А.Г. МОРДКОВИЧ

АЛГЕБРА

7

КЛАСС

УЧЕБНИК

для общеобразовательных учреждений

4-е издание, исправленное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации

Москва 2001

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

Мордкович А.Г.

М79 Алгебра. 7 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. — 4-е изд., испр. — М.: Мнемозина, 2001. — 160 с.: ил.

ISBN 5-346-00050-X

Главная особенность учебника состоит в том, что он основан на принципах проблемного, развивающего и опережающего обучения. Книга имеет повествовательный стиль, легкий и доступный для всех учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА

7 класс

УЧЕБНИК
для общеобразовательных учреждений

Директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *Е. В. Смольникова*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *С. П. Передерий*
Корректор *Л. И. Наумова*
Компьютерная верстка: *А. М. Репкин*

Лицензия ИД № 02085 от 19.06.2000.
Подписано в печать 24.07.01. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10,0. Доп. тираж 100 000 экз. Заказ № 2902 (Кр+Гз).

ИОЦ «Мнемозина». 111141, Москва, ул. Перовская, 47.
Тел. (095) 309-27-77, 368-86-80; факс (095) 368-65-80, 368-86-80.

Отпечатано с готовых диапозитивов на Государственном унитарном предприятии Смоленский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 5-346-00050-X

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Издательство «Мнемозина» опубликовало переработанный комплект книг для изучения курса алгебры в 7 классе общеобразовательной школы:

А.Г. Мордкович. Алгебра-7. Учебник.

А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. Алгебра-7. Задачник.

А.Г. Мордкович. Алгебра, 7–9. Методическое пособие для учителя.

А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская. Тесты по алгебре для 7–9 классов.

Ю.П. Дудницын, Е.Е. Тульчинская. Алгебра, 7–9. Контрольные работы (под ред. А.Г. Мордковича).

У вас в руках первая книга указанного комплекта — учебник. Для изучения курса алгебры в 7 классе ваши ученики должны иметь две книги: учебник и задачник.

Концепция учебника

Математика — гуманитарный предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности, «ум в порядок приводит» и оказывает существенное влияние на развитие речи обучаемых (не только внутри данной предметной области). Математика описывает реальные процессы на математическом языке в виде математических моделей. Поэтому *математический язык и математическая модель* — ключевые слова в постепенном развертывании курса, его идейный стержень. При наличии идейного стержня математика предстает перед учащимся не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина *общекультурного характера*. Именно поэтому из традиционных для любого обучения вопросов: *что? как? зачем?* — в данном учебнике на первое место ставится вопрос *зачем?*

Стиль изложения

Самое главное, к чему стремился автор, — написать подробный учебник, который было бы интересно читать, который представлял бы собой развернутое повествование и в котором была бы интрига. Внутренняя интрига заложена практически в каждой главе и в большинстве параграфов, достигается это за счет ненавязчивой и естественной постановки проблем, которые по объективным причинам в данном месте курса решены быть не могут, но будут в дальнейшем решены.

Не секрет, что нынешние учебники школьники не читают, редко читают их и учителя. Кроме того, есть еще одна категория потенциальных читателей — важных участников учебного процесса, о которых авторы почему-то совсем не думают. Речь идет о родителях, желающих помочь своим детям постичь премудрости математики. Автор надеется, что этот учебник будут читать и учителя, и ученики, и родители, поскольку стиль изложения легкий, доступный, во многом расцвеченный непривычными для математической рутинной лексики оборотами. В то же время изложение характеризуется четкостью, алгоритмичностью, выделяются основные этапы рассуждений с фиксацией внимания читателя на выделенных этапах. Например, решение практически всех текстовых задач оформлено в виде трех этапов: составление математической модели; работа с составленной моделью; ответ на вопрос задачи.

Завершая разговор о стиле изложения, отметим еще одно существенное обстоятельство. На уроках математики учитель всегда сочетает обыденный язык (язык общения, язык литературного повествования) с предметным языком, строгим, сухим, лаконичным, строящимся по принятым в математике законам. Школьные учебники математики, как правило, по изложению не выходят за рамки предметного языка. Но именно это и не дает возможности использовать их в качестве *книги для чтения*. Учебник, который вы держите в руках, — книга не для заучивания, а для изучения, т.е. для чтения и понимания. Ваши ученики, как правило, не должны носить ее с собой на уроки, они должны читать ее дома. Они также не должны учить все, что написано в том или ином параграфе: поскольку это — книга для чтения, в каждом параграфе есть не только сам предмет изучения, но и разговоры о предмете изучения. Это полезно обсуждать на уроках математики хорошим литературным языком.

Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что просто предложить им прочитать дома (и, возможно, обсудить в классе в жанре беседы на следующем уроке).

Каждая глава заканчивается разделом «Основные результаты». Это своеобразный смотр достижений, «сухой остаток», подведение итогов, что для успешности процесса обучения очень важно.

Психолого-педагогические и методические особенности

1. Проблемное изложение материала. Речь идет не о псевдопроблемности, которую под видом проблемности ангажируют современные методики и которая заключается в следующем: учитель, начиная урок, приводит конкретную задачу, решает ее и тем самым подводит учащихся к новому понятию или к новому математическому факту; это в лучшем случае — обучение через задачи или создание проблемной ситуации (чем, конечно, учителя должны пользоваться), но не проблемное обучение. Проблема (по большому счету) — это то, что мы сегодня решить не можем и завтра не решим; это то, что мучает нас продолжительное время, это то, к решению чего мы постепенно приближаемся, ощущая это приближение; это то, наконец, что, будучи разрешено, дает эмоциональный заряд, приносит радость. Именно такое (не локальное, а глобальное) понимание проблемного обучения руководило автором в работе над учебником. Примеров можно привести очень много, внимательный читатель (прежде всего, конечно, учитель математики) все увидит и поймет.

2. Диалектический подход к введению математических понятий. Лишь простейшие понятия даются сразу в готовом виде, остальные же вводятся постепенно, с уточнениями и корректировкой, а некоторые вообще остаются на интуитивном уровне восприятия до тех пор, пока не наступит благоприятный момент для их точного определения. К числу таких понятий относится, например, понятие функции, которое, по глубокому убеждению автора, не должно вводиться строго с самого начала, оно должно «созреть». Во всяком случае в этом учебнике строгого определения функции нет, оно будет введено лишь в курсе алгебры 9 класса.

3. Развивающее обучение. Работая над учебником, автор понимал, что его главная задача заключается не в сухом сообщении математических фактов, а в развитии учащихся посредством продвижения в предмете, иными словами, приоритетным является не информационное, а развивающее поле курса. В учебнике практически реализованы принципы развивающего обучения, сформулированные Л.В. Занковым: обучение на высоком уровне трудности; прохождение тем программы достаточно быстрым темпом; ведущая роль теоретических знаний; осознание процесса обучения (ученик должен видеть, как он умнеет в процессе изучения материала — это досигается проблемным обучением); развитие всех учащихся (естественно, учитывая, что у каждого из них свой потолок).

В заключение — несколько слов для тех учителей, которые впервые начинают работать по нашим учебным пособиям. Советуем прежде всего познакомиться с общей концепцией курса (она изложена в первой части методического пособия), а затем постоянно опираться на рекомендации, имеющиеся в методическом пособии.

Автор

Учитесь работать с книгой

Естественным продолжением идеи, заложенной в учебниках математики для 5–6 классов (авторы: Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др.), является введение в настоящий учебник алгебры знаков-символов.

Изображение знаков на полях книги отличается ясностью восприятия. Они легко запоминаются, непринужденно вплетаясь в авторский текст, несут дополнительную зрительную информацию, отражающую специфику стиля изложения, соответствуют дидактическим принципам и методическим особенностям.

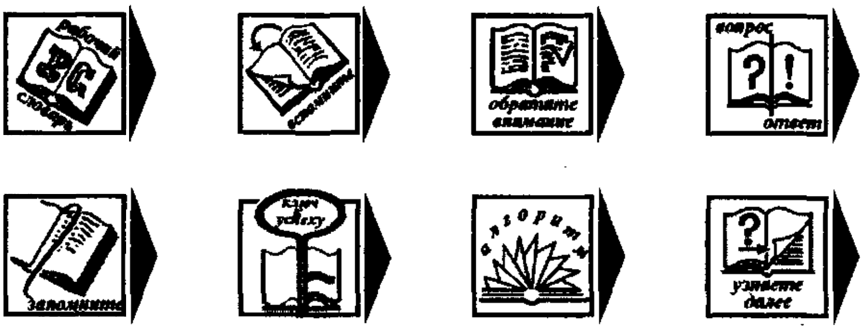
Цель введения знаков, с одной стороны, подчеркнуть оригинальность авторского стиля, с другой:

— помочь учащимся усвоить и закрепить учебный материал;

— побудить учителей к воспитанию у школьников навыков быстрой ориентации;

— помочь родителям правильно проконтролировать знания детей.

От редакции



■ — окончание решения примера (при отсутствии рубрики «ответ»).

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В младших классах вы учились проводить вычисления с целыми и дробными числами, решали уравнения, знакомились с геометрическими фигурами, с координатной плоскостью. Все это составляло содержание одного школьного предмета «Математика». В действительности такая важная область науки, как математика, подразделяется на огромное число самостоятельных дисциплин: алгебру, геометрию, теорию вероятностей, математический анализ, математическую логику, математическую статистику, теорию игр и т.д. У каждой дисциплины — свои объекты изучения, свои методы познания реальной действительности.

Алгебра, к изучению которой мы приступаем, дает человеку возможность не только выполнять различные вычисления, но и учит его делать это как можно быстрее, рациональнее. Человек, владеющий алгебраическими методами, имеет преимущество перед теми, кто не владеет этими методами: он быстрее считает, успешнее ориентируется в жизненных ситуациях, четче принимает решения, лучше мыслит. Наша задача — помочь вам овладеть алгебраическими методами, ваша задача — не противиться обучению, с готовностью следовать за нами, преодолевая трудности.

На самом деле в младших классах вам уже приоткрыли окно в волшебный мир алгебры, ведь алгебра в первую очередь изучает числовые и алгебраические выражения.

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

числовое выражение

алгебраическое выражение

Напомним, что **числовым выражением** называют всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий (составленную, разумеется, со смыслом: например, $3 + 5 \cdot 7$ — числовое выражение, тогда как $3 + :$ — не числовое выражение, а бессмысленный набор символов). По некоторым причинам (о них мы будем говорить в дальнейшем) часто вместо конкретных чисел употребляются буквы (преимущественно из латинского алфавита); тогда получается **алгебраическое выражение**. Эти выражения могут быть очень громоздкими. Алгебра учит упрощать их, используя разные правила, законы, свойства, алгоритмы, формулы, теоремы.

Пример 1. Упростить числовое выражение:

$$\frac{(2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right)}{25 \cdot 37 \cdot 0{,}4}$$

Решение. Сейчас мы вместе с вами кое-что вспомним, и вы увидите, как много алгебраических фактов вы уже знаете.

Прежде всего нужно выработать план осуществления вычислений. Для этого придется использовать принятые в математике соглашения о порядке действий. Порядок действий в данном примере будет таким:

1) найдем значение A выражения в первых скобках:

$$A = 2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81;$$

2) найдем значение B выражения во вторых скобках:

$$B = \frac{2}{5} - \frac{14}{15};$$

3) разделим A на B — тогда будем знать, какое число C содержится в числителе (т. е. над горизонтальной чертой);

4) найдем значение D знаменателя (т. е. выражения, содержащегося под горизонтальной чертой):

$$D = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4;$$

5) разделим C на D — это и будет искомый результат.

Итак, план вычислений есть (а наличие плана — половина успеха!), приступим к его реализации.

1) Найдем $A = 2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81$. Конечно, можно считать подряд или, как говорится, «в лоб»: $2{,}73 + 4{,}81$, затем к этому числу прибавить $3{,}27$, затем вычесть $2{,}81$. Но культурный человек так вычислять не будет. Он вспомнит переместительный и сочетательный законы сложения (впрочем, ему их и не надо вспоминать, они у него всегда в голове) и будет вычислять так:

$$(2{,}73 + 3{,}27) + (4{,}81 - 2{,}81) = 6 + 2 = 8.$$

2) Найдем $B = \frac{2}{5} - \frac{14}{15}$. Здесь нам придется вспомнить, как действовать с обыкновенными дробями. Сначала надо привести дроби к общему знаменателю: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$. Далее находим:

$$\frac{2}{5} - \frac{14}{15} = \frac{6}{15} - \frac{14}{15} = \frac{6 - 14}{15} = -\frac{8}{15}.$$

3) Разделим A на B. Имеем:

$$8 : \left(-\frac{8}{15}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8 \cdot 15}{8} = -15.$$

Итак, числитель C равен -15 (отрицательное число).

4) Найдем значение D знаменателя: $D = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4$. Опять-таки можно проводить вычисления «в лоб», т. е. вычислить $25 \cdot 37$, затем то, что получится, умножить на $0{,}4$. Но думающий человек (а таким всегда является культурный человек) воспользуется переместительным и сочетательным законами умножения и будет вычислять так:

$$D = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4 = (25 \cdot 0{,}4) \cdot 37 = 10 \cdot 37 = 370.$$

5) Осталось разделить числитель C на знаменатель D. Получим: $-\frac{15}{370} = -\frac{3}{74}$ (разделили числитель и знаменатель дроби на 5, т. е. сократили дробь).

Ответ: $-\frac{3}{74}$.

А теперь еще раз вместе проанализируем, какие математические факты нам пришлось вспомнить в процессе решения примера (причем не просто вспомнить, но и использовать).

1. Порядок арифметических действий.
2. Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.
3. Переместительный закон умножения: $ab = ba$.
4. Сочетательный закон сложения:
$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$
5. Сочетательный закон умножения: $abc = (ab)c = a(bc)$.
6. Понятия обыкновенной дроби, десятичной дроби, отрицательного числа.
7. Арифметические операции с десятичными дробями.
8. Арифметические операции с обыкновенными дробями.
9. Основное свойство обыкновенной дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить на одно и то же число или разделить на одно и то же число, отличное от нуля). Это свойство позволило нам преобразовать дробь $\frac{2}{5}$ к виду $\frac{6}{15}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ одновременно умножили на одно и то же число 3). Оно же позволило нам сократить дробь $\frac{15}{370}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{370}$ одновременно разделили на одно и то же число 5).
10. Правила действий с положительными и отрицательными числами.

Все это вы знаете, но ведь все это — алгебраические факты. Таким образом, некоторое знакомство с алгеброй у вас уже состоялось в младших классах. Основная трудность, как видно уже из примера 1, заключается в том, что таких фактов довольно много, причем их надо не только знать, но и уметь использовать, как говорят, «в нужное время и в нужном месте». Вот этому и будем учиться.

И последнее, чтобы закончить обсуждение примера 1. То число, которое получается в результате упрощений числового выражения (в данном примере это было число $-\frac{3}{74}$), называют **значением числового выражения.**

значение числового выражения

переменная

значение алгебраического выражения

Если дано алгебраическое выражение, то можно говорить о **значении алгебраического выражения**, но только при конкретных значениях входящих в него букв. Например, алгебраическое выражение $a + b$ при $a = 5$, $b = 7$ имеет значение 12 (поскольку $a + b = 5 + 7 = 12$); при $a = -16$, $b = -14$ оно имеет значение -30 (так как $a + b = -16 + (-14) = -16 - 14 = -30$). Алгебраическое выражение $a^2 - 3b$ (что такое a^2, помните? — это $a \cdot a$) при $a = -2$, $b = 0{,}4$ принимает вид числового выражения $(-2)^2 - 3 \cdot 0{,}4$; упрощая, получаем: $4 - 1{,}2 = 2{,}8$ — это и есть значение алгебраического выражения $a^2 - 3b$ при $a = -2$, $b = 0{,}4$.

Поскольку буквам, входящим в состав алгебраического выражения, можно придавать различные числовые значения (т.е. можно менять значения букв), эти буквы называют **переменными**.

Пример 2. Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

если: а) $a = 1$, $b = 2$; б) $a = 3{,}7$, $b = -1{,}7$; в) $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$.

Решение.

а) Соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$;

2) $a + b = 1 + 2 = 3$;

3) $a - b = 1 - 2 = -1$;

4) $(a + b)(a - b) = 3 \cdot (-1) = -3$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{9}{-3} = -3$.

б) Аналогично, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 3{,}7^2 + 2 \cdot 3{,}7 \cdot (-1{,}7) + (-1{,}7)^2 =$
$= 13{,}69 - 12{,}58 + 2{,}89 = 4;$

2) $a + b = 3{,}7 + (-1{,}7) = 2;$

3) $a - b = 3{,}7 - (-1{,}7) = 5{,}4;$

4) $(a + b)(a - b) = 2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8;$

5) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{4}{10{,}8} = \dfrac{4 \cdot 10}{10{,}8 \cdot 10} = \dfrac{40}{108} = \dfrac{10}{27}$

(разделили числитель и знаменатель дроби $\dfrac{40}{108}$ на 4, т. е. сократили дробь).

в) Снова, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 =$

$= \dfrac{9}{25} + \dfrac{18}{25} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{36}{25};$

2) $a + b = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{5};$

3) $a - b = \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5} = 0;$

4) $(a + b)(a - b) = \dfrac{6}{5} \cdot 0 = 0.$

обратите внимание

А на нуль делить нельзя! Что это значит в данном случае (и в других аналогичных случаях)? Это значит, что при $a = \dfrac{3}{5}$, $b = \dfrac{3}{5}$ заданное алгебраическое выражение *не имеет смысла*.

Используется такая терминология: если при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение имеет числовое значение, то указанные значения переменных называют допустимыми; если же при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение не имеет смысла, то указанные значения переменных называют недопустимыми. Так, в примере 2 значения $a = 1$ и $b = 2$, $a = 3{,}7$ и $b = -1{,}7$ — допустимые, тогда как значения $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ — недопустимые (более точно: первые две пары значений — допустимые, а третья пара значений — недопустимая).

допустимое значение переменной

недопустимое значение переменной

Вообще, в примере 2 недопустимыми будут такие значения переменных a, b, при которых либо $a + b = 0$, либо $a - b = 0$. Например, $a = 7$, $b = -7$ или $a = 28{,}3$, $b = 28{,}3$ — недопустимые пары значений; в первом случае $a + b = 0$, а во втором случае $a - b = 0$. В обоих случаях знаменатель заданного в этом примере выражения обращается в нуль, а на нуль, повторим еще раз, делить нельзя. Теперь, наверное, вы и сами сможете придумать как допустимые пары значений для переменных a, b, так и недопустимые пары значений этих переменных в примере 2. Попробуйте!

Замечание 1. Пример 2в) на самом деле мы решали плохо (некультурно), поскольку сделали ряд лишних, ненужных вычислений. Надо было сразу заметить, что при $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ знаменатель обращается в нуль, и объявить: выражение не имеет смысла! Но, как говорится, сразу замечает тот, кто знает, что надо замечать. Этому и учит алгебра.

Замечание 2. Если бы мы с вами решали пример 2 позднее, то сделали бы это лучше. Мы бы смогли преобразовать выражение к более простому виду $\frac{a+b}{a-b}$, а тогда, согласитесь, гораздо проще было бы и вычислять. А вот почему верно равенство $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$, пока мы сказать не можем. На этот вопрос ответим позднее (в § 25).

§ 2. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

Математики отличаются от «нематематиков» тем, что, обсуждая научные проблемы, говорят друг с другом и пишут на особом «математическом языке». Дело в том, что на математическом языке многие утверждения выглядят яснее и прозрачнее, чем на обычном.

Например, на обычном языке говорят: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется». Слыша это, математик пишет (или говорит):

$$a + b = b + a.$$

Он переводит высказанное утверждение на математический язык, в котором используются разные числа, буквы (переменные), знаки арифметических действий, иные символы. Запись $a + b = b + a$ экономна и удобна для применения.

Возьмем другой пример. На обычном языке говорят: «Чтобы сложить две обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить без изменения». Математик осуществляет «синхронный перевод» на свой язык:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

А вот пример обратного перевода. На математическом языке записан распределительный закон:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Осуществляя перевод на обычный язык, получим длинное предложение: «Чтобы умножить число a на сумму чисел b и c, надо число a умножить поочередно на каждое слагаемое и полученные произведения сложить».

Во всяком языке есть письменная и устная речь. Выше мы говорили о письменной речи в математическом языке. А устная речь — это употребление специальных терминов, например: «слагаемое», «уравнение», «неравенство», «график», «координата», а также различные математические утверждения, выраженные словами.

Говорят, что культурный человек, кроме родного языка, должен владеть хотя бы одним иностранным языком. Это верно, но требует дополнения: культурный человек должен еще уметь говорить, писать, думать и на *математическом языке*, поскольку это тот язык, на котором, как мы не раз убедимся в дальнейшем, «говорит» окружающая действительность. Этому и будем учиться.

Чтобы овладеть новым языком, необходимо изучить его буквы, слоги, слова, предложения, правила, грамматику. Это не самое веселое занятие, интереснее сразу читать и говорить. Но так не бывает, придется набраться терпения и сначала изучить основы. Такие основы математического языка мы будем изучать с вами в главах 2–5. И, конечно, в результате такого изучения ваши представления о математическом языке будут постепенно расширяться.

§ 3. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Представьте себе такую ситуацию: в школе четыре седьмых класса. В 7А учатся 15 девочек и 13 мальчиков, в 7Б — 12 девочек и 12 мальчиков, в 7В — 9 девочек и 18 мальчиков, в 7Г — 20 девочек и 10 мальчиков. Если нам нужно ответить на вопрос, сколько учеников в каждом из седьмых классов, то нам 4 раза придется осуществлять одну и ту же операцию сложения:

в 7А	$15 + 13 = 28$ учеников;
в 7Б	$12 + 12 = 24$ ученика;
в 7В	$9 + 18 = 27$ учеников;
в 7Г	$20 + 10 = 30$ учеников.

математическая модель

Используя математический язык, можно все эти четыре разные ситуации объединить: в классе учатся a девочек и b мальчиков, значит, всего учеников $a + b$. Эту запись $a + b$ называют математической моделью данной реальной ситуации. Алгебра в основном занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей, а затем имеет дело уже не с реальными ситуациями, а с этими моделями, используя разные правила, свойства, законы, выработанные в алгебре.

В следующей таблице приведены различные реальные ситуации и их математические модели; при этом a — число девочек в классе, b — число мальчиков в том же классе.

№	Реальная ситуация	Математическая модель
1	В классе девочек и мальчиков поровну (как в 7Б)	$a = b$
2	Девочек на 2 больше, чем мальчиков (как в 7А)	$a - b = 2$ или $a = b + 2$ или $a - 2 = b$
3	Девочек на 9 меньше, чем мальчиков (как в 7В)	$b - a = 9$ или $b = a + 9$ или $a = b - 9$
4	Девочек в 2 раза больше, чем мальчиков (как в 7Г)	$a = 2b$
5	Девочек в 2 раза меньше, чем мальчиков (как в 7В)	$a = \frac{b}{2}$ или $b = 2a$
6	Если в данный класс придут еще одна девочка и три мальчика, то девочек и мальчиков станет поровну (как в 7А)	$a + 1 = b + 3$
7	Если из класса уйдут три девочки, то мальчиков станет в 3 раза больше (как в 7В)	$b = 3(a - 3)$

Составляя эту таблицу, мы шли от реальной ситуации к ее математической модели. Не надо уметь двигаться и в обратном направлении, т.е. по заданной математической модели описывать словами реальную ситуацию. Например, что означает (при тех же обозначениях, что и в нашей таблице) такая математическая модель: $a - 5 = b + 5$? Она означает, что если из класса уйдут 5 девочек и придут 5 мальчиков, то девочек и мальчиков в классе станет поровну (эта ситуация имеет место в 7Г из рассмотренного примера).

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Наверное, у вас возник вопрос: а зачем нужна математическая модель реальной ситуации, что она нам дает, кроме краткой выразительной записи? Чтобы ответить на этот вопрос, решим следующую задачу.

Пример 1. В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из этого класса уйдут три девочки и придут три мальчика, то девочек будет на 4 больше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Пусть x — число мальчиков в классе, тогда $2x$ — число девочек. Если уйдут три девочки, то останется $(2x - 3)$ девочек. Если придут три мальчика, то станет $(x + 3)$ мальчиков. По условию девочек будет тогда на 4 больше, чем мальчиков; на математическом языке это записывается так: $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

Это уравнение — математическая модель задачи. Используя известные правила решения уравнений, последовательно получаем:

$2x - 3 - x - 3 = 4$ (раскрыли скобки);

$x - 6 = 4$ (привели подобные слагаемые);

$x = 6 + 4;$

$x = 10.$

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. В классе 10 мальчиков, а значит, 20 девочек (вы помните, их по условию было в 2 раза больше).

Ответ: всего в классе 30 учеников.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: заметили ли вы, что в ходе решения было четкое разделение рассуждений на три этапа?

На первом этапе, введя переменную x и переведя текст задачи на математический язык, мы составили математическую модель — в виде уравнения $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

На втором этапе, используя наши знания, мы это уравнение решили, точнее, довели до самого простого вида ($x = 10$). На этом этапе мы не думали ни про девочек, ни про мальчиков, а занимались «чистой» математикой, работали только с математической моделью.

На третьем этапе мы использовали полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи. На этом этапе мы снова вернулись к девочкам, мальчикам и интересующему нас классу.

Подведем итоги. В процессе решения задачи были четко выделены три этапа:

Первый этап. *Составление математической модели.*

Второй этап. *Работа с математической моделью.*

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Вот так обычно применяется математика к реальной действительности. После рассмотренного примера повторим вопрос: как вы думаете, нужны ли математические модели и надо ли уметь работать с ними? Нужны! Разумеется, чем сложнее модель, тем больше фактов, правил, свойств приходится применять для ее упрощения. Эти факты, правила, свойства надо изучить, что мы и будем с вами делать.

Математические модели бывают не только алгебраические (в виде равенства с переменными, как в нашей таблице, или в виде уравнения, как было в примере 1). Для знакомства еще с одним видом математической модели возьмем задачу из учебника математики для 6 класса (специально берем задачу, с которой вы уже встречались).

Пример 2. Построить график температуры воздуха, если известно, что температуру измеряли в течение суток и по результатам измерения составили следующую таблицу:

Время суток, ч	0	2	4	6	8	10	11	14	16	18	22	24
Температура, С°	5	0	0	-3	-4	-2	0	6	8	5	3	3

Решение. Построим прямоугольную систему координат. По горизонтальной оси (оси абсцисс) будем откладывать значения времени, а по вертикальной оси (оси ординат) — значения температуры. Построим на координатной плоскости точки, координатами которых являются соответствующие числа из таблицы. Всего получается 12 точек (рис. 1). Соединив их плавной линией, получим один из возможных графиков температуры (рис. 2). ■

Построенный график есть математическая модель, описывающая зависимость температуры от времени. Анализируя этот график, можно описать словами, что происходило с температурой воздуха в течение суток. Ночью с 0 ч до 8 ч утра становилось все

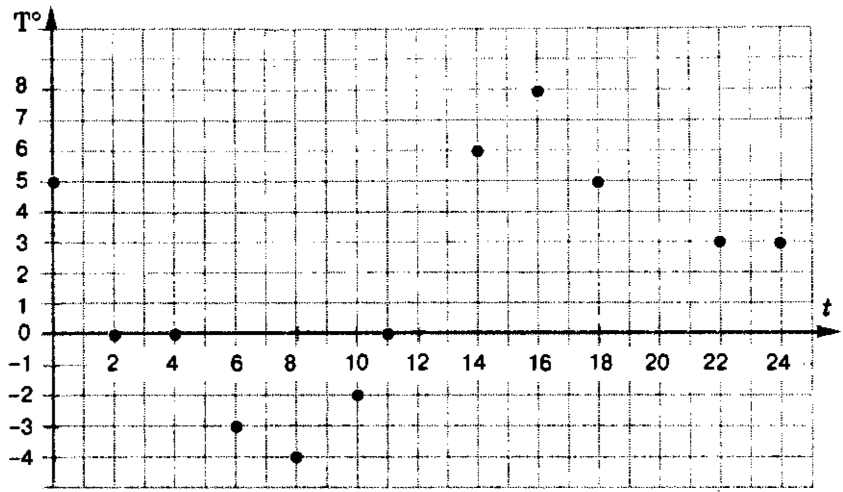


Рис. 1

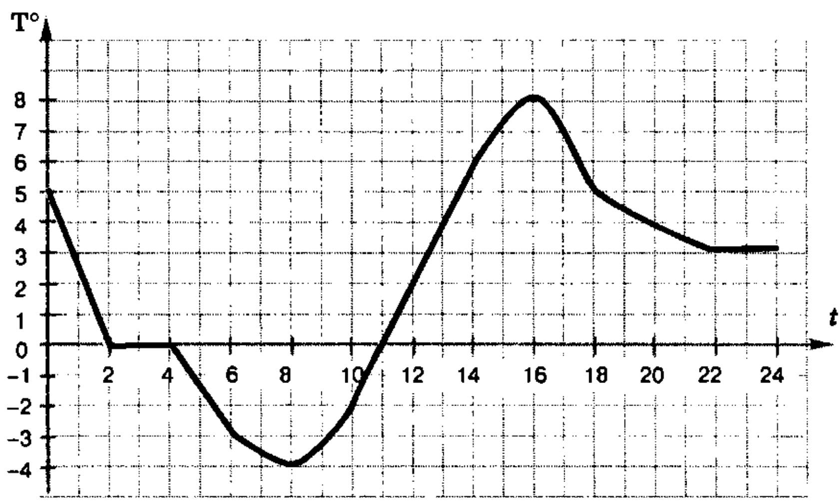


Рис. 2

холоднее (от 5° в 0 ч до – 4° в 8 ч утра). Потом, видимо, выглянуло солнышко и стало теплеть, так что в 11 ч температура была уже не отрицательной, а нулевой (0°). До 16 ч теплело, причем в 16 ч было теплее всего (8°). А затем стало темнеть, температура начала постепенно снижаться и понизилась до 3° в 22 ч. Глядя на график температуры, можно определить, какая была наименьшая температура (– 4° в 8 ч утра), какая была наибольшая температура (8° в 16 ч), где температура менялась быстрее, где медленнее.

Рассмотренную математическую модель называют графической моделью.

словесная модель

алгебраическая модель

графическая модель

Итак, нам нужно учиться описывать реальные ситуации словами (*словесная модель*), алгебраически (*алгебраическая модель*), графически (*графическая модель*). Бывают еще *геометрические модели* реальных ситуаций — они изучаются в курсе геометрии. Впрочем, графические модели также иногда называют геометрическими, а вместо термина «алгебраическая модель» употребляют термин «аналитическая модель».

Все это — виды математических моделей.

ГЛАВА 2

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

§ 4. ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Одна из особенностей математического языка, которым мы с вами должны научиться пользоваться, состоит в стремлении применять как можно более короткие записи. Математик не будет писать

$$a + a + a + a + a,$$

он напишет $5a$; не будет писать

$$a + a + a + a + a + a + a + a + a + a$$

(здесь 10 слагаемых), а напишет $10a$;

не будет писать $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}}$,

а напишет na.

Точно так же математик не будет писать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, а воспользуется специально придуманной короткой записью 2^5. Аналогично вместо произведения семи одинаковых множителей $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ он запишет 3^7. Конечно, в случае необходимости он будет двигаться в обратном направлении, например, заменит короткую запись 2^6 более длинной $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, произведет вычисления, получит 64 и запишет $2^6 = 64$.

Еще одна особенность математического языка: если появляется новое обозначение, то появляются и новые термины. И все это (и обозначения, и термины) охватываются новым определением. **Определением** обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина, нового слова, нового обозначения. Просто так определения не придумываются, они появляются только тогда, когда в этом возникает необходимость.

Определение 1. Под a^n, где $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, понимают произведение n одинаковых множителей, каждым из которых является число a. Выражение a^n называют **степенью**, число a — **основанием степени**, число n — **показателем степени**.

определение

степень

основание степени

показатель степени

В дальнейшем вы узнаете, что показателем степени может быть не только натуральное число. Но это произойдет позднее, в старших классах, а пока ограничимся только случаем, когда показатель степени — натуральное число; обычно говорят короче: *натуральный показатель*, отсюда и происходит название как всей главы, так и этого параграфа.

Итак,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n;$$

a^n — степень с натуральным показателем;
a — основание степени;
n — показатель степени.

Запись a^n читают так: «a в n-й степени». Исключение составляют запись a^2, которую читают: «a в квадрате» (хотя можно читать: «a во второй степени»), и запись a^3, которую читают: «a в кубе» (хотя можно читать и «a в третьей степени»).

Пример 1. Записать в виде степени произведение $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ и использовать соответствующие термины.

Решение. Поскольку дано произведение шести одинаковых множителей, каждый из которых равен 5, имеем:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$;
5^6 — степень;
5 — основание степени;
6 — показатель степени. ■

Пример 2. Вычислить $(-2)^4$.
Решение. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.
Ответ: 16.

Пример 3. Вычислить $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Решение. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$.

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Как вы думаете, полностью ли соответствует названию параграфа определение 1? Параграф называется «Что такое степень с натуральным показателем», т. е. имеется в виду, что в качестве показателя может фигурировать л ю б о е натуральное число. А любое ли натуральное число фигурирует в качестве показателя в определении 1? Как вы ответите на этот вопрос?

Ответим на этот вопрос вместе: мы говорили о степени a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, а вот случай, когда $n = 1$, пока упустили из виду («потеряли» одно натуральное число). Это упущение исправим с помощью нового определения.

Определение 2. Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$\boxed{a^1 = a.}$$

Пример 4. Найти значение степени a^n при заданных значениях a и n:

а) $a = 2{,}5, \quad n = 2$; б) $a = \frac{1}{3}, \quad n = 4$;
в) $a = -5, \quad n = 1$; г) $a = -1, \quad n = 4$;
д) $a = -1, \quad n = 5$; е) $a = 0, \quad n = 1$;
ж) $a = 0, \quad n = 12$; з) $a = 1, \quad n = 17$.

Р е ш е н и е. а) $a^n = 2{,}5^2 = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$;

б) $a^n = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$;

в) $a^n = (-5)^1 = -5$;

г) $a^n = (-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$;

д) $a^n = (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

е) $a^n = 0^1 = 0$;

ж) $a^n = 0^{12} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{12 \text{ множителей}} = 0$;

з) $a^n = 1^{17} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{17 \text{ множителей}} = 1$. ◼

возведение в степень

Операцию отыскания степени a^n называют **возведением в степень**. В примере 4 мы рассмотрели восемь случаев возведения в степень.

Пример 5. Вычислить $7^1 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3$.

Р е ш е н и е. 1) $7^1 = 7$;

2) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;

3) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

4) $7 \cdot 9 \cdot (-8) = -504$.

О т в е т: -504.

В рассмотренных примерах мы несколько раз возводили в степень отрицательные числа. Заметили ли вы закономерность: если отрицательное число возводится в *четную* степень, то получается *положительное* число, если же отрицательное число возводится в *нечетную* степень, то получается *отрицательное* число? Попробуйте объяснить, почему это так.

§ 5. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Вы знаете таблицу умножения, в нее включены произведения любых двух однозначных чисел ($3 \cdot 5$, $4 \cdot 7$ и т. д.), этой таблицей вы постоянно пользуетесь при вычислениях. На практике полезна и таблица степеней простых однозначных чисел (в пределах тысячи). Составим ее.

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$	$7^1 = 7$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$		
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$		
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

С помощью этой таблицы можно находить и степени составных чисел (поэтому такие степени в таблицу обычно не включают). Например,

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729.$$

Пример 1. Известно, что $2^n = 128$, $3^k = 243$. Что больше, n или k?

Решение. По таблице находим, что $128 = 2^7$, значит, $n = 7$. По таблице также находим, что $243 = 3^5$, значит, $k = 5$. Так как $7 > 5$, то $n > k$.

Ответ: $n > k$.

Имеются еще три числа, для которых легко составить таблицу степеней, особенно учитывая, что ничего вычислять не нужно и результат фактически известен заранее. Это числа 1, 0, − 1, а таблица степеней для этих оснований выглядит следующим образом:

$1^n = 1$ для любого n;
$0^n = 0$ для любого n;
если n — четное число ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$), то $(-1)^n = 1$;
если n — нечетное число ($n = 1, 3, 5, 7, \ldots$), то $(-1)^n = -1$.

Кстати, используя формулу четного числа $n = 2k$ и формулу нечетного числа $n = 2k - 1$, можем записать, что

$$\boxed{(-1)^{2k} = 1; \quad (-1)^{2k-1} = -1.}$$

А теперь выберем в качестве основания степени число 10:

$$10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000.$$

Обратите внимание: каков показатель, столько нулей надо записать после цифры 1.

Вообще,

$$10^n = \underbrace{1000\ \ldots\ 0}_{n \text{ нулей}}$$

Например, $10^6 = 1000000$; напротив, $100000 = 10^5$.

Пример 2. Найти значение выражения

$$\frac{a^{17}+b^{18}+c^{19}}{a^{18}-b^{37}+c^1} + \frac{(10c)^4}{(a+3)^4}$$

при $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

Решение.

1) $\dfrac{a^{17}+b^{18}+c^{19}}{a^{18}-b^{37}+c^1} = \dfrac{(-1)^{17}+0^{18}+1^{19}}{(-1)^{18}-0^{37}+1^1} = \dfrac{-1+0+1}{1-0+1} = \dfrac{0}{2} = 0;$

2) $\dfrac{(10c)^4}{(a+3)^4} = \dfrac{(10\cdot 1)^4}{(-1+3)^4} = \dfrac{10^4}{2^4} = \dfrac{10\,000}{16} = 625;$

3) $0 + 625 = 625.$

Ответ: 625.

В заключение данного параграфа еще раз отметим, что математики всегда стремятся к краткости записей, четкости рассуждений. Поэтому, введя новое понятие, они начинают изучать его свойства, а затем применяют эти свойства на практике. О разных свойствах степени с натуральным показателем поговорим в следующем параграфе, а пока, забегая вперед, заметим, что если бы одно из таких свойств мы уже знали, то не вычисляли бы так долго 9^3, как это было сделано выше. Мы бы записали так:

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

Видите, запись в два раза короче. Выгодно? Выгодно. А почему это так, узнаем в § 6.

§ 6. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Бóльшая часть математических утверждений проходит в своем становлении три этапа.

На первом этапе человек в ряде конкретных случаев подмечает одну и ту же закономерность.

На втором этапе он пытается сформулировать подмеченную закономерность в общем виде, т.е. предполагает, что эта закономерность действует не только в рассмотренных случаях, но и во всех других аналогичных случаях.

На третьем этапе он пытается доказать, что закономерность, сформулированная (гипотетически) в общем виде, на самом деле верна.

Доказать какое-либо утверждение — это значит объяснить, почему оно верно (объяснить убедительно, а не так: «это верно потому, что это верно»). При доказательстве можно ссылаться только на уже известные факты.

Давайте попытаемся вместе пройти все три этапа, попробуем *открыть, сформулировать* и *доказать* свойства степеней.

Открытие первое

Пример 1. Вычислить: а) $2^3 \cdot 2^5$; б) $3^1 \cdot 3^4$.

Решение. а) Имеем:

$$2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ \text{множителя}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\ \text{множителей}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8\ \text{множителей}}.$$

Всего имеется 8 одинаковых множителей, каждый из которых равен 2, т. е. 2^8, что по таблице (см. § 5) дает 256.

б) Имеем:

$$3^1 \cdot 3^4 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{3}_{1\ \text{множитель}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\ \text{множителя}} = 3^5 = 243.$$

Ответ: а) 256; б) 243.

2.6. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

В процессе решения примера мы заметили, что

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8, \text{ т. е. } 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5};$$
$$3^1 \cdot 3^4 = 3^5, \text{ т. е. } 3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4}.$$

Наблюдается закономерность: основания перемножаемых степеней одинаковы, при этом показатели складываются. Первый этап завершен.

На втором этапе осмелимся предположить, что мы открыли *общую закономерность:* $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

Теорема 1. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство:***

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

Поскольку в нашем курсе мы первый раз встретились со словом «теорема», давайте немного поговорим о том, что оно означает.

Теоремой обычно называют утверждение, справедливость (истинность, верность) которого устанавливается с помощью строгого обоснования, доказательства.

теорема

условие

заключение

Теорема состоит из **условия**, т.е. из того, что дано, что имеется в наличии, и **заключения** — того, что нужно доказать. В теореме 1 даны произвольное число a и два натуральных числа n и k — это условие. А требуется доказать, что выполняется равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ — это заключение теоремы.

Обычно теорему формулируют так: если ... (условие), то ... (заключение). Например, теорему 1 можно (и, честно говоря, так было бы аккуратнее) сформулировать следующим образом:

если a — любое число и n, k — натуральные числа, то справедливо равенство:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

На третьем этапе надо доказать, что наше предположение верно, т. е. доказать теорему 1. Сделаем это мы — доказательство приведено ниже. Прочитайте его. Если чувствуете в себе силы, то попытайтесь разобраться в нем (оно состоит в том, что мы трижды используем определение степени с натуральным показателем); если же нет — ограничьтесь прочтением.

Доказательство.

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$;

2) $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}$;

3) $a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ множителей}} =$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+k \text{ множителей}} = a^{n+k}.$$

Теорема доказана.

Итак, первое открытие у нас состоялось. Идем дальше.

Открытие второе

Пример 2. Вычислить: а) $2^6 : 2^4$; б) $3^8 : 3^5$.

Решение. а) Запишем частное в виде дроби и сократим ее:

$$2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4.$$

б) $3^8 : 3^5 = \dfrac{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$

В процессе решения примера мы заметили, что

$2^6 : 2^4 = 2^2$, т. е. $2^6 : 2^4 = 2^{6-4}$;

$3^8 : 3^5 = 3^3$, т. е. $3^8 : 3^5 = 3^{8-5}$.

Ответ: а) 4; б) 27.

Наблюдается закономерность: основания делимого и делителя одинаковы, показатель делимого больше, чем показатель делителя, при этом из показателя делимого вычитается показатель делителя. Первый этап завершен.

На втором этапе предположим, что мы открыли общую закономерность: $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

Теорема 2. ***Для любого числа $a \neq 0$ и любых натуральных чисел n и k, таких, что $n > k$, справедливо равенство:***

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Можете ли вы сформулировать теорему 2 иначе, используя грамматическое построение «если ..., то ...»? Видите ли вы, где в этой теореме условие, а где заключение? Ответьте для себя на эти вопросы (а наш ответ будет приведен после доказательства теоремы).

Доказательство. Рассмотрим произведение $a^{n-k} \cdot a^k$. Мы знаем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются (об этом шла речь в теореме 1). Сложив показатели $n - k$ и k, получим $(n - k) + k = n$.

Итак, $a^{n-k} \cdot a^k = a^n$, а это как раз и означает, что $a^n : a^k = a^{n-k}$. Теорема доказана.

А теперь иначе сформулируем теорему 2:

> ***если $a \neq 0$ и n, k — натуральные числа, такие, что $n > k$, то справедливо равенство***
> $$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Условие теоремы: $a \neq 0$; n, k — натуральные числа, $n > k$.
Заключение теоремы: $a^n : a^k = a^{n-k}$.
Второе открытие у нас состоялось. Идем дальше.

Открытие третье

Пример 3. Вычислить: а) $(2^5)^2$; б) $(3^2)^3$.

Решение. а) Имеем:

$$(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10} = 1024 \text{ (см. § 5).}$$

б) Имеем:

$$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729 \text{ (см. § 5).}$$

Ответ: а) 1024; б) 729.

В процессе решения примера мы заметили, что

$$(2^5)^2 = 2^{10}, \text{ т. е. } (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2};$$
$$(3^2)^3 = 3^6, \text{ т. е. } (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3}.$$

Наблюдается закономерность: в обоих случаях при возведении степени в степень показатели перемножались. Первый этап завершен.

На втором этапе предположим, что мы открыли общую закономерность: $(a^n)^k = a^{nk}$.

Теорема 3. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство***

$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Доказательство теоремы (третий этап) мы приводим в самом конце параграфа (пока ограничимся доказательствами теорем 1 и 2). Если есть желание, попытайтесь сами (или с помощью учителя) доказать ее.

Мы совершили с вами три открытия, которые привели нас к трем серьезным теоремам. Эти теоремы на практике удобнее формулировать в виде трех правил, которые полезно запомнить.

Правило 1. ***При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным.***
Правило 2. ***При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным.***
Правило 3. ***При возведении степени в степень показатели перемножаются.***

Сравните эти три правила с формулировками теорем 1, 2, 3. Почувствовали разницу? В теоремах все четко, все оговорено, все предусмотрено, а в правилах ощущается какая-то неполнота, легкость мысли, поэтому они легче запоминаются и воспринимаются; правила похожи на афоризмы. Это тоже одна из особенностей математического языка: наряду с серьезными отточенными формулировками используются и краткие афористичные правила с пропусками слов.

Пример 4. Вычислить $\dfrac{(2^3 \cdot 2^4)^5}{(2 \cdot 2^8)^3}$.

Решение. 1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (правило 1);
2) $(2^7)^5 = 2^{7 \cdot 5} = 2^{35}$ (правило 3);
3) $2 \cdot 2^8 = 2^{1+8} = 2^9$ (правило 1);
4) $(2^9)^3 = 2^{9 \cdot 3} = 2^{27}$ (правило 3);
5) $2^{35} : 2^{27} = 2^{35-27} = 2^8$ (правило 2);
6) $2^8 = 256$ (см. § 5).

Ответ: 256.

Опытный оратор, выступив с длинной и трудной для слушателей речью, обязательно в конце доклада еще раз выделит самое главное, самое важное. У нас с вами была очень трудная и напряженная работа, давайте же и мы выделим самое главное.

Самое главное — три формулы,

$$\boxed{\begin{gathered} a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \\ a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ где } n > k,\ a \neq 0; \\ (a^n)^k = a^{nk}. \end{gathered}}$$

Их можно применять как справа налево, так и слева направо. Например,

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8; \qquad 2^8 = 2^{4+4} = 2^4 \cdot 2^4; \qquad 2^{2+n} = 2^2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n;$$

$$3^7 : 3^1 = 3^6; \qquad 3^6 = 3^{10-4} = \frac{3^{10}}{3^4}; \qquad 3^{n-4} = \frac{3^n}{3^4} = \frac{3^n}{81};$$

$$(5^3)^4 = 5^{12}; \qquad 5^{12} = (5^6)^2 = (5^2)^6 = (5^4)^3 = (5^3)^4.$$

Замечание. Мы говорили только об умножении и делении степеней с одинаковыми основаниями. А вот об их сложении и вычитании ничего неизвестно, так что не сочиняйте новых правил. Нельзя, например, заменять сумму $2^4 + 2^3$ на 2^7; в самом деле, посчитайте: $2^4 = 16$; $2^3 = 8$; $16 + 8 = 24$, но это не есть 2^7, поскольку $2^7 = 128$. Нельзя заменять разность $3^5 - 3^4$ на 3^1; действительно, посчитайте: $3^5 = 243$; $3^4 = 81$; $243 - 81 = 162$, но это не есть 3^1, так как $3^1 = 3$. Будьте внимательны!

В заключение, как было обещано выше, докажем теорему 3. Имеем:

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k \text{ множителей}} =$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ групп по } n \text{ множителей в каждой}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nk \text{ множителей}} = a^{nk}.$$

§ 7. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В предыдущем параграфе мы рассматривали умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями. Оказывается, можно умножать и делить степени и с *разными* основаниями, если только показатели у этих степеней одинаковы.

Пример 1. Вычислить $2^4 \cdot 5^4$.

Решение. Конечно, можно по таблице из § 5 найти, что $2^4 = 16$, $5^4 = 625$, а затем умножить 16 на 625. Однако эффективнее следующее рассуждение:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000.$$

В процессе решения мы получили, что

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4.$$

Аналогично можно доказать, что $a^3b^3 = (ab)^3$.

В самом деле,

$$a^3b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3.$$

Вообще, имеет место равенство:

$$a^nb^n = (ab)^n.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{12^6}{4^6}$.

Решение. Конечно, можно производить вычисления «в лоб», т. е. найти 12^6, затем 4^6, затем первое число разделить на второе. Но лучше рассуждать так:

$$\frac{12^6}{4^6} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} =$$
$$= \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729.$$

В процессе решения мы получили, что $\frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6$. Аналогично можно доказать, что $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$, что $\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$ и вообще, что

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ если } b \neq 0.$$

Итак,

$$a^n b^n = (ab)^n;$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n;\ b \neq 0.$$

Обе эти формулы применяются как слева направо, так и справа налево. Их также можно оформить в виде правил действий над степенями, тогда к трем правилам из § 6 добавятся еще два:

Правило 4. ***Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания, а показатель степени оставить неизменным.***

Правило 5. ***Чтобы разделить друг на друга степени с одинаковыми показателями, достаточно разделить одно основание на другое, а показатель степени оставить неизменным.***

Пример 3. Упростить $\left(\frac{2^2 a^3 b^4}{3}\right)^5$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\left(\frac{2^2 a^3 b^4}{3}\right)^5 = \frac{\left(2^2 a^3 b^4\right)^5}{3^5} \text{ (правило 5);}$$

далее

$$(2^2 a^3 b^4)^5 = (2^2)^5 (a^3)^5 (b^4)^5 \text{ (правило 4).}$$

Но

$$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024; \quad (a^3)^5 = a^{15}; \quad (b^4)^5 = b^{20} \text{ (правило 3).}$$

Значит, $(2^2 a^3 b^4)^5 = 1024a^{15}b^{20}$. Так как $3^5 = 243$, то окончательно получаем: $\frac{1024a^{15}b^{20}}{243}$. ■

§ 8. СТЕПЕНЬ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В предыдущих параграфах мы с вами научились вычислять значение степени с любым *натуральным* показателем. Например,

$$0{,}2^1 = 0{,}2; \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9; \qquad 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64;$$
$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \qquad (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$
$$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Однако мы на этом не остановимся, а научимся *производить действия над степенями не только с* натуральными показателями. Постепенно продвигаясь в изучении математического языка, мы с вами поймем, что означают в математике символы 2^{-5}, $3^{1/2}$ и т. д. Все это произойдет в старших классах, а пока мы сделаем лишь один скромный шаг в этом направлении: введем понятие *степени с нулевым показателем*, т. е. выясним, какой смысл придается в математике символу a^0.

степень с нулевым показателем

До сих пор все было хорошо: a^3 — это значит число a умножить само на себя 3 раза, a^{10} — это значит число a умножить само на себя 10 раз, a^1 — это просто a. А что такое a^0? Ведь нельзя же, в самом деле, умножить число a само на себя 0 раз!

Вот что придумали математики. Если уж вводить символ a^0, рассуждали они, то нужно, чтобы не нарушались привычные правила. Например, при вычислении $a^3 \cdot a^0$ надо, чтобы показатели складывались: $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0}$. Но $3 + 0 = 3$. Что же получается? Получается, что должно выполняться равенство $a^3 \cdot a^0 = a^3$. Значит, $a^0 = a^3 : a^3 = 1$ (при этом нужно ввести естественное ограничение: $a \neq 0$). После этого и было решено ввести следующее определение.

<u>Определение</u>. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Например, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $(2^n)^0 = 1$ и т. д. Однако учтите, что символ 0^0 считается в математике не имеющим смысла.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь собраны основные определения, свойства, теоремы, формулы, правила, которые мы с вами изучали в § 4–8. Все это записано на сухом математическом языке без всяких комментариев, поскольку комментарии, обоснования были приведены ранее.

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}};$$

$$a^0 = 1,\ a \neq 0;$$

$$1^n = 1; \qquad 0^n = 0;$$

$$(-1)^{2n} = 1; \qquad (-1)^{2n-1} = -1;$$

$$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{нулей}};$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^{n+k+m} = a^n \cdot a^k \cdot a^m;$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}, \quad \text{где } n > k;$$

$$(a^n)^k = a^{nk};$$

$$a^n b^n = (ab)^n; \qquad (abc)^n = a^n b^n c^n; \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{где } b \neq 0.$$

Знание этих формул — ключ к успеху в работе с любыми алгебраическими выражениями. К этой работе мы приступаем постепенно, начиная со следующей главы.

В заключение — одно предостережение. Мы знаем, что

если *основания* одинаковы, то:	если *показатели* одинаковы то:
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$; $a^n : a^k = a^{n-k}$;	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^n : b^n = (a : b)^n$.

Если же умножение и деление выполняется над степенями с различными основаниями и разными показателями, то ничего сделать нельзя. Так, $3^5 \cdot 2^4$ можно вычислить только «в лоб»: сначала вычислить 3^5, затем 2^4 и, наконец, выполнить умножение. Будьте внимательны!

ГЛАВА

3 ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ

§ 9. ПОНЯТИЕ ОДНОЧЛЕНА. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА

Определение. **Одночленом** называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведенных в степени с натуральными показателями.

Примеры одночленов:

$$2ab;\quad \frac{1}{3}a^2xy^3;\quad (-2)xy^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4x^3ab^4;\quad 1{,}7a^nb^n.$$

Одночленами считают также все числа, любые переменные, степени переменных. Например, одночленами являются:

$$0;\ 2;\ -0{,}6;\ x;\ a;\ b;\ x^2;\ a^3;\ b^n.$$

Теперь приведем примеры алгебраических выражений, не являющихся одночленами:

$$a+b;\quad 2x^2-3y^3+5;\quad \frac{a^2}{b}.$$

обратите внимание

А как вы считаете: выражение $\frac{2ab}{3}$ — одночлен или нет? Ведь оно по форме похоже на выражение $\frac{a^2}{b}$, которое фигурирует у нас в числе выражений, не являющихся одночленами, и содержит в своей записи черту дроби. Тем не менее $\frac{2ab}{3}$ — одночлен; чтобы убедиться в этом, достаточно переписать $\frac{2ab}{3}$ в виде $\frac{2}{3}ab$.

Вот еще два примера, построенные на контрасте: $\frac{a}{3}$ и $\frac{3}{a}$. Как вы считаете, какое из этих выражений одночлен, а какое нет? А теперь проверьте себя: $\frac{a}{3}$ — одночлен, его можно переписать в виде $\frac{1}{3}a$; выражение же $\frac{3}{a}$ не является одночленом. Термины в математике надо употреблять правильно.

Рассмотрим одночлен $3a \cdot \frac{2}{3}a^2bc$. Глядя на это выражение, математик обычно думает так: «От перемены мест множителей произведение не изменится, перепишу-ка я это выражение в более удобном виде:

$$\left(3 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot (a \cdot a^2)bc.$$

Тогда, — думает математик, — я получу $2a^3bc$, а эта запись приятнее той, что была, хотя бы потому, что короче. Кроме того, в ней нет того сумбура, какой был сначала: первый множитель — число, второй — переменная a, затем снова число, потом опять переменная a, но уже в квадрате и т. д.»

Стремящийся к четкости, краткости и порядку математик на самом деле привел одночлен к стандартному виду.

Вообще, *чтобы привести одночлен к стандартному виду, нужно:*

1) *перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;*

2) *перемножить все имеющиеся степени с одним буквенным основанием;*

3) *перемножить все имеющиеся степени с другим буквенным основанием и т. д.*

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена**.

Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

коэффициент одночлена

одночлен

стандартный вид одночлена

Пример. Привести одночлен к стандартному виду и назвать коэффициент одночлена:

а) $3x^2yz\cdot(-2)xy^2z^5$;

б) $4ab^2c\,\frac{1}{4}\,c$;

в) $-2ax^2y^3z^n\cdot\frac{1}{2}ax^5yz$;

г) $\frac{3ab}{10}$.

Решение. а) $3x^2yz\cdot(-2)xy^2z^5 = 3\cdot(-2)x^2xyy^2zz^5 = -6x^3y^3z^6$.

Коэффициент одночлена равен -6.

б) $4ab^2c\,\frac{1}{4}\,c = 4\cdot\frac{1}{4}\,ab^2(c\cdot c) = 1\cdot ab^2c^2 = ab^2c^2$.

Коэффициент одночлена равен 1, такой коэффициент обычно не пишут, но подразумевают.

в) $-2ax^2y^3z^n\cdot\frac{1}{2}ax^5yz = (-2)\cdot\frac{1}{2}\,aax^2x^5y^3yz^nz = -a^2x^7y^4z^{n+1}$.

Коэффициент одночлена равен -1.

г) А это, как говорят, «маленькая провокация»: одночлен не надо приводить к стандартному виду, он и так записан в стандартном виде. Коэффициент одночлена равен 0,3.

§ 10. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

В этой главе мы изучаем новые для вас математические объекты — одночлены. Образно говоря, если для математического языка числа, переменные и степени переменных являются буквами, то одночлены — слогами (когда в детстве вы учились читать, то сначала изучали буквы, затем читали слоги и только потом целиком произносили написанное слово; буквы, слоги, слова, предложения — этапы изучения языка). И тут уже не важно, нравятся вам одночлены как самостоятельный объект изучения или нет, ничего не поделаешь — без уверенного владения ими нам не обойтись, если мы хотим свободно владеть математическим языком.

Как только математики вводят новое понятие, они начинают думать, как с ним работать. И мы с вами в главе 2 поступали точно так же. Вспомните: мы ввели понятие степени с натуральным показателем, но разве ограничились этим? Нет, мы выяснили, как степени перемножать, как делить, как возводить в другую степень.

В § 9 мы ввели понятия одночлена, стандартного вида одночлена. Значит, надо думать о том, как работать с одночленами, как, например, выполнять над ними арифметические операции. При этом сразу договоримся, что будем рассматривать только одночлены, записанные *в стандартном виде*.

подобные одночлены

Определение. Два одночлена, состоящие из одних и тех же переменных, каждая из которых входит в оба одночлена в одинаковых степенях (т. е. с равными показателями степеней), называют **подобными одночленами**.

Примеры подобных одночленов:

$$2a \text{ и } 5a,\ 3ab^2c \text{ и } -\frac{2}{7}ab^2c,\ x^n \text{ и } 5x^n.$$

Как видите, подобные одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами (впрочем, и коэффициенты могут быть равны, например, $7ab$ и $7ab$ — подобные одночлены).

А вот примеры неподобных одночленов:

$$5a \text{ и } 3a^2,\ 2x \text{ и } 7y,\ 3a^2b^2 \text{ и } 6a^2b.$$

Слово «подобные» имеет примерно тот же смысл, что в обыденной речи слово «похожие». Согласитесь, что одночлены $5a^2b$ и $23a^2b$ похожи друг на друга (подобные одночлены), тогда как одночлены $5a^2b$ и $23ab^2$ непохожи друг на друга (неподобные одночлены).

Рассмотрим сумму двух подобных одночленов: $5a^2b + 23a^2b$. Воспользуемся *методом введения новой переменной*: положим $a^2b = c$. Тогда сумму $5a^2b + 23a^2b$ перепишем в виде $5c + 23c$. Ясно, что эта сумма равна $28c$. Итак, $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$.

метод введения новой переменной

алгоритм

Нам удалось сложить подобные одночлены; оказалось, что это очень просто: достаточно сложить их коэффициенты, а буквенную часть оставить неизменной. Так же обстоит дело и с вычитанием подобных одночленов. Например,

$$7abc^3 - 9abc^3 = (7-9)abc^3 = -2abc^3.$$

А как быть, если одночлены неподобны: можно ли их складывать, вычитать? Увы, нельзя! Складывать неподобные одночлены все равно, что в арифметической задаче складывать часы с километрами. Разумеется, между неподобными одночленами, например $5a$ и $7b$, можно поставить знак сложения, т. е. написать $5a + 7b$, но дальше этого нам продвинуться не удастся.

Как мы уже подчеркивали, математики — люди четкие, организованные, они любят действовать по определенной программе. Обычно употребляется термин *алгоритм*, это слово как раз и означает программу действий, четко определенный порядок ходов. Например, придя в магазин за хлебом, вы практически всегда действуете по следующему алгоритму:

1. Подходите к прилавку и смотрите, какой хлеб имеется в продаже.

2. Становитесь в очередь в кассу.

3. Получаете чек.

4. Меняете чек на хлеб.

5. Кладете хлеб в сумку

6. Идете домой.

Сейчас мы сформулируем алгоритм сложения одночленов.

Алгоритм сложения (вычитания) одночленов

1. *Привести все одночлены к стандартному виду.*
2. *Убедиться, что все одночлены подобны; если же они неподобны, то складывать (вычитать) их нельзя, т. е. алгоритм далее не применяется.*
3. *Сложить (вычесть) коэффициенты подобных одночленов.*
4. *Записать ответ: одночлен, подобный данным, с коэффициентом, полученным на третьем шаге.*

Пример 1. Упростить выражение

$$2a^2b - 7a \cdot 0{,}5ba + 3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a).$$

Решение. Речь идет о сложении и вычитании одночленов, значит, будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Первый одночлен уже имеет стандартный вид.

Для второго одночлена имеем:

$$7a \cdot 0{,}5ba = (7 \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = 3{,}5a^2b$$

— это стандартный вид.

Приведем к стандартному виду третий одночлен:

$$3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a) = 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3a^2b.$$

2) Получили три одночлена: $2a^2b$, $3{,}5a^2b$, $-3a^2b$. Они подобны, поэтому с ними можно производить дальнейшие действия, т. е. можно переходить к третьему шагу алгоритма.

3) Выполним действия с коэффициентами:

$$2 - 3{,}5 - 3 = -4{,}5.$$

4) Запишем ответ: $-4{,}5a^2b$. ■

Пример 2. Представить одночлен $27ab^2$ в виде суммы одночленов.

Решение. Здесь в отличие от рассмотренных ранее примеров решение не единственно (а разве в жизни во всех случаях вы можете найти единственное решение? Иногда решений несколько, а иногда решения и вовсе нет). Можно написать:

$$27ab^2 = 20ab^2 + 7ab^2,$$

и это будет верно. Можно написать:

$$27ab^2 = 15ab^2 + 12ab^2,$$

что также будет верно. Можно написать так:

$$27ab^2 = ab^2 + 26ab^2$$

и даже так:

$$27ab^2 = 100ab^2 - 73ab^2.$$

Можно указать еще ряд решений. Главное, чтобы сумма коэффициентов складываемых подобных одночленов была равна 27.

Кстати, не обязательно составлять сумму двух одночленов (в условии ведь это не оговорено). Значит, можно предложить, например, такое решение:

$$27ab^2 = 20ab^2 + 4ab^2 + 3ab^2.$$

Или такое:

$$27ab^2 = 2ab^2 + 8ab^2 + 22ab^2 - 5ab^2.$$

Попробуйте сами придумать еще несколько решений примера 2.

Мы заканчиваем изучение темы «Сложение и вычитание одночленов». Но вы, наверное, ощущаете какую-то недоговоренность. Мало ли с какими одночленами нам придется иметь дело в дальнейшем, а вдруг среди них будут неподобные. Что делать, если, составляя математическую модель реальной ситуации, мы пришли к выражению, представляющему собой сумму неподобных одночленов, например, $2ab + 3a - 5b$? Математики нашли выход из положения: такую сумму назвали *многочленом*, т. е. ввели новое понятие, и научились производить операции над многочленами. Но об этом речь впереди, в главе 4.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим конкретную задачу, в процессе решения которой приходится складывать одночлены. Это лишний раз убедит вас в том, что в математике просто так ничего не изучается, все, что в ней наработано, применяется в жизни.

Пример 3. Турист шел 2 ч пешком из п. A в п. B, затем в B он сел на катер, скорость которого в 4 раза больше скорости туриста как пешехода, и ехал на катере 1,5 ч до п. C. В C он сел на автобус, скорость которого в 2 раза больше скорости катера, и ехал на нем 2 ч до п. D. С какой скоростью ехал турист на автобусе, если известно, что весь его путь от A до D составил 120 км?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость пешехода. За 2 ч он пройдет $2x$ км.

Из условия следует, что скорость катера $4x$ км/ч. За 1,5 ч катер пройдет путь $4x \cdot 1{,}5$ км, т.е. $6x$ км.

Из условия следует, что скорость автобуса равна $2 \cdot 4x$ км/ч, т. е. $8x$ км/ч. За 2 ч автобус проедет $8x \cdot 2$ км, т. е. $16x$ км.

Весь путь от A до D равен: $2x + 6x + 16x$, что составляет, по условию, 120 км. Таким образом,

$$2x + 6x + 16x = 120.$$

Это — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Сложив одночлены $2x$, $6x$, $16x$, получим $24x$. Значит, $24x = 120$, откуда находим: $x = 5$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли скорость пешехода, она равна 5 км/ч. Скорость катера в 4 раза больше, т. е. 20 км/ч, а скорость автобуса еще в 2 раза больше, т. е. 40 км/ч.

Ответ: скорость автобуса 40 км/ч.

§ 11. УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ. ВОЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА В НАТУРАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ

В § 10 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов. Оказалось, что эти операции применимы только к подобным одночленам. А как обстоит дело с умножением одночленов? Очень просто: если между двумя одночленами поставить знак умножения, то снова получится одночлен; остается лишь привести его к стандартному виду (фактически это мы уже делали в примере из § 9). Не вызывает затруднений и возведение одночлена в степень. При этом используются правила действий со степенями (фактически в примере 3 из § 7 мы уже возводили одночлен в степень).

3.11. ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ

Пример 1. Найти произведение трех одночленов: $2a^2bc^5$, $\frac{3}{4}a^3cx^3$ и a^2b.

Решение. Имеем:

$$(2a^2bc^5)\cdot\left(\frac{3}{4}a^3cx^3\right)\cdot(a^2b) =$$

$$=\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)(a^2a^3a^2)(b\cdot b)(c^5c)x^3 = 1{,}5a^7b^2c^6x^3.$$ ◙

Пример 2. Упростить выражение $(-2a^2bc^3)^5$ (т. е. представить его в виде одночлена).

Решение. $(-2a^2bc^3)^5 = -2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5 = -32a^{10}b^5c^{15}$.

Мы использовали, во-первых, то, что при возведении произведения в степень надо возвести в эту степень каждый множитель. Поэтому у нас появилась запись $2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5$.

Во-вторых, мы воспользовались тем, что $(-2)^5 = -2^5$.

В-третьих, мы использовали то, что при возведении степени в степень показатели перемножаются. Поэтому вместо $(a^2)^5$ мы написали a^{10}, а вместо $(c^3)^5$ мы написали c^{15}. ◙

Пример 3. Представить одночлен $36a^2b^4c^5$ в виде произведения одночленов.

Решение. Здесь, как и в примере 2 из § 10, решение не единственно. Вот несколько вариантов решения:

$$36a^2b^4c^5 = (18a^2)\cdot(2b^4c^5);$$
$$36a^2b^4c^5 = (36abc)\cdot(ab^3c^4);$$
$$36a^2b^4c^5 = (-3b^4)\cdot(-12a^2c^5);$$
$$36a^2b^4c^5 = (2a^2)\cdot(3bc)\cdot(6b^3c^4).$$ ◙

Попробуйте сами придумать еще несколько решений примера 3.

Пример 4. Представить данный одночлен A в виде B^n, где B — одночлен, если:

а) $A = 32a^5$, $n = 5$;
б) $A = a^3b^6$, $n = 3$;
в) $A = 49a^2b^4c^6$, $n = 2$;
г) $A = -27a^3b^9$, $n = 3$;
д) $A = 16a^8b^5$, $n = 4$.

Решение.

а) Имеем: $32a^5 = 2^5a^5 = (2a)^5$. Значит, $A = B^5$, где $B = 2a$.

б) Имеем: $a^3b^6 = a^3(b^2)^3 = (ab^2)^3$. Следовательно, $A = B^3$, где $B = ab^2$.

в) Так как $49a^2b^4c^6 = 7^2a^2(b^2)^2(c^3)^2 = (7ab^2c^3)^2$, то $A = B^2$, где $B = 7ab^2c^3$.

г) Поскольку $-27a^3b^9 = (-3)^3a^3(b^3)^3 = (-3ab^3)^3$, заключаем, что $A = B^3$, где $B = -3ab^3$.

д) Имеем: $16a^8b^5 = 2^4(a^2)^4b^5$.

Если бы не было множителя b^5, то задача решалась бы без труда:

$$16a^8 = 2^4(a^2)^4 = (2a^2)^4.$$

Если бы вместо b^5 был множитель b^{12}, то мы решили бы задачу так:

$$16a^8b^{12} = 2^4(a^2)^4(b^3)^4 = (2a^2b^3)^4.$$

Однако множитель b^5 нельзя представить в виде $(b^k)^4$, где k — натуральное число, этот множитель, как говорится, «портит все дело». Значит, одночлен $16a^8b^5$ нельзя представить в виде B^4, где B — некоторый одночлен. ■

Пример показывает, что в математике далеко не все всегда получается, не любая задача имеет решение (как и в реальной жизни).

Кстати, если математику предлагают решить задачу, которая на самом деле не имеет решения, то он говорит: «*Задача поставлена некорректно*» или «Это — *некорректная задача*». Тот, кто предложил некорректную задачу, должен извиниться. Вот и автор извиняется за пример 4д). Хотя согласитесь, что он был дан не без пользы.

Раз уж мы заговорили о корректных и некорректных задачах, приведем еще несколько примеров и тех, и других, а вы попытайтесь объяснить, почему задача корректна или некорректна.

Корректные задачи:

1. Упростить $2ab^2 \cdot (3ab)^3$.
2. Упростить $7ab + 8ab + ab$.

3. Вычислить $\dfrac{2{,}7+3{,}8}{2-6}$.

4. Представить одночлен $13a^4b^5$ в виде суммы одночленов.

5. Представить одночлен $48x^3y^5z$ в виде произведения одночленов.

6. Представить одночлен $A = 25a^4$ в виде квадрата некоторого одночлена B.

Некорректные задачи:

1. Сложить одночлены $3ab^2$, $5ab^2$ и $7a^2b$.

2. Вычислить $\dfrac{2{,}7+3{,}8}{6-6}$.

3. Представить одночлен A в виде квадрата некоторого одночлена B, если $A = -25a^4$.

4. Представить одночлен A в виде куба некоторого одночлена B, если $A = 8a^4$.

§ 12. ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Что такое одночлен, мы знаем; как одночлены складывать, вычитать, перемножать и даже возводить в степень, обсудили. Но ведь имеется еще одна арифметическая операция — деление. Вот об этом и поговорим.

Пример 1. Опираясь на свойства арифметических действий, попытаемся выполнить деление одночленов:

а) $10a : 2$; в) $36a^3b^5 : 4ab^2$; д) $4x^3 : 2xy$;

б) $18ab : 3a$; г) $\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z)$; е) $a^2 : a^5$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что если произведение двух чисел делят на третье число, то можно разделить на это число один из множителей и полученное частное умножить на другой множитель. (Вспомнили? Например, $(12 \cdot 4) : 3 = (12 : 3) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$.) Имеем:

$$10a : 2 = (10 : 2) \cdot a = 5a.$$

б) Рассуждая, как и в примере а), получаем:

$$18ab : 3a = (18 : 3)\cdot(a : a)b = 6\cdot 1\cdot b = 6b.$$

в) $36a^3b^5 : 4ab^2 = (36 : 4)\cdot(a^3 : a)\cdot(b^5 : b^2) = 9a^{3-1}\cdot b^{5-2} = 9a^2b^3$.

Иногда удобнее вместо знака деления (:) использовать черту дроби. Вот как тогда будет выглядеть решение примера в):

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^5}{b^2} = 9a^{3-1}b^{5-2} = 9a^2b^3.$$

г) Здесь мы используем комбинированную запись решения, т. е. и знак деления, и черту дроби:

$$\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z) = \left(\frac{4}{7} : (-2)\right)\frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} =$$

$$= -\frac{4}{7\cdot 2}\cdot\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{y^2}{y^2}\cdot\frac{z}{z} = -\frac{2}{7}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -\frac{2}{7}.$$

Здесь все верно, но, как говорят математики, *нерационально*, поскольку сразу было ясно, что $x^3y^2z : x^3y^2z = 1$ (фактически выражение делится само на себя).

д) $4x^3 : 2xy = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\cdot\frac{1}{y} = 2x^2\cdot\frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$

Это не одночлен, значит, разделить $4x^3$ на $2xy$ нельзя (в том смысле, чтобы в частном получился одночлен).

е) И эта задача невыполнима, так как мы пока не умеем делить при одном и том же основании степень с меньшим показателем на степень с бóльшим показателем. ■

Мы рассмотрели шесть примеров, из них четыре оказались корректными, а два (последние) — некорректными (этот термин мы ввели в § 11).

Проанализируем теперь решенные примеры и попробуем с помощью этого анализа выяснить, когда можно разделить одночлен на одночлен так, чтобы в частном снова получился одночлен.

Первое наблюдение. Оба одночлена (и делимое, и делитель) должны быть записаны в стандартном виде (впрочем, об этом мы условились еще в § 10).

Второе наблюдение. В делителе не должно быть переменных, которых нет в делимом (по этой причине мы «споткнулись» в примере 1д).

Третье наблюдение. Если в делимом и делителе есть одна и та же переменная, причем в делимом она возводится в степень n, а в делителе — в степень k, то число k не должно быть больше числа n (поэтому мы «споткнулись» в примере 1е).

Четвертое наблюдение. Коэффициенты делимого и делителя могут быть любыми (поскольку мы умеем делить друг на друга любые числа, кроме, разумеется, деления на нуль).

Значит, если вам предложат разделить одночлен на одночлен, то сначала убедитесь, что задача корректна, т. е. проведите указанные наблюдения и убедитесь, что все в порядке. В случае, когда задача корректна, решайте ее по образцу примера 1.

Пример 2. Упростить $48a^4b^5c^6d : 36ab^3c^6$.

Решение. 1) Оба одночлена (и делимое, и делитель) записаны в стандартном виде.

2) В делимом фигурируют переменные a, b, c, d, в делителе a, b, c. Лишних переменных в делителе нет.

3) В делителе нет степеней бо́льших, чем у одноименных переменных в делимом.

Вывод: задача корректна, будем ее решать.

Имеем:

$$\frac{48a^4b^5c^6d}{36ab^3c^6} = \frac{48}{36}\cdot\frac{a^4}{a}\cdot\frac{b^5}{b^3}\cdot\frac{c^6}{c^6}\cdot d = \frac{4}{3}\cdot a^3\cdot b^2\cdot 1\cdot d = \frac{4}{3}a^3b^2d.$$

Вы чувствуете, что в § 12, как и в § 10, есть недоговоренность? А что же все-таки делать, если одночлен на одночлен не разделился? Разве мы застрахованы от такой ситуации? Поэтому математики ввели новый объект — *алгебраическую дробь* (вспомните, ведь и обыкновенные дроби появились из-за того, что не любые два натуральных числа делятся друг на друга; например, 14 делится на 7, а 3 не делится на 7. Как записывается ответ во втором случае? Он записывается в виде обыкновенной дроби $\frac{3}{7}$). Такая алгебраическая дробь встретилась нам ранее, в примере 1д) — это было выражение $\frac{2x^2}{y}$. И, конечно, математики научились оперировать с этими новыми объектами — алгебраическими дробями. Мы будем изучать их в курсе алгебры 8 класса.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вы, наверное, помните, что у нас уже был раздел с подобным названием — в конце главы 2. Там были собраны основные результаты, связанные со степенями. В главе 3, по сути дела, никаких новых формул не было. Поэтому мы просто перечислим главное из того, что обсуждалось в § 9–12, а вы проверьте, знаете ли вы то, что написано ниже, и сможете ли вы объяснить это постороннему человеку.

Итак, основное из того, что вы должны были изучить в главе 3:

понятие одночлена;

запись одночлена в стандартном виде;

понятие коэффициента одночлена;

понятие подобных одночленов;

какие одночлены можно складывать (вычитать), какие нельзя;

как складывать (вычитать) подобные одночлены;

как представить одночлен в виде суммы подобных одночленов;

умножение одночленов;

возведение одночлена в натуральную степень;

в каком случае один одночлен можно разделить на другой и как это сделать.

ГЛАВА 4

МНОГОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

§ 13. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В главе 3 мы уже отмечали, что не любые одночлены можно складывать и вычитать, а только подобные; также отмечали и то, что реальная задача может привести к такой математической модели, в которой будет содержаться сумма неподобных одночленов. Для изучения таких сумм в математике введено понятие многочлена.

Определение. Многочленом называют сумму одночленов.

Примеры многочленов:

$2a + b$; $\quad 5a^2b - 3ab^2 - 3ab^2 + 7c$; $\quad x^5 + x^4 + x^2 - 2$.

Разумеется, существуют алгебраические выражения, не являющиеся многочленами. Например, $\frac{x}{y}$, $2x^2 + 5y - \frac{2}{y}$.

Слагаемые (одночлены), из которых состоит многочлен, называют членами многочлена: если их два, то говорят, что дан двучлен (например, $2a + b$ — двучлен), если их три, то говорят, что дан трехчлен (например, $5a^2 - 2cb^2 + 7c$ — трехчлен). С этой точки зрения становится понятнее термин «одночлен» и то, что одночлен обычно считают частным случаем многочлена (одночлен — это многочлен, в состав которого входит всего один член).

многочлен

члены многочлена

двучлен

трехчлен

Замечание 1. Выше мы не раз проводили аналогию между обычным и математическим языком. В обычном языке — буквы, в математическом — числа, переменные, степени; в обычном языке — слоги, в математическом — одночлены; в обычном языке — слова, в математическом — многочлены. Но разве нет в русском языке слов, состоящих из одного слога? Сколько угодно: «ад», «рай», «юг», «ил» и т.п.; так и в математическом языке одночлен (слог) есть многочлен (слово), просто этот многочлен состоит из одного члена.

Замечание 2. Говорят, в Африке есть племя, считающее так: «один», «два», «три», «много». Наша терминология применительно к многочленам напоминает африканскую: одночлен, двучлен, трехчлен, многочлен (обычно ни «четырехчлен», ни «пятичлен» не говорят).

Теперь подготовимся к восприятию серьезного понятия.

Рассмотрим многочлен

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2.$$

То, что это — многочлен, сомнению не подлежит (поскольку записана сумма одночленов), но нравится ли вам такая запись? Наверное, нет. Почему?

Во-первых, одночлен $2ab^2 \cdot 3a^2b$ не записан в стандартном виде, а мы знаем, что стандартный вид — наиболее удобная запись одночлена. Приведя его к стандартному виду, получим: $6a^3b^3$.

Аналогично надо привести к стандартному виду еще один член многочлена, а именно: $-\frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a$. Получим: $-2a^3b^3$.

Теперь запись данного многочлена принимает более приятный вид $6a^3b^3 - 5a - 7a + 3b^2 - 2a^3b^3 - 2b^2$.

Во-вторых, поскольку от перемены мест слагаемых сумма не меняется, подобные одночлены можно расположить рядом, а затем сложить. Получим:

$$(6a^3b^3 - 2a^3b^3) + (-5a - 7a) + (3b^2 - 2b^2) = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Правда, обычно подобные одночлены в многочлене не переставляют, их одинаково подчеркивают, а потом складывают:

$$\underline{6a^3b^3} - \underline{\underline{5a}} - \underline{\underline{7a}} + \underline{\underline{\underline{3b^2}}} - \underline{2a^3b^3} - \underline{\underline{\underline{2b^2}}} = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Эту процедуру называют **приведением подобных членов многочлена.**

Если в многочлене все члены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то говорят, что многочлен приведен к стандартному виду (или записан в стандартном виде).

Теперь вы понимаете, почему запись $4a^3b^3 - 12a + b^2$ предпочтительнее первоначальной записи:

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2?$$

приведение подобных членов

стандартный вид многочлена

Дело в том, что первоначальная запись — не стандартный вид многочлена, а $4a^3b^3 - 12a + b^2$ — стандартный вид.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Условимся в дальнейшем всегда с этого начинать — так удобнее производить действия с многочленами.

Обычно многочлен обозначают буквой p или P — с этой буквы начинается греческое слово polys («многий», «многочисленный»; многочлены в математике называют также *полиномами*). В обозначение включают и переменные, из которых состоят члены многочлена. Например, многочлен $2x^2 - 5x + 3$ обозначают $p(x)$ — читается: «пэ от икс»; многочлен $2x^2 + 3xy - y^4$ обозначают $p(x, y)$ — читается: «пэ от икс, игрек» и т. д.

П р и м е р. Дан многочлен

$$p(x, y) = 2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2.$$

а) Записать его в стандартном виде;

б) вычислить: $p(1, 2)$; $p(-1, 1)$; $p(0, 1)$.

Р е ш е н и е. а) Имеем:

$$2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2 =$$
$$= \underline{6x^2y^2} - \underline{\underline{14x^4}} - \underline{\underline{3x^4}} + 2y^4 + \underline{5x^2y^2} - 8xy^3 =$$

$$= 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3$$

— стандартный вид многочлена.

б) Запись $p(1, 2)$ означает, что нужно найти значение многочлена $p(x, y)$ при $x = 1$, $y = 2$. Вычисления будем производить для многочлена, записанного в стандартном виде:

$$p(x, y) = 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3.$$

Имеем:

$$p(1, 2) = 11 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 17 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 1 \cdot 2^3 =$$
$$= 44 - 17 + 32 - 64 = -5.$$

Итак, $p(1, 2) = -5$.

Аналогично

$$p(-1, 1) = 11 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot (-1) \cdot 1^3 =$$
$$= 11 - 17 + 2 + 8 = 4,$$

т. е. $p(-1, 1) = 4$.

Наконец,

$$p(0, 1) = 11 \cdot 0^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot 0^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 0 \cdot 1^3 =$$
$$= 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Итак, $p(0, 1) = 2$. ■

§ 14. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

В предыдущем параграфе мы ввели понятие многочлена, стандартного вида многочлена. Вы уже, наверное, начинаете привыкать к тому, что, введя новое понятие, надо учиться работать с ним. В частности, будем учиться выполнять арифметические операции над многочленами.

Начинаем со сложения и вычитания. Это очень простые операции: чтобы сложить несколько многочленов, их записывают в скобках со знаком «+» между скобками, раскрывают скобки и приводят подобные члены. При вычитании одного многочлена из другого их записывают в скобках со знаком «−» перед вычитаемым, раскрывают скобки и приводят подобные члены.

П р и м е р 1. Сложить многочлены:

а) $p_1(x) = 2x^2 + 3x - 8$ и $p_2(x) = 5x + 2$;

б) $p_1(a,b) = a^2 + 2ab - b^2$, $p_2(a,b) = 2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5$, $p_3(a,b) = a^2 - ab - b^2 - 4$.

Решение. а) Обозначим сумму многочленов через $p(x)$. Тогда

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) =$$
$$= (2x^2 + 3x - 8) + (5x + 2) = 2x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 =$$
$$= 2x^2 + (3x + 5x) + (-8 + 2) = 2x^2 + 8x - 6.$$

б) Обозначим сумму многочленов через $p(a, b)$. Тогда

$$p(a, b) = p_1(a, b) + p_2(a, b) + p_3(a, b) =$$
$$= (a^2 + 2ab - b^2) + (2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5) + (a^2 - ab - b^2 - 4) =$$
$$= a^2 + 2ab - b^2 + 2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5 + a^2 - ab - b^2 - 4 =$$
$$= a^2 + 4ab - 3b^2 + 2a^3 + 1.$$

Пример 2. Найти разность многочленов

$$p_1(x, y) = x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5$$

и

$$p_2(x, y) = x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7.$$

Решение. Обозначим разность многочленов через $p(x, y)$. Тогда

$$p(x, y) = p_1(x, y) - p_2(x, y) =$$
$$= (x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5) - (x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7) =$$
$$= x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5 - x^3 + y^3 + 5x - 3y + 7 = 2y^3 + 7x + 12.$$

Обратите внимание: $x^3 - x^3 = 0$ и $3y - 3y = 0$. Поэтому «исчезли» одночлен x^3 и одночлен $3y$ из состава обоих многочленов. В таких случаях говорят: x^3 и $-x^3$, $3y$ и $-3y$ *взаимно уничтожились* (правда, школьники в таких случаях любят говорить «сократились», но так говорить не следует: термин «сокращение» в математике принято употреблять только по отношению к дробям; например, можно сократить дробь $\frac{15}{20}$ и тогда получится $\frac{3}{4}$).

Заметим, что сложение и вычитание многочленов выполняются по одному и тому же правилу, т. е. необходимости в различении операций сложения и вычитания нет, значит, нет и особой необходимости в использовании двух терминов «сложение многочленов», «вычитание многочленов». Вместо них можно употребить термин *алгебраическая сумма многочленов*. Вот несколько примеров алгебраических сумм трех многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$:

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) + p_3(x);$$

$$p_1(x) - p_2(x) - p_3(x);$$
$$p_2(x) - p_3(x) + p_1(x).$$

Теперь мы можем подвести итог всему сказанному в этом параграфе — в виде следующего правила составления алгебраической суммы многочленов.

> Правило 1. ***Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменения. Если же перед скобкой стоит знак «−», то при раскрытии скобок нужно знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, заменить на противоположные («+» на «−», «−» на «+»).***

А теперь обязательно вернитесь к примерам 1 и 2 и прокомментируйте (хотя бы для себя) их решение с помощью этого правила. Сделали? Тогда рассмотрим заключительный пример.

Пример 3. Даны три многочлена:
$p_1(x) = 2x^2 + x - 3; \quad p_2(x) = x^2 - 3x + 1; \quad p_3(x) = 5x^2 - 2x - 8.$

Найти алгебраическую сумму

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_3(x).$$

Решение. Имеем:

$$p(x) = (2x^2 + x - 3) + (x^2 - 3x + 1) - (5x^2 - 2x - 8) =$$
$$= \underline{2x^2} + \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{\underline{3}}} + \underline{x^2} - \underline{\underline{3x}} + \underline{\underline{\underline{1}}} - \underline{5x^2} + \underline{\underline{2x}} + \underline{\underline{\underline{8}}} = -2x^2 + 6. \quad \blacksquare$$

§ 15. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Вы, наверное, заметили, что до сих пор глава 4 строилась по тому же плану, что и глава 3. В обеих главах сначала вводились основные понятия: в главе 3 это были одночлен, стандартный вид одночлена, коэффициент одночлена; в главе 4 — многочлен, стандартный вид многочлена. Затем в главе 3 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов; аналогично, в главе 4 — сложение и вычитание многочленов.

Что было в главе 3 дальше? Дальше мы говорили об умножеиии одночленов. Значит, по аналогии, о чем нам следует поговорить теперь? Об умножении многочленов. Но здесь придется действовать не спеша: сначала (в этом параграфе) рассмотрим умноженне многочлена на одночлен (или одночлена на многочлен, это все равно), а потом (в следующем параграфе) — умножение любых многочленов. Когда вы в младших классах учились перемножать чнсла, вы ведь тоже действовали постепенно: сначала учились умножать многозначное число на однозначное и только потом умножали многозначное число на многозначное.

Приступим к делу. При умножении многочлена на одночлен используется распределительный закон умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

Пример 1. Выполнить умножение $(2a^2 - 3ab)\cdot(-5a)$.

Решение. Введем новые переменные:

$$x = 2a^2,\ y = -3ab,\ z = -5a.$$

Тогда данное произведение перепишется в виде $(x + y)z$, что по распределительному закону равно $xz + yz$. Теперь вернемся к старым переменным:

$$xz + yz = 2a^2\cdot(-5a) + (-3ab)\cdot(-5a).$$

Нам остается лишь найти произведения одночленов. Получим:

$$-10a^3 + 15a^2b.$$

Приведем краткую запись решения (так мы и будем записывать в дальнейшем, не вводя новых переменных):

$$(2a^2 - 3ab)\cdot(-5a) = 2a^2\cdot(-5a) + (-3ab)\cdot(-5a) =$$
$$= -10a^3 + 15a^2b. \quad ■$$

Теперь мы можем сформулировать соответствующее правило умножения многочлена на одночлен.

запомните

Правило 2. ***Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.***

Это же правило действует и при умножении одночлена на многочлен:

$$-5a(2a^2-3ab)=(-5a)\cdot 2a^2+(-5a)\cdot(-3ab)=-10a^3+15a^2b$$

(мы взяли пример 1, но поменяли местами множители).

Пример 2. Представить многочлен в виде произведения многочлена и одночлена, если:

а) $p_1(x, y) = 2x^2y + 4x$; б) $p_2(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Решение. а) Заметим, что $2x^2y = 2x \cdot xy$, а $4x = 2x \cdot 2$. Значит,

$$2x^2y + 4x = xy \cdot 2x + 2 \cdot 2x = (xy + 2) \cdot 2x.$$

б) В примере *а*) нам удалось в составе каждого члена многочлена $p_1(x, y) = 2x^2y + 4x$ выделить одинаковую часть (одинаковый множитель) $2x$. Здесь же такой общей части нет. Значит, многочлен $p_2(x, y) = x^2 + 3y^2$ нельзя представить в виде произведения многочлена и одночлена.

На самом деле и многочлен $p_2(x, y)$ можно представить в виде произведения, например, так:

$$x^2 + 3y^2 = (2x^2 + 6y^2) \cdot 0{,}5$$

или так:

$$x^2 + 3y^2 = (x^2 + 3y^2) \cdot 1$$

— произведение числа на многочлен, но это искусственное преобразование и без большой необходимости не используется.

Кстати, требование представить заданный многочлен в виде произведения одночлена и многочлена встречается в математике довольно часто, поэтому указанной процедуре присвоено специальное название: *вынесение общего множителя за скобки*. Задание вынести общий множитель за скобки может быть корректным (как в примере 2а), а может быть и не совсем корректным (как в примере 2б). В следующей главе мы специально рассмотрим этот вопрос.

В заключение параграфа решим задачи, которые покажут, как на практике для работы с математическими моделями реальных ситуаций приходится и составлять алгебраическую сумму многочленов, и умножать многочлен на одночлен. Так что эти операции мы изучаем не зря.

Пример 3. Пункты A, B и C расположены на шоссе так, как показано на рисунке 3. Расстояние между A и B равно 16 км. Из B по направлению к C вышел пешеход. Через 2 ч после этого из A по направлению к C выехал велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости пешехода. Через 4 ч после своего выезда велосипедист догнал пешехода в пункте C. Чему равно расстояние от B до C?

Рис. 3

Решение.

<u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость пешехода, тогда $(x + 6)$ км/ч — скорость велосипедиста.

Расстояние от A до C велосипедист проехал за 4 ч, значит, это расстояние выражается формулой $4(x + 6)$ км; иными словами, $AC = 4(x + 6)$.

Расстояние от B до C пешеход прошел за 6 ч (ведь до выезда велосипедиста он уже был в пути 2 ч), следовательно, это расстояние выражается формулой $6x$ км; иными словами, $BC = 6x$.

А теперь обратите внимание на рисунок 3: $AC - BC = AB$, т. е. $AC - BC = 16$. Это — основа для составления математической модели задачи. Напомним, что $AC = 4(x + 6)$, $BC = 6x$; следовательно,

$$4(x + 6) - 6x = 16.$$

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Для решения уравнения придется, во-первых, умножить одночлен 4 на двучлен $x + 6$, получим $4x + 24$. Во-вторых, придется из двучлена $4x + 24$ вычесть одночлен $6x$:

$$4x + 24 - 6x = 24 - 2x.$$

После этих преобразований уравнение принимает более простой вид:

$$24 - 2x = 16.$$

Далее имеем:

$$-2x = 16 - 24;$$
$$-2x = -8;$$
$$x = 4.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы получили, что $x = 4$, значит, скорость пешехода 4 км/ч. Но нам нужно найти не это; в задаче требуется найти расстояние от B до C. Мы установили, что $BC = 6x$; значит, $BC = 6 \cdot 4 = 24$.

О т в е т: расстояние от B до C равно 24 км.

П р и м е р 4. Лодка плыла по течению реки 3 ч 12 мин, а затем против течения 1,5 ч. Найти собственную скорость лодки (т.е. скорость в стоячей воде), если известно, что скорость течения реки 2 км/ч, а всего лодкой пройден путь 41 км.

Р е ш е н и е.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, тогда по течению она плывет со скоростью $(x + 2)$ км/ч (течение помогает), а против течения — со скоростью $(x - 2)$ км/ч (течение препятствует).

По течению реки лодка плыла 3 ч 12 мин. Поскольку скорость выражена в километрах в час, это время надо записать в часах. Имеем: 12 мин = 12/60 ч = 1/5 ч = 0,2 ч. Значит, 3 ч 12 мин = = 3,2 ч. За это время со скоростью $(x + 2)$ км/ч лодкой пройден путь $3{,}2(x + 2)$ км.

Против течения лодка плыла 1,5 ч. За это время со скоростью $(x - 2)$ км/ч лодкой пройден путь $1{,}5\,(x - 2)$ км.

По условию весь ее путь составил 41 км. Так как он состоит из пути по течению и пути против течения, то получаем:

$$3{,}2\,(x + 2) + 1{,}5\,(x - 2) = 41.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с математической моделью.*

Как всегда, на этом этапе думаем только о том, как решить модель — уравнение, а не о том, откуда эта модель взялась.

Выполним в левой части уравнения умножение одночлена 3,2 на двучлен $x + 2$, одночлена 1,5 на двучлен $x - 2$, а затем полученные многочлены (двучлены) сложим:

$$3{,}2x + 6{,}4 + 1{,}5x - 3 = 41;$$
$$4{,}7x + 3{,}4 = 41;$$
$$4{,}7x = 41 - 3{,}4;$$
$$4{,}7x = 37{,}6;$$
$$x = \frac{37{,}6}{4{,}7}, \text{ т. е. } x = 8.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, чему равна собственная скорость лодки, т. е. чему равен x? Но ответ на этот вопрос уже получен: $x = 8$.

О т в е т: собственная скорость лодки 8 км/ч.

§ 16. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Овладев правилом умножения многочлена на одночлен, нетрудно сделать следующий шаг: получить правило умножения любых двух многочленов. Рассмотрим сначала произведение самых простых (после одночленов) многочленов, а именно двучленов $a + b$ и $c + d$.

Итак, пусть нужно раскрыть скобки в произведении $(a + b)(c + d)$. Введем новую переменную $m = c + d$, тогда получим:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)m = am + bm.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$am + bm = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Аналогично можно проверить, что

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy$$

(сделайте это!), т. е. как и в случае умножения двучлена на двучлен приходится каждый член первого многочлена поочередно умножать на каждый член второго многочлена и полученные произведения складывать.

Правило 3. ***Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена поочередно на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.***

В результате умножения многочленов всегда получается многочлен, надо лишь привести его к стандартному виду.

П р и м е р. Выполнить умножение многочленов

$$p_1(x) = 2x^2 - 5x + 1 \text{ и } p_2(x) = 3x - 4.$$

Решение. Имеем:

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x - 4) =$$
$$= 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-4) + (-5x) \cdot 3x +$$
$$+ (-5x) \cdot (-4) + 1 \cdot 3x + 1 \cdot (-4) =$$
$$= 6x^3 - 8x^2 - 15x^2 + 20x + 3x - 4 = 6x^3 - 23x^2 + 23x - 4. \quad ■$$

Особенно внимательно нужно следить за знаками коэффициентов тех одночленов, которые получаются при раскрытии скобок. И еще один совет: если у одного многочлена m членов, а у другого n членов, то в произведении должно быть (до приведения подобных членов) mn членов; если же их не mn, то вы что-то потеряли, проверьте. Так, в рассмотренном примере мы умножали трехчлен на двучлен, получилась сумма шести слагаемых (а после приведения подобных членов осталось четыре слагаемых).

§ 17. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Имеется несколько случаев, когда умножение одного многочлена на другой приводит к компактному, легко запоминающемуся результату. В этих случаях предпочтительнее не умножать каждый раз один многочлен на другой, а пользоваться готовым результатом. Рассмотрим эти случаи.

1. Квадрат суммы и квадрат разности:

Умножим двучлен $a + b$ на себя, т. е. раскроем скобки в произведении $(a + b)(a + b)$ или, что то же самое, в выражении $(a + b)^2$. Имеем:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Аналогично получаем:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Итак,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (1)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (2)$$

На обычном языке формулы (1) и (2) читают так: **квадрат суммы (разности) двух выражений равен сумме их квадратов плюс (минус) их удвоенное произведение.** Этим формулам присвоены специальные названия: формуле (1) — **квадрат суммы**, формуле (2) — **квадрат разности.**

квадрат суммы

квадрат разности

Пример 1. Раскрыть скобки в выражении:

а) $(3x+2)^2$; б) $(5a^2 - 4b^3)^2$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1), учтя, что в роли a выступает $3x$, а в роли b — число 2. Получим:

$$(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

б) Воспользуемся формулой (2), учтя, что в роли a выступает $5a^2$, а в роли b выступает $4b^3$. Получим:

$$(5a^2 - 4b^3)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = 25a^4 - 40a^2b^3 + 16b^6.$$

При использовании формул квадрата суммы или квадрата разности учитывайте, что

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2;$$
$$(b-a)^2 = (a-b)^2.$$

Это следует из того, что $(-a)^2 = a^2$.

Отметим, что на формулах (1) и (2) основаны некоторые математические фокусы, позволяющие производить вычисления в уме. Например, можно практически устно возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 1 и 9. В самом деле

$$71^2 = (70+1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$
$$91^2 = (90+1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281;$$
$$69^2 = (70-1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761.$$

Иногда можно быстро возвести в квадрат и число, оканчивающееся цифрой 2 или цифрой 8. Например,

$$102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 =$$
$$= 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404;$$
$$48^2 = (50-2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304.$$

Но самый элегантный фокус связан с возведением в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5. Проведем соответствующие рассуждения для 85^2. Имеем:

$$85^2 = (80+5)^2 = 80^2 + 2\cdot 80\cdot 5 + 5^2 =$$
$$=80(80+10)+25=$$
$$= 80\cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225.$$

Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно было умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать и в других случаях. Например, $35^2 = 1225$ ($3\cdot 4 = 12$ и к полученному числу приписали справа 25); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15625$ ($12\cdot 13 = 156$ и к полученному числу приписали справа 25).

Раз уж мы с вами заговорили о различных любопытных обстоятельствах, связанных со скучными (на первый взгляд) формулами (1) и (2), то дополним этот разговор следующим геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$ и вырежем в двух его углах квадраты со сторонами, соответственно равными a и b (рис. 4).

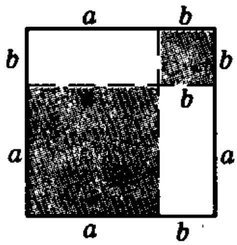


Рис. 4

Площадь квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. Но этот квадрат мы разрезали на четыре части: квадрат со стороной a (его площадь равна a^2), квадрат со стороной b (его площадь равна b^2), два прямоугольника со сторонами a и b (площадь каждого такого прямоугольника равна ab). Значит, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, т. е. получили формулу (1).

2. Разность квадратов

Умножим двучлен $a + b$ на двучлен $a - b$. Получим:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Итак,

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.} \qquad (3)$$

разность квадратов

Любое равенство в математике употребляется как слева направо (т.е. левая часть равенства заменяется его правой частью), так и справа налево (т.е. правая часть равенства заменяется его левой частью). Если формулу (3) использовать слева направо, то она позволяет заменить произведение $(a + b)(a - b)$ готовым результатом $a^2 - b^2$. Эту же формулу можно использовать справа налево, тогда она позволяет заменить разность квадратов $a^2 - b^2$ произведением $(a + b)(a - b)$. Формуле (3) в математике дано специальиое название — **разность квадратов**.

Замечание. Не путайте термины «разность квадратов» и «квадрат разности». Разность квадратов — это $a^2 - b^2$, значит, речь идет о формуле (3); квадрат разности — это $(a - b)^2$, значит речь идет о формуле (2).

На обычном языке формулу (3) читают «справа налево» так:

разность квадратов двух чисел (выражений) равна произведению суммы этих чисел (выражений) на их разность.

Пример 2. Выполнить умножение

$$(3x - 2y)(3x + 2y).$$

Решение. Имеем:

$$(3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2.$$

Пример 3. Представить двучлен $16x^4 - 9$ в виде произведения двучленов.

Решение. Имеем: $16x^4 = (4x^2)^2$, $9 = 3^2$, значит, заданный двучлен есть разность квадратов, т.е. к нему можно применить формулу (3), прочитанную справа налево. Тогда получим:

$$16x^4 - 9 = (4x^2)^2 - 3^2 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3).$$

Формула (3), как и формулы (1) и (2), используется для математических фокусов. Смотрите:

$$79 \cdot 81 = (80 - 1)(80 + 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399;$$
$$42 \cdot 38 = (40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596.$$

Завершим разговор о формуле разности квадратов любопытным геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа, причем $a > b$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$ (рис. 5). Его площадь равна $(a + b)(a - b)$. Отрежем прямоугольник со сторонами b и $a - b$ и подклеим его к оставшейся части так, как показано на рисунке 6. Ясно, что полученная фигура имеет ту же площадь, т. е. $(a + b)(a - b)$. Но эту фигуру можно построить так: из квадрата со стороной a вырезать квадрат со стороной b (это хорошо видно на рис. 6). Значит, площадь новой

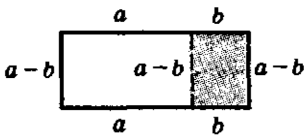


Рис. 5

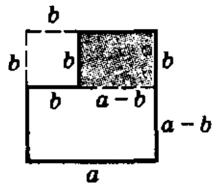


Рис. 6

фигуры равна $a^2 - b^2$. Итак, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, т. е. получили формулу (3).

3. Разность кубов и сумма кубов

Умножим двучлен $a - b$ на трехчлен $a^2 + ab + b^2$. Получим:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a \cdot a^2 + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab -$$
$$- b \cdot b^2 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Аналогично

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

(проверьте это сами).

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned} &(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \quad (4)\\ &(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \quad (5)\end{aligned}}$$

Формулу (4) обычно называют **разностью кубов**, формулу (5) — **суммой кубов**.

разность кубов
сумма кубов

полный квадрат суммы (разности)

неполный квадрат суммы (разности)

Попробуем перевести формулы (4) и (5) на обычный язык. Прежде чем это сделать, заметим, что выражение $a^2 + ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 + 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (1) и давало $(a + b)^2$; выражение $a^2 - ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 - 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (2) и давало $(a - b)^2$.

Чтобы отличить (в языке) эти пары выражений друг от друга, каждое из выражений $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ называют **полным квадратом** (суммы или разности), а каждое из выражеиий $a^2 + ab + b^2$ и $a^2 - ab + b^2$ называют **неполным квадратом** (суммы или разности). Тогда получается следующий перевод формул (4) и (5) (прочитанных «справа налево») на обычный язык:

разность кубов двух чисел (выражений) равна произведению разности этих чисел (выражений) на неполный квадрат их суммы;
сумма кубов двух чисел (выражений) равна произведению суммы этих чисел (выражений) на неполный квадрат их разности.

Замечание. Все полученные в этом параграфе формулы (1)–(5) используются как слева направо, так и справа налево, только в первом случае (слева направо) говорят, что (1)–(5) — *формулы сокращенного умножения*, а во втором случае (справа налево) говорят, что (1)–(5) — *формулы разложения на множители*.

Пример 4. Выполнить умножение $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

Решение. Так как первый множитель есть разность одночленов $2x$ и 1, а второй множитель — неполный квадрат их суммы, то можно воспользоваться формулой (4). Получим:

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1.$$

П р и м е р 5. Представить двучлен $27a^6 + 8b^3$ в виде произведения многочленов.

Р е ш е н и е. Имеем: $27a^6 = (3a^2)^3$, $8b^3 = (2b)^3$. Значит, заданный двучлен есть сумма кубов, т. е. к нему можно применить формулу (5), прочитанную справа налево. Тогда получим:

$$27a^6 + 8b^3 = (3a^2)^3 + (2b)^3 = (3a^2 + 2b)\left((3a^2)^2 - 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2\right) = (3a^2 + 2b)(9a^4 - 6a^2b + 4b^2).$$

§ 18. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Снова, как и в начале § 15, сравним планы построения глав 3 и 4. Вы, наверное, заметили, что эти планы почти одинаковы, хотя полное совпадение нарушил предыдущий параграф (посвященный специфическим формулам сокращенного умножения), да и в главе 3 мы рассмотрели возведение одночлена в степень, а в главе 4 соответствующего разговора о возведении в степень многочлена не было, за исключением случая, когда двучлен возводится в квадрат. После умножения одночленов в главе 3 шла речь о делении одночлена на одночлен. Вот и в главе 4 мы сейчас поговорим об аналогичной операции — делении многочлена на одночлен.

В ее основе лежит следующее свойство деления суммы на число:

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m).$$

Это позволяет сразу сформулировать правило деления многочлена на одночлен.

Правило 4. ***Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.***

В § 12 мы отмечали, что не всегда можно разделить одночлен на одночлен; чтобы деление было выполнимо, необходимо соблюдение целого ряда условий — вспомните их (или посмотрите в § 12), прежде чем рассматривать пример, который приведен ниже. Если задача деления одночлена (простейшего многочлена) на одночлен не всегда была корректной, то что же говорить о делении многочлена на одночлен: такое деление выполнимо достаточно редко.

Пример 1. Разделить многочлен $2a^2b + 4ab^2$ на одночлен $2a$.

Решение. Находим:

$$(2a^2b + 4ab^2) : 2a = (2a^2b : 2a) + (4ab^2 : 2a) = \frac{2a^2b}{2a} + \frac{4ab^2}{2a} =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot b + \frac{4}{2} \cdot \frac{a}{a} \cdot b^2 = 1 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 1 \cdot b^2 = ab + 2b^2. \quad ■$$

Здесь мы использовали тот способ записи, который обговорили в § 12. А вот иной способ (можно применять и тот, и другой, смотря по тому, какой из них вам больше нравится): выделим в каждом члене многочлена $2a^2b + 4ab^2$ множитель, в точности равный делителю $2a$. Получим:

$$2a^2b + 4ab^2 = 2a \cdot ab + 2a \cdot 2b^2.$$

Эту сумму можно записать в виде произведения $2a(ab + 2b^2)$. Теперь ясно, что если это произведение разделить на $2a$ (на один множитель), то в частном получится $ab + 2b^2$ (другой множитель).

Пример 2. Разделить многочлен $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$.

Решение.

Первый способ. Находим:

$$(6x^3 - 24x^2) : 6x^2 = (6x^3 : 6x^2) - (24x^2 : 6x^2) =$$

$$= \frac{6x^3}{6x^2} - \frac{24x^2}{6x^2} = \frac{6}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} - \frac{24}{6} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 1 \cdot x - 4 \cdot 1 = x - 4.$$

Второй способ. Имеем:

$$6x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot x - 6x^2 \cdot 4 = 6x^2(x - 4).$$

Значит, частное от деления $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$ равно $x - 4$. ■

Пример 3. Разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$.

Решение. Имеем:

$$8a^3 + 6a^2b - b = 2a^2 \cdot 4a + 2a^2 \cdot 3b - b.$$

Поскольку в третьем члене заданного многочлена (речь идет о члене $-b$) множитель $2a^2$ не выделяется, деление невозможно. Эта задача некорректна. Фактически мы снова, как и в конце § 12, пришли к алгебраической дроби — на этот раз к алгебраической дроби $\frac{8a^3+6a^2b-b}{2a^2}$. ■

Итак, деление многочлена на одночлен выполняется не всегда, а если и выполняется, то требует определенных усилий. Деление же многочлена на многочлен — еще более трудная (и еще более редко выполнимая) операция, это нам пока не по силам.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как обычно, закончим главу перечислением основных полученных в ней результатов.

- В этой главе мы с вами изучили следующие <u>понятия</u>:
  многочлен, в частности, двучлен, трехчлен;
  приведение подобных членов многочлена, взаимное уничтожение членов многочлена;
  стандартный вид многочлена;
  алгебраическая сумма многочленов.

- Мы с вами изучили следующие <u>правила</u>:
  правило составления алгебраической суммы многочленов;
  правило умножения многочлена на одночлен;
  правило умножения многочлена на многочлен;
  правило деления многочлена на одночлен.

- Мы с вами изучили следующие <u>формулы</u>:
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);
  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);
  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (разность квадратов);
  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ (разность кубов);
  $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ (сумма кубов).

  В написанном виде это — формулы сокращенного умножения; если же их читать справа налево (например, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$), то это — формулы разложения многочлена на множители (т. е. формулы, позволяющие многочлен, записанный в правой части равенства, представить в виде произведения более простых многочленов, которые записаны в левой части равенства).

ГЛАВА 5

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 19. ЧТО ТАКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ И ЗАЧЕМ ОНО НУЖНО

Для начала выполним знакомую операцию: умножим многочлен $2x - 3$ на многочлен $x + 2$. Имеем:

$$(2x - 3)(x + 2) = 2x \cdot x + 2x \cdot 2 - 3 \cdot x - 3 \cdot 2 =$$
$$= 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6.$$

Итак, $(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + x - 6$.

Это равенство можно записать по-другому, поменяв его части местами:

$$2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2).$$

Такая запись означает, что многочлен $2x^2 + x - 6$ представлен в виде произведения более простых многочленов $2x - 3$ и $x + 2$.

разложение многочлена на множители

Обычно в таких случаях говорят, что многочлен удалось **разложить на множители**.

На самом деле термин «разложение многочлена на множители» вам уже знаком, мы несколько раз использовали его в главе 4, но там же мы говорили, что позднее более подробно обсудим эту проблему (проблему разложения многочлена на множители). Это время пришло. Однако сначала убедимся в том, что разложение многочлена на множители — вещь полезная (иначе зачем нам этим заниматься?).

Представьте себе, что вам предложили решить уравнение $2x - 3 = 0$. Вы справитесь с этим без труда: $2x = 3$, $x = 1{,}5$. Затем вам предложили решить уравнение $x + 2 = 0$. И с ним вы справитесь легко: $x = -2$. Пусть теперь вам предлагают решить уравнение $2x^2 + x - 6 = 0$, т. е. дать ответ на вопрос, при каких значениях x трехчлен $2x^2 + x - 6$ обращается в нуль, — эти значения x обычно называют *корнями уравнения*. Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока не знаете. Как быть?

Воспользуемся полученным выше разложением многочлена $2x^2 + x - 6$ на множители: $2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$(2x - 3)(x + 2) = 0.$$

Теперь остается воспользоваться следующим известным фактом: если произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей равен нулю. Значит, либо $2x - 3 = 0$, либо $x + 2 = 0$. Задача свелась к решению двух более простых уравнений. Из уравнения $2x - 3 = 0$ получаем $x = 1{,}5$. Из уравнения $x + 2 = 0$ получаем $x = -2$. Уравнение решено, оно имеет два корня: $1{,}5$ и -2.

Итак, разложение многочлена на множители может пригодиться нам для решения уравнений.

Рассмотрим другую ситуацию. Пусть нужно найти значение числового выражения $\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2}$. Самое эффективное решение — дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2} = \frac{(53-47)(53+47)}{(61-39)(61+39)} = \frac{6\cdot 100}{22\cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

5.19. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем довольно трудном, но красивом примере, где ключ к успеху опять-таки в разложении на множители.

Пример. Доказать, что для любого натурального числа n выражение $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится без остатка на 6.

Решение. Пусть $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Если $n = 1$, то $p(1) = 1 + 3 + 2 = 6$. Значит, $p(1)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 2$, то $p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 + 12 + 4 = 24$. Следовательно, и $p(2)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 3$, то $p(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 + 27 + 6 = 60$. Поэтому и $p(3)$ делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что перебрать так все натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

В самом деле

$$n(n + 1) = n^2 + n,$$

а

$$(n^2 + n)(n + 2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Итак,

$$p(n) = n(n + 1)(n + 2),$$

т. е. $p(n)$ есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел n, $n + 1$, $n + 2$. Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит, и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел — четное, т. е. делится на 2, значит, и произведение делится на 2. Итак, $p(n)$ делится и на 2, и на 3, т. е. делится и на 6. ■

Все прекрасно, скажете вы, но как догадаться, что $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2)$? Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители. К этому и перейдем: в каждом из следующих параграфов этой главы мы будем изучать тот или иной прием разложения многочлена на множители.

§ 20. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Прежде чем начинать изучение этого параграфа, вернитесь к § 15. Там мы уже рассмотрели пример, в котором требовалось представить многочлен в виде произведения многочлена и одночлена. Мы установили, что эта задача не всегда корректна. Если все же такое произведение удалось составить, то обычно говорят, что многочлен разложен на множители с помощью **вынесения общего множителя за скобки**. Рассмотрим несколько примеров.

вынесение общего множителя за скобки

Пример 1. Разложить на множители многочлен:

а) $2x + 6y$; в) $4a^3 + 6a^2$; д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$.
б) $a^3 + a^2$; г) $12ab^4 - 18a^2b^3c$;

Решение. а) $2x + 6y = 2(x + 3y)$. За скобки вынесли общий делитель коэффициентов членов многочлена.

б) $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$. Если одна и та же переменная входит во все члены многочлена, то ее можно вынести за скобки в степени, равной наименьшей из имеющихся (т. е. выбирают наименьший из имеющихся показателей).

в) Здесь используем тот же прием, что и при решении примеров а) и б): для коэффициентов находим общий делитель (в данном случае число 2), для переменных — наименьшую степень из имеющихся (в данном случае a^2). Получаем:

$$4a^3 + 6a^2 = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 3 = 2a^2(2a + 3).$$

г) Обычно для целочисленных коэффициентов стараются найти не просто общий делитель, а *наибольший* общий делитель. Для коэффициентов 12 и 18 им будет число 6. Замечаем, что переменная a входит в оба члена многочлена, при этом наименьший показатель равен 1. Переменная b также входит в оба члена многочлена, причем наименьший показатель равен 3. Наконец, переменная c входит только во второй член многочлена и не входит в первый член, значит, эту переменную нельзя вынести за скобки ни в какой степени. В итоге имеем:

$$12ab^4 - 18a^2b^3c = 6ab^3 \cdot 2b - 6ab^3 \cdot 3ac = 6ab^3(2b - 3ac).$$

д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2)$. ■

Фактически в этом примере мы выработали следующий алгоритм.

Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. *Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, — он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).*
2. *Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.*
3. *Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, и степеней, найденных на втором шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.*

Замечание. В ряде случаев полезно выносить за скобку в качестве общего множителя и дробный коэффициент. Например:

$$2{,}4x + 7{,}2y = 2{,}4(x + 3y);$$

$$\frac{3}{7}a - \frac{6}{7}b + \frac{9}{7}c = \frac{3}{7}(a - 2b + 3c)$$

Пример 2. Разложить на множители: $-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2$.

Решение. Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

1) Наибольший общий делитель коэффициентов -1, -2 и 5 равен 1.

2) Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4, 3, 2; следовательно, можно вынести за скобки x^2.

3) Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

Вывод: за скобки можно вынести x^2. Правда, в данном случае целесообразнее вынести за скобки $-x^2$. Получим:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$ ■

Пример 3. Можно ли разделить многочлен $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$ на одночлен $5a^3$? Если да, то выполнить деление.

Решение. В примере 1д) мы получили, что

$$5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2).$$

Значит, заданный многочлен можно разделить на $5a^3$, при этом в частном получится $a - 2 + 3a^2$. ■

Подобные примеры мы рассматривали в § 18; просмотрите их, пожалуйста, еще раз, но уже с точки зрения вынесения общего множителя за скобки.

Разложение многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки тесно связано с двумя операциями, которые мы изучали в § 15 и 18, — с умножением многочлена на одночлен и с делением многочлена на одночлен.

А теперь несколько расширим наши представления о вынесении общего множителя за скобки. Дело в том, что иногда алгебраическое выражение задается в таком виде, что в качестве общего множителя может выступать не одночлен, а сумма нескольких одночленов.

Пример 4. Разложить на множители:

$$2x(x-2) + 5(x-2)^2.$$

Решение. Введем новую переменную $y = x - 2$. Тогда получим:

$$2x(x-2) + 5(x-2)^2 = 2xy + 5y^2.$$

Замечаем, что переменную y можно вынести за скобки: $2xy + 5y^2 = y(2x + 5y)$. А теперь вернемся к старым обозначениям:

$$y(2x + 5y) = (x-2)(2x + 5(x-2)) =$$

$$= (x-2)(2x + 5x - 10) = (x-2)(7x - 10).$$ ■

В подобных случаях после приобретения некоторого опыта можно не вводить новую переменную, а использовать следующую запись:

$$2x(x-2)+5(x-2)^2=(x-2)(2x+5(x-2))=$$
$$=(x-2)(2x+5x-10)=(x-2)(7x-10).$$

§ 21. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Разложить на множители многочлен
$$2a^2+6a+ab+3b.$$

Решение. Объединим в одну группу первые два члена, а в другую — последние два члена многочлена:
$$(2a^2+6a)+(ab+3b).$$

Замечаем, что в первой группе можно вынести за скобки $2a$, а во второй группе b. Имеем: $2a(a+3)+b(a+3)$. Теперь мы видим, что «проявился» общий множитель $(a+3)$, который можно вынести за скобки. В результате получим: $(a+3)(2a+b)$. ■

Поскольку процесс преобразований в примере 1 перемежался обширными комментариями, приведем еще раз решение, но уже без комментариев:
$$2a^2+6a+ab+3b=(2a^2+6a)+(ab+3b)=$$
$$=2a(a+3)+b(a+3)=(a+3)(2a+b).$$

Объединение членов многочлена $2a^2+6a+ab+3b$ в группы можно осуществить различными способами. Однако нужно учитывать, что иногда такая группировка оказывается удачной для последующего разложения на множители, а иногда нет. Проведем эксперимент. Объединим в одну группу первый и третий члены рассматриваемого многочлена, а в другую группу — второй и четвертый:
$$2a^2+6a+ab+3b=(2a^2+ab)+(6a+3b)=$$
$$=a(2a+b)+3(2a+b)=(2a+b)(a+3).$$

Разложение на множители получилось, группировка оказалась удачной.

Теперь объединим в одну группу первый и четвертый члены, а в другую — второй и третий:
$$2a^2+6a+ab+3b=(2a^2+3b)+(6a+ab)=$$
$$=(2a^2+3b)+a(6+b).$$

Эта группировка явно неудачна.

Подведем итоги. Члены многочлена можно группировать так, как нам хочется. Иногда удается такая группировка, что в каждой группе после вынесения общих множителей в скобках остается один и тот же многочлен, который, в свою очередь, может быть вынесен за скобки как общий множитель. Тогда говорят, что разложение многочлена на множители осуществлено **способом группировки**.

способ группировки

Пример 2. Разложить на множители многочлен $xy - 6 + 3y - 2y$.

Решение.

Первый способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 6) + (3x - 2y).$$

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy + 3x) + (-6 - 2y) =$$
$$= x(y + 3) - 2(y + 3) = (y + 3)(x - 2).$$

Третий способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 2y) + (-6 + 3x) =$$
$$= y(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(y + 3).$$

Ответ: $xy - 6 + 3x - 2y = (x - 2)(y + 3)$.

Как видите, не всегда с первого раза группировка оказывается удачной. Если группировка оказалась неудачной, то откажитесь от нее, ищите иной способ. По мере приобретения опыта вы будете быстро находить удачную группировку, как это сделано в следующем примере.

Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6.$$

Решение. Составим три группы: в первую включим первый и четвертый члены, во вторую — второй и пятый, в третью — третий и шестой:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (ab^2 + 2b^2) + (-2ab - 4b) +$$
$$+ (3a + 6) = b^2(a + 2) - 2b(a + 2) + 3(a + 2).$$

Во всех группах оказался общий множитель $(a + 2)$, который можно вынести за скобки. Получим:

$$(a + 2)(b^2 - 2b + 3).$$

Ответ: $ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Иногда полезно проверить себя, т.е. в полученном разложении на множители выполнить операцию умножения многочленов (раскрыть скобки) и убедиться, что в результате получится тот многочлен, который был задан. А если нет? Тогда надо искать ошибку в разложении на множители.

Пример 4. Разложить на множители многочлен $x^2 - 7x + 12$.

Решение. Наверное, вы думаете: какое отношение имеет этот пример к способу группировки, ведь здесь и группировать-то нечего? Это верно, но можно сделать небольшой фокус: если представить слагаемое $-7x$ в виде суммы $-3x - 4x$, то получится сумма уже не трех (как в заданном многочлене), а четырех слагаемых. Эти четыре слагаемых можно распределить по двум группам. Итак,

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = (x^2 - 3x) + (-4x + 12) =$$
$$= x(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x-4).$$

Пример 5. Решить уравнение:

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$.

Решение. а) Разложим трехчлен $x^2 - 7x + 12$ на множители так, как это сделано в примере 4:

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4).$$

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $(x-3)(x-4) = 0$. Теперь ясно, что исходное уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = 4$.

б) Разложим многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ на множители. Имеем: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) = x^2(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2+3)$.

Перепишем теперь заданное уравнение в виде:

$$(x-2)(x^2+3) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то равен нулю один из множителей. Но $x^2 + 3$ при любых значениях x является положительным числом, т. е. в нуль обратиться не может. Значит, может выполняться только равенство $x - 2 = 0$, откуда получаем $x = 2$.

Ответ: а) 3, 4; б) 2.

§ 22. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

В § 17 мы получили пять формул сокращенного умножения. Там же мы отметили, что любой из этих формул можно пользоваться как для сокращенного умножения многочлена на многочлен (если применять формулы в том виде, в котором они были записаны в § 17), так и для разложения многочлена на множители, если их переписать следующим образом:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \qquad (1)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \qquad (2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \qquad (3)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \qquad (4)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \qquad (5)$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего — чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью — к выражению, представляющему собой *разность* (или *сумму*) *кубов;* последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой *полный квадрат*, т. е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.

Пример 1. Разложить на множители:

а) $64x^2 - 9$; в) $(2x - 1)^2 - 25$;
б) $x^6 - 4a^4$; г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2$.

Решение. Во всех четырех примерах воспользуемся формулой (1) (разность квадратов):

а) $64x^2 - 9 = (8x)^2 - 3^2 = (8x - 3)(8x + 3)$;

б) $x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$;

в) $(2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2 = ((2x - 1) - 5)((2x - 1) + 5) = (2x - 6)(2x + 4) = 2(x - 3) \cdot 2(x + 2) = 4(x - 3)(x + 2)$.

Здесь, кроме формулы разности квадратов, мы использовали прием вынесения общего множителя за скобки — для двучленов $2x - 6$ и $2x + 4$.

г) $(a+3)^2-(b-2)^2=((a+3)-(b-2))((a+3)+(b-2))=$
$=(a+3-b+2)(a+3+b-2)=(a-b+5)(a+b+1).$

Пример 2. Разложить на множители:
а) $125a^3-8b^3$; б) a^6+27b^3; в) x^6-a^6.

Решение. Здесь воспользуемся формулами (2) и (3) (разность и сумма кубов).

а) $125a^3-8b^3=(5a)^3-(2b)^3=(5a-2b)((5a)^2+5a\cdot 2b+(2b)^2)=$
$=(5a-2b)(25a^2+10ab+4b^2).$

б) $a^6+27b^3=(a^2)^3+(3b)^3=(a^2+3b)((a^2)^2-a^2\cdot 3b+(3b)^2)=$
$=(a^2+3b)(a^4-3a^2b+9b^4).$

в) Первый способ:

$$x^6-a^6=(x^2)^3-(a^2)^3=(x^2-a^2)((x^2)^2+x^2\cdot a^2+(a^2)^2)=$$
$$=(x-a)(x+a)(x^4+x^2a^2+a^4).$$

Второй способ:

$$x^6-a^6=(x^3)^2-(a^3)^2=(x^3-a^3)(x^3+a^3)=$$
$$=(x-a)(x^2+xa+a^2)(x+a)(x^2-xa+a^2).$$

Замечание. В примере 2в) при одном способе решения получилось разложение:

$$(x-a)(x+a)(x^4+x^2a^2+a^4),$$

а при другом способе — разложение:

$$(x-a)(x+a)(x^2+xa+a^2)(x^2-xa+a^2).$$

Разумеется, это одно и то же: в следующем параграфе мы покажем, как от многочлена $x^4+x^2a^2+a^4$ перейти к произведению $(x^2+xa+a^2)(x^2-xa+a^2)$. Впрочем, и сейчас вы можете убедиться, что

$$x^4+x^2a^2+a^4=(x^2+xa+a^2)(x^2-xa+a^2).$$

Для этого достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (сделайте это).

Пример 3. Разложить на множители:
а) $a^2-4ab+4b^2$; в) $4x^4-12x^2y+9y^2$;
б) x^4+2x^2+1; г) $25a^2+10ab+4b^2$.

Решение. В этих примерах даны трехчлены, для их разложения на множители будем пользоваться формулами (4) и (5), если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом:

а) $a^2-4ab+4b^2=a^2+(2b)^2-2\cdot a\cdot 2b=(a-2b)^2.$

Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов.

Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.

б) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 = (x^2 + 1)^2$;

в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y = (2x^2 - 3y)^2$;

г) $25a^2 + 10ab + 4b^2 = (5a)^2 + (2b)^2 + 5a \cdot 2b$.

Так как $10ab$ — это не удвоенное произведение одночленов $5a$ и $2b$, то данный трехчлен не является полным квадратом. Разложить его на множители с помощью формул (4) или (5) мы не можем.

Вообще, если хотите воспользоваться формулами (4) или (5), то будьте внимательны и убедитесь, что заданный трехчлен есть полный квадрат. В противном случае формулы (4) и (5) применять нельзя — именно так обстояло дело в примере 3г.

§ 23. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЕМОВ

В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т. д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало

знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим в данном параграфе.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5.$$

Решение. 1) Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это — наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (соответственно a^6, a^4, a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2. Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (соответственно b^3, b^4, b^5) — за скобки можно вынести b^3.

Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$. Тогда получим:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

2) Рассмотрим трехчлен в скобках: $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

3) Комбинируя два приема (вынесение общего множителя за скобки и использование формул сокращенного умножения), получаем окончательный результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

Пример 2. Разложить на множители: $a^2 - c^2 + b^2 + 2ab$.

Решение. 1) Сначала попробуем воспользоваться способом группировки. До сих пор четыре слагаемых мы разбивали на группы по парам (см. § 21). Здесь это не проходит. Действительно,

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 - c^2) + (b^2 + 2ab) =$$
$$= (a - c)(a + c) + b(b + 2a).$$

Эта группировка неудачна, нет общего множителя.

Попробуем по-другому:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + b^2) + (-c^2 + 2ab)$$

— здесь также ничего хорошего нет.

Третья попытка:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab) + (-c^2 + b^2) =$$
$$= a(a + 2b) + (b - c)(b + c)$$

— и здесь нет общего множителя.

Однако все-таки способ группировки в этом примере сработает. Ведь ниоткуда не следует, что группировать слагаемые можно только по парам, это можно сделать и так:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2.$$

Теперь вы отчетливо видите структуру данного многочлена: разность квадратов.

2) К полученному выражению применим формулу разности квадратов:

$$(a + b)^2 - c^2 = ((a + b) - c)((a + b) + c) = (a + b - c)(a + b + c).$$

Итак, комбинируя два приема (группировку и использование формул сокращенного умножения — квадрат суммы и разность квадратов), мы получили окончательный результат:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a + b - c)(a + b + c).$$

Пример 3. Разложить на множители: $x^4 + 4y^4$.

Решение. Проанализируем структуру данного двучлена. Что такое x^4? Это $(x^2)^2$. Что такое $4y^4$? Это $(2y^2)^2$. Значит, имеем сумму квадратов $(x^2)^2 + (2y^2)^2$. Обычно, увидев сумму квадратов двух выражений (чисел, одночленов, многочленов), математик ищет удвоенное произведение этих выражений для того, чтобы получить полный квадрат. В данном случае таким удвоенным произведением будет $2 \cdot x^2 \cdot 2y^2$, т.е. $4x^2y^2$. Но его в примере нет. Что же делать?

Прибавим к заданному многочлену то, что нам нужно, но, чтобы ничего не изменилось, тут же и вычтем:

$$(x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2.$$

Это дает возможность сгруппировать первые три члена так, что выделится полный квадрат. Дальнейшее решение идет по плану примера 2.

Приведем полное решение примера, уже без комментариев:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = ((x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

В этом примере мы впервые применили метод **выделения полного квадрата**. Он будет полезен нам и в дальнейшем, в частности, при решении следующего примера.

метод выделения полного квадрата

Пример 4. Разложить на множители:

$$x^4 + x^2a^2 + a^4.$$

Решение. Применим метод выделения полного квадрата. Для этого представим x^2a^2 в виде $2x^2a^2 - x^2a^2$. Получим:

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 - x^2a^2 + a^4 = (x^4 + 2x^2a^2 + a^4) - x^2a^2 =$$
$$= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 - xa)(x^2 + a^2 + xa).$$

А теперь вернитесь, пожалуйста, к замечанию, которое было сделано в § 22 (см. пример 2). Как видите, мы выполнили данное там обещание.

Пример 5. Разложить на множители: $n^3 + 3n^2 + 2n$.

Решение. Сначала воспользуемся тем, что n можно вынести за скобки: $n(n^2 + 3n + 2)$. Теперь к трехчлену $n^2 + 3n + 2$

применим способ группировки, предварительно представив $3n$ в виде $2n + n$. Получим:

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + n + 2 = (n^2 + 2n) + (n + 2) =$$
$$= n(n + 2) + (n + 2) = (n + 2)(n + 1).$$

Окончательно получаем:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$ ◼

Этим разложением мы уже воспользовались в § 19. Правда, там это было сделано без обоснований, зато теперь все стало на свои места.

Пример 6. Вычислить $38{,}8^2 + 83 \cdot 15{,}4 - 44{,}2^2$.

Решение. Последовательно применим группировку, формулы сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки. Эта совокупность алгебраических приемов позволит провести арифметические вычисления легко и изящно:

$$38{,}8^2 + 83 \cdot 15{,}4 - 44{,}2^2 = 83 \cdot 15{,}4 - (44{,}2^2 - 38{,}8^2) =$$
$$= 83 \cdot 15{,}4 - (44{,}2 - 38{,}8)(44{,}2 + 38{,}8) = 83 \cdot 15{,}4 - 5{,}4 \cdot 83 =$$
$$= 83(15{,}4 - 5{,}4) = 83 \cdot 10 = 830.$$ ◼

Заканчивая этот параграф, вернемся к тому, с чего мы начинали главу 5. В § 19 мы говорили о том, что разложение на множители — один из методов решения уравнений. В следующем примере мы и воспользуемся этим методом.

Предварительно отметим следующее. В математике и смежных науках часто встречаются уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — не переменные, а числа. Например, $2x^2 - 3x + 2 = 0$, $x^2 + 4x - 8{,}5 = 0$ и т. д. Такие уравнения называют *квадратными*, мы специально займемся их изучением в 8 классе. Впрочем, некоторые квадратные уравнения можно и теперь решить. Одно квадратное уравнение мы уже решили выше в § 21 (см. пример 5), сейчас решим еще одно, причем даже двумя способами (правда, обычно делают не так, а пользуются готовыми формулами для решения квадратных уравнений, но вы их пока не знаете).

Пример 7. Решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Решение.

Первый способ. Представим $-6x$ в виде суммы $-x - 5x$, а затем применим способ группировки:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) =$$

$$= x(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(x-5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид:

$$(x-1)(x-5) = 0,$$

откуда находим, что либо $x = 1$, либо $x = 5$.

Второй способ. Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде $9 - 4$. Получим:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 =$$
$$= (x-3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x-5)(x-1).$$

Снова пришли к уравнению $(x - 1)(x - 5) = 0$, имеющему корни 1 и 5.

Ответ: 1, 5.

§ 24. СОКРАЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Новое понятие в математике редко возникает «из ничего», «на пустом месте». Оно появляется тогда, когда в нем ощущается объективная необходимость. Именно так появились в математике отрицательные числа, так появились обыкновенные и десятичные дроби.

Предпосылки для введения нового понятия «алгебраическая дробь» у нас имеются. Давайте вернемся к § 12. Обсуждая там деление одночлена на одночлен, мы рассмотрели ряд примеров. Выделим два из них.

1. Разделить одночлен $36a^3b^5$ на одночлен $4ab^2$ (см. пример 1в) из § 12).

Решали мы его так. Вместо записи $36a^3b^5 : 4ab^2$ использовали черту дроби: $\frac{36a^3b^5}{4ab^2}$ (ведь $A : B$ и $\frac{A}{B}$ — одно и то же). Это позволило вместо записей $36 : 4$, $a^3 : a$, $b^5 : b^2$ также использовать черту дроби, что сделало решение примера более наглядным:

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

2. Разделить одночлен $4x^3$ на одночлен $2xy$ (см. пример 1д) из § 12).

Действуя по тому же образцу, мы получили:

$$4x^3 : 2xy = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$$

В § 12 мы отметили, что одночлен $4x^3$ не удалось разделить на одночлен $2xy$ так, чтобы получился одночлен. Но ведь математические модели реальных ситуаций могут содержать операцию деления любых одночленов, не обязательно таких, что один делится на другой. Предвидя это, математики ввели новое понятие — понятие алгебраической дроби. В частности, $\frac{2x^2}{y}$ — алгебраическая дробь.

Теперь вернемся к § 18. Обсуждая там операцию деления многочлена на одночлен, мы отметили, что она не всегда выполнима. Так, в примере 2 из § 18 речь шла о делении двучлена $6x^3 - 24x^2$ на одночлен $6x^2$. Эта операция оказалась выполнимой и в результате мы получили двучлен $x - 4$. Значит,

$$\frac{6x^3-24x^2}{6x^2} = x - 4.$$

Иными словами, алгебраическое выражение $\frac{6x^3-24x^2}{6x^2}$ удалось заменить более простым выражением — многочленом $x - 4$.

В то же время в примере 3 из § 18 не удалось разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$, т. е. выражение $\frac{8a^3+6a^2b-b}{2a^2}$ не удалось заменить более простым выражением, пришлось так и оставить его в виде алгебраической дроби.

Что же касается операции деления многочлена на многочлен, то мы о ней фактически ничего не говорили. Единственное, что мы можем сейчас сказать: один многочлен можно разделить на другой, если этот другой многочлен является одним из множителей в разложении первого многочлена на множители.

Например, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Значит, $x^3 - 1$ можно разделить на $x^2 + x + 1$, получится $x - 1$; $x^3 - 1$ можно разделить на $x - 1$, получится $x^2 + x + 1$.

5.24. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

алгебраическая дробь

Алгебраической дробью **называют отношение двух многочленов P и Q. При этом используют запись $\frac{P}{Q}$, где P — *числитель*, Q — *знаменатель алгебраической дроби*.**

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{2x^2}{y}, \quad \frac{8a^3+6a^2b-b}{2a^2}, \quad \frac{x+y}{x-y}.$$

Иногда алгебраическую дробь удается заменить многочленом. Например, как мы уже установили ранее,

$$\frac{6x^3-24x^2}{6x^2} = x - 4$$

(многочлен $6x^3 - 24x^2$ удалось разделить на $6x^2$, при этом в частном получается $x - 4$); мы также отмечали, что

$$\frac{x^3-1}{x^2+x+1} = x - 1.$$

Но так бывает сравнительно редко.

Впрочем, похожая ситуация уже встречалась вам — при изучении обыкновенных дробей. Например, дробь $\frac{24}{6}$ можно заменить целым числом 4, а дробь $\frac{40}{8}$ — целым числом 5. Однако дробь $\frac{32}{24}$ целым числом заменить не удается, хотя эту дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на число 8 — общий множитель числителя и знаменателя: $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$.

Точно так же *можно сокращать алгебраические дроби, разделив одновременно числитель и знаменатель дроби на их общий множитель*. А для этого надо разложить и числитель, и знаменатель дроби на множители. Здесь нам и понадобится все то, что мы так долго обсуждали в этой главе.

П р и м е р. Сократить алгебраическую дробь:

а) $\dfrac{12x^3y^4}{8x^2y^5}$; б) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$; в) $\dfrac{x^2-xy}{x^4-xy^3}$.

Р е ш е н и е. а) Найдем общий множитель для одночленов $12x^3y^4$ и $8x^2y^5$ так, как мы делали в § 20. Получим $4x^2y^4$. Тогда

$$12x^3y^4 = 4x^2y^4 \cdot 3x;\ 8x^2y^5 = 4x^2y^4 \cdot 2y.$$

Значит,

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{4x^2y^4 \cdot 3x}{4x^2y^4 \cdot 2y} = \frac{3x}{2y}.$$

Числитель и знаменатель заданной алгебраической дроби сократили на общий множитель $4x^2y^4$.

Решение этого примера можно записать по-другому:

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{12}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^5} = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{y} = \frac{3x}{2y}.$$

б) Чтобы сократить дробь, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Получим:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$$

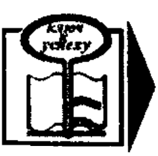
(дробь сократили на общий множитель $a + b$).

А теперь вернитесь к замечанию 2 из § 1. Видите, данное там обещание мы наконец-то смогли выполнить.

в) Имеем:

$$\frac{x^2-xy}{x^4-xy^3} = \frac{x(x-y)}{x(x^3-y^3)} = \frac{x(x-y)}{x(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{x^2+xy+y^2}.$$

(сократили дробь на общий множитель числителя и знаменателя, т. е. на $x(x-y)$). ◼



Итак, для того чтобы сократить алгебраическую дробь, нужно прежде всего разложить на множители ее числитель и знаменатель. Так что ваш успех в этом новом деле (сокращении алгебраических дробей) в основном зависит от того, как вы усвоили материал предыдущих параграфов этой главы.

§ 25. ТОЖДЕСТВА

В этом параграфе мы познакомимся еще с одним алгебраическим термином. Мы знаем, например, что

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2;$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

тождество

тождественно равные выражения

тождественное преобразование

Написанные равенства верны при любых значениях входящих в их состав переменных. Такие равенства в алгебре называют *тождествами*. Левую и правую части тождества называют выражениями, **тождественно равными** друг другу (или просто *тождественными*). Например, $a^2 - b^2$ и $(a - b)(a + b)$ — тождественно равные выражения. Всякую замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют **тождественным преобразованием** выражения.

Значит, все, чем мы занимались до сих пор: действия со степенями, с одночленами, с многочленами, — все это было изучением тождественных преобразований.

В математике часто бывает так, что, используя некоторый термин, вдруг обнаруживают, что к новой ситуации он становится не очень приспособленным, требует уточнения. Это относится и к термину «тождество». Для работы с многочленами данное выше определение — абсолютно точное. Однако уже для работы с алгебраическими дробями в понимании этого термина понадобится корректировка, т. е. придется сделать некоторые уточнения.

Рассмотрим алгебраическую дробь $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. Ее можно сократить на $x - 1$ — на общий множитель числителя и знаменателя. Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x-2}. \qquad (1)$$

Является ли это равенство тождеством? Введя выше этот термин, мы отметили, что тождество — это равенство с переменными, верное при *любых* значениях переменных. Но про равенство (1) этого сказать нельзя, оно не имеет смысла при $x = 1$, при $x = 2$, т. е. оно верно уже не при любых значениях переменной x. Указанные значения не являются допустимыми для выражений, входящих в состав равенства (1). Если же ограничиться только *допустимыми* значениями переменной x, то при любых таких значениях равенство (1) окажется верным.

Учитывая подобные ситуации, математики уточнили понятие тождества.

Определение. Тождество — это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных.

В этом смысле равенство (1) — тождество. Вот та корректировка понятия «тождество», о которой мы упоминали выше.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- В этой главе мы ввели новые (для вас) понятия математического языка:
  разложение многочлена на множители;
  алгебраическая дробь, сокращение алгебраической дроби;
  тождество, тождественно равные выражения, тождественное преобразование выражения.

- Вы познакомились со следующими приемами разложения многочлена на множители:
  вынесение общего множителя за скобки;
  группировка;
  использование формул сокращенного умножения;
  выделение полного квадрата.

ГЛАВА 6

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 26. КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

В конце главы 1 мы говорили о том, что в курсе алгебры нам с вами надо учиться описывать реальные ситуации словами (словесная модель), алгебраически (алгебраическая или, как чаще говорят математики, аналитическая модель), графически (графическая или геометрическая модель). Весь первый раздел учебника (главы 1–5) был посвящен изучению математического языка, с помощью которого описываются аналитические модели. Начиная с главы 6 мы будем изучать не только новые аналитические, но и графические (геометрические) модели. Они строятся с помощью координатной прямой, координатной плоскости. Эти понятия вам немного знакомы из курса математики 5–6 классов.

Прямую l, на которой выбрана начальная точка O (начало отсчета), масштаб (единичный отрезок, т. е. отрезок, длина которого считается равной 1) и положительное направление, называют ко-

ординатной прямой, или координатной осью (рис. 7); употребляют также термин «ось x».

координатная прямая

координата точки

Каждому числу соответствует единственная точка прямой. Например, числу 3,5 соответствует точка M (рис. 8), которая удалена от начала отсчета, т. е. от точки O, на расстояние, равное 3,5 (в заданном масштабе), и отложена от точки O в заданном (положительном) направлении. Числу -4 соответствует точка P (см. рис. 8), которая удалена от точки O на расстояние, равное 4, и отложена от точки O в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном заданному.

Верно и обратное: каждая точка координатной прямой соответствует единственному числу. Например, точка K, удаленная от точки O на расстояние 5,4 в положительном (заданном) направлении, соответствует числу 5,4, а точка N, удаленная от точки O на расстояние 2,1 в отрицательном направлении, соответствует числу $-2,1$ (см. рис. 8).

Указанные числа называют **координатами** соответствующих точек. Так, на рис. 8 точка K имеет координату 5,4; точка P — координату -4; точка M — координату 3,5; точка N — координату $-2,1$; точка O — координату 0 (нуль). Отсюда и происходит название — «координатная прямая». Образно выражаясь, координатная прямая — это густо заселенный дом, жильцы этого дома — точки, а координаты точек — это номера квартир, в которых живут точки-жильцы.

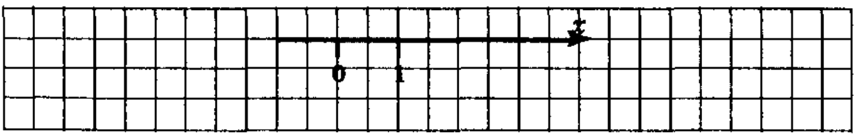


Рис. 7

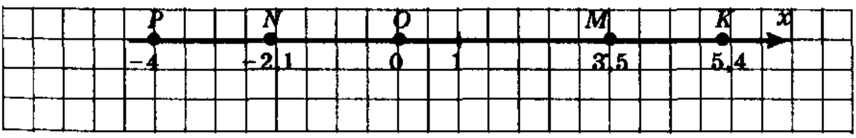


Рис. 8

Зачем нужна координатная прямая? Зачем характеризовать точку числом, а число — точкой? Есть ли в этом какая-либо польза? Да, есть.

Пусть, например, на координатной прямой даны две точки: A — с координатой a и B — с координатой b (обычно в таких случаях пишут короче: $A(a)$, $B(b)$). Пусть нам надо найти расстояние d между точками A и B. Оказывается, вместо того чтобы делать геометрические измерения, достаточно воспользоваться готовой формулой $d = |a - b|$ (вы изучали ее в 6 классе).

Так, на рисунке 8 имеем:

$$KM = |5{,}4 - 3{,}5| = |1{,}9| = 1{,}9;$$
$$PM = |-4 - 3{,}5| = |-7{,}5| = 7{,}5;$$
$$PN = |-4 - (-2{,}1)| = |-4 + 2{,}1| = |-1{,}9| = 1{,}9.$$

Стремясь к *лаконичности* рассуждений, математики договорились вместо длинной фразы «точка A координатной прямой, имеющая координату a», использовать короткую фразу: «точка a», и, соответственно, на чертеже рассматриваемую точку обозначать ее координатой. Так, на рисунке 9 изображена координатная прямая, на которой отмечены точки -4; $-2{,}1$; 0; 1; $3{,}5$; $5{,}4$.

Координатная прямая дает нам возможность свободно переходить с алгебраического языка на геометрический и обратно. Пусть, например, число a меньше числа b. На алгебраическом языке это записывается так: $a < b$; на геометрическом языке это означает, что точка a расположена на координатной прямой *левее* точки b. Впрочем, и алгебраический, и геометрический языки — это разновидности одного и того же математического языка, который мы с вами изучаем.

Познакомимся еще с несколькими элементами математического языка, которые связаны с координатной прямой.

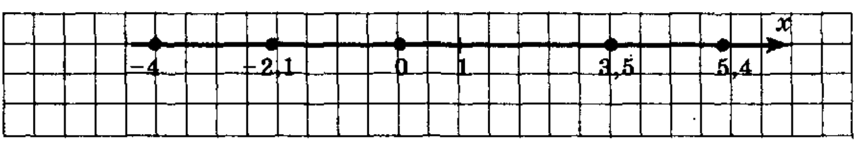


Рис. 9

1. Пусть на координатной прямой отмечена точка a. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой правее точки a, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 10). Это множество точек (чисел) называют **открытым лучом** и обозначают $(a, +\infty)$, где знак $+\infty$ читается: «плюс бесконечность»; оно характеризуется неравенством $x > a$ (под x понимается любая точка луча).

Обратите внимание: точка a открытому лучу <u>не принадлежит</u>. Если же эту точку надо присоединить к открытому лучу, то пишут $x \geqslant a$ или $[a, +\infty)$ (перед a ставят не круглую, а квадратную скобку), а на чертеже такую точку обозначают не светлым, как на рис. 10, а закрашенным кружком (рис. 11). Если про множество точек $(a, +\infty)$ говорят, что это — открытый луч, то для $[a, +\infty)$ употребляют термин луч (без прилагательного «открытый»).

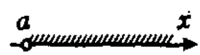


Рис. 10

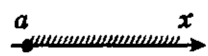


Рис. 11

2. Пусть на координатной прямой отмечена точка b. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой левее точки b, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 12). Это множество точек (чисел) также называют *открытым лучом* и обозначают $(-\infty, b)$, где знак $-\infty$ читается: «минус бесконечность». Оно характеризуется неравенством $x < b$.

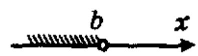


Рис. 12

Снова обращаем ваше внимание на то, что точка b открытому лучу не принадлежит. Если же мы эту точку хотим присоединить к открытому лучу, то будем писать $x \leqslant b$ или $(-\infty, b]$ и, соответственно, на чертеже точку b закрашивать (рис. 13); для $(-\infty, b]$ также будем употреблять термин *луч*.

Рис. 13

3. Пусть на координатной прямой отмечены точки a и b, причем $a < b$ (т. е. точка a расположена на прямой левее точки b). Рассмотрим все точки, которые лежат правее точки a, но левее точки b; отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 14). Это множество точек

Рис. 14

Рис. 15

(чисел) называют **интервалом** и обозначают (a, b). Оно характеризуется строгим двойным неравенством $a < x < b$ (под x понимается любая точка интервала).

Обратите внимание: интервал (a, b) есть *пересечение* (общая часть) двух открытых лучей $(-\infty, b)$ и $(a, +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 15.

Рис. 16

Если к интервалу (a, b) добавить его концы, т. е. точки a и b, то получится **отрезок** $[a, b]$ (рис. 16), который характеризуется нестрогим двойным неравенством $a \leqslant x \leqslant b$. Обратите внимание: в обозначении отрезка используют не круглые скобки, как это было в обозначении интервала, а квадратные; на чертеже точки a и b отмечены темными кружками, а не светлыми, как это было в случае интервала.

Рис. 17

Рис. 18

Отрезок $[a, b]$ есть пересечение (общая часть) двух лучей $(-\infty, b]$ и $[a, +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 17.

Рис. 19

А что получится, если к интервалу (a, b) добавить только один конец — только точку a (рис. 18) или только точку b (рис. 19)? Получится **полуинтервал**, который в первом случае обозначают $[a, b)$, а во втором — $(a, b]$ и который характеризуется с помощью двойных неравенств: $a \leqslant x < b$ — в первом случае, $a < x \leqslant b$ — во втором случае.

Итак, мы ввели пять новых терминов математического языка: луч, открытый луч, интервал, отрезок, полуинтервал. Есть и общий термин: **числовые промежутки**.

Сама координатная прямая также считается числовым промежутком; для нее используют обозначение $(-\infty, +\infty)$.

луч

открытый луч

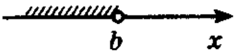
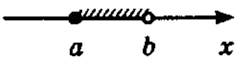
интервал

отрезок

полуинтервал

числовой промежуток

Сводная таблица числовых промежутков

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель
	$(a, +\infty)$	открытый луч	$x > a$
	$[a, +\infty)$	луч	$x \geqslant a$
	$(-\infty, b)$	открытый луч	$x < b$
	$(-\infty, b]$	луч	$x \leqslant b$
	(a, b)	интервал	$a < x < b$
	$[a, b]$	отрезок	$a \leqslant x \leqslant b$
	$[a, b)$	полуинтервал	$a \leqslant x < b$
	$(a, b]$	полуинтервал	$a < x \leqslant b$

§ 27. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

На координатной прямой «прописаны» точки — «жильцы», у каждой точки есть свой «номер дома» — ее координата. Если же точка берется в плоскости, то для ее «прописки» нужно указывать не только «номер дома», но и «номер квартиры». Напомним, как это делается.

Проведем две взаимно-перпендикулярные координатные прямые и будем считать началом отсчета на обеих прямых точку O. Тем самым на плоскости задана прямоу-

прямоугольная система координат

координатная плоскость

начало координат

координатные углы

абсцисса

ордината

гольная система координат (рис. 20), которая превращает обычную плоскость в **координатную**. Точку O называют **началом координат**, координатные прямые (ось x и ось y) называют **осями координат**, а прямые углы, образованные осями координат, называют **координатными углами**. Координатные углы нумеруют так, как показано на рисунке 20.

А теперь обратимся к рисунку 21, где изображена прямоугольная система координат и отмечена точка M. Проведем через нее прямую, параллельную оси y. Прямая пересекает ось x в некоторой точке, y этой точки есть координата — на оси x. Для точки, изображенной на рисунке 21, эта координата равна $-1,5$, ее называют **абсциссой точки** M. Далее проведем через точку M прямую, параллельную оси x. Прямая пересекает ось y в некоторой точке, у этой точки есть координата — на оси y. Для точки M, изображенной на рисунке 21, эта координата равна 2, ее называют **ординатой точки** M.

Коротко пишут так: $M(-1,5;\ 2)$. Абсциссу записывают на первом месте, ординату — на втором. Используют, если в этом есть необходимость, и другую форму записи: $x = -1,5$; $y = 2$.

Замечание 1. На практике для отыскания координат точки M обычно вместо прямых, параллельных осям координат и проходящих через точку M, строят отрезки этих прямых от точки M до осей координат (рис. 22).

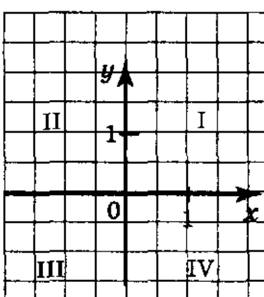


Рис. 20

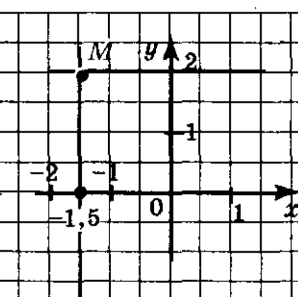


Рис. 21

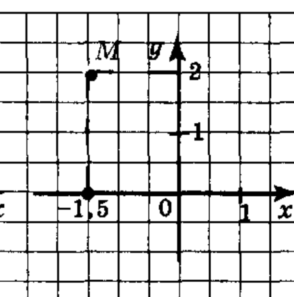


Рис. 22

Замечание 2. В предыдущем параграфе мы ввели разные обозначения для числовых промежутков. В частности, как мы условились, запись (3, 5) означает, что на координатной прямой рассматривается интервал с концами в точках 3 и 5. В настоящем же параграфе пару чисел мы рассматриваем как координаты точки; например, (3; 5) — это точка на координатной плоскости с абсциссой 3 и ординатой 5. Как же правильно по символической записи определить, о чем идет речь: об интервале или о координатах точки? Чаще всего это бывает ясно по тексту. А если не ясно? Обратите внимание на одну деталь: в обозначении интервала мы использовали запятую, а в обозначении координат — точку с запятой. Это, конечно, не очень существенное, но все-таки различие; будем его применять.

ось абсцисс

ось ординат

Учитывая введенные термины и обозначения, горизонтальную координатную прямую называют **осью абсцисс**, или **осью** x, а вертикальную координатную прямую — **осью ординат**, или **осью** y. Обозначения x, y используют обычно при задании на плоскости прямоугольной системы координат (см. рис. 20) и часто говорят так: дана система координат xOy. Впрочем, встречаются и другие обозначения: например, на рисунке 23 задана система координат tOs.

Алгоритм отыскания координат точки M, заданной в прямоугольной системе координат xOy

1. *Провести через точку M прямую, параллельную оси y, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью x — это будет абсцисса точки M.*
2. *Провести через точку M прямую, параллельную оси x, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью y — это будет ордината точки M.*

Именно так мы и действовали, находя координаты точки M на рисунке 21.

Если точка $M_1(x; y)$ принадлежит первому координатному углу, то $x > 0$, $y > 0$; если точка $M_2(x; y)$ принадлежит второму координатному углу, то $x < 0$, $y > 0$; если точка $M_3(x; y)$ принадлежит третьему координатному углу, то $x < 0$, $y < 0$; если точка $M_4(x; y)$ принадлежит четвертому координатному углу, то $x > 0$, $y < 0$ (рис. 24).

А что будет, если точка, координаты которой надо найти, лежит на одной из осей координат? Пусть точка A лежит на оси x, а точка B — на оси y (рис. 25). Проводить через точку A прямую, параллельную оси y, и находить точку пересечения этой прямой с осью x не имеет смысла, поскольку такая точка пересечения уже есть — это точка A, ее координата (абсцисса) равна 3. Точно так же не нужно проводить через точку A прямую, параллельную оси x, — этой прямой является сама ось x, которая пересекает ось y в точке O с координатой (ординатой) 0. В итоге для точки A получаем $A\,(3; 0)$. Аналогично для точки B получаем $B\,(0; -1{,}5)$. А для точки O имеем $O\,(0; 0)$.

Вообще, любая точка на оси x имеет координаты $(x; 0)$, а любая точка на оси y — координаты $(0; y)$

Итак, как находить координаты точки в координатной плоскости, мы обсудили. А как решать обратную задачу, т. е. как, задав координаты, построить соответствующую точку? Чтобы выработать алгоритм, проведем два вспомогательных, но в то же время важных рассуждения.

Первое рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси y и пересекающая ось x в точке с координатой (абсциссой) 4

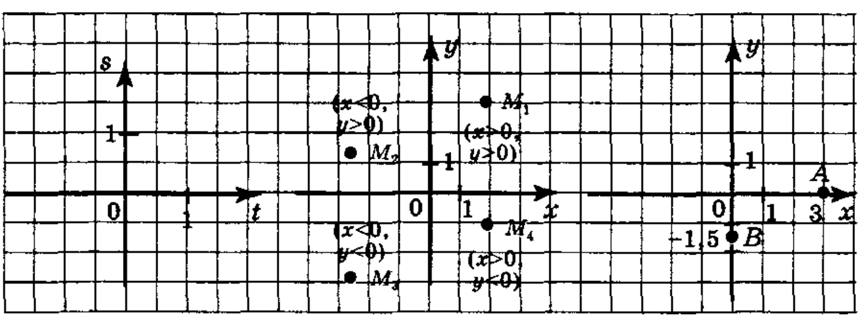


Рис. 23 Рис. 24 Рис. 25

(рис. 26). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет абсциссу 4. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем $M_1(4;\ 3)$, $M_2(4;\ 6)$, $M_3(4;\ -2)$. Иными словами, абсцисса любой точки M прямой l удовлетворяет условию $x = 4$. Говорят, что $x = 4$ — *уравнение прямой* l или что *прямая* l *удовлетворяет уравнению* $x = 4$.

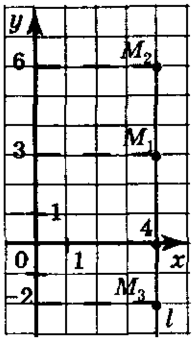
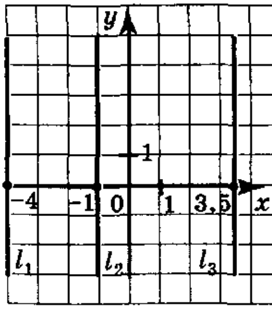


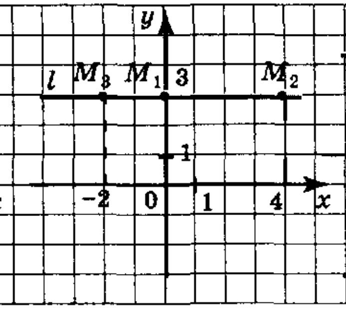
Рис. 26

На рисунке 27 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $x = -4$ (прямая l_1), $x = -1$ (прямая l_2), $x = 3{,}5$ (прямая l_3). А какая прямая удовлетворяет уравнению $x = 0$? Догадались? Ось y.

Второе рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке с координатой (ординатой) 3 (рис. 28). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет ординату 3. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем: $M_1(0;\ 3)$, $M_2(4;\ 3)$, $M_3(-2;\ 3)$. Иными словами, ордината любой точки M прямой l удовлетворяет условию $y = 3$. Говорят, что $y = 3$ — *уравнение прямой* l или что *прямая* l *удовлетворяет уравнению* $y = 3$.

На рисунке 29 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $y = -4$ (прямая l_1), $y = -1$ (прямая l_2), $y = 3{,}5$ (прямая l_3). А какая прямая удовлетворяет уравнению $y = 0$? Догадались? Ось x.





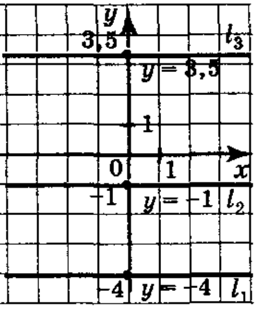


Рис. 27 Рис. 28 Рис. 29

обратите внимание

Заметим, что математики, стремясь к краткости речи, говорят «прямая $x = 4$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $x = 4$». Аналогично, они говорят «прямая $y = 3$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $y = 3$». Мы будем поступать точно так же.

Вернемся теперь к рисунку 21. Обратите внимание, что точка $M(-1{,}5; 2)$, которая там изображена, есть точка пересечения прямой $x = -1{,}5$ и прямой $y = 2$. Теперь, видимо, будет понятен алгоритм построения точки по заданным ее координатам.

Алгоритм построения точки $M(a; b)$ в прямоугольной системе координат xOy

1. *Построить прямую $x = a$.*
2. *Построить прямую $y = b$.*
3. *Найти точку пересечения построенных прямых — это и будет точка $M(a; b)$.*

Пример. В системе координат xOy построить точки: $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(4; 0)$, $D(0; -3)$.

Решение. Точка A есть точка пересечения прямых $x = 1$ и $y = 3$ (см. рис. 30).

Точка B есть точка пересечения прямых $x = -2$ и $y = 1$ (рис. 30). Точка C принадлежит оси x, а точка D — оси y (см. рис. 30).

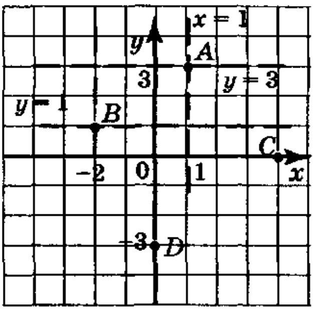


Рис. 30

В заключение параграфа заметим, что впервые прямоугольную систему координат на плоскости стал активно использовать для замены алгебраических моделей геометрическими французский философ Рене Декарт (1596–1650). Поэтому иногда говорят «декартова система координат», «декартовы координаты».

§ 28. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

Нам часто встречались уравнения вида $ax + b = 0$, где a, b — числа, x — переменная. Например, $5x - 8 = 0$, $x + 4 = 0$, $-7x - 11 = 0$ и т. д. Числа a, b (коэффициенты уравнения) могут быть любыми, исключает лишь случай, когда $a = 0$.

Уравнение $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, **называют линейным уравнением с одной переменной** x (или *линейным уравнением с одним неизвестным* x). Решить его, т. е. выразить x через a и b, мы с вами умеем:

линейное уравнение с одной переменной

$$ax = -b;$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Ранее мы отмечали, что довольно часто математической моделью реальной ситуации служит линейное уравнение с одной переменной или уравнение, которое после преобразований сводится к линейному. А теперь рассмотрим такую реальную ситуацию.

Из городов A и B, расстояние между которыми 500 км, навстречу друг другу вышли два поезда, каждый со своей постоянной скоростью. Известно, что первый поезд вышел на 2 ч раньше второго. Через 3 ч после выхода второго поезда они встретились. Чему равны скорости поездов?

Составим математическую модель задачи. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — скорость второго поезда. Первый был в пути 5 ч и, значит, прошел путь $5x$ км. Второй поезд был в пути 3 ч, т.е. прошел путь $3y$ км. Их встреча произошла в пункте C. На рисунке 31 представлена геометрическая модель ситуации. На алгебраическом языке ее можно описать так:

$$5x + 3y = 500$$

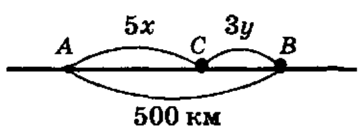


Рис. 31

или

$$5x + 3y - 500 = 0.$$

Эту математическую модель называют линейным уравнением с двумя переменными x, y.

Вообще,

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, — **линейное уравнение с двумя переменными x и y** (или с двумя неизвестными x и y).

линейное уравнение с двумя переменными

Вернемся к уравнению $5x + 3y = 500$. Замечаем, что если $x = 40$, $y = 100$, то $5 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 500$ — верное равенство. Значит, ответ на вопрос задачи может быть таким: скорость первого поезда 40 км/ч, скорость второго поезда 100 км/ч. Пару чисел $x = 40$, $y = 100$ называют *решением уравнения* $5x + 3y = 500$. Говорят также, что эта пара значений $(x;\ y)$ *удовлетворяет уравнению* $5x + 3y = 500$.

К сожалению, это решение не единственно (мы ведь все любим определенность, однозначность). В самом деле, возможен и такой вариант: $x = 64$, $y = 60$; действительно, $5 \cdot 64 + 3 \cdot 60 = 500$ — верное равенство. И такой: $x = 70$, $y = 50$ (поскольку $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ — верное равенство).

решение уравнения $ax + by + c = 0$

А вот, скажем, пара чисел $x = 80$, $y = 60$ решением уравнения не является, поскольку при этих значениях верного равенства не получается: $5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \neq 500$.

Вообще, **решением уравнения $ax + by + c = 0$** называют всякую пару чисел $(x;\ y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство. *Таких решений бесконечно много.*

Замечание. Вернемся еще раз к уравнению $5x + 3y = 500$, полученному в рассмотренной выше задаче. Среди бесконечного множества его решений имеются, например, и такие: $x = 100$, $y = 0$ (в самом деле, $5 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 500$ — верное числовое равенство);

$x = 118$, $y = -30$ (так как $5 \cdot 118 + 3 \cdot (-30) = 500$ — верное числовое равенство). Однако, являясь решениями уравнения, эти пары не могут служить решениями данной задачи, ведь скорость поезда не может быть равной нулю (тогда он не едет, а стоит на месте); тем более скорость поезда не может быть отрицательной (тогда он едет не навстречу другому поезду, как сказано в условии задачи, а в противоположную сторону).

Пример 1. Изобразить решения линейного уравнения с двумя переменными $x + y - 3 = 0$ точками в координатной плоскости xOy.

Решение. Подберем несколько решений заданного уравнения, т. е. несколько пар чисел, которые удовлетворяют уравнению: (3; 0), (2; 1), (1; 2) (0; 3), (– 2; 5).

Построим в координатной плоскости xOy точки $A\,(3; 0)$, $B\,(2; 1)$, $C\,(1; 2)$, $D\,(0; 3)$, $E\,(-2; 5)$ (рис. 32). Обратите внимание: все эти пять точек лежат на одной прямой l, проведем ее.

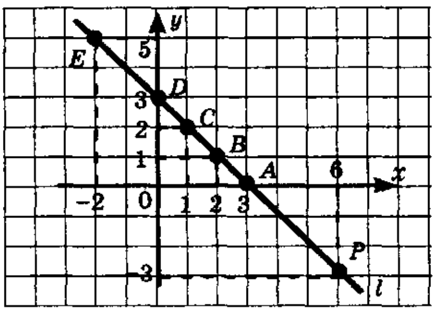


Рис. 32

Говорят, что прямая l является *графиком уравнения* $x + y - 3 = 0$. Говорят также, что прямая l — *геометрическая модель* уравнения $x + y - 3 = 0$ (или $x + y = 3$).

Итак, если пара чисел $(x;\ y)$ удовлетворяет уравнению $x + y - 3 = 0$, то точка $M\,(x;\ y)$ принадлежит прямой l; если точка $M\,(x;\ y)$ принадлежит прямой l, то пара $(x;\ y)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$. Например, точка $P\,(6; -3)$ принадлежит прямой l (рис. 32) и пара $(6; -3)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$ ◙

Подведем итоги:

Реальная ситуация (словесная модель)	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 3	$x + y = 3$ (линейное уравнение с двумя переменными)	прямая l на рисунке 32 (график линейного уравнения с двумя переменными)

Теорема 1. ***Графиком любого линейного уравнения $ax + by + c = 0$ является прямая.***

Доказать теорему нам с вами пока не под силу — это будет сделано позднее, в курсе геометрии. Но пользоваться теоремой мы, конечно, имеем право уже сейчас.

график уравнения

Кстати, догадываетесь ли вы, откуда появился термин «линейное уравнение»? Это фактически напоминание о геометрической модели — прямой линии, которая служит графиком уравнения.

Пример 2. Построить график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

Решение. Подберем несколько решений заданного уравнения:

1) (0; 3); в самом деле, если $x = 0$, $y = 3$, то $3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$ — верное равенство (в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ мы подставили значения $x = 0$, $y = 3$);

2) (– 2; 0); действительно, если $x = -2$, $y = 0$, то $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 6 = 0$ — верное равенство;

3) (2; 6); если $x = 2$, $y = 6$, то $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 0$ — верное равенство;

4) (4; 9); если $x = 4$, $y = 9$, то $3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 6 = 0$ — верное равенство.

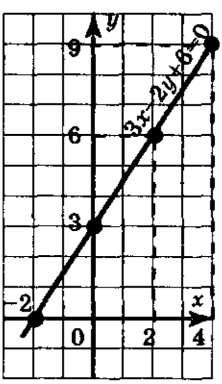


Рис. 33

Построим точки (0; 3), (– 2; 0), (2; 6), (4; 9) на координатной плоскости xOy. Они лежат на одной прямой, проведем ее (рис. 33). Эта прямая и есть график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$. ■

обратите внимание

Пример решен, хотя и верно, но очень нерационально. Почему? Давайте рассуждать.

1. Мы знаем, что графиком линейного уравнения $3x - 2y + 6 = 0$ является прямая (это утверждается в теореме). Чтобы провести прямую, достаточно указать две ее точки. Через две точки можно провести прямую и притом только одну — этому нас учит геометрия. Поэтому построенные выше четыре точки — это явный перебор. Достаточно было построить точки (0; 3) и (−2; 0) и с помощью линейки провести через них прямую.

2. Решения данного уравнения мы подбирали, т.е. угадывали. Угадать что-либо всегда труднее, чем действовать по определенному правилу. Нельзя ли было и здесь не угадывать, а действовать по какому-то правилу? Можно. Например, так. Дадим переменной x конкретное значение, например $x = 0$ (обычно пишут $x_1 = 0$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим: $3 \cdot 0 - 2y + 6 = 0$, т.е. $-2y + 6 = 0$. Из этого уравнения находим: $y = 3$ (обычно пишут $y_1 = 3$). Значит, если $x = 0$, то $y = 3$; пара (0; 3) — решение данного уравнения.

Дадим переменной x еще одно конкретное значение, например $x = -2$ (обычно пишут $x_2 = -2$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим: $3 \cdot (-2) - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y = 0$. Из этого уравнения находим $y = 0$ (обычно пишут $y_2 = 0$). Значит, если $x = -2$, то $y = 0$; пара (− 2; 0) — решение данного уравнения.

Вот теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$ (где, напомним, a, b, c — любые числа, но $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$

1. *Придать переменной x конкретное значение $x = x_1$; найти из уравнения $ax_1 + by + c = 0$ соответствующее значение y: $y = y_1$.*
2. *Придать переменной x другое значение $x = x_2$; найти из уравнения $ax_2 + by + c = 0$ соответствующее значение y: $y = y_2$.*
3. *Построить на координатной плоскости xOy две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.*
4. *Провести через эти две точки прямую — она и будет графиком уравнения $ax + by + c = 0$.*

Замечание. Чаще всего на первом шаге алгоритма берут значение $x = 0$. Второй шаг иногда немного изменяют: полагают $y = 0$ и находят соответствующее значение x.

П р и м е р 3. Построить график уравнения

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

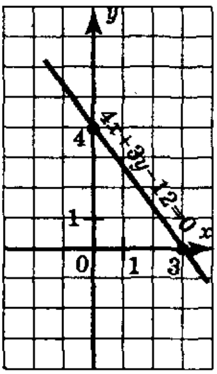


Рис. 34

Р е ш е н и е. Будем действовать по алгоритму (с учетом замечания).

1) Положим $x = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим: $4 \cdot 0 + 3y - 12 = 0$, $3y - 12 = 0$, $y = 4$.

2) Положим $y = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим: $4 \cdot x + 3 \cdot 0 - 12 = 0$, $4x - 12 = 0$, $x = 3$.

3) Построим на координатной плоскости xOy две точки: (0; 4) — она найдена на первом шаге алгоритма и (3; 0) — она найдена на втором шаге.

4) Проведем через точки (0; 4) и (3; 0) прямую. Это и есть искомый график (рис. 34).

П р и м е р 4. Иванов и Петров посадили на своих садовых участках яблони, причем Петров посадил яблонь в 2,5 раза больше, чем Иванов. На следующий год они увеличили число яблонь (подсадили новые саженцы), причем у Иванова стало яблонь в 3 раза больше, чем было, а у Петрова в 2 раза больше, чем было. В итоге у них вместе стало 16 яблонь. Сколько яблонь посадили Иванов и Петров в первый год?

Р е ш е н и е.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число яблонь, посаженных в первый год Ивановым, а y — число яблонь, посаженных в первый год Петровым. По условию задачи $y = 2,5x$. Здесь целесообразно умножить обе части уравнения на 2, получим: $2y = 5x$. Это уравнение перепишем в виде:

$$5x - 2y = 0. \qquad (1)$$

Далее, на второй год Иванов увеличил число саженцев на своем участке в 3 раза и, значит, у него стало $3x$ яблонь. Петров увеличил число саженцев на своем участке в 2 раза, т. е. у него стало $2y$ яблонь. По условию у обоих в сумме стало 16 яблонь, т. е. $3x + 2y = 16$. Перепишем это уравнение в виде

$$3x + 2y - 16 = 0. \qquad (2)$$

Математическая модель задачи готова, она состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными x и y — из уравнений (1) и (2). Обычно в таких случаях уравнения записывают одно под другим и используют специальный символ — фигурную скобку:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Интересующая нас пара чисел $(x; y)$ должна удовлетворять и уравнению (1), и уравнению (2), т. е. интересующая нас точка $(x; y)$ должна лежать как на прямой (1), так и на прямой (2). Что делать? Ответ очевиден: надо построить прямую (1), затем прямую (2) и, наконец, найти точку пересечения этих прямых.

1) строим график уравнения $5x - 2y = 0$. Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведем через точки (0; 0) и (2; 5) прямую l_1 (рис. 35).

2) строим график уравнения $3x + 2y - 16 = 0$. Если $x = 0$, то $y = 8$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведем через точки (0; 8) и (2; 5) прямую l_2 (см. 35).

3) прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

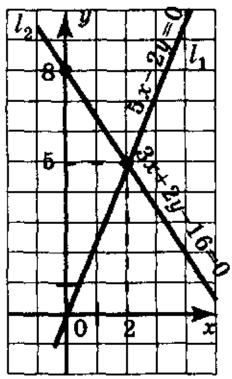


Рис. 35

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько яблонь посадили в первый год Иванов и Петров, т. е. чему равны x и y? Ответ на этот вопрос уже получен: $x = 2$, $y = 5$.

О т в е т: в первый год Иванов посадил 2 яблони, а Петров — 5 яблонь.

Как видите, не зря мы с вами учились строить графики линейных уравнений с двумя переменными. Это позволило нам от одной математической модели (алгебраической модели (3)) перейти к другой математической модели — геометрической (две прямые на координатной плоскости на рисунке 35), что и дало возможность довести решение до конца.

А можно ли работать непосредственно с моделью (3), не переходя к геометрической модели? Можно, но об этом речь впереди, в главе 8. Там, используя новые знания, мы снова вернемся к модели (3).

§ 29. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$, который мы сформулировали в § 28, при всей его четкости и определенности математикам не очень нравится. Обычно они выдвигают претензии к первым двум шагам алгоритма. Зачем, говорят они, дважды решать уравнение относительно переменной y: сначала $ax_1 + by + c = 0$, затем $ax_2 + by + c = 0$? Не лучше ли сразу выразить y из уравнения $ax + by + c = 0$, тогда легче будет проводить вычисления (и, главное, быстрее)? Давайте проверим.

Рассмотрим сначала уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ (см. пример 2 из § 28). Имеем:

$$2y = 3x + 6;$$

$$y = \frac{3x + 6}{2};$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3.$$

Придавая x конкретные значения, легко вычислить соответствующие значения y. Например, при $x = 0$ получаем $y = 3$; при $x = -2$ имеем $y = 0$; при $x = 2$ имеем $y = 6$; при $x = 4$ получаем: $y = 9$. Видите, как легко и быстро найдены точки (0; 3), (– 2; 0), (2; 6) и (4; 9), которые были выделены в примере 2 из § 28.

Точно так же уравнение $5x - 2y = 0$ (см. пример 4 из § 28) можно было преобразовать к виду $2y = 5x$ и далее $y = 2{,}5x$; нетрудно найти точки (0; 0) и (2; 5), удовлетворяющие этому уравнению. Наконец, уравнение $3x + 2y - 16 = 0$ из того же примера можно было преобразовать к виду $2y = 16 - 3x$ и далее $y = 8 - \frac{3}{2}x$. Из этого уравнения также легко найти точки (0; 8) и (2; 5), которые ему удовлетворяют.

Рассмотрим теперь указанные преобразования в общем виде. Имеем:

$$ax + by + c = 0; \qquad (1)$$

$$by = -ax - c;$$

$$y = \frac{-ax - c}{b};$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Введя обозначения $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = m$, получаем

$$y = kx + m.$$

Таким образом, *линейное уравнение* (1) *с двумя переменными x и y всегда можно преобразовать к виду*

$$y = kx + m, \qquad (2)$$

где k, m — числа (коэффициенты), причем $k \neq 0$.

Этот частный вид линейного уравнения будем называть **линейной функцией**.

С помощью равенства (2) легко, указав конкретное значение x, вычислить соответствующее значение y. Пусть, например, $y = 2x + 3$. Тогда:

если $x = 0$, то $y = 3$;
если $x = 1$, то $y = 5$;
если $x = -1$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = 9$ и т. д.

Обычно эти результаты оформляют в виде таблицы:

x	0	1	−1	3
y	3	5	1	9

Значения y из второй строки таблицы называют *значениями линейной функции* $y = 2x + 3$, соответственно, *в точках* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$.

В уравнении (1) переменные x и y равноправны, а в уравнении (2) — нет: конкретные значения мы придаем одной из них — переменной x, тогда как значение переменной y зависит от выбранного значения переменной x. Поэтому обычно говорят, что x — независимая переменная (или аргумент), y — зависимая переменная.

независимая переменная (аргумент)

зависимая переменная

линейная функция

график линейной функции

Обратите внимание: *линейная функция — это специальный вид линейного уравнения с двумя переменными.* Графиком уравнения $y = kx + m$, как всякого линейного уравнения с двумя переменными, является прямая — ее называют также **графиком линейной функции** $y = kx + m$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. ***Графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая.***

Пример 1. Построить график линейной функции $y = 2x + 3$.

Решение. Составим таблицу:

x	0	1
y	3	5

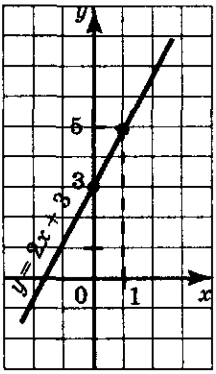


Рис. 36

Построим на координатной плоскости xOy точки (0; 3) и (1; 5) и проведем через них прямую. Это и есть график линейной функции $y = 2x + 3$ (рис. 36). ■

Замечание. В § 25 мы уже говорили о том, как обстоит дело в математике с новыми понятиями, новыми терминами. Часто бывает так: ввели новое понятие, работают с ним, но затем, по мере дальнейшего изучения математики, начинают осознавать, что введенное понятие требует уточнения, развития. Именно так обстояло дело с понятием «тождество». Точно так же обстоит дело и с понятием «функция». Мы еще довольно долго будем привыкать к нему, набираться опыта, работать с этим понятием пока не придем к строгому определению (это будет в 9 классе).

Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими собой линейные функции. Приведем примеры.

Первая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали подвозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?

Если пройдет x дней, то количество y угля на складе (в тоннах) выразится формулой $y = 500 + 30x$. Таким образом, линейная функция $y = 30x + 500$ есть математическая модель ситуации.

Теперь нетрудно установить, что:

при $x = 2$ имеем $y = 560$ (в уравнение $y = 30x + 500$ подставили $x = 2$ и получили $y = 560$);

при $x = 4$ имеем $y = 620$;

при $x = 10$ имеем $y = 800$.

Вторая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?

Здесь математической моделью ситуации является линейная функция $y = 500 - 30x$. С помощью этой модели нетрудно ответить на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 440$ (в уравнение $y = 500 - 30x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 440$);

если $x = 4$, то $y = 380$;

если $x = 10$, то $y = 200$.

Третья ситуация. Турист проехал на автобусе 15 км от пункта A до B, а затем продолжил движение из пункта B в том же направлении, но уже пешком, со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от A будет турист через 2 ч, через 4 ч, через 5 ч ходьбы?

Математической моделью ситуации является линейная функция $y = 15 + 4x$, где x — время ходьбы (в часах), y — расстояние от A (в километрах). С помощью этой модели отвечаем на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 23$ (в уравнение $y = 15 + 4x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 23$);

если $x = 4$, то $y = 31$;

если $x = 6$, то $y = 39$.

обратите внимание

На самом деле во всех математических моделях этих трех ситуаций мы допустили неточности, поскольку ничего не сказали о тех ограничениях на x, которые вытекают из смысла задачи. Ведь ясно, что в первой ситуации независимая переменная x

может принимать только значения 1, 2, 3, ..., поскольку x — число дней. Следовательно, уточненная математическая модель первой ситуации выглядит так:

$$y = 500 + 30x, \text{ где } x \text{ — натуральное число.}$$

Во второй ситуации независимая переменная x, обозначающая, как и в первой ситуации, число дней, может принимать только значения 1, 2, 3, ..., 16. Действительно, если $x = 16$, то по формуле $y = 500 - 30x$ находим: $y = 500 - 30 \cdot 16 = 20$. Значит, уже на 17-й день вывезти со склада 30 т угля не удастся, поскольку на складе к этому дню останется всего 20 т и процесс вывоза угля придется прекратить. Следовательно, уточненная математическая модель второй ситуации выглядит так:

$$y = 500 - 30x, \text{ где } x = 1, 2, 3, ..., 16.$$

В третьей ситуации независимая переменная x теоретически может принять любое неотрицательное значение (напр., значение $x = 0$, значение $x = 2$, значение $x = 3{,}5$ и т. д.), но практически турист не может шагать с постоянной скоростью без сна и отдыха сколько угодно времени. Значит, нам нужно было сделать разумные ограничения на x, скажем, $0 \leqslant x \leqslant 6$ (т. е. турист идет не более 6 ч).

Напомним, что геометрической моделью нестрогого двойного неравенства $0 \leqslant x \leqslant 6$ служит отрезок [0, 6] (рис. 37). Значит, уточненная модель третьей ситуации выглядит так: $y = 15 + 4x$, где x принадлежит отрезку [0, 6].

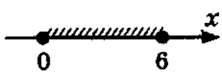


Рис. 37

Условимся вместо фразы «x принадлежит множеству X» писать $x \in X$ (читают: «элемент x принадлежит множеству X», $\in$ — *знак принадлежности*). Как видите, наше знакомство с математическим языком постоянно продолжается.

Если линейную функцию $y = kx + m$ надо рассматривать не при всех значениях x, а лишь для значений x из некоторого числового промежутка X, то пишут:

$$y = kx + m, \ x \in X.$$

Пример 2. Построить график линейной функции:

а) $y = -2x + 1$, $\quad x \in [-3, 2]$;

б) $y = -2x + 1$, $\quad x \in (-3, 2)$.

Решение. а) Составим таблицу для линейной функции $y = -2x + 1$:

x	-3	2
y	7	-3

Построим на координатной плоскости xOy точки $(-3; 7)$ и $(2; -3)$ и проведем через них прямую линию. Это — график уравнения $y = -2x + 1$. Далее, выделим отрезок, соединяющий построенные точки (рис. 38). Этот отрезок и есть график линейной функции $y = -2x + 1$, где $x \in [-3, 2]$.

Обычно говорят так: мы построили график линейной функции $y = -2x + 1$ на отрезке $[-3, 2]$.

б) Чем отличается этот пример от предыдущего? Линейная функция та же ($y = -2x + 1$), значит, и ее графиком служит та же прямая. Но — будьте внимательны! — на этот раз $x \in (-3, 2)$, т. е. значения $x = -3$ и $x = 2$ не рассматриваются, они не принадлежат интервалу $(-3, 2)$. Как мы отмечали концы интервала на коорди-

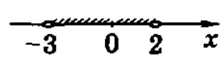


Рис. 39

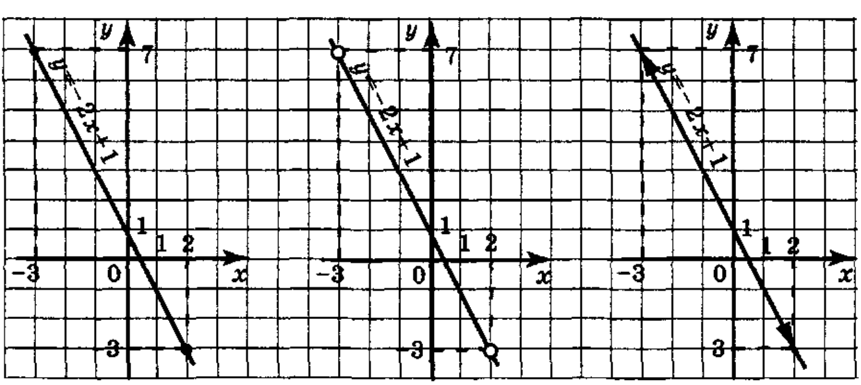


Рис. 38 Рис. 40 Рис. 41

натной прямой? Светлыми кружочками (рис. 39), об этом мы говорили в § 26. Точно так же и точки (– 3; 7) и (2; – 3) придется отметить на чертеже светлыми кружочками. Это будет напоминать нам о том, что берутся лишь те точки прямой $y = -2x + 1$, которые лежат между точками, отмеченными кружочками (рис. 40). Впрочем, иногда в таких случаях используют не светлые кружочки, а стрелки (рис. 41). Это непринципиально, главное, понимать, о чем идет речь. ◼

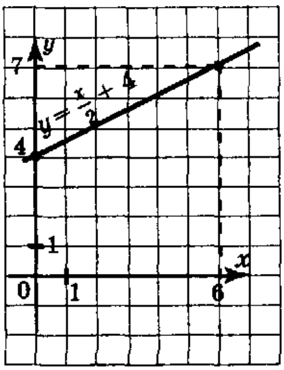


Рис. 42

П р и м е р 3. Найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции $y = \frac{x}{2} + 4$ на отрезке [0, 6].

Р е ш е н и е. Составим таблицу для линейной функции $y = \frac{x}{2} + 4$:

x	0	6
y	4	7

Построим на координатной плоскости xOy точки (0; 4) и (6; 7) и проведем через них прямую — график линейной функции $y = \frac{x}{2} + 4$ (рис. 42).

Нам нужно рассмотреть эту линейную функцию не целиком, а на отрезке [0, 6], т. е. для $x \in [0, 6]$. Соответствующий отрезок графика выделен на чертеже. Замечаем, что самая большая ордината у точек, принадлежащих выделенной части, равна 7 — это и есть *наибольшее значение* линейной функции $y = \frac{x}{2} + 4$ на отрезке [0, 6]. Обычно используют такую запись: $y_{\text{наиб.}} = 7$.

наибольшее значение линейной функции

Отмечаем, что самая маленькая ордината у точек, принадлежащих выделенной на рисунке 42 части прямой, равна 4 — это и есть *наименьшее значение* линейной функции $y = \frac{x}{2} + 4$ на отрезке [0, 6]. Обычно используют такую запись: $y_{\text{наим.}} = 4$.

наименьшее значение линейной функции

Пример 4. Найти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$ для линейной функции $y = -1{,}5x + 3{,}5$:

а) на отрезке $[1, 5]$; б) на интервале $(1, 5)$;

в) на полуинтервале $[1, 5)$; г) на луче $[0, +\infty)$;

д) на луче $(-\infty, 3]$.

Решение. Составим таблицу для линейной функции $y = -1{,}5x + 3{,}5$:

x	1	5
y	2	-4

Построим на координатной плоскости xOy точки $(1; 2)$ и $(5; -4)$ и проведем через них прямую (рис. 43–47). Выделим на построенной прямой часть, соответствующую значениям x из отрезка $[1, 5]$ (рис. 43), из интервала $(1, 5)$ (рис. 44), из полуинтервала $[1, 5)$ (рис. 45), из луча $[0, +\infty)$ (рис. 46), из луча $(-\infty, 3]$ (рис. 47).

а) С помощью рисунка 43 нетрудно сделать вывод, что $y_{наиб.} = 2$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 1$), а $y_{наим.} = -4$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 5$).

б) Используя рисунок 44, делаем вывод: ни наибольшего, ни наименьшего значений на заданном интервале у данной линейной функции нет. Почему? Дело в том, что, в отличие от предыдущего случая, оба конца отрезка, в которых как раз и достигались наибольшее и наименьшее значения, из рассмотрения исключены.

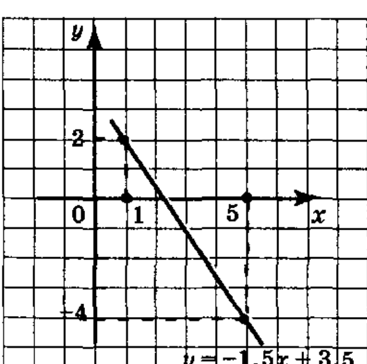


Рис. 43

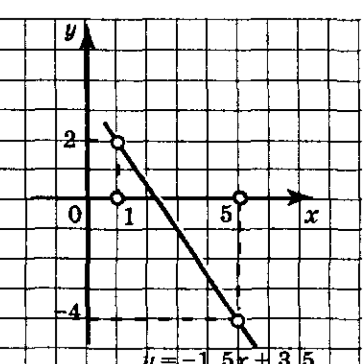


Рис. 44

в) С помощью рисунка 45 заключаем, что $y_{наиб.} = 2$ (как и в первом случае), а наименьшего значения у линейной функции нет (как и во втором случае).

г) Используя рисунок 46, делаем вывод: $y_{наиб.} = 3{,}5$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 0$), а $y_{наим.}$ не существует.

д) С помощью рисунка 47 делаем вывод: $y_{наим.} = -1$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 3$), а $y_{наиб.}$ не существует.

Пример 5. Построить график линейной функции $y = 2x - 6$. С помощью графика ответить на следующие вопросы:

а) при каком значении x будет $y = 0$?

б) при каких значениях x будет $y > 0$?

в) при каких значениях x будет $y < 0$?

Решение. Составим таблицу для линейной функции $y = 2x - 6$:

x	0	3
y	−6	0

Через точки (0; − 6) и (3; 0) проведем прямую — график функции $y = 2x - 6$ (рис. 48).

а) $y = 0$ при $x = 3$. График пересекает ось x в точке $x = 3$, это и есть точка с ординатой $y = 0$.

б) $y > 0$ при $x > 3$. В самом деле если $x > 3$, то прямая расположена выше оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой положительны.

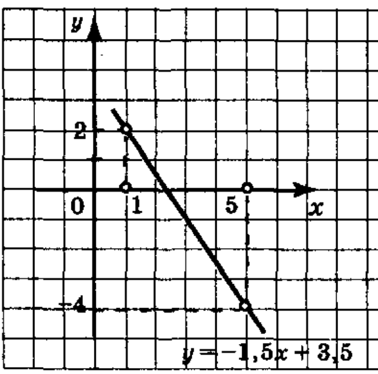


Рис. 45

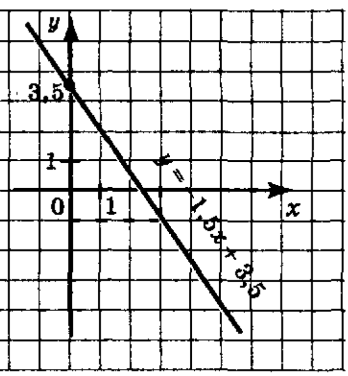


Рис. 46

в) $y < 0$ при $x < 3$. В самом деле если $x < 3$, то прямая расположена ниже оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой отрицательны. ■

обратите внимание

Обратите внимание, что в этом примере мы с помощью графика решили:

а) уравнение $2x - 6 = 0$ (получили $x = 3$);

б) неравенство $2x - 6 > 0$ (получили $x > 3$);

в) неравенство $2x - 6 < 0$ (получили $x < 3$).

Замечание. В русском языке часто один и тот же объект называют по-разному, например: «дом», «здание», «сооружение», «коттедж», «особняк», «барак», «хибара», «избушка». В математическом языке ситуация примерно та же. Скажем, равенство с двумя переменными $y = kx + m$, где k, m — конкретные числа, можно назвать линейной функцией, можно назвать линейным уравнением с двумя переменными x и y (или с двумя неизвестными x и y), можно назвать формулой, можно назвать соотношением, связывающим x и y, можно, наконец, назвать зависимостью между x и y. Это неважно, главное, понимать, что во всех случаях речь идет о математической модели $y = kx + m$.

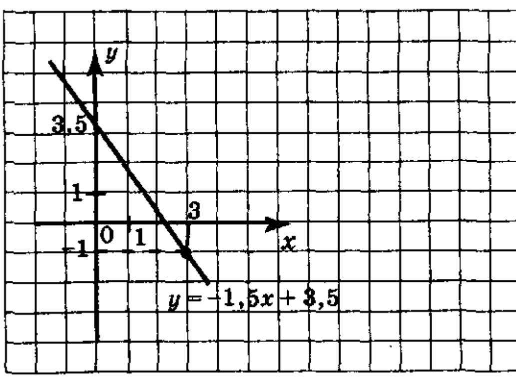


Рис. 47

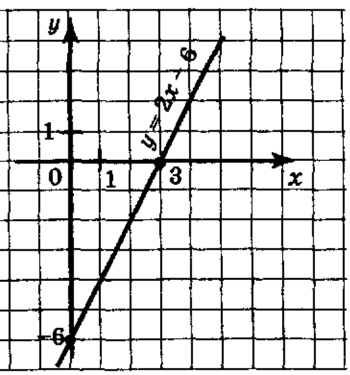


Рис. 48

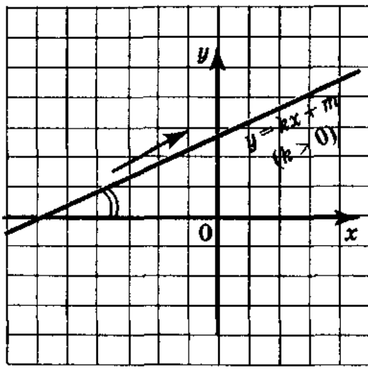


Рис. 49, *а*

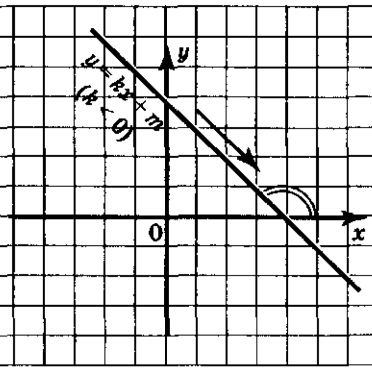


Рис. 49, *б*

возрастание
убывание

Рассмотрим график линейной функции, изображенный на рисунке 49, а. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика все время увеличиваются, мы как бы «поднимаемся в горку». В таких случаях математики употребляют термин *возрастание* и говорят так: ***если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + m$ возрастает.***

Рассмотрим график линейной функции, изображенный на рисунке 49, *б*. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика все время уменьшаются, мы как бы «спускаемся с горки». В таких случаях математики употребляют термин *убывание* и говорят так: ***если $k < 0$, то линейная функция $y = kx + m$ убывает.***

§ 30. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ И ЕЕ ГРАФИК

Среди линейных функций $y = kx + m$ особо выделяют случай, когда $m = 0$; в этом случае линейная функция принимает вид $y = kx$ и ее называют **прямой пропорциональностью**. Это название объясняется тем, что две величины y и x называют **прямо пропорциональными**, если их отношение равно конкретному числу, отличному от нуля. Здесь $\frac{y}{x} = k$, это число k называют **коэффициентом пропорциональности.**

прямая пропорциональность
прямо пропорциональные величины
коэффициент пропорциональности

Многие реальные ситуации моделируются с помощью прямой пропорциональности. Например, путь s и время t при постоянной скорости, 20 км/ч связаны зависимостью $s = 20t$; это — прямая пропорциональность, причем $k = 20$. Другой пример: стоимость y и число x батонов хлеба по цене 5 руб. за батон связаны зависимостью $y = 5x$; это — прямая пропорциональность, где $k = 5$.

Теорема 3. ***Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.***

Доказательство. Осуществим его в два этапа.

1. $y = kx$ — частный случай линейной функции, а графиком линейной функции является прямая; обозначим ее через l.

2. Пара $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяет уравнению $y = kx$, а потому точка $(0;\ 0)$ принадлежит графику уравнения $y = kx$, т. е. прямой l.

Следовательно, прямая l проходит через начало координат. Теорема доказана.

Надо уметь переходить не только от аналитической модели $y = kx$ к геометрической (графику прямой пропорциональности), но и от геометрической модели к аналитической. Рассмотрим, например, прямую на координатной плоскости xOy, изображенную на рисунке 50. Она является графиком прямой пропорциональности, нужно лишь найти значение коэффициента k. Так как $k = \frac{y}{x}$, то достаточно взять любую точку на прямой и найти отношение ординаты этой точки к ее абсциссе. Прямая проходит через точку $P(3;\ 6)$, а для этой точки имеем: $\frac{6}{3} = 2$. Значит, $k = 2$, а потому заданная прямая линия служит графиком прямой пропорциональности $y = 2x$.

График линейной функции $y = kx$ обычно строят так: берут точку $(1;\ k)$ (если $x = 1$, то из равенства $y = kx$ находим, что $y = k$)

угловой коэффициент

и проводят прямую через эту точку и начало координат. Впрочем, в случае необходимости точку $(1;\ k)$ можно заменить другой точкой, более удобной. На рисунке 51 изображены графики линейных функций $y = x$ (*прямая* l_1), $y = 2x$ (*прямая* l_2), $y = \frac{x}{3}$ (*прямая* l_3; здесь не очень удобно брать точку $\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$, мы взяли точку $(3;\ 1)$), $y = -2x$ (*прямая* l_4).

Обратите внимание: от коэффициента пропорциональности зависит угол, который построенная прямая образует с положительным направлением оси x. Если $k > 0$, то этот угол острый (так обстоит дело на рис. 51 с прямыми l_1, l_2, l_3); если $k < 0$, то этот угол тупой (так обстоит дело на рис. 51 с прямой l_4). Далее, если $k > 0$, то чем больше k, тем больше угол. Так, на рисунке 51 для прямой l_3 имеем $k = \frac{1}{3}$, для прямой l_1 имеем $k = 1$, для прямой l_2 имеем $k = 2$; при увеличении коэффициента k увеличивается и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k в записи $y = kx$ называют не только коэффициентом прямой пропорциональности, но и **угловым коэффициентом**.

На рисунке 52 изображены графики линейных функций $y = 2x - 4$, $y = 2x + 6$. Оба они параллельны графику прямой

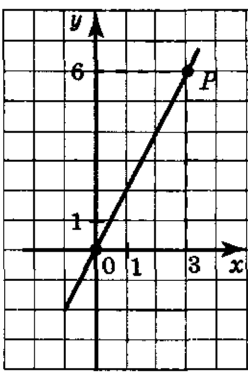


Рис. 50

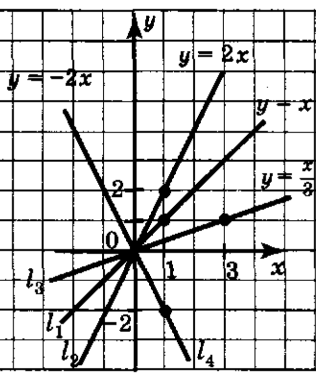


Рис. 51

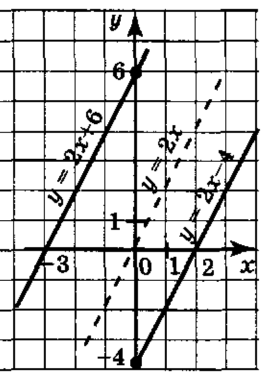


Рис. 52

пропорциональности $y = 2x$, только первая прямая ($y = 2x - 4$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом вниз на 4 единицы масштаба, а вторая прямая ($y = 2x + 6$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом вверх на 6 единиц масштаба.

Справедлив следующий общий результат, который мы оформим в виде теоремы.

Теорема 4. ***Прямая, служащая графиком линейной функции $y = kx + m$, параллельна прямой, служащей графиком прямой пропорциональности $y = kx$.***

Вследствие этого коэффициент k в записи линейной функции $y = kx + m$ также называют *угловым коэффициентом*. ***Если $k > 0$, то прямая $y = kx + m$ образует с положительным направлением оси x острый угол*** (рис. 49, *а*), а ***если $k < 0$, — тупой угол*** (рис. 49, *б*).

§ 31. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Вернемся еще раз к графикам линейных функций $y = 2x - 4$ и $y = 2x + 6$, представленным на рисунке 51. Мы уже отмечали (в § 30), что эти две прямые параллельны прямой $y = 2x$, а значит, параллельны друг другу. Признаком параллельности служит равенство угловых коэффициентов ($k = 2$ для всех трех прямых: и для $y = 2x$, и для $y = 2x - 4$, и для $y = 2x + 6$). Если же угловые коэффициенты различны, как, например, у линейных функций $y = 2x$ и $y = 3x + 1$, то прямые, служащие их графиками, не параллельны, и тем более не совпадают. Следовательно, указанные прямые пересекаются. Вообще, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. ***Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Если угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны, то прямые, служащие графиками линейных функций, параллельны (и даже совпадают при условии $m_1 = m_2$). Если же $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются.***

Пример 1. Найти точку пересечения прямых:

а) $y = 2x - 3$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$;

б) $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$.

Р е ш е н и е. а) Для линейной функции $y = 2x - 3$ имеем:

x	0	2
y	-3	1

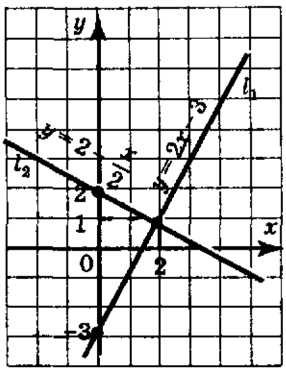


Рис. 53

Прямая l_1, служащая графиком линейной функции $y = 2x - 3$, проведена на рисунке 53 через точки $(0; -3)$ и $(2; 1)$.

Для линейной функции $y = 2 - \frac{x}{2}$ имеем:

x	0	2
y	2	1

Прямая l_2, служащая графиком линейной функции $y = 2 - \frac{x}{2}$, проведена на рисунке 53 через точки $(0; 2)$ и $(2; 1)$.

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $(2; 1)$.

б) Эта задача некорректна! В самом деле, линейные функции $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ имеют один и тот же угловой коэффициент ($k = -3$), значит, прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ параллельны, т. е. точки пересечения у них нет. ■

П р и м е р 2. Найти точку пересечения прямых $y = 4x + 7$ и $y = -2x + 7$.

Р е ш е н и е. Здесь можно обойтись без чертежа. Будем рассуждать так. Во-первых, угловые коэффициенты прямых различны ($k_1 = 4$, $k_2 = -2$), значит, прямые пересекаются в одной точке.

Во-вторых, как одна, так и другая прямая проходит через точку $(0; 7)$ (вы обратили внимание, что $m_1 = m_2 = 7$?).

Следовательно, $(0; 7)$ и есть искомая точка пересечения. ■

Вообще, *прямые* $y = k_1x + m$ *и* $y = k_2x + m$, *где* $k_1 \neq k_2$, *пересекаются в точке* $(0; m)$.

Завершая главу 6, обратим внимание на характерную особенность математического языка: в нем отсутствует противопоставление между тем, что относится к алгебре, и тем, что относится к геометрии. Во многих фразах, как вы, наверное, заметили, одновременно встречаются элементы алгебраического и геометрического языков — составных частей единого математического языка. Так, мы говорим: точка 3, прямая $x = 2$, прямая $y = -5$, прямая $y = 2x + 3$, отрезок $[3, 7]$, луч $[-2, +\infty]$ и т.п. А в § 31 мы получили, пожалуй, наиболее яркие образцы свободного оперирования алгебраическим и геометрическим языками в одном суждении — они представлены в приведенной таблице.

Линейные функции	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = k_1x + m_1$	1) $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$	1) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ параллельны
	2) $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$	2) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ совпадают
$y = k_2x + m_2$	3) $k_1 \neq k_2$	3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ пересекаются

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими терминами:
координатная прямая, координатная ось, координата точки на прямой;
прямоугольная система координат на плоскости (декартова система координат);
координатная плоскость, координатные углы, начало координат;
абсцисса, ордината, ось абсцисс, ось ординат;
числовой промежуток;
луч, открытый луч;
отрезок, интервал, полуинтервал;
линейное уравнение с двумя переменными
$(ax + by + c = 0)$;

решение линейного уравнения с двумя переменными;
независимая переменная (аргумент);
зависимая переменная;
линейная функция ($y = kx + m$);
прямая пропорциональность ($y = kx$);
угловой коэффициент (для линейной функции $y = kx + m$).

- Мы ввели следующие <u>обозначения</u>:

xOy (для прямоугольной системы координат на плоскости);

$M(x)$ (для обозначения координаты точки M на координатной прямой);

$M(x; y)$ (для обозначения координат точки M на координатной плоскости);

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ (для лучей на координатной прямой);

(a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ (для интервалов, отрезков и полуинтервалов на координатной прямой);

$y_{\text{наиб.}}$, $y_{\text{наим.}}$ (для наибольшего и наименьшего значений линейной функции на заданном числовом промежутке).

- Вы познакомились с тремя новыми <u>математическими моделями</u>:

$y = kx$;
$y = kx + m$;
$ax + by + c = 0$.

- Мы получили следующие <u>результаты</u>:

графиком уравнения $x = a$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку a на оси абсцисс; в частности, $x = 0$ — уравнение оси ординат;

графиком уравнения $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку b на оси ординат; в частности, $y = 0$ — уравнение оси абсцисс;

графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат;
графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая;
графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$ является прямая.

● **Мы разработали следующие алгоритмы:**
алгоритм отыскания координат точки M, заданной в прямоугольной системе координат xOy;
алгоритм построения точки M $(a; b)$ в прямоугольной системе координат xOy;
алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИЯ $Y = X^2$

§ 32. ФУНКЦИЯ $Y = X^2$ И ЕЕ ГРАФИК

В главе 6 мы ввели термин «линейная функция», понимая под этим линейное уравнение вида $y = kx + m$ с двумя переменными x, y. Правда, переменные x, y, фигурирующие в этом уравнении (в этой математической модели) считались неравноправными: x — независимая переменная (аргумент), которой мы

могли придавать любые значения, независимо ни от чего; y — зависимая переменная, поскольку ее значение зависело от того, какое значение переменной x было выбрано. Но тогда возникает естественный вопрос: а не встречаются ли математические модели такого же плана, но такие, у которых y выражается через x не по формуле $y = kx + m$, а каким-то иным способом? Ответ ясен: конечно, встречаются. Если, например, x — сторона квадрата, а y — его площадь, то $y = x^2$. Если x — сторона куба, а y — его объем, то $y = x^3$. Если x — одна сторона прямоугольника, площадь которого равна 100 см^2, а y — другая его сторона, то $y = \frac{100}{x}$. Поэтому, естественно, что в математике не ограничиваются изучением модели $y = kx + m$, приходится изучать и модель $y = x^2$, и модель $y = x^3$, и модель $y = \frac{100}{x}$, и многие другие модели, имеющие такую же структуру: в левой части равенства находится переменная y, а в правой — какое-то выражение с переменной x. Для таких моделей сохраняют термин «функция», опуская прилагательное «линейная».

В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = x^2$ и построим ее график.

Дадим независимой переменной x несколько конкретных значений и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y (по формуле $y = x^2$):

если $x = 0$, то $y = 0^2 = 0$;
если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;
если $x = 2$, то $y = 2^2 = 4$;
если $x = 3$, то $y = 3^2 = 9$;
если $x = -1$, то $y = (-1)^2 = 1$;
если $x = -2$, то $y = (-2)^2 = 4$;
если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$;

Короче говоря, мы составили следующую таблицу:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9

Построим найденные точки (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (−1; 1), (−2; 4), (−3; 9), на координатной плоскости xOy (рис. 54, *а*). Эти точки расположены на некоторой линии, начертим ее (рис. 54, *б*). Эту линию называют параболой.

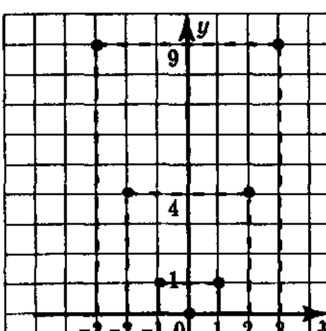


Рис. 54, *а*

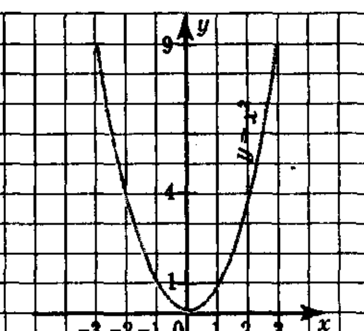


Рис. 54, *б*

Конечно, в идеале надо было бы дать аргументу x все возможные значения, вычислить соответствующие значения переменной y и построить полученные точки $(x; y)$. Тогда график был бы абсолютно точным, безупречным. Однако это нереально, ведь таких точек бесконечно много. Поэтому математики поступают так: берут конечное множество точек, строят их на координатной плоскости и смотрят, какая линия намечается этими точками. Если контуры этой линии проявляются достаточно отчетливо (как это было у нас, скажем, в примере 1 из § 28), то эту линию проводят. Возможны ли ошибки? Не без этого. Поэтому и надо все глубже и глубже изучать математику, чтобы были средства избегать ошибок.

Попробуем, глядя на рисунок 54, описать геометрические свойства параболы.

парабола

ось симметрии параболы

ветви параболы

вершина параболы

Во-первых, отмечаем, что парабола выглядит довольно красиво, поскольку обладает симметрией. В самом деле, если провести выше оси x любую прямую, параллельную оси x, то эта прямая пересечет параболу в двух точках, расположенных на равных расстояниях от оси y, но по разные стороны от нее (рис. 55). Кстати, то же можно сказать и о точках, отмеченных на рисунке 54, *а*: (1; 1) и (−1; 1); (2; 4) и (−2; 4); (3; 9) и (−3; 9). Говорят, что ось y является **осью симметрии параболы** $y = x^2$ или что *парабола симметрична относительно оси* y.

Во-вторых, замечаем, что ось симметрии как бы разрезает параболу на две части, которые обычно называют **ветвями параболы**.

В-третьих, отмечаем, что у параболы есть особая точка, в которой смыкаются обе ветви и которая лежит на оси симметрии параболы — точка (0; 0). Учитывая ее особенность, ей присвоили специальное название — **вершина параболы**.

В-четвертых, когда одна ветвь параболы соединяется в вершине с другой ветвью, это происходит плавно, без излома; парабола как бы «прижимается» к оси абсцисс. Обычно говорят: *парабола касается оси абсцисс*.

Теперь попробуем, глядя на рисунок 54, описать некоторые свойства функции $y = x^2$.

Во-первых, замечаем, что $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

Во-вторых, отмечаем, что $y_{\text{наим.}} = 0$, а $y_{\text{наиб.}}$ не существует.

В-третьих, замечаем, что *функция $y = x^2$ убывает на луче* $(-\infty, 0]$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «спускаемся с горки» (см. рис. 55). *Функция $y = x^2$ возрастает на луче* $[0, +\infty)$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «поднимаемся в горку» (см. рис. 55).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2$:

а) на отрезке $[1, 3]$;

б) на отрезке $[-3, -1{,}5]$;

в) на отрезке $[-3, 2]$.

Решение. а) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[1, 3]$ (рис. 56). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим.}} = 1$ (при $x = 1$), $y_{\text{наиб.}} = 9$ (при $x = 3$).

б) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3, -1{,}5]$ (рис. 57). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим.}} = 2{,}25$ (при $x = -1{,}5$), $y_{\text{наиб.}} = 9$ (при $x = -3$).

в) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3, 2]$ (рис. 58). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим.}} = 0$ (при $x = 0$), $y_{\text{наиб.}} = 9$ (при $x = -3$).

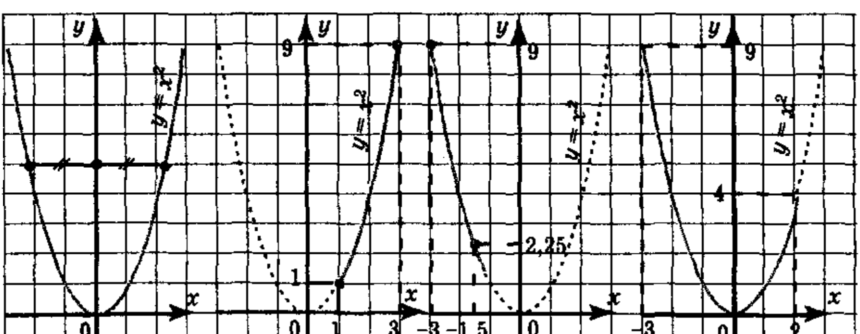


Рис. 55 Рис. 56 Рис. 57 Рис. 58

Совет. Чтобы каждый раз не строить график функции $y = x^2$ по точкам, вырежьте из плотной бумаги шаблон параболы. С его помощью вы будете очень быстро чертить параболу.

Замечание. Предлагая вам заготовить шаблон параболы, мы как бы уравниваем в правах функцию $y = x^2$ и линейную функцию $y = kx + m$. Ведь графиком линейной функции является прямая, а для изображения прямой используется обычная линейка — это и есть шаблон графика функции $y = kx + m$. Так пусть у вас будет и шаблон графика функции $y = x^2$.

Пример 2. Найти точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

Решение. Построим в одной системе координат параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$ (рис. 59). Они пересекаются в точках A и B, причем по чертежу нетрудно найти координаты этих точек A и B: для точки A имеем: $x = -1$, $y = 1$, а для точки B имеем: $x = 2$, $y = 4$.

Ответ: парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в двух точках: $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Важное замечание. До сих пор мы с вами довольно смело делали выводы с помощью чертежа. Однако математики не слишком доверяют чертежам. Обнаружив на рисунке 59 две точки пересечения параболы и прямой и определив с помощью рисунка координаты этих точек,

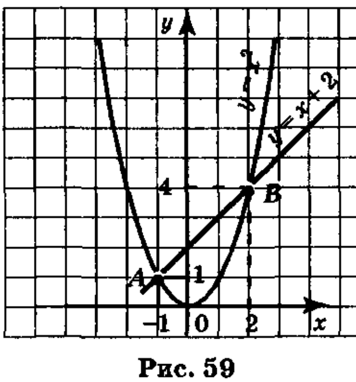


Рис. 59

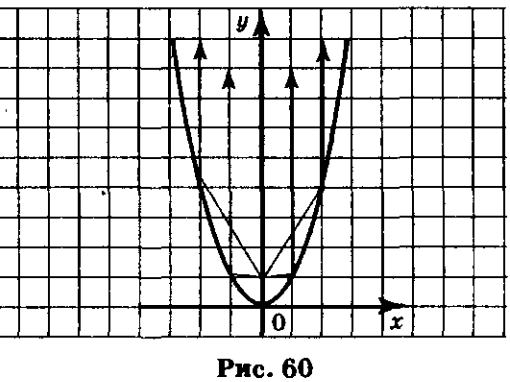


Рис. 60

математик обычно проверяет себя: на самом ли деле точка $(-1;\ 1)$ лежит как на прямой, так и на параболе; действительно ли точка $(2;\ 4)$ лежит и на прямой, и на параболе? Для этого нужно подставить координаты точек A и B в уравнение прямой и в уравнение параболы, а затем убедиться, что и в том, и в другом случае получится верное равенство. В примере 2 в обоих случаях получатся верные равенства. Особенно часто производят такую проверку, когда сомневаются в точности чертежа.

В заключение отметим одно любопытное свойство параболы, открытое и доказанное совместно физиками и математиками. Если рассматривать параболу $y = x^2$ как экран, как отражающую поверхность, а в точке $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ поместить источник света, то лучи, отражаясь от параболы-экрана, образуют параллельный пучок света (рис. 60). Точку $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ называют *фокусом параболы*. Эта идея используется в автомобилях: отражающая поверхность фары имеет параболическую форму, а лампочку помещают в фокусе — тогда свет от фары распространяется достаточно далеко.

§ 33. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Подытожим наши знания о графиках функций. Мы с вами научились строить графики следующих функций:

$y = b$ (прямую, параллельную оси x);

$y = kx$ (прямую, проходящую через начало координат);

$y = kx + m$ (прямую);

$y = x^2$ (параболу).

Знание этих графиков позволит нам в случае необходимости заменить аналитическую модель геометрической (графической), например, вместо модели $y = x^2$ (которая представляет собой равенство с двумя переменными x и y) рассматривать параболу в координатной плоскости. В частности, это иногда полезно для решения уравнений. Как это делается, обсудим на нескольких примерах.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение. Рассмотрим две функции: $y = x^2$, $y = x + 2$, построим их графики и найдем точки пересечения графиков. Эту задачу мы с вами уже решали (см. пример 2 из § 32 и, соответственно, рис. 59). Парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Как же найти корни уравнения $x^2 = x + 2$, т. е. те значения x, при которых выражения x^2 и $x + 2$ принимают одинаковые числовые значения? Очень просто, эти значения уже найдены: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Это абсциссы точек A и B, в которых пересекаются построенные графики.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Фактически мы использовали следующий алгоритм:

1. Ввели в рассмотрение функции $y = x^2$, $y = x + 2$ (для другого уравнения будут, разумеется, иные функции).

2. Построили в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = x + 2$.

3. Нашли точки пересечения графиков.

4. Нашли абсциссы точек пересечения — это и есть корни уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - x + 4 = 0$.

Решение. Здесь придется дополнить выработанный алгоритм еще одним шагом (подготовительным шагом): надо переписать уравнение в виде, для которого имеется алгоритм. Этот вид таков: $x^2 = x - 4$. Теперь все в порядке, действуем в соответствии с алгоритмом.

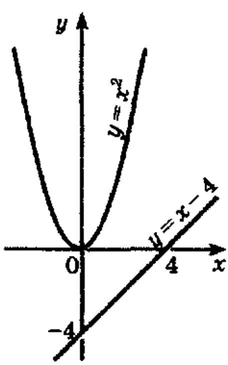


Рис. 61

1) Введем две функции: $y = x^2$, $y = x - 4$.

2) Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x - 4$ (рис. 61).

3) Точек пересечения у построенных параболы и прямой нет.

Как вы думаете, что означает этот геометрический факт для данной алгебраической задачи (для данного уравнения)? Догадались? А теперь сопоставьте свою догадку с тем, что ниже записано в ответе.

Ответ: уравнение не имеет корней.

Замечание. В § 23 мы уже говорили о том, что существуют так называемые квадратные уравнения — уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$. Они решаются по специальным формулам для отыскания корней, но этих формул мы пока не знаем. Тем не менее некоторые квадратные уравнения мы уже решили. Так, в § 23 мы решили уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$ методом разложения на множители. А в настоящем параграфе мы решили еще два квадратных уравнения — графическим методом. Это уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ (см. пример 1; правда, там уравнение было записано по-другому: $x^2 = x + 2$ — но вы же понимаете, что это то же самое) и уравнение $x^2 - x + 4 = 0$ (см. *пример* 2).

§ 34. ЧТО ОЗНАЧАЕТ В МАТЕМАТИКЕ ЗАПИСЬ $y = f(x)$

Изучая какой-либо реальный процесс, обычно обращают внимание на две величины, участвующие в процессе (в более сложных процессах участвуют не две величины, а три, четыре и т.д., но мы пока такие процессы не рассматриваем): одна из них меняется как бы сама по себе, независимо ни от чего (такую переменную мы обозначили буквой x), а другая величина принимает значения, которые зависят от выбранных значений переменной x (такую зависимую переменную мы обозначили буквой y). Математической моделью реального процесса как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x, т.е. связи между переменными x и y. Еще раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$.

Есть ли у этих математических моделей что-либо общее? Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого находятся значения переменной y.

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идет о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Итак, мы познакомились еще с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$».

А вот образец обратного перевода:

Если $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

а) $f(1)$; б) $f(-4)$; в) $f(a)$; г) $f(2a)$;

д) $f(a-1)$; е) $f(3x)$; ж) $f(-x)$.

Решение. Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования. Имеем:

а) $f(1) = 1^3 = 1$;

б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;

в) $f(a) = a^3$;

г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;

д) $f(a-1) = (a-1)^3$;

е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;

ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. ◼

Замечание. Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном, из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

Пример 2. Даны две функции: $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, и $y = g(x)$, где $g(x) = x^3$. Доказать, что:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $g(-x) = -g(x)$.

Решение. а) Так как $f(x) = x^2$, то $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Итак,

$f(x) = x^2$, $f(-x) = x^2$, значит, $f(-x) = f(x)$.

б) Так как $g(x) = x^3$, то $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Итак, $g(x) = x^3$, $g(-x) = -x^3$, т.е. $g(-x) = -g(x)$. ■

Использование математической модели вида $y = f(x)$ оказывается удобным во многих случаях, в частности, тогда, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной.

Пример 3. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x < 0; \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

а) *Вычислить:* $f(-5)$, $f(-2)$, $f(1{,}5)$, $f(4)$, $f(0)$.

б) Построить график функции $y = f(x)$.

Решение. а) Что такое $f(-5)$? Это значение заданной функции в точке $x = -5$. Но функция задана не одним выражением, а двумя: $2x$ и x^2. Каким из них воспользоваться? Это зависит от выбранного значения аргумента. Мы выбрали $x = -5$, а число -5 удовлетворяет неравенству $x < 0$; в этом случае функция задается выражением, стоящим в первой строке, т.е. $f(x) = 2x$. Тогда $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

Аналогично вычисляем $f(-2)$: если $x = -2$, то $x < 0$ и, значит, $f(x) = 2x$, т. е. $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Вычислим $f(1{,}5)$, т. е. значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1{,}5$. Это значение x удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, и, следовательно, функция задается выражением, стоящим во второй строке, т. е. $f(x) = x^2$. Поэтому $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

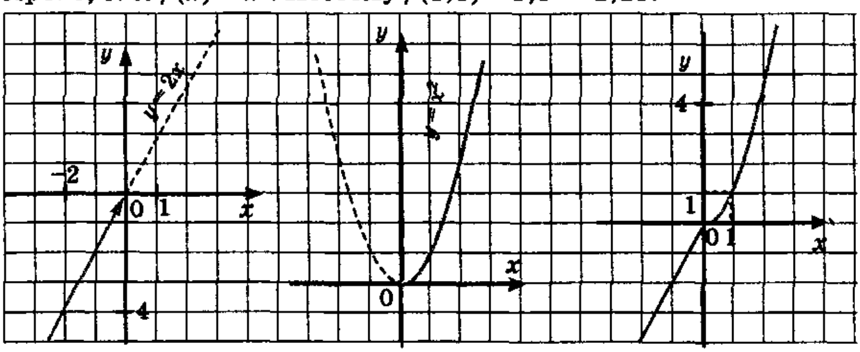


Рис. 62 Рис. 63 Рис. 64

Аналогично находим $f(4)$: если $x = 4$, то $x \geqslant 0$ и, значит, $f(x) = x^2$, т.е. $f(4) = 4^2 = 16$.

Осталось вычислить $f(0)$. Значение $x = 0$, удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, следовательно, $f(x) = x^2$, т.е. $f(0) = 0^2 = 0$.

б) Мы умеем строить графики функций $y = 2x$ (рис. 62) и $y = x^2$ (рис. 63). Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = 2x$ при $x < 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 62. Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 63. Если мы теперь изобразим обе выделенные части в одной системе координат, то получим требуемый график функции $y = f(x)$ (рис. 64).

кусочная функция

Конечно, математики не строят подобные графики так долго. Обычно все делается сразу в одной системе координат. Только, естественно, прямая $y = 2x$ берется не целиком, а лишь при условии $x < 0$, т. е. на промежутке $(-\infty, 0)$, и парабола $y = x^2$ берется не целиком, а лишь при условии $x \geqslant 0$, т. е. на промежутке $[0, +\infty)$. Вот так, «по кусочкам» и воспроизводится весь график. Поэтому функции такого типа, как в примере 3, называют **кусочными**.

П р и м е р 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

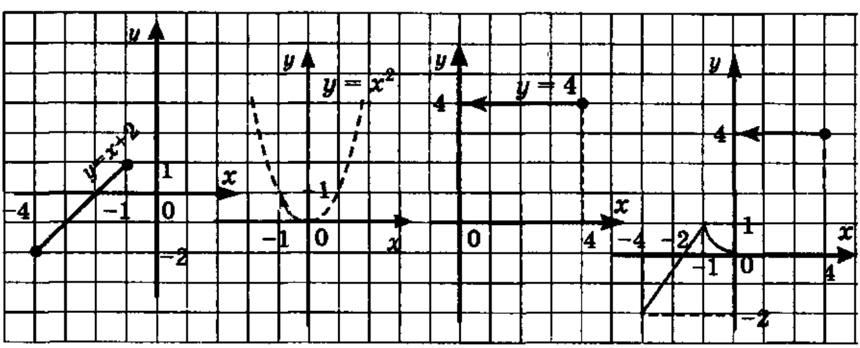


Рис. 65 Рис. 66 Рис. 67 Рис. 68

а) Вычислить: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) построить график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Поэтому $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Значит, $f(-2) = -2 + 2 = 0$.

Значение $x = -0{,}5$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Тогда $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение $x = 1$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 4$, а в этом случае $f(x) = 2$. Имеем $f(1) = 2$.

Значение $x = 5$ не удовлетворяет ни одному из имеющихся условий: ни первому $-4 \leqslant x \leqslant -1$, ни второму $-1 < x \leqslant 0$, ни третьему $0 < x \leqslant 4$. Поэтому вычислить $f(5)$ мы не можем, это задание некорректно.

б) График функции $y = f(x)$ построим «по кусочкам». На рисунке 65 изображен график функции $y = x + 2$, где $x \in [-4, -1]$. На рисунке 66 представлен график функции $y = x^2$, где $x \in (-1, 0]$. На рисунке 67 изображен график функции $y = 4$, где $x \in (0, 4]$. Наконец, на рисунке 68 все «кусочки» воссоединены в одно целое — в график функции $y = f(x)$. ■

чтение графика

область определения функции

Вот так с помощью известных графиков «по кусочкам» можно строить графики на координатной плоскости.

Опишем с помощью построенного на рисунке 68 графика некоторые свойства функции $y = f(x)$ — такое описание свойств обычно называют *чтением графика*. Чтение графика — это своеобразный переход от геометрической модели (от графической модели) к словесной модели (к описанию свойств функции). А построение графика — это переход от аналитической модели (она представлена в условии примера 4) к геометрической модели.

Итак, приступаем к чтению графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 68).

1. Независимая переменная x пробегает все значения от -4 до 4. Иными словами, для каждого значения x из отрезка $[-4, 4]$ можно вычислить значение функции $f(x)$. Говорят так: $[-4, 4]$ — *область определения функции*.

Почему при решении примера 4 мы сказали, что найти $f(5)$ нельзя? Да потому, что значение $x = 5$ не принадлежит области определения функции.

2. $y_{наим.} = -2$ (этого значения функция достигает при $x = -4$); $y_{наиб.} = 2$ (этого значения функция достигает в любой точке полуинтервала $(0, 4]$.

3. $y = 0$, если $x = -2$ и если $x = 0$; в этих точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось x.

4. $y > 0$, если $x \in (-2, 0)$ или если $x \in (0, 4]$; на этих промежутках график функции $y = f(x)$ расположен *выше оси x*.

5. $y < 0$, если $x \in [-4, -2)$; на этом промежутке график функции $y = f(x)$ расположен *ниже оси x*.

6. Функция возрастает на отрезке $[-4, -1]$, убывает на отрезке $[-1, 0]$ и постоянна (ни возрастает, ни убывает) на полуинтервале $(0, 4]$. ■

По мере того как мы с вами будем изучать новые свойства функций, процесс чтения графика будет становиться более насыщенным, содержательным и интересным.

непрерывная функция

точка разрыва

Обсудим одно из таких новых свойств. График функции, рассмотренной в примере 4, состоит из трех ветвей (из трех «кусочков»). Первая и вторая ветви (отрезок прямой $y = x + 2$ и часть параболы) «состыкованы» удачно: отрезок заканчивается в точке $(-1; 1)$, а участок параболы начинается в той же точке. А вот вторая и третья ветви менее удачно «состыкованы»: третья ветвь («кусочек» горизонтальной прямой) начинается не в точке $(0; 0)$, а в точке $(0; 4)$. Математики говорят так: «функция $y = f(x)$ *претерпевает разрыв* при $x = 0$ (или в точке $x = 0$)». Если же функция не имеет точек разрыва, то ее называют *непрерывной*. Так, все функции, с которыми мы познакомились в предыдущих параграфах ($y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$) — непрерывные.

Пример 5. Дана функция $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Требуется построить и прочитать ее график.

Решение. Как видите, здесь функция задана достаточно сложным выражением. Но математика — единая и цельная наука, ее разделы тесно связаны друг с другом. Воспользуемся тем, что мы изучали в главе 5, и сократим алгебраическую дробь $\frac{x^3-2x^2}{x-2}$. Имеем:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2.$$

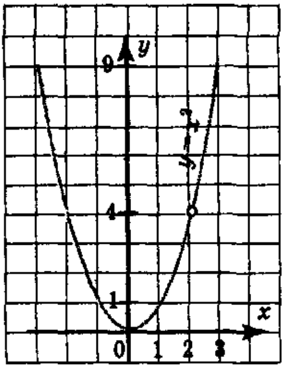


Рис. 69

Итак, на самом деле $f(x) = x^2$. Правда, надо учесть, что тождество $\frac{x^3-2x^2}{x-2} = x^2$ справедливо лишь при ограничении $x \neq 2$. Следовательно, мы можем переформулировать задачу так: вместо функции $y = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$ будем рассматривать функцию $y = x^2$, где $x \neq 2$.

Построим на координатной плоскости xOy параболу $y = x^2$. Прямая $x = 2$ пересекает ее в точке (2; 4). Но по условию $x \neq 2$, значит, точку (2; 4) параболы мы должны исключить из рассмотрения, для чего на чертеже отметим эту точку светлым кружком. Таким образом, график функции построен — это парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой (2; 4) (рис. 69).

Перейдем к описанию свойств функции $y = f(x)$, т. е. к чтению ее графика:

1. Независимая переменная x принимает любые значения, кроме $x = 2$. Значит, область определения функции состоит из двух открытых лучей $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

2. $y_{\text{наим.}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб.}}$ не существует.

3. Функция не является непрерывной, она претерпевает разрыв при $x = 2$ (в точке $x = 2$).

4. $y = 0$, если $x = 0$.

5. $y > 0$, если $x \in (-\infty, 0)$, если $x \in (0, 2)$ и если $x \in (2, +\infty)$.

6. Функция убывает на луче $(-\infty, 0]$, возрастает на полуинтервале $[0, 2)$ и на открытом луче $(2, +\infty]$. ■

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими терминами:
парабола, ось (ось симметрии) параболы, ветви параболы, вершина параболы;
непрерывная функция, разрыв функции;
кусочная функция;
область определения функции;
чтение графика.

Мы познакомились с двумя математическими моделями:
$y = x^2$,
$y = f(x)$.

- Мы получили следующий результат:
графиком функции $y = x^2$ является парабола.

- Мы разработали алгоритм графического решения уравнения вида $f(x) = g(x)$.

Наконец, вы познакомились с тем, как строить графики кусочных функций.

ГЛАВА

8 СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 35. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В § 28 мы ввели понятие линейного уравнения с двумя переменными — так называют равенство $ax + by + c = 0$, где a, b, c — конкретные числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, а x, y — переменные (неизвестные).

Примеры линейных уравнений с двумя переменными:

$$2x - 3y + 1 = 0;$$
$$x + y - 3 = 0;$$
$$s - 5t + 4 = 0$$

(здесь переменные обозначены по-другому: s, t, — но это роли не играет).

В том же § 28 мы ввели понятие решения линейного уравнения с двумя переменными — так называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство. На первом месте всегда пишут значение переменной x, на втором — значение переменной y.

Приведем примеры:

1. (2; 3) — решение уравнения $5x + 3y - 19 = 0$. В самом деле, $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 19 = 0$ — верное числовое равенство.

2. (−4; 2) — решение уравнения $3x - y + 14 = 0$. Действительно, $3 \cdot (-4) - 2 + 14 = 0$ — верное числовое равенство.

3. $\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ — решение уравнения $-0{,}4x + 3y + 7 = 0$. Имеем: $0{,}4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 7 = 0$ — верное числовое равенство.

4. (1; 2) не является решением уравнения $2x - 3y + 1 = 0$. В самом деле, $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$ — неверное числовое равенство (получается, что $-3 = 0$).

В § 29 мы отмечали, что математическую модель $ax + by + c = 0$ всегда можно заменить более простой: $y = kx + m$. Например, уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ можно преобразовать так:

$$4y = 3x + 12;$$

$$y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$ является прямая (см. § 28). Координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, т. е. являются решением уравнения. Сколько же решений имеет уравнение $ax + by + c = 0$? Столько же, сколько точек расположено на прямой, служащей графиком уравнения $ax + by + c = 0$, т. е. бесконечное множество решений.

Многие реальные ситуации при переводе на математический язык оформляются в виде математической модели, состоящей из двух линейных уравнений с двумя переменными. С такой ситуацией мы встретились в § 28 в задаче про двух садоводов Иванова и Петрова: математическая модель состояла из двух уравнений: $5x - 2y = 0$ и $3x + 2y - 16 = 0$, причем нас интересовала такая пара значений $(x; y)$, которая *одновременно* удовлетворяла и тому, и другому уравнению. В таких случаях обычно не говорят, что математическая модель состоит из двух уравнеиий, а говорят, что *математическая модель представляет собой систему уравнений.*

Вообще, если даны два линейных уравнения с двумя переменными x и y: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ и поставлеиа задача — найти такие пары значений $(x; y)$, которые одиовременно удовлетворяют и тому, и другому уравнению, то говорят, что заданные уравнения образуют систему уравнений. Уравнения системы записывают друг под другом и объединяют специальным символом — фигурной скобкой:

система уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

решение системы уравнений

Пару значений $(x;\ y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют решением системы.

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Теперь мы можем сказать, что уже встречались с системой линейных уравнений — математическая модель уже упомянутой задачи про садоводов из § 28 выглядела так:

$$\begin{cases} 5x-2y=0, \\ 3x+2y-16=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ее решением была пара (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

Рассмотрим новые примеры.

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 2x+4y+3=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Р е ш е н и е. Графиком уравнения $x + 2y - 5 = 0$ является прямая. Найдем две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим: $x = 5$. Если $x = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим: $y = 2{,}5$. Итак, нашли две точки: (5; 0) и (0; 2,5). Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_1 на рисунке 70.

Графиком уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ также является прямая. Найдем две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ находим: $x = -1{,}5$. Если $x = 2{,}5$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ находим: $5 + 4y + 3 = 0$, и, следовательно, $y = -2$. Итак, нашли две точки: (−1,5; 0) и (2,5; −2). Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_2 на рисунке 70.

Прямые l_1 и l_2 параллельны. Что означает этот геометрический факт для данной системы уравнений? То, что она не имеет решений (поскольку нет точек, удовлетворяющих одновременно и тому, и другому уравнению, т.е. принадлежащих одновременно и той, и другой из построенных прямых l_1 и l_2).

Ответ: система не имеет решений.

Пример 2. Найти два числа, если известно, что их сумма равна 39, а разность равна 11.

Решение. Если x, y — искомые числа, то $x + y = 39$ и $x - y = 11$, причем эти равенства должны одновременно выполняться:

$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x - y = 11. \end{cases} \qquad (4)$$

Получили систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

Можно угадать, чему равны x и y: $x = 25$, $y = 14$. Но, во-первых, метод угадывания далеко не всегда применим на практике. А во-вторых, где гарантия, что иного решения нет, может быть, мы просто до него не додумались, не «доугадали».

Можно построить графики уравнений $x + y = 39$ и $x - y = 11$, это прямые, причем непараллельные (в отличие от тех, что в примере 1), они пересекаются в одной точке. Эту точку мы уже знаем: (25; 14); значит, это единственная пара чисел, которая нас устраивает, единственное решение системы.

Ответ: 25 и 14.

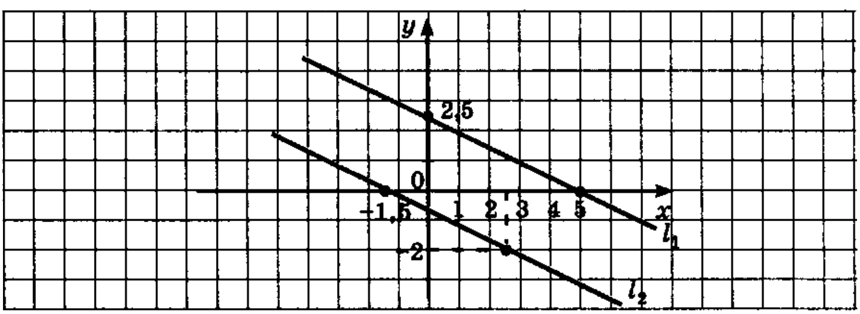


Рис. 70

8.35. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

графический метод

решение системы уравнений

В примерах 1 и 2 мы применили графический метод решения системы линейных уравнений. Этим же методом мы пользовались в § 28 при решении задачи о числе яблонь у двух садоводов (система (2) решена в § 28 графическим методом).

К сожалению, графический метод, как и метод угадывания, не самый надежный. Во-первых, прямые могут просто не уместиться на чертеже. Во-вторых, прямые могут уместиться на чертеже, но пересечься в точке, координаты которой по чертежу не очень легко определить.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решение. Построим графики уравнений системы. Сначала, как это чаще всего мы делаем, преобразуем оба уравнения к виду линейной функции. Из первого уравнения получаем: $y = 3x - 5$, а из второго: $y = 7 - 2x$.

Построим в одной системе координат графики линейных функций $y = 3x - 5$ (прямая l_1 на рис. 71) и $y = 7 - 2x$ (прямая l_2 на рис. 71). Они пересекаются в точке A, координаты которой — единственное решение заданной системы. А вот чему конкретно равны абсцисса и ордината точки A, мы по рисунку 71 точно определить не сможем (постройте эти прямые в своих тетрадях в клеточку и убедитесь, что точка A как бы «висит» внутри определенной клеточки). Придется нам позднее вернуться к этому примеру. ◼

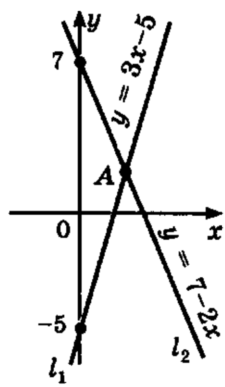


Рис. 71

Но все-таки графический метод решения системы линейных уравнений имеет большое значение. С его помощью можно сделать следующие важные *выводы*:

графиками обоих уравнений системы (1) являются прямые;

эти прямые могут пересекаться, причем только в одной точке, — это значит, что система (1) имеет единственное решение (так было в рассмотренных в этом параграфе системах (2), (4), (5);

эти прямые могут быть параллельны — это значит, что система не имеет решений (говорят также, что система **несовместна** — такой была система (3));

эти прямые могут совпасть — это значит, что система имеет бесконечно много решений (говорят также, что система **неопределенна**).

несовместная система

неопределенная система

Итак, мы познакомились с новой математической моделью (1) — системой двух линейных уравнений с двумя переменными. Наша задача — научиться ее решать. Метод угадывания ненадежен, графический метод также выручает не всегда. Значит, нам нужно располагать надежными алгебраическими методами решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Об этом и пойдет речь в следующих параграфах.

§ 36. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Вернемся еще раз к системе (2) из § 35:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases}$$

Мы ее решили графическим методом в § 28 и знаем, что $x = 2$, $y = 5$ — единственное решение этой системы. А теперь будем решать ту же систему другим способом.

Первое уравнение преобразуем к виду $2y = 5x$, т. е. $y = 2{,}5x$. Второе уравнение преобразуем к виду $2y = 16 - 3x$ и далее $y = 8 - 1{,}5x$ (все коэффициенты уравнения $2y = 16 - 3x$ разделили на 2). Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} y = 2{,}5x, \\ y = 8 - 1{,}5x. \end{cases}$$

Ясно, что нас интересует такое значение x, при котором $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Из этого уравнения находим

$$2{,}5x + 1{,}5x = 8;$$
$$4x = 8;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то из уравнения $y = 2{,}5x$ получим $y = 5$. Итак, $(2; 5)$ — решение системы (что, напомним, нам уже было известно).

Чем эти рассуждения отличаются от тех, что мы применяли в § 28? Тем, что никаких графиков строить не пришлось, вся работа шла на алгебраическом языке. Как же мы рассуждали?

метод подстановки

Мы выразили y через x из первого уравнения и получили $y = 2{,}5x$. Затем подставили выражение $2{,}5x$ вместо y во второе уравнение и получили $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Далее решили это уравнение относительно x и получили $x = 2$. Наконец, по формуле $y = 2{,}5x$ нашли соответствующее значение y. И вот что важно: во втором уравнении совсем не обязательно было выражать y через x, можно было подставить $2{,}5x$ вместо y в заданное уравнение $3x + 2y - 16 = 0$. Смотрите:

$$3x + 2 \cdot 2{,}5x - 16 = 0;$$
$$3x + 5x = 16;$$
$$8x = 16;$$
$$x = 2.$$

Подобный метод рассуждений называют обычно методом подстановки. Он представляет собой определенную последовательность шагов, т. е. некоторый алгоритм.

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными методом подстановки

1. *Выразить y через x из первого уравнения системы.*
2. *Подставить полученное на первом шаге выражение вместо y во второе уравнение системы.*
3. *Решить полученное на втором шаге уравнение относительно x.*
4. *Подставить найденное на третьем шаге значение x в выражение y через x, полученное на первом шаге.*
5. *Записать ответ в виде пары значений $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шагах.*

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Из первого уравнения системы получаем: $y = 3x - 5$.

2) Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + (3x - 5) - 7 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$2x + 3x - 5 - 7 = 0;$$
$$5x - 12 = 0;$$
$$5x = 12;$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

4) Подставим найденное значение x в формулу $y = 3x - 5$:

$$y = 3 \cdot \frac{12}{5} - 5 = \frac{36}{5} - 5 = \frac{36 - 25}{5} = \frac{11}{5}.$$

5) Пара $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ — единственное решение заданной системы.

Ответ: $\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Вы узнали эту систему? Мы с ней встретились в предыдущем параграфе (система (5)), пробовали решить ее графическим методом, и у нас ничего не получилось. А вот метод подстановки выручит всегда, это — универсальное средство. Он и выручил нас в примере 1. Более того, метод подстановки активно применяется и в более сложных системах уравнений, не обязательно линейных, о таких системах речь впереди — в старших классах. Этот метод, быть может, не всегда эффективен (т.е. не всегда быстро приводит к цели), но достаточно надежен.

Вернемся к рассмотренному алгоритму из пяти шагов, в котором описан метод подстановки. У вас не возник вопрос, почему y выражают именно из первого уравнения и подставляют во второе, почему не выразить y из второго уравнения и подставить в первое? И вообще, почему выражали y через x, а не x через y, почему такое неравноправие? Ответ: никакой причины нет. Выражайте что хотите и откуда хотите, ищите наиболее простые варианты.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0, \\ x + 12y = 11. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Выразим x через y из второго уравнения:

$$x = 11 - 12y.$$

2) Подставим найденное выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$5(11 - 12y) - 3y + 8 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$55 - 60y - 3y + 8 = 0;$$
$$63 - 63y = 0;$$
$$63y = 63;$$
$$y = 1.$$

4) Подставим найденное значение y в формулу $x = 11 - 12y$:

$$x = 11 - 12 \cdot 1 = -1.$$

5) Пара $x = -1$, $y = 1$ — единственное решение заданной системы.

О т в е т: $(-1; 1)$.

§ 37. МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СЛОЖЕНИЯ

Мы довольно часто возвращаемся к тому, что уже обсудили ранее, например для того, чтобы рассмотреть ситуацию под другим углом зрения. Вот и теперь давайте вернемся к примеру 1 из § 36, где речь шла о решении системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Как мы решали эту систему? Мы выразили y из первого уравнения и подставили результат во второе, что привело к уравнению с одной переменной x, т.е. фактически к временному исключению из рассмотрения переменной y. Но исключить y из рассмотрения можно было бы значительно проще — достаточно сложить оба уравнения системы (сложить уравнения — это значит по отдельности составить сумму левых частей, сумму правых частей уравнений и полученные суммы приравнять):

$$+\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$
$$\overline{(3x - y - 5) + (2x + y - 7) = 0 + 0}$$
$$5x - 12 = 0;$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

Затем можно было найденное значение x подставить в любое уравнение системы, например в первое, и найти y:

$$3 \cdot \frac{12}{5} - y - 5 = 0;$$
$$\frac{36}{5} - 5 = y;$$
$$y = \frac{11}{5}.$$

Попробуем применить аналогичные рассуждения еще для нескольких систем линейных уравнений с двумя переменными.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

Решение. 1) Вычтем второе уравнение из первого:

$$-\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$
$$\overline{(2x + 3y) - (5x + 3y) = 1 - 7}$$
$$2x + 3y - 5x - 3y = -6;$$
$$-3x = -6;$$
$$x = 2.$$

2) Подставим найденное значение $x = 2$ в первое уравнение заданной системы, т. е. в уравнение $2x + 3y = 1$:

$$2 \cdot 2 + 3y = 1;$$
$$3y = 1 - 4;$$
$$3y = -3;$$
$$y = -1.$$

3) Пара $x = 2$, $y = -1$ — решение заданной системы.

Ответ: $(2; -1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Решение. Здесь сразу исключить переменную x или переменную y из обоих уравнений с помощью сложения или вычитания уравнений не удастся. Нужен подготовительный этап. Сначала умножим все члены первого уравнения системы на 3, а все члены второго уравнения — на 4. Получим:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 15, \\ 8x + 12y = 28. \end{cases}$$

Теперь можно сложить уравнения, что приведет к исключению переменной y. Имеем: $17x = 43$, т. е.

$$x = \frac{43}{17}.$$

Подставим найденное значение x во второе уравнение исходной системы, т.е. в уравнение $2x + 3y = 7$:

$$2 \cdot \frac{43}{17} + 3y = 7; \qquad 3y = 7 - \frac{86}{17};$$

$$3y = \frac{119 - 86}{17}; \qquad 3y = \frac{33}{17}; \qquad y = \frac{11}{17}.$$

Ответ: $\left(\frac{43}{17}; \frac{11}{17}\right)$.

Можно использовать следующую краткую запись приведенного решения:

$$\begin{array}{c} +\begin{cases} 3x - 4y = 5, & \big| \; 3 \\ 2x + 3y = 7. & \big| \; 4 \end{cases} \\ \hline 3(3x - 4y) + 4(2x + 3y) = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \end{array}$$

Далее, находим $17x = 43$, $x = \frac{43}{17}$ и т. д.

Здесь справа от вертикальной черты записаны дополнительные множители, с помощью которых удалось уравнять коэффициенты при переменной y в обоих уравнениях системы.

Метод, который мы обсудили в этом параграфе, называют методом алгебраического сложения.

§ 38. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Собственно говоря, ничего особенно нового вы в этом параграфе не узнаете. Ведь вам уже известно, что реальная ситуация

может быть описана на математическом языке в виде математической модели, представляющей собой систему двух линейных уравнений с двумя переменными. Так было в § 28 в ситуации с садоводами Ивановым и Петровым. Так было и в примере 2 из § 35. Поэтому теоретический разговор, соответствующий названию параграфа, можно считать законченным. А вот с практической точки зрения обсуждение новых ситуаций полезно. Этим и займемся.

Пример. В седьмом классе в понедельник не пришли в школу одна девочка и пять мальчиков. При этом число девочек в классе оказалось в 2 раза больше числа мальчиков. Во вторник не пришли один мальчик и девять девочек. При этом число мальчиков оказалось в 1,5 раза больше числа девочек. В среду на уроки пришли все ученики. Сколько школьников присутствовало на уроках в среду в седьмом классе?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число девочек, y — число мальчиков в седьмом классе.

В понедельник было $(x - 1)$ девочек, $(y - 5)$ мальчиков. При этом оказалось, что девочек вдвое больше, т. е.

$$x - 1 = 2(y - 5).$$

Во вторник было $(x - 9)$ девочек, $(y - 1)$ мальчиков. При этом оказалось, что мальчиков в 1,5 раза больше, т. е.

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9).$$

Математическая модель ситуации составлена:

$$\begin{cases} x - 1 = 2(y - 5), \\ y - 1 = 1{,}5(x - 9). \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Сначала упростим каждое уравнение системы.

Для первого уравнения имеем:

$$x - 1 = 2(y - 5);$$
$$x - 1 = 2y - 10;$$
$$x - 2y + 9 = 0.$$

Для второго уравнения имеем:

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9);$$
$$2(y - 1) = 3(x - 9)$$

(обе части уравнения умножили на 2); далее,

$$2y - 2 = 3x - 27;$$
$$3x - 2y - 25 = 0.$$

Итак, получили следующую систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0. \end{cases}$$

(скорректированная математическая модель рассматриваемой ситуации).

В чисто учебных целях решим эту систему двумя способами.

Первый способ. Применим метод подстановки. Из первого уравнения системы находим: $x = 2y - 9$. Подставим этот результат вместо x во второе уравнение системы. Получим:

$$3(2y - 9) - 2y - 25 = 0;$$
$$6y - 27 - 2y - 25 = 0;$$
$$4y = 52;$$
$$y = 13.$$

Так как $x = 2y - 9$, то $x = 2 \cdot 13 - 9 = 17$.

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй способ. Применим метод алгебраического сложения:

$$-\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0. \end{cases}$$
$$\overline{(x - 2y + 9) - (3x - 2y - 25) = 0 - 0}$$

$$x - 2y + 9 - 3x + 2y + 25 = 0;$$
$$-2x + 34 = 0;$$
$$2x = 34;$$
$$x = 17.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, т.е. в уравнение $x - 2y + 9 = 0$:

$$17 - 2y + 9 = 0;$$

$$2y = 26; \qquad y = 13.$$

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй этап мы завершили (решили полученную систему, причем даже двумя способами).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько школьников было в седьмом классе на уроках в среду, когда пришли все ученики. Поскольку $x = 17$, $y = 13$, т. е. в классе было 17 девочек и 13 мальчиков, делаем вывод: всего в классе $17 + 13 = 30$ учеников.

Ответ: 30 учеников.

Замечание. Вы, конечно, понимаете, что для решения конкретной системы уравнений надо выбирать тот способ, который представляется для данного случая наиболее уместным, или тот, который вам больше нравится (т.е. вы можете использовать графический метод, или метод подстановки, или метод алгебраического сложения — это ваше дело). Составленную в рассмотренной задаче систему мы решили двумя способами, чтобы повторить методы подстановки и алгебраического сложения и сопоставить эти методы друг с другом.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- В этой главе вы познакомились с новыми математическими понятиями:
  система двух линейных уравнений с двумя переменными;
  решение системы уравнений;
  несовместная система, неопределенная система уравнений.
- Вы познакомились с новой математической моделью: системой двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

- Мы с вами обсудили три метода решения систем линейных уравнений: графический метод; метод подстановки; метод алгебраического сложения.

ОГЛАВЛЕНИЕ