяющемся от 0 до $+\infty$, будем иметь $y = 0$ и x, изменяющийся от

$$OC = \frac{k}{w}\left(1 - \sum A_m\right)$$

до бесконечности.

Мы рассмотрели поток жидкости, обтекающей неподвижное судно, но если сообщим потоку и судну поступательное движение со скоростью w, обратной скорости течения потока, то получим жидкость, покоящуюся в бесконечности, и судно, движущееся в направлении xx' со скоростью w. Форма контура этого судна найдется из уравнений (8), а течение жидкости относительно судна охарактеризуется формулами (7).

§ 2. Формулы (8) позволяют определить контуры, для которых относительная скорость жидкости в точках A и C равна нулю или есть конечная величина. Хотя нас интересует главным образом последний случай, но для более полного объяснения нашей теории возьмем сначала простой пример, относящийся к первому случаю. Пусть имеем:

$$A_3 = A_5 = \ldots = 0.$$

Формулы (8) обращаются в

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}(1 - A_1)\cos\mu, \\ y &= \frac{k}{w}A_1 \sin\mu \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

и показывают, что контур судна есть эллипс:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{k}{w}(1 - A_1), \quad \beta = \frac{k}{w} A_1. \tag{11}$$

Из уравнений же (7) заключаем, что относительное течение жидкости, соответствующее этому эллипсу, дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}(\cos\mu \operatorname{ch}\lambda - A_1 e^{-\lambda}\cos\mu), \\ y &= \frac{k}{w}(\sin\mu \operatorname{sh}\lambda + A_1 e^{-\lambda}\sin\mu). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Определим скорости относительного движения жидкости на поверхности нашего эллиптического судна. По формуле (2) пишем:

$$v = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\mu}\frac{d\mu}{ds} = -k\sin\mu\,\frac{d\mu}{ds}, \tag{13}$$

где s — длина дуги контура судна, отсчитываемая от A к C. По формулам (9) и (11)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\sqrt{\alpha^2\sin^2\mu + \beta^2\cos^2\mu}\,d\mu, \tag{14}$$

так что

$$v = \frac{k\sin\mu}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\mu + \beta^2\cos^2\mu}}. \tag{15}$$

Мы видим, что в точках A и C, соответствующих вершинам эллипса, скорость равна нулю. Наибольшая величина скорости получится в двух других вершинах эллипса B и D и будет:

$$v_{\max} = \frac{k}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} w.$$

Выведем теперь, согласно теории Ренкина, силу сопротивления, происходящую от течения жидкости около боковых обводов нашего судна. Ренкин замечает, что к поверхности судна прилегает вихревой слой жидкости, в котором жидкость течет со скоростями, отличными от скоростей, вычисляемых для невихревого движения. Такие скорости получаются только на внешней границе слоя; внутри же слоя скорости меньше и на стенках судна они могут быть

равны нулю. На основании опытов, определяющих потерю напора жидкости, текущей над неподвижной стенкой, Ренкин находит, что работа, потерянная на каждом элементе ds стенок, будет $fv^3\,ds$, где f — некоторый коэффициент, а v — скорость в верхней части упомянутого слоя. Понятно, что вся работа, поглощенная в вихревом слое, облегающем судно, разделенная на скорость судна, дает нам искомую силу сопротивления жидкости R. Если положим

$$\frac{v}{w} = q,$$

то найдем, на основании сказанного, формулу Ренкина:

$$R = fw^2 \int q^3\,ds, \tag{16}$$

где интеграция распространяется на весь контур судна. Заметим здесь, что, считая $fv^2\,ds$ за силу поверхностного трения, приложенную к стенке судна, мы были бы должны, как справедливо замечает Д. И. Менделеев [1]), составить сумму проекций этих сил на ось судна и получить под знаком интеграла q^2. Но такое вычисление было бы не согласно с воззрением Ренкина, по которому относительная скорость жидкости на поверхности судна совсем не есть v и может быть даже равна нулю.

Подставляем в формулу (16) значения q и ds, определенные из формул (14), (15):

$$R = -\frac{2f}{w}k^3\int_{\pi}^{0}\frac{\sin^3\mu\,d\mu}{\alpha^2\sin^2\mu+\beta^2\cos^2\mu} = \frac{4f}{w}k^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\mu\,d\mu}{\alpha^2\sin^2\mu+\beta^2\cos^2\mu}.$$

Вводим здесь новое переменное $\cos\mu = z$, что дает:

$$R = \frac{4f}{w}\frac{k^3}{\alpha^2}\int_0^1\frac{(1-z^2)\,dz}{1-e^2z^2},$$

где

$$e^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}.$$

---

[1]) Менделеев Д. И., О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании, стр. 88, Петербург, 1880.

где

$$\alpha = \frac{k}{w}(1 - A_1), \quad \beta = \frac{k}{w} A_1. \tag{11}$$

Из уравнений же (7) заключаем, что относительное течение жидкости, соответствующее этому эллипсу, дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}(\cos\mu \operatorname{ch}\lambda - A_1 e^{-\lambda}\cos\mu), \\ y &= \frac{k}{w}(\sin\mu \operatorname{sh}\lambda + A_1 e^{-\lambda}\sin\mu). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Определим скорости относительного движения жидкости на поверхности нашего эллиптического судна. По формуле (2) пишем:

$$v = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\mu}\frac{d\mu}{ds} = -k\sin\mu\,\frac{d\mu}{ds}, \tag{13}$$

где s — длина дуги контура судна, отсчитываемая от A к C. По формулам (9) и (11)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\sqrt{\alpha^2\sin^2\mu + \beta^2\cos^2\mu}\,d\mu, \tag{14}$$

так что

$$v = \frac{k\sin\mu}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\mu + \beta^2\cos^2\mu}}. \tag{15}$$

Мы видим, что в точках A и C, соответствующих вершинам эллипса, скорость равна нулю. Наибольшая величина скорости получится в двух других вершинах эллипса B и D и будет:

$$v_{\max} = \frac{k}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} w.$$

Выведем теперь, согласно теории Ренкина, силу сопротивления, происходящую от течения жидкости около боковых обводов нашего судна. Ренкин замечает, что к поверхности судна прилегает вихревой слой жидкости, в котором жидкость течет со скоростями, отличными от скоростей, вычисляемых для невихревого движения. Такие скорости получаются только на внешней границе слоя; внутри же слоя скорости меньше и на стенках судна они могут быть

равны нулю. На основании опытов, определяющих потерю напора жидкости, текущей над неподвижной стенкой, Ренкин находит, что работа, потерянная на каждом элементе ds стенок, будет $fv^3\,ds$, где f — некоторый коэффициент, а v — скорость в верхней части упомянутого слоя. Понятно, что вся работа, поглощенная в вихревом слое, облегающем судно, разделенная на скорость судна, дает нам искомую силу сопротивления жидкости R. Если положим

$$\frac{v}{w} = q,$$

то найдем, на основании сказанного, формулу Ренкина:

$$R = fw^2 \int q^3\,ds, \tag{16}$$

где интеграция распространяется на весь контур судна. Заметим здесь, что, считая $fv^2\,ds$ за силу поверхностного трения, приложенную к стенке судна, мы были бы должны, как справедливо замечает Д. И. Менделеев [1]), составить сумму проекций этих сил на ось судна и получить под знаком интеграла q^2. Но такое вычисление было бы не согласно с воззрением Ренкина, по которому относительная скорость жидкости на поверхности судна совсем не есть v и может быть даже равна нулю.

Подставляем в формулу (16) значения q и ds, определенные из формул (14), (15):

$$R = -\frac{2f}{w}k^3\int_{\pi}^{0}\frac{\sin^3\mu\,d\mu}{\alpha^2\sin^2\mu+\beta^2\cos^2\mu} = \frac{4f}{w}k^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\mu\,d\mu}{\alpha^2\sin^2\mu+\beta^2\cos^2\mu}.$$

Вводим здесь новое переменное $\cos\mu = z$, что дает:

$$R = \frac{4f}{w}\frac{k^3}{\alpha^2}\int_0^1\frac{(1-z^2)\,dz}{1-e^2z^2},$$

где

$$e^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}.$$

---

[1]) Менделеев Д. И., О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании, стр. 88, Петербург, 1880.

Совершив интегрирование, получаем:

$$R = \frac{4fk^3}{wa^2e^3}\left[e - \frac{1-e^2}{2}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right],$$

или, подставив вместо k его выражение через α и e:

$$R = \frac{4fw^2\alpha}{e^3}(1+\sqrt{1-e^2})^3\left[e - \frac{1-e^2}{2}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right]. \qquad (17)$$

Это есть искомая величина силы сопротивления. Для круглого контура, т. е. для $e=0$ она обращается в

$$R = \frac{64}{3} fw^2\alpha.$$

§ 3. Переходим теперь к остроносым формам судов, т. е. к тому случаю, при котором скорость жидкости в точках A и B не есть нуль. Это будет тогда, когда производная $\frac{dy}{dx}$, определенная из формул (8), обращается в нуль в точках A и B. Возьмем, например:

$$A_5 = A_7 = \ldots = 0,$$

так что формулы (8) обращаются в

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}[(1-A_1)\cos\mu - A_3\cos 3\mu], \\ y &= \frac{k}{w}(A_1\sin\mu + A_3\sin 3\mu). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Упомянутая производная будет:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A_1\cos\mu + 3A_3\cos 3\mu}{(1-A_1)\sin\mu - 3A_3\sin 3\mu}. \qquad (19)$$

Так как знаменатель этой дроби обращается в нуль при $\mu=\pi$ и $\mu=0$, то для выполнения нашего условия необходимо иметь:

$$A_1 = -3A_3. \qquad (20)$$

При этом условии дробь (19) получает в точках A и C неопределенный вид $\frac{0}{0}$; но, взяв отношения производных числителя и знаменателя по μ, убеждаемся, что она обращается в этих точках в нуль.

На основании условия (20) формулы (18) обращаются в

$$x = \frac{k}{w}\left[\cos\mu - A_3(\cos 3\mu - 3\cos\mu)\right],$$

$$y = \frac{k}{w} A_3(\sin 3\mu - 3\sin\mu).$$

Преобразуем эти выражения на основании известных формул тригонометрии:

$$\cos 3\mu = -3\cos\mu + 4\cos^3\mu,$$
$$\sin 3\mu = 3\sin\mu - 4\sin^3\mu.$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k}{w}\cos\mu\left(1 + \frac{3}{2}A - A\cos^2\mu\right), \\ y &= -\frac{k}{w}A\sin^3\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где положено:

$$4A_3 = +A.$$

Формулы (21) дают нам вид контура судна, который представлен на фигуре 2 [1]). Полагая $AC = 2\alpha$ и $DB = 2\beta$, найдем:

$$\alpha = \left(1 + \frac{A}{2}\right)\frac{k}{w}, \quad \beta = A\frac{k}{w}. \qquad (22)$$

Определим скорость относительного движения жидкости по контуру рассматриваемого судна. Для этого подставляем в формулу (13) на основании формул (21) величину:

$$ds = -\frac{k}{w}\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}A\right)^2 - 6A\cos^2\mu}\sin\mu\, d\mu. \qquad (23)$$

Это даст нам:

$$v = \frac{w}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}A\right)^2 - 6A\cos^2\mu}}. \qquad (24)$$

Отсюда следует, что скорости жидкости в точках A и C будут иметь наибольшую величину, даваемую формулой:

$$v = \frac{w}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}A\right)^2 - 6A}}$$

[1]) Мы будем рассматривать только тот случай, когда $A < \frac{2}{3}$.

Определим теперь для рассматриваемого контура силу сопротивления R. Внося величины, даваемые формулами (23) и (24), в формулу (16), находим:

$$R = -2fwk\int_{\pi}^{0}\frac{\sin\mu\,d\mu}{\left(1+\frac{3}{2}A\right)^2-6A\cos^2\mu} = 4fwk\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\mu\,d\mu}{\left(1+\frac{3}{2}A\right)^2-6A\cos^2\mu}.$$

Подставляем $\cos\mu = z$:

$$R = 4fwk\int_{0}^{1}\frac{dz}{\left(1+\frac{3}{2}A\right)^2-6Az^2} = \frac{2fwk}{\left(1+\frac{3}{2}A\right)\sqrt{6A}}\ln\frac{1+\frac{3}{2}A+\sqrt{6A}}{1+\frac{3}{2}A-\sqrt{6A}},$$

или, исключая k с помощью первой формулы (22):

$$R = \frac{8fw^2\alpha}{(2+A)(2+3A)\sqrt{6A}}\ln\frac{2+3A+2\sqrt{6A}}{2+3A-2\sqrt{6A}} =$$

$$= \frac{16fw^2\alpha}{(2+A)(2+3A)\sqrt{6A}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}A}}{1-\sqrt{\frac{3}{2}A}}.$$

При A, приближающемся к нулю:

$$\ln\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}A}}{1-\sqrt{\frac{3}{2}A}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}A}.$$

Поэтому бесконечно тонкому судну рассматриваемого вида соответствует сила сопротивления:

$$R = 4fw^2\alpha. \qquad (25)$$

Это заключение вполне согласно с опытами Фруда.

§ 4. Мы закончим нашу статью некоторыми общими замечаниями о формулах (8). Если бы был найден способ уравнения всякого данного контура с помощью некоторого параметра μ представлять в виде (8), то вопрос о течении бес-

предельного потока жидкости, обтекающего всякий заданный контур, был бы вполне решен.

Аналогичное рассуждение имеет место и в задаче о распределении электричества на бесконечно длинном цилиндрическом кондукторе. Называя через φ потенциальную функцию электрического отталкивания и через ψ — функцию, постоянную по направлению силовых линий, получаем для точек, лежащих вне контура нормального сечения цилиндра:

$$x + yi = F(\varphi + \psi i). \tag{26}$$

На самом контуре мы должны иметь для φ постоянное значение, которое, положим, есть нуль; в бесконечности же мы должны иметь:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{x^2 + y^2}{k^2},$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

где q — количество электричества на единице длины кондуктора.

Из этих формул следует, что в бесконечности:

$$\left.\begin{aligned} x &= k e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} \cos \frac{2\pi}{q} \psi, \\ y &= k e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} \sin \frac{2\pi}{q} \psi, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

а из формулы (26) видим, что во всех внешних точках относительно рассматриваемого контура должны быть удовлетворены дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}. \tag{28}$$

Мы удовлетворим всем этим условиям, положив:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\left(e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} \cos \frac{2\pi}{q} \psi + \sum A_m e^{-\frac{2\pi}{q} m\varphi} \cos \frac{2\pi}{q} m\psi\right), \\ y &= k\left(e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} \sin \frac{2\pi}{q} \psi - \sum A_m e^{-\frac{2\pi}{q} m\varphi} \sin \frac{2\pi}{q} m\psi\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

При этом контур цилиндра будет выражен уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\left(\cos\frac{2\pi}{q}\psi + \sum A_m \cos\frac{2\pi}{q} m\psi\right), \\ y &= k\left(\sin\frac{2\pi}{q}\psi - \sum A_m \sin\frac{2\pi}{q} m\psi\right), \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

в которых в случае симметрии контура относительно осей координат m может получать только положительные целые нечетные значения.

Возьмем, например, эллиптический контур:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

для которого формулы (30) обращаются в

$$x = k(1 + A_1)\cos\frac{2\pi}{q} m\psi,$$

$$y = k(1 - A_1)\sin\frac{2\pi}{q} m\psi,$$

где

$$\alpha = k(1 + A_1), \quad \beta = k(1 - A_1),$$

и, следовательно,

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4k^2 A_1.$$

Все же остальные линии равного потенциала найдутся из формул (29), которые для нашего случая будут:

$$x = k\left(e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} + A_1 e^{-\frac{2\pi\varphi}{q}}\right)\cos\frac{2\pi\psi}{q},$$

$$y = k\left(e^{\frac{2\pi}{q}\varphi} - A_1 e^{-\frac{2\pi\varphi}{q}}\right)\sin\frac{2\pi\psi}{q}.$$

Легко усмотреть, что эти линии будут тоже эллипсы:

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1,$$

которые софокусны данному контуру, потому что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 4k^2 A_1 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Из сказанного видно, что решение основной задачи теории цилиндрического потенциала заключается в умении выразить уравнение всякого данного контура с помощью некоторого параметра $\frac{2\pi\psi}{q}$ в виде формул (30).

Мне приходилось беседовать об этом интересном вопросе с П. А. Некрасовым, и он указал мне на некоторые соображения, которые могли бы лечь в основание решения упомянутой задачи. Я буду очень рад, если печатание моей статьи побудит его подробнее развить эти соображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ КАКОМ-НИБУДЬ УСЛОВИИ, ДАННОМ НА ЛИНИИ ТОКА [1]).

§ 1. В нашей работе, доложенной на VIII съезде русских естествоиспытателей и врачей [2]), мы показали, каким образом понятие об образующих и направляющих сетях может лечь в основание решения задач на определение течений жидкости при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока [3]). В этой заметке мы имеем в виду распространить упомянутый метод исследования на те случаи, в которых на граничной линии тока должна быть удовлетворена какая-нибудь зависимость между скоростью v и углом θ ее наклонения к оси Ox.

§ 2. Во всех исследованиях о свободных струях предполагается, что на жидкость не действуют никакие силы; те-

---

[1]) Впервые напечатано в журнале Русского физико-химического общества, т. XXIII, 1891.

[2]) «Видоизменение метода Кирхгофа для определения течения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, даиной на неизвестной линии тока». Математический сборник, т. XV, 1890 (стр. 489 настоящего тома).

[3]) Почти одновременно с нашим докладом был сделан в Лондонском королевском обществе доклад сочинения Митчелла (Michell, On the theory of free stream lines, Philosophical transactions of the Royal Society of London, т. 181, 1890), в котором автор соединяет метод Кирхгофа с конформными преобразованиями Шварца и Кристофеля и решает, таким образом, некоторые из решенных нами задач. Просмотрев сочинение Митчелла, мы остаемся при мнении, что способ образующих и направляющих сетей является самым удобным для решения рассматриваемых задач.

перь же мы будем рассматривать жидкость под действием тяжести. Пусть направление оси Ox совпадает с направлением силы тяжести. Скорость жидкости на контуре струи выразится формулой:

$$v^2 = 2gx + \text{const.}, \tag{1}$$

где g — напряжение тяжести. Берем дифференциал от обеих частей этой формулы, переходя по контуру струи в направлении течения жидкости на элемент дуги ds. Получим:

$$v\,dv = g\,dx = g\,ds\cos\theta = \frac{g\cos\theta\,d\varphi}{v},$$

где φ — потенциал скоростей. Из этой формулы следует, что

$$v^3 = 3g\int\cos\theta\,d\varphi,$$

или

$$\vartheta = \ln\left(\frac{w}{v}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3g}{w^3}\int\cos\theta\,d\varphi\right), \tag{2}$$

где w есть некоторая постоянная скорость.

Назовем через ψ количество протекающей жидкости и рассмотрим две мнимые величины $\varphi + \psi i$ и $\vartheta + \theta i$, по которым составляются образующая и направляющая сети [1]). Полагаем, что обе эти мнимые величины суть функции переменного $u = \xi + \eta i$, представляющего точки некоторой полуплоскости (ξ придаем всякие действительные значения, а η — только положительные), и пишем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi + \psi i &= \chi(u),\\ \vartheta + \theta i &= \phi(u) + i\phi_1(u).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При этом функцию $\chi(u)$ выбираем так, чтобы все ее точки бесконечностей лежали на оси $O\xi$ или в бесконечности и чтобы вся ось $O\xi$ представлялась линиями $\psi = \text{const}$. Функции $\phi(u)$ и $\phi_1(u)$ выбираем так, чтобы они имели только логарифмические точки бесконечности, лежащие на оси $O\xi$ или в бесконечности, и чтобы все точки оси $O\xi$ удовлетворяли или условию $\theta = \text{const.}$, или условию (2).

[1]) Видоизменение метода Кирхгофа, § 3.

Первое условие будет удовлетворено на тех частях оси $O\xi$, на которых функция $\phi(u)$ действительна, а функция $\phi_1(u)$ есть чисто мнимая величина. Положим, что на остальных отрезках оси $O\xi$ функции $\phi(u)$ и $\phi_1(u)$ будут действительны и постараемся выбрать их так, чтобы удовлетворить второму условию.

Сделаем подстановку:

$$\phi_1(u) = \arccos[f(u)]$$

и определим $\phi(u)$ с помощью $f(u)$ и $\chi(u)$ по уравнению (2). Получим:

$$\phi(u) = -\frac{1}{3}\ln\left[\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)\,du\right],$$

так что направляющая сеть искомого течения будет дана формулой:

$$\vartheta + \theta i = -\frac{1}{3}\ln\left[\frac{3g}{w^3}\int f(u)\chi'(u)\,du\right] + i\arccos[(f(u)]. \quad (4)$$

Если бы на некоторых отрезках оси $O\xi$ функция $\phi_1(u)$ была бы действительна, а функция $\phi(u)$ состояла из действительной части и мнимой части $\pm\pi i$, то и тогда уравнение (2) было бы удовлетворено, потому что, присоединяя $\pm\pi$ к углу θ в формуле (2), мы этим сделаем величину, стоящую под знаком логарифма, из отрицательной положительной. Весь успех решения будет теперь зависеть от удачного выбора функций $\chi(u)$ и $f(u)$.

§ 3. Положим, что

$$f(u) = \frac{u}{c}, \quad \chi(u) = \frac{w^3}{2g}\frac{u^2}{c^2}. \quad (5)$$

По формуле (4) найдем:

$$\vartheta + \theta i = -\ln\left(\frac{u}{c}\right) + i\arccos\left(\frac{u}{c}\right). \quad (6)$$

Из второй формулы (5) видим, что образующая сеть в сделанном предположении состоит из равносторонних гипербол, данных уравнениями:

$$\varphi = \frac{w^3}{2gc^2}(\xi^2 - \eta^2), \quad \psi = \frac{w^3}{gc^2}\xi\eta. \quad (7)$$

Линия тока $\psi = 0$ представляется в этой сети верхней половиной оси ординат и правой и левой половинами оси абсцисс. Передвижения по гиперболам $\psi = \text{const.}$ в направлении убывающего η соответствуют изменению φ от $-\infty$ до $+\infty$.

Параметры ϑ и θ направляющей сети представятся у нас разностями параметров некоторой эллиптической и полярной сети, так как, положив

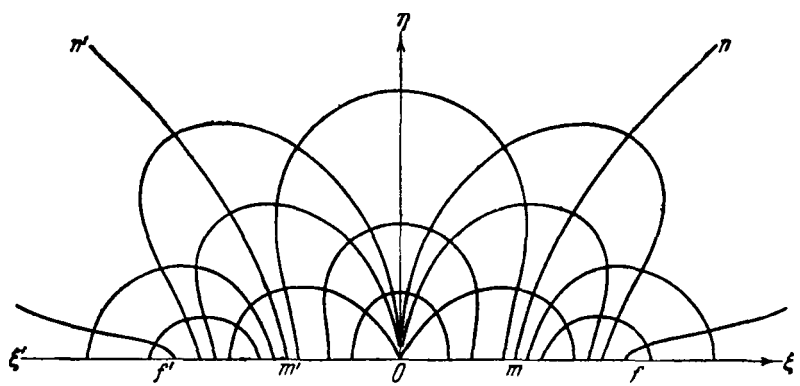
$$\xi = ce^{\vartheta_1}\cos\theta_1, \qquad \eta = ce^{\vartheta_1}\sin\theta_1, \tag{8}$$

$$\xi = c\cdot\cos\theta_2\,\mathrm{ch}\,\vartheta_2, \qquad \eta = c\cdot\sin\theta_2\,\mathrm{sh}\,\vartheta_2, \tag{9}$$

найдем на основании формулы (6), что

$$\theta = -\theta_1 + \theta_2, \quad \vartheta = -\vartheta_1 + \vartheta_2. \tag{10}$$

Сеть, выраженная этими формулами, представлена на фигуре 1. Она имеет полюс O в начале координат и два



Фиг. 1.

фокуса f и f'*) на расстояниях c от этого начала. Все линии $\theta = \text{const.}$ выходят из полюса O и пересекают еще раз ось абсцисс под косым углом. При постоянном, равном нулю, линия этого семейства удаляется в бесконечность по оси $O\eta$ и, разделившись в бесконечности на две ветви, возвращается к фокусам f и f' по отрезкам оси абсцисс ξf и $\xi' f'$.

*) Мы называем так точки, в которых линия тока переходит со стенки сосуда в контур струи.

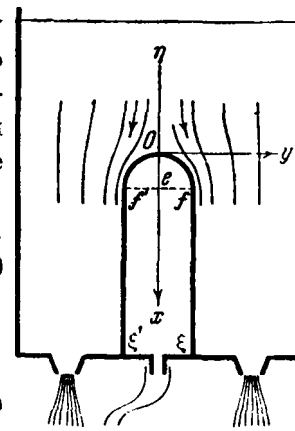
При изменении постоянного от 0 до $\frac{\pi}{2}$ мы получим линии $\theta = \text{const.}$, идущие направо и пересекающие ось абсцисс на отрезке Of, а при изменении его от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ — линии, идущие налево и пересекающие ось абсцисс на отрезке Of'.

Семейство линий $\vartheta = \text{const.}$ при $\text{const.} = \ln 2$ дает две бесконечные линии mn и $m'n'$, разделяющиеся в бесконечности на две части и охватывающие всю рассматриваемую область. При изменении постоянного от $\ln 2$ до бесконечности линии $\vartheta = \text{const.}$ охватывают полюс O и уменьшаются до совпадения с ним; при изменении же постоянного от $\ln 2$ до 0 линии $\vartheta = \text{const.}$ пересекают ось абсцисс вправо и влево от фокуса f и вправо и влево от фокуса f' и приближаются к линиям, прикасающимся к оси абсцисс в точках f и f' и лежащим вне рассматриваемой области.

Наложим теперь на построенную направляющую сеть вышеупомянутую гиперболическую образующую сеть так, чтобы оси координат совпали. Так как в образующей сети ψ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, то мы имеем дело с бесконечным потоком жидкости. При этом вследствие того, что во всех точках бесконечности $\vartheta = \ln 2$ и $\theta = 0$, поток будет течь по направлению оси Ox со скоростью $\frac{w}{2}$. Пойдем на наших сетях по линии тока $\psi = 0$, изменяя φ от $-\infty$ до $+\infty$. На оси $O\eta$ будем иметь: $\theta = 0$, и ϑ изменяется от $\ln 2$ до бесконечности. В точке O угол θ сразу изменяется из 0 в $\frac{\pi}{2}$ или в $-\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, совершаем ли мы переход на отрезок оси абсцисс Of или Of', а $\vartheta = \infty$ (т. е. скорость $v = 0$). На отрезках Of и Of' удовлетворяется условие (2), причем угол θ изменяется от $\pm\frac{\pi}{2}$ до 0, и ϑ изменяется от ∞ до 0. На $f\xi$ и $f'\xi'$ угол $\theta = 0$, и ϑ изменяется от 0 до $\ln 2$.

Это соответствует в действительном течении потока жидкости (фиг. 2) линии тока ηO, которая в критической точке O разделяется на две половины и образует контуры струй жидкости Of и Of', переходящие в точках f и f' на неподвижные стенки, параллельные оси Ox. Такой случай мог

бы иметь место, если бы мы в нисходящем потоке тяжелой жидкости устроили вертикальный канал $\xi ff'\xi'$ и соединили его с разервуаром воздуха под некоторым определенным давлением. Мы будем иметь результаты, близкие к рассматриваемому идеальному случаю беспредельного потока, если устроим прибор, изображенный на фигуре 2, причем размеры сосуда возьмем значительно больше размеров канала.



Фиг. 2.

Определим уравнение контура Of. На основании формул (7), (8), (9), (10) пишем для отрезка Of:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{w^3}{2gc^2}\,\xi^2, \\ \vartheta &= \ln\frac{c}{\xi}\ ; \\ \cos\theta &= \frac{\xi}{c}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

С другой стороны, легко усмотреть, что для всякой линии тока имеют место дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds\cos\theta = \frac{d\varphi}{v}\cos\theta = \frac{e^{\vartheta}}{w}\cos\theta\ d\varphi, \\ dy &= \frac{e^{\vartheta}}{w}\sin\theta\, d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Выражая с помощью формулы (11) φ и ϑ через θ и подставляя в формулу (12), получим:

$$dx = -\frac{w^2}{g}\cos\theta\sin\theta\, d\theta,$$

$$dy = -\frac{w^2}{g}\sin^2\theta\, d\theta.$$

Интегрируя и определяя произвольные постоянные под условием $x=0$, $y=0$ при $\theta=\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{w^2}{2g}\cos^2\theta, \\ y &= \frac{w^2}{2g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эти формулы показывают, что на фигуре 2 отрезки

$$cO = \frac{w^2}{2g}, \quad cf = \frac{w^2}{2g}\frac{\pi}{2},$$

и что уравнение контура Of есть:

$$y = \frac{w^2}{2g}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2gx}{w^2}} + \sqrt{\frac{2gx}{w^2}}\sqrt{1-\frac{2gx}{w^2}}\right).$$

§ 4. Перейдем теперь к предположению, что на контуре струи давление жидкости и давление воздуха взаимно уравновешиваются нормальной силой, происходящей от капиллярного натяжения поверхности жидкости. Если назовем через p давление внутри жидкости и через p_1 давление воздуха, прилегающего к контуру струи, то будем иметь:

$$p = \text{const.} - \frac{\rho v^2}{2}, \quad p_1 = p + \frac{\mu}{R}, \tag{14}$$

где ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент волосности, а R — радиус кривизны контура струи, считаемый положительным при направлении от жидкой массы. Из двух написанных формул получаем:

$$\frac{1}{R} = a + bv^2, \tag{15}$$

где

$$a = \frac{p_1 - \text{const.}}{\mu}, \quad b = \frac{\rho}{2\mu}. \tag{16}$$

Но

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\theta}{ds} = \pm\frac{v\,d\theta}{d\varphi},$$

поэтому

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm\left(\frac{a}{v} + bv\right),$$

или

$$\theta = \pm\int\left(\frac{a}{v} + bv\right)d\varphi. \tag{17}$$

В этой формуле при положительном R надо брать знак (+), если по направлению течения жидкости угол θ возрастает, и знак (—), если в этом направлении угол θ убывает; при

отрицательном R надо поступать наоборот. Приняв, что в рассматриваемых задачах образующая и направляющая сети выражаются теми же формулами (3), как в вышерассмотренном случае, наложим на функции $\varphi(u)$ и $\varphi_1(u)$ прежние условия; только потребуем, чтобы на отрезке оси $O\xi$, соответствующем действительным значениям этих функций, было удовлетворено не уравнение (2), а уравнение (17). Легко увидеть, что для этого надо положить

$$\varphi_1(u) = \pm \int \left(\frac{a}{w} e^{\varphi(u)} + bwe^{-\varphi(u)}\right) \chi'(u)\, du. \qquad (18)$$

Вследствие этого направляющая сеть искомого течения будет дана формулой

$$\vartheta + 0i = \varphi(u) \pm i \int \left(\frac{a}{w} e^{\varphi(u)} + bwe^{-\varphi(u)}\right) \chi'(u)\, du. \qquad (19)$$

§ 5. Положим, что

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

и напишем по формуле (18), принимая R положительным и ϑ возрастающим, что

$$\varphi_1(u) = -\frac{bw}{c} \int \frac{u^2 - \alpha^2}{\sqrt{c^2 - u^2}} \chi'(u)\, du,$$

где

$$\alpha^2 = c^2\left(1 + \frac{a}{bw^2}\right). \qquad (20)$$

Потом возьмем для $\chi'(u)$ такое значение:

$$\chi'(u) = \frac{c}{bw\sqrt{u^2 - \alpha^2}},$$

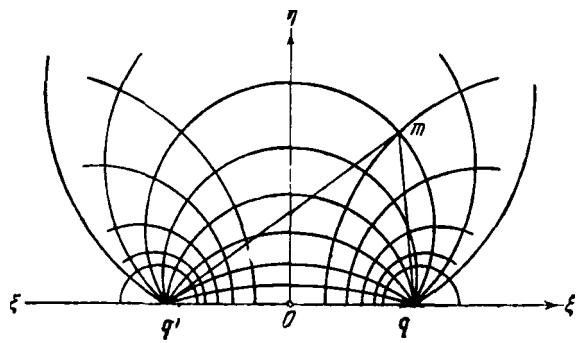
откуда следует, что

$$\chi(u) = \frac{c}{2ba w} \ln \frac{u - \alpha}{u + \alpha}. \qquad (21)$$

Направляющая сеть рассматриваемой задачи будет при сделанных положениях дана формулой (19):

$$\vartheta + 0i = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + i \arccos\left(\frac{u}{c}\right). \qquad (22)$$

Построим теперь найденные образующую и направляющую сети. Из формулы (21) усматриваем, что образующая сеть представляется системой взаимно ортогональных окружностей, из которых одни (фиг. 3) проходят через полюсы q и q', лежащие на оси $O\xi$ на расстояниях a от начала координат, и имеют центр на оси $O\eta$, другие же имеют центр на оси $O\xi$, а точки q и q' относительно них взаимно полярны. Для какой-нибудь точки m нашей полуплоскости параметр ψ измеряется произведением величины $\frac{c}{2ba\omega}$ на угол qmq', а ве-



Фиг. 3.

личина параметра φ измеряется произведением этой величины на логарифм отношения радиусов mq и mq'. При изменении ψ от 0 до $\frac{c\pi}{2ba\omega}$ линии $\psi = \text{const.}$ изменяются от отрезков оси абсцисс $q\xi$ и $q'\xi'$ до отрезка оси абсцисс qq'; при изменении же φ от $-\infty$ до $+\infty$ линии $\varphi = \text{const.}$ изменяются от бесконечно малого круга, охватывающего полюс q, до бесконечно малого круга, охватывающего полюс q'.

Параметры направляющей сети, данной формулой (22) представляют нам сумму параметров эллиптической сети и сети

$$\vartheta_1 + \theta_1 i = -\frac{1}{2}\ln\frac{u^2-c^2}{c^2} + \frac{1}{2}\pi i.$$

Эта последняя сеть дана на фигуре 19 нашего сочинения «Видоизменения метода Кирхгофа...» и состоит из ова-

лов Кассини и гипербол, проходящих через полюсы на расстояниях c от начала координат. Мы получаем, таким образом:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2, \tag{23}$$

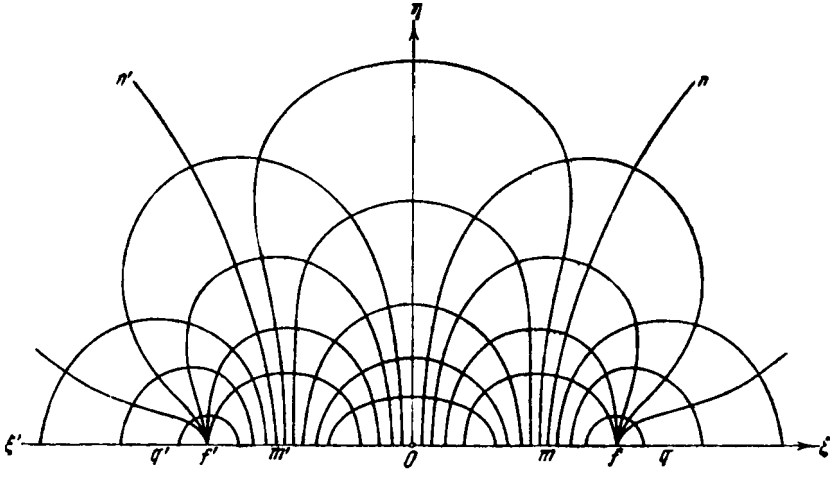
где θ_2 и ϑ_2 определяются по формулам (9), а θ_1 и ϑ_1 — по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi - c} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi + c}\right), \\ \vartheta_1 &= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{[(\xi - c)^2 + \eta^2]\,[(\xi + c)^2 + \eta^2]}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Результат сложения дает нам сеть, представленную на фигуре 4. Точки f и f', отстоящие от начала координат на расстоянии c, служат для этой сети полюсами и фокусами. Линии $\theta = \text{const}$. выходят из полюса f или f' и пересекают еще раз ось абсцисс на отрезке ff' под косым углом. При изменении постоянного от 0 до $\frac{\pi}{2}$ эти линии выходят из фокуса f и изменяются от бесконечно малой линии до линии, идущей по отрезку оси абсцисс $f\xi$ в бесконечность и возвращающейся по оси ординат ηO; при изменении же постоянного от $\frac{\pi}{2}$ до π мы получаем линии, выходящие от полюса f' и изменяющиеся от линии, идущей по отрезку $f'\xi'$ оси абсцисс в бесконечность и возвращающейся по оси ординат $O\eta$ до некоторой бесконечно малой линии. Линии семейства $\vartheta = \text{const}$. при $\text{const.} = \ln 2$ дают две бесконечные линии mn и $m'n'$, разделяющиеся в бесконечности на две части и охватывающие всю рассматриваемую область. При изменении постоянного от $\ln 2$ до 0 линии рассматриваемого семейства, будучи заключены между mn и $m'n'$, изменяются до линии, прикасающейся к оси абсцисс в точке O и лежащей вне рассматриваемой области; при изменении же постоянного от $\ln 2$ до бесконечности эти линии охватывают полюсы f и f' и убывают до бесконечно малых размеров. Из сказанного следует, что во всех точках бесконечности

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \ln 2.$$

Предположим теперь, что a есть величина положительная, т. е. $a > c$ (по формуле (20)), и наложим образующую сеть (фиг. 3) на направляющую сеть (фиг. 4) так, чтобы оси координат совпали. Идя по линии $\psi = 0$ в направлении



Фиг. 4.

возрастающего φ, мы будем иметь: на отрезке $q\xi$ угол ϑ равен $\frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от величины

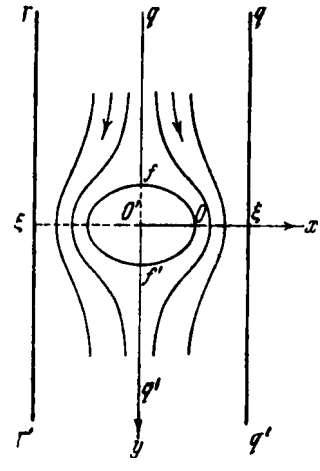
$$\vartheta_0 = \ln\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right)$$

до $\ln 2$; на отрезке $\xi' q'$ угол ϑ равен $\frac{\pi}{2}$, а ϑ изменяется от $\ln 2$ до ϑ_0. Это соответствует (фиг. 5) в действительном течении жидкости прямой линии тока $q\xi q'$, идущей параллельно оси $O'y$. Пойдем теперь по линии

$$\psi = \frac{c\pi}{2ba\omega} \tag{25}$$

в направлении возрастающего φ. Будем иметь на отрезке оси абсцисс qf: угол $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от ϑ_0 до ∞; в точке f угол ϑ сразу изменяется в нуль, и $\vartheta = \infty$; на отрезке оси абсцисс ff' удовлетворено условие (17), угол ϑ

изменяется от 0 до π, а ϑ от бесконечности убывает до 0 (в точке O) и потом опять возрастает до бесконечности; в точке f' угол θ сразу изменяется на $\frac{\pi}{2}$, и $\vartheta = \infty$; наконец, на отрезке $f'q'$ угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, и ϑ изменяется от бесконечности до ϑ_0. Это соответствует в действительном течении жидкости прямой линии тока qf, контуру струи fOf, на котором действует волосное натяжение, и прямой линии тока $f'q'$. Рассматриваемое нами течение жидкости будет заключено между двумя найденными контурами [1]). При этом наше предположение о том, что R положительно и θ возрастает, будет удовлетворено. Если присоединим к найденному течению симметричное течение с другой стороны оси $O'y$, то получим решение задачи о форме воздушного пузыря, помещенного внутри жидкости, текущей в канале $qq'r'r$; если же прибавим ко всей системе скорость



Фиг. 5.

$$v_0 = w : \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right) \qquad (26)$$

в направлении, противоположном оси $O'y$, то получим решение задачи о движении воздушного пузыря внутри жидкости, покоящейся в канале.

Составим уравнение контура fOf'. По формулам (23), (9), (24) и (21) имеем на отрезке Of:

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \theta_2, \quad \xi = c \cdot \cos\theta, \quad \vartheta = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\xi^2}{c^2}\right) = -\ln\sin\theta, \\ &\varphi = \frac{c}{2baw}\ln\frac{\alpha - \xi}{\alpha + \xi} = \frac{c}{2baw}\ln\frac{\alpha - c\cdot\cos\theta}{\alpha + c\cdot\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

[1]) Видоизменение метода Кирхгофа, § 2. См. о направлении, в котором ψ возрастает.

Подставляем величины, определенные из этих формул, в уравнение (12):

$$dx = \frac{c^2}{bw^2}\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta},$$

$$dy = \frac{c^2}{bw^2}\,\frac{\sin\theta\,d\theta}{\alpha^2 - c^2\cos^2\theta}.$$

Интегрируем и определяем произвольные постоянные под условием, что при $\theta = 0$ имеем $x = 0$, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем $y = 0$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{bw^2}\,\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{c\cdot\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}, \\ y &= \frac{1}{bw^2}\,\frac{c}{2\alpha}\ln\frac{\alpha - c\cdot\cos\theta}{\alpha + c\cdot\cos\theta}, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

где для получения точек контура $f0f'$ надо приписывать θ значения от 0 до π. Мы видим, что полуоси пузыря будут иметь длину:

$$OO' = \frac{1}{bw^2}\,\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}},$$

$$O'f' = \frac{1}{bw^2}\,\frac{c}{2\alpha}\ln\frac{\alpha + c}{\alpha - c}.$$

Легко увидеть, что $OO' > O'f'$. Это следует из очевидного неравенства:

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - c^2)(\alpha^2 - x^2)}} > \int_0^c \frac{dx}{\alpha^2 - x^2},$$

которое по выполнении интеграции дает:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\arcsin\frac{c}{\alpha} > \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{\alpha + c}{\alpha - c}.$$

Что касается ширины канала, то она найдется из формул (25) и (26) через разделение количества протекающей жидкости на скорость в бесконечно удаленных частях канала:

$$\xi = \frac{2\psi}{v_0} = \frac{\pi}{bw^2}\,\frac{c}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right). \qquad (29)$$

Задавшись отношением $\frac{c}{\alpha}$ и величиной w, мы определим по формулам (29) и (26) ширину канала и скорость v_0, а по формулам (28) найдем вид воздушного пузыря.

§ 6. Мы ограничиваемся в этой заметке двумя приведенными примерами, но думаем, что формулы (4) и (19) при надлежащем выборе входящих в них произвольных функций приведут еще к решению многих других интересных задач о движении жидкости под действием силы тяжести и под влиянием волосных натяжений на свободном контуре струи

К ВОПРОСУ О РАЗРЕЗАНИИ ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ[1])

§ 1. Рядом с доказательством невозможности образования в жидкости без трения новых вихрей высказывается обыкновенно положение о невозможности разделения вихревого шнура на части — о невозможности его разрезания. Это последнее положение, насколько мне известно, не было обстоятельно теоретически исследовано и опирается более на опыты Томсона с дымными вихревыми кольцами, которые уклоняются от приближаемого к ним ножа.

Но следует заметить, что при таких опытах все-таки является возможность получить в продолжение некоторого времени вихревое кольцо разрезанным на две половины. Стоит только пустить его так, чтобы острие ножа направлялось по диаметру кольца; тогда, набежав на нож, кольцо разделится на два полукольца, опирающиеся своими концами на бока ножа. Эти полукольца, проскользнув по ножу, воссоединятся опять в вихревое кольцо (такой опыт мы много раз демонстрировали).

Резкое уклонение вихревого кольца от подносимого ножа собственно замечается в том случае, когда мы желаем разрезать кольцо, поднося нож сбоку.

Было бы весьма интересно исследовать этот вопрос теоретически, т. е. решить задачу о движении вихревого кольца вблизи острия клина, погруженного в жидкую массу,

---

[1]) Сообщено 20.I 1894 на IX съезде русских естествоиспытателей и врачей и впервые напечатано в Математическом сборнике, т. XVII, 1893.

но задача эта очень трудная. Ввиду трудности задачи в трех измерениях мы предлагаем здесь решение аналогичной задачи в двух измерениях, которую ставим так: исследовать движение прямолинейного вихревого шнура вблизи острия погруженного в жидкость клина, причем острие клина направлено параллельно оси вихревого шнура.

§ 2. Выведем сначала некоторые общие формулы о движении центра вихревой площадки (нормального сечения шнура). Предположим, что течение несжимаемой жидкости в двух измерениях характеризуется формулами:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где u и v — проекции скорости жидкости на некоторые прямоугольные оси координат Oxy, а

$$\psi = \text{const.}$$

дает уравнения линий тока. Во всех точках жидкости вне вихревых площадок функция ψ удовлетворяет условию

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

а на вихревых площадках дает:

$$\Delta_2 \psi = 2\omega,$$

где ω — угловая скорость частицы жидкости, считаемая положительной при вращении по солнцу.

Выделим мысленно одну вихревую площадку и разобьем функцию ψ на две части, из которых часть ψ_1 зависит от граничных условий и от влияния всех вихревых площадок, кроме первой, а остающаяся часть зависит только от влияния первой вихревой площадки. Тогда

$$\psi = \psi_1 + \frac{1}{\pi} \int\int \omega \ln R \, d\sigma, \tag{2}$$

где R есть расстояние рассматриваемой точки жидкости от элемента площади $d\sigma$ выделенной площадки, а двойная интеграция распространяется на всю площадь этой площадки.

Составим, как это делает Ламб [1]), выражения компонентов скорости центра тяжести рассматриваемой площадки в предположении, что по ней распределена материя с плотностью ω. Называя через x_1, y_1 координаты упомянутого центра тяжести, найдем по формулам (1) и (2):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\omega\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\int\int\int \frac{\omega\omega'}{R^2}(y-y')\,d\sigma\,d\sigma'\right\},$$

$$-\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\omega\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\int\int\int \frac{\omega\omega'}{R^2}(x-x')\,d\sigma\,d\sigma'\right\},$$

где

$$k = \int\int \omega\,d\sigma$$

представляет напряжение рассматриваемого вихревого шнура, или половину циркуляции скорости по охватывающему его контуру. Четырехкратный интеграл в первой формуле берется два раза по площади рассматриваемой площадки, и так как в нем всякому элементу

$$\frac{\omega\omega'\,d\sigma\,d\sigma'}{R^2}(y-y')$$

соответствует другой элемент

$$\frac{\omega\omega'\,d\sigma\,d\sigma'}{R^2}(y'-y)$$

с обратным знаком, то весь этот четырехкратный интеграл обращается в нуль. Также обращается в нуль и четырехкратный интеграл второй формулы. Мы получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{k}\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\omega\,d\sigma,\\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{k}\int\int \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\omega\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Переходим к предположению, что площадь нормального сечения вихревого шнура исчезающе мала, а напряжение вихря k конечно. Так как функция ψ_1 зависит только от

[1]) Lamb, A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids, § 138.

граничных условий и влияния вихревых площадок, кроме рассматриваемой, то она вместе со своими производными остается непрерывной и конечной вблизи первой площадки и при вступлении внутрь ее. Мы можем в формуле (3) вынести производные ψ_1 за знаки интегралов и приписать им значения, соответствующие точке, лежащей вне площадки на расстоянии, весьма близком от ее центра. Получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \tag{4}$$

Определим ψ_1 по формуле (2), предполагая, что размеры площадки сравнительно с расстоянием от центра площадки точки, для которой определяется ψ_1, суть малые величины высшего порядка. В этом предположении R можно считать за расстояние центра тяжести площадки от рассматриваемой точки и вынести $\ln R$ в формуле (2) за знак интеграла:

$$\psi_1 = \psi - \frac{k}{\pi} \ln R. \tag{5}$$

Подставляя в уравнения (4), найдем для скоростей центра тяжести площадки, который мы будем звать *центром вихря*, формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi - \frac{k}{\pi} \ln R\right), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi - \frac{k}{\pi} \ln R\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь надо во вторых частях сначала взять производные по y и x, а потом положить $x = x_1$, $y = y_1$. Предположим теперь, что рассматриваемое течение жидкости в двух измерениях, содержащее бесконечно малые вихревые площадки, из которых одна имеет координаты x_1, y_1, характеризуется функцией мнимого переменного $z = x + yi$, которую мы разбиваем на действительную и мнимую части:

$$F(x + yi) = \varphi + \psi i.$$

Умножаем второе уравнение (6) на i и вычитаем из первого:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = \int^{z=z_1} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i - \frac{k}{\pi}\left(\frac{\partial \ln R}{\partial y} + \frac{\partial \ln R}{\partial x} i\right)\right\}, \tag{7}$$

где подстановка показывает, что после взятия производных надо везде z заменить на z_1, т. е. x и y на x_1 и y_1.

На основании известных свойств действительной и мнимой частей функции мнимого переменного имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \ln R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

Вследствие этого уравнение (7) преобразуется в следующую основную формулу для определения движения центра вихря:

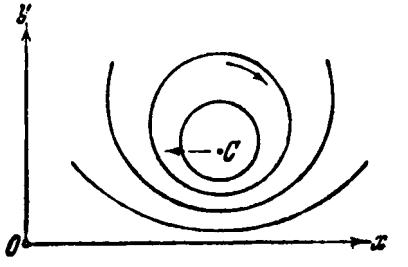
$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = \Big|^{z=z_1} \frac{d}{dz}\left(F - \frac{ik}{\pi} \ln (z-z_1)\right). \tag{8}$$

§ 3. Приложим формулу (8) к двум простым примерам, которые лягут в основание разрешения интересующей нас задачи. Пусть дано:

$$F = \frac{ki}{\pi} \ln \frac{z-z_1}{z-z_2}, \tag{9}$$

где

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_1 - y_1 i.$$



Фиг. 1.

Точки (z_1) и (z_2) являются центрами двух вихревых площадок, имеющих напряжения вихря, равные k и $-k$. Ось Ox есть одна из линий тока, так что она может быть принята за неподвижную границу, и все течение может быть рассматриваемо на полуплоскости. Линии токов этого течения будут (фиг. 1) окружности, охватывающие центр вихря C (точку z_1) и приближающиеся, расширяясь, к прямой Ox. Скорость во всякой точке течения на основании уравнения (1) находится по формуле

$$u - vi = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i,$$

или

$$u - vi = \frac{dF}{dz}. \tag{10}$$

Для нашего случая эта формула дает:

$$u - vi = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right)$$

и показывает, что при $z = \infty$ скорость равна нулю; все точки на конечном расстоянии от C имеют скорости, неравные нулю.

Подставляя значение F из формулы (9) в формулу (8), находим для движения центра вихря уравнение

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = -\frac{k}{2\pi y_1},$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, центр вихря C будет двигаться параллельно оси Ox с постоянной скоростью, которая направлена от x к O, если вращение вихря совершается по солнцу.

Для второго примера возьмем:

$$F = wz + \frac{ki}{\pi} \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{12}$$

Течение жидкости, представляемое этой функцией, имеет те же вихревые центры z_1 и z_2, как и предыдущее течение, и тоже расположено симметрично относительно оси Ox, так что эта ось может быть принята за неподвижную границу, и все течение может быть рассматриваемо на полуплоскости.

Скорость в бесконечности направлена параллельно оси Ox и равна w, потому что на основании формул (10) и (12)

$$u - vi = w + \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2}\right), \tag{13}$$

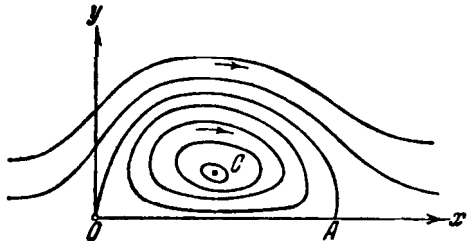
где вторая часть обращается в w при $z = \infty$. В рассматриваемом течении существуют две критические точки с нулевой скоростью. Предполагая, что одна из этих точек лежит в начале координат, мы должны обратить в нуль вторую часть формулы (13) положением $z = 0$. Это дает:

$$w = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2ky_1}{\pi(x_1^2 + y_1^2)}. \tag{14}$$

На основании равенства (14) формула (13) может быть написана в виде:

$$u - vi = \frac{kzi}{\pi}\left[\frac{1}{z_1(z-z_1)} - \frac{1}{z_2(z-z_2)}\right], \tag{15}$$

где вторая часть, кроме $z = 0$, обращается еще в нуль при при $z = 2x_1$. Таким образом, другая критическая точка нулевой скорости будет лежать на оси Ox на расстоянии $2x_1$ от начала координат.



Фиг. 2.

Линии токов рассматриваемого течения расположатся, как представлено на фигуре 2, на которой C есть центр вихря, а точки O и A — критические точки нулевой скорости. Движение центра вихря C на основании формул (8) и (12) найдется из уравнения:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = w - \frac{k}{2\pi y_1},$$

которое дает:

$$\frac{dx_1}{dt} = w - \frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, и здесь центр вихря будет двигаться параллельно оси Ox с постоянной скоростью. Эта скорость имеет направление от O к x, если

$$w > \frac{k}{2\pi y_1},$$

и наоборот.

Вместе с центром вихря C перемещаются по оси Ox с той же скоростью и критические точки O и A. Расстояние $2x_1$ между этими точками в частном случае при

$$w = \frac{2k}{\pi y_1}$$

обращается в нуль [1]), причем в такой слившейся критической точке линии токов пересекают ось Ox уже не под прямыми углами, как на фигуре 2, а под углами в 45°.

§ 4. Решение поставленной нами задачи получается с помощью конформного преобразования двух вышеописанных течений жидкости. Поэтому, прежде чем приступить к этому решению, посмотрим, как преобразуется формула (8), когда течение, определяемое функцией $\Phi(\zeta)$ на плоскости мнимого переменного $\zeta = \xi + \eta i$, преобразуется в течение, определенное на плоскости переменного z функцией $F(z)$, причем между точками первой и второй плоскостей установлено соответствие с помощью уравнения

$$\zeta = f(z), \tag{17}$$

вследствие чего

$$\Phi[f(z)] = F(z).$$

Соответствие (17) установлено так, что центры вихря второго течения соответствуют центрам вихря первого и и что в рассматриваемых границах каждой точке одного течения соответствует одна определенная точка другого. Предполагая, что центру вихря $z_1 = x_1 + y_1 i$ соответствует в преобразованном течении центр вихря $\zeta_1 = \xi_1 + \eta_1 i$, напишем для движения этого второго центра формулу (8) в таком виде:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = \left| \frac{d}{d\bar{\zeta}}\left[\Phi(\zeta) - \frac{ki}{\pi}\ln(\zeta - \zeta_1)\right]\right|_{\zeta=\zeta_1}.$$

Величину, стоящую во второй части в скобках, представим сначала в виде функции z. Для этого заменяем $\Phi(\zeta)$ на $F(z)$ и полагаем, что

$$\ln(\zeta - \zeta_1) = \ln[f(z) - f(z_1)].$$

[1]) См. уравнение (14). (*Прим. ред.*)

Считая в последней формуле z за величину, близкую к z_1, сделаем разложение:

$$\ln[f(z)-f(z_1)]=\ln\left[f'(z_1)(z-z_1)+\frac{f''(z)}{2}(z-z_1)^2+\ldots\right]=$$
$$=\ln f'(z_1)+\ln(z-z_1)+$$
$$+\ln\left[1+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots\right]=$$
$$=\ln f'(z_1)+\ln(z-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots$$

По подстановке получаем:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\Big|_{\zeta=\zeta_1}\left\{\frac{d}{dz}\left[F-\frac{ki}{\pi}\ln(z-z_1)\right]-\frac{ki}{\pi}\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}\right\}\frac{dz}{d\zeta}. \quad (18)$$

§ 5. Конформное преобразование, которым мы будем пользоваться, характеризуется подстановкой

$$z=\zeta^\mu, \quad (19)$$

которая по введении полярных координат

$$x=r\cos\alpha, \quad \xi=\rho\cos\theta,$$
$$y=r\sin\alpha, \quad \eta=\rho\sin\theta,$$

дает соотношение

$$\rho=\sqrt[\mu]{r}, \quad \theta=\frac{\alpha}{\mu}. \quad (20)$$

Это показывает, что полярные координаты точки плоскости $O\xi\eta$ получаются из полярных координат соответственной точки на плоскости Oxy через разделение полярного угла на μ и через изменение величины радиуса-вектора посредством извлечения из нее корня степени μ.

Приложим такое преобразование к течению, представленному формулой (9), считая при этом $\mu>1$. Получим течение, определенное формулой

$$\Phi=\frac{ki}{\pi}\ln\frac{\zeta^\mu-\zeta_1^\mu}{\zeta^\mu-\zeta_2^\mu}, \quad (21)$$

в котором неподвижной границей будет уже не прямая стенка, а стороны угла, меньшего двух прямых и равного $\frac{\pi}{\mu}$.

Пользуясь указанным правилом соответствия, мы можем из линий тока на фигуре 1 получить линии тока нового течения, представленные на фигуре 3. Скорость жидкости в этом течении при вершине угла и в бесконечности будет равна нулю, потому что производная формулы (10)

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta^\mu - \zeta_1^\mu} - \frac{1}{\zeta^\mu - \zeta_2^\mu}\right)\mu\zeta^{\mu-1} \tag{22}$$

обращается в нуль при $\zeta = 0$ и при $\zeta = \infty$.

Переходим к исследованию движения центра вихря C, которому по формуле (21) соответствует напряжение k. Выразим

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i)$$

в полярных координатах. Подставляя сюда

$$\xi_1 = \rho_1 \cos\theta_1,$$

$$\eta_1 = \rho_1 \sin\theta_1,$$

находим, что

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = (\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)\left(\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

Так как

$$\zeta_2 = \rho_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1),$$

то написанное выражение можно представить еще так:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = \zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

На основании этого замечания и формулы (18) получаем:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{\zeta_1^{\mu-1}}{\zeta_1^\mu - \zeta_2^\mu} + \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right\}. \tag{23}$$

Пользуясь соотношением $\zeta_1\zeta_2 = \rho_1^2$ и заменяя все координаты на полярные, получим:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left(-\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} - i\right).$$

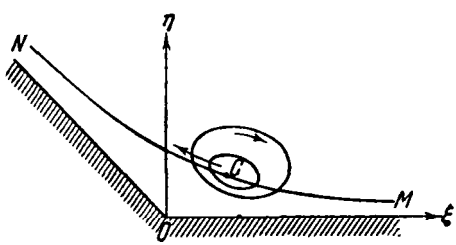
Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1}, \\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Эти формулы показывают, что со временем радиус ρ_1 убывает до тех пор, пока не достигает наименьшей величины при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, а потом возрастает. Что касается угла θ_1, то он при положительном k постоянно возрастает. Таким образом, центр вихря C двигается (фиг. 3) по некоторой траектории MN в направлении от M к N, если вращение вихря совершается по солнцу.

Чтобы составить уравнение траектории MN, умножаем первое из уравнений (24) на $\rho_1 d\theta_1$, второе — на $d\rho_1$ и складываем:

$$\frac{\mu\cos\mu\theta_1\, d\theta_1}{\sin\mu\theta_1} + \frac{d\rho_1}{\rho_1} = 0.$$



Фиг. 3.

Интегрируя, находим:

$$\rho_1 \sin\mu\theta_1 = \lambda, \qquad (25)$$

где λ — произвольное постоянное[1]). Кривые, представляемые этим уравнением, имеют асимптотами стороны угла, ограничивающего рассматриваемое течение.

Чтобы установить связь между θ_1 и временем, представляем второе уравнение (24) на основании (25) в виде:

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k}\frac{d\theta_1}{\sin^2\mu\theta_1}.$$

---

1) Это уравнение получает Гребли (Gröbli) в сочинении «Bewegung geradlinigcr paralleler Wirbelfaden» для случая целого μ и Гринхилл (Greenhill) в сочинении «Plane Vortex Motion», Quart. Journ., т. XV, § 6 для случая всякого $\mu > 1$.

и совершаем интегрирование:

$$t = \tau - \frac{2\pi\lambda^2}{k\mu} \operatorname{ctg} \mu\theta_1, \tag{26}$$

где τ — произвольное постоянное.

§ 6. Мы рассмотрели случай движения центра вихря в пространстве, ограниченном сторонами угла, меньшего π, но интересующая нас задача относится к случаю, когда угол заключен между π и 2π.

Если бы мы в исследовании § 5 положили

$$1 > \mu > \frac{1}{2},$$

то получили бы течение жидкости, обтекающее клин, но на острие этого клина, как видно из формулы (22), скорость была бы бесконечно велика. Для получения течения, ограниченного боками клина и дающего при острие критическую точку нулевой скорости, сделаем конформное преобразование (19) над течением жидкости, представленным формулой (12). Вместо уравнения (22) мы получим в этом случае на основании формулы (15) нижеследующее равенство:

$$\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_1^\mu)\zeta_1^\mu} - \frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_2^\mu)\zeta_2^\mu}\right\}\zeta^{2\mu-1}. \tag{27}$$

Здесь вторая часть обращается в нуль при $\zeta = 0$ вследствие $\mu > \frac{1}{2}$, а также обращается в нуль при $\zeta = \infty$ вследствие $\mu < 1$. Кроме этого, на стороне клина имеется еще некоторая критическая точка нулевой скорости, потому что вторая часть формулы (27) обращается в нуль при

$$\zeta^\mu = 2\rho_1^\mu \cos \mu\theta_1.$$

Преобразуя линии токов, изображенные на фигуре 2, с помощью соответствия (20), получим линии токов, изображенные на фигуре 4. Одна критическая точка нулевой скорости будет в вершине клина O, через нее пройдет линия тока в направлении бисектора угла клина.

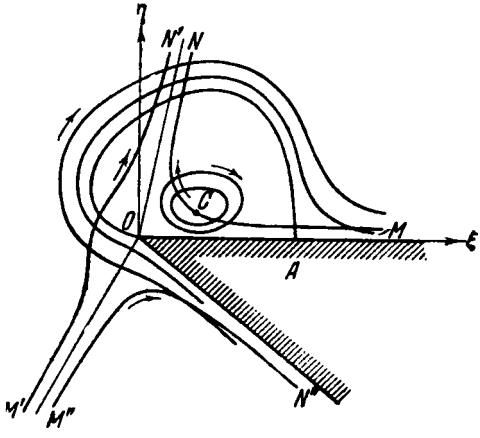
Другая критическая точка A нулевой скорости будет лежать на стороне клина и отстоять от его вершины на расстоянии

$$\delta = \rho_1 (2 \cos \mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}. \quad (28)$$

Здесь следует взять абсолютную величину косинуса. При этом если

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2\mu},$$

то точку A надо взять на верхней стороне клина, а если имеет место обратное неравенство, то на нижней.



Фиг. 4.

Обращаемся к исследованию движения центра вихря C. Основная формула, определяющая это движение, будет отличаться от формулы (23) добавочным членом, зависящим от w. Приписывая этот член и выражая w по формуле (14), найдем:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_2}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left(\frac{\zeta_1^{\mu}-1}{\zeta_1^{\mu}-\zeta_2^{\mu}} + \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right) + \\ + \frac{k\mu i}{\pi}\zeta_1^{\mu-1}\left(\frac{1}{\zeta_1^{\mu}} - \frac{1}{\zeta_2^{\mu}}\right). \quad (29)$$

Вводя сюда полярные координаты и делая некоторые простые преобразования, получаем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \\ = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left\{\left(-\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1} + 4\mu\cos\mu\theta_1\sin\mu\theta_1\right) - (1 - 4\mu\sin^2\mu\theta_1)\,i\right\},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu\cos\mu\theta_1}{\sin\mu\theta_1}(1 - 4\sin^2\mu\theta_1), \\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}(1 - 4\mu\sin^2\mu\theta_1). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Последняя из этих формул показывает, что при положительном k угол θ_1 возрастает со временем всякий раз, как угол θ_1 заключен между 0 и β, причем β определяется из уравнения

$$\sin \mu\beta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}.$$

Если угол θ_1 заключен между β и $\frac{\pi}{\mu} - \beta$, то он убывает со временем; наконец, если он заключен между $\frac{\pi}{\mu} - \beta$ и $\frac{\pi}{\mu}$, то он опять возрастает со временем. Умножаем первое уравнение (30) на $\rho_1 d\theta_1$, второе — на $d\rho_1$ и складываем:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}(1 - 4\mu \sin^2 \mu\theta_1) + \frac{(1 - 4\sin^2 \mu\theta_1)\, d \sin \mu\theta_1}{\sin \mu\theta_1} = 0.$$

Разделяем переменные и делаем некоторые преобразования:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} + \frac{d \sin \mu\theta_1}{\sin \mu\theta_1} - \frac{4(1-\mu) \sin \mu\theta_1\, d \sin \mu\theta_1}{1 - 4\mu \sin^2 \mu\theta_1} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\rho_1 \sin \mu\theta_1 (1 - 4\mu \sin^2 \mu\theta_1)^{\frac{1-\mu}{2\mu}} = \lambda, \qquad (31)$$

где λ — произвольное постоянное.

Уравнение (31) показывает нам, что радиус ρ_1 убывает от бесконечности и потом опять возрастает до бесконечности три раза: на промежутке изменения θ_1 от 0 до β, от β до $\frac{\pi}{\mu} - \beta$ и от $\frac{\pi}{\mu} - \beta$ до $\frac{\pi}{\mu}$. Это соответствует трем ветвям траекторий MN, $M'N'$, $M''N''$. Асимптотами этих траекторий являются стороны клина и прямые, наклоненные к сторонам клина под углом β.

На основании сказанного выше об изменении угла θ_1 со временем видно, что центр вихря, вращающегося по солнцу, движется по упомянутым ветвям в направлении, указанном на фигуре 4 стрелками.

Для определения связи между углом θ_1 и временем исключаем ρ_1 из второго уравнения (30) с помощью уравнения (31):

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \frac{d\theta_1}{\sin^2 \mu\theta_1 (1 - 4\mu \sin^2 \mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}}$$

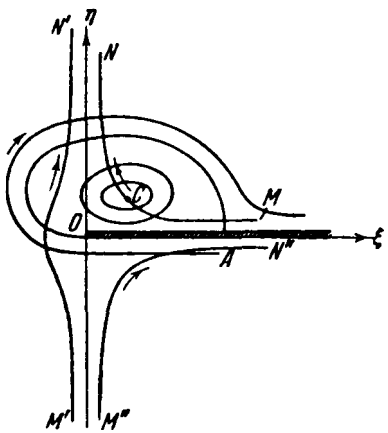
Вводя новое переменное

$$\operatorname{ctg} \mu\theta_1 = \gamma,$$

получаем

$$t + \tau = \frac{2\tau\lambda^2}{k} \int \frac{d\gamma}{\left(1 - \frac{4\mu}{1+\gamma^2}\right)^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{32}$$

Вместе с перемещением центра вихря C будет перемещаться по стороне клина критическая точка A. При этом место ее будет всякий раз находиться по формуле (28). Если центр вихря C движется по траектории $M'N'$, то при прохождении через бисектор клина, т. е. при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, величина δ проходит через нуль, и точка A переходит с одной стороны клина на другую.



Фиг. 5.

Рассматривая траектории MN, $M'N'$, $M''N''$ центра вихря, замечаем, что вихревой шнур уклоняется от подносимого к нему острия клина.

§ 7. От клина легко перейти к случаю весьма тонкого ножа. Для этого стоит только в формулах предыдущего параграфа положить $\mu = \frac{1}{2}$. При таком положении формула (27) принимает вид:

$$\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{ki}{2\pi}\left[\frac{1}{(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta_1})\sqrt{\zeta_1}} - \frac{1}{(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta_2})\sqrt{\zeta_2}}\right]. \tag{33}$$

Мы видим отсюда, что скорость в бесконечности и в критической точке A (фиг. 5), отстоящей от острия ножа на расстоянии

$$\delta = 4\rho_1 \cos^2\frac{\theta_1}{2}. \tag{34}$$

равна нулю; скорость же на острие ножа есть конечная величина, ибо при $\zeta = 0$ вторая часть формулы (33) обращается в

$$-\frac{k \sin \theta_1}{\pi \rho_1}.$$

Отрицательный знак показывает, что при $k > 0$ и $\theta_1 < \pi$ скорость жидкости в точке O направлена по оси $O\xi$ от ξ к O.

Уравнение (31) в нашем частном случае принимает вид:

$$\rho_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{\cos \theta_1} = \lambda. \tag{35}$$

Это дает нам ветви траекторий центра вихря: MN, $M'N'$, $M''N''$, имеющие асимптотами оси $O\xi$ и $O\eta$.

Связь между временем и углом θ_1, выраженная формулой (32), упрощается для предельного случая так:

$$t + \tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \int \left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1}\right)^2 d\gamma,$$

или, по совершении интегрирования:

$$t + \tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \left\{ \gamma - \frac{2\gamma}{\gamma^2-1} + \ln \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\}, \tag{36}$$

где τ — произвольное постоянное, а

$$\gamma = \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}.$$

Вместе с перемещением по плоскости точки C перемещается по стороне ножа точка A, расстояние которой от O определяется во всякий момент времени по формуле (34). Если центр вихря описывает траекторию $M'N'$, то при $\theta_1 = \pi$ точка A вступает на острие ножа и потом переходит с его нижней стороны на верхнюю. Нам понятно теперь, почему нельзя разрезать ножом вихревой шнур вдоль его длины. Поднесение острия ножа приведет центр вихря в движение по одной из трех траекторий MN, $M'N'$, $M''N''$, по которым вихрь будет всегда убегать от острия ножа.

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ БЬЕРКНЕСА О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ИЛИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ТЕЛА ВНУТРИ ЖИДКОЙ МАССЫ [1])

§ 1. Интересная задача Бьеркнеса [2]) о гидродинамических взаимодействиях пульсирующих или осциллирующих шариков, погруженных в беспредельную массу несжимаемой жидкости, может быть обобщена предположением, что колебательное движение жидкости, оказывающей давление на рассматриваемый пульсирующий или осциллирующий шарик, вызывается не колебанием или пульсациями других шариков, а совершается по какому-нибудь данному закону.

Трудность решения задачи в предположении, что радиус шарика весьма мал сравнительно с расстоянием его центра от всех границ жидкости, при нашем обобщении нисколько не увеличивается. Напротив того, анализ явлений Бьеркнеса является по нашему методу значительно проще обыкновенно предлагаемых исследований этих явлений.

§ 2. Предположим, что нормальная скорость на всех границах жидкой массы выражается некоторыми функциями

---

[1]) Сообщено 29. XI 1895 г. в физико-математической комиссии Общества любителей естествознания и впервые напечатано в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VIII; вып.2. 1896.

[2]) Bjerknes C., Vorläufige Mittheilungen über die Kräfte, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations und Contractions-Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen. Извлечение из этой работы, напечатанной по-шведски, см. Repertorium für reine und angewandte Mathematik, стр. 264, 1876.

координат, умноженными на одну и ту же периодическую функцию времени $f(t)$. При этом потенциал скоростей при отсутствии шарика будет иметь вид:

$$F_1 = \varphi(x, y, z) f(t), \tag{1}$$

где $\varphi(x, y, z)$ есть функция прямоугольных координат x, y, z, удовлетворяющая везде внутри жидкости уравнению Лапласа

$$\Delta_2 \varphi = 0$$

и всем условиям на границах.

Будем называть *скоростью потока* вектор

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial n} f(t), \tag{2}$$

представляющий скорость жидкости в той ее точке, в которой поместится центр наблюдаемого шарика. Этот вектор при $f(t) > 0$ направлен по элементу нормали dn поверхности

$$\varphi = \text{const.}$$

в ту сторону, в которую φ возрастает. В случае $f(t) < 0$ вектор w направлен противоположно элементу dn. Аналогично будем называть *ускорением потока* в данной точке вектор

$$w' = \frac{\partial \varphi}{\partial n} f'(t), \tag{3}$$

направление которого совпадает с направлением элемента dn или противоположно ему, смотря по тому, положительна или отрицательна производная $f'(t)$.

Рядом с потоком жидкости, определяемым потенциалом скоростей (1), мы будем рассматривать воображаемое движение жидкости с потенциалом скоростей

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t),$$

которое будем называть *производным потоком*, сопряженным с направлением Ox. Обозначим через dn' элемент нормали поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const.},$$

взятый в ту сторону, в которую $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ возрастает. Векторы

$$l = \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) f(t), \quad l' = \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) f'(t) \tag{4}$$

мы будем называть *скоростью и ускорением производного потока*. Эти векторы в случае положительного значения вторых частей формулы (4) будут направлены по dn', а в случае отрицательного — в обратную сторону.

Введение в жидкую массу пульсирующего или осциллирующего шарика радиуса a обращает потенциал скоростей в

$$F = F_1 + F_2. \tag{5}$$

Функция F_2 везде внутри жидкости удовлетворяет условию

$$\Delta_2 F_2 = 0;$$

на расстоянии от центра шара, значительно превосходящем a, производные функции F_2 по координатам суть нули; на поверхности же шарика производная этой функции по радиусу, идущему от центра шарика, равна сумме следующих трех слагаемых:

1) скорости $\frac{da}{dt}$, происходящей от пульсации шарика;

2) проекции на радиус шарика скорости u осцилляции центра шарика;

3) взятой с обратным знаком проекции на радиус шарика скорости потока w.

Если назовем через θ и ψ углы радиуса r, идущего от центра шарика к рассматриваемой частице жидкости, с направлением векторов w и u, то найдем, что на поверхности шарика

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = \frac{da}{dt} - w\cos\theta + u\cos\psi.$$

Всем указанным условиям удовлетворяет функция:

$$F_2 = -\frac{a^2}{r}\frac{da}{dt} + \frac{a^3}{2r^2} w\cos\theta - \frac{a^3}{2r^2} u\cos\psi. \tag{6}$$

Имея в виду рассматривать точки жидкости, весьма близкие к поверхности шарика, заменяем формулу (1) на следующую:

$$F_1 = \varphi_0 f(t) + wr\cos\theta, \tag{1'}$$

где φ_0 есть значение φ в центре шарика.

Подставляем формулы (6) и (1') в формулу (5):

$$F = \varphi_0 f(t) - \frac{a^2}{r}\frac{da}{dt} + \left(\frac{a^3}{2r^2} + r\right) w\cos\theta - \frac{a^3}{2r^2} u\cos\psi. \tag{7}$$

Пользуясь этим выражением потенциала скоростей и обыкновенной формулой гидродинамического давления:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{dF}{dt} - \frac{V^2}{2}, \tag{8}$$

где V есть скорость жидкости в рассматриваемой точке, определим равнодействующую силу P гидродинамических давлений на всю поверхность шарика. При этом легко показать, что член $-\frac{V^2}{2}$ в формуле (8) не будет иметь влияния на величину P всякий раз, как $u = 0$ или $\frac{da}{dt} = 0$. Действительно, в первом предположении формула (7) показывает, что скорость V будет слагаться из скорости

$$-\frac{3}{2} w\sin\theta, \tag{9}$$

направленной по меридиану, имеющему осью вектор w, и из скорости $\frac{da}{dt}$, перпендикулярной к поверхности шарика. Составная скорость V этих двух скоростей будет иметь одну и ту же величину для двух диаметрально противоположных (θ и $\theta + \pi$) элементов поверхности шарика; вследствие этого части гидродинамического давления, зависящие от присутствия в формуле (8) последнего члена, взаимно уравновесятся.

Во втором предположении находим по формуле (7), что скорость V в каждой точке поверхности шарика будет слагаться геометрически из вышеупомянутой поверхностной скорости (9), из поверхностной скорости $\frac{1}{2} u\sin\psi$, направлен-

ной по меридианам, имеющим осью вектор u, и из нормальной скорости $u\cos\psi$. Составные скорости V из этих трех скоростей для двух диаметрально противоположных элементов поверхности шарика (θ, ψ и $\theta+\pi$, $\psi+\pi$) будут равны по величине, и части давления жидкости, зависящие от квадрата скорости, на этих элементах взаимно уравновесятся.

Таким образом, в рассматриваемых случаях сила P определится, как равнодействующая всех сил давления

$$-\rho\frac{dF}{dt}d\sigma, \tag{10}$$

приложенных ко всем элементам $d\sigma$ поверхности шарика. Это обстоятельство позволяет рассматривать силу P в общем случае как геометрическую сумму сил давления на шарик, имеющих место в различных частных случаях, рассмотрением которых мы теперь займемся.

§ 3. Неподвижный шарик в изменяющемся потоке жидкости. Предполагаем в формуле (7)

$$\frac{da}{dt}=0, \quad u=0$$

и составляем величину силы P, которая будет направлена по w':

$$P=\frac{3}{2}w'a\rho\int\int\cos^2\theta\,d\sigma,$$

где интеграция распространяется на все элементы $d\sigma$ поверхности шарика. Так как

$$\int\int\cos^2\theta\,d\sigma=\frac{4}{3}\pi a^2,$$

то, называя через

$$m=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$$

вытесненную шариком массу жидкости, найдем:

$$P=\frac{3}{2}mw'. \tag{11}$$

Отсюда следует, что *сила действия изменяющегося потока жидкости на неподвижный неизменяющийся шарик направлена по ускорению потока и равна трем вторым массы вытесненной жидкости, умноженной на ускорение потока.*

§ 4. Изменяющийся шарик в перманентном потоке жидкости. Принимаем в формуле (7)

$$u = 0, \quad w' = 0$$

и составляем величину силы P, которая будет направлена по w:

$$P = \frac{w}{2a^2} \rho \frac{da^3}{dt} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\sigma = \frac{w}{2} \rho \frac{4}{3} \pi \frac{da^3}{dt}.$$

Положив

$$\frac{4}{3} \pi \frac{da^3}{dt} \rho = \frac{dm}{dt} = m',$$

напишем найденную силу в таком виде:

$$P = \frac{1}{2} m' w. \tag{12}$$

Отсюда следует, что *сила действия перманентного потока жидкости на изменяющийся шарик с неподвижным центром направлена по скорости потока и равна половине этой скорости, умноженной на производную по времени от массы вытесненной жидкости*[1]).

§ 5. Неизменяемый шарик, движущийся равномерно и прямолинейно в перманентном потоке жидкости. Принимаем

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad f(t) = k,$$

где k — некоторая постоянная величина, и допускаем, что движение шарика совершается по оси Ox с постоянной скоростью u, так что расстояние ξ центра шарика от начала координат выражается формулой

$$\xi = ut.$$

[1]) Перманентность потока нарушается только самим шариком и не имеет места вблизи его.

Формула (7) в нашем случае может быть написана так:

$$F = k\varphi + \frac{a^3 w \cos\theta}{2r^2} - \frac{a^3 u \cos\psi}{2r^2}, \tag{13}$$

где $k\varphi$ — потенциал скоростей до погружения шарика.

Составляем производную $\frac{dF}{dt}$ для определенной точки пространства, находящейся весьма близко от поверхности шарика:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{a^3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] - \frac{a^3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right]. \tag{14}$$

Мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] = k\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{x-\xi}{r^3} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{y}{r^3} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{z}{r^3}\right],$$

причем функции, заключенные в круглых скобках, берутся для центра шарика, т. е. при $x = \xi$, $y = 0$, $z = 0$. Раскрываем производную по времени, замечая, что со временем изменяется только ξ, и обращая внимание на формулу

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2};$$

получаем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] = \frac{ku}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{x-\xi}{r} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{y}{r} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)\frac{z}{r}\right\} -$$
$$- \frac{ku}{r^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{3}{r^4}uw\cos\theta\,(x-\xi),$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w\cos\theta}{r^2}\right] = \frac{ul\cos\chi}{r^2} - \frac{ku}{r^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{3}{r^3}uw\cos\theta\cos\psi, \tag{15}$$

где χ есть угол между скоростью l производного потока и

радиусом r. Другая производная, входящая в формулу (14), будет:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{u(x-\xi)}{r^3}\right]=-\frac{u^2}{r^3}+\frac{3u^2(x-\xi)^2}{r^5}=$$

$$=-\frac{u^2}{r^3}+\frac{3u^2}{r^3}\cos^2\psi. \qquad (16)$$

Подстановка найденных величин (15) и (16) в формулу (14) дает нам для точек, близких к поверхности шарика:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{a}{2}\,ul\cos\chi-\frac{ku}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{3}{2}\,uw\cos\theta\cos\psi+$$

$$+\frac{u^2}{2}-\frac{3}{2}\,u^2\cos^2\psi. \qquad (17)$$

Легко видеть, что при составлении силы P (см. выражение (10)) только первый член формулы (17) будет иметь значение, так как гидродинамические давления, происходящие от влияния всех остальных членов, будут для диаметрально противоположных элементов шарика (θ, ψ и $\theta+\pi$, $\psi+\pi$) попарно взаимно уничтожаться. Мы получим вследствие этого силу P, направленную по элементу нормали dn' и имеющую величину:

$$P=\frac{m}{2}\,lu. \qquad (18)$$

Таким образом, *сила гидродинамического действия перманентного потока на движущийся в жидкости прямолинейно и равномерно неизменный шарик направлена по скорости производного потока, сопряженного с направлением движения шарика, и равна произведению половины массы вытесненной шариком жидкости на скорость шарика и скорость производного потока.*

§ 6. Неизменяемый шарик, движущийся с некоторым ускорением в жидкости, покоящейся в бесконечности. В этом случае в формуле (13) надо положить

$$\varphi=\text{const.},\quad w=0$$

и взять

$$F=\text{const.}-\frac{a^3}{2r^2}\,u\cos\psi. \qquad (19)$$

Если ξ, η, ζ будут изменяющиеся со временем координаты центра шарика, то

$$u\cos\psi = \frac{d\xi}{dt}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d\eta}{dt}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{z-\zeta}{r},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u\cos\psi}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{z-\zeta}{r}\right\} -$$

$$-\frac{1}{r^3}\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\} +$$

$$+\frac{3}{r^3}\left\{\frac{d\xi}{dt}\frac{x-\xi}{r} + \frac{d\eta}{dt}\frac{y-\eta}{r} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{z-\zeta}{r}\right\}^2.$$

Отсюда следует, что для точек, близких к поверхности шарика, надо положить

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{a}{2}j\cos\mu + \frac{u^2}{2} - \frac{3}{2}u^2\cos^2\psi \qquad (20)$$

где j представляет ускорение центра шарика, а μ есть угол между этим ускорением и радиусом r. Понятно, что второй и третий члены формулы (20) не оказывают влияния на силу P, так как происходящие от этих членов давления уничтожаются в диаметрально противоположных элементах поверхности шарика (ψ и $\pi+\psi$). Вся сила P будет зависеть только от первого члена в формуле (20) и будет иметь величину

$$P = -\frac{m}{2}j. \qquad (21)$$

Здесь знак (—) показывает, что сила P направлена в противоположную сторону ускорению j.

Таким образом, видим, что *гидродинамическое давление на неизменный шарик, движущийся ускоренно в покоящейся в бесконечности жидкости, направлено в сторону, противоположную полному ускорению, и равно произведению половины массы вытесненной жидкости на это полное ускорение.*

§ 7. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость пульсирующий шарик. Мы подготовили теперь все необходимое для решения двух основных задач, представляющихся в явлениях Бьеркнеса. Первая задача заключается в определении силы гидро

динамического давления на пульсирующий периодически шарик, погруженный в массу жидкости, которая колеблется периодически, причем период колебания жидкости одинаков с периодом пульсации шарика. Решим эту первую задачу.

Сила P в этом случае будет слагаться из сил, данных формулами (11) и (12), так что

$$P = \frac{3}{2} mw' + \frac{1}{2} m'w.$$

Эта сила при положительном знаке второй части формулы направлена в сторону элемента нормали dn, а при отрицательном — в противоположную сторону. Преобразуем написанную нами формулу таким образом:

$$P = mw' + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} mw\right\}. \tag{22}$$

Если периоды изменения функций времени $f(t)$ и m очень малы, то эффект гидродинамического действия на шарик выражается средней силой $[P]$, которую мы определим за большой промежуток времени T. При вычислении этой средней силы последний член формулы (22) пропадает, и мы получаем

$$[P] = \frac{1}{T}\int_0^T mw'\,dt. \tag{23}$$

Эта формула объясняет нам, вследствие какой причины развивается средняя сила $[P]$, производящая гидродинамический эффект в рассматриваемом явлении. Если бы масса m не изменялась, то шарик получал бы от действия изменяющегося потока одинаковые импульсы, направленные по элементу нормали dn и в обратную сторону, так что средняя сила давления была бы нулем; но когда масса m изменяется и имеет бо́льшую величину при w' положительном и меньшую — при w' отрицательном, то получается средняя положительная сила $[P]$; равным образом и наоборот.

Предполагая, что

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

$$m = m_0 - \frac{m_0'}{\omega}\cos(\omega t + \beta),$$

$$m' = m_0' \sin(\omega t + \beta),$$

получаем:

$$mw' = \frac{\partial\varphi}{\partial n} m_0 \omega \cos(\omega t) - m_0' \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos\omega t \cos(\omega t + \beta) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial n} m_0 \omega \cos(\omega t) + \frac{m_0'}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\sin\beta \sin(2\omega t) -$$

$$- \frac{m_0'}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\beta\cos(2\omega t) - \frac{m_0'}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\beta.$$

Подставляем это выражение в формулу (23):

$$[P] = -\frac{1}{2} m_0' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\beta. \qquad (24)$$

Это приводит нас к теореме I.

Теорема I. *Средняя сила гидродинамического давления периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость шарик, пульсирующий с периодом колебания потока, направлена обратно элементу нормали dn и равна половине произведения наибольшей скорости изменения массы вытесненной шариком жидкости и наибольшей скорости потока на косинус разности фаз колебаний жидкости и пульсации шарика.*

Если формула (24) дает знак (+), то сила $[P]$ направлена по dn, в противном случае она направлена в прямо противоположную сторону. Когда колебание жидкости вызывается тем, что тело M произвольной формы (или группа тел) периодически расширяется или сжимается одновременно с погруженным в жидкость на большом расстоянии от тела шариком, тогда, проведя из центра тяжести объема тела сферу радиусом R, равным расстоянию от этого центра до центра шарика, будем иметь по теореме Грина:

$$4\pi R^2 \rho \frac{\partial\varphi}{\partial R} = M_0',$$

где M_0' — наибольшее секундное количество жидкости, выталкиваемое пульсирующим телом M.

Так как на большом расстоянии от тела M скорости потока жидкости можно считать направленными к центру тяжести объема этого тела и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

то формуле (24) в рассматриваемом случае можно дать вид:

$$[P] = -\frac{1}{8\pi R^2 \rho} m_0' M_0' \cos\beta. \tag{25}$$

При знаке (—) во второй части эта формула дает нам притягательную силу, а при знаке (+) отталкивательную (элемент dn направлен от тела M).

Мы видим, что при одинаковых пульсациях ($\beta = 0$) будет иметь место притягательная сила, при противоположных ($\beta = \pi$) пульсациях сила будет отталкивательная, а при пульсациях, разнящихся на четверть волны $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$, не будет получаться никакой силы гидродинамического взаимодействия между пульсирующими телами.

§ 8. Действие периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость осциллирующий шарик. Вторая задача Бьеркнеса заключается в определении силы гидродинамического давления на осциллирующий периодически шарик, погруженный в массу жидкости, которая колеблется периодически, причем период колебания жидкости одинаков с периодом колебания шарика. Сила P в этом случае будет слагаться из сил, данных формулами (11), (15), (21), и явится следующей геометрической суммой:

$$\overline{P} = \frac{3}{2} m (\overline{w'} + \overline{l'\xi}) + \frac{1}{2} \overline{ml\xi'} - \frac{1}{2} \overline{m\xi''}. \tag{26}$$

Двучлен, стоящий во второй части в скобках, представляет ускорение потока, взятое для точки на оси Ox на малом расстоянии ξ от начала O. Это ускорение слагается геометрически из ускорения w' потока в точке O и из при-

ращения $l'\xi$ этого ускорения, происходящего вследствие перемещения центра шарика на ξ по оси Ox. Вектор, соответствующий первому слагающему, направлен по dn, а вектор, соответствующий второму, — по dn'.

Определяя по формуле (26) среднюю силу $[P]$, увидим что на нее будут иметь влияние только векторы, направленные по dn', так как только они содержат в себе произведение функций времени одного периода. Получаем в направлении dn' силу

$$[P] = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{3}{2} ml\,\xi + \frac{1}{2} ml\xi'\right) dt.$$

Так как

$$\frac{3}{2} ml\,\xi + \frac{1}{2} ml\xi' = ml'\xi + \frac{1}{2}\frac{d}{dl}(ml\xi),$$

то

$$[P] = \frac{m}{T}\int_0^T l'\xi\, dt. \tag{27}$$

Принимая теперь

$$f(t) = \sin \omega t,$$

$$\xi = -\frac{\xi_0'}{\omega}\cos(\omega t + \beta),$$

$$\xi' = \xi_0' \sin(\omega t + \beta),$$

найдем:

$$l'\xi = -\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\xi_0' \cos\omega t \cos(\omega t + \beta) =$$

$$= \frac{\xi_0'}{2}\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot \sin 2\omega t \sin\beta - \frac{\xi_0'}{2}\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot \cos 2\omega t \cos\beta -$$

$$- \frac{\xi_0'}{2}\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot \cos\beta.$$

Подстановка этого выражения в формулу (27) приводит нас к следующей величине средней силы:

$$[P] = -\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot \xi_0' \cos\beta. \tag{28}$$

Если вторая часть этой формулы положительна, то сила направлена по элементу нормали dn', в противном случае она направлена в противоположную сторону. Полученный результат может быть выражен теоремой II.

Теорема II. *Средняя сила гидродинамического давления периодически изменяющегося потока жидкости на погруженный в жидкость осциллирующий шарик направлена обратно элементу нормали dn' и равна произведению половины массы жидкости, вытесненной шариком, на наибольшую скорость шарика, на наибольшую скорость производного потока и на косинус угла, выражающего разность фаз колебаний шарика и потока.*

Рассмотрим для примера поток жидкости, вызываемый осцилляциями по направлению оси Ox некоторого шара M радиуса b (b может быть велико сравнительно с a). При этом

$$\varphi = -\frac{\xi_1' b^3 x}{2R^3},$$

где R есть расстояние точки жидкости от начала координат, взятого в центре шара M.

Для производного потока мы должны взять:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\xi_1' b^3}{2}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5}\right) = -\frac{\xi_1' b^3}{2R^3}(1 - 3\cos^2\alpha), \qquad (29)$$

где α — угол радиуса R с осью Ox. Составим уравнения линий тока рассматриваемого производного потока. Для этого определяем скорости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= f(t)\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3\xi_1' b^3}{2R^4}(1 - 3\cos^2\alpha) f(t), \\ R\frac{d\alpha}{dt} &= f(t)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{3\xi_1' b^3}{R^4}\cos\alpha\sin\alpha \cdot f(t); \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

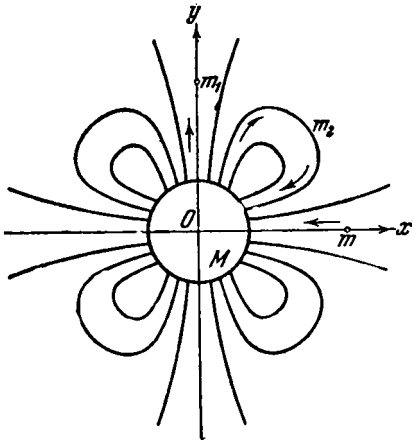
потом составляем дифференциальное уравнение:

$$\frac{2dR}{R} = -\frac{1 - 3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}d\alpha + \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.$$

Совершая интеграцию, получаем:

$$R^2 = \lambda\sin^2\alpha\cos\alpha, \qquad (31)$$

где λ — произвольное постоянное. Линии тока, представленные этим уравнением, изображены на фигуре 1, причем направление нормали dn' обозначено стрелкой. Абсолютная величина наибольшей скорости производного потока найдется по формулам (30).



Фиг. 1.

Рассмотрим три положения осциллирующего шарика: в точке m на оси Ox, в точке m_1 на оси Oy и в точке m_2 наибольшего значения R на линии тока [формула (31)]. Это последнее положение определяется углом

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}. \qquad (32)$$

В первом положении определяем наибольшую скорость производного потока по первой формуле (30) и получаем по формуле (28):

$$[P] = -\frac{3}{2}\frac{b^3 m}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta = -\frac{9}{8\pi\rho}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta. \qquad (33)$$

Во втором положении по тем же формулам находим:

$$[P] = -\frac{3}{4}\frac{b^3 m}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta = -\frac{9}{16\pi\rho}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta. \qquad (34)$$

Наконец, для определения силы $[P]$ в третьем положении мы должны воспользоваться второй формулой (30) и формулой (32), что дает нам:

$$[P] = -\frac{b^3 m}{2R^4}\sqrt{2}\,\xi_1'\xi_0' \cos\beta = -\frac{3\sqrt{2}}{8\pi\rho}\frac{Mm}{R^4}\xi_1'\xi_0' \cos\beta. \qquad (35)$$

При одинаковых осцилляциях обоих шаров ($\beta = 0$) получаем во вторых частях формул (33), (34) и (35) знак минус. Это показывает нам, что сила $[P]$ имеет направление, обратное тому, которое указано на фигуре 1 стрелками.

При различных колебаниях ($\beta = \pi$) имеем во второй части упомянутых формул знак плюс, что дает нам направление силы $[P]$ по проведенным стрелкам на фигуре 1.

Легко заметить, что на основании сказанного одинаково осциллирующие по направлению Ox шары взаимодействуют обратно магнитам, параллельным этой оси и направленным одноименными полюсами в одну сторону, а разно осциллирующие — взаимодействуют обратно магнитам, направленным в одну сторону различными полюсами. Таким образом, здесь так же, как в предыдущем параграфе, оправдывается известное правило Бьеркнеса о противоаналогиях между магнитными и гидродинамическими взаимодействиями.

§ 9. Действие колеблющегося потока жидкости на погруженный в жидкость маятник. Данные нами формулы позволяют решить вопрос о действии колеблющегося потока на малый шарик массы M, удерживаемый силой $k\xi$, пропорциональной отклонению ξ шарика от некоторого центра. Мы принимаем для простоты, что скорости всех точек потока равны между собою и параллельны оси Ox, так что $l = 0$.

На шарик нашего маятника, кроме силы $k\xi$, направленной по оси Ox к центру O, будут действовать силы, выраженные формулами (11) и (21), а также сила

$$\mu\left(\frac{d\xi}{dt} - w\right),$$

происходящая от вязкости жидкости, которую мы считаем пропорциональной скорости шарика относительно потока. Дифференциальное уравнение движения нашего маятника будет[1]):

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi - \mu\left(\frac{d\xi}{dt} - w\right) + \frac{3}{2}mv' - \frac{1}{2}m\frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad (36)$$

[1]) Мы пренебрегаем членами, зависящими от произведения компонентов скорости, и потому можем складывать силу от трения с раньше найденными силами.

Полагая здесь, что

$$w = \sin \omega t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad w' = \omega \cos \omega t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

найдем:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2\mu}{2M+m}\frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{2M+m}\xi = \frac{3m\omega \cos \omega t + 2\mu \sin \omega t}{2M+m}\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Сделаем положения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2k}{2M+m} &= \nu^2, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{2\mu}{2M+m} &= 2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = H \cos \beta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{3m\omega}{2M+m} &= H \sin \beta. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Эти положения позволяют написать наше дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\xi}{dt} + \nu^2 \xi = H \sin (\omega t + \beta). \tag{38}$$

Один из частных интегралов этого уравнения найдем, положив

$$\xi = A \cos (\omega t + \beta) + B \sin (\omega t + \beta)$$

и определив A и B из условий:

$$(\nu^2 - \omega^2) A + 2\lambda\omega B = 0, \quad -2\lambda\omega A + (\nu^2 - \omega^2) B = H.$$

Получаем отсюда:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{2\lambda H\omega}{(\nu^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} = -h \cos \beta', \\ B &= \frac{(\nu^2-\omega^2) H}{(\nu^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} = h \sin \beta', \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$h = \frac{H}{\sqrt{(\nu^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\sqrt{\frac{4\lambda^2 + \left(\frac{3m}{2M+m}\right)^2 \omega^2}{(\nu^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \tag{40}$$

так что частный интеграл будет иметь вид:

$$\xi = -h \cos (\omega t + \beta + \beta'). \tag{41}$$

Общий интеграл уравнения (38) будет равен сумме общего интеграла соответственного уравнения без последней части и найденного частного интеграла (41). Общий интеграл уравнения без последней части будет с возрастанием времени стремиться к нулю, так что все движение по прошествии некоторого времени изобразится формулой (41).

Посмотрим, какова будет разность фаз $\beta + \beta'$ между колебаниями потока и колебаниями маятника. По формулам (39) и (37) имеем:

$$\cos(\beta + \beta') = \frac{\omega\left[4\lambda^2 - \frac{3m}{2M+m}(\nu^2 - \omega^2)\right]}{h\left[(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]} \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \qquad (42)$$

Отсюда следует, что разность фаз $\beta + \beta'$ будет менее или более $\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, будем ли мы иметь неравенство:

$$\omega^2 - (\nu^2 - \lambda^2) > \lambda^2\left(-4\frac{2M+m}{3m} + 1\right), \qquad (43)$$

или неравенство с обратным знаком.

Так как период колебания потока есть $\frac{2\pi}{\omega}$, а период колебания маятника в жидкости, покоящейся в бесконечности, есть

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\nu^2 - \lambda^2}},$$

то неравенство (43) показывает, что *при малом* λ *разность фаз будет более* $\frac{\pi}{2}$, *если поток колеблется медленнее маятника, и менее* $\frac{\pi}{2}$, *если поток колеблется быстрее маятника.*

При некоторой скорости колебания потока, близкой к скорости маятника, разность фаз проходит через $\frac{\pi}{2}$, а h получает весьма большую величину, как это видно из формулы (40), в которой ν будет близко к ω и знаменатель очень мал.

Мы предположили, что скорости потока равны между собой и направлены параллельно оси Ox; но изложенный нами анализ колебания маятника может быть приложен приближенно и в том случае, когда l есть малая величина

сравнительно с w, ибо тогда при определении колебания маятника мы можем пренебрегать силой, данной формулой (18). Когда же надо будет определить среднюю силу $[P]$ гидродинамического давления, стремящуюся сдвинуть точку опоры маятника, тогда мы можем прибегнуть к формуле (28), подставляя в нее

$$\frac{'}{0} = h\omega.$$

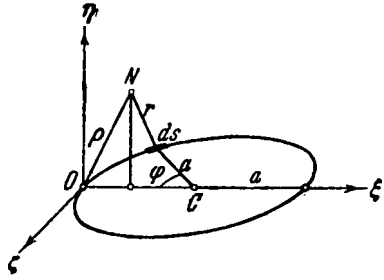
Сказанное в этом параграфе может служить к объяснению явлений колебаний маятников, имеющихся в коллекции приборов Бьеркнеса [1]) и находится в согласии с интересными наблюдениями, произведенными П. Н. Лебедевым в физической лаборатории Московского университета в 1895 г.

[1]) Preiskourant über hydrodynamische Apparate von C. Bjerknes, Mechaniker Andersen, Christiania, 1885.

ЗАМЕТКА О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ[1]).

§ 1. Обыкновенно предполагают, что вся жидкость, заключенная в вихревом кольце, имеет вихревое движение. Мы имеем в виду в этой заметке рассмотреть задачу о движении круглого вихревого кольца, несущего заключенную в нем жидкость поступательным движением и имеющего на поверхности вихревой слой.

§ 2. Определим сначала скорость, сообщаемую бесконечно тонким вихревым кольцом с центром C и радиусом a точке жидкости N, отстоящей от окружности кольца на



Фиг. 1.

весьма малом расстоянии ρ (фиг. 1). Проведем через N плоскость, перпендикулярную к кольцу, и построим на ней прямоугольные оси координат, приняв начало O на окружности кольца и направив ось $O\xi$ по радиусу кольца, а ось $O\eta$ — перпендикулярно к плоскости кольца. Суммируя

[1]) Сообщено 12.III 1907 на заседании Математического общества и впервые напечатано в Математическом сборнике, т. XXVI, 1907.

эффекты всех элементов $ds = a\,d\varphi$ на точку N, найдем для проекций v и u скорости этой точки на оси $O\eta$ и $O\xi$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[a^2(1-\cos\varphi)+a\xi\cos\varphi]\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ u &= -\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\eta\cos\varphi\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь k есть бесконечно малая циркуляция скорости по контуру, охватывающему кольцо, так что напряжение вихревого кольца есть $m = \frac{k}{2}$, ξ и η суть координаты точки N.

Преобразуем интеграл

$$A = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (2)$$

подстановкой $\varphi = 2\vartheta$ и отбрасыванием $\frac{\xi}{a}$:

$$A = \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{[4(a^2-a\xi)\sin^2\vartheta+\rho^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(4a^2\sin^2\vartheta+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вообразим бесконечно малый угол ψ, но весьма большой сравнительно с бесконечно малой величиной ρ, так что $\frac{\rho}{\psi} = 0$, и разобьем наш интеграл A на два:

$$A = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\psi} \frac{a^2\vartheta^2\,d\vartheta}{(4a^2\vartheta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} =$$

$$= \frac{k}{2\pi}\left\{\int_0^{\psi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{4a^2\vartheta^2+\rho^2}} - \int_0^{\psi} \frac{\rho^2\,d\vartheta}{(4a^2\vartheta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}.$$

Мы имеем:

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}}=\frac{k}{4\pi a}\int_0^{\psi}\frac{\frac{2a\,d\theta}{\rho}}{\sqrt{\frac{4a^2\theta^2}{\rho^2}+1}}=$$

$$=\frac{k}{4\pi a}\ln\left[\frac{2a\theta}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{2a\theta}{\rho}\right)^2+1}\right]_0^{\psi}=\frac{m}{2\pi a}\ln\frac{4a\psi}{\rho};$$

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{\frac{\rho^2\,d\theta}{\theta^3}}{\left(4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}}}=\frac{m}{2\pi a};$$

$$\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{k}{4\pi a}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{m}{2\pi a}\ln\frac{\psi}{2}.$$

На основании всего сказанного выражение A будет такое:

$$A=\frac{m}{2\pi a}\left(\ln\frac{8a}{\rho}-1\right). \tag{2'}$$

Нам остается еще определить входящий в выражение v интеграл

$$B=\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\xi\cos\varphi\,d\varphi}{[2(a^2-a\xi)(1-\cos\varphi)+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Вводим в него тоже подстановку $\varphi=2\theta$, вследствие которой

$$B=\frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\xi(1-2\sin^2\theta)\,d\theta}{[4(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-\frac{\xi}{a}A+\frac{ka\xi}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{[4(a^2-a\xi)\sin^2\theta+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

В пределах рассматриваемой точности первый член второй части может быть отброшен, и мы получаем по замене $4(a^2 - a\xi)$ на n:

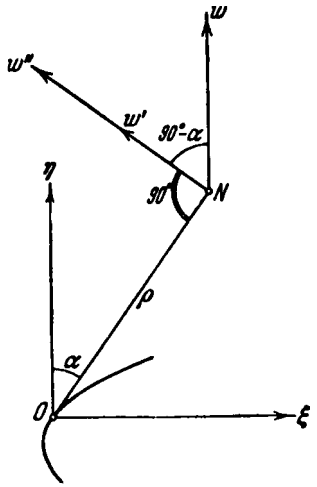
$$B = -\frac{ka\xi}{\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}}. \qquad (3')$$

Берем входящий сюда интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{n\sin^2\theta+\rho^2}} = \int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{n\theta^2+\rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\int_0^{\psi}\ln\left(\frac{\theta\sqrt{n}}{\rho}+\sqrt{\frac{n\theta^2}{\rho^2}+1}\right)+\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{4\sqrt{n}}{\rho}\right).$$

По подстановке в формулу (3′) получим:



Фиг. 2.

$$B = \frac{m}{\pi}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi^2}{\rho^2}.$$

Теперь мы можем написать выражение скорости v, в котором сохранены конечные величины и весьма большие величины логарифмического и первого порядка:

$$v = \frac{m}{2\pi a}\left(\ln\frac{8a}{\rho} - 1\right) + \frac{m}{\pi}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi^2}{\rho^2}. \qquad (4)$$

Что касается проекции скорости на ось $O\xi$, то составлять ее не придется, ибо она получается из выражения B в формуле (3) только заменой в числителе множителя ξ на $-\eta$. Получаем:

$$u = -\frac{m}{\pi}\frac{\eta}{\rho^2} - \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi\eta}{\rho^2}. \qquad (5)$$

Рассмотрение формул (4) и (5) приводит нас к заключению, что *бесконечно тонкое вихревое кольцо сообщает точке N, отстоящей от него на очень близком расстоянии* ρ, *три скорости* (фиг. 2): 1) *скорость* w, *направленную по оси кольца и имеющую величину*

$$w = \frac{m}{2\pi a}\left(\ln \frac{8a}{\rho} - 1\right), \tag{6}$$

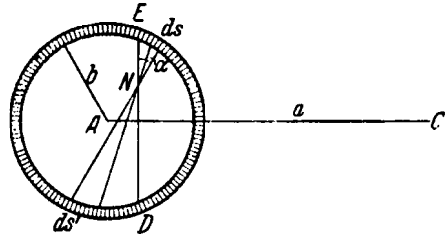
зависящую только от ρ; 2) *скорость вихревого вращательного движения около касательной, проведенной к кольцу в точке O, с напряжением вихря* m, *имеющую величину*

$$w' = \frac{m}{\pi\rho};$$

3) *скорость вращательного движения около той же касательной, имеющую конечную переменную величину*

$$w'' = \frac{m}{2\pi a} \cdot \frac{\xi}{\rho}.$$

§ 3. Предположим теперь, что бесконечно тонкие вихревые кольца расположены по поверхности тора, сечение которого имеет радиус b, так что на каждый элемент ds контура этого сечения приходится напряжение вихрей $m = \gamma\, ds$, и посмотрим, какую скорость сообщают все эти кольца точке жидкости N, заключенной внутри тора (фиг. 3).



Фиг. 3.

Слагая все скорости w, происходящие от всех элементарных вихревых колец с напряжениями $\gamma\, ds$, получим на основании формулы (6) по оси вихря скорость w:

$$w = \frac{M}{2\pi a}\left(\ln \frac{8a}{b} - 1\right), \tag{7}$$

потому что все точки, лежащие внутри весьма тонкого кругового слоя, при логарифмическом законе притяжения имеют одинаковый потенциал, равный потенциалу внешней точки, прилегающей к слою [1]).

Чтобы сложить геометрически все скорости вихревых движений, получаемых точкой N от элементов вихря, покрывающих слой, замечаем, что скорость вихревого движения от одного элемента $\gamma\, ds$ направлена перпендикулярно к радиусу ρ, соединяющему этот элемент с точкой N, и равна $\frac{m}{\pi}\frac{1}{\rho}$. Эта скорость получается, таким образом, поворотом на прямой угол силы притяжения элементом $\gamma\, ds$ точки N единицы массы по закону обратной пропорциональности расстоянию. Сложив геометрически все такие силы притяжения и повернув их равнодействующую на прямой угол, мы получим скорость точки N от всех вихревых движений.

Но круговой слой по закону обратной пропорциональности расстоянию внутренней точки не притягивает, поэтому скорость точки N, полученная от всех движений второго рода (вихревых), есть нуль. Остается рассмотреть равнодействующую скорость точки N от всех движений третьего рода. Проведем (фиг. 3) через N параллельно оси тора хорду DE и назовем через α угол между радиусом ρ, идущим от точки N к элементу ds, и NE. Проекции искомой результирующей скорости на ось тора и на его радиусы на основании формул (4) и (5) будут:

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\left[\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,(ds+ds')\right],$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi a}\left[\int_0^{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\,(ds+ds')\right],$$

где через ds' мы называем элемент дуги, вертикальной относительно точки N элементу ds.

[1]) $M = 2\pi b\gamma$; при выводе этой формулы Н. Е. Жуковский предполагает, что отношение $\frac{b}{a}$ есть величина малая. (*Прим. ред.*)

Так как угол, образованный двумя внутренними секущими, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами, то

$$ds + ds' = 2b\,d\alpha$$

и

$$\frac{\gamma}{2\pi a}\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,(ds+ds') = \frac{\gamma b}{\pi a}\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{M}{4\pi a},$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi a}\int_0^{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\,(ds+ds') = -\frac{\gamma b}{4\pi a}\int_0^{\pi}\sin 2\alpha\,2d\alpha = \frac{\gamma b}{4\pi a}\Big|_0^{\pi}\cos 2\alpha = 0.$$

Соединяя все скорости точки N, приходим к заключению, что результирующая этих скоростей для всякого места точки N внутри тора совпадает с поступательной скоростью [1]):

$$W = \frac{M}{2\pi a}\left[\ln\frac{8a}{b} - 1\right] + \frac{M}{4\pi a} = \frac{M}{2\pi a}\left[\ln\left(\frac{8a}{b}\right) - \frac{1}{2}\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, *все движение тора приводится к поступательному движению заключенной в нем массы жидкости вдоль оси тора со скоростью, данной формулой* (8).

Укажем под конец этой заметки, что формулы (4) и (5) удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

так как

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} + \frac{m\xi}{\pi a\rho^2} - \frac{m\xi^3}{a\pi\rho^4} =$$

$$= -\frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} + \frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{m}{\pi}\frac{\xi^2-\eta^2}{\rho^4} - \frac{m}{2\pi a}\frac{\xi}{\rho^2} + \frac{m}{\pi a}\frac{\xi\eta^2}{\rho^4}.$$

---

[1]) Этот случай соответствует указанному в курсе Бассе (Basset, A Treatise on Hydrodynamics, т. II, стр. 87—88) с помощью значительно более сложного анализа.

Точно так же формулы (4) и (5) удовлетворяют условию несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{a-\xi} u = 0,$$

ибо

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2} - \frac{m\xi^2\eta}{\pi a \rho^4} - \frac{2m}{\pi}\frac{\xi\eta}{\rho^4},$$

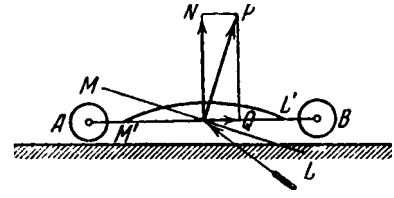
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{m}{2\pi a}\frac{\eta}{\rho^2} + \frac{m\eta\xi^2}{\pi a\rho^4} + \frac{2m}{\pi}\frac{\xi\eta}{\rho^4},$$

а при отбрасывании конечных величин перед величинами порядка $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{u}{a-\xi} = -\frac{m\eta}{a\pi\rho^2}.$$

О ПОДСАСЫВАЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ ПОТОКА ВОЗДУХА НА ПЛАСТИНКУ [1]).

§ 1. Марсель Депре [2]) в сообщении, напечатанном в Comptes Rendus, объясняет парение птиц восходящим потоком воздуха. Он описывает прибор (фиг. 1), в котором пластинка ML, увлекая за собой тележку AB, движется против потока воздуха, образующего с горизонталью AB некоторый малый угол $\frac{\pi}{2} - \mu$, больший угла наклонения пластинки к тележке. Действие прибора объясняется простым разложением силы P нормального давления ветра на пластинку: на подсасывающую силу Q и на силу N, уменьшающую вес аппарата. Для вогнутых пластинок может получиться подсасывающая сила против ветра даже в том случае, когда хорда $M'L'$ направлена по AB, как это следует из принципа Лилиенталя. Но надо думать, что подсасывающий эффект против ветра может получиться и для тонкой параллелепипедальной пластинки, направленной по AB. Это следует из наблюдений Д. П. Рябушинского [3]) над



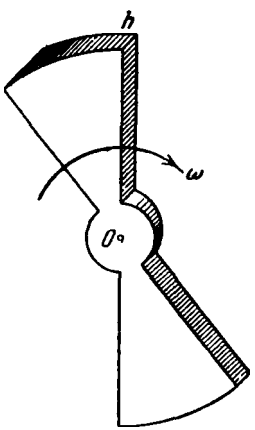
Фиг. 1.

[1]) Сообщено 6. X 1908 на заседании Московского Математического общества и впервые напечатано в Трудах Отделения физическнх наук Общества любителей естествознания, т. XIV, вып. 2, 1909.

[2]) Marcel Deprez, Comptes Rendus, т. CXLVI, № 15, 1908.

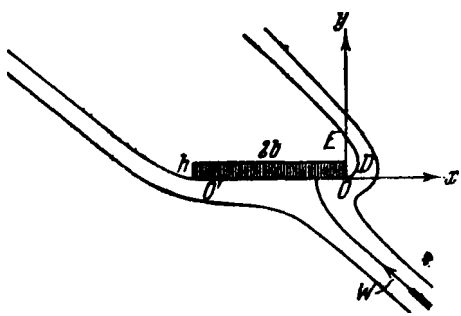
[3]) Bulletin de l' Institut Aérodynamique de Koutchino, вып. 1.

самовращением секторов в потоке воздуха, движущегося перпендикулярно к плоскости сектора. На фигуре 2 изображен такой сектор, который, находясь в потоке воздуха, движущегося параллельно оси сектора O, может сохранять сообщенное ему вращение с некоторой угловой скоростью ω. Эта угловая скорость зависит от угла наклонения $\frac{\pi}{2} - \mu$ направления относительного ветра к плоскости сектора на его концах и от толщины сектора h. При этом с уменьшением h возрастает ω. В предлагаемом сочинении мы указываем два течения жидкости, при которых может образоваться подсасывающий эффект ветра на пластинку. В первом течении невихревой поток образует при схождении с края пластинки свободную струю определенного вида, а во втором течении циркуляция скорости вокруг пластинки имеет определенную величину $2k$, не равную нулю, причем в этом случае мы рассматриваем пластинку, имеющую в сечении форму сжатого эллипса.



Фиг. 2.

§ 2. В моем сочинении «Видоизменение метода Кирхгофа» [1]) в § 7 рассматривается задача о косом ударе потока на пластинку. По данным мной формулам (формулы (27), (36) и (54)), можно определить отрезок OE (фиг. 3),



Фиг. 3.

[1]) Жуковский Н. Е., Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока, 1890 (стр. 489 настоящего тома).

который струя, сбегая с пластинки $O'O$, образует на перпендикуляре Oy к пластинке. Пока этот отрезок более толщины пластинки h, никакого подсасывающего эффекта в направлении Ox не должно получаться. Но если угол $\frac{\pi}{2} - \mu$ уменьшается, то наступает, наконец, положение, когда EO становится очень близко к h; тогда пространство ODE замыкается и в нем развивается пониженное давление, на которое указывает Базен [1]) в своей теории водосливов. Пониженное давление и вызывает подсасывающий эффект, действующий на пластинку в направлении Ox. Указанное соображение позволяет по данному отношению $\frac{h}{2b}$ толщины пластинки к ее ширине $2b = OO'$ определять угол $\frac{\pi}{2} - \mu$, при котором начинается подсасывание. Разлагая скорость потока w относительно пластинки на скорость v, перпендикулярную к пластинке, и скорость u, направленную по пластинке, замечаем, что эта последняя скорость будет равна и противоположна скорости движения пластинки, если речь идет о движении в потоке нормально к пластинке дующего ветра. Так как

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{u}{v},$$

то задача об определении нижнего предела скорости u сводится к определению μ под условием $OE = h$. На основании формул, приведенных в моем вышеуказанном сочинении, можно вывести несложное соотношение между μ и $\frac{h}{2b}$.

Потенциал скоростей φ на струе ODE выражается формулой:

$$\varphi = 2bw \frac{\cos^4 \mu}{\pi \cos \mu + 4} \frac{1}{(\sin \theta + \sin \mu)^2}, \qquad (1)$$

в которой θ выражает угол скорости жидкости с осью Oy, считаемый положительным, когда скорость от оси Oy уклоняется вправо.

[1]) Bazin, Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir, Paris, 1898.

Если назовем через dx и dy проекции на оси элемента ds линии тока ODE, то найдем:

$$dx = \frac{d\varphi}{w}\sin\theta, \quad dy = \frac{d\varphi}{w}\cos\theta,$$

откуда по формуле (1)

$$\left.\begin{aligned} dx &= -4b\frac{\cos^4\mu}{\pi\cos\mu+4}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3}, \\ dy &= -4b\frac{\cos^4\mu}{\pi\cos\mu+4}\,\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Определим значение угла $\theta = -\nu$ для точки пересечения E струи с осью Oy. Это значение найдем, составляя по первой формуле (2) величину x и полагая ее равной нулю:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\nu}\frac{\sin\theta\,d(\sin\theta)}{(\sin\theta+\sin\mu)^3} = 0. \tag{3}$$

Так как интегрирование по частям дает нам:

$$\int\frac{\sin\theta\,d(\sin\theta)}{(\sin\theta+\sin\mu)^3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^2}+\frac{1}{\sin\theta+\sin\mu}\right],$$

то формула (3) приводится к виду:

$$\frac{\sin\mu-2\sin\nu}{(\sin\mu-\sin\nu)^2}-\frac{\sin\mu+2}{(1+\sin\mu)^2} = 0. \tag{4}$$

Это квадратное уравнение имеет два корня. Один корень будет $\sin\nu = -1$ и соответствует пересечению контура ODE с осью Oy в точке O; другой корень будет

$$\sin\nu = \frac{\sin\mu}{2+\sin\mu} \tag{5}$$

и соответствует точке пересечения E.

Обращаемся теперь ко второй формуле (2) и пишем на основании ее, что

$$\frac{h}{2b} = \frac{-2\cos^4\mu}{\pi\cos\mu+4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\nu}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(\sin\theta+\sin\mu)^3}. \tag{6}$$

Чтобы удобнее взять входящий сюда интеграл, делаем сначала подстановку:

$$\sin\theta + \sin\mu = t.$$

Эта подстановка дает нам:

$$-\int \sqrt{1-(t-\sin\mu)^2}\,\frac{dt}{t^3} = \int \sqrt{\cos^2\mu - t^2 + 2t\sin\mu}\,\frac{1}{t}\,d\left(\frac{1}{t}\right);$$

потом полагаем, что

$$\operatorname{tg}\mu + \frac{\cos\mu}{t} = \frac{\cos\mu}{\sin\theta+\sin\mu} + \operatorname{tg}\mu = z;$$

при этом пределы z_0 и z_1 при интеграции по z выразятся так:

$$z_0 = \frac{1}{\cos\mu}, \tag{7}$$

$$z_1 = \frac{1}{\cos\mu} + 2\,\frac{\operatorname{ctg}\mu}{1+\sin\mu}$$

На основании сказанного формула (6) получает вид:

$$\frac{h}{2b} = \frac{2\cos^3\mu}{\pi\cos\mu+4}\int_{z_0}^{z_1}\sqrt{z^2-\frac{1}{\cos^2\mu}}\,dz. \tag{8}$$

Входящий сюда интеграл представляет площадь равносторонней гиперболы с действительной полуосью $\frac{1}{\cos\mu}$. Эта площадь отсекается от гиперболы хордой, перпендикулярной к действительной оси, отстоящей от вершины гиперболы на расстоянии $z_1 - z_0$. Выразив эту площадь, найдем искомое соотношение между $\frac{h}{2b}$ и μ, при котором начинается подсасывающий эффект потока на пластинку:

$$\frac{h}{2b} = \frac{\cos^3\mu}{\pi\cos\mu+4}\left[z_1\sqrt{z_1^2-\frac{1}{\cos^2\mu}} - \frac{1}{\cos^2\mu}\ln\left(\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-\frac{1}{\cos^2\mu}}}{\frac{1}{\cos\mu}}\right)\right]. \tag{9}$$

Здесь для вычисления второй части по таблицам гиперболических функций удобно ввести подстановку:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\cos\mu} + \frac{2\operatorname{ctg}\mu}{1+\sin\mu} = \frac{1}{\cos\mu}\operatorname{ch}\xi, \\ \operatorname{ch}\xi &= 1 + \frac{2\cos^2\mu}{(1+\sin\mu)\sin\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В силу этой подстановки формула (9) примет вид:

$$\frac{h}{2b} = \frac{\cos\mu}{\pi\cos\mu + 4}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\xi}{2} - \xi\right). \tag{11}$$

Мы видим из формулы (10), что с возрастанием μ величина ξ убывает, а потому отношение $\frac{h}{2b}$ тоже убывает. Это согласно с вышеупомянутыми наблюдениями над самовращением секторов. Пользуясь таблицами гиперболических функций, легко по данному μ из формулы (11) определить отношение $\frac{h}{2b}$.

§ 3. Предположим теперь, что пластинка имеет в перпендикулярном сечении форму весьма сжатого эллипса AB и что на нее ударяет под углом $\frac{\pi}{2} - \mu$ поток незавихренной жидкости, дающей по замкнутому контуру, охватывающему пластинку, циркуляцию скорости, равную $2k$, причем циркуляция берется в направлении, обратном движению стрелки часов. Покажем, что в рассматриваемом случае давление потока развивает поддерживающую силу, направленную по Oy, и подсасывающую силу, направленную по Ox. Будем пользоваться эллиптическими координатами, которым соответствует фокальное расстояние $2a$, близкое к длине нашей пластинки. Связь между декартовыми координатами x, y и эллиптическими ϑ, θ выражается известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\operatorname{ch}\vartheta\cos\theta, \\ y &= a\operatorname{sh}\vartheta\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если бы пластинка обтекалась потоком, текущим на большом расстоянии от нее в направлении xO со скоростью w_1 при циркуляции скорости по охватывающему контуру, равной

нулю, то потенциальная функция была бы

$$\varphi_1 = -w_1\alpha \operatorname{ch}\vartheta\cos\theta + Me^{-\vartheta}\cos\theta, \tag{13}$$

где постоянное M надо определить под условием, что при значении $\vartheta = \vartheta_0$, соответствующем эллипсу, ограничивающему пластинку, имеем $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta} = 0$. Мы получим:

$$M = -w_1\alpha e^{\vartheta_0}\operatorname{sh}\vartheta_0.$$

Подставляя эту величину в формулу (13), получим для точек, лежащих на пластинке:

$$\varphi_1 = -w_1\alpha e^{\vartheta_0}\cos\theta. \tag{14}$$

Если бы мы имели поток, текущий в бесконечности со скоростью w_2 в направлении Oy, то ему соответствовала бы на поверхности пластинки функция скорости:

$$\varphi_2 = w_2\alpha e^{\vartheta_0}\sin\theta. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь течение жидкости, в котором скорость в бесконечности равна нулю, а циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему пластинку, взятая против стрелки часов, есть $2k$. Это течение имеет потенциальную функцию скоростей:

$$\varphi_3 = \frac{k}{\pi}\theta. \tag{16}$$

Если сложить кинематически все три рассматриваемые течения жидкости, то получится течение, имеющее в бесконечности скорость

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2},$$

наклоненную к оси Oy под углом μ, причем

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{w_1}{w_2}. \tag{17}$$

Циркуляция скорости этого течения по контуру, охватывающему пластинку, будет $2k$. Значение потенциальной функции скоростей на поверхности пластинки ($\vartheta = \vartheta_0$) будет такое:

$$\varphi = \alpha e^{\vartheta_0}(-w_1\cos\theta + w_2\sin\theta) + \frac{k}{\pi}\theta. \tag{18}$$

Определим отсюда скорость V по контуру эллипса. Мы имеем по формулам (12):

$$V=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{a}\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta_0\sin^2\theta+\operatorname{sh}^2\vartheta_0\cos^2\theta}}=\frac{1}{a}\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}},$$

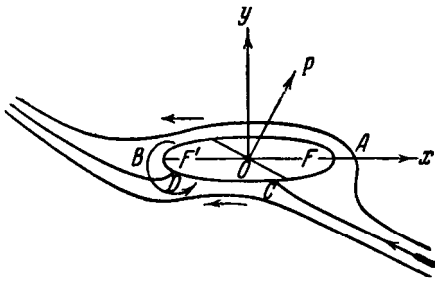
откуда по формуле (18)

$$V=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}}\left[(w_1\sin\theta+w_2\cos\theta)\,e^{\vartheta_0}+\frac{k}{\pi a}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}}\left[we^{\vartheta_0}\cos(\theta-\mu)+\frac{k}{\pi a}\right]. \qquad (19)$$

Критические точки на контуре пластинки найдем, приравнивая V нулю и определяя параметр θ из уравнения:

$$\cos(\theta-\mu)=-\frac{ke^{-\vartheta_0}}{\pi a w}. \qquad (20)$$



Фиг. 4.

Если $\frac{\pi}{2}+\lambda$ будет угол, косинус которого представляется второй частью уравнения (20), то искомые значения θ будут:

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\lambda+\mu,$$

$$\theta=3\frac{\pi}{2}-\lambda+\mu.$$

Эти значения определяют на фигуре две критические точки C и D, служащие точками раздела струй текущей жидкости.

Гидродинамическое давление во всякой точке, прилегающей к пластинке, на основании формулы (19) будет такое:

$$p=\text{const.}-\frac{\rho}{2(\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta)}\left[e^{2\vartheta_0}w^2\cos^2(\theta-\mu)+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2}{\pi^2a^2}+\frac{2ke^{\vartheta_0}}{\pi a}w\cos(\theta-\mu)\right]. \qquad (21)$$

Составляя по этой формуле проекции X и Y сил давления на оси координат, построенные на фигуре 4, заметим, что

все члены, имеющие в выражении (21) одинаковые значения для θ и $\theta+\pi$, в состав сил X и Y не войдут, и нам надо только обратить внимание на член

$$\frac{-ke^{\vartheta_0}wp}{\pi a\,(\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta)}\cos(\theta-\mu),$$

от которого получается:

$$X=\frac{kwe^{\vartheta_0}\rho}{\pi a}\int\frac{\cos(\theta-\mu)}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}\frac{dy}{ds}\,ds,$$

$$Y=-\frac{kwe^{\vartheta_0}\rho}{\pi a}\int\frac{\cos(\theta-\mu)}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}\frac{dx}{ds}\,ds,$$

где интеграция распространяется на весь контур пластинки. Сокращая на ds и выражая дифференциалы dy и dx по формулам (12) через $d\theta$, получаем при отбрасывании членов, сокращающихся в пределах интеграции:

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{kwe^{\vartheta_0}}{\pi}\rho\operatorname{sh}\vartheta_0\cos\mu\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta},\\ Y&=\frac{kwe^{\vartheta_0}}{\pi}\rho\operatorname{ch}\vartheta_0\sin\mu\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Совершаем интегрирование:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=\operatorname{ch}^2\vartheta_0\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}-\int_0^{2\pi}d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0\sin^2\theta+\operatorname{sh}^2\vartheta_0\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{4}{\operatorname{sh}\vartheta_0\operatorname{ch}\vartheta_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{cth}\vartheta_0\operatorname{tg}\theta)}{1+\operatorname{cth}^2\vartheta_0\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{2\pi}{\operatorname{sh}\vartheta_0\operatorname{ch}\vartheta_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}=2\pi\left(\frac{\operatorname{ch}\vartheta_0}{\operatorname{sh}\vartheta_0}-1\right)=\frac{2\pi e^{-\vartheta_0}}{\operatorname{sh}\vartheta_0}.$$

Другой интеграл, входящий во вторую формулу (22), будет иметь величину

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0 - \cos^2\theta} = \frac{2\pi e^{-\vartheta_0}}{\operatorname{ch}\vartheta_0}.$$

Это следует из того, что, складывая оба вышенаписанных равенства, получаем ранее выведенную формулу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0 - \cos^2\theta} = 2\pi e^{-\vartheta_0} \frac{\operatorname{ch}\vartheta_0 + \operatorname{sh}\vartheta_0}{\operatorname{ch}\vartheta_0 \operatorname{sh}\vartheta_0} = \frac{2\pi}{\operatorname{ch}\vartheta_0 \operatorname{sh}\vartheta_0}.$$

Подставляем величины найденных интегралов в формулы (22) и обращаем внимание на то, что $w\cos\mu = w_2$, $w\sin\mu = w_1$. Получаем выражение компонентов силы давления на пластинку по осям координат:

$$X = 2k w_2 \rho, \quad Y = 2k w_1 \rho. \tag{23}$$

Так как при принятом направлении осей оба эти компонента положительны, то поток дает на нашей фигуре 4 подъемную силу Y и подсасывающий эффект X против относительного ветра. Формулы (23) вполне согласны с общей теоремой, предложенной в моей статье «О присоединенных вихрях». Согласно этой теореме сила действия потока на пластинку получилась бы через умножение вектора w на $2k\rho$ и через его поворот на прямой угол в сторону, обратную циркуляции. Проекции полученного при этом вектора на оси координат, как легко усмотреть, и выражаются формулами (23).

О ЗАМЕНЕ ДИСКА РЕЛЕЯ ПРОДОЛГОВАТОЙ ПЛАСТИНКОЙ [1].

В. Д. Зернов [2] устроил прибор для определения абсолютной силы звука, в котором диск Релея заменяется продолговатой пластинкой. В этой заметке предлагается простая формула для определения момента гидродинамических давлений стоячей звуковой волны на пластинку, перпендикулярное сечение которой есть эллипс. Гидродинамическое давление невихревого течения выражается известной формулой:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{V^2}{2}, \tag{1}$$

в которой ρ — плотность жидкости, V — ее скорость в данной точке, а φ — потенциальная функция скоростей. Примем для рассматриваемого случая

$$\varphi = \psi f, \tag{2}$$

где ψ — периодическая функция времени, а f — функция координат x, y, удовлетворяющая уравнению Лапласа, дающая на поверхности пластинки $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ и в бесконечности

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -w \sin \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = w \cos \mu. \tag{3}$$

Если наибольшее значение периодической функции есть единица, то w представляет наибольшую скорость колеба-

---

[1] Сообщено 28.IX Московскому математическому обществу и впервые напечатано в Математическом сборнике, т. XXVI, 1909.

[2] Зернов В. Д., Абсолютное измерение силы звука, Москва, 1909.

тельного движения; что касается угла μ, то он заключен между направлением колебательного движения и осью Oy, как это изображено на фигуре 1. Чтобы удобнее определить функцию f, воспользуемся эллиптическими координатами ϑ и θ, которые связаны с декартовыми координатами x, y известными соотношениями:

$$x = \alpha \operatorname{ch}\vartheta \cos\theta, \quad y = \alpha \operatorname{sh}\vartheta \sin\theta, \tag{4}$$

причем величина α равна фокусному расстоянию эллипса, соответствующего сечению пластинки. Если бы течение воздуха было направлено по xO со скоростью $w\sin\mu$, то функция f получила бы значение:

$$f_1 = -w\alpha \sin\mu \operatorname{ch}\vartheta \cos\theta + Me^{-\vartheta}\cos\theta,$$

где постоянное M определилось бы из условия, что при $\vartheta = \vartheta_0$, причем ϑ_0 — значение параметра на поверхности пластинки, $\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta}$ обращается в нуль. Это дает нам:

$$-w\alpha \sin\mu \operatorname{sh}\vartheta_0 - Me^{-\vartheta_0} = 0, \quad M = -w\alpha e^{\vartheta_0}\sin\mu \operatorname{sh}\vartheta_0.$$

Подставляя значение M в выражение для f_1, найдем для точек, лежащих на поверхности пластинки:

$$f_1 = -w\alpha e^{\vartheta_0}\sin\mu\cos\theta. \tag{5}$$

Рассуждая подобным же образом о случае, в котором течение совершается в направлении Oy со скоростью $w\cos\mu$, найдем для него:

$$f_2 = w\alpha e^{\vartheta_0}\cos\mu\sin\theta. \tag{6}$$

Если сложим f_1 и f_2, то получим значение на поверхности пластинки функции f в предположении, что направление течения образует с осью Oy угол μ. Это значение будет:

$$f = w\alpha e^{\vartheta_0}\sin(\theta - \mu). \tag{7}$$

На основании формулы (2) потенциальная функция скоростей для точек, лежащих на поверхности пластинки, представится в виде:

$$\varphi = w\alpha\psi e^{\vartheta_0}\sin(\theta - \mu). \tag{8}$$

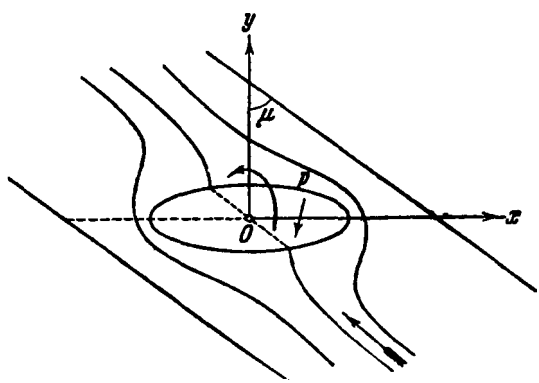
С помощью формул (8) и (4) определим скорость жидкости V на поверхности пластинки:

$$V = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}} = \frac{w\psi e^{\vartheta_0}\cos(\theta-\mu)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta}}. \qquad (9)$$

Подстановка формул (2) и (9) в формулу (1) дает для гидродинамического давления на поверхности пластинки выражение:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} + w\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}e^{\vartheta_0}\sin(\theta-\mu) - \frac{w^2\psi^2 e^{2\vartheta_0}\cos^2(\theta-\mu)}{2(\operatorname{ch}^2\vartheta_0-\cos^2\theta)}. \qquad (10)$$

Составим теперь величину L момента сил давления относительно оси O нашей пластинки (фиг. 1). Величина



Фиг. 1.

момента, отнесенная к единице длины пластинки, выразите формулой:

$$L = -\int p\left(y\frac{dy}{ds}+x\frac{dx}{ds}\right)ds = -\int_0^{2\pi} p\left(y\frac{dy}{d\theta}+x\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\frac{d(x^2+y^2)}{d\theta}\,d\theta.$$

Но формула (4) дает нам:

$$x^2+y^2 = \alpha^2(\operatorname{ch}^2\vartheta-\sin^2\theta),$$

$$d(x^2+y^2) = -\alpha^2\sin 2\theta\,d\vartheta,$$

поэтому

$$L = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} p \sin 2\theta \, d\theta. \tag{11}$$

Подставляя в формулу (11) значение p, обращаем внимание на то, что члены, содержащие в числителе $\sin^2\theta\cos\theta$ и $\sin^3\theta\cos\theta$, в пределах интеграции дадут в результате нули, потому что имеют одинаковые по величине и различные по знаку значения при θ и $\pi - \theta$; равным образом члены, содержащие в числителе $\cos^2\theta\sin\theta$ и $\cos^3\theta\sin\theta$, в пределах интеграции дадут в результате нули, так как имеют равные по величине, но различные по знаку значения при θ и $2\pi - \theta$. У нас остается только член, содержащий в числителе $\sin^2\theta\cos^2\theta$. Таким образом,

$$L = -2w^2a^2\psi^2\rho\, e^{2\vartheta_0} \sin 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0 - \cos^2\theta}\, d\theta. \tag{12}$$

Входящий сюда интеграл легко берется:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0 - \cos^2\theta}\, d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta + \operatorname{ch}^2\vartheta_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\operatorname{ch}^2\vartheta_0 - \cos^2\theta} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} e^{-\vartheta_0}\operatorname{ch}\vartheta_0 = \frac{\pi}{4} e^{-2\vartheta_0}.$$

Подставляя в формулу (12), получаем искомое выражение момента гидродинамических давлений, действующих на пластинку эллиптического сечения:

$$L = -\frac{\pi}{2}\psi^2 w^2 a^2 \rho \sin 2\mu. \tag{13}$$

Знак (—) в этой формуле показывает, что при $\mu < \frac{\pi}{2}$ гидродинамические силы стремятся повернуть пластинку (фиг. 1) против стрелки часов. Если колебание скорости потока совершается довольно быстро, как это имеет место в звуковой волне, то надо рассматривать среднюю величину L

и брать в формуле (13) среднее значение периодической функции ψ^2. Например, если $\psi = \sin\frac{2\pi t}{T}$, то надо брать среднюю величину от $\sin^2\frac{2\pi t}{T}$ за время, значительно превосходящее T, т. е. подставлять в формулу (13) вместо ψ^2 величину, равную $\frac{1}{2}$.

Формула (13) показывает нам, что момент сил, вращающих пластинку в стоячей звуковой волне, пропорционален квадрату наибольшей скорости колеблющегося воздуха, синусу двойного угла, образованного направлением колебания с малой осью эллиптического сечения пластинки, и квадрату фокусного расстояния этого сечения. Последнее обстоятельство приводит нас к любопытному заключению, что звуковая волна действует на все софокусные эллиптические пластинки одинаково.

О СПУТНОЙ ВОЛНЕ [1]).

§ 1. Когда я сообщал эту работу в Математическом обществе, мне не было известно напечатанное в 1898 г. сочинение Митчеля [2]) «О волновом сопротивлении корабля», результаты которого близко подходят к найденным мной. Но так как данный мной анализ более прост, нежели анализ Митчеля, и в моей работе имеется определение очертания судна наименьшего волнового сопротивления для мелкой воды и подробный разбор одного интересного обвода судна для глубокой воды, чего нет в работе Митчеля, то я счел небесполезным напечатать мое сообщение.

§ 2. Предполагаем, что на мелкой воде глубины h движется судно цилиндрической продолговатой формы, погруженное при вертикальной образующей в воду на глубину, близкую к h. Пусть основание судна имеет ось симметрии, по которой направлена скорость судна V. Расположим плоскость Oxy на поверхности невозмущенной воды так, чтобы ось Oy направилась по оси симметрии судна в сторону, обратную его скорости, а ось Oz возьмем по вертикальной линии вниз. Прибавим ко всей системе (судно и вода) скорость, обратную скорости V, и будем рассматривать установившееся движение воды относительно неподвижного судна.

---

[1]) Сообщено 29. IX 1903 Московскому математическому обществу и впервые напечатано в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XIV, вып. 1, 1909.

[2]) Michell, The Wave-Resistance of a Ship, Philosophical Magazine т. 45.

Компоненты скорости частицы воды в этом движении будут: u, $v+V$, w, где u, v и w — малые величины. Представим уравнение возмущенной свободной поверхности воды в виде

$$z = \zeta, \tag{1}$$

где малая величина ζ является функцией x и y, и подберем эту функцию так, чтобы удовлетворить уравнениям гидродинамики положениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p-p_0}{\rho} &= g(z-\zeta); \\ w &= \frac{h-z}{h}\frac{\partial\zeta}{\partial y}V. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Первые два уравнения гидродинамики, принимая во внимание, что движение есть установившееся, и отбрасывая малые члены выше первого порядка, дают нам:

$$g\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}V, \quad g\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}V; \tag{3}$$

третье же уравнение при отбрасывании вертикального ускорения частиц жидкости обращается в тождество.

Что касается условия несжимаемости, то оно на основании формулы (2) будет такое:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{V}{h} = 0.$$

Возьмем от обеих частей этого равенства производную по y и напишем на основании формулы (3):

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{V^2-\lambda^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}, \tag{4}$$

где

$$\lambda = \sqrt{gh} \tag{5}$$

есть скорость волны на рассматриваемой мелкой воде. Примем, что

$$V > \sqrt{hg}, \tag{6}$$

и положим

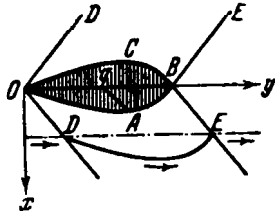
$$k = \frac{\sqrt{V^2-\lambda^2}}{\lambda}. \tag{7}$$

Общий интеграл уравнения (4) напишется при этом в виде:

$$\zeta = F(y - kx) + F_1(y + kx), \tag{8}$$

где F и F_1 суть произвольные функции.

Берем для части жидкости, лежащей с левой стороны судна (считая по фигуре 1 по его движению), $F_1 = 0$ и полагаем



Фиг. 1.

$$\zeta = F(y - kx). \tag{9}$$

При этом для всех точек, лежащих на одной из прямых семейства

$$y - kx = q, \tag{10}$$

величины ζ одинаковы. Что касается параметра q, то он представляет отрезок упомянутой прямой на оси Oy. Вообразим, что начало O помещено на носу судна, и будем приписывать функции $F(q)$ значение нуль для всех отрицательных q, а равно и для всех положительных значений q, бо́льших l, где l — длина судна. Значение $F(q)$ при $l > q > 0$ найдется по уравнению обвода судна OAB:

$$x = f(q), \tag{11}$$

в котором x мы будем считать малой величиной сравнительно с l. Определим из уравнений (9) и (3) малую скорость u:

$$u = -\frac{kg}{V} F(y - kx) = -\frac{kg}{V} F(q). \tag{12}$$

По малости u тангенс угла наклонения горизонтальной проекции линии тока к оси Oy получится через разделение u на $v + V$ или с приближением — просто на V. Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{kg}{V^2} F(q). \tag{13}$$

Этому дифференциальному уравнению должно удовлетворять уравнение (11) горизонтального обвода судна. На основании формулы (10) подставим в формулу (13)

$$dy = dq + k\,dx$$

и напишем:

$$F(q) = -\frac{V^2 \frac{dx}{dq}}{kg\left(1 + k\frac{dx}{dq}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta = F(q) = -\frac{V^2 f'(q)}{kg\,[1 + kf'(q)]}. \qquad (14)$$

С помощью уравнения (14) будем знать высоту жидкости во всех точках, заключенных между прямыми OD и BE, проведенными через нос и корму судна под углом α к оси Oy, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{V^2 - \lambda^2}}. \qquad (15)$$

Что касается горизонтальных проекций траекторий частиц жидкости между прямыми OD и BE, то все они согласно формуле (13) будут тождественны с линией обвода судна OAB. Таким образом, вне пространства, заключенного между прямыми OD и BE, траектории относительного движения жидкости прямолинейны и $\zeta = 0$, в промежутке же между упомянутыми прямыми горизонтальные проекции траекторий имеют форму обвода судна.

Посмотрим, как в этом промежутке изменяется высота воды ζ. Вследствие малости $f'(q)$ формулу (14) можно приближенно написать в виде:

$$\zeta = -\frac{V^2}{kg} f'(q). \qquad (14')$$

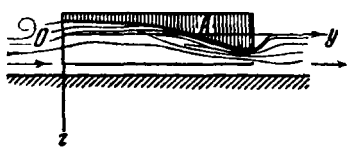
Здесь при изменении q от 0 до l, т. е. при перемещении от носа к корме, мы имеем (фиг. 1) убывание производной $f'(q)$ от положительного значения ее в точке O до отрицательного значения ее в точке B с переходом через нуль в некоторой точке обвода A. Это показывает, что величина ζ сначала отрицательна, потом переходит через нуль и делается положительной. На фигуре 2 представлена поверхность воды, омывающей судно.

Из всего сказанного видно, что вся деформированная поверхность воды слева от судна будет заключена между

параллелями OD и BE. Эту деформированную поверхность и называют спутной волной. Подобно тому, как мы построили левую спутную волну, мы можем построить правую спутную волну, положив в формуле (8) $F=0$ и приняв

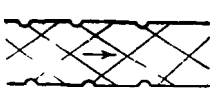
$$\zeta = F_1(y + kx).$$

Так как мы предположили, что обводы судна симметричны относительно оси Oy, то $F_1(q) = F(q)$, и правая спутная волна будет во всех своих частях симметрична левой. Если бы правый обвод судна отличался от левого, то правая спутная волна отличалась бы от левой, но границы ее остались бы симметричными границам левой спутной волны, т. е. правая волна была бы заключена между двумя прямыми OD и BE, образующими с осью Oy вышеуказанный угол α.



Фиг. 2.

Рассмотренное явление служит объяснением стоячих волн, образующихся на быстро бегущих мелких потоках и имеющих вид, изображенный на фигуре 3. От левого берега отходят левые спутные волны, а от правого — правые. Слагаясь, эти волны образуют рябь в форме ромбов.


Фиг. 3.

§ 3. Определим теперь волновое сопротивление R судна от действия спутной волны. Мы имеем:

$$R = 2h\int p\frac{dx}{ds}\,ds.$$

Заменяем с приближением ds на dy и замечаем, что вследствие малости $\frac{dx}{dy}$ по (10) имеем:

$$dy = dq, \quad R = 2h\int p\frac{dx}{dq}\,dq.$$

Так как постоянный для данной горизонтали член gz в фор-

муле (2) не имеет влияния на R, то можно написать:

$$R = -2\rho g h \int \zeta \frac{dx}{dq}\, dq.$$

Подставляем сюда выражение (14′):

$$R = \frac{2\rho V^2 h}{k} \int_0^l [f'(q)]^2\, dq. \tag{16}$$

Пользуясь формулой (16), можно подобрать форму горизонтальных обводов плоского судна данного водоизмещения и данной длины так, чтобы волновое сопротивление R представляло наименьшую величину. Для определения функции $f(q)$ мы должны искать наименьшее значение

$$\int_0^l [f'(q)]^2\, dq$$

под условием

$$\int_0^l f(q)\, dq = \frac{a}{2h}, \tag{17}$$

где a — водоизмещение. Вводя постоянный множитель $-\mu$, берем:

$$\delta \int_0^l \left\{ -\mu f(q) + [f'(q)]^2 \right\} dq = \int_0^l \delta[f(q)][-\mu + 2f''(q)]\, dq = 0;$$

при этом мы приняли во внимание, что при $q = 0$ и $q = l$ имеется:

$$\delta[f(q)] = 0.$$

Дифференциальное уравнение наивыгоднейшего обвода будет:

$$f''(q) = -\frac{\mu}{2} = \frac{d^2x}{dq^2}.$$

Интегрируя и принимая во внимание условия $x = 0$ при $q = 0$ и $q = l$, находим:

$$x = \frac{\mu}{4} q(l - q), \tag{18}$$

или

$$-x+\frac{\mu l^2}{16}=\frac{\mu}{4}\left(\frac{l}{2}-q\right)^2. \tag{18'}$$

Последний вид уравнения показывает, что наивыгоднейший обвод представляет (фиг. 1) параболу OAB, для которой касательная, параллельная оси Oy, сопряжена с направлением передней границы OD спутной волны фигуры 1. Так как при $q=\frac{l}{2}$ имеем:

$$x=\frac{\mu l^2}{16},$$

то эта последняя величина есть полуширина миделевого сечения. Что касается постоянного множителя μ, то он определяется через a из формулы (17):

$$\frac{1}{24}l^3\mu=\frac{a}{h}\ ;\quad \mu=\frac{24a}{l^3h}. \tag{19}$$

Отсюда по уравнению (18'):

$$x'=\frac{6a}{l^3h}(l-2q)=f'(q).$$

Подставляем в формулу (16) и принимаем приближенно $k=V:\lambda$. Получаем:

$$R=\frac{36a^2\rho V^2}{hl^6k}\int_0^l(l-2q)^2\,d(2q)=\frac{24a^2\rho}{hl^3k}V^2=\frac{24a^2}{l^3h}\rho V\lambda. \tag{20}$$

Эта формула показывает, что сопротивление при наивыгоднейшей форме для данного водоизмещения обратно пропорционально кубу длины судна.

§ 4. Переходим к рассмотрению спутной волны на жидкости большой глубины. Сообщаем всей системе скорость V, обратную скорости движения судна, и, расположив оси координат, как в предыдущих параграфах, будем рассматривать установившееся относительно судна течение жидкости с компонентами скоростей u, $v+V$, w.

Постараемся подобрать малую величину ζ в деформированной поверхности такой функцией x, y, при которой

уравнения гидродинамики удовлетворяются положениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p-p_0}{\rho} &= g\left(z-\zeta e^{-\frac{z}{\mu}}\right), \\ w &= e^{-\frac{z}{\mu}}\frac{\partial\zeta}{\partial y}V. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Подстановка этих формул в уравнения гидродинамики при условии малости u, v, w и ζ дает нам:

$$\left.\begin{aligned} \frac{g}{V}\frac{\partial\zeta}{\partial x}e^{-\frac{z}{\mu}} &= \frac{du}{dy}, \quad \frac{g}{V}\frac{\partial\zeta}{\partial y}e^{-\frac{z}{\mu}} = \frac{dv}{dy}, \\ g\left(1+\frac{\zeta}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}\right) &= g-e^{-\frac{z}{\mu}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}V^2, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

причем последняя из этих формул приводится к виду:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{g}{\mu V^2}\zeta = 0. \tag{23}$$

Берем условие несжимаемости, обращая внимание на вторую формулу (21):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}\frac{\partial\zeta}{\partial y}V = 0.$$

Составляем производную по y от первой части:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}V = 0,$$

и преобразуем с помощью двух первых формул (22):

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\left(1-\frac{g\mu}{V^2}\right)-\frac{g\mu}{V^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{24}$$

Это уравнение на основании формулы (23) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{g\mu}{V^2}\right)\zeta = 0. \tag{25}$$

Формулы (23) и (25) служат для определения ζ. Мы удовлетворяем им положением:

$$\zeta = -AXY, \tag{26}$$

где X есть функция одного x, а Y есть функция одного y, определяемые из дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{g}{\mu V^2} Y = 0, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2}\left(1 - \frac{g\mu}{V^2}\right) X = 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Удовлетворяя этим уравнениям, мы можем взять:

$$Y = \sin\left(\sqrt{\frac{g\mu}{V^2}}\frac{y}{\mu}\right), \quad X = \cos\left(\sqrt{1 - \frac{g\mu}{V^2}}\frac{x}{\mu}\right);$$

тогда

$$\zeta = -A \sin\left(\sqrt{\frac{g\mu}{V^2}}\frac{y}{\mu}\right)\cos\left(\sqrt{1 - \frac{g\mu}{V^2}}\frac{x}{\mu}\right).$$

Точно так же мы можем взять:

$$Y = \cos\left(\sqrt{\frac{g\mu}{V^2}}\frac{y}{\mu}\right), \quad X = \sin\left(\sqrt{1 - \frac{g\mu}{V^2}}\frac{x}{\mu}\right);$$

тогда

$$\zeta = -A \cos\left(\sqrt{\frac{g\mu}{V^2}}\frac{y}{\mu}\right)\sin\left(\sqrt{1 - \frac{g\mu}{V^2}}\frac{x}{\mu}\right).$$

Составляем разность и сумму двух указанных решений ζ и складываем результаты при коэффициентах A и A_1:

$$\zeta = -A \sin\left(\frac{\sqrt{g\mu}\, y - xk}{V}\right) - A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{g\mu}\, y + xk}{V}\right), \tag{28}$$

где для сокращения положено:

$$k = \frac{\sqrt{V^2 - g\mu}}{\sqrt{g\mu}} \tag{29}$$

Формула (29) аналогична формуле (7) для мелкой воды, причем произвольная длина μ играет роль h для мелкой воды. Примем, что длина μ удовлетворяет неравенству

$$V > \sqrt{g\mu}, \tag{30}$$

и остановимся для левой спутной волны на предположении $A_1 = 0$, так что

$$\zeta = -A \sin\left[\frac{\sqrt{g\mu}\,(y - xk)}{V}\right]. \tag{31}$$

Скорости u, v, w для левой волны на основании формул (21), (22) и (31) будут:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,\frac{g}{V}\,e^{-\frac{z}{\mu}}\,k\sin\left[\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{(y-kx)}{\mu}\right],\\ v &= -A\,\frac{g}{V}\,e^{-\frac{z}{\mu}}\sin\left[\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{(y-kx)}{\mu}\right],\\ w &= -A\,\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,e^{-\frac{z}{\mu}}\cos\left[\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{(y-kx)}{\mu}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Эти компоненты скорости имеют потенциал скоростей:

$$\varphi = A\sqrt{g\mu}\,e^{-\frac{z}{\mu}}\cos\left[\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{(y-kx)}{\mu}\right], \tag{33}$$

поэтому рассматриваемое движение жидкости есть невихревое.

Формулы (31) и (32) показывают, что все точки, лежащие с левой стороны судна на одной и той же прямой

$$y - kx = q, \tag{34}$$

будут иметь одну и ту же высоту и будут двигаться одинаково. Если выберем длину μ под условием

$$\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{l}{\mu} = 2\pi, \tag{35}$$

где l — длина судна, то при $q=0$ и $q=l$ будем иметь $u=v=\zeta=0$. Мы можем сомкнуть равномерное и прямолинейное движение со скоростью V жидкости, лежащей вне пространства, заключенного между вертикальными плоскостями

$$y - kx = 0, \quad y - kx = l,$$

с движением жидкости между этими плоскостями, совершающимся с потенциалом скоростей

$$\varphi + Vy;$$

при этом на граничных плоскостях высота ζ и горизонтальные составляющие скорости будут одинаковы, но верти-

кальные составляющие скорости получаются различные, именно с одной стороны $w = 0$, а с другой

$$w = -A\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,e^{-\frac{z}{\mu}}.$$

Эта неточность внесет некоторое изменение в высоту ζ около границ спутной волны, заключенной между упомянутыми вертикальными плоскостями.

Первое уравнение (32) позволяет нам определить горизонтальные обводы судна при рассматриваемом движении жидкости. Мы имеем при $z = 0$, заменяя приближенно ds на dy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Agk}{V^2}\sin\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,q\right) = \frac{dx}{dq + k\,dx},$$

откуда

$$\frac{dx}{dq} = \frac{\frac{Agk}{V^2}\sin\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,q\right)}{1 - \frac{Agk^2}{V^2}\sin\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,q\right)}.$$

Здесь по малости A можно взять:

$$\frac{dx}{dq} = \frac{Agk}{V^2}\sin\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,q\right), \tag{36}$$

или с несколько меньшим приближением, полагая что

$$k = \frac{V}{\sqrt{g\mu}}, \tag{37}$$

написать:

$$\frac{dx}{dq} = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\sin\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\,q\right). \tag{36'}$$

Интегрируем и определяем постоянное под условием: $x = 0$ при $q = 0$. Получаем:

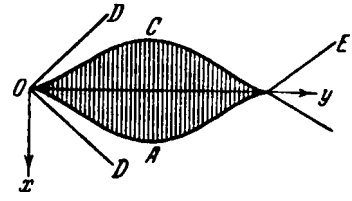
$$x = A\left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\,\frac{q}{\mu}\right)\right]. \tag{38}$$

Найденная кривая прикасается к оси Oy в точках $q = 0$ и $q = l$, как это представлено на фигуре 4. Все горизонтальные проекции траекторий поверхностных частиц жидко-

сти внутри левой спутной волны будут иметь тот же вид, как указанные обводы судна. Правая спутная волна найдется подобным же образом, положив:

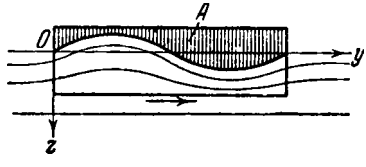
$$q = y + kx, \qquad (34')$$

причем мы будем иметь полную симметрию справа и слева.

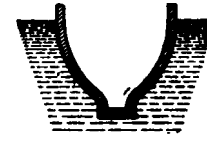


Фиг. 4.

Что касается высоты жидкости ($-\zeta$), то она, согласно формуле (31), при изменении q от 0 до l начинает подниматься у носа судна, достигает своего наибольшего значения при $q = \frac{l}{4}$, обращается в нуль при $q = \frac{l}{2}$ и потом в симметричном порядке понижается ниже спокойной воды, как это представлено на фигуре 5. Формула (38) дает нам горизонтальные обводы судна при поверхности воды.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Если бы мы желали найти горизонтальные обводы судна на глубине z, то следовало бы воспользоваться уравнением:

$$x = Ae^{-\frac{z}{\mu}}\left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{g\mu}}{V}\frac{q}{\mu}\right)\right]. \qquad (39)$$

Мы видим, что при одном и том же q закон изменения x с глубиной z выражается логарифмикой. Миделево сечение рассматриваемого нами судна имеет сходство с сечениями, употребляемыми на практике (фиг. 6).

§ 5. Переходим к определению силы сопротивления R, оказываемой рассматриваемому судну спутной волной. Элемент этой силы dR на часть смоченной поверхности, заклю-

ченную между двумя весьма близкими горизонтальными сечениями, отстоящими друг от друга на dz, выражается аналогично формуле (16) и согласно формуле (39) в виде:

$$dR = \frac{2\rho A^2}{k}\frac{g}{\mu}e^{-\frac{2z}{\mu}}dz\int_0^l \sin^2\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{g}{\mu}}q\right)dq = \frac{\rho A^2}{k}\frac{g}{\mu}e^{-\frac{2z}{\mu}}l\,dz.$$

Называя глубину погружения судна через h, будем иметь:

$$R = \frac{\rho A^2}{k}\frac{gl}{\mu}\int_0^h e^{-\frac{2z}{\mu}}dz.$$

Мы будем считать h значительно бо́льшим, нежели μ, и положим приближенно:

$$\int_0^h e^{-\frac{2z}{\mu}}dz = \frac{\mu}{2},$$

так что

$$R = \frac{\rho g A^2}{2k}l. \tag{40}$$

Коэффициент A определяем с помощью водоизмещения a. Мы имеем по формуле (39):

$$a = Al\int_0^h e^{-\frac{z}{\mu}}dz = Al\mu, \quad A = \frac{a}{l\mu}$$

Подставляем в (40):

$$R = \frac{\rho g a^2}{2kl\mu^2} = \frac{\rho g a^2 \lambda}{2Vl\mu^2},$$

где

$$\lambda = \sqrt{g\mu}. \tag{41}$$

Но по формуле (35)

$$\mu = \frac{\lambda l}{2\pi V}, \tag{42}$$

поэтому

$$R = \frac{2\pi^2\rho a^2 V\lambda}{l^3\mu}. \tag{43}$$

Эта формула имеет сходство с формулой (20), причем роль h играет μ, и вместо числового коэффициента 24 входит несколько меньший коэффициент $2\pi^2 = 19{,}74$. Суда рассматриваемого типа при данных a, l и V вполне определены, ибо по формулам (41) и (42) имеем:

$$\lambda = \frac{gl}{2\pi V}, \quad \mu = \frac{gl^2}{4\pi^2 V^2}. \tag{44}$$

Что касается силы R, то она по указанным данным выражается формулой

$$R = \frac{4\pi^3 \rho a^2}{l^4} V^2. \tag{45}$$

ДЕЙСТВИЕ ВОЛНУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ГЛУБИНЫ НА ПЛАВАЮЩИЕ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА [1]).

§ 1. Мы предлагаем здесь простой анализ, позволяющий разъяснить действие волнующейся тяжелой жидкости на тела, плавающие на ее поверхности, для случая, когда жидкость заключена в резервуаре с горизонтальным дном весьма незначительной глубины h сравнительно с горизонтальными размерами резервуара и напряжением тяжести g (единица времени $1''$). Припомним уравнения волнообразного движения тяжелой жидкости малой глубины. Пусть плоскость координат Oxy падает со свободной поверхностью покоящейся жидкости, а ось Oz направлена по вертикали вниз. Представим уравнение свободной поверхности волнующейся жидкости в виде

$$z = \zeta, \tag{1}$$

где ζ есть некоторая функция от x, y, t, малая сравнительно с h. Постараемся удовлетворить уравнениям гидродинамики, считая компоненты скорости u и v по осям Ox и Oy функциями x, y, t, а компонент скорости w по оси z

---

[1]) Подготовлено к печати А. П. Котельниковым по двум черновым рукописям, в некоторой части содержащим почти исключительно математические выкладки без сопроводительного текста (см. фотографию на вклейке). Текст и формулы, вставленные А. П. Котельниковым, ниже даны в квадратных скобках. Статья впервые напечатана в Трудах Центрального аэрогидродинамического института, вып. 85, 1931. (*Прим. ред.*)

представляя в виде

$$w = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v\right) \frac{h - z}{h},$$

что удовлетворяет условию (1) и дает $w = 0$ при $z = h$. По незначительности u и v и малости ζ, а следовательно, и его производных $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ (мы исключаем случай резкого изгиба свободной поверхности), мы можем опустить в вышенаписанной формуле члены, зависящие от скоростей u и v, и написать

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{h - z}{h}. \tag{2}$$

Эта формула позволит нам представить условие неизменяемости объема в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{3}$$

Составляем теперь третье уравнение гидродинамики, отбрасывая в нем члены, содержащие произведения скоростей на их производные:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{h - z}{h}.$$

Умножаем на dz и интегрируем в пределах от ζ до z:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g(z - \zeta) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \left(z - \zeta - \frac{z^2 - \zeta^2}{2h}\right). \tag{4}$$

Здесь третий член, содержащий два весьма малых множителя $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ и $(z - \zeta)$ (отношение $\frac{z + \zeta}{2h}$ мы считаем конечной величиной), может быть отброшен, и мы получим выражение гидродинамического давления:

$$p = p_0 + g\rho(z - \zeta) \tag{5}$$

такое же, какое имело бы место в гидростатике.

Пользуясь формулой (5), напишем два первых уравнения гидродинамики при отбрасывании в них членов, зависящих от произведений скоростей и их производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{6}$$

Формулы (3), (5), (6) решают задачу о волнообразном движении жидкости.

Исключая из (3) и (6) величины u и v, найдем для определения ζ уравнение с частными производными:

$$a^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \tag{7}$$

где для сокращения письма положено:

$$a=\sqrt{gh}. \tag{8}$$

Определив функцию ζ, удовлетворяющую уравнению (7) и граничным условиям, будем на основании формулы (1) знать свободную поверхность жидкости, а по формулам (5) и (6) найдем p, u и v.

В частном случае, когда движение жидкости совершается в двух измерениях и $v=0$, уравнение (7) принимает вид:

$$a^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \tag{9}$$

и удовлетворяется общим интегралом

$$\zeta=f(at-x)+\varphi(at+x), \tag{10}$$

где f и φ — произвольные функции, из которых первая соответствует вправо бегущей волне со скоростью a, а вторая волне, бегущей с той же скоростью влево.

Формулы (3) и (6) для рассматриваемого случая движения в двух измерениях получают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{h}\frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=g\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \tag{11}$$

Подставляя сюда значение ζ из формулы (10), находим:

$$u=\sqrt{\frac{g}{h}}\{-f(at-x)+\varphi(at+x)\}, \tag{12}$$

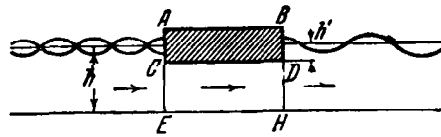
$$w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cdot\frac{h-z}{h}.$$

§ 2. Переходим теперь к интересующему нас вопросу, который рассмотрим подробно для случая движения жидкости в двух измерениях. Пусть сначала тело AB, имеющее

форму прямоугольной доски, погружено на некоторую глубину h' в рассматриваемую нами волнующуюся жидкость и держится неподвижно (фиг. 1).

Давление P на смоченный вертикальный край доски A будет:

$$P = \int_{\zeta}^{h'} p\,dz.$$



Фиг. 1.

Подставляем сюда значение p из формулы (4), в которой в нашем случае вследствие $u = 0$ член, зависящий от $\frac{\partial w}{\partial x}$, не приблизительно, а вполне точно отсутствует. Мы получаем с точностью до членов второго порядка $\left(\text{относительно } \zeta \text{ и } \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)$:

$$P = p_0(h' - \zeta) + g\rho\frac{(h'-\zeta)^2}{2} - \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\frac{(h'-\zeta)^2}{2} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\frac{h'^3}{6h}. \qquad (13)$$

Допустим, что величина ζ (эта величина отличается на малые величины высших порядков от величины, данной формулой (10), выведенной из приближенного анализа волнообразного движения) имеет для всех своих нечетных степеней за большой промежуток времени среднюю величину нуль:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \zeta^{2n+1}\,dt\right) = 0.$$

Составим за этот промежуток среднее значение $\overline{P}$:

$$\overline{P} = p_0 h' + g\rho\frac{h'^2}{2} + \frac{g\rho}{2}\overline{\zeta^2} + h'\rho\overline{\left(\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)}.$$

Последний член этой формулы может быть выражен через средний квадрат скорости по вертикали. Действительно, так как

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\zeta\right)dt\right\} = 0,$$

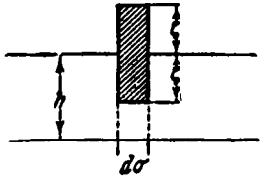
то

$$\left(\overline{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\zeta}\right) = -\left(\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial t}}\right)^2.$$

Принимая это во внимание, можем выразить избыток Q давления волнующейся жидкости против гидростатического давления в следующем виде:

$$Q = \frac{g\rho}{2}(\overline{\zeta^2}) - \rho h'\left(\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial t}}\right)^2. \qquad (14)$$

Если h' будет малая величина порядка ζ и $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, то избыток давления представится в следующем простом виде:



Фиг. 2.

$$Q = \frac{g\rho}{2}(\overline{\zeta^2}). \qquad (15)$$

Легко усмотреть, что вторая часть найденной формулы представляет нам отнесенную к единице площади дна среднюю потенциальную энергию волнующейся жидкости. Пусть над элементом площади $d\sigma$ столб жидкости имеет высоту, меньшую или большую h на ζ, а вся остальная жидкость сохраняет высоту h (фиг. 2). В случае приподнятой жидкости мы имеем количество жидкости веса $g\rho\zeta\, d\sigma$, центр тяжести которого над высотой h приподнят на $\frac{\zeta}{2}$; поэтому запас работы, или потенциальная энергия будет:

$$\frac{g\rho\zeta^2}{2}d\sigma.$$

Такой же запас работы мы будем иметь, если на спокойной жидкости будет углубление шириной $d\sigma$ и глубиной ζ. Таким образом, формула (15) может быть выражена так: среднее давление жидкости на край погруженного в нее тела равно отнесенной к единице площади дна средней потенциальной энергии соответственного вертикального столба жидкости.

§ 3. Примем h' весьма незначительным сравнительно с h и будем предполагать, что горизонтальная скорость u передается от волнующейся жидкости — жидкости, перекрытой

плавающим телом; что же касается до весьма малой вертикальной скорости w, то она имеет место (фиг. 1) налево от вертикали AC, направо же от этой вертикали $w = 0$ вплоть до вертикали BH, направо от которой мы имеем опять свободную волнующуюся жидкость. Представим набегающую и отраженную волну с левой стороны нашего тела формулами:

$$\zeta = f(at - x) + \varphi(at + x), \tag{10'}$$

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}}\{-f(at - x) + \varphi(at + x)\} \tag{12'}$$

и отбегающую волну с правой стороны тела — формулами:

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \psi(at - x), \\ u' &= -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\psi(at - x) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и постараемся определить φ и ψ по данному f. Для сокращения письма примем, что формулы (10') и (12') относятся к осям координат, имеющим начало в A, а формулы (16) к осям, имеющим начало в B.

Так как горизонтальная скорость во всем пространстве CD постоянна, а на границах CE и DH она равна скорости правой и левой волнующейся жидкости, то $u = u'$ при $x = 0$ и, следовательно,

$$-f(at) + \varphi(at) = -\psi(at),$$

откуда

$$\psi(at) = f(at) - \varphi(at). \tag{17}$$

Определим теперь массу жидкости, находящейся под телом, длину которого назовем $2l$. Принимая, что $h - h'$ весьма мало разнится от h, будем иметь для упомянутой массы, отнесенной к единице ширины, величину $2lh\rho$. Эта масса получит ускорение $\frac{du}{dt}$ под действием разности напоров $(h - \zeta) - (h - \zeta') = \zeta' - \zeta$; поэтому

$$g\rho(\zeta' - \zeta)h = 2lh\rho\frac{du}{dt},$$

что на основании формул (10′), (12′) и (16) дает:

$$g\{\psi(at)-f(at)-\varphi(at)\}=2l\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{gh}\{-f'(at)+\varphi'(at)\},$$

или

$$\psi(at)-f(at)-\varphi(at)=2l\{-f'(at)+\varphi'(at)\}.$$

Исключим отсюда ψ по формуле (17). Получим:

$$\varphi'(at)+\frac{1}{l}\varphi(at)-f'(at)=0. \tag{18}$$

Когда функция f, определяющая пришедшую с левой стороны волну, дана, тогда, интегрируя линейное дифференциальное уравнение (18), найдем функцию φ, характеризующую отраженную волну, а по формуле (17) найдем функцию ψ, характеризующую волну, прошедшую под телом.

Сила, толкающая наше тело по направлению прошедшей волны, будет на основании формулы (15) такая:

$$R=\frac{g\rho}{2}(\overline{\zeta^2}-\overline{\zeta'^2}),$$

что на основании формул (10′), (16) и (17) приведется к виду

$$R=\frac{g\rho}{2}\left\{\overline{[f(at)+\varphi(at)]^2}-\overline{[f(at)-\varphi(at)]^2}\right\},$$

$$R=2g\rho\overline{f(at)\varphi(at)}.$$

Покажем, что эта величина всегда положительна. Для этого умножим уравнение (18) сначала на $f(at)$, потом на $\varphi(at)$ и вычтем:

$$\varphi'(at)f(at)-\varphi'(at)\varphi(at)+\frac{1}{l}f(at)\varphi(at)-\frac{1}{l}\varphi^2(at)-$$
$$-f(at)f'(at)+\varphi(at)f'(at)=0.$$

Если теперь возьмем среднее значение первой части равенства за большой промежуток времени и заметим, что все полные дифференциалы при этом сократятся, то получим:

$$\overline{\varphi(at)f(at)}=\overline{\varphi^2(at)}.$$

Таким образом, найдем окончательно:

$$R=2g\rho\overline{\varphi^2(at)}. \tag{19}$$

Давление набегающей волны на погруженное тело равно учетверенной средней потенциальной энергии отраженной волны. Для примера рассмотрим случай набегающей гармонической волны, для которой

$$f(at-x)=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(at-x), \tag{20}$$

где λ — длина волны. Определим функции φ и ψ. По формуле (18) имеем:

$$\varphi'(at)+\frac{1}{l}\varphi(at)-A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}t=0.$$

Полагаем $at=\xi$ и умножаем на $e^{\frac{1}{l}\xi}$:

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\varphi(\xi)e^{\frac{1}{l}\xi}\right\}=A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\xi\cdot e^{\frac{1}{l}\xi}.$$

Интегрируя и обращая внимание на формулу

$$\int\cos ax\cdot e^{bx}\,dx=\frac{\left(\sin ax+\frac{b}{a}\cos ax\right)e^{bx}}{a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)},$$

получаем:

$$\varphi(\xi)=\frac{A}{1+\left(\frac{\lambda}{2\pi l}\right)^2}\left(\sin\frac{2\pi}{\lambda}\xi+\frac{\lambda}{2\pi l}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right). \tag{21}$$

Подставляя это выражение в формулу (17), получаем закон волны, прошедшей под плавающим телом:

$$\psi(\xi)=\frac{A\frac{\lambda}{2\pi l}}{1+\left(\frac{\lambda}{2\pi l}\right)^2}\left(\frac{\lambda}{2\pi l}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\xi-\cos\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right). \tag{22}$$

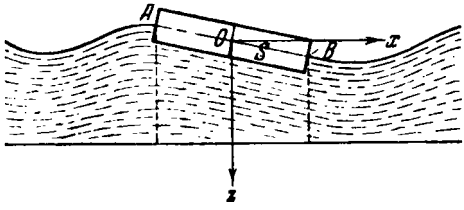
Эта формула показывает, что при l, весьма значительном сравнительно с длиной волны λ, пропущенная волна становится весьма слаба и при этом фазы волн с левой и правой сторон тела разнятся на $\frac{\pi}{2}$.

Переходим к определению волнового давления R по формулам (19) и (21). Мы находим:

$$R = g\rho \frac{A^2}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi l}\right)^2}.$$

Обращая внимание на формулы (20) и (15), приходим к заключению, что давление на рассматриваемое нами погруженное тело менее учетверенной потенциальной энергии подходящей волны. По мере увеличения размера тела l это давление увеличивается и обращается в учетверенную потенциальную энергию упавшей волны при очень большом l сравнительно с λ.

§ 4. [Мы предполагали, что тело $ABCD$ неподвижно. Перейдем теперь к рассмотрению колебаний тела, плавающего на поверхности волнующейся жидкости.



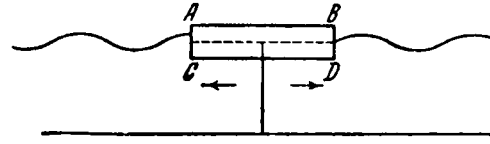
Фиг. 3.

Проведем на теле, плавающем в спокойной жидкости, ватерлинию и обозначим буквой S ее середину и буквой h' ее расстояние от дна тела. Угол, который образует проведенная на теле линия с осью Ox, и координату точки S обозначим при колебаниях тела соответственно через Θ и ζ_0 (фиг. 3).

Проведем в жидкости через начало и конец плавающего тела два вертикальных сечения A и B, перпендикулярные к тому направлению, по которому идут волны. Н. Е. Жуковский в своей рукописи рассматривает вращение тела около его центра тяжести и поступательное движение в вертикальном направлении. Если точка S удерживается неподвижной или если тело вращается около центра тяжести и центр тяжести находится от точки S на расстоянии первого порядка малости, то сечения A и B или остаются непо-

движными, или претерпевают малые перемещения, которые будут второго порядка по отношению к углу Θ. Мы можем поэтому перемещениями сечений A и B пренебречь и считать их неподвижными.

Начало координат возьмем посредине между A и B на расстоянии l от того и другого. Сечения A и B разделяют всю жидкость на три части: влево от плавающего тела, откуда идет волна, под плавающим телом и вправо от него, куда убегает волна. Так же, как и в случае неподвижного тела, влево и вправо от плавающего тела движение свободно волнующейся жидкости будет определяться уравнениями (10′), (12′) и (16), причем так же, как и раньше, будем считать, что в уравнениях (10′) и (12′) координата x отсчитывается от точки A, а в уравнении (16) — от B. Для части жидкости, находящейся между сечениями A и B, под плавающим телом, пограничным условием является требование, чтобы поверхность жидкости совпадала с нижней поверхностью тела.]



Фиг. 4.

§ 5. [Допустим сначала, что плавающее тело может иметь только поступательное движение по вертикальному направлению. При поступательном движении уравнение дна будет (фиг. 4):

$$\zeta = \zeta_0 + h',$$

откуда

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta_0}{dt}. \tag{23}$$

На основании уравнения неразрывности, выраженного первым уравнением (11), мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{d\zeta_0}{dt}$$

и затем]

$$u = \frac{x}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0, \tag{24}$$

[где u_0 — функция времени.

Закон распределения давления под плавающим телом мы найдем, интегрируя дифференциальные уравнения гидродинамики, которые при отбрасывании в них членов, зависящих от произведений скоростей и их производных, имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{25}$$

Из этих уравнений мы получаем:]

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + g\,dz \tag{26}$$

[и, принимая во внимание (24),]

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{x^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - x\frac{du_0}{dt} + gz + C. \tag{27}$$

[Чтобы определить C и u_0, мы сначала] выразим условие, что скорость вытекающей из-под колеблющегося тела жидкости равна горизонтальной скорости жидкости, колеблющейся в свободном пространстве. [Сравнивая скорости, которые дают формулы (12′) и (16) в точках A и B, со скоростями, полученными из (24) при $x = -l$ и $x = +l$, мы получим:]

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{h}}\,(-f + \varphi) &= u_0 - \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt}, \\ -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\psi &= u_0 + \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

[откуда]

$$2\sqrt{\frac{h}{g}}\,u_0 = \varphi - f - \psi, \tag{29}$$

$$\left[2\frac{l}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} = f - \varphi - \psi, \right. \tag{30}$$

где вместо $f(at)$, $\varphi(at)$, $\psi(at)$ написано просто f, φ, ψ.]

Из уравнения (27) мы можем найти еще соотношение между функциями f, φ и ψ, выражая, что давление на сво-

бодной поверхности жидкости в точках A и B одинаково и равно p_0:

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + l\frac{du_0}{dt} + g(f+\varphi) + C =$$
$$= -\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - l\frac{du_0}{dt} + g\psi + C. \tag{31}$$

[Складывая эти уравнения и вычитая одно из другого, получим:

$$C = \frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \frac{1}{2}g(f+\varphi+\psi) + \frac{p_0}{\rho},] \tag{32}$$

$$l\frac{du_0}{dt} = \frac{1}{2}g(\psi - f - \varphi), \tag{33}$$

[или, исключая при помощи формул (29) и (30) функции φ и ψ,

$$C = \frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{lg}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} - gf + \frac{p_0}{\rho},] \tag{34}$$

$$l\frac{du_0}{dt} + au_0 + gf = 0. \tag{35}$$

[Подставив значение C, определенное равенством (34), в формулу (27), окончательно найдем:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{l^2-x^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{lg}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} - x\frac{du_0}{dt} + g(z-f). \tag{36}$$

Зная закон, по которому изменяется давление под плавающим телом, мы можем найти полное давление на дно и составить дифференциальное уравнение движения тела. Действительно, на основании закона движения центра тяжести мы имеем уравнение:

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = -\int_{-l}^{+l}(p-p_0)\,dx + 2lgh'\rho, \tag{37}$$

в котором M есть масса тела, первый член второй части выражает давление жидкости на тело, а второй равен весу тела. Для вычисления первого члена мы должны выражение $p-p_0$, которое получим по формуле (36), заменив

в нем z через $\zeta_0 + h'$, подставить под знак интеграла, и тогда после интегрирования получим:

$$\left(M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\right)\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{2l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + 2lg\rho\zeta_0 - 2lg\rho f = 0. \tag{38}$$

Это уравнение вместе с уравнением (35) дает возможность по данной набегающей волне f определить u_0 и ζ_0 и затем при помощи уравнений (28) найти отраженную волну φ и прошедшую под телом волну ψ.

В частном случае, когда нет набегающей волны, в предыдущих уравнениях мы должны положить $f = 0$. Тогда посредине тела при $x = 0$ имеем вследствие симметрии $u = u_0 = 0$ [и уравнения (24), (29), (30) и (38) принимают вид:]

$$u = \frac{x}{h}\frac{d\zeta_0}{dt}, \tag{39}$$

$$\varphi = \psi = -\frac{l}{a}\frac{d\zeta_0}{dt}, \tag{40}$$

$$\left(M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\right)\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{2l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + 2\,lg\,\rho\zeta_0 = 0. \tag{41}$$

Уравнение (35) обращается в тождество.

В другом частном случае, рассмотренном в § 3, когда $f \neq 0$, но тело неподвижно и $\zeta_0 = \text{const.}$, уравнение (38) теряет смысл, уравнения же (24), (28) обращаются в

$$u = u_0,$$

$$\sqrt{\frac{h}{g}}\,u_0 = \varphi - f = -\psi. \tag{17}$$

[В этом случае уравнение (35) становится тождественным с уравнением (18). Действительно, вследствие равенства (17) уравнение (35) сначала обращается в

$$\psi' + \frac{1}{l}\psi - \frac{1}{l}f = 0, \tag{42}$$

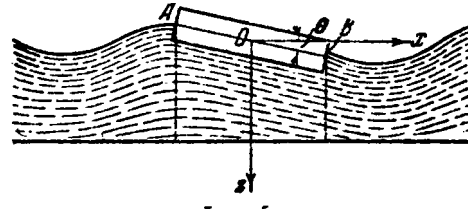
а затем, после замены ψ через $f - \varphi$ и ψ' через $f' - \varphi'$, переходит в уравнение (18).]

§ 6. [Перейдем теперь к предположению, что центр тяжести погруженного в жидкость тела неподвижен, тело же может около него вращаться (фиг. 5). В этом случае[1]) уравнение дна будет:

$$\zeta = h' + \Theta x, \tag{43}$$

и в первое уравнение (11) надо подставить]

$$\frac{d\zeta}{dt} = x\frac{d\Theta}{dt}. \tag{44}$$



Фиг. 5.

[Мы будем иметь:]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{h}\frac{d\Theta}{dt}, \tag{45}$$

$$u = \frac{x^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + u_0. \tag{46}$$

[Гидродинамическое давление под телом определится уравнением (26), которое теперь на основании (46) принимает вид:

$$\frac{dp}{\rho} = -\left(\frac{x^2}{2h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{du_0}{dt}\right)dx + g\,dz,$$

и после интегрирования приводит нас к уравнению]

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{x^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} - x\frac{du_0}{dt} + gz + C. \tag{47}$$

[Чтобы определить u_0 и C, сначала сравниваем, так же как и раньше, скорости u, которые дают в точках A и B формулы (12′), (16) и формула (46):]

$$\left.\begin{aligned} \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + u_0 &= \sqrt{\frac{g}{h}}(-f+\varphi), \\ \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + u_0 &= -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\psi, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

[откуда]

$$f - \varphi = \psi; \tag{17}$$

[1]) Проф. Н. Е. Жуковский ничего не говорит о положении в теле центра тяжести. Если же судить по чертежу, находящемуся в рукописи (фиг. 5), то надо думать, что он или считает центр тяжести совпадающим с точкой, которая в § 4 была обозначена буквой S, или считает, что точка S неподвижна. (*Прим. ред.*)

[а потом, замечая, что по формуле (47) мы должны в точках A и B получить давление, равное атмосферному p_0, напишем:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + l\frac{du_0}{dt} + g(f+\varphi) + C = -\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} - l\frac{du_0}{dt} + g\psi + C.$$

Сложив эти уравнения и вычтя одно из другого, находим:]

$$C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{g}{2}(f+\varphi+\psi), \tag{49}$$

$$\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + l\frac{du_0}{dt} + \frac{g}{2}(f+\varphi-\psi) = 0, \tag{50}$$

[или после исключения φ и ψ при помощи (48)

$$C = \frac{p_0}{\rho} - gf, \tag{51}$$

$$\frac{l^2}{2h}\left(\frac{l}{3}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + a\frac{d\Theta}{dt}\right) + l\frac{du_0}{dt} + au_0 + gf = 0. \tag{52}$$

Подставив найденное значение C в формулу (47), получаем закон давления под плавающим телом:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{x^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} - x\frac{du_0}{dt} + g(z-f). \tag{53}$$

Присоединим к этим формулам уравнение моментов:

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\int_{-l}^{l}(p-p_0)\,x\,dx\ ^*), \tag{54}$$

в котором I означает момент инерции тела относительно оси, проходящей через неподвижную точку или центр тяжести, вторая же часть равняется моменту сил давления. Подставив под знак интеграла значение $p-p_0$ по формуле

*) Относительно этого уравнения надо заметить, что в нем не принят во внимание момент давления на переднюю и заднюю стенки тела. Этот пропуск был потом замечен Н. Е. Жуковским и исправлен во второй рукописи при рассмотрении общего случая. Впрочем, если центр тяжести находится в точке S, то (54) будет частным случаем уравнения (84) § 11 при $H = 0$ и будет столь же точно, как и последнее. (*Прим. ред.*)

(53), в которой z надо заменить через $h' + \Theta x$, получим:

$$\left(1 - \frac{l^5\rho}{15h}\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2} - \frac{2l^3\rho}{3}\frac{du_0}{dt} + \frac{2l^3}{3}g\rho\Theta = 0. \qquad (55)$$

Это уравнение вместе с тремя уравнениями (48) и (52) дает возможность по данной набегающей волне f найти четыре функции времени u_0, Θ, φ, ψ, т. е. определить колебания тела и найти как отраженную волну φ, так и прошедшую под телом ψ. Чтобы решить эти уравнения, мы должны сначала составить уравнение, в которое входила бы только одна неизвестная. Исключим u_0 из уравнений (55) и (52). С этой целью дифференцируем эти уравнения и исключаем из них $\frac{d^2u_0}{dt^2}$:

$$\left(1 + \frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^3\Theta}{dt^3} + \frac{1}{3}\frac{l^3a\rho}{h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{2}{3}l^3g\rho\frac{d\Theta}{dt} + \frac{2}{3}l^2a\rho\frac{du_0}{dt} + \frac{2}{3}l^2ag\rho f = 0,$$

а потом из полученного уравнения и уравнения (55) также и $\frac{du_0}{dt}$. Таким образом, будем иметь:

$$l\left(1 + \frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^3\Theta}{dt^3} + a\left(1 + \frac{4}{15}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \\ + \frac{2}{3}l^3g\rho\left(l\frac{d\Theta}{dt} + a\Theta + af\right) = 0. \qquad (56)$$

Определив из этого уравнения функцию Θ, из уравнения (52) найдем u_0, а затем по уравнениям (48) — функции φ и ψ.

При отсутствии набегающей волны $f = 0$ уравнение (17) обращается в]

$$\varphi = -\psi, \qquad (57)$$

[в уравнении же (56) надо положить $f' = 0$.

§ 7. Переходим, наконец, к самому общему случаю колебаний свободно плавающего тела. В этом случае в уравнении дна плавающего тела (фиг. 3)

$$\zeta = h' + \zeta_0 + \Theta x \qquad (58)$$

h' будет величиной постоянной, а ζ_0 и Θ функциями времени и

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{d\zeta_0}{dt} + x\frac{d\Theta}{dt}.$$

Подставляя это значение $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ в уравнение (11) после его интегрирования, мы получаем:]

$$u = \frac{x^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{x}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0, \tag{59}$$

[где u_0, значение u при $x = 0$, есть функция только времени. Зная u, при помощи уравнения (26) находим:]

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{x^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} - \frac{x^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - x\frac{du_0}{dt} + gz + C, \tag{60}$$

[где постоянная по отношению x и z величина C может зависеть от времени.

Таким образом, влево от плавающего тела u, ζ и p определяются формулами (10′), (12′) и (5), под плавающим телом (58), (59), (60) и вправо от него (16) и (5). На границах этих трех участков на поперечных сечениях A и B (§ 4) функции u и p должны изменяться непрерывно. Выразив это условие, мы получим четыре уравнения.

По формулам (12′) и (16) для скоростей в сечениях A и B мы имеем соответственно:

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}}(-f + \varphi) \quad \text{и} \quad u = -\sqrt{\frac{g}{h}}\psi,$$

где для краткости вместо $f(at)$, $\varphi(at)$, $\psi(at)$ поставлены просто f, φ, ψ. Эти скорости должны быть равны скоростям, которые получим по формуле (59), полагая в ней один раз $x = -l$, а в другой раз $x = +l$:

$$u = \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} - \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0;$$

$$u = \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0.$$

Мы имеем, таким образом, два уравнения:]

$$\left.\begin{aligned} \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} - \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0 &= \sqrt{\frac{g}{h}}(-f + \varphi), \\ \frac{l^2}{2h}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{l}{h}\frac{d\zeta_0}{dt} + u_0 &= -\sqrt{\frac{g}{h}}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

[Складывая их и вычитая второе из первого, находим:]

$$\varphi+\psi=f-\frac{2l}{a}\frac{d\zeta_0}{dt}, \tag{62}$$

$$\varphi-\psi=f+2\sqrt{\frac{h}{g}}u_0+\frac{l^2}{a}\frac{d\Theta}{dt}. \tag{63}$$

[Подобным же образом по формулам (10′), (12′), (5) мы получим для сечения A:

$$\zeta=\varphi+f,\quad \frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+g(z-f-\varphi) \tag{62_1}$$

и для сечения B:

$$\zeta'=\psi,\quad \frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+g(z-\psi). \tag{63_1}$$

Формула же (60) для давления в тех же сечениях $A(x=-l)$, $B(x=+l)$ дает:

$$\frac{p}{\rho}=\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+l\frac{du_0}{dt}+gz+C,$$

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}-l\frac{du_0}{dt}+gz+C.$$

Сравнивая эти результаты, получаем:

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+l\frac{du_0}{dt}+g(f+\varphi)+C,$$

$$\frac{p_0}{\rho}=-\frac{l^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}-l\frac{du_0}{dt}+g\psi+C.$$

Складываем эти уравнения и вычитаем из первого второе:]

$$C=\frac{p_0}{\rho}+\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}-\frac{g}{2}(\varphi+\psi+f), \tag{64}$$

$$\varphi-\psi=-f-2\frac{l}{g}\frac{du_0}{dt}-\frac{l^3}{3gh}\frac{d^2\Theta}{dt^2}. \tag{65}$$

[Исключая $\varphi-\psi$ и $\varphi+\psi$ при помощи уравнений (62) и (63), получим:

$$C=\frac{p_0}{\rho}+\frac{l^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+\frac{g'}{a}\frac{d\zeta_0}{dt}-gf,] \tag{66}$$

$$\frac{l^3}{3gh}\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{l^2}{a}\frac{d\Theta}{dt}+2\frac{l}{g}\frac{du_0}{dt}+2\sqrt{\frac{h}{g}}u_0+2f=0 \tag{67}$$

[и

$$\frac{l^2}{2h}\left(\frac{l}{3}\frac{d^2\Theta}{dt^2}+a\frac{d\Theta}{dt}\right)+l\frac{du_0}{dt}+au_0+gf=0. \tag{68}$$

Подставив значение C (66) в (60), приведем эту формулу к окончательному виду:]

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{x^3}{6h}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{l^2-x^2}{2h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - x\frac{du_0}{dt} + \frac{gl}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + gz - gf. \quad (69)$$

[Три уравнения (62), (63), (68) могут служить для определения трех функций времени u_0, φ и ψ, если нам известны функции f, ζ_0 и Θ. Последние две определяют качание плавающего тела, f характеризует набегающую волну, функции же φ и ψ — две волны, бегущие вправо и влево от качающегося тела и вызванные его движением. Таким образом,] если тело данным способом колеблется, то оно развивает вполне определенную волну.

[Если в уравнениях (61), (66), (68), (69) будем считать один раз Θ, а другой раз ζ_0 постоянными, то получим из них как частные случаи уравнения (28), (34), (35), (36) или (48), (51), (52), (53). Сравнивая (66) с (34) и (68) с (52), мы видим, что C зависит только от ζ_0, т. е. от поступательного движения тела, а скорость u_0 только от Θ, т. е. от движения вращательного.]

§ 8. [Определив давление под плавающим телом, обращаемся к движению центра тяжести, к колебаниям его в вертикальном направлении.

Найдем сначала давление на переднюю и заднюю грани плавающего тела. Как на ту, так и на другую давление определяется формулой (5) и распадается на давление постоянное по всей грани и равное атмосферному давлению p_0 и давление $g\rho(z-\zeta)$ на часть грани, погруженную в жидкость. Давления атмосферные на переднюю и заднюю грани равны и прямо противоположны и взаимно уничтожаются. Вторая же часть давления выразится формулой

$$\int g\rho(z-\zeta)\,ds,$$

где ds — элемент длины передней или задней стороны поперечного сечения тела, и интеграл распространяется на смоченную часть. Так как угол Θ мал, то $\cos\Theta$ отличается

от 1 на малую величину второго порядка, и мы можем положить:

$$dz = ds\cos\Theta = ds;$$

тогда

$$\int g\rho\,(z-\zeta)\,ds = g\rho\int (z-\zeta)\,dz = g\rho\,\frac{(z-\zeta)^2}{2} + C.$$

Для передней грани пределами интегрирования служат $z=\zeta$ и $z=\zeta_0+h'-\Theta l$, а для задней $z=\zeta'$ и $z=\zeta_0+h'+\Theta l$. Таким образом, мы найдем, что давление на переднюю грань равно]

$$\frac{g\rho}{2}(\zeta_0-\Theta l+h'-\zeta)^2 \qquad (70)$$

[и на заднюю

$$\frac{g\rho}{2}(\zeta_0+l\Theta+h'-\zeta')^2.$$

Если разность их

$$\frac{g\rho}{2}\{(\zeta_0-\Theta l+h'-\zeta)^2-(\zeta_0+\Theta l+h'-\zeta')^2\} =$$

$$= g\rho\left(\zeta_0+h'-\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)(\zeta'-\zeta-2l\Theta)$$

мы умножим на $\sin\Theta$ или Θ для того, чтобы найти сумму проекций их на вертикальную ось, то мы получим величину — малую второго порядка, которой можно пренебречь.

Разность давлений на верхнюю поверхность и на дно плавающего тела выразится интегралом

$$\int (p_0-p)\,ds,$$

распространенным на дно. Проекция этой разности на ось Oz будет:

$$\int (p_0-p)\,ds\cos\Theta = \int_{-l}^{+l}(p_0-p)\,dx.$$

Присоединяя к этому интегралу вес плавающего тела, равный водоизмещению $2lh'$, умноженному на плотность ρ

и на g, мы получим:

$$\int_{-l}^{+l} (p_0 - p)\, dx + 2lh'\rho g.$$

Предположим, что центр тяжести плавающего тела при покое находится над точкой S (§ 4) на высоте H над ватерлинией. При качании его ордината z будет равна

$$\zeta_0 - H\cos\Theta,$$

или вследствие малости угла Θ

$$\zeta_0 - H.$$

Поэтому проекция ускорения центра тяжести на ось Oz равняется $\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}$ и закон движения центра тяжести дает нам уравнение:

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = -\int_{-l}^{+l} (p - p_0)\, dx + 2g\rho lh', \tag{71}$$

[тождественное с уравнением (37).

Под знак интеграла мы должны подставить значение $p - p_0$ для точек дна плавающего тела, которое мы найдем по формуле (69), заменив в ней z на основании уравнения (58) через $z = \zeta_0 + h' + \Theta x$. Сделав эту подстановку и совершив интегрирование, мы будем иметь:

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = -\frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - 2\frac{l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} - 2g\rho l\zeta_0 + 2gl\rho f,$$

или

$$\left(M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}\right)\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + 2\frac{l^2g\rho}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + 2gl\rho\zeta_0 - 2gl\rho f = 0, \tag{72}$$

линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и со второй частью, которым и определяются колебания плавающего тела в вертикальном направлении. Это уравнение тождественно с (38), в него не входят ни угол Θ, ни его производные, следова-

тельно,] поступательное колебание совершенно не зависит от вращательного.

[Коэффициент при $\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}$,

$$M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h},$$

можно назвать *приведенной массой*. Замечая, что масса тела равна водоизмещению, умноженному на плотность, приведенную массу можно представить таким образом:

$$\frac{2l}{3h}(l^2 + 3hh')\rho.$$

Если мы обозначим через μ]

$$\mu = \frac{M + \frac{2}{3}\frac{l^3\rho}{h}}{2gl\rho} \tag{73}$$

[или

$$\mu = \frac{l^2 + 3hh'}{3a^2}, \tag{74}$$

то уравнение (72) примет вид:]

$$\mu\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{l}{a}\frac{d\zeta_0}{dt} + \zeta_0 - f = 0. \tag{75}$$

§ 9. [Исследуем при помощи этого уравнения сначала собственные колебания плавающего тела, т. е. предположим, что набегающая волна отсутствует, $f = 0$, а есть только волны, расходящиеся от плавающего тела в обе стороны, вызываемые его колебательным движением. Интегрирование уравнения приводится к решению характеристического уравнения

$$\mu\lambda^2 + \frac{l}{a}\lambda + 1 = 0,$$

корни которого

$$\lambda = -\frac{l}{2\mu a} \pm \sqrt{\frac{l^2}{(2\mu a)^2} - \frac{1}{\mu}},$$

или

$$\lambda = -\frac{l}{2\mu a} \pm \frac{i}{2\mu a}\sqrt{\frac{l^2 + 12hh'}{3}}.$$

или

$$\lambda = -\frac{l}{2\mu a} \pm i\omega,$$

где

$$\omega = \frac{1}{2\mu a}\sqrt{\frac{l^2 + 12hh'}{3}} = \sqrt{\frac{1}{\mu} - \frac{l^2}{4\mu^2 a^2}},$$

всегда мнимы.

Интеграл уравнения

$$\zeta_0 = e^{-\frac{l}{2\mu a}t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \tag{76}$$

или

$$\zeta_0 = e^{-\frac{l}{2\mu a}t} R\sin(\omega t + k)$$

показывает нам, что по отношению к координате ζ_0 равновесие тела всегда устойчиво и что собственные колебания тела всегда будут затухающими.

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{\frac{M}{2lg\rho} + \frac{1}{12}\frac{l^2}{a^2}}} = 2\pi\frac{\frac{h'}{g} + \frac{1}{3}\frac{l^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{h'}{g} + \frac{1}{12}\frac{l^2}{a^2}}}$$

или

$$T = 4\pi\frac{l^2 + 3hh'}{\sqrt{3gh(l^2 + 12hh')}}.$$

Предполагая, что l очень велико, находим из этой формулы, что время колебания очень длинного тела есть

$$T = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\frac{l}{a},$$

или

$$T = 1{,}15\,\frac{2\pi l}{a},$$

т. е. в 1,15 раз больше того времени, которое нужно волне для того, чтобы пройти расстояние, равное длине окружности, описанной радиусом, равным половине длины тела. Если же h' велико сравнительно с l, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h'}{g}},$$

т. е. период колебания равняется периоду качания маятника, длина которого равна h'.

Когда плавающее тело имеет только поступательное колебание, то функции φ и ψ определяются очень простым уравнением (40):

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} = -\frac{l}{a}\frac{dr_0}{dt},$$

из которого находим:

$$\varphi = -\psi = -\frac{lR}{a}\sqrt{\omega^2 + \frac{l^2}{4\mu^2 a^2}}\, e^{-\frac{l}{2\mu a}t} \sin(\omega t + k + m),$$

где

$$\operatorname{tg} m = -\frac{2\mu a\omega}{l}.$$

Заменяя в этой функции t через $\frac{at+x}{a}$, мы получаем закон расходящихся от плавающего тела в обе стороны волн.]

§ 10. [Рассмотрим далее вынужденные колебания плавающего тела, вызываемые гармонической волной:

$$\zeta = f(at - x) = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(at - x),$$

где A — амплитуда и λ — длина волны. Теперь

$$f = A \sin\frac{2\pi a}{\lambda}t,$$

и частный интеграл уравнения (75) будет:

$$r_0 = R \sin\frac{2\pi}{\lambda}(at + k),$$

где R и k определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{R}\cos\frac{2\pi}{\lambda}k &= 1 - \mu\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2, \\ \frac{A}{R}\sin\frac{2\pi}{\lambda}k &= -\frac{l}{a}\cdot\frac{2\pi a}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

откуда

$$R = \frac{A}{\sqrt{\left\{1 - \mu\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right\}^2 + \frac{l^2}{a^2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2}}.$$

Таким образом, вынужденные колебания будут также гармоническими. Амплитуда колебаний R всегда остается конечной, так что равновесие плавающего тела по отношению к набегающей волне будет устойчиво. Однако в зависимости от величины знаменателя R может случиться, что при некоторых значениях λ амплитуда колебания центра тяжести плавающего тела будет больше *волновой* амплитуды A. Такие волны назовем *опасными*. Исследуем условия, при которых они возможны, и определим их длину.

Прежде всего из формулы для R мы видим, что с неопределенным увеличением длины волны λ амплитуда колебания R приближается к амплитуде волны A, и для всех тел $R = A$ при $\lambda = \infty$. Также и в том случае, когда l и h', т. е. размеры плавающего тела, малы, как видно из формулы (74), μ будет также мало, и R будет мало отличаться от A для всех волн конечной длины.

Опасными волнами будут те, для которых функция

$$v = \left\{1 - \mu\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right\}^2 + \frac{l^2}{a^2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2$$

от λ, стоящая под корнем знаменателя R, будет меньше единицы, и самыми опасными те, для которых v достигает минимума.

Чтобы исследовать, как изменяется v с изменением λ, положим:]

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \xi, \tag{78}$$

$$\frac{l}{a}\xi = x, \quad \mu\xi^2 = y. \tag{79}$$

[Тогда

$$v = (1 - y)^2 + x^2$$

будет равно квадрату расстояния r точки $P(x, y)$ от точки Q (0,1) и

$$R = \frac{A}{r}.$$

При изменении λ от бесконечности до нуля ξ будет меняться от нуля до бесконечности и точка P будет перемещаться по параболе, уравнение которой]

$$y = \frac{\mu a^2}{l^2} x^2 \tag{80}$$

[получаем, исключая ξ из уравнения (79). Каждой волне будет соответствовать точка параболы и обратно. Опасным волнам будут соответствовать точки, расстояние которых от Q (0,1) будет меньше единицы, т. е. точки, лежащие внутри круга

$$(1-y)^2 + x^2 = 1, \tag{81}$$

описанного радиусом, равным единице, около точки Q. Положение этого круга по отношению к параболе зависит от того, будет ли радиус кривизны для вершины параболы

$$\frac{l^2}{2\mu a^2} \gtreqless 1.$$

Если в эти неравенства вместо μ подставить его выражение (74), то они представятся в другом виде:

$$l^2 \gtreqless 6hh'.$$

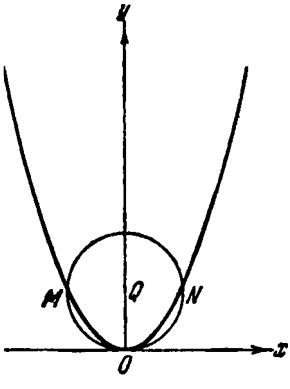
В первом случае круг Q будет лежать внутри параболы, а все точки параболы (за исключением начала координат, которому соответствует бесконечно большая волна) будут вне круга, их расстояния от точки Q будут больше единицы, и $R < A$.

Таким образом, для длинного тела $l > \sqrt{6hh'}$ амплитуда колебаний тела всегда меньше волновой амплитуды, и только для бесконечно длинной волны $R = A$. В этом случае опасных волн не существует. В третьем случае, когда $l < \sqrt{6hh'}$, круг Q будет выходить за пределы параболы, часть которой вблизи вершины будет лежать внутри

круга Q (фиг. 6). Чтобы определить эту часть, найдем ординату y_0 точек M и N пересечения круга и параболы, решая совместно их уравнения (80) и (81):

$$y_0 = \frac{2a^2\mu - l^2}{a^2\mu}.$$

Этой ординате y_0 будет соответствовать волна, длина которой найдется из уравнений (78) и (79):



Фиг. 6.

$$\mu\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 = y_0,$$

откуда при помощи формулы (74)

$$\lambda_0 = 2\pi\frac{l^2 + 3hh'}{\sqrt{3(6hh' - l^2)}}. \qquad (81')$$

Точкам P, лежащим на параболе между M и N, будут соответствовать ординаты меньше y_0 и волны более длинные, чем λ_0. Эти точки будут лежать внутри круга Q и определять опасные волны. Наиболее опасной будет волна, для которой v будет минимум. Выразив x^2 на основании уравнения (80) через y, мы получим:

$$v = (1-y)^2 + \frac{l^2}{a^2\mu}y$$

и найдем значение

$$y_1 = \frac{2a^2\mu - l^2}{2a^2\mu} = \frac{y_0}{2},$$

при котором v достигает минимума, из уравнения

$$\frac{dv}{dy} = -2(1-y) + \frac{l^2}{a^2\mu} = 0.$$

Соответствующие значения λ и R определяются формулами (79):

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\lambda_0,$$

$$R_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\frac{A}{l}\,\frac{3hh' + l^2}{\sqrt{12hh' + l^2}}. \qquad (82)$$

Таким образом, для короткого тела, если $l < \sqrt{6hh'}$, все волны от λ_0 до ∞ являются опасными, и наиболее опасная из них имеет длину $\lambda_1 = \sqrt{2}\,\lambda_0$, причем λ_0 определяется формулой (81′).

Если, наконец, $l = 6hh'$, то круг Q будет кругом кривизны параболы в вершине ее и будет с ней иметь касание третьего порядка. Вся парабола будет лежать вне круга, и опасных волн не будет. Но для волн большой длины амплитуда R будет оставаться почти постоянной и будет мало отличаться от волновой амплитуды.]

§ 11. [Составим теперь дифференциальное уравнение вращения тела около центра тяжести.

Мы видели выше, что давления на переднюю и заднюю стенки определяются формулами (70). Величины $\zeta_0 + h' + \Theta l - \zeta'$ и $\zeta_0 + h' - \Theta l - \zeta$ представляют собой расстояния от поверхности жидкости до дна плавающего тела в заднем и переднем его концах. Они малы, и мы можем принять, что моменты давлений на переднюю и заднюю грани относительно центра тяжести соответственно равны:

$$-\frac{Hg\rho}{2}(\zeta_0 - \Theta l + h' - \zeta)^2 \quad \text{и} \quad \frac{Hg\rho}{2}(\zeta_0 + \Theta l + h' - \zeta')^2,$$

где H — высота центра тяжести над ватерлинией. Складывая эти моменты, мы получим выражение:

$$\frac{Hg\rho}{2}(\zeta_0 + \Theta l + h' - \zeta')^2 - \frac{Hg\rho}{2}(\zeta_0 - \Theta l + h' - \zeta)^2 = \\ = Hg\rho\left(h' + \zeta_0 - \frac{\zeta + \zeta'}{2}\right)(2\Theta l - \zeta' + \zeta),$$

в котором можно пренебречь произведениями

$$2Hg\rho\Theta l\left(\zeta_0 - \frac{\zeta + \zeta'}{2}\right) \quad \text{и} \quad Hg\rho(\zeta - \zeta')\left(\zeta_0 - \frac{\zeta + \zeta'}{2}\right)$$

как величинами второго порядка малости и ограничиться только двумя членами]

$$2Hlg\rho h'\Theta - Hg\rho h'(\zeta' - \zeta). \tag{83}$$

[Но] если h' мало́, то второй член можно отбросить, первый же член, как содержащий произведение $2lh'$, равное водоизмещению, надо оставить.

[Момент давлений на верхнюю и нижнюю поверхности плавающего тела представится интегралом

$$-\int (p-p_0)\frac{x}{\cos\Theta}\,ds,$$

распространенным на все дно. В этом интеграле элемент дна ds можно заменить через $\frac{dx}{\cos\Theta}$, $\cos^2\Theta$ — через 1, и за переменную интегрирования взять x; тогда он преобразуется в следующий:

$$-\int_{-l}^{+l}(p-p_0)\,x\,dx.$$

Таким образом, обозначая через I момент инерции плавающего тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, мы имеем на основании закона моментов количеств движения дифференциальное уравнение:]

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2}=-\int_{-l}^{+l}(p-p_0)\,x\,dx+2Hlh'g\rho\Theta. \tag{84}$$

[Вместо разности $p-p_0$ под знак интеграла мы должны подставить ее значение по формуле (69), заменив в ней z по формуле (58) через $\zeta_0+h'+\Theta x$. После интегрирования мы получим:]

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2}=\frac{l^5}{15h}\rho\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{2}{3}l^3\rho\frac{du_0}{dt}-\frac{2}{3}gl^3\rho\Theta+2Hlh'g\rho\Theta,$$

[или]

$$\left(I-\frac{1}{15}\frac{l^5}{h}\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{2}{3}l^3\rho\frac{du_0}{dt}+2gl\rho\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right)\Theta=0. \tag{85}$$

[Это уравнение вместе с (68) определяет две неизвестные функции u_0 и Θ. Так как в них ζ_0 не входит, то ни вращательные колебания, ни скорость u_0 не зависят от

поступательных колебаний. Чтобы проинтегрировать уравнения (68) и (85), исключим из них одну из функций u_0 или Θ, например u_0. Исключая сначала $\frac{du_0}{dt}$, получим:

$$\left(I+\frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{1}{3}\frac{l^4g\rho}{a}\frac{d\Theta}{dt}+2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{l^2g\rho}{3}u_0+$$
$$+2lg\rho\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right)\Theta+\frac{2}{3}l^2g\rho f=0.$$

[Продифференцируем это уравнение:]

$$\left(I+\frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^3\Theta}{dt^3}+\frac{1}{3}\frac{l^4g\rho}{a}\frac{d^2\Theta}{dt^2}+2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{l^2g\rho}{3}\frac{du_0}{dt}+$$
$$+2lg\rho\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right)\frac{d\Theta}{dt}+\frac{2}{3}l^2g\rho af'=0$$

[и снова исключим из него $\frac{du_0}{dt}$ при помощи уравнения (85):]

$$l\left(I+\frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^3\Theta}{dt^3}+a\left(I+\frac{4}{15}\frac{l^5\rho}{h}\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2}+$$
$$+2lg\rho\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right)\left(l\frac{d\Theta}{dt}+a\Theta\right)+\frac{2}{3}l^3g\rho af=0. \quad (86)$$

[Таким образом, мы получаем линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, которым определяются малые вращательные колебания вокруг центра тяжести [1]). Проинтегрировав это уравнение и определив Θ, интегрированием уравнения (68) найдем u_0, а затем, предполагая, что ζ_0 уже найдено из уравнения (72), при помощи формул (62) и (63) определим и волны φ и ψ, разбегающиеся от плавающего тела. В частном случае при $H=0$ уравнение (86) обращается в уравнение (56).

Введем в уравнение (86) для краткости следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=I+\frac{2}{45}\frac{l^5\rho}{h}, && \beta=\frac{2}{9}\frac{l^5\rho}{h},\\ &\alpha_1=I+\frac{4}{15}\frac{l^5\rho}{h}=\alpha+\beta, && \gamma=\frac{2l^3\rho}{h}\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right).\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

[1]) См. примечание в конце статьи (стр. 762).

Уравнение тогда примет вид:

$$l\alpha\frac{d^3\Theta}{dt^3}+a\alpha_1\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{\gamma a^2}{l^2}\left(\frac{d\Theta}{dt}+a\Theta\right)+\frac{2}{3}l^3gpaf'=0. \qquad (88)$$

§ 12. Исследуем сначала собственные вращательные колебания тела, положив $f=0$. Интеграл уравнения (88) без последней части находится с помощью корней характеристического уравнения:

$$f(\xi)=(l\alpha\xi+a\alpha_1)\xi^2+\frac{\gamma a^2}{l^2}(l\xi+a)=0. \qquad (89)$$

Легко усмотреть, что это уравнение имеет действительный отрицательный корень, заключенный между $-\infty$ и $-\frac{a}{l}$, так как при первом пределе левая часть, которую обозначим через η, отрицательна, а при втором

$$\eta=\frac{a^3}{l^2}(\alpha_1-\alpha)=\frac{a^3}{l^2}\beta$$

положительна.

Чтобы сделать более подробное суждение о корнях уравнения, рассмотрим вид кривой третьего порядка

$$\eta=f(\xi) \qquad (90)$$

при различных значениях двучлена $\frac{l^2}{3h'}-H$. Кривая при всех значениях двучлена проходит через точку $\left(-\frac{a}{l},\ \frac{a^3}{l^2}\beta\right)$. Когда двучлен равен нулю и

$$\eta=(l\alpha\xi+a\alpha_1)\xi^2,$$

кривая имеет вид $ABOD$ (фиг. 7): она пересекает ось $O\xi$ с отрицательной стороны в точке F на расстоянии $OF=\frac{a\alpha_1}{l\alpha}$ и прикасается к оси $O\xi$ в начале координат. Чтобы получить вид кривой (90) при различных значениях упомянутого двучлена, надо к координатам вычерченной кривой прибавить ординаты прямой MN или $M'N'$,

$$\eta=2gl\rho\left(\frac{l^2}{3}-Hh'\right)(l\xi+a),$$

смотря по знаку двучлена $\frac{l^2}{3} - Hh'$, проходящей через точку $E\left(-\frac{a}{l}, 0\right)$. Из этих соображений ясно, что при

$$\frac{l^2}{3} - Hh' < 0$$

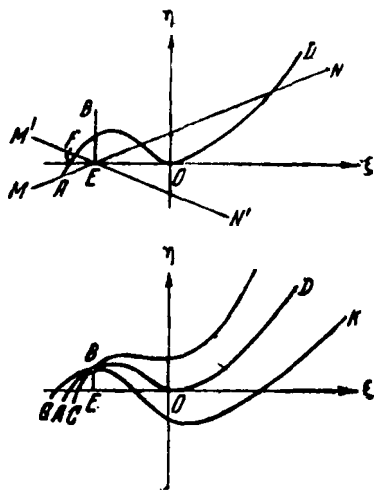
кривая имеет вид GBK и уравнение (89) имеет три действительных корня, из коих два отрицательны, а один положителен, вследствие чего плавание будет неустойчиво.

При

$$\frac{l^2}{3} - Hh' > 0$$

кривая имеет вид CBF, и уравнение (89) имеет только один действительный отрицательный корень, заключенный между $-\frac{a}{l}$ и $-\frac{a\alpha_1}{l\alpha}$, в чем убеждаемся, замечая, что при подстановке этих величин в полином $f(\xi)$ мы получаем величины

$$(\alpha_1 - \alpha)\frac{a^2}{l^2} \text{ и } (\alpha - \alpha_1)\frac{\gamma a^3}{l^2\alpha}$$



Фиг. 7.

противоположных знаков. Два других корня будут мнимы и сопряжены, сумма их будет действительна и равна удвоенной действительной части каждого из них. Так как сумма всех корней уравнения (89) равняется $-\frac{a\alpha_1}{l\alpha}$, вещественный же корень заключается между $-\frac{a}{l}$ и $-\frac{a\alpha_1}{l\alpha}$, то сумма мнимых корней будет заключаться в пределах

$$-\frac{a\alpha_1}{l\alpha} + \frac{a}{l} = -\frac{a\beta}{l\alpha} \quad \text{и} \quad -\frac{a\alpha_1}{l\alpha} + \frac{a\alpha_1}{l\alpha} = 0,$$

т. е. будет отрицательна. Таким образом, вещественные части мнимых корней отрицательны и при $\frac{l^2}{3} - Hh' > 0$ мы будем иметь устойчивое плавание.

Что касается случая

$$\frac{l^2}{3} - Hh' = 0,$$

для которого один корень отрицательный и два корня равны нулю, то соответствующий ему интеграл есть

$$\Theta = A + Bt + Ce^{-t\frac{a\alpha_1}{l\alpha}}$$

и дает неустойчивое плавание.

Таким образом, принимая во внимание эффект образующихся волн, мы получаем тот же необходимый и достаточный признак устойчивости:

$$\frac{l^2}{3h'} > H,$$

который мы выводим из одних гидростатических соображений.

§ 13. [Общий интеграл уравнения (88) представится суммой рассмотренного выше интеграла уравнения без последней части и частного интеграла, удовлетворяющего уравнению с последней частью. Предполагая по предыдущему, что набегающая волна гармоническая и

$$f = A\sin\frac{2\pi a}{\lambda}t, \quad f' = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}t,$$

находим частный интеграл:

$$\Theta = R\sin\frac{2\pi}{\lambda}(at + k),$$

где R и k определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi a}{\lambda}A\frac{2}{3}\frac{l^3g\rho}{R}\sin\frac{2\pi k}{\lambda} &= a\alpha_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - \gamma\frac{a^2}{l^3}, \\ \frac{2\pi a}{\lambda}A\frac{2}{3}\frac{l^3g\rho}{R}\cos\frac{2\pi k}{\lambda} &= \left\{l\alpha\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - \gamma\frac{a^2}{l}\right\}\frac{2\pi a}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

откуда

$$R = \frac{\frac{2}{3}Al^3g\rho\cdot\frac{2\pi a}{\lambda}}{\sqrt{\left\{\gamma\frac{a^3}{l^2} - a\alpha_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right\}^2 + \left\{l\alpha\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - \gamma\frac{a^2}{l}\right\}^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2}}$$

или

$$R = \frac{2}{3}\frac{l^2}{h}\frac{A}{\sqrt{\left\{\gamma - \alpha\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2\right\}^2 + \left\{\gamma - \alpha_1\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2\right\}^2\left(\frac{\lambda}{2\pi l}\right)^2}}. \qquad (92)$$

Положим:

$$\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2 = x \qquad (93)$$

и исследуем, как будет с изменением x меняться амплитуда

$$R = \frac{2}{3}\frac{l^2}{h}\frac{A}{\sqrt{(\gamma - \alpha x)^2 + \frac{1}{x}(\gamma - \alpha_1 x)^2}}. \qquad (94)$$

При этом естественно ограничиться предположением, что $\frac{l^2}{3h^2} = H$, а следовательно, и γ положительны, ибо только в этом случае, как было показано выше, плавание может быть устойчивым. Величина x может быть только положительна и при увеличении длины волны от 0 до ∞ будет изменяться от ∞ до 0. При положительном значении x амплитуда R всегда конечна, ибо подкоренная величина может обратиться в нуль только при $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ и притом только в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha$, что возможно или при $I = \infty$ или при $l = 0$.

Наиболее опасными будут волны, для которых R будет максимум, а полином

$$y = f(x) = (\gamma - \alpha x)^2 + \frac{1}{x}(\gamma - \alpha_1 x)^2 \qquad (95)$$

минимум. Покажем сначала, что при положительных значениях x полином $f(x)$ имеет наименьшие значения для x, заключающегося между $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ и $\frac{\gamma}{\alpha}$. Рассматривая кривую (95), мы видим, что ордината ее представляет сумму

$$y = y_1 + y_2$$

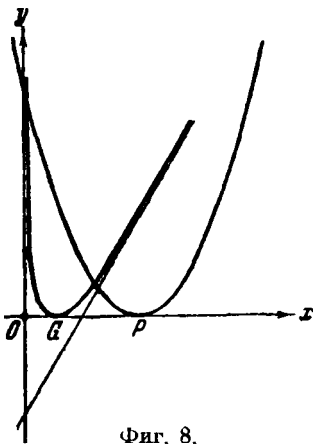
ординат двух кривых:

$$y_1 = (\gamma - \alpha x)^2 \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1}{x}(\gamma - \alpha_1 x)^2.$$

Первая из них — парабола с осью, параллельной оси Oy, касается оси Ox в точке $P\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$, вторая — гипербола с асимптотами

$$x = 0, \quad y = \alpha_1^2 x - 2\alpha_1\gamma,$$

касается оси Ox в точке $G\left(\frac{\gamma}{\alpha_1}, 0\right)$ (фиг. 8). Так как $\alpha_1 > \alpha$, то точка G лежит ближе к началу координат, чем точка P.



Фиг. 8.

При изменении x от нуля до $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ обе ординаты y_1 и y_2, а следовательно, и ордината $y = y_1 + y_2$ уменьшаются; при изменении же x от $\frac{\gamma}{\alpha}$ до ∞ обе ординаты y_1 и y_2 и их сумма увеличиваются. Отсюда следует, что между $\frac{\gamma}{\alpha}$ и $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ ордината кривой (95) имеет, по крайней мере, один минимум. Чтобы доказать, что есть только один минимум, надо обнаружить, что уравнение

$$x^2 f'(x) = \varphi(x) = 2\alpha^2 x^3 + (\alpha_1^2 - 2\alpha\gamma)x^2 - \gamma^2 = 0, \quad (96)$$

которое служит для определения максимума и минимума функции $f(x)$ и получается, если приравняем нулю ее производную, имеет в упомянутых пределах только один корень.

Возьмем производную от $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x) = 6\alpha^2 x^2 + 2(\alpha_1^2 - 2\alpha\gamma)x,$$

и, разделив $\varphi(x)$ на $\varphi_1(x)$, найдем остаток от деления с измененным знаком:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\alpha_1^2 - 2\alpha\gamma)^2}{\alpha^2} x + \gamma^2.$$

Так как функция $\varphi_2(x)$ для положительных значений x всегда остается положительной, то по теореме Штурма число

корней уравнения $\varphi(x)=0$, заключенных между $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ и $\frac{\gamma}{\alpha}$, равно числу потерянных перемен знака в ряду функций

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$$

при переходе от $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ к $\frac{\gamma}{\alpha}$. Вычисляя величины $\varphi\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$, $\varphi\left(\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)$, $\varphi_1\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$, мы находим:

$$\varphi\left(\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)=-2\frac{\gamma^3\alpha}{\alpha_1^3}(\alpha_1-\alpha),$$

$$\varphi\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\alpha_1^2-\alpha^2),$$

$$\varphi_1\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=2\gamma\left(\gamma+\frac{\alpha_1^2}{\alpha}\right)$$

и видим, что первая отрицательна, а две другие положительны. Каков бы ни был знак $\varphi_1\left(\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)$ в рядах знаков функций Штурма

$$-\pm+ \text{ для } \frac{\gamma}{\alpha_1},\quad +++ \text{ для } \frac{\gamma}{\alpha},$$

теряется при переходе от $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ к $\frac{\gamma}{\alpha}$ только одна перемена. Таким образом, в пределах от $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ до $\frac{\gamma}{\alpha}$ функция $\varphi(x)$ имеет только один корень, и на основании вышесказанного он определяет минимум функции $f(x)$ и максимум амплитуды R.

По формуле (93) значениям x, равным $\frac{\gamma}{\alpha}$ и $\frac{\gamma}{\alpha_1}$, соответствуют волны

$$\lambda_1=2\pi l\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\quad\text{и}\quad\lambda_2=2\pi l\sqrt{\frac{\alpha_1}{\gamma}},$$

причем $\lambda_1<\lambda_2$. Подставив же величины $\frac{\gamma}{\alpha}$ и $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ вместо x в (94) и принимая во внимание, что $\alpha_1-\alpha=\beta=\frac{2}{9}\frac{l^5\alpha}{h}$, находим, что этим волнам соответствуют амплитуды

$$R_1=\frac{3A}{l}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\quad\text{и}\quad R_2=\frac{3A}{l}\frac{\alpha_1}{\gamma}.$$

Если в R_1 и R_2 введем длины волн λ_1, λ_2, то получим формулы:

$$R_1 = \frac{3}{2} A \frac{\lambda_1}{\pi l^2} = 1{,}5A \frac{\lambda_1}{\pi l^2},$$

$$R_2 = \frac{A}{\pi} \frac{\lambda_2^2}{\frac{4}{3}\pi l^3} = 0{,}32A \frac{\lambda_2^2}{\frac{4}{3}\pi l^3},$$

выражающие R_1 и R_2 через амплитуду, длину волны и через объем шара, описанного радиусом, равным половине длины тела, и через площадь большого круга этого шара.

Сопоставляя все сказанное, мы видим, что статический признак устойчивости

$$\frac{l^2}{3h'} - H > 0$$

является достаточным и в том случае, когда тело качается под влиянием набегающей волны. При этом, каковы бы ни были постоянные, характеризующие размеры, массу и распределение массы тела, всегда существует волна, для которой амплитуда вынужденного колебания имеет максимум. Длина этой волны определяется положительным корнем уравнения (96), заключенным в пределах $\frac{\gamma}{\alpha_1}$ и $\frac{\gamma}{\alpha}$, и лежит между λ_1 и λ_2, а соответствующая амплитуда более наибольшей из двух величин R_1 и R_2.

Степень устойчивости характеризуется величиной $\frac{l^2}{3h'} - H$ или зависящей от нее величиной γ. Чем меньше γ, тем больше будут λ_1 и λ_2: для судов малой устойчивости опасными являются длинные волны [1]).

---

[1]) На основании чертежей находящихся в рукописи Н. Е. Жуковского (см. факсимиле — вклейку между стр. 726 и 727), надо думать, что он буквой H обозначает расстояние центра тяжести плавающего тела от ватерлинии, как это и сказано в нашем тексте. Но в таком случае, если считать, что нельзя пренебрегать величиной h'^2 и произведениями ее на малые величины первого порядка, формула (83) и зависящие от нее уравнения (85) и (86) должны быть исправлены. Действительно, чтобы получить момент давлений на переднюю и заднюю стенки относительно центра тяжести, надо их умножить не на величину H, как это делает

Н. Е. Жуковский, а на плечи, соответствующие центрам давлений. Эти плечи для передней и задней стенок равны соответственно

$$H + h' - \frac{1}{3}(h' + \zeta_0 - \Theta l - \zeta) \quad \text{и} \quad H + h' - \frac{1}{3}(h' + \zeta_0 + \Theta l - \zeta'),$$

так что сумма моментов давлений на боковые стенки будет:

$$\frac{g\rho n_1^2}{2}\left(H + h' - \frac{1}{3}n_1\right) - \frac{g\rho n^2}{2}\left(H + h' - \frac{1}{3}n\right),$$

где для краткости положено:

$$n = h' + \zeta_0 - \Theta l - \zeta, \quad n_1 = h' + \zeta_0 + \Theta l - \zeta'.$$

Вынося в этой сумме множитель

$$g\rho(n_1 - n) = g\rho(2l\Theta - \zeta' + \zeta)$$

первого порядка малости за скобки, мы можем в выражении

$$(H + h')\frac{n + n_1}{2} - \frac{1}{6}(n^2 + nn_1 + n_1^2),$$

оставшемся в скобках, отбросить члены первого и высших порядков и положить:

$$\frac{n + n_1}{2} = h', \quad \frac{1}{6}\left(n^2 + nn_1 + n_1^2\right) = \frac{1}{2}h'^2,$$

вследствие чего момент давления примет вид:

$$g\rho\left(H + \frac{1}{2}h'\right)h'(2l\Theta - \zeta' + \zeta).$$

Таким образом, одно из двух: или формула (83) должна быть исправлена заменой H через $H + \frac{1}{2}h'$, и такую замену следует поэтому сделать во всех следующих формулах и уравнениях, или под H мы должны подразумевать расстояние центра тяжести плавающего тела не от ватерлинии, а от центра тяжести вытесненной жидкости. (*Прим. ред.*)

СОДЕРЖАНИЕ.

ГИДРОДИНАМИКА.

Стр.

Кинематика жидкого тела 5

Случай движения жидкой площади по инерции 143

Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости . . . 148

О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью 152

Решение одной задачи гидростатики 310

Лекции по гидродинамике 316

Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока 489

О форме судов 627

Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока 640

К вопросу о разрезании вихревых шнуров 654

Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы 670

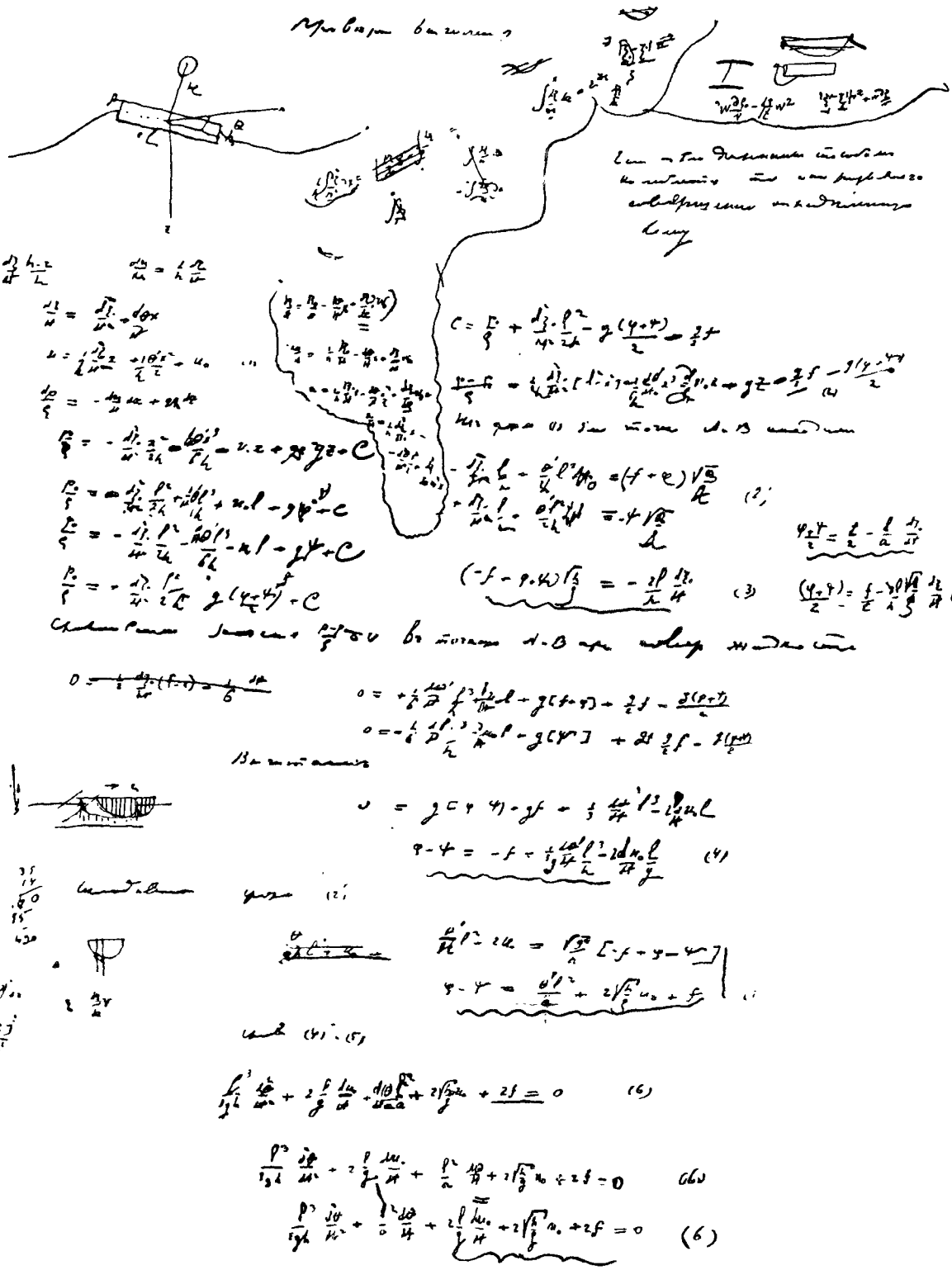
Заметка о движении вихревых колец 689

О подсасывающем действии потока воздуха на пластинку 697

О замене диска Релея продолговатой пластинкой 707

О спутной волне 712

Действие волнующейся жидкости малой глубины на плавающие на ее поверхности тела 726



Факсимиле первого листа рукописи № 2.