

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИЗИКЕ: ЧАСТЬ 2.

Книга авторов из США предназначена для обучения читателя моделированию физических экспериментов на компьютере (и тем самым обучению физике). Все главы второй части связаны со статистической физикой и квантовой механикой. Каждая глава содержит теоретический материал, методы решения соответствующих задач, тексты программ, задачи и контрольные вопросы. В основном изложения используются TRUE BASIC, в приложениях программы приведены на Паскале и Фортране-77; здесь же дан справочный материал, облегчающий переход программы на различные модели компьютеров. Может служить учебным пособием.

Для студентов физических и технических вузов, аспирантов, преподавателей физики, молодых специалистов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 10. Численное интегрирование	5	стандартного отклонения от среднего	
10.1. Простые одномерные методы численного интегрирования	6	Приложение 10В. Метод отбора-отказа	41
10.2. Числовой пример	8	ГЛАВА 11. Случайное блуждание	43
10.3. Численное интегрирование многих интегралов	12	11.1. Введение	44
10.4. Вычисление интегралов простейшим методом Монте-Карло	15	11.2. Одномерное случайное блуждание	44
10.5. Вычисление многомерных интегралов методом Монте-Карло	18	11.3. Обобщение метода случайных блужданий	51
10.6. Анализ погрешности метода Монте-Карло	20	11.4. Применения в физике полимеров	67
10.7. Неравномерные распределения вероятностей	26	11.5. Непрерывный предел	78
10.8. Выборка по значимости	30	11.6. Случайные числа	80
10.9. Методы случайного блуждания	32	Литература	84
Литература	35	Дополнительная литература	85
Дополнительная литература	36	Приложение НА. Метод наименьших квадратов	86
Приложение 10А. Оценки погрешностей численного интегрирования	37	Литература к приложению	90
Приложение 10В. Аналитический вывод	39	ГЛАВА 12. Задача о перколоитии	91
		12.1. Введение	92
		12.2. Порог перколоитии	95
		12.3. Марковка кластеров	103
		12.4. Критические показатели конечномерное масштабирование	118
		12.5. Репорн-группа	125

Литература	137	температурой	
Дополнительная литература	138	ГЛАВА 16. Моделирование	221
ГЛАВА 13. Фракталь, модели	139	канонического ансамбля	
капитического роста и		методом Монте-Карло	
клеточные автоматы		16.1. Канонический ансамбль	222
13.1. Фрактальная размерность	140	16.2. Алгоритм Метрополиса	223
13.2. Регулярные фракталь и	148	16.3. Проверка распределения	225
самоподобие		Больцмана	
13.3. Процессы роста фракталов	152	16.4. Моделирование	233
13.4. Клеточные автоматы	167	двумерной модели Изинга	
13.5. Вакопечати	172	16.5. Фазовый переход Изинга	243
Литература	172	16.6. Другие применения	250
Дополнительная литература	174	модели Изинга	
ГЛАВА 14. Приближение к	175	16.7. Моделирование	256
равновесию		классических жидкостей	
14.1. Введение	176	16.8. Другие приложения	271
14.2. Простая модель	177	Литература	274
14.3. Точный перебор	178	Дополнительная литература	275
14.4. Метод Монте-Карло	179	Приложение 16А. Флуктуации в	276
14.5. Энтропия	182	капитическом ансамбле	
14.6. Влияние корреляций	188	Приложение 16Б. Точный	277
14.7. Равновесная энтропия	189	расчет модели Изинга для	
14.8. Энтропия и хаос	190	решетки 2х2	
Литература	191	ГЛАВА 17. Квантовые системы	279
Дополнительная литература	192	17.1. Введение	280
ГЛАВА 15.	193	17.2. Обзор квантовой теории	281
Микрокапитический ансамбль		17.3. Статистическое уравнение	283
15.1. Введение	194	Шредингера	
15.2. Микрокапитический	194	17.4. Нестационарное	289
ансамбль		уравнение Шредингера	
15.3. Моделирование методом	197	17.5. Анализ квантовых систем	300
Монте-Карло		с помощью метода случайных	
15.4. Одномерный	198	блужданий	
классический идеальный газ		17.6. Вариационные методы	308
15.5. Температура и	201	Монте-Карло для	
капитический ансамбль		квантовомеханических систем	
15.6. Модель Изинга	201	Литература	318
15.7. Поток тепла	211	Дополнительная литература	318
15.8. Замечания	217	ГЛАВА 18. Эпилог:	321
Литература	218	одинаковые программы	
Дополнительная литература	218	одинаковые репетиции	
Приложение 15А. Связь	219	18.1. Единство физики	322
средней энергии демота с		18.2. Перегородки и галактики	324

18.3. Как компьютеры влияют сегодня на физику?	330	Часть 2	
Литература	331	ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Распечатки	367
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Указатель	334	программ на языке Паскаль:	
программ на языке TRUE		Часть 2	
BASIC: Часть 2		ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	390
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Распечатки	335		
программ на языке Фортран:			

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомат клеточний	167	172	Восприимчивость, магнитная	234,
Алгоритм устойчивость	288		243, 254, 255, 276, 278	
Анализ чистоти	80	330	Выборка по значимости	26, 31, 32, 34
Анасамбль канонический	201	—204,	Газ	256, 271
222		278	решеточный	60 64, 252, 253
—микроканонический	194	—217	Гауссово распределение	28, 29-34, 51,
Антимагнетизм	205	254	66, 67, 80, 230, 291	
Баттер летательный	224	256	Давление	257, 258, 264
Баня тепловая	221		Динамика молекулярии	281
Бинман алгоритм, см.			Дисперсия, см. Вероятностей	
Интегрирование численное			распределение. Волны свойства	
Бокса Монтера метод	30		Дифференциальные уравнения	
Болты распределение	203	204,	—диффузия	45, 55, 60, 66, 160-
211, 222-230		211	164, 253, 281, 300, 301	
Ван-дер-Ваальса уравнение	264		метод репетиций	Железо-
Вариантный принцип	308	318,	Кромера	283
см. Ферма принцип			Литотритика пробой	165
Ви—Гор модель	324		Жидкость	265, 266, 269, 270
Верле алгоритм, см. Интегрирование			Жесткие сферы	258-267
численное			Задача о коробейнике	271—274
Вероятностей распределение			коммивояжере, см. Задача о	
— гауссово, см. Гауссово			коробейнике	
распределение			разрезания строка	58, 59
дисперсия	22, 30		Игра "Жизнь"	170
интегральное	27, 28		Идеальный газ	198-201, 230, 231
момент	64		Илья модель	204-217, 231-256
— неоднородное	26—29		— динамика спинового обмена	231
плотность	26		— опрокидывания стекла	205,
— равномерно отклоняющееся	27		234	
стандартное отклонение	22	25	Интегрирование численное	
Волновая функция	281		— — аппроксимация в средней точке	
Волшовой пакет	290	300	11, 12	
			Чтотомерное	12 15

- Монте-Карло 15 26
оценки погрешности 37, 38
— формула прямоугольников 7,
9 11, 11, 13
— — — Симпсона 8-12, 20
трапеций 7 12
— — Эйлера -Кромера 283
Ковер, Сергиянского проекция 151,
152
Коррелиации времени 188, 240, 241
атти 243
Корреляционная функция парная
258, 259, 263
Коэффициент кривой 148—152
Краевые условия периодические 168;
63, 154, 238, 261
Лапласа уравнение 166, 167
фрактальные ковры 172
Легионера Джонса потенциал 267,
268
Лотки — Вольтерра уравнение 321,
322
Микросостояние 176, 194
Масштабирование 51, 125, 148
конечномерное 122, 123, 247-250,
255
Метрополиса алгоритм 30-35, 222-
242, 245-255, 258-271, 273, 274
Микросостояние 176, 194
Миджик 248
Моделирование 80, 280, 330
Молния 165, 166
Монте-Карло метод
алгоритм погрешности 20
26, 65
для интегрирования 15
20
квантового ансамбля
201—204, 206—217
микроквантового
ансамбля 197—204, 206—217
полимеров 67 76
- случайного блуждания,
см. Ренормгруппа
— — — частицы в ящике 178—
191
Мороз потенциал 315
Наименее квадратов метод 86 90
Ньютона закон второй 280
Обратного преобразования
(обратных функций) метод 27
30, 66
Оператор гармонический
квантовый 288, 307, 312
Отбора-отказа метод 41
Отжиг модельный 272, 273
Отклонение стандартное 21 25
— среднего 21-25, 39, 40
Периметра ячейки 143, 153, 154, 162,
165
Переколки 92-137, 324-327
в непрерывном случае 100, 101
— длина связности 119—124, 131,
132
— кластер 93, 97, 98, 103-118, 142-148
конечномерное масштабирование
123, 124
оккупирующая 154 161
переколки 324
— показатели 121-124, 131-137, 142,
143
— порог 93, 97, 98, 124, 126, 127, см.
также Фазовый переход
— протекание 93, 94, 98, 131, 134, 147
ренормгруппа 125-137, 143
структуре галактик 324 330
цифры 99
Полимеры 67 75
Предиктор-корректора метод, см.
Интегрирование численное
Релаксации метод 165
Ренормгруппа 125-137, 143
Решетка квадратная 53, 277
Случайное блуждание 44 90, 300-
308

- Случайное блуждание
 без самопересечений 68, 73
 — время первого прохода 58
 — диффузия 45, 60
 — итерационное без самопересечений
 73—75
 метод рептации 71, 73
 — перебор 46, 47, 163, 164
 персистентное 57
 — с ловушками 58, 76—78
 средне kvadraticheskoe смещение
 54, 67
- Случайные последовательности 17, 18, 26, 79—84
 линейный конгруэнтный
 генератор 80
- Собственная функция 282
- Собственное значение 282
- Сортировка 157, 158, 160
- Состояние метастабильное 252
- Спад критический 250
- Сплав бишариый 278
- Температура 201-204, 219, 222
- Теплопроводность удельная 216
- Точка неподвижная 126-132
- Треугольная решетка 54, 55, 99, 216, 255
- True BASIC
- — INPUT 240
 OPEN 240
— — RANDOMIZE 17
— — RND 17, 18
— — TRUNCATE 261
- Универсальность 68, 125
- Фазовый переход 118, 119, 243, 244, 250, 251, 255, 256, 267
 геометрический 94
- — магнитный 242-256
 параметр порядка 243
- Ферромагнетизм 204, 233, 243
- Фоккера—Планка уравнение 78
- Хаос 190, 191
- Центральная предельная теорема 64, 66
- Шредингера уравнение 280, 308
 — нестационарное 281, 289-300
 — стационарное 283-288, 300, 301
- Эйн модель 153—158
- Эйлера—Кромера алгоритм, см.
 Интегрирование численное
- Эйнштейна соотношение 171; 161
- Экспентрицит 74, 75
- Энтропия 182-190
- Эргодическая гипотеза 198
- Яма потенциальная прямоугольная
 285, 289, 307, 313

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

10

В этой главе иллюстрируется применение методов Монте-Карло и простых классических методов для численной оценки определенных интегралов.

10.1. ПРОСТЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основной целью этой главы является ознакомление с методами Монте-Карло на примере задачи вычисления определенных интегралов. Однако, чтобы в будущем получить представление о применении метода Монте-Карло для интегрирования, полезно сначала обсудить широко распространенные «классические» методы численного интегрирования. Мы увидим, что, хотя эти методы обычно предпочтительны в случае малых размерностей, они практически не годятся для многомерных интегралов и для вычисления последних наиболее пригодны методы Монте-Карло.

Рассмотрим одномерный определенный интеграл вида

$$F = \int_a^b dx f(x). \quad (10.1)$$

Для некоторых подынтегральных функций $f(x)$ интеграл в (10.1) можно вычислить аналитически, найти в справочниках или оценить с помощью асимптотических рядов. Однако, большинство общезвестных функций проинтегрировать таким способом не удается и интегралы от них нужно вычислять численно.

Классические методы численного интегрирования основаны на геометрической интерпретации интеграла (10.1) как площади под графиком функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ (рис. 10.1).

Ось x делится на n равных отрезков длиной Δx , где Δx равно

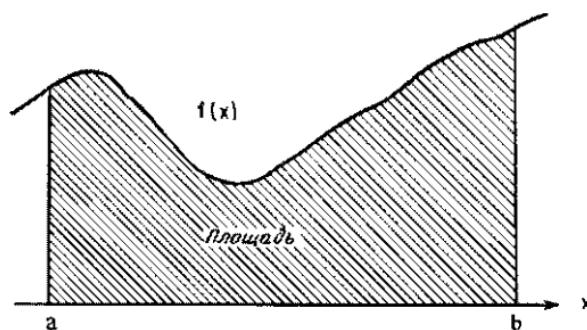


Рис. 10.1. Интеграл F равен площади под кривой $f(x)$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (10.2a)$$

и

$$x_n = x_0 + n\Delta x. \quad (10.26)$$

Для приведенного выше случая $x_0 = a$, а $x_n = b$.

Простейшей оценкой площади под кривой $f(x)$ служит сумма площадей прямоугольников, как показано на рис. 10.2. В обычном методе **прямоугольников** значение $f(x)$ вычисляется в **начале** каждого отрезка и оценка F_n интеграла дается выражением

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x. \quad (10.3)$$

Другим приближением является формула **трапеций**, в которой интеграл оценивается вычислением площади трапеции со сторонами, равными значениям $f(x)$ в начале и конце отрезка. Это приближение эквивалентно замене функции отрезком прямой, соединяющей значения $f(x)$ в начальной и конечной точках отрезка. Поскольку площадь под кривой от точки x_i до x_{i+1} равна $\frac{1}{2}[f(x_{i+1}) + f(x_i)]\Delta x$, то полная площадь F_n определяется выражением

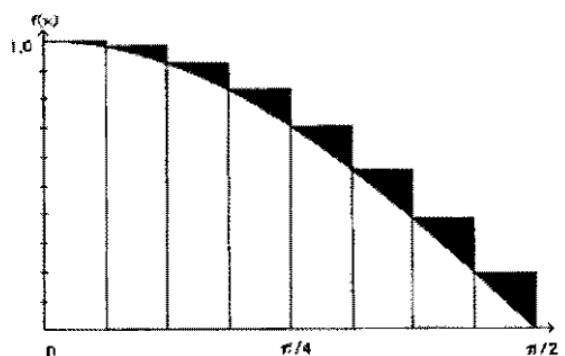


Рис. 10.2. Метод прямоугольников для функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $0 \leq x \leq \pi/2$. Погрешность приближения показана закрашенными фигурами. Численное значение оценки интеграла в случае $n = 8$ приведено в табл. 10.1.

$$F_n = \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] \Delta x. \quad (10.4)$$

Обычно более высокую точность обеспечивает использованием квадратичной, или параболической, интерполяции по трем соседним точкам. Например, уравнение полинома второй степени, проходящего через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , можно записать в виде

$$y(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (10.5)$$

Чему равно значение $y(x)$ при $x = x_1$? Площадь под параболой $y(x)$ между точками x_0 и x_2 может быть найдена посредством простого интегрирования и выражается формулой

$$F_0 = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \Delta x, \quad (10.6)$$

где $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Полная площадь всех параболических сегментов выражается формулой Симпсона:

$$F_n = \frac{1}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \Delta x. \quad (10.7)$$

Обратите внимание на то, что в формуле Симпсона n должно быть четным числом.

6.7 ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Практически формула Симпсона пригодна для достаточно регуляриых функций $f(x)$, т.е. для функций, которые можно аппроксимировать полиномом. Если $f(x)$ является такой «гладкой» функцией, можно вычислить площадь для заданного числа отрезков n , а затем удвоить число отрезков и вновь вычислить эту площадь. Если обе оценки достаточно близки, то вычисления прекращаются. В противном случае можно продолжать удваивать n , до тех пор пока не будет достигнута требуемая

точность. Понятно, что данная процедура не будет работать, если функция $f(x)$ не является гладкой.

Можно ли понять заранее, какой из методов, трапеций или Симпсона, окажется лучше? Один способ основан на предположении, что функцию $f(x)$ можно представить полиномом; в этом случае погрешность можно оценить (см. приложение 10А). Однако подчеркнем, что величина погрешности сильно зависит от характера самой функции $f(x)$ и ее поведения на концах отрезка интегрирования и, следовательно, никакой численный метод не может быть универсальным.

Приведем пример программы вычисления интеграла от функции $f(x)$ методом прямоугольников.

PROGRAM integ

! вычисляется интеграл от функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$

CALL initial(a, b, h, n)

CALL rectangle(a, b, h, n, area)

CALL output(area)

END

SUB initial(a, b, h, n)

LET a = 0

! нижний предел

LET b = 0.5*pi

! верхний предел

INPUT prompt "число интервалов = ": n

LET h = (b - a)/n

! шаг интегрирования

END SUB

SUB rectangle(a, b, h, n, area)

DECLARE DEF f

LET x = a

FOR i = 0 to n - 1

LET sum = sum + f(x)

LET x = x + h

NEXT i

LET area = sum*h

END SUB

SUB output(area)

PRINT using "****.*****": area

END SUB

DEF f(x) = cos(x)

Реализация формулы Симпсона, иллюстрирующая ее связь с формулой трапеций, приводится в нижеследующей подпрограмме, которую нужно подставить в программу `integ` вместо подпрограммы `rectangle`.

```

SUB Simpson {a,b,h,n,area}
  ! приближение Симпсона
  DECLARE DEF f
  LET sumall = f(a) + f(b)
  LET sumall = 0.5*sumall           ! вклад концевых точек
  LET sumeven = sumall            ! вклад только четных членов
  LET x = a
  FOR i = 1 to n - 1
    LET x = x + h
    LET integrand = f(x)
    LET sumall = sumall + integrand ! четные и нечетные члены
    LET parity = mod(i,2)           ! 0 четное число, 1 нечетное число
    IF parity = 0 then LET sumeven = sumeven + integrand
  NEXT i
  LET sum = 4*sumall - 2*sumeven
  LET area = h*sum/3              ! численная оценка
END SUB

```

Вместо того чтобы на оценивать погрешности различных классических формул, о которых шла речь в разд. 10.1, рассмотрим точность метода прямоугольников для интеграла от функции $f(x) = \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = \pi/2$. В табл. 10.1 приведены результаты расчетов по программе `integ` в порядке возрастания n . Как видно из анализа зависимости от n разности между численной оценкой F_n и точным результатом, равным единице, погрешность убывает как $1/n$. Эта наблюдаемая зависимость погрешности от n согласуется с общим результатом, полученным в приложении 10А.

ЗАДАЧА 10.1. Прямоугольное приближение

- Модифицируйте программу `integ` так, чтобы можно было наглядно увидеть площадь под кривой $y = f(x)$ и площади прямоугольников (см. рис. 10.2).
- Используя метод прямоугольников, оцените численно определенные интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на

ТАБЛИЦА 10.1. Оценки методом прямоугольников интеграла от функции $\cos x$ на отрезке от $x = 0$ до $x = \pi/2$ в зависимости от числа отрезков n . Погрешность Δ_n равна разности между приближенным значением F_n и точным результатом, равным единице. Анализ зависимости Δ_n от n показывает, что Δ_n убывает примерно как $1/n$

n	F_n	Δ_n
2	1.34076	0.34076
4	1.18346	0.18346
8	1.09496	0.09496
16	1.04828	0.04828
32	1.02434	0.02434
64	1.01222	0.01222
128	1.00612	0.00612
256	1.00306	0.00306
512	1.00153	0.00153
1024	1.00077	0.00077

отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае?

ЗАДАЧА 10.2. Метод средней точки

а. Одна из распространенных модификаций метода прямоугольников заключается в вычислении $f(x)$ в *средней* точке каждого отрезка. Внесите необходимые изменения в программу *integ* и вычислите интеграл от $\cos x$. Как соотносится величина погрешности с результатами, приведенными в табл. 10.1? Как приблизительно зависит погрешность от n ?

б. Используя метод средней точки, оцените определенные интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае?

ЗАДАЧА 10.3. Формулы трапеций и Симпсона

а. Каким образом можно модифицировать подпрограмму *Simpson* для одновременного получения оценок интеграла от функции $f(x)$ по формулам трапеций и Симпсона?

6. Используя оба метода, оцените численно интегралы от функций $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $f(x) = e^{-x}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Как приблизительно зависит погрешность от n в каждом случае? Какой метод приводит к лучшим результатам при одинаковом времени вычислений?
- в. Используя формулу Симпсона, оцените значение интеграла от функции $f(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2}$ на отрезках $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq x \leq 2$ и $-3 \leq x \leq 3$.
- г. Используя оба метода, оцените определенный интеграл от функции $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ на отрезках $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq x \leq 2$. Какой метод приводит к лучшим результатам? Помните о том, что метод более высокого порядка не всегда дает более высокую точность.
- д. Нами уже описана процедура оценки одномерных определенных интегралов, т.е. для выбранной классической формулы интегрирования вычисляются F_n и F_{2n} для приемлемого значения n . Если разность $|F_{2n} - F_n|$ слишком велика, то удваиваем n до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Сходится ли последовательность F_n, F_{2n}, \dots к истинному значению интеграла F , и если да, то существует ли какой-нибудь способ экстраполяции к пределу? Рассмотрим эту идею на примере формулы трапеций. Поскольку мы нашли, что погрешность этого приближения убывает приблизительно как n^{-2} , то мы вправе записать $F = F_n + Cn^{-2}$. Постройте график оценки F_n в зависимости от n^{-2} и получите экстраполированное значение F . Какие предположения необходимо сделать для того, чтобы процедура экстраполяции была успешной? Примените описанный метод к интегралам, рассмотренным в предыдущих задачах, и сравните полученные результаты с тем, что дают один метод трапеций и метод Симпсона. Более изящно описанная идея воплощена в методе Ромберга (см. книгу Пресс и др.).

10.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Многие физические задачи содержат усреднение по многим переменным. Например, предположим, что нам известна зависимость от скорости и координаты полной энергии системы десяти взаимодействующих между собой частиц. Поскольку в трехмерном пространстве каждая частица

имеет по три компоненты скорости и координаты, то полная энергия является функцией 60 переменных. Следовательно, для расчета средней энергии, приходящейся на частицу, требуется вычислять $N = 60$ -мерный интеграл. Если разделить область изменения каждой координаты на p отрезков, то в данном случае потребуется вычислять сумму по p^{60} точкам. Совершенно очевидно, что для больших значений N применять обычные численные методы нельзя; тем не менее стандартные методы все еще используются для $N = 2-5$.

Дополнительное усложнение в вычислении N -мерных интегралов вносит трудность определения $N-1$ пределов интегрирования. По сравнению с этим границы одномерного интеграла представляются двумя числами: верхним и нижним пределами.

Простейший метод оценки многомерных интегралов заключается в сведении этих интегралов к произведению одномерных интегралов. Данный метод эффективен в случае простых пределов интегрирования и гладких подынтегральных функций. Проиллюстрируем метод на примере двумерного интеграла вида

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx dy f(x, y). \quad (10.8)$$

Область интегрирования определяется нижним и верхним пределами y при данном значении x , обозначенными соответственно $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и нижним и верхним пределами x , обозначенными соответственно x_1 и x_2 . Определим функцию $g(x)$ как внутренний интеграл по переменной y :

$$g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) \quad (10.9)$$

и запишем

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x). \quad (10.10)$$

Ниже приводится структура программы двумерного интегрирования. Заметим, что для простоты использован метод прямоугольников.