

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИЗИКЕ: ЧАСТЬ 2.

Книга авторов из США предназначена для обучения читателей моделированию физических экспериментов на компьютере (и тем самым обучению физике). Все главы второй части связаны со статистической физикой и квантовой механикой. Каждая глава содержит теоретический материал, методы решения соответствующих задач, тексты программ, задачи и контрольные вопросы. В основном изложении используется TRUE BASIC, в приложениях программы приведены на Паскале и Фортране⁷⁷; здесь же дан справочный материал, облегчающий перенос программ на различные модели компьютеров. Может служить учебным пособием.

Для студентов физических и технических вузов, аспирантов, преподавателей физики, молодых специалистов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 10. Численное интегрирование	5	стандартного отклонения от среднего	
10.1. Простые одномерные методы численного интегрирования	6	Приложение 10В. Метод отбора-отказа	41
10.2. Числовой пример	8	ГЛАВА 11. Случайное блуждание	43
10.3. Численное интегрирование многих интегралов	12	11.1. Введение	44
10.4. Вычисление интегралов простейшим методом Монте-Карло	15	11.2. Одномерное случайное блуждание	44
10.5. Вычисление многомерных интегралов методом Монте-Карло	18	11.3. Обобщения метода случайных блужданий	51
10.6. Анализ погрешности метода Монте-Карло	20	11.4. Приложения в физике полимеров	67
10.7. Неравномерные распределения вероятностей	26	11.5. Непрерывный предел	78
10.8. Выборка по значимости	30	11.6. Случайные числа	80
10.9. Методы случайного блуждания	32	Литература	84
Литература	35	Дополнительная литература	85
Дополнительная литература	36	Приложение 11А. Метод наименьших квадратов	86
Приложение 10А. Оценки погрешностей численного интегрирования	37	Литература к приложению	90
Приложение 10В.	39	ГЛАВА 12. Задача о перколяции	91
Аналитический вывод		12.1. Введение	92
		12.2. Порог перколяции	95
		12.3. Маркировка кластеров	103
		12.4. Критические показатели и конечномерное масштабирование	118
		12.5. Ренорм-группа	125

Литература	137	температурой	
Дополнительная литература	138	ГЛАВА 16. Моделирование	221
ГЛАВА 13. Фракталы, модели	139	канонического ансамбля	
клеточного роста и		методом Монте-Карло	
клеточные автоматы		16.1. Канонический ансамбль	222
13.1. Фрактальная размерность	140	16.2. Алгоритм Метрополиса	223
13.2. Регулярные фракталы и	148	16.3. Проверка распределения	225
самоподобие		Больцмана	
13.3. Процессы роста фракталов	152	16.4. Моделирование	233
13.4. Клеточные автоматы	167	двумерной модели Изинга	
13.5. Заключение	172	16.5. Фазовый переход Изинга	243
Литература	172	16.6. Другие применения	250
Дополнительная литература	174	модели Изинга	
ГЛАВА 14. Приближение к	175	16.7. Моделирование	256
равновесию		классических жидкостей	
14.1. Введение	176	16.8. Другие приложения	271
14.2. Простая модель	177	Литература	274
14.3. Точный перебор	178	Дополнительная литература	275
14.4. Метод Монте-Карло	179	Приложение 16А. Флуктуации в	276
14.5. Энтропия	182	каноническом ансамбле	
14.6. Влияние корреляций	188	Приложение 16Б. Точный	277
14.7. Равновесная энтропия	189	расчет модели Изинга для	
14.8. Энтропия и хаос	190	решетки 2x2	
Литература	191	ГЛАВА 17. Квантовые системы	279
Дополнительная литература	192	17.1. Введение	280
ГЛАВА 15.	193	17.2. Обзор квантовой теории	281
Микроканонический ансамбль		17.3. Стационарное уравнение	283
15.1. Введение	194	Шредингера	
15.2. Микроканонический	194	17.4. Нестационарное	289
ансамбль		уравнение Шредингера	
15.3. Моделирование методом	197	17.5. Анализ квантовых систем	300
Монте-Карло		с помощью метода случайных	
15.4. Одномерный	198	блужданий	
классический идеальный газ		17.6. Вариационные методы	308
15.5. Температура и	201	Монте-Карло для	
канонический ансамбль		квантовомеханических систем	
15.6. Модель Изинга	204	Литература	318
15.7. Поток тепла	211	Дополнительная литература	318
15.8. Замечания	217	ГЛАВА 18. Эпилог	321
Литература	218	одинаковые программы	
Дополнительная литература	218	одинаковые решения	
Приложение 15А. Связь	219	18.1. Единство физики	322
средней энергии демона с		18.2. Перколяция и галактики	324

18.3. Как компьютеры выдают сегодня на фильку?	330
Литература	331
ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Указатель программ на языке TRUE BASIC: Часть 2	334
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. Распечатки программ на языке Фортран:	335

Часть 2	
ПРИЛОЖЕНИЕ З. Распечатки программ на языке Паскаль:	367
Часть 2	
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	390

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомат клеточный 167—172	Восприимчивость магнитная 234, 243, 254, 255, 276, 278
Алгоритм устойчивости 288	Выборка по значимости 26, 31, 32, 34
Анализ чистоты 80, 330	Газ 256, 271
Ансамбль канонический 201—204, 222—278	решеточный 60—64, 252, 253
—микроканонический 194—217	Гауссово распределение 28, 29-34, 51, 66, 67, 80, 230, 291
Антиферромагнетизм 205, 254—256	Давление 257, 258, 264
Батарея детальный 224, 233	Динамика молекулярная 281
Баня тепловая 221	Дисперсия, см. Вероятностей
<i>Билман</i> алгоритм, см.	распределение. Волны свойства
Интегрирование численное	Дифференциальные уравнения
<i>Бокса-Мюллера</i> метод 30	— — диффузии 45, 55, 60, 66, 160- 164, 253, 281, 300, 301
<i>Боллман</i> распределение 203, 204, 211, 222-230	метод решения <i>Жилера- Кримера</i> 283
<i>Ван-дер-Ваальса</i> уравнение 264	Диэлектрика пробой 165
Вариантный принцип 308—318, см. <i>Ферма</i> принцип	Жидкость 265, 266, 269, 270
Ва—Гор модель 324	Жесткие сферы 258-267
<i>Верле</i> алгоритм, см. Интегрирование численное	Задача о коробейнике 271—274
Вероятностей распределение	коммьюнжере, см. Задача о коробейнике
— — гауссово, см. Гауссово распределение	разрешения широка 58, 59
дисперсия 22, 30	Игра “Жизнь” 170
интегральных 27, 28	Идеальный газ 198-201, 230, 231
момент 64	<i>Иваса</i> модель 204-217, 231-256
— — неоднородное 26—29	— — динамика спинного обмена 231
плотность 26	опрокидывания спина 205, 234
— — равномерно отклоняющееся 27	Интегрирование численное
стандартное отклонение 22—25	— — аппроксимация в средней точке
Волновая функция 281	11, 12
Волновой пакет 290—300	многомерное 12—15

Монте-Карло 15 26
 оценки погрешности 37, 38
 — — — формула прямоугольников 7.
 9 11, 11, 13
 — — — Симпсона 8-12. 20
 трапеций 7 12
 — — — Желера -Кромера 283
 Ковер, Серпинского прокладка 151,
 152
 Корреляция время 188, 240, 241
 дтпта 243
 Корреляционная функция парная
 258, 259, 263
 Коха кривая 148—152
 Краевые условия периодические 168;
 63, 154, 238, 261
 Лакса уравнение 166, 167
 фрактальные ковры 172
 Лептара Джонса потенциал 267,
 268
 Лотки — Вольтерра уравнение 321.
 322
 Макросостояние 176, 194
 Масштабирование 51, 125, 148
 конечномерное 122, 123, 247-250,
 255
 Метрополиса алгоритм 30-35, 222-
 242, 245-255, 258-271, 273, 274
 Микросостояние 176, 194
 Мираж 248
 Моделирование 80, 280, 330
 Молния 165, 166
 Монте-Карло метод
 анализа погрешности 20
 26, 65
 для интегрирования 15
 20
 канонического ансамбля
 201—204, 206—217
 микроканонического
 ансамбля 197—204, 206—217
 подмешив 67 76

случайного блуждания,
 см. Ренормгруппа
 — — — частицы в ящике 178—
 191
 Морза потенциал 315
 Наименьших квадратов метод 86 90
 Ньютона закон второй 280
 Обратного преобразования
 (обратных функций) метод 27
 30, 66
 Осциллятор гармонический
 квантовый 288, 307, 312
 Отбора-отказа метод 41
 Огаша модельный 272, 273
 Отклонение стандартное 21 25
 — — среднего 21-25, 39, 40
 Периметра ячейки 143, 153, 154, 162,
 165
 Перколяция 92-137, 324-327
 в непрерывном случае 100, 101
 — длина связности 119—124, 131,
 132
 — кластер 93, 97, 98, 103-118, 142-148
 конечномерное масштабирование
 123, 124
 оккупирующая 154 161
 перколит 324
 — показатели 121-124, 131-137, 142,
 143
 — порог 93, 97, 98, 124, 126, 127, см.
 также Фазовый переход
 — протекание 93, 94, 98, 131, 134, 147
 ренормгруппа 125-137, 143
 структура галактики 324 330
 цепная 99
 Полимеры 67 75
 Предиктор-корректор метод. см.
 Интегрирование численное
 Релаксации метод 165
 Ренормгруппа 125-137, 143
 Решетка квадратная 53, 277
 Случайное блуждание 44 90, 300-
 308

Случайное блуждание
 без самопересечений 68—73
— — время первого прохода 58
— — диффузия 45, 60
— — истинное без самопересечений
 73—75
 метод репгаша 71—73
— — перебор 46, 47, 163, 164
 персистентное 57
— — с ловушками 58, 76—78
 среднеквадратичное смещение
 54, 67
Случайные последовательности 17,
 18, 26, 79—84
 линейный конструктивный
 генератор 80
Собственная функция 282
Собственное значение 282
Сортировка 157, 158, 160
Состояние метастабильное 252
Спад критический 250
Сплав бишпаша 278
Температура 201–204, 219, 222
Теплопроводность удельная 216
Точка неподвижная 126–132
Треугольная решетка 54, 55, 99, 216,
 255
True BASIC

— — INPUT 240
 OPEN 240
— — RANDOMIZE 17
— — RND 17, 18
— — TRUNCATE 261
Универсальность 68, 125
Фазовый переход 118, 119, 243, 244,
 250, 251, 255, 256, 267
 геометрический 94
— — магнитный 242–256
 параметр порядка 243
Ферромагнетизм 204, 233, 243
Фоккера—Планка уравнение 78
Хаос 190, 191
Центральная предельная теорема 64,
 66
Шредингера уравнение 280—308
— — нестационарное 281, 289–300
— — стационарное 283–288, 300, 301
Эдена модель 153—158
Эйлера—Кроллера алгоритм, см.
 Интегрирование численное
Эйнштейна соотношение 171; 161
Экспонент 74, 75
Энтропия 182–190
Эргодическая гипотеза 198
Яма потенциальная прямоугольная
 285—289, 307, 313

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

10

В этой главе иллюстрируется применение методов Монте-Карло и простых классических методов для численной оценки определенных интегралов.

10.1. ПРОСТЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основной целью этой главы является ознакомление с методами Монте-Карло на примере задачи вычисления определенных интегралов. Однако, чтобы в будущем получить представление о применении метода Монте-Карло для интегрирования, полезно сначала обсудить широко распространенные «классические» методы численного интегрирования. Мы увидим, что, хотя эти методы обычно предпочтительны в случае малых размерностей, они практически не годятся для многомерных интегралов и для вычисления последних наиболее пригодны методы Монте-Карло.

Рассмотрим одномерный определенный интеграл вида

$$F = \int_a^b dx f(x). \quad (10.1)$$

Для некоторых подынтегральных функций $f(x)$ интеграл в (10.1) можно вычислить аналитически, найти в справочниках или оценить с помощью асимптотических рядов. Однако, большинство общезвестных функций проинтегрировать таким способом не удастся и интегралы от них иужно вычислять численно.

Классические методы численного интегрирования основаны на геометрической интерпретации интеграла (10.1) как площади под графиком функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ (рис. 10.1).

Ось x делится на n равных отрезков длиной Δx , где Δx равно

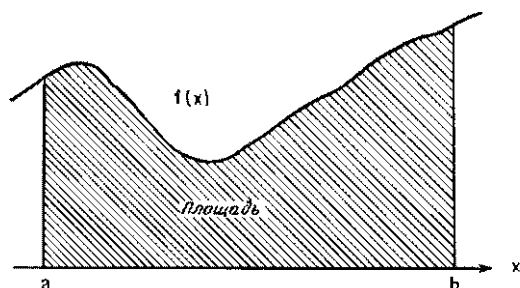


Рис. 10.1. Интеграл F равен площади под кривой $f(x)$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (10.2a)$$

и

$$x_n = x_0 + n\Delta x. \quad (10.2b)$$

Для приведенного выше случая $x_0 = a$, а $x_n = b$.

Простейшей оценкой площади под кривой $f(x)$ служит сумма площадей прямоугольников, как показано на рис. 10.2. В обычном методе *прямоугольников* значение $f(x)$ вычисляется в *начале* каждого отрезка и оценка F_n интеграла дается выражением

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x. \quad (10.3)$$

Другим приближением является формула *трапеций*, в которой интеграл оценивается вычислением площади трапеции со сторонами, равными значениям $f(x)$ в начале и конце отрезка. Это приближение эквивалентно замене функции отрезком прямой, соединяющей значения $f(x)$ в начальной и конечной точках отрезка. Поскольку площадь под кривой от точки x_i до x_{i+1} равна $\frac{1}{2}[f(x_{i+1}) + f(x_i)]\Delta x$, то полная площадь F_n определяется выражением

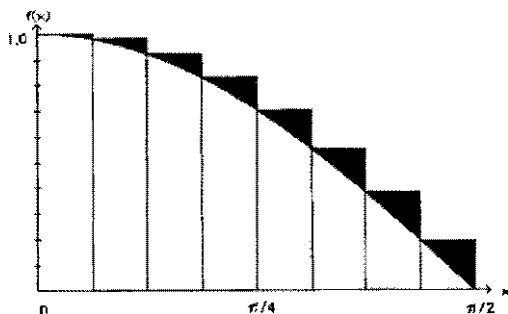


Рис. 10.2. Метод прямоугольников для функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $0 \leq x \leq \pi/2$. Погрешность приближения показана закрашенными фигурами. Численное значение оценки интеграла в случае $n = 8$ приведено в табл. 10.1.

$$F_n = \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \Delta x. \quad (10.4)$$

Обычно более высокую точность обеспечивает использование квадратичной, или параболической, интерполяции по трем соседним точкам. Например, уравнение полинома второй степени, проходящего через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , можно записать в виде

$$y(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (10.5)$$

Чему равно значение $y(x)$ при $x = x_1$? Площадь под параболой $y(x)$ между точками x_0 и x_2 может быть найдена посредством простого интегрирования и выражается формулой

$$F_0 = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \Delta x, \quad (10.6)$$

где $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Полная площадь всех параболических сегментов выражается формулой Симпсона:

$$F_n = \frac{1}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \Delta x. \quad (10.7)$$

Обратите внимание на то, что в формуле Симпсона n должно быть четным числом.

6.7 ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Практически формула Симпсона пригодна для достаточно регулярных функций $f(x)$, т.е. для функций, которые можно аппроксимировать полиномом. Если $f(x)$ является такой «гладкой» функцией, можно вычислить площадь для заданного числа отрезков n , а затем удвоить число отрезков и вновь вычислить эту площадь. Если обе оценки достаточно близки, то вычисления прекращаются. В противном случае можно продолжать удваивать n , до тех пор пока не будет достигнута требуемая

точность. Понятно, что данная процедура не будет работать, если функция $f(x)$ не является гладкой.

Можно ли понять заранее, какой из методов, трапеций или Симпсона, окажется лучше? Один способ основан на предположении, что функцию $f(x)$ можно представить полиномом; в этом случае погрешность можно оценить (см. приложение 10А). Однако подчеркнем, что величина погрешности сильно зависит от характера самой функции $f(x)$ и ее поведения на концах отрезка интегрирования и, следовательно, никакой численный метод не может быть универсальным.

Приведем пример программы вычисления интеграла от функции $f(x)$ методом прямоугольников.

PROGRAM integ

! вычисляется интеграл от функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$

CALL initial(a,b,h,n)

CALL rectangle(a,b,h,n,area)

CALL output(area)

END

SUB initial(a,b,h,n)

LET a = 0

! нижний предел

LET b = 0.5*pi

! верхний предел

INPUT prompt "число интервалов = ": n

LET h = (b - a)/n

! шаг интегрирования

END SUB

SUB rectangle(a,b,h,n,area)

DECLARE DEF f

LET x = a

FOR i = 0 to n - 1

LET sum = sum + f(x)

LET x = x + h

NEXT i

LET area = sum*h

END SUB

SUB output(area)

PRINT using "****.*****": area

END SUB

DEF f(x) = cos(x)

Реализация формулы Симпсона, иллюстрирующая ее связь с формулой трапеций, приводится в нижеследующей подпрограмме, которую нужно подставить в программу `integ` вместо подпрограммы `rectangle`.

```
SUB Simpson (a, b, h, n, area)
! приближение Симпсона
DECLARE DEF f
LET sumall = f(a) + f(b)
LET sumall = 0.5*sumall           ! вклад концевых точек
LET sumeven = sumall             ! вклад только четных членов
LET x = a
FOR i = 1 to n - 1
  LET x = x + h
  LET integrand = f(x)
  LET sumall = sumall + integrand ! четные и нечетные члены
  LET parity = mod(i, 2)          ! 0 четное число, 1 нечетное число
  IF parity = 0 then LET sumeven = sumeven + integrand
NEXT i
LET sum = 4*sumall - 2*sumeven
LET area = h*sum/3               ! численная оценка
END SUB
```

Вместо того чтобы на оценивать погрешности различных классических формул, о которых шла речь в разд. 10.1, рассмотрим точность метода прямоугольников для интеграла от функции $f(x) = \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = \pi/2$. В табл. 10.1 приведены результаты расчетов по программе `integ` в порядке возрастания n . Как видно из анализа зависимости от n разности между численной оценкой F_n и точным результатом, равным единице, погрешность убывает как $1/n$. Эта наблюдаемая зависимость погрешности от n согласуется с общим результатом, полученным в приложении 10А.

ЗАДАЧА 10.1. Прямоугольное приближение

а. Модифицируйте программу `integ` так, чтобы можно было наглядно увидеть площадь под кривой $y = f(x)$ и площади прямоугольников (см. рис. 10.2).

б. Используя метод прямоугольников, оцените численно определенные интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на

ТАБЛИЦА 10.1. Оценки методом прямоугольников интеграла от функции $\cos x$ на отрезке от $x = 0$ до $x = \pi/2$ в зависимости от числа отрезков n . Погрешность Δ_n равна разности между приближенным значением F_n и точным результатом, равным единице. Анализ зависимости Δ_n от n показывает, что Δ_n убывает примерно как $1/n$

n	F_n	Δ_n
2	1.34076	0.34076
4	1.18346	0.18346
8	1.09496	0.09496
16	1.04828	0.04828
32	1.02434	0.02434
64	1.01222	0.01222
128	1.00612	0.00612
256	1.00306	0.00306
512	1.00153	0.00153
1024	1.00077	0.00077

отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае?

ЗАДАЧА 10.2. Метод средней точки

а. Одна из распространенных модификаций метода прямоугольников заключается в вычислении $f(x)$ в *средней* точке каждого отрезка. Внесите необходимые изменения в программу `integ` и вычислите интеграл от $\cos x$. Как соотносится величина погрешности с результатами, приведенными в табл. 10.1? Как приблизительно зависит погрешность от n ?

б. Используя метод средней точки, оцените определенные интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае?

ЗАДАЧА 10.3. Формулы трапеций и Симпсона

а. Каким образом можно модифицировать подпрограмму `Simpson` для одновременного получения оценок интеграла от функции $f(x)$ по формулам трапеций и Симпсона?

б. Используя оба метода, оцените численно интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае? Какой метод приводит к лучшим результатам при одинаковом времени вычислений?

в. Используя формулу Симпсона, оцените значение интеграла от функции $f(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2}$ на отрезках $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq x \leq 2$ и $-3 \leq x \leq 3$.

г. Используя оба метода, оцените определенный интеграл от функции $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ на отрезках $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq x \leq 2$. Какой метод приводит к лучшим результатам? Помните о том, что метод более высокого порядка не всегда дает более высокую точность.

д. Нами уже описана процедура оценки одномерных определенных интегралов, т.е. для выбранной классической формулы интегрирования вычисляются F_n и F_{2n} для приемлемого значения n . Если разность $|F_{2n} - F_n|$ слишком велика, то удваиваем n до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Сходится ли последовательность F_n, F_{2n}, \dots к истинному значению интеграла F , и если да, то существует ли какой-нибудь способ экстраполяции к пределу? Рассмотрим эту идею на примере формулы трапеций. Поскольку мы нашли, что погрешность этого приближения убывает приблизительно как n^{-2} , то мы вправе записать $F = F_n + Cn^{-2}$. Постройте график оценки F_n в зависимости от n^{-2} и получите экстраполированное значение F . Какие предположения необходимо сделать для того, чтобы процедура экстраполяции была успешной? Примените описанный метод к интегралам, рассмотренным в предыдущих задачах, и сравните полученные результаты с тем, что дают один метод трапеций и метод Симпсона. Более изящно описанная идея воплощена в методе Ромберга (см. книгу Пресс и др.).

10.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Многие физические задачи содержат усреднение по многим переменным. Например, предположим, что нам известна зависимость от скорости и координаты полной энергии системы десяти взаимодействующих между собой частиц. Поскольку в трехмерном пространстве каждая частица

имеет по три компоненты скорости и координаты, то полная энергия является функцией 60 переменных. Следовательно, для расчета средней энергии, приходящейся на частицу, требуется вычислять $N = 60$ -мерный интеграл. Если разделить область изменения каждой координаты на p отрезков, то в данном случае потребуется вычислять сумму по p^{60} точкам. Совершенно очевидно, что для больших значений N применять обычные численные методы нельзя; тем не менее стандартные методы все еще используются для $N = 2-5$.

Дополнительное усложнение в вычислении N -мерных интегралов вносит трудность определения $N-1$ пределов интегрирования. По сравнению с этим границы одномерного интеграла представляются двумя числами: верхним и нижним пределами.

Простейший метод оценки многомерных интегралов заключается в сведении этих интегралов к произведению одномерных интегралов. Данный метод эффективен в случае простых пределов интегрирования и гладких подынтегральных функций. Проиллюстрируем метод на примере двумерного интеграла вида

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx dy f(x, y). \quad (10.8)$$

Область интегрирования определяется нижним и верхним пределами y при данном значении x , обозначенными соответственно $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и нижним и верхним пределами x , обозначенными соответственно x_1 и x_2 . Определим функцию $g(x)$ как внутренний интеграл по переменной y :

$$g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) \quad (10.9)$$

и запишем

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x). \quad (10.10)$$

Ниже приводится структура программы двумерного интегрирования. Заметим, что для простоты использован метод прямоугольников.