А.В.Погорелов

геометрия

УЧЕБНИК ДЛЯ 7—11 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Допущено Министерством образования Российской Федерации

4-е издание

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1993

ББК 22.151я72
П43

ОДОБРЕНО БЮРО ОТДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ АН СССР,
ПРЕЗИДИУМОМ АПН СССР

Учебник занял призовое место
на Всесоюзном конкурсе учебников по математике
для средней общеобразовательной школы

Погорелов А. В.
П43 Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. сред. шк. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 383 с.: ил. – ISBN 5-09-004557-7.

П $\frac{4306020500-122}{103(03)-93}$ инф. письмо - 93, № 71 ББК 22.151я72

ISBN 5-09-004557-7

© Погорелов А. В., 1990

7 класс

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие». Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.

Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность (рис. 1).

Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рисунке 2 фигура слева состоит из треугольника и трех квадратов, а фигура справа состоит из окружности и частей окружности. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

Геометрия широко применяется на практике. Ее надо знать

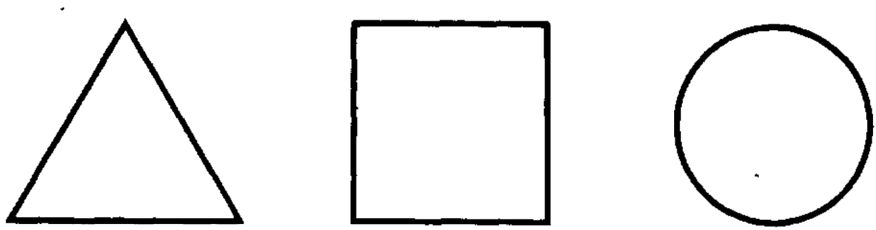


Рис. 1

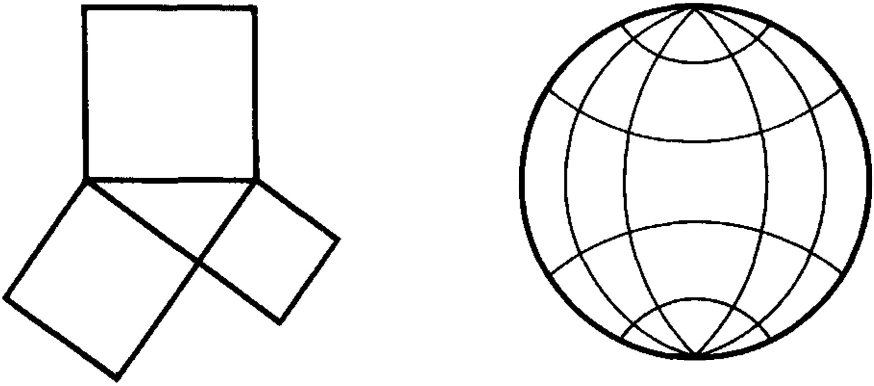


Рис. 2

и рабочему, и инженеру, и архитектору, и художнику. Одним словом, геометрию надо знать всем.

Геометрия, которая изучается в школе, называется евклидовой по имени Евклида, создавшего руководство по математике под названием «Начала». В течение длительного времени геометрию изучали по этой книге.

Мы начнем изучение геометрии с планиметрии. *Планиметрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.

2. ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Евклид — древнегреческий ученый (III в. до н. э.)

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, ...

На рисунке 3 вы видите точку A и прямую a.

Прямая бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть прямой, но представляем ее себе неограниченно продолженной в обе стороны.

Рис. 3

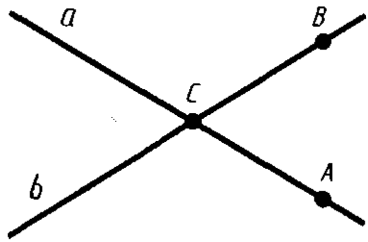


Рис. 4

Посмотрите на рисунок 4. Вы видите прямые a, b и точки A, B, C. Точки A и C *лежат* на прямой a. Можно сказать также, что точки A и C *принадлежат* прямой a или что прямая a *проходит* через точки A и C.

Точка B лежит на прямой b. Она не лежит на прямой a. Точка C лежит и на прямой a, и на прямой b. Прямые a и b *пересекаются* в точке C. Точка C является *точкой пересечения* прямых a и b.

На рисунке 5 вы видите, как с помощью линейки строится прямая, проходящая через две заданные точки A и B.

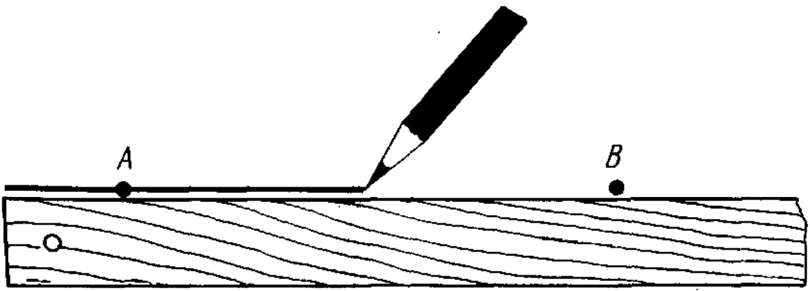


Рис. 5

Основными свойствами принадлежности точек и прямых на плоскости мы будем называть следующие свойства:

I. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.***

Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 4 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC.

З а д а ч а (3)[1]. Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Если бы две прямые имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две прямые. А это невозможно, так как через две точки можно провести только одну прямую. Значит, две прямые не могут иметь две точки пересечения.

3. ОТРЕЗОК

Посмотрите на рисунок 6. Вы видите прямую a и три точки A, B, C на этой прямой. Точка B лежит *между* точками A и C, она *разделяет* точки A и C. Можно также сказать, что точки A и C лежат *по разные стороны* от точки B. Точки B и C лежат *по одну сторону* от точки A, они не разделяются точкой A. Точки A и B лежат по одну сторону от точки C.

Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются *концами отрезка*. Отрезок обозначается указанием его концов. Когда говорят или пишут: «отрезок AB», то подразумевают отрезок с концами в точках A и B.

На рисунке 7 вы видите отрезок AB. Он является частью прямой AB. Эта часть прямой выделена жирной линией. Точка X прямой лежит между точками A и B, поэтому она принадлежит отрезку AB. Точка Y не лежит между точками A и B, поэтому она не принадлежит отрезку AB.

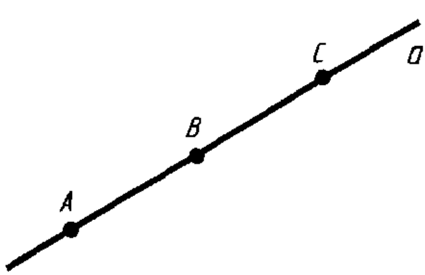


Рис. 6

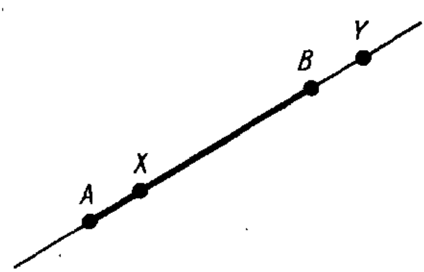


Рис. 7

[1] Число в скобках указывает номер задачи в списке задач, приведенных в конце параграфа.

Основным свойством расположения точек на прямой мы будем называть следующее свойство:

II. ***Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.***

4. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Для измерения отрезков применяются различные измерительные инструменты. Простейшим таким инструментом является линейка с делениями на ней. На рисунке 8 отрезок AB равен 10 см, отрезок AC равен 6 см, а отрезок BC равен 4 см. Длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

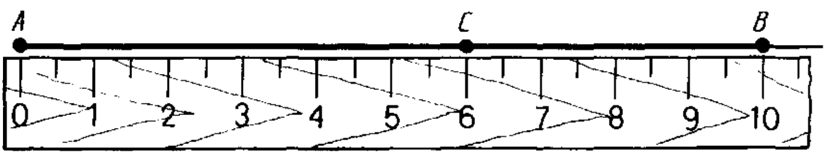


Рис. 8

Основными свойствами измерения отрезков мы будем называть следующие свойства:

III. ***Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.***

Это значит, что если на отрезке AB взять любую точку C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Длину отрезка AB называют также *расстоянием* между точками A и B.

Задача (9). Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?

Решение. Если точка A лежит между точками B и C, то по свойству измерения отрезков должно быть $AB + AC = BC$. Но $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Значит, точка A не лежит между точками B и C.

Если точка C лежит между точками A и B, то должно быть $AC+BC=AB$. Но $7{,}5+3{,}2\neq 4{,}3$. Значит, точка C не лежит между точками A и B.

Из трех точек на прямой A, B, C одна точка лежит между двумя другими. Значит, этой точкой является B.

5. ПОЛУПЛОСКОСТИ

Посмотрите на рисунок 9. Прямая *a разбивает* плоскость на две полуплоскости. Это разбиение обладает следующим свойством. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

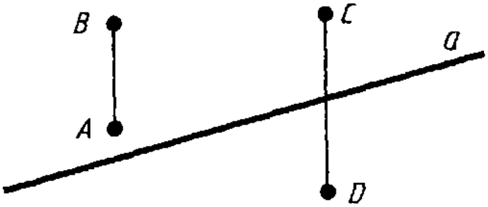


Рис. 9

На рисунке 9 точки A и B лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Поэтому отрезок AB не пересекает прямую a. Точки C и D лежат в разных полуплоскостях. Поэтому отрезок CD пересекает прямую a.

Основным свойством расположения точек относительно прямой на плоскости мы будем называть следующее свойство:

IV. ***Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.***

Задача (17). Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.

Решение. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 10). Точка A принадлежит одной из них. Отрезок AC не пересекает прямую. Значит, точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A.

Отрезок AB пересекает прямую. Значит, точка B лежит в другой полуплоскости.

Таким образом, точки B и C лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок BC пересекает нашу прямую.

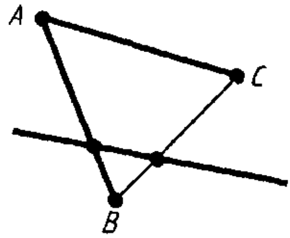


Рис. 10

6. ПОЛУПРЯМАЯ

Задача (20). Даны прямая a и точки A, X, Y, Z на этой прямой (рис. 11). Известно, что точки X и Y *лежат по одну сторону от* точки A, точки X и Z тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки Y и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны? Объясните ответ.

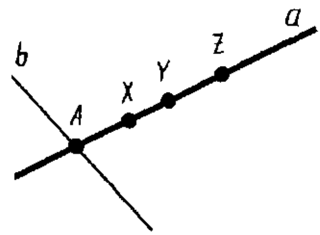


Рис. 11

Решение. Проведем через точку A какую-нибудь прямую b, отличную от a. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Одной из них принадлежит точка X. В той же полуплоскости лежат точки Y и Z, потому что отрезки XY и XZ не пересекают прямую b. Так как точки Y и Z лежат в одной полуплоскости, то отрезок YZ не пересекает прямую b, а значит, не содержит точку A. То есть точки Y и Z лежат по одну сторону от точки A.

Полупрямой или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эта точка называется *начальной точкой* полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются *дополнительными*.

Полупрямые, так же как и прямые, обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать полупрямую двумя точками: начальной и еще какой-нибудь точкой, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, полупрямую, которая выделена жирной линией на рисунке 12, можно обозначить AB.

Рис. 12

Задача (22). На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA и CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

Решение (рис. 13). Данные полупрямые имеют начальной точкой либо точку A, либо точку C.

Рассмотрим сначала полупрямые с начальной точкой A (полупрямые AB и AC). Точка C лежит между точками A и B, так как по условию задачи она принадлежит отрезку AB. Значит, точка A не лежит между точками B и C, т. е. точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Поэтому полупрямые AB и AC совпадающие.

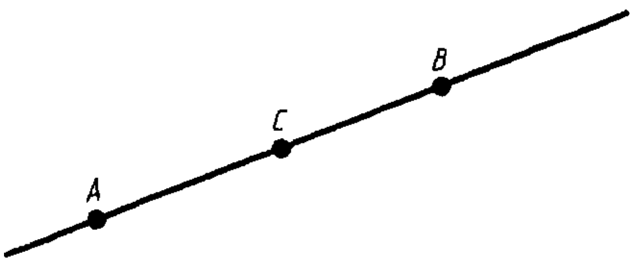


Рис. 13

Рассмотрим теперь полупрямые с начальной точкой C (полупрямые CA и CB). Точка C разделяет точки A и B. Поэтому точки A и B не могут принадлежать одной полупрямой, а значит, полупрямые CA и CB дополнительные.

7. УГОЛ

Углом называется фигура, которая состоит из точки — *вершины угла* — и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки,— *сторон угла.*

На рисунке 14 вы видите угол с вершиной O и сторонами a, b. Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла. Слово «угол» иногда заменяют знаком $\angle$. Угол на рисунке 14 можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. В третьем способе обозначения угла буква, обозначающая вершину, ставится посередине.

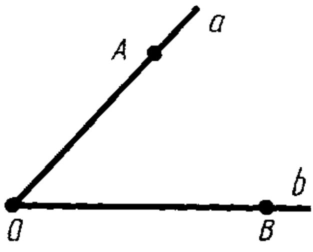


Рис. 14

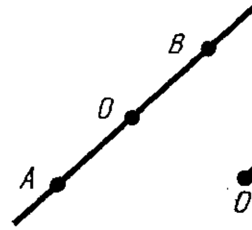


Рис. 15

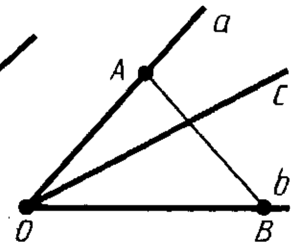


Рис. 16

Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развернутым*. На рисунке 15 вы видите развернутый угол с вершиной O и сторонами OA и OB.

Мы будем говорить, что луч *проходит между* сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. На рисунке 16 луч c проходит между сторонами угла (ab), так как он исходит из вершины угла (ab) и пересекает отрезок AB с концами на его сторонах.

В случае развернутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Углы измеряются в градусах при помощи транспортира. На рисунке 17 угол (ab) равен $120°$. Полупрямая c проходит между сторонами угла (ab). Угол (ac) равен $90°$, а угол (bc) равен $30°$. Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

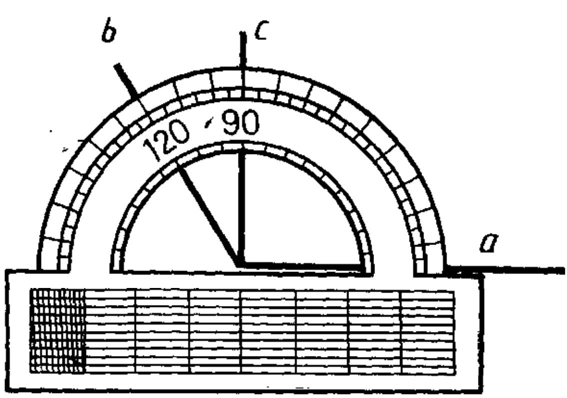


Рис. 17

Основными свойствами измерения углов мы будем называть следующие свойства:

V. ***Каждый угол имеет определенную градусную меру, бо́льшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.***

Это значит, что если луч c проходит между сторонами угла (ab), то угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

Задача (25). Может ли луч c проходнть между сторонами угла (ab), если $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$?

Решение. Если луч c проходит между сторонами угла (ab), то по свойству измерения углов должно быть:

$$\angle(ac)+\angle(bc)=\angle(ab).$$

Но

$$30°+80°\neq 50°.$$

Значнт, луч c не может проходить между сторонами угла (ab).

8. ОТКЛАДЫВАНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

На рисунке 18 показано, как с помощью линейки на полупрямой a с начальной точкой A можно отложить отрезок данной длины (3 см).

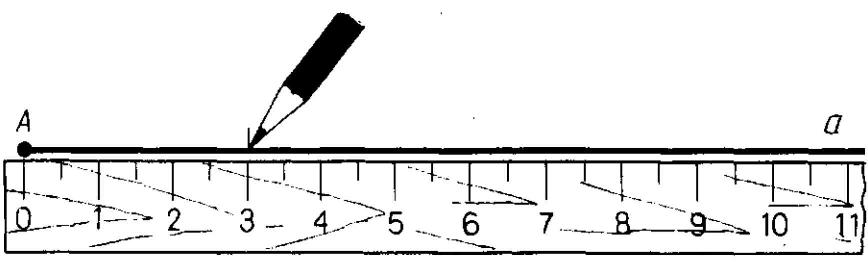


Рис. 18

Посмотрите на рисунок 19. Полупрямая a, продолженная за начальную точку A, разбивает плоскость на две полуплоскости. На рисунке показано, как с помощью транспортира отложить от полупрямой a в верхнюю полуплоскость угол с данной градусной мерой (60°).

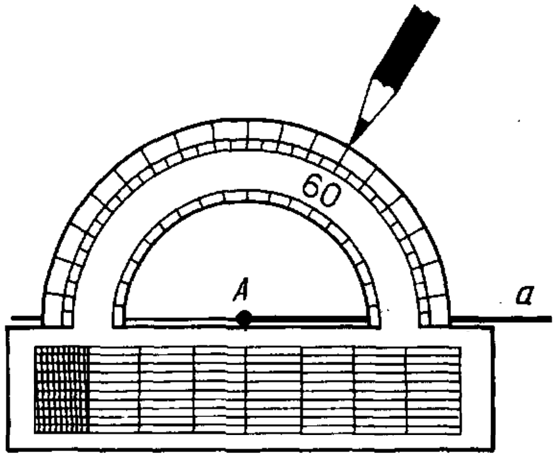


Рис. 19

Основными свойствами откладывания отрезков и углов мы будем называть следующие свойства:

VI. ***На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.***

VII. ***От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.***

Задача (30). На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ.

Решение (рис. 20). Так как точки B и C лежат на одной полупрямой с начальной точкой A, то они не разделяются точкой A, т. е. точка A не лежит между точками B и C.

Может ли точка B лежать между точками A и C? Если бы она лежала между точками A и C, то было бы

$$AB+BC=AC.$$

Но это невозможно, так как по условию отрезок AC меньше отрезка AB. Значит, точка B не лежит между точками A и C.

Из трех точек A, B, C одна лежит между двумя другими. Поэтому точка C лежит между точками A и B.

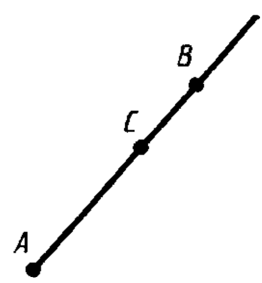


Рис. 20

9. ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — *сторонами*.

На рисунке 21 вы видите треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC. Треугольник обозначается указанием его вершин. Вместо слова «треугольник» иногда употребляют знак $\triangle$. Например, треугольник на рисунке 21 обозначается так: $\triangle ABC$.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах.

Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

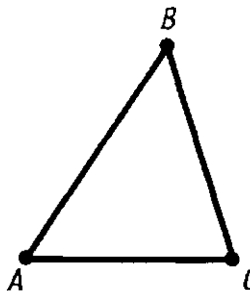


Рис. 21

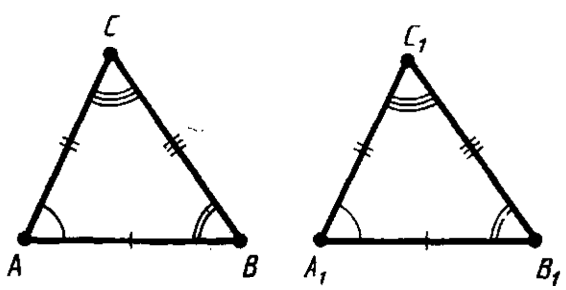


Рис. 22

На рисунке 22 вы видите два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. У них

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,$$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

На чертеже равные отрезки обычно отмечают одной, двумя или тремя черточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

Для обозначения равенства треугольников используется обычный знак равенства: $=$. Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читается так: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$». При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... А равенство $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означает уже совсем другое: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

З а д а ч а (38). Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен 90°. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Так как треугольники ABC и PQR равны, то у них $AB = PQ$, $\angle C = \angle R$. Значит, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

10. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА, РАВНОГО ДАННОМУ

Пусть мы имеем треугольник ABC и луч a (рис. 23, *а*). Переместим треугольник ABC так, чтобы его вершина A совместилась с началом луча a, вершина B попала на луч a, а вершина C оказалась в заданной полуплоскости относительно луча a и его продолжения. Вершины нашего треугольника в этом новом положении обозначим A_1, B_1, C_1 (рис. 23, *б*).

Треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

Существование треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC и расположенного указанным образом относительно заданного луча a, мы относим к числу о с н о в н ы х с в о й с т в простейших фигур. Это свойство мы будем формулировать так:

VIII. ***Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.***

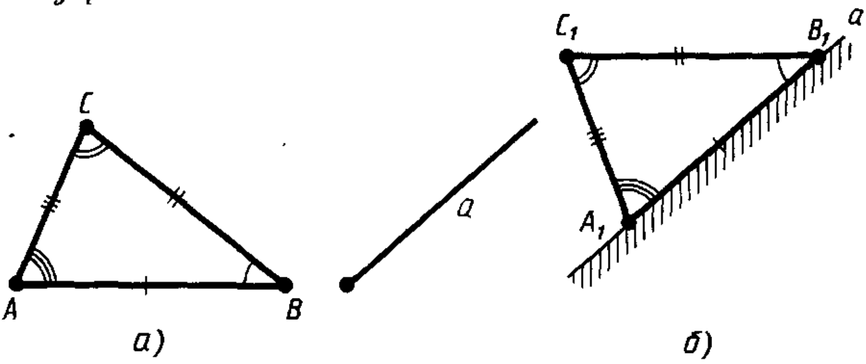


Рис. 23

11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются.

На рисунке 24 показано, как с помощью угольника и линейки провести через данную точку B прямую b, параллельную данной прямой a.

Для обозначения параллельности прямых используется знак $\|$. Запись $a \| b$ читается: «Прямая a параллельна прямой b».

Основное свойство параллельных прямых состоит в следующем:

IX. ***Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.***

Задача (41). Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.

Решение. Пусть a и b — параллельные прямые, и пусть прямая c пересекает прямую a в точке A (рис. 25). Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку A проходили бы две прямые, не пересекающие прямую b: прямая a и прямая c. Но по свойству параллельных прямых это невозможно. Значит, прямая c, пересекая прямую a, должна пересекать и параллельную ей прямую b.

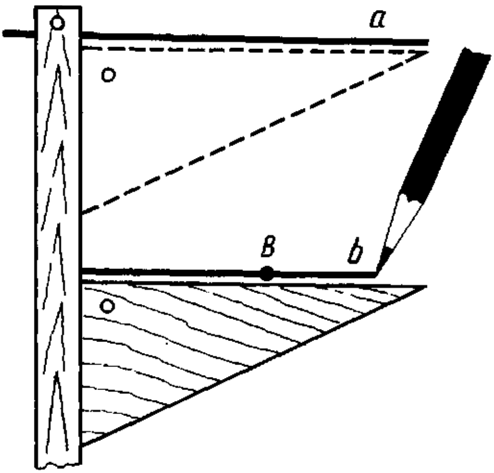


Рис. 24

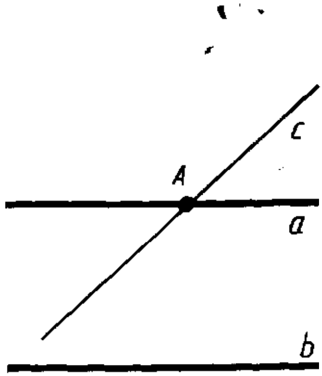


Рис. 25

12. ТЕОРЕМЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется *доказательством.* А само утверждение, которое доказывается, называется *теоремой.* Приведем пример.

Теорема 1.1. ***Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.***

Доказательство. Пусть прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его сторону AB (рис. 26). Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок AB пересекает прямую a. Точка C лежит в одной из этих полуплоскостей.

Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, то отрезок AC не пересекает прямую a, а отрезок BC пересекает эту прямую (рис. 26, a).

Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то отрезок AC пересекает прямую a, а отрезок BC не пересекает (рис. 26, *б*).

В обоих случаях прямая a пересекает только один из отрезков AC или BC. Вот и все доказательство.

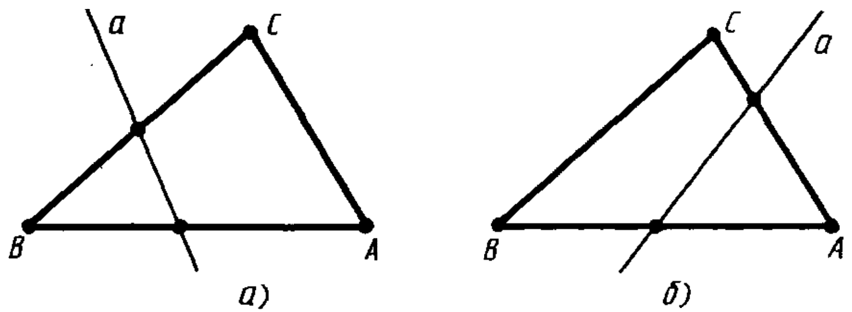


Рис. 26

Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется *условием* теоремы. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется *заключением* теоремы.

Условие теоремы 1.1 состоит в том, что прямая не проходит ни через одну вершину треугольника и пересекает одну из его сторон. Заключение теоремы состоит в том, что эта прямая пересекает только одну из двух других сторон треугольника.

13. АКСИОМЫ

Утверждения, содержащиеся в формулировках основных свойств простейших фигур, не доказываются и называются *аксиомами*. Слово аксиома происходит от греческого слова *аксиос* и означает утверждение, не вызывающее сомнений.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться основными свойствами простейших фигур, т. е. аксиомами, а также свойствами, уже доказанными, т. е. доказанными теоремами. Никакими другими свойствами фигур, даже если они нам кажутся очевидными, пользоваться нельзя.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что мы выражаем словами. Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее.

В геометрии наряду с такими словами, как аксиома и теорема, используется также слово «определение». Дать *определение* чему-либо — значит объяснить, что это такое.

Например, говорят: «Дайте определение треугольника». На это отвечают: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки».

Другой пример: «Дайте определение параллельных прямых». Отвечаем: «Прямые называются параллельными, если они не пересекаются». Вы уже знаете определения равенства отрезков, равенства углов и равенства треугольников.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приведите примеры геометрических фигур.
2. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
3. Как обозначаются точки и прямые?
4. Сформулируйте основные свойства принадлежности точек и прямых.

5. Объясните, что такое отрезок с концами в данных точках.
6. Сформулируйте основное свойство расположения точек на прямой.
7. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.
8. Что называется расстоянием между двумя данными точками?
9. Какими свойствами обладает разбиение плоскости на две полуплоскости?
10. Сформулируйте основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости.
11. Что такое полупрямая или луч? Какие полупрямые называются дополнительными?
12. Как обозначаются полупрямые?
13. Какая фигура называется углом?
14. Как обозначается угол?
15. Какой угол называется развернутым?
16. Объясните, что означает выражение: «Полупрямая проходит между сторонами угла».
17. В каких единицах измеряются углы и с помощью какого инструмента? Объясните, как проводится измерение.
18. Сформулируйте основные свойства измерения углов.
19. Сформулируйте основные свойства откладывания отрезков и углов.
20. Что такое треугольник?
21. Что такое угол треугольника при данной вершине?
22. Какие отрезки называются равными?
23. Какие углы называются равными?
24. Какие треугольники называются равными?
25. Как на рисунке отмечаются у равных треугольников соответствующие стороны и углы?
26. Объясните по рисунку 23 существование треугольника, равного данному.
27. Какие прямые называются параллельными? Какой знак используется для обозначения параллельности прямых?
28. Сформулируйте основное свойство параллельных прямых.
29. Приведите пример теоремы.

ЗАДАЧИ[1]

1. 1) Проведите прямую. Отметьте какую-нибудь точку A, лежащую на прямой, и точку B, не лежащую на прямой. 2) Проведите две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте

[1] Многие задачи настоящего учебника взяты из школьных учебников и задачников прошлых лет, в особенности из «Геометрии» А. П. Киселева и «Сборника задач по геометрии» Н. А. Рыбкина.

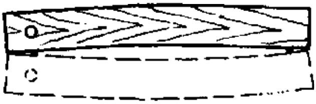


Рис. 27

точку C пересечения прямых; точку A на прямой a, не лежащую на прямой b; точку D, не лежащую ни на одной из прямых a и b.

2. Отметьте на листе бумаги две точки. Проведите через них от руки прямую. С помощью линейки проверьте правильность построения.
3. Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.
4. Для проверки правильности линейки применяют такой способ. Через две точки с помощью линейки проводят линию (рис. 27). Затем линейку переворачивают и через те же точки снова проводят линию. Если линии не совпадают, то линейка неправильная. На каком свойстве прямых основан этот способ проверки правильности линейки?
5. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь точку C так, чтобы точка A лежала между точками B и C.
6. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь какую-нибудь точку C отрезка AB.
7. Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если: 1) $CM=2{,}5$ см, $MD=3{,}5$ см; 2) $CM=3{,}1$ дм, $MD=4{,}6$ дм; 3) $CM=12{,}3$ м, $MD=5{,}8$ м.
8. Отметьте на прямой две точки. Отметьте на глаз середину отрезка, соединяющего эти точки. Проверьте правильность построения измерениями с помощью линейки.
9. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=4{,}3$ см, $AC=7{,}5$ см, $BC=3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?
10. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC=5$ см, $BC=7$ см? Объясните ответ.
11. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Может ли точка B разделять точки A и C, если $AC=7$ м, $BC=7{,}6$ м? Объясните ответ.
12. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если $AB=1{,}8$ м, $AC=1{,}3$ м, $BC=3$ м? Объясните ответ.
13. Могут ли три точки A, B, C лежать на одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC? Объясните ответ.
14. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину

отрезка BC, если $AB=2{,}7$ м, $AC=3{,}2$ м. Сколько решений имеет задача?

15. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: 1) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; 2) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; 3) точка C — середина отрезка AB; 4) длины отрезков AC и BC относятся как $2:3$.

16. Проведите прямую и отметьте какую-нибудь точку A, не лежащую на этой прямой. Отметьте теперь две точки B и C так, чтобы отрезок AB пересекал прямую, а отрезок BC не пересекал ее.

17. Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.

18. Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли прямую отрезок AD, если: 1) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; 2) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; 3) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; 4) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; 5) отрезки AB, BC, CD не пересекают прямую; 6) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Объясните ответ.

19. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой, а две точки — в другой полуплоскости. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков пересекает прямую? Объясните ответ.

20. Даны прямая a и точки A, X, Y, Z на этой прямой (рис. 11). Известно, что точки X и Y лежат по одну сторону от точки A, точки X и Z тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки Y и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны? Объясните ответ.

21. Отметьте две точки A и B. Проведите полупрямую AB.

22. На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA, CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

23. Проведите из одной точки три произвольных луча. Определите на глаз углы, образуемые этими лучами. Проверьте ваши ответы, измеряя углы транспортиром. Повторите упражнение.

24. Луч a проходит между сторонами угла (cd). Найдите угол (cd), если: 1) $\angle(ac)=35^\circ$, $\angle(ad)=75^\circ$; 2) $\angle(ac)=57^\circ$, $\angle(ad)=62^\circ$; 3) $\angle(ac)=94^\circ$, $\angle(ad)=85^\circ$.

25. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если: 1) $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$; 2) $\angle(ac)=100°$, $\angle(cb)=90°$; 3) угол (ac) больше угла (ab)?
26. Между сторонами угла (ab), равного 60°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если: 1) угол (ac) на 30° больше угла (bc); 2) угол (ac) в два раза больше угла (bc); 3) луч c делит угол (ab) пополам; 4) градусные меры углов (ac) и (bc) относятся как 2:3.
27. Проведите прямую. Отметьте на ней какую-нибудь точку A. Затем отметьте на глаз точку B этой прямой так, чтобы $AB=5$ см. Проверьте точность построения точки B линейкой. Повторите упражнение для: 1) $AB=3$ см; 2) $AB=7$ см; 3) $AB=10$ см.
28. Постройте на глаз углы 30°, 45°, 60°, 90°. Проверьте точность построения транспортиром. Повторите упражнение.
29. Существует ли на полупрямой AB такая точка X, отличная от B, что $AX=AB$? Объясните ответ.
30. На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ.
31. На луче AB отмечена точка C. Найдите длину отрезка BC, если: 1) $AB=1{,}5$ м, $AC=0{,}3$ м; 2) $AB=2$ см, $AC=4{,}4$ см.
32. Постройте на глаз треугольник с равными сторонами (равносторонний треугольник). Проверьте точность построения измерением сторон.
33. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Чему равна сторона AB треугольника, если $AD=5$ см, а $BD=6$ см?
34. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Чему равен угол C треугольника, если $\angle ACD=30°$, а $\angle BCD=70°$?
35. Начертите какой-нибудь треугольник. Постройте от руки на глаз равный ему треугольник. Проверьте правильность построения, измеряя соответствующие углы и стороны. Повторите упражнение.
36. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что $AB=5$ см. $BC=6$ см, $AC=7$ см. Найдите стороны треугольника PQR. Объясните ответ.
37. Треугольники ABC и PQR равны. Углы второго треугольника известны: $\angle P=40°$, $\angle Q=60°$, $\angle R=80°$. Найдите углы треугольника ABC.
38. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен 90°. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.
39. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что

$AB=5$ см, $QR=6$ см, $ZX=7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

40. Дан треугольник ABC. Существует ли другой, равный ему треугольник ABD?

41. Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.

42. Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли провести третью прямую, параллельную каждой из двух данных?

43. Может ли прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекать каждую его сторону? Почему?

44*[1]. Даны четыре точки: A, B, C и D. Известно, что точки A, B, C лежат на одной прямой и точки B, C, D также лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

45*. Даны четыре прямые a, b, c и d. Известно, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d также пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре данные прямые проходят через одну точку.

46*. Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

47*. Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC — точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются (рис. 28).

48*. Отрезки AB и CD, не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке E. Докажите, что отрезок AC не пересекает прямую BD (рис. 29).

49*. Докажите, что если луч, исходящий из вершины угла, пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, то он пересекает: 1) отрезок AC с концами на сторонах угла; 2) любой отрезок CD с концами на сторонах угла (рис. 30).

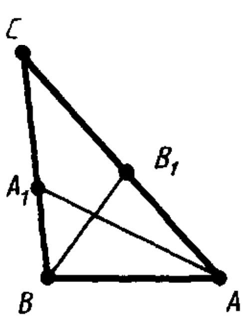


Рис. 28

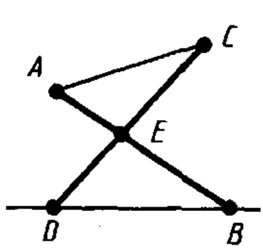


Рис. 29

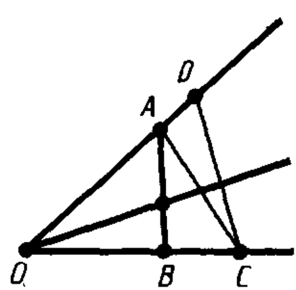


Рис. 30

---

[1] Звездочкой (*) отмечены задачи повышенной трудности.

50. Докажите, что две прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

51*. Точки A и C принадлежат прямой a. На полупрямой CA отложен отрезок CB, больший отрезка CA. 1) Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ. 2) Докажите, что точка A разбивает прямую a на две полупрямые: AB и AC.

§ 2. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

14. СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Определение. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

На рисунке 31 углы (a_1b) и (a_2b) смежные. У них сторона b общая, а стороны a_1 и a_2 являются дополнительными полупрямыми.

Пусть C — точка на прямой AB, лежащая между точками A и B, а D — точка, не лежащая на прямой AB (рис. 32). Тогда углы BCD и ACD смежные. У них сторона CD общая. Стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми прямой AB, так как точки A и B этих полупрямых разделяются начальной точкой C.

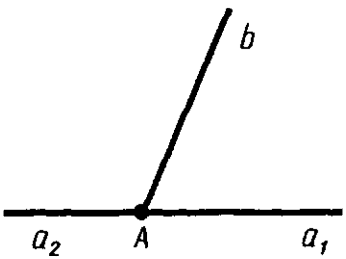


Рис. 31

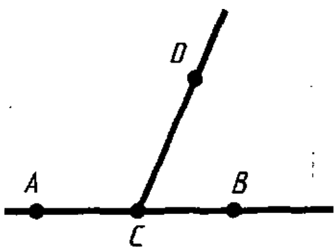


Рис. 32

Теорема 2.1. ***Сумма смежных углов равна 180°.***

Доказательство. Пусть $\angle(a_1b)$ и $\angle(a_2b)$ — данные смежные углы (см. рис. 31). Луч b проходит между сторонами a_1 и a_2 развернутого угла. Поэтому сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развернутому углу, т. е. $180°$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что ***если два угла равны, то смежные с ними углы равны.***

Из теоремы 2.1 следует также, что ***если угол не развернутый, то его градусная мера меньше 180°.***

Задача (3). Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Решение. Обозначим градусную меру меньшего из углов через x. Тогда градусная мера большего угла будет $2x$. Сумма углов равна 180°. Итак,

$$x+2x=180,\ 3x=180.$$

Отсюда $x=60$. Значит, наши смежные углы равны 60° и 120°.

Угол, равный 90°, называется *прямым углом.*

Из теоремы о сумме смежных углов следует, что ***угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.***

Угол, меньший 90°, называется *острым углом.* Угол, больший 90° и меньший 180°, называется *тупым.*

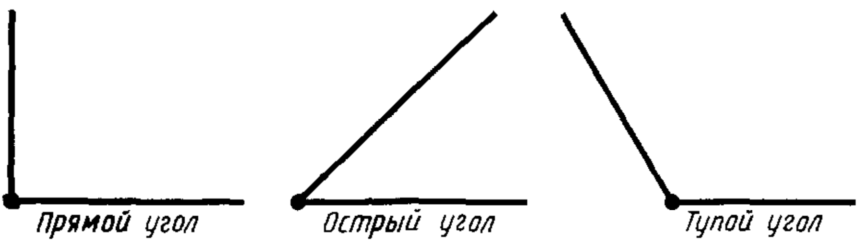


Рис. 33

Так как сумма смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым углом, тупой, а угол, смежный с тупым углом, острый. На рисунке 33 изображены три вида углов.

15. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Определение. Два угла называются *вертикальными,* если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

На рисунке 34 углы (a_1b_1) и (a_2b_2) вертикальные. Стороны a_2 и b_2 второго угла являются дополнительными полупрямыми сторон a_1 и b_1 первого угла.

Теорема 2.2. ***Вертикальные углы равны.***

Доказательство. Пусть (a_1b_1) и (a_2b_2) — данные вертикальные углы (рис. 34). Угол (a_1b_2) является смежным с углом (a_1b_1) и с углом (a_2b_2). Отсюда по теореме о сумме смежных углов заключаем, что каждый из углов (a_1b_1) и (a_2b_2) дополняет угол (a_1b_2) до 180°, т. е. углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны. Теорема доказана.

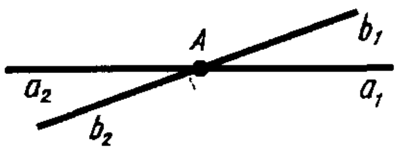


Рис. 34

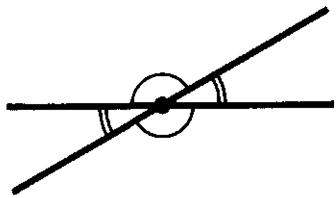


Рис. 35

Задача (9). Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.

Решение. Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные (рис. 35). Данные углы не могут быть смежными, так как их сумма равна 50°, а сумма смежных углов равна 180°. Значит, они вертикальные. Так как вертикальные углы равны и по условию их сумма 50°, то каждый из углов равен 25°.

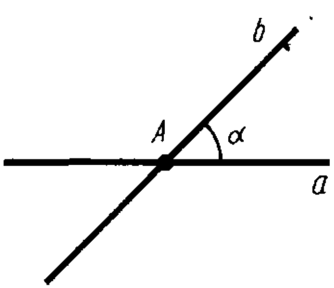


Рис. 36

16. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Пусть a и b — прямые, пересекающиеся в точке A (рис. 36). Каждая из этих прямых точкой A делится на две полупрямые. Полупрямые одной прямой образуют с полупрямыми другой прямой четыре угла. Пусть α — один из этих углов. Тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом.

Определение. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом (рис. 37).

Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. Запись $a \perp b$ читается: «Прямая a перпендикулярна прямой b».

Теорема 2.3. ***Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой a с начальной точкой A (рис. 38). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный $90°$. Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой a.

Допустим, что существует другая прямая, тоже проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1.

Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные каждый $90°$, отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный $90°$. Поэтому не может быть другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a. Теорема доказана.

Определение. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов их точку пересечения. Этот конец отрезка называется *основанием* перпендикуляра.

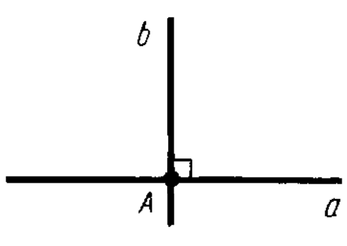


Рис. 37

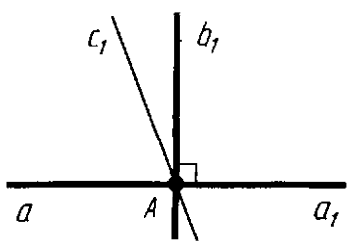


Рис. 38

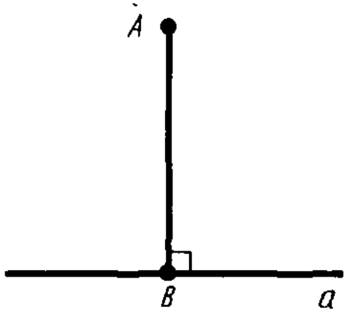


Рис. 39

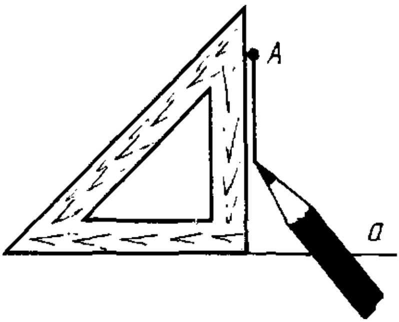


Рис. 40

На рисунке 39 перпендикуляр AB проведен из точки A к прямой a. Точка B — основание перпендикуляра. Для построения перпендикуляра пользуются чертежным угольником (рис. 40).

17. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

Способ доказательства, который мы применили в теореме 2.3, называется доказательством от противного. Этот способ доказательства состоит в том, что мы сначала делаем предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме. На этом основании заключаем, что наше предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы.

Поясним это на примере доказательства теоремы 2.3. Теоремой утверждается, что через каждую точку прямой можно провести только одну перпендикулярную ей прямую. Допустив, что таких прямых можно провести две, мы пришли к выводу, что от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить два угла с одной и той же градусной мерой (90°). А это противоречит аксиоме откладывания углов. Согласно этой аксиоме от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить только один угол с данной градусной мерой.

18. БИССЕКТРИСА УГЛА

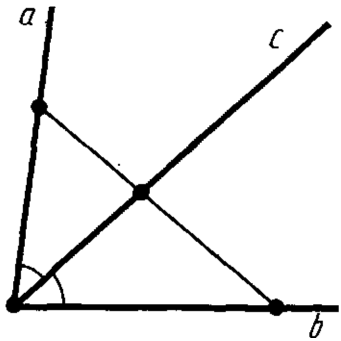


Рис. 41

О п р е д е л е н и е[1]. *Биссектрисой* угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

На рисунке 41 вы видите угол (ab). Луч c исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам:

$$\angle(ac) = \angle(bc) = \frac{\angle(ab)}{2}.$$

З а д а ч а (17). Докажите, что биссектриса угла образует с его сторонами углы не больше 90°.

Р е ш е н и е. Как мы знаем, градусная мера любого угла не больше 180°. Поэтому половина ее не больше 90°.

19. ЧТО НАДО ДЕЛАТЬ, ЧТОБЫ УСПЕВАТЬ ПО ГЕОМЕТРИИ

При изучении геометрии незнание чего-либо из пройденного материала может быть причиной непонимания нового материала. Приведем пример.

Допустим, на уроке учитель доказывает теорему о равенстве вертикальных углов. Как вы знаете, в этом доказательстве используются определение смежных углов и теорема о сумме смежных углов. Если вы не знаете, какие углы называются смежными, не знаете теоремы о сумме смежных углов, то вы это доказательство не поймете. В результате этот урок будет для вас пустой тратой времени. И к вашему незнанию смежных углов прибавится незнание теоремы о равенстве вертикальных углов.

Поэтому для того, чтобы хорошо успевать по геометрии, нужно знать основные результаты изученного материала. А для этого надо повторять пройденный материал по контрольным вопросам.

Повторять пройденный материал по контрольным вопросам надо так. Прочитайте вопрос. Уясните его себе. Если тре-

[1] В дальнейшем слово «определение» писать не будем, а определяемое понятие будем выделять *курсивом*.

буется дать определение какой-либо фигуры, мысленно дайт такое определение. Полезно сделать от руки чертеж определяемой фигуры. Если в вопросе речь идет о теореме, сформулируйте ее, уясните себе, в чем условие и заключение этоі теоремы. Сделайте от руки чертеж, иллюстрирующий содержание теоремы. Доказательство теоремы при каждом повторении давать необязательно.

Повторяйте пройденный материал каждый раз, когда при изучении нового материала вы обнаруживаете незнание чего-либо.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие углы называются смежными?
2. Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.
3. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
4. Какой угол называется прямым (острым, тупым)?
5. Докажите, что угол, смежный с прямым, есть прямой угол.
6. Какие углы называются вертикальными?
7. Докажите, что вертикальные углы равны.
8. Докажите, что если при пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.
9. Какие прямые называются перпендикулярными? Какой знак используется для обозначения перпендикулярности прямых?
10. Докажите, что через любую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.
11. Что такое перпендикуляр к прямой?
12. Объясните, в чем состоит доказательство от противного.
13. Что называется биссектрисой угла?

ЗАДАЧИ

1. Найдите углы, смежные с углами 30°; 45°; 60°; 90°.
2. Могут ли два смежных угла быть оба: 1) острыми; 2) тупыми; 3) прямыми? Обоснуйте ответ.
3. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.
4. Найдите смежные углы, если: 1) один из них на 30° больше другого; 2) их разность равна 40°; 3) один из них в 3 раза меньше другого; 4) они равны.
5. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают: 1) 6 ч; 2) 3 ч; 3) 4 ч?

6. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23.
7. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?
8. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?
9. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.
10. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.
11. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.
12. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна 270°.
13. Докажите, что если три из четырех углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны, то прямые перпендикулярны.
14. Как с помощью линейки проверить, является ли прямым угол в чертежном угольнике (рис. 42)?
15. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?
16. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°?
17. Докажите, что биссектриса угла образует с его сторонами углы не больше 90°.
18*. Докажите, что если луч исходит из вершины угла и образует с его сторонами равные острые углы, то он является биссектрисой угла.
19. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.
20. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
21. Найдите угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон данного угла, равного: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

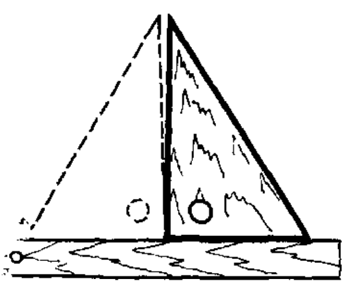


Рис. 42

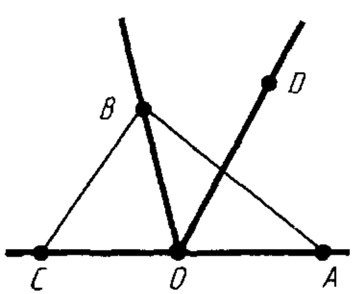


Рис. 43

22*. Из вершины O смежных углов AOB и COB проведен луч OD в полуплоскость, где проходит общая сторона углов OB (рис. 43). Докажите, что луч OD пересекает либо отрезок AB, либо отрезок BC. Какой из отрезков пересекает луч OD, если угол AOD меньше (больше) угла AOB? Объясните ответ.

23. Из вершины развернутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи b и c. Чему равен угол (bc), если: 1) $\angle(ab)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 2) $\angle(a_1b)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 3) $\angle(ab)=60°$, $\angle(a_1c)=30°$?

24. Из вершины развернутого угла (aa_1) проведены лучи b и c в одну полуплоскость. Известно, что $\angle(ab)=60°$, а $\angle(ac)=30°$. Найдите углы (a_1b), (a_1c) и (bc).

25. От полупрямой AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Найдите угол CAD, если: 1) $\angle BAC=80°$, $\angle BAD=170°$; 2) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$; 3) $\angle BAC=$ $=140°$, $\angle BAD=30°$; 4) $\angle BAC=60°$, $\angle BAD=70°$.

26*. Даны три луча a, b, c с общей начальной точкой. Известно, что $\angle(ab)=\angle(ac)=\angle(bc)=120°$. 1) Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами? 2) Может ли прямая пересекать все три данных луча? Объясните ответ.

§ 3. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

20. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.1 (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними). ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.***

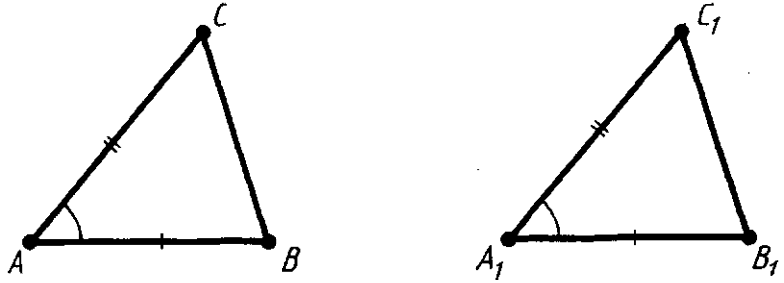


Рис. 44

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 44). Докажем, что треугольники равны.

Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1 (рис. 45, *а*).

Так как $A_1B_1 = A_1B_2$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 45, *б*). Так как $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1 (рис. 45, *в*). Так как $A_1C_1 = A_1C_2$, то вершина C_2 совпадает с вершиной C_1 (рис. 45, *г*).

Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.

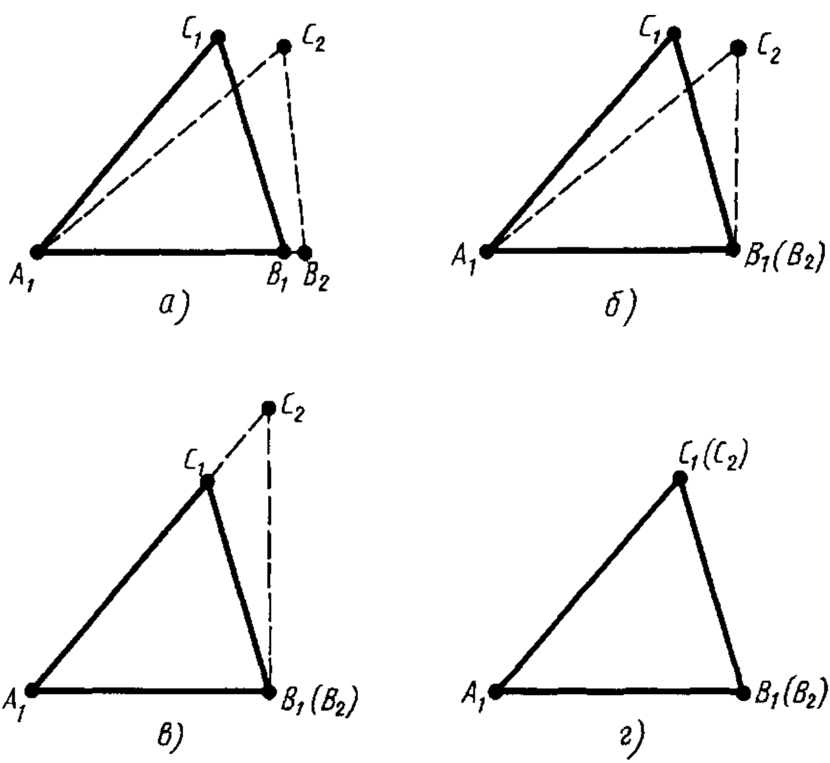


Рис. 45

Задача (1). Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC = 10$ м?

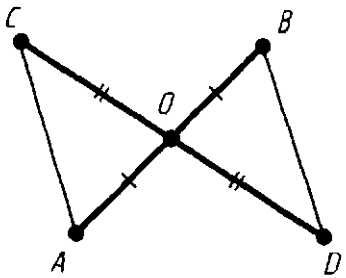


Рис. 46

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по первому признаку равенства треугольников (рис. 46). У них углы AOC и BOD равны как вертикальные, а $OA = OB$ и $OC = OD$ потому, что точка O является серединой отрезков AB и CD. Из равенства треугольников AOC и BOD следует равенство их сторон AC и BD. А так как по условию задачи $AC = 10$ м, то и $BD = 10$ м.

21. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АКСИОМ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ

Как мы знаем, при доказательстве теорем разрешается пользоваться аксиомами и доказанными ранее теоремами. Обычно в доказательстве ссылаются не на номер аксиомы по списку, а на ее содержание. Именно таким образом мы поступали в доказательстве первого признака равенства треугольников (теорема 3.1). Разберем еще раз это доказательство, указывая аксиомы, которые в нем используются.

Доказательство начинается словами: «Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1». Такой треугольник, как мы знаем, существует по аксиоме VIII.

Далее утверждается совпадение вершин B_1 и B_2 на том основании, что $A_1B_1 = A_1B_2$. Здесь используется аксиома откладывания отрезков (аксиома VI).

Затем утверждается совпадение лучей A_1C_2 и A_1C_1 на том основании, что $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$. Здесь используется аксиома откладывания углов (аксиома VII).

Наконец, утверждается совпадение вершин C_1 и C_2, так как $A_1C_1=A_2C_2$. Здесь снова используется аксиома VI.

Мы видим, что данное доказательство теоремы 3.1 опирается только на аксиомы.

22. ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.2 (признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам). ***Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$ (рис. 47). Докажем, что треугольники равны.

Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1.

Так как $A_1B_2=A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1. Так как $\angle B_1A_1C_2=\angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_1C_2=$ $=\angle A_1B_1C_1$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1, а луч B_1C_2 совпадает с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1.

Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.

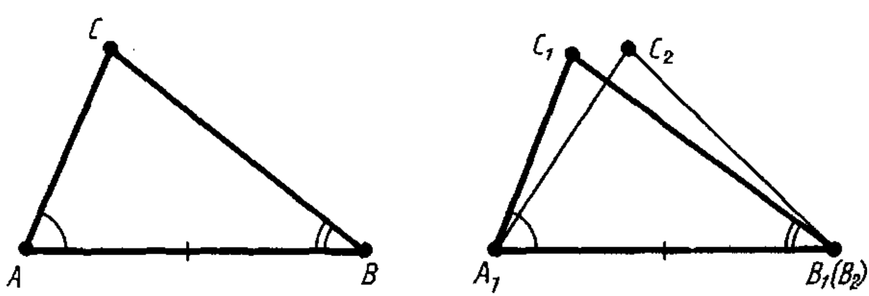


Рис. 47

23. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

На рисунке 48 изображен равнобедренный треугольник ABC. У него боковые стороны AC и BC, а основание AB.

Теорема 3.3 (свойство углов равнобедренного треугольника). ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB (рис. 48). Докажем, что у него $\angle A = \angle B$.

Треугольник CAB равен треугольнику CBA по первому признаку равенства треугольников. Действительно, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$. Теорема доказана.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним*.

Задача (12). Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник с равными сторонами: $AB = BC = CA$ (рис. 49). Так как $AB = BC$, то этот треугольник равнобедренный с основанием AC. По теореме 3.3 $\angle C = \angle A$. Так как $BC = CA$, то треугольник ABC равнобедренный с основанием AB. По теореме 3.3 $\angle A = \angle B$. Таким образом, $\angle C = \angle A = \angle B$, т. е. все углы треугольника равны.

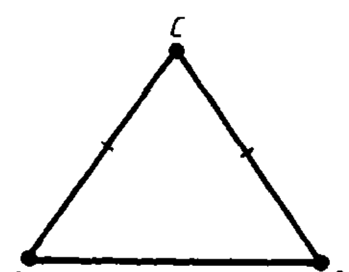


Рис. 48

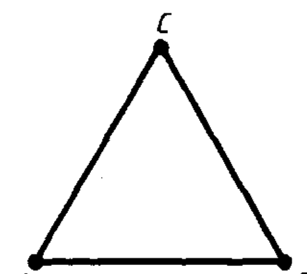


Рис. 49

24. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 3.4 (признак равнобедренного треугольника). ***Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.***

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle A = \angle B$ (рис. 50). Докажем, что он равнобедренный с основанием AB.

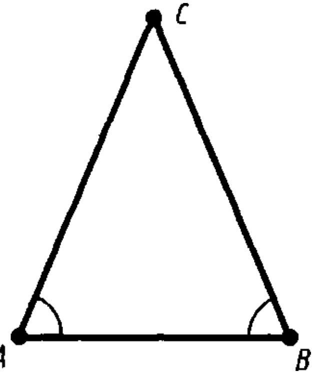


Рис. 50

Треугольник ABC равен треугольнику BAC по второму признаку равенства треугольников. Действительно, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$. Значит, по определению треугольник ABC равнобедренный. Теорема доказана.

Теорема 3.4 называется *обратной* теореме 3.3. Заключение теоремы 3.3 является условием теоремы 3.4. А условие теоремы 3.3 является заключением теоремы 3.4. Не всякая теорема имеет обратную, т. е. если данная теорема верна, то обратная теорема может быть неверна. Поясним это на примере теоремы о вертикальных углах. Эту теорему можно сформулировать так: если два угла вертикальные, то они равны. Обратная ей теорема была бы такой: если два угла равны, то они вертикальные. А это, конечно, неверно. Два равных угла вовсе не обязаны быть вертикальными.

Задача (16). Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 12.

Решение. В задаче 12 условие состоит в том, что треугольник равносторонний, а заключение — в том, что все углы треугольника равны. Поэтому обратная теорема должна формулироваться так: если у треугольника все углы равны, то он равносторонний.

Докажем эту теорему. Пусть ABC — треугольник с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C$. Так как $\angle A = \angle B$, то по теореме 3.4 $AC = CB$. Так как $\angle B = \angle C$, то по теореме 3.4 $AC = AB$. Таким образом, $AB = AC = CB$, т. е. все стороны треугольника равны. Значит, по определению треугольник ABC равносторонний.

25. ВЫСОТА, БИССЕКТРИСА И МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, которая содержит противолежащую сторону треугольника.

На рисунке 51 вы видите два треугольника, у которых проведены высоты из вершин B и B_1. На рисунке 51, *а* основание высоты лежит на стороне треугольника, на рисунке 51, *б* — на продолжении стороны треугольника.

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне (рис. 52, *а*).

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника (рис. 52, *б*).

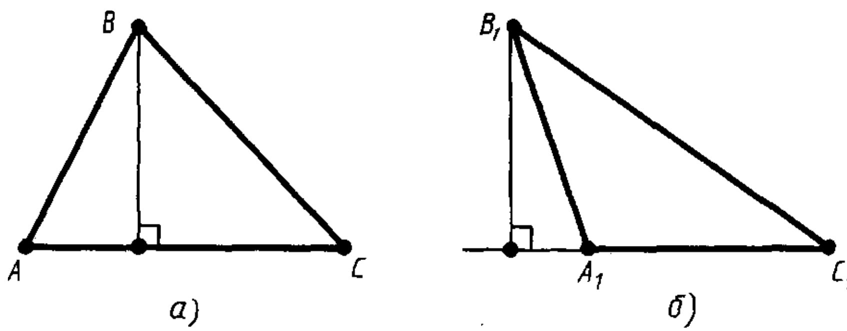


Рис. 51

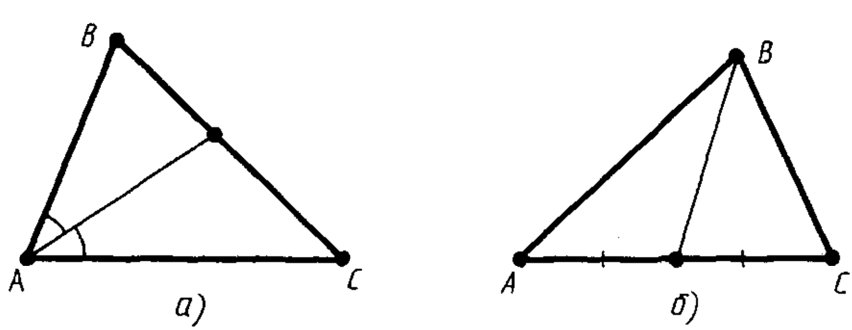


Рис. 52

26. СВОЙСТВО МЕДИАНЫ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема 3.5 (свойство медианы равнобедренного треугольника). ***В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.***

Доказательство. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — медиана, проведенная к основанию (рис. 53).

Треугольники CAD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников. (У них стороны AC и BC равны, потому что треугольник ABC равнобедренный. Углы CAD и CBD равны как углы при основании равнобедренного треугольника. Стороны AD и BD равны, потому что D — середина отрезка AB.)

Из равенства треугольников следует равенство углов: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Так как углы ACD и BCD равны, то CD — биссектриса. Так как углы ADC и BDC смежные и равны, то они прямые, поэтому CD — высота треугольника. Теорема доказана.

Задача (28). Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его биссектриса (рис. 54). Треугольники ACD и BCD равны по первому признаку. У них сторона CD общая, стороны AC и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника, а углы при вершине C равны, потому что CD — биссектриса. Из равенства треугольников следует равенство их сторон AD и BD. Значит, CD — медиана треугольника ABC. А по свойству медианы равнобедренного треугольника она является и высотой.

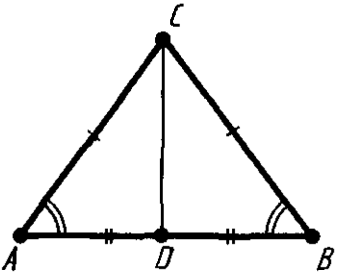


Рис. 53

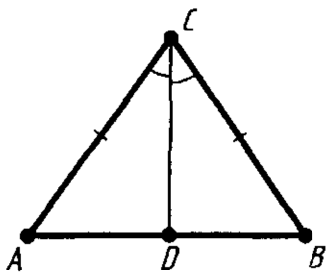


Рис. 54

27. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.6 (признак равенства треугольников по трем сторонам). ***Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ (рис. 55). Требуется доказать, что треугольники равны.

Допустим, треугольники не равны. Тогда у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Иначе они были бы равны по первому признаку.

Пусть $A_1B_1C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (см. рис. 55).

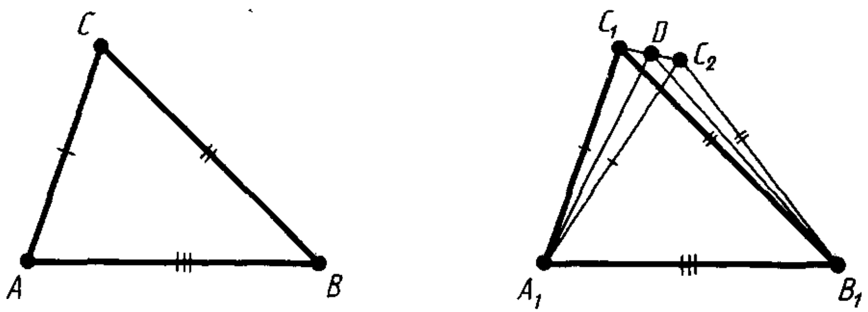


Рис. 55

Пусть D — середина отрезка C_1C_2. Треугольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ — равнобедренные с общим основанием C_1C_2. Поэтому их медианы A_1D и B_1D являются высотами. Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2. Прямые A_1D и B_1D не совпадают, так как точки A_1, B_1, D не лежат на одной прямой. Но через точку D прямой C_1C_2 можно провести только одну перпендикулярную ей прямую. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (29). У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle C=\angle C_1=90°$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

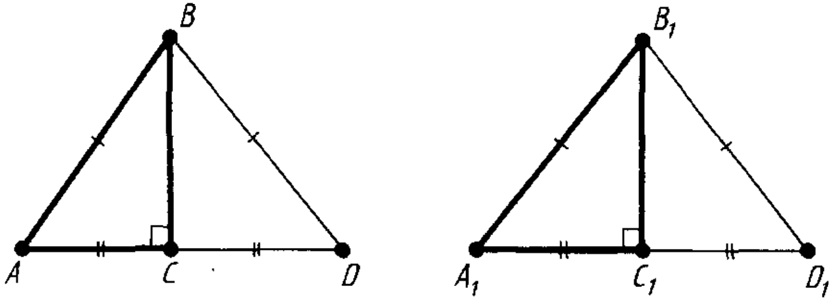


Рис. 56

Р е ш е н и е. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники (рис. 56). Построим треугольник CBD, равный треугольнику CBA, и треугольник $C_1D_1B_1$, равный треугольнику $C_1A_1B_1$.

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по третьему признаку. У них $AB=A_1B_1$ по условию задачи; $AD=A_1D_1$, так как $AC=A_1C_1$; $BD=B_1D_1$, так как $BD=AB$, $B_1D_1=$ $=A_1B_1$. Из равенства треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует равенство углов: $\angle A=\angle A_1$. Так как по условию $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, а $\angle A=\angle A_1$, по доказанному, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку.

28. КАК ГОТОВИТЬСЯ ПО УЧЕБНИКУ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Допустим, по какой-нибудь причине, например по болезни, вы не были на уроке. Тогда материал этого урока вам придется изучить самостоятельно по учебнику. Текст учебника надо читать не спеша, по предложениям, не переходя к следующему предложению, не поняв смысла предыдущего. Рассмотрим конкретный пример — доказательство третьего признака равенства треугольников. Итак, читаем текст учебника:

«Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника...»

Чтобы понять смысл этого предложения, надо знать, что такое треугольник, его стороны и равенство сторон. Вы все это знаете, поэтому смысл прочитанного предложения вам ясен. Читаем дальше: «...то такие треугольники равны».

Чтобы понять смысл этого предложения, надо знать, какие треугольники называются равными. Но вы и это знаете. Таким образом, смысл теоремы вам ясен. Читаем доказательство.

Доказательство. «Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ (рис. 55). Требуется доказать, что треугольники равны.»

Здесь все ясно. Обозначаются треугольники, которые удовлетворяют условию теоремы и равенство которых надо доказать.

«Допустим, треугольники не равны».

Вы видите, что делается предположение, противоположное утверждению теоремы. Значит, в ходе дальнейшего рассуждения мы должны прийти к противоречию (доказательство от противного).

«Тогда у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Иначе они были бы равны по первому признаку».

Вспомните первый признак равенства треугольников. Убедитесь в том, что если выполнено хотя бы одно из равенств $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, а это противоречит сделанному предположению.

«Пусть $A_1B_1C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (см. рис. 55)».

Здесь все ясно. Этой фразой начиналось доказательство и первого и второго признаков.

«Пусть D — середина отрезка C_1C_2».

Вы знаете, что такое середина отрезка.

«Треугольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ равнобедренные с общим основанием C_1C_2».

Чтобы понять смысл этого утверждения, надо знать, какой треугольник называется равнобедренным и какая его сторона называется основанием.

«Поэтому их медианы A_1D и B_1D являются высотами».

Смысл этого предложения вам ясен. Вы знаете, что такое медиана и высота, и знаете свойство медианы равнобедренного треугольника.

«Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2».

Ясно.

«Прямые A_1D и B_1D не совпадают, так как точки A_1, B_1, D не лежат на одной прямой».

Ясно. Если бы точка D лежала на прямой A_1B_1, то точки C_1 и C_2 были бы в разных полуплоскостях относительно прямой A_1B_1.

«Но через точку D прямой C_1C_2 можно провести только одну перпендикулярную ей прямую».

Ясно. Вы знаете такую теорему.

«Мы пришли к противоречию».

Ясно.

«Теорема доказана».

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Докажите первый признак равенства треугольников. Какие аксиомы используются при доказательстве теоремы 3.1?
2. Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.
3. Какой треугольник называется равнобедренным? Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами? Какая сторона называется основанием?
4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
5. Какой треугольник называется равносторонним?
6. Докажите, что если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.
7. Объясните, что такое обратная теорема. Приведите пример. Для всякой ли теоремы верна обратная?
8. Что такое высота треугольника?
9. Что такое биссектриса треугольника?
10. Что такое медиана треугольника?
11. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
12. Докажите третий признак равенства треугольников.

ЗАДАЧИ

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC=10$ м?

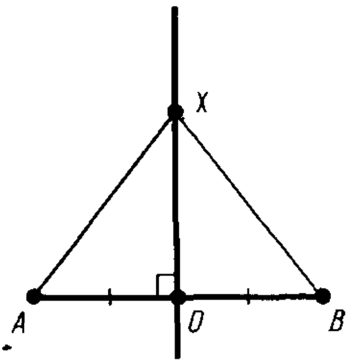


Рис. 57

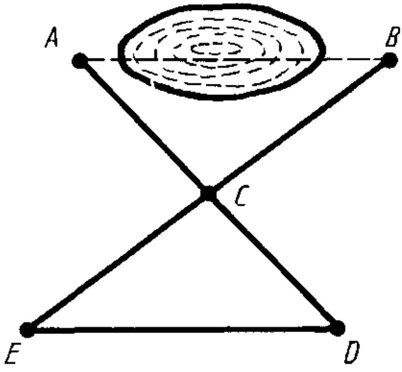


Рис. 58

2. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB (рис. 57). Докажите, что каждая точка X этой прямой одинаково удалена от точек A и B.
3. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
4. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 58), выбирают такую точку C, из которой можно пройти и к точке A, и к точке B и из которой видны обе эти точки. Провешивают[1] расстояния AC и BC, продолжают их за точку C и отмеряют $CD = AC$ и $EC = CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию. Объясните почему.

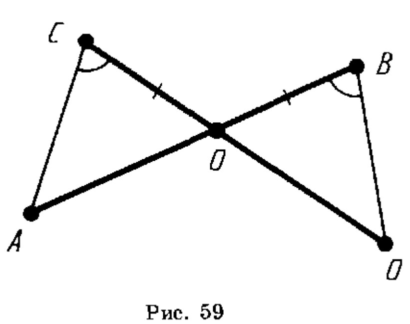


Рис. 59

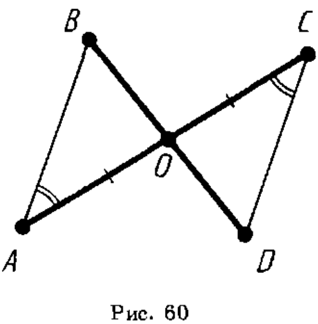


Рис. 60

[1] Отмечают направление шестами-вехами.

5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 59). Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO=CO$.
6. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 60). Докажите равенство треугольников BAO и DCO, если известно, что угол BAO равен углу DCO и $AO=CO$.
7*. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.
8. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB (рис. 61) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE. Выбирают на местности точку D, из которой видна точка A и можно пройти к точкам B и E. Провешивают прямые BDQ и EDF и отмеряют $FD=DE$ и $DQ=BD$. Затем идут по прямой FQ, глядя на точку A, пока не найдут точку H, которая лежит на прямой AD. Тогда HQ равно искомому расстоянию. Докажите.
9. Периметр (сумма длин сторон) равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Найдите длину боковой стороны.
10. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание.
11. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: 1) основание меньше боковой стороны на 3 м; 2) основание больше боковой стороны на 3 м.
12. Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.
13. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA

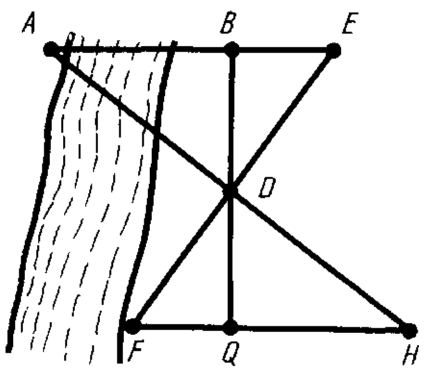


Рис. 61

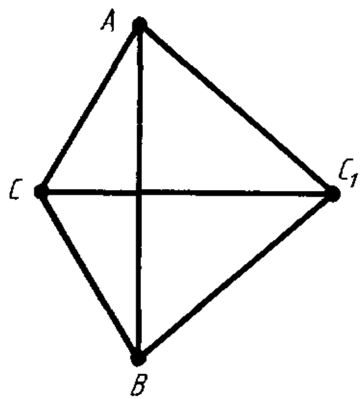


Рис. 62

и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников: 1) CAB_1 и CBA_1; 2) ABB_1 и BAA_1.

14. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1. Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольники AB_1C и BA_1C равны.

15. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1. Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные (рис. 62).

16. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 12.

17. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если треугольники ABC_1 и BAC_2 равны (рис. 63).

18. 1) Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются также вершинами равнобедренного треугольника.

2) Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются также вершинами равностороннего треугольника.

19. 1) Начертите треугольник с острыми углами. С помощью чертежного угольника и линейки проведите в нем высоты. Повторите упражнение для треугольника, у которого один угол тупой.

2) Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите в нем биссектрисы.

3) Начертите треугольник. С помощью линейки с делениями проведите в нем медианы.

20. Докажите, что у равнобедренного треугольника: 1) биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны; 2) медианы, проведенные из тех же вершин, тоже равны.

21. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: 1) медианы, проведенные из вершин A и A_1, равны;

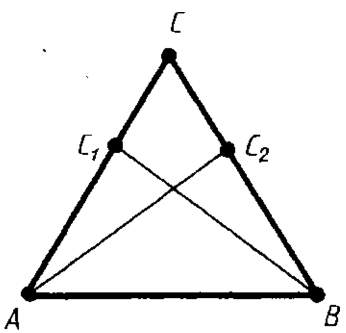


Рис. 63

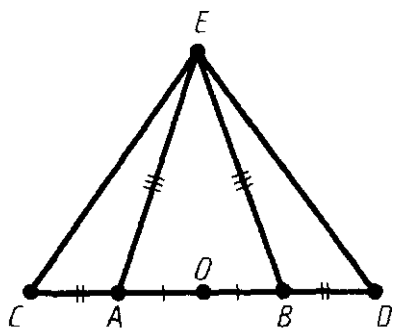


Рис. 64

2) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1, равны.

22. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD (рис. 64).

23. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

24. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM. На ней взята точка D. Докажите равенство треугольников: 1) ABD и CBD; 2) AMD и CMD.

25. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него: 1) медиана BD является высотой; 2) высота BD является биссектрисой; 3) биссектриса BD является медианой.

26. Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведенные к основанию, лежат на одной прямой.

27. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.

28. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

29. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

30. Докажите, что у равнобедренного треугольника высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

31. Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.

32*. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны (рис. 65).

33. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC.

34. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

35. Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что если отрезки AC, CB, BD и AD равны, то луч AB является биссектрисой угла CAD и луч CD — биссектрисой угла ACB (рис. 66).

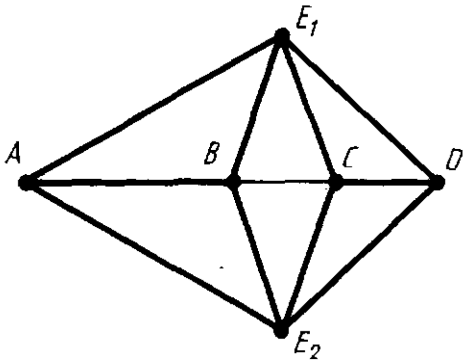


Рис. 65

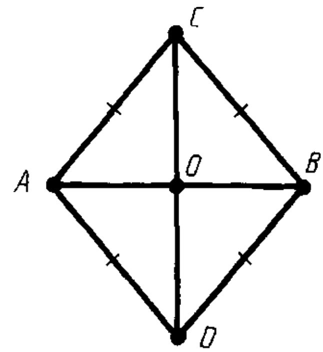


Рис. 66

36*. Докажите, что в задаче 35 прямые AB и CD перпендикулярны.

37. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 67). Докажите, что: 1) треугольники CBD и DAC равны; 2) прямая CD делит отрезок AB пополам.

38. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO=OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.

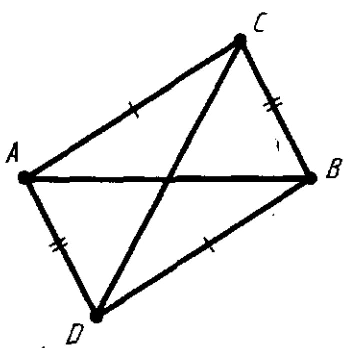


Рис. 67

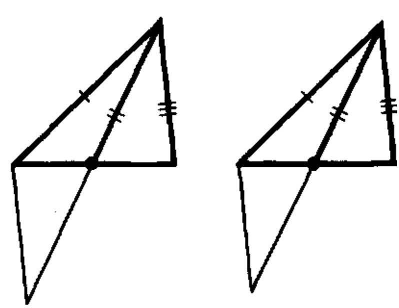


Рис. 68

39. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины (рис. 68).

40. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует с ней медиана.

§ 4. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

29. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ

Теорема 4.1. ***Две прямые, параллельные третьей, параллельны.***

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Допустим, что прямые a и b не параллельны (рис. 69). Тогда они пересекаются в некоторой точке C. Значит, через точку C проходят две прямые, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Теорема доказана.

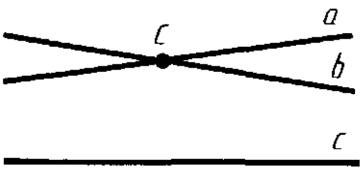


Рис. 69

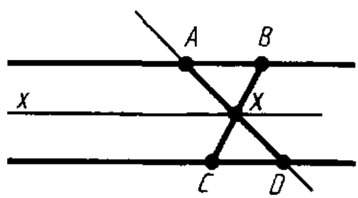


Рис. 70

Задача (4). Прямые AB и CD параллельны. Докажите, что если отрезок BC пересекает прямую AD, то точка пересечения принадлежит отрезку AD (рис. 70).

Решение. Пусть X — точка пересечения отрезка BC с прямой AD. Проведем через нее прямую x, параллельную прямой AB. Она будет параллельна и прямой CD. Прямая x разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки B и C лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок BC пересекает прямую x (в точке X). Точка A лежит в той же полуплоскости, что и B, а точка D — в той же полуплоскости, что и C. Поэтому отрезок AD пересекает прямую x. А точкой пересечения является точка X отрезка BC.

30. УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Пусть AB и CD — две прямые и AC — третья прямая, пересекающая прямые AB и CD (рис. 71). Прямая AC по отношению к прямым AB и CD называется *секущей*.

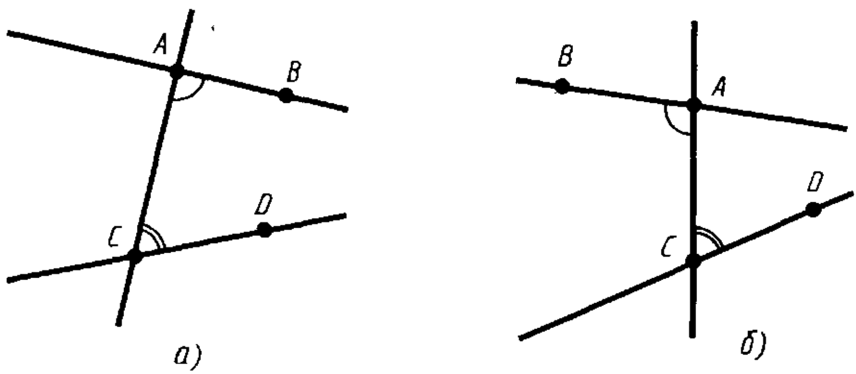


Рис. 71

Пары углов, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей AC, имеют специальные названия.

Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются ***внутренними односторонними*** (рис. 71, *а*).

Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются ***внутренними накрест лежащими*** (рис. 71, *б*).

Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Внутренние накрест лежащие углы одной пары, например $\angle 1$ и $\angle 2$, являются смежными внутренним накрест лежащим углам другой пары: $\angle 3$ и $\angle 4$ (рис. 72).

Поэтому если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны.

Пара внутренних накрест лежащих углов, например $\angle 1$ и $\angle 2$, и пара внутренних односторонних углов, например $\angle 2$ и

$\angle 3$, имеют один угол общий — $\angle 2$, а два других угла смежные: $\angle 1$ и $\angle 3$.

Поэтому если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°. И обратно: если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны.

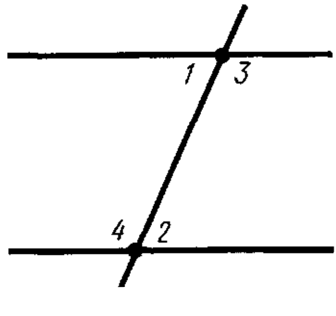


Рис. 72

31. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Теорема 4.2 (признак параллельности прямых). ***Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть прямые a и b образуют с секущей AB равные внутренние накрест лежащие углы (рис. 73, *а*). Допустим, прямые a и b не параллельны, а значит, пересекаются в некоторой точке C (рис. 73, *б*).

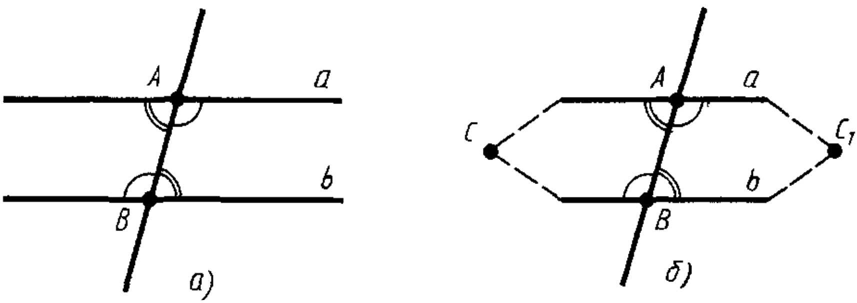


Рис. 73

Секущая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит точка C. Построим треугольник BAC_1, равный треугольнику ABC, с вершиной C_1 в другой полуплоскости. По условию внутренние накрест лежащие углы при параллельных a, b и секущей AB равны. Так как соответствующие углы треугольников ABC и BAC с вершинами A и B равны, то они совпадают с внутренними накрест лежащими углами. Значит, прямая AC_1 совпадает с прямой a, а прямая BC_1

совпадает с прямой b. Получается, что через точки C и C_1 проходят две различные прямые a и b. А это невозможно. Значит, прямые a и b параллельны.

Если у прямых a и b и секущей AB сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то, как мы знаем, внутренние накрест лежащие углы равны. Значит, по доказанному выше, прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Из теоремы 4.2 следует, что ***две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.***

Если у пары внутренних накрест лежащих углов один угол заменить вертикальным ему, то получится пара углов, которые называются *соответственными углами* данных прямых с секущей.

Углы 1 и 2 на рисунке 74 внутренние накрест лежащие, а углы 1 и 3 соответственные.

Из равенстства внутренних накрест лежащих углов следует равенство соответственных углов, и наоборот. Отсюда получается признак параллельности прямых по соответственным углам. Именно: ***прямые параллельны, если соответственные углы равны.***

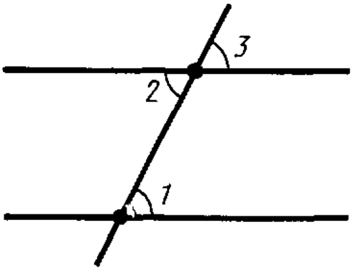


Рис. 74

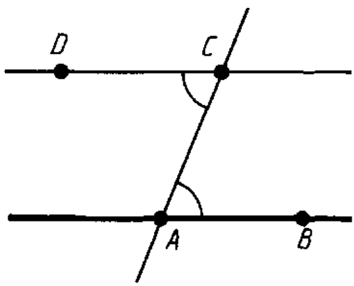


Рис. 75

Задача (8). Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.

Решение. Прямая AC разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 75). Точка B лежит в одной из них. Отложим от полупрямой CA в другую полуплоскость угол ACD, равный углу CAB. Тогда прямые AB и CD будут параллельны. В самом деле, для этих прямых и секущей AC углы BAC и DCA внутренние накрест лежащие. А так как они равны, то прямые AB и CD параллельны.

Сопоставляя утверждение задачи 8 и аксиомы IX (основного свойства параллельных прямых), приходим к важному выводу: ***через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одну.***

32. СВОЙСТВО УГЛОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Теорема 4.3 (обратная теореме 4.2). ***Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна*** 180°.

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые и c — прямая, пересекающая их в точках A и B. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей c с прямыми a_1 и b, были равны (рис. 76).

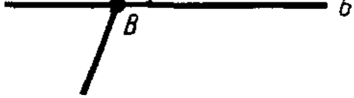


Рис. 76

По признаку параллельности прямых прямые a_1 и b параллельны. А так как через точку A проходит только одна прямая, параллельная прямой b, то прямая a совпадает с прямой a_1.

Значит, внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей с параллельными прямыми a и b, равны. Теорема доказана.

Из свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, следует, что ***если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Задача (13). Прямые AC и BD параллельны, причем точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC (рис. 77). Докажите, что: 1) углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие относительно секущей BC; 2) луч BC проходит между сторонами угла ABD; 3) углы CAB и DBA внутренние односторонние относительно секущей AB.

Решение. 1) Углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие потому, что точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC.

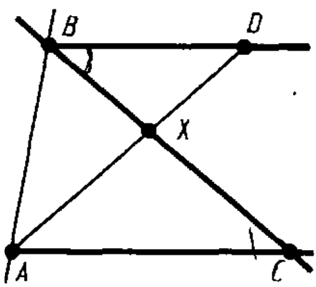


Рис. 77

2) Луч BC проходит между сторонами угла ABD потому, что он пересекает отрезок AD с концами на сторонах угла (задача 4).

3) Углы CAB и DBA внутренние односторонние потому, что точки C и D лежат по одну сторону от секущей AB, а именно в полуплоскости, где лежит точка X пересечения отрезков BC и AD.

33. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема 4.4. ***Сумма углов треугольника равна*** $180°$.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Проведем через вершину B прямую, параллельную прямой AC. Отметим на ней точку D так, чтобы точки A и D лежали по разные стороны от прямой BC (рис. 78).

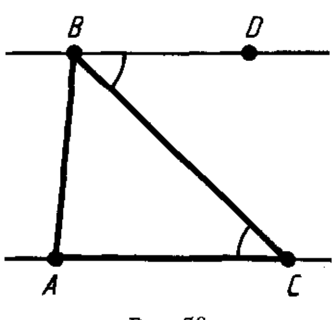


Рис. 78

Углы DBC и ACB равны как внутренние накрест лежащие, образованные секущей BC с параллельными прямыми AC и BD. Поэтому сумма углов треугольника при вершинах B и C равна углу ABD.

А сумма всех трех углов треугольника равна сумме углов ABD и BAC. Так как эти углы внутренние односторонние для параллельных AC и BD и секущей AB, то их сумма равна 180°. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 следует, что ***у любого треугольника хотя бы два угла острые.***

Действительно, допустим, что у треугольника только один острый угол или вообще нет острых углов. Тогда у этого треугольника есть два угла, каждый из которых не меньше 90°. Сумма этих двух углов уже не меньше 180°. А это невозможно, так как сумма всех углов треугольника равна 180°. Что и требовалось доказать.

Задача (30). Чему равны углы равностороннего треугольника?

Решение. У равностороннего треугольника, как мы знаем, все углы равны. Так как они в сумме дают 180°, то каждый из них равен 60°.

34. ВНЕШНИЕ УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 79).

Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой же вершине, его иногда называют *внутренним углом.*

Рис. 79

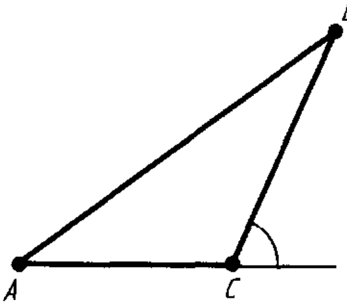


Рис. 80

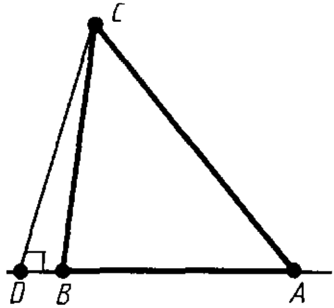


Рис. 81

Теорема 4.5. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 80). По теореме о сумме углов треугольника

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Отсюда следует, что

$$\angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

В правой части этого равенства стоит градусная мера внешнего угла треугольника при вершине C. Теорема доказана.

Из теоремы 4.5 следует, что ***внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.***

Задача (35). В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими точками, если углы A и B треугольника острые?

Решение. Точка B не может лежать между точками A и D. Если бы она лежала между точками A и D (рис. 81), то острый угол ABC как внешний угол треугольника CBD был бы больше прямого угла CDB. Точно так же доказывается, что и точка A не может лежать между точками B и D. Значит, точка D лежит между точками A и B.

35. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то у прямоугольного треугольника только один прямой угол. Два других угла прямоугольного треугольника острые. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $180° - 90° = 90°$.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами* (рис. 82).

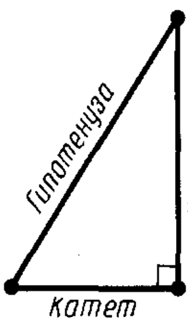


Рис. 82

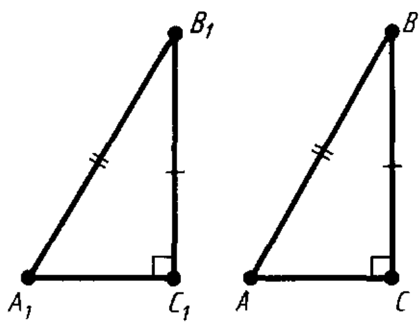


Рис. 83

Отметим следующий признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету:

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 83).

Доказательство этого признака дано в виде решения задачи 29 к § 3.

З а д а ч а (43). Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и углом B, равным 30° (рис. 84). Построим треугольник DBC, равный треугольнику ABC, как показано на рисунке 84.

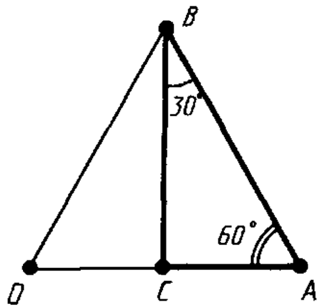


Рис. 84

У треугольника ABD все углы равны (60°), поэтому он равносторонний. Так как $AC = \frac{1}{2}AD$, а $AD = AB$, то $AC = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать.

36. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ПРЯМОЙ

Теорема 4.6. ***Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — не лежащая на ней точка (рис. 85). Проведем через какую-нибудь точку прямой a перпендикулярную прямую. А теперь проведем через точку A параллельную ей прямую b. Она будет перпендикулярна прямой a, так как прямая a, будучи перпендикулярна одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой. Отрезок AB прямой b и есть перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a.

Докажем единственность перпендикуляра AB. Допустим,

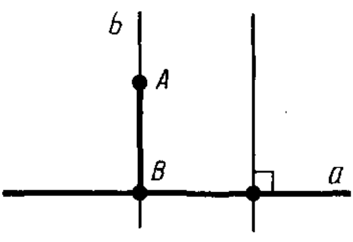


Рис. 85

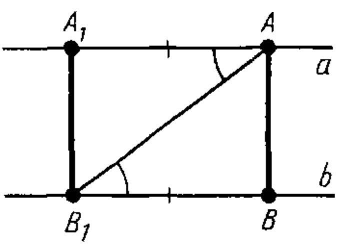


Рис. 86

существует другой перпендикуляр AC. Тогда у треугольника ABC будут два прямых угла. А это, как мы знаем, невозможно. Теорема доказана.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой.*

Задача (50). Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

Решение. Пусть a и b — параллельные прямые и A, A_1 — любые точки на прямой a (рис. 86). Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1B_1 на прямую b. Отложим из точки B_1 на прямой b отрезок B_1B, равный отрезку AA_1, так, чтобы точки A_1 и B были по разные стороны прямой AB_1.

Тогда треугольники AB_1A_1 и B_1AB равны по первому признаку. У них сторона AB_1 общая, $AA_1 = BB_1$ по построению, а углы B_1AA_1 и AB_1B равны как внутренние накрест лежащие параллельных a и b с секущей AB_1.

Из равенства треугольников следует, что AB есть перпендикуляр к прямой b и $AB = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

Как видим, расстояния от всех точек прямой до параллельной прямой равны. Поэтому говорят, что параллельные прямые равноотстоящие.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

37. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Первоначальные сведения о свойствах геометрических фигур люди нашли, наблюдая окружающий мир и в результате практической деятельности. Со временем ученые заметили, что некоторые свойства геометрических фигур можно вывести из других свойств путем рассуждения. Так возникли теоремы и доказательства.

Появилось естественное желание по возможности сократить число тех свойств геометрических фигур, которые берутся непосредственно из опыта. Утверждения оставшихся без дока-

Н. И. Лобачевский — русский математик (1792—1856)

зательства свойств стали аксиомами. Таким образом, аксиомы имеют опытное происхождение.

Геометрия в ранний период своего развития достигла особенно высокого уровня в Египте. В первом тысячелетии до иашей эры геометрические сведеиия от египтян перешли к грекам. За период с VII по III век до нашей эры греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми теоремами, но сделали также серьезные шаги к строгому ее обоснованию. Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена Евклидом (330—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала».

Изложение геометрии в «Началах» Евклида построено на системе аксиом. Эта система аксиом отличается от системы аксиом, принятой в данном учебнике. Но в ней также есть аксиома параллельных.

Аксиома параллельных в отличие от других аксиом не подкрепляется наглядными соображениями. Может быть, поэтому со времен Евклида математики многих стран пытались доказать ее как теорему. Но это никому не удавалось. Наконец, в XIX веке было доказано, что это невозможно сделать. Первым, кто обоснованно высказал это утверждение, был великнй русский математик Николай Иванович Лобачевский.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.
2. Объясните, какне углы называются внутренними односторонними. Какие углы называются внутренними накрест лежащими?
3. Докажите, что если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°.

4. Докажите признак параллельности прямых.
5. Объясните, какие углы называются соответственными. Докажите, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то соответственные углы тоже равны, и наоборот.
6. Докажите, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на этой прямой?
7. Докажите, что если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
8. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
9. Докажите, что сумма углов треугольника равна 180°.
10. Докажите, что у любого треугольника по крайней мере два угла острые.
11. Что такое внешний угол треугольника?
12. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
13. Докажите, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
14. Какой треугольник называется прямоугольным?
15. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
16. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой? Какие стороны называются катетами?
17. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
18. Докажите, что из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.
19. Что называется расстоянием от точки до прямой?
20. Объясните, что такое расстояние между параллельными прямыми.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Докажите, что если две прямые пересекаются, то любая третья прямая пересекает по крайней мере одну из этих прямых.

3. Дано: $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Докажите, что $a \parallel d$.
4. Прямые AB и CD параллельны. Докажите, что если отрезок BC пересекает прямую AD, то точка пересечения принадлежит отрезку AD (см. рис. 70).
5. Дан треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка B_1, а на стороне AC — точка C_1 (рис. 87). Назовите внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы при прямых AB, AC и секущей B_1C_1.
6. Назовите внутренние иакрест лежащие и внутренние одностороиние углы на рисуике 72.
7. Отрезки AD и BC пересекаются. Для прямых AC и BD и секущей BC иазовите пару виутрениих иакрест лежащих углов. Для тех же прямых и секущей AB назовите пару внутренних одиосторонних углов. Объясиите ответ.
8. Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.
9. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными и секущей, параллельны, т. е. лежат иа параллельных прямых.
10. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E и делятся этой точкой пополам. Докажите, что прямые AC и BD параллельиы.
11. Треугольиики ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разиые стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
12. Угол ABC равен $80°$, а угол BCD равеи $120°$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельиыми? Обосиуйте ответ.
13. Прямые AC и BD параллельиы, причем точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC (рис. 77). Докажите, что: 1) углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие относительно секущей BC; 2) луч BC проходит между сторонами угла ABD; 3) углы CAB и DBA внутренние односторонние относительно секущей AB.
14. 1) Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна $30°$. Найдите эти углы.

    2) Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна $150°$. Чему равны эти углы?
15. Одни из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $72°$. Найдите остальные семь углов.
16. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $30°$. Может ли один из остальных семи углов равняться $70°$? Объясните ответ.

17. Докажите, что две прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

18. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два угла равны: 1) 50° и 30°; 2) 40° и 75°; 3) 65° и 80°; 4) 25° и 120°.

19. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

20. Может ли в треугольнике быть: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) два прямых угла?

21. Может ли быть тупым угол при основании равнобедренного треугольника?

22. Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если угол при основании у него равен: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.

23. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол между боковыми сторонами равен: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.

24. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы.

25. Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные углы. Сколько решений имеет задача?

26. Докажите, что если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, то этот треугольник равносторонний.

27. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Найдите углы треугольника ABC, если угол ADC равен: 1) 60°; 2) 75°; 3) α.

28. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB равнобедренные (рис. 88).

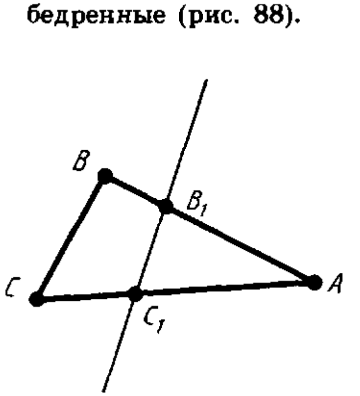


Рис. 87

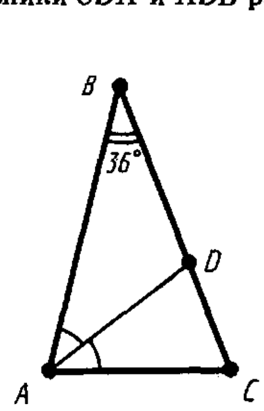


Рис. 88

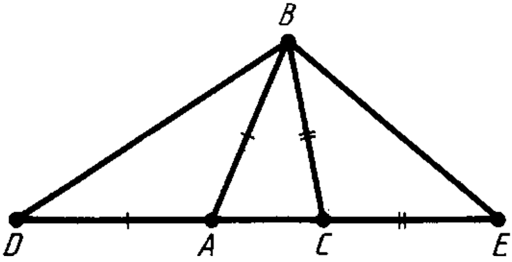


Рис. 89

29. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Точка их пересечения обозначена D. Найдите угол ADB, если: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$.

30. Чему равны углы равностороннего треугольника?

31. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

32. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите углы треугольника.

33. Найдите углы треугольника, зная, что внешние углы при двух его вершинах равны 120° и 150°.

34. Два внешних угла треугольника равны 100° и 150°. Найдите третий внешний угол.

35. В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если углы A и B треугольника острые?

36. В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если угол A тупой? Обоснуйте ответ.

37. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

38. Сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах A и B, взятых по одному для каждой вершины, равна 240°. Чему равен угол C треугольника?

39. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC отложены отрезки $AD = AB$ и $CE = CB$ (рис. 89). Как найти углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC?

40. У треугольника один из внутренних углов равен 30°, а один из внешних 40°. Найдите остальные внутренние углы треугольника.

41. Из вершины прямого угла треугольника ABC проведена высота BD. Найдите угол CBD, зная, что: 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$.

42. Из вершины тупого угла B треугольника ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольников ABD и CBD, зная, что $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

43. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

44. Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.

45. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABD.

46. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A=70°$, $\angle C=80°$.

47*. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

48. Прямая a пересекает отрезок BC в его середине. Докажите, что точки B и C находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

49. Отрезок BC пересекает прямую a в точке O. Расстояния от точек B и C до прямой a равны. Докажите, что точка O является серединой отрезка BC.

50. Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

51. Докажите, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до прямых, содержащих противолежащие им стороны, равны.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

38. ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности.

Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (рис. 90).

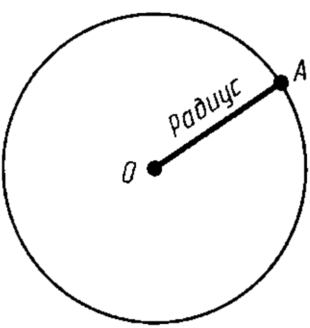


Рис. 90

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. На рисунке 91 BC — хорда, AD — диаметр.

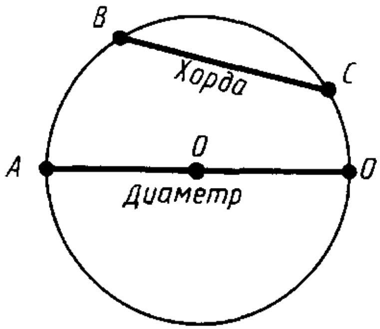


Рис. 91

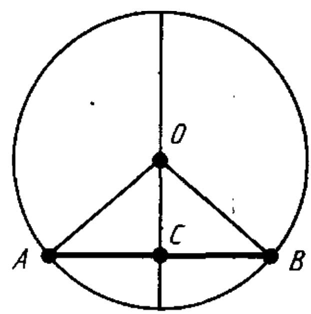


Рис. 92

З а д а ч а (3). Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.

Р е ш е н и е. Пусть AB — хорда окружности и C — ее середина (рис. 92). Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB. У него стороны OA и OB равны как радиусы окружности. По свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, отрезок OC является высотой. Поэтому диаметр окружности, проведенный через середину хорды, перпендикулярен хорде.

39. ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Т е о р е м а 5.1. ***Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — данный треугольник и O — центр описанной около него окружности (рис. 93). Треугольник AOC равнобедренный: у него стороны OA и OC

равны как радиусы. Медиана OD этого треугольника одновременно является его высотой. Поэтому центр окружности лежит на прямой, перпендикулярной стороне AC и проходящей через ее середину. Точно так же доказывается, что центр окружности лежит на перпендикулярах к двум другим сторонам треугольника. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, часто называют *серединным перпендикуляром*. В связи с этим иногда говорят, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпсидикуляров к сторонам треугольника.

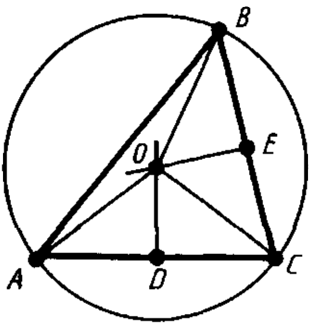


Рис. 93

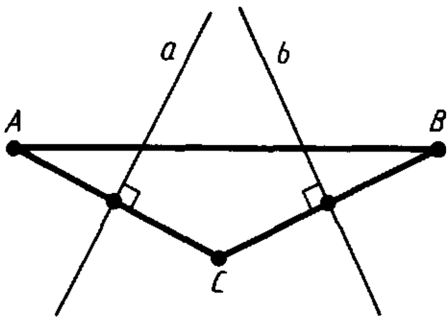


Рис. 94

З а д а ч а (6). Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — треугольник и a, b — серединные перпендикуляры к его сторонам AC и BC (рис. 94). Допустим, прямые a и b не пересекаются, а значит, параллельны. Прямая AC перпендикулярна прямой a. Прямая BC перпендикулярна прямой b, а значит, и прямой a, так как прямые a и b параллельны. Таким образом, обе прямые AC и BC перпендикулярны прямой a, а значит, параллельны. Но это неверно. Прямые AC и BC пересекаются в точке C. Мы пришли к противоречию. Утверждеиие доказано.

40. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*.

На рисунке 95 прямая a проведена через точку окружности A перпендикулярно к радиусу OA. Прямая a является касательной к окружности. Точка A является точкой касания. Можно сказать также, что окружность касается прямой a в точке A.

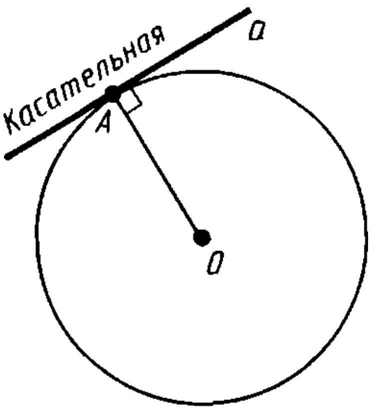


Рис. 95

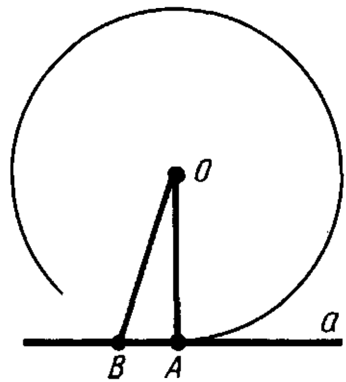


Рис. 96

З а д а ч а (8). Докажите, что касательная к окружиости не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.

Р е ш е н и е. Пусть a — касательная к окружности в точке A (рис. 96). Допустим, касательная и окружность имеют, кроме точки A, общую точку B, отличную от A. Треугольиик AOB равнобедренный с основанием AB. У него боковые стороиы OA и OB — радиусы окружности. Так как у равиобедрениого треугольника углы при основании равны, а угол при вершине A прямой, то у этого треугольника два прямых угла. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

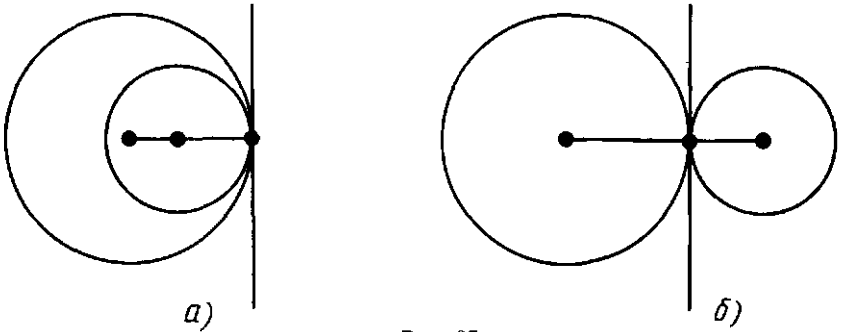


Рис. 97

Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную (рис. 97). Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 97, *а*). Касание окружностей называется *внешним*, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 97, *б*).

41. ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема 5.2. ***Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр вписанной в него окружности, D, E и F — точки касания окружности со сторонами (рис. 98). Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза AO общая, а катеты OD и OE равны как радиусы. Из равенства треугольников следует равенство углов OAD и OAE. А это значит, что точка O лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины A. Точно так же доказывается, что точка O лежит на двух других биссектрисах треугольника. Теорема доказана.

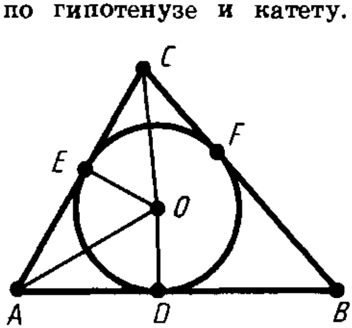


Рис. 98

42. ЧТО ТАКОЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

В задачах на построение идет речь о построении геометрической фигуры с помощью данных чертежных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль. Решение задачи состоит не столько в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве. Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

С помощью линейки как инструмента геометрических построений можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнять линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

Рассмотрим простейшие задачи на построение.

43. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА С ДАННЫМИ СТОРОНАМИ

Задача 5.1. ***Построить треугольник с данными сторонами a, b, c*** (рис. 99, *а*).

Решение. С помощью линейки проводим произвольную прямую и отмечаем на ней произвольную точку *B* (рис. 99, *б*).

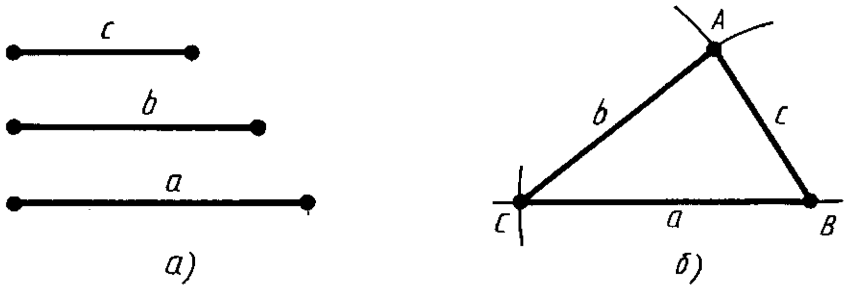


Рис. 99

Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Теперь раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, описываем окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Проведем отрезки AB и AC. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

44. ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ

Задача 5.2. ***Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.***

Решение. Проведем произвольную окружность с центром в вершине A данного угла (рис. 100, *а*). Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O — начальной точке данной полупрямой (рис. 100, *б*). Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B_1. Опишем окружность с центром B_1 и радиусом BC. Точка C_1 пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

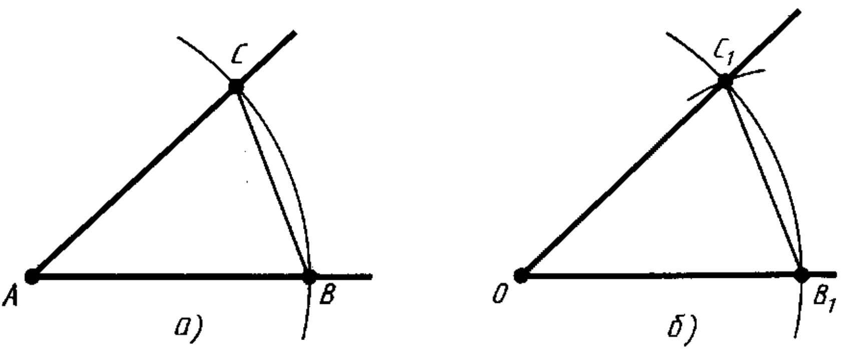


Рис. 100

Для доказательства достаточно заметить, что треугольники ABC и OB_1C_1 равны как треугольники с соответственно равными сторонами. Углы A и O являются соответствующими углами этих треугольников.

45. ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Задача 5.3. ***Построить биссектрису данного угла.***

Решение. Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 101). Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Проводим полупрямую AD.

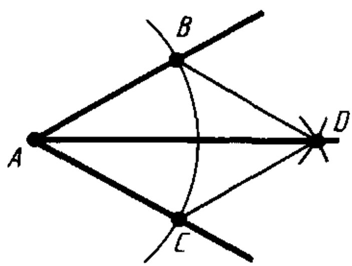


Рис. 101

Луч AD является биссектрисой, так как делит угол BAC пополам. Это следует из равенства треугольников ABD и ACD, у которых углы DAB и DAC являются соответствующими.

46. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Задача 5.4. ***Разделить отрезок пополам.***

Решение. Пусть AB — данный отрезок (рис. 102). Из точек A и B радиусом AB описываем окружности. Пусть C и C_1 — точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Отрезок CC_1 пересекает прямую AB в некоторой точке O. Эта точка есть середина отрезка AB.

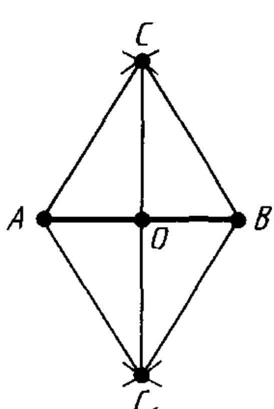


Рис. 102

Действительно, треугольники CAC_1 и CBC_1 равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует равенство углов ACO и BCO. Треугольники ACO и BCO равны по первому признаку равенства треугольников. Стороны AO и BO этих треугольников являются соответствующими, а поэтому они равны. Таким образом, O — середина отрезка AB.

47. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ

Задача 5.5. ***Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.***

Решение. Возможны два случая:

1) точка O лежит на прямой a;

2) точка O не лежит на прямой a.

Рассмотрим первый случай (рис. 103).

Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую a в двух точках: A и B. Из точек A и B проводим окружности радиусом AB. Пусть C — точка их пересечения. Искомая прямая проходит через точки O и C.

Перпендикулярность прямых OC и AB следует из равенства углов при вершине O треугольников ACO и BCO. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

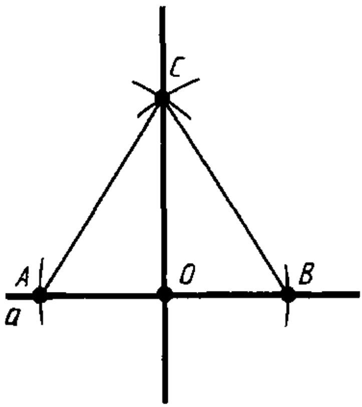


Рис. 103

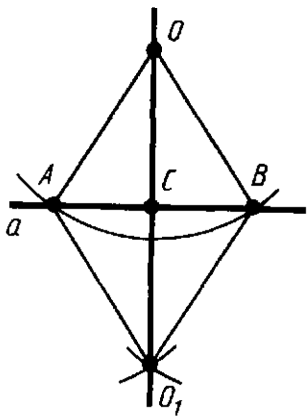


Рис. 104

Рассмотрим второй случай (рис. 104).

Из точки O проводим окружность, пересекающую прямую a. Пусть A и B — точки ее пересечения с прямой a. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1 — точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O. Искомая прямая проходит через точки O и O_1. Докажем это.

Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO_1. Треугольники AOB и AO_1B равны по третьему признаку.

Поэтому угол OAC равен углу O_1AC. А тогда треугольники OAC и O_1AC равны по первому признаку. Значит, их углы ACO и ACO_1 равны. А так как они смежные, то они прямые. Таким образом, OC — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a.

48. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест.

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

Важное геометрическое место точек дает следующая теорема:

Теорема 5.3. ***Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.***

Доказательство. Пусть A и B — данные точки, a — прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 105). Мы должны доказать, что:

1) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B;

2) каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой a.

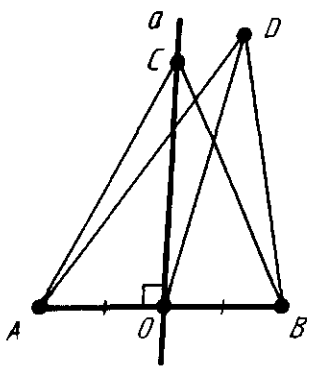


Рис. 105

То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O — середина отрезка AB.

Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой a. Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$. В нем DO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведенная к основанию, является высотой. Значит, точка D лежит на прямой a. Теорема доказана.

49. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X. Приведем пример.

Задача (43). Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Решение. Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: 1) она одинаково удалена от точек A и B; 2) она находится на данном расстоянии от точки C. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (рис. 106). Геометрическое место точек,

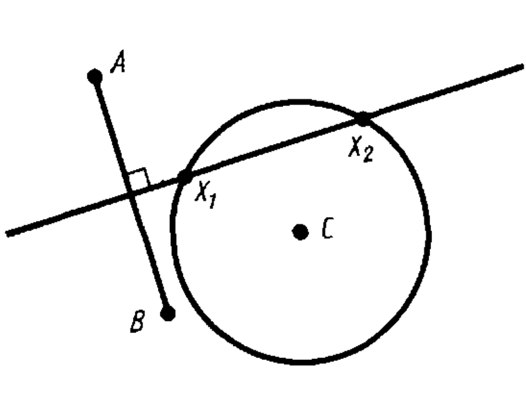


Рис. 106

удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C. Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое окружность, центр окружности, радиус?
2. Что такое хорда окружности? Какая хорда называется диаметром?
3. Какая окружность называется описанной около треугольника?
4. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
5. Какая прямая называется касательной к окружности?
6. Что значит: окружности касаются в данной точке?
7. Какое касание окружностей называется внешним, какое — внутренним?
8. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
9. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.
10. Объясните, как построить треугольник по трем сторонам.
11. Объясните, как отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.
12. Объясните, как разделить данный угол пополам.
13. Объясните, как разделить отрезок пополам.
14. Объясните, как через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.
15. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек?

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что любой луч, исходящий из центра окружности, пересекает окружность в одной точке.
2. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, пересекает окружность в двух точках.
3. Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.
4. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 3.

5. 1) Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними (рис. 107).
2) Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.

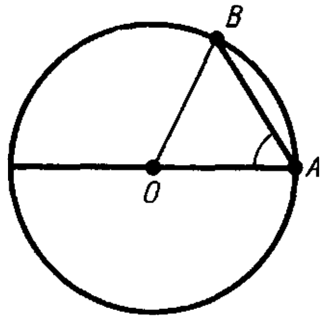


Рис. 107

6. Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.
7. Может ли окружность касаться прямой в двух точках? Объясните ответ.
8. Докажите, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.
9. Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?
10. Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.
11. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касаний.
12. Могут ли касаться две окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между центрами 60 см?
13*. 1) Точки A, B, C лежат на прямой, а точка O — вне прямой. Могут ли два треугольника AOB и BOC быть равнобедренными с основаниями AB и BC? Обоснуйте ответ.
2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?
14*. 1) Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой OO_1.
2) Докажите, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.
15*. 1) Через точку A окружности с центром O проведена прямая, не касающаяся окружности. OB — перпендикуляр, опущенный на прямую. На продолжении отрезка AB отложен отрезок $BC = AB$. Докажите, что точка C лежит на окружности.
2) Докажите, что если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности в этой точке.
3) Докажите, что если две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются в этой точке.

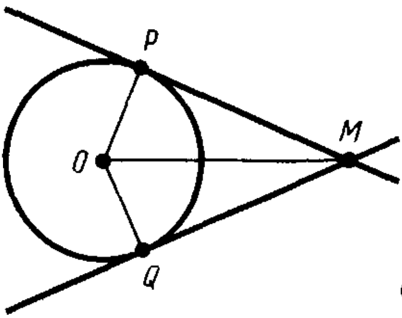


Рис. 108

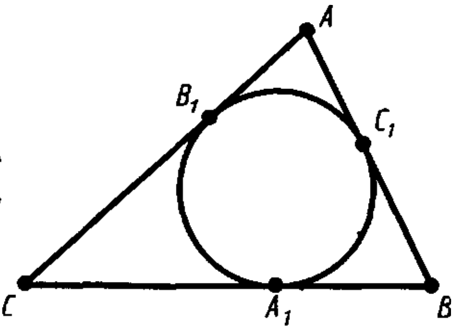


Рис. 109

16*. 1) Из одной точки проведены две касательные к окружности (рис. 108). Докажите, что отрезки касательных MP и MQ равны.

2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.

17. Одна окружность описана около равностороннего треугольника, а другая вписана в него. Докажите, что центры этих окружностей совпадают.

18. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 109). Докажите, что $AC_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

19. Постройте треугольник по трем сторонам a, b и c: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

20. Дан треугольник ABC. Постройте другой, равный ему треугольник ABD.

21. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

22. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

23. Постройте треугольник ABC по следующим данным:

1) по двум сторонам и углу между ними:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$;

2) по стороне и прилежащим к ней углам:

а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;

б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

24. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них:

1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;

2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.

25. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.

26. Постройте окружность, вписанную в данный треугольник.

27. Разделите угол на четыре равные части.

28. Постройте углы 60° и 30°.

29. Дан треугольник. Постройте его медианы.

30. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

31. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

32. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне (рис. 110).

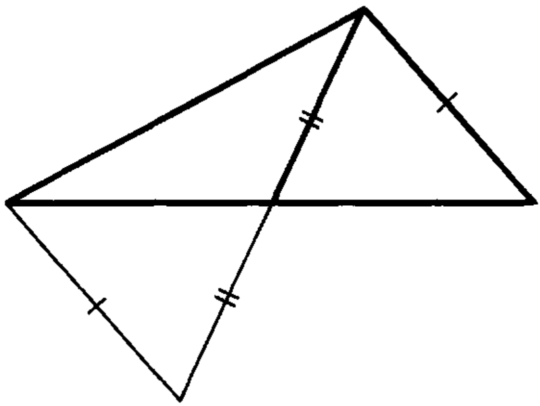


Рис. 110

33. Дан треугольник. Постройте его высоты.

34. Постройте окружность, описанную около данного треугольника.

35. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

36. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на основание.

37. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.

38. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

39. Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

40. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

41. Докажите, что геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на h.

42. На данной прямой найдите точку, которая находится на данном расстоянии от другой данной прямой.
43. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.
44. На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух данных точек.
45. Даны четыре точки: A, B, C, D. Найдите точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и одинаково удалена от точек C и D.
46*. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон (рис. 111).

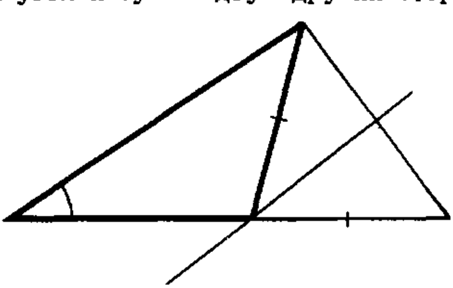


Рис. 111

47*. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
48*. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.
49*. 1) Из точки A к окружности с центром O и радиусом R проведена касательная (рис. 112). Докажите, что точка C касания лежит на основании равнобедренного треугольника OAB, у которого $OA = AB$, $OB = 2R$.

2) Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.
50*. Проведите общую касательную к двум данным окружностям (рис. 113).

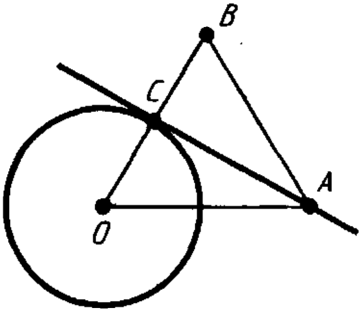


Рис. 112

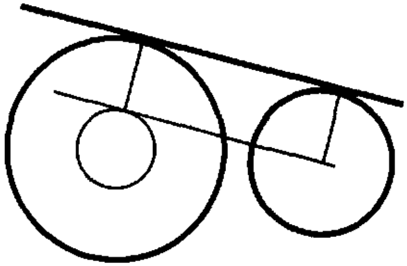


Рис. 113

8 класс

§ 6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

50. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки — *сторонами* четырехугольника.

Задача (1). На рисунках 114—116 представлены три фигуры, каждая из которых состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. Какая из этих фигур является четырехугольником?

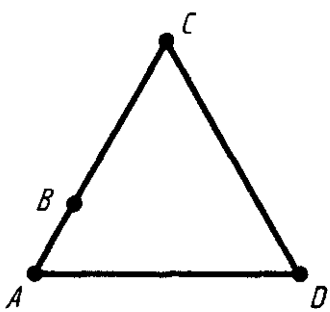


Рис. 114

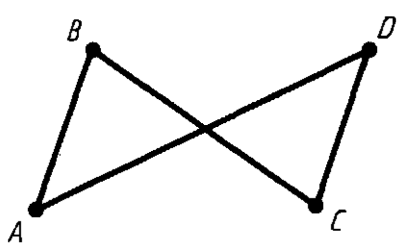


Рис. 115

Решение. Четырехугольником является только фигура на рисунке 116, так как у фигуры на рисунке 114 точки A, B, C лежат на одной прямой, а у фигуры на рисунке 115 отрезки BC и AD пересекаются.

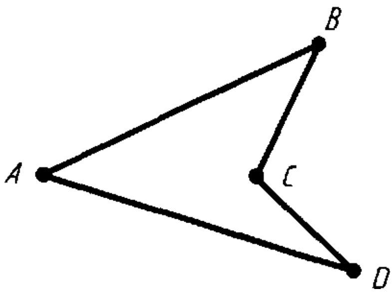


Рис. 116

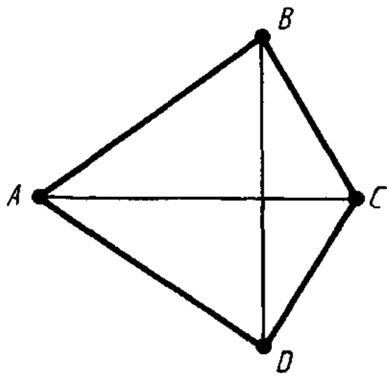


Рис. 117

Вершины четырехугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*.

У четырехугольника на рисунке 117 диагоналями являются отрезки AC и BD.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними* сторонами. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими* сторонами.

У четырехугольника на рисунке 117 противолежащими являются стороны AB и CD, BC и AD.

Четырехугольник обозначается указанием его вершин. Например, четырехугольник на рисунке 117 обозначается так: $ABCD$. В обозначении четырехугольника рядом стоящие вершины должны быть соседними. Четырехугольник $ABCD$ на рисунке 117 можно также обозначить $BCDA$ или $DCBA$. Но нельзя обозначить $ABDC$ (B и D — не соседние вершины).

Сумма длин всех сторон четырехугольника называется *периметром*.

51. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 118).

Теорема 6.1. ***Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и O — точка пересечения его диагоналей (рис. 119).

Треугольники AOD и COB равны. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OD=OB$ и $OA=OC$ по условию теоремы.

Значит, углы OBC и ODA равны. А они являются внутренними накрест лежащими для прямых AD и BC и секущей BD. По признаку параллельности прямых прямые AD и BC параллельны. Так же доказывается параллельность прямых AB и CD с помощью равенства треугольников AOB и COD.

Так как противолежащие стороны четырехугольника параллельны, то по определению этот четырехугольник — параллелограмм. Теорема доказана.

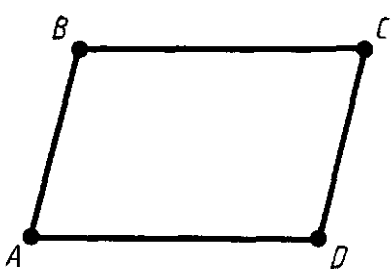


Рис. 118

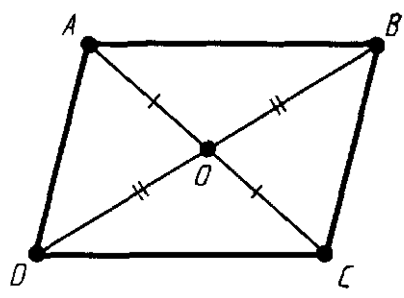


Рис. 119

52. СВОЙСТВО ДИАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 6.2 (обратная теореме 6.1). ***Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 120). Проведем его диагональ BD. Отметим на ней середину O и на продолжении отрезка AO отложим отрезок OC_1, равный AO.

По теореме 6.1 четырехугольник ABC_1D есть параллелограмм. Следовательно, прямая BC_1 параллельна AD. Но через точку B можно провести только одну прямую, параллельную AD. Значит, прямая BC_1 совпадает с прямой BC.

Точно так же доказывается, что прямая DC_1 совпадает с прямой DC.

Значит, точка C_1 совпадает с точкой C. Параллелограмм $ABCD$ совпадает с ABC_1D. Поэтому его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

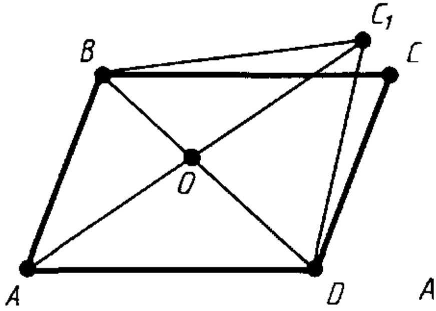


Рис. 120

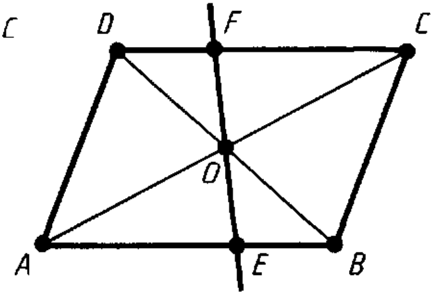


Рис. 121

Задача (6). Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключеный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и EF — прямая, пересекающая параллельные стороны AB и CD (рис. 121). Треугольники OAE и OCF равны по второму признаку. У них стороны OA н OC равны, так как O — середина диагоналн AC. Углы прн вершине O равны как вертикальные, а углы EAO и FCO равны как внутреннне накрест лежащие при параллельных AB, CD и секущей AC.

Из равенства треугольников следует равенство сторон: $OE=OF$, что и требовалось доказать.

53. СВОЙСТВО ПРОТИВОЛЕЖАЩИХ СТОРОН И УГЛОВ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 6.3. *У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 122). Проведем диагонали параллелограмма. Пусть O — точка их пересечения.

Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OA=OC$ и $OB=OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолёжащих сторон — AD и BC.

Равенство противолежащих углов ABC и CDA следует из равенства треугольников ABC и CDA (по трем сторонам). У них $AB=CD$ и $BC=DA$ по доказанному, а сторона AC общая. Точно так же равенство противолежащих углов BCD и DAB следует из равенства треугольников BCD и DAB. Теорема доказана полностью.

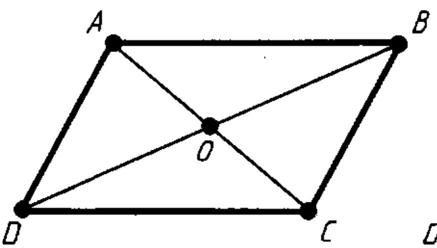


Рис. 122

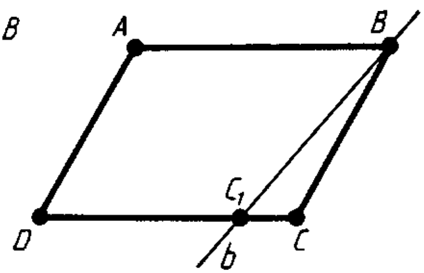


Рис. 123

Задача (18). Докажите, что если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, у которого стороны AB и CD параллельны и равны (рис. 123). Проведем через вершину B прямую b, параллельную стороне AD. Эта прямая пересекает луч DC в некоторой точке C_1. Четырехугольник ABC_1D есть параллелограмм. Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $C_1D=AB$. А по условию $AB=CD$. Значит, $DC=DC_1$. Отсюда следует, что точки C и C_1 совпадают.

Таким образом, четырехугольник $ABCD$ совпадает с параллелограммом ABC_1D, а значит, является параллелограммом.

54. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 124).

Теорема 6.4. ***Диагонали прямоугольника равны.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (рис. 125).

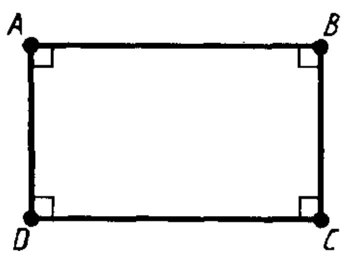


Рис. 124

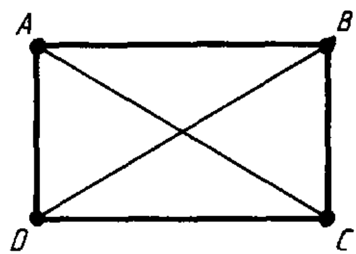


Рис. 125

Утверждение теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников BAD и CDA. У них углы BAD и CDA прямые, катет AD общий, а катеты AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма. Из равенства треугольников следует, что их гипотенузы равны. А гипотенузы есть диагонали прямоугольника. Теорема доказана.

Задача (24). Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

Решение. Углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне, являются внутренними односторонними (рис. 126), поэтому их сумма равна 180°. Так как по

Рис. 126

условию задачи эти углы равны, то каждый из них прямой. А параллелограмм, у которого все углы прямые, есть прямоугольник.

55. РОМБ

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 127).

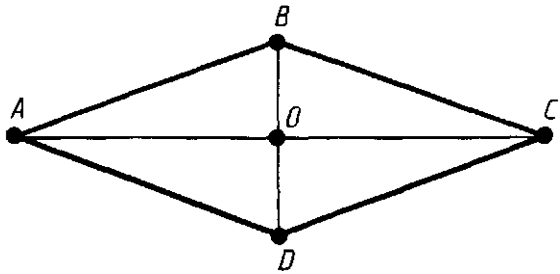


Рис. 127

Т е о р е м а 6.5. ***Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ — данный ромб (см. рис. 127), O — точка пересечения его диагоналей. По свойству параллелограмма $AO=OC$. Значит, в треугольнике ABC отрезок BO является медианой. Так как $ABCD$ — ромб, то $AB=BC$ и треугольник ABC — равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведенная к его основанию, является биссектрисой и высотой. А это значит, что диагональ BD является биссектрисой угла B и перпендикулярна диагонали AC. Теорема доказана.

З а д а ч а (33). Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

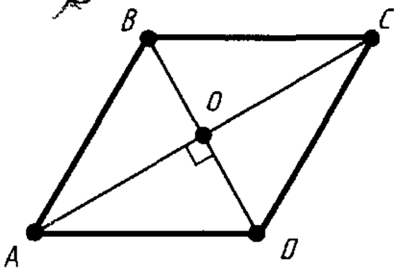


Рис. 128

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями и O — точка пересечения диагоналей (рис. 128). Треугольники AOB и AOD равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O по условию прямые, сторона AO общая, а $OB=OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Из равенства треугольников следует равенство сторон $AB=AD$. А по свойству противолежащих сторон параллелограмма $AD=BC$, $AB=CD$.

Итак, все стороны параллелограмма равны, а значит, он есть ромб.

56. КВАДРАТ

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 129).

Так как стороны квадрата равны, то он является также ромбом. Поэтому квадрат обладает свойствами прямоугольника и ромба:

1. ***У квадрата все углы прямые.***

2. ***Диагонали квадрата равны.***

3. ***Диагонали квадрата пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.***

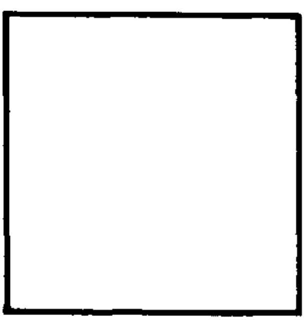


Рис. 129

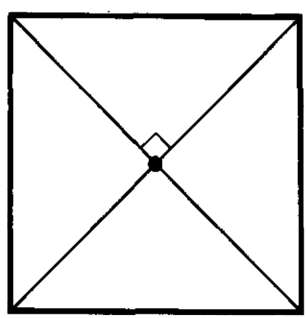


Рис. 130

З а д а ч а (40). Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он есть квадрат.

Р е ш е н и е. Так как прямоугольник есть параллелограмм, а параллелограмм с перпендикулярными диагоналями есть ромб (задача 33), то у рассматриваемого прямоугольника все стороны равны (рис. 130). По определению такой прямоугольник есть квадрат.

57. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Т е о р е м а 6.6 (теорема Фалеса). ***Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне*** (рис. 131).

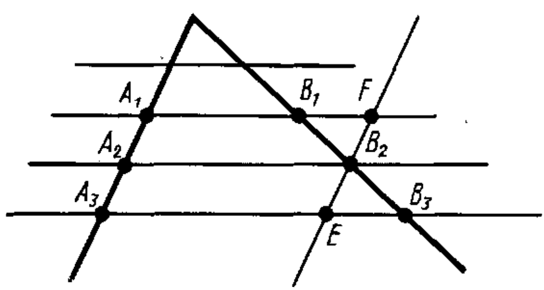


Рис. 131

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3 (рис. 131). Пусть B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2=A_2A_3$, то $B_1B_2=B_2B_3$.

Проведем через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3. По свойству параллелограмма $A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=$ $=B_2E$. И так как $A_1A_2=A_2A_3$, то $FB_2=B_2E$.

Треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку. У них $B_2F=B_2E$ по доказанному. Углы при вершине B_2 равны как вертикальные, а углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF.

Фалес Милетский — древнегреческий ученый (VI в. до н. э.)

Из равенства треугольников следует равенство сторон: $B_1B_2=B_2B_3$. Теорема доказана.

Замечание. В условии теоремы Фалеса вместо сторон угла можно взять любые две прямые, при этом заключение теоремы будет то же:

параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

Иногда теорема Фалеса будет применяться и в такой форме.

Задача (48). Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Проведем из точки A полупрямую a, не лежащую на прямой AB (рис. 132). Отложим на полупрямой a равные отрезки: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Соединим точки A_n и B. Проведем через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} прямые, параллельные прямой A_nB. Они пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые делят отрезок AB на n равных отрезков (по теореме Фалеса).

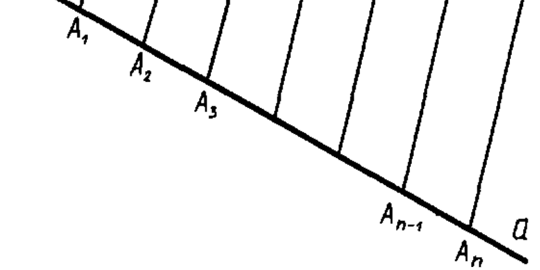


Рис. 132

58. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема 6.7. ***Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.***

Доказательство. Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 133). Проведем через точку D прямую, параллельную стороне AB. По теореме Фалеса она пересекает отрезок AC в его середине, т. е. содержит среднюю линию DE. Значит, средняя линия DE параллельна стороне AB.

Проведем теперь среднюю линию DF. Она параллельна стороне AC. Четырехугольник $AEDF$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $ED = AF$, а так как $AF = FB$ по теореме Фалеса, то $ED = \frac{1}{2}AB$. Теорема доказана.

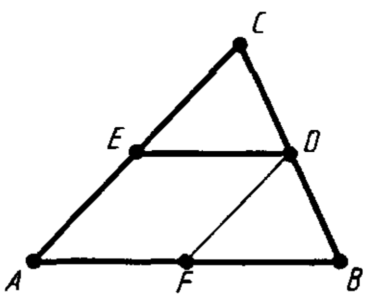


Рис. 133

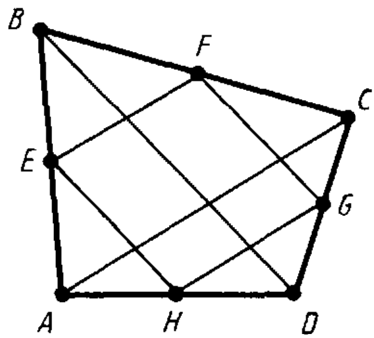


Рис. 134

Задача (55). Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и E, F, G, H — середины его сторон (рис. 134). Отрезок EF — средняя линия треугольника ABC. Поэтому $EF \parallel AC$. Отрезок GH — средняя линия треугольника ADC. Поэтому $GH \parallel AC$. Итак, $EF \parallel GH$, т. е. противолежащие стороны EF и GH четырехугольника $EFGH$ параллельны. Точно так же доказывается параллельность другой пары противолежащих сторон. Значит, четырехугольник $EFGH$ — параллелограмм.

59. ТРАПЕЦИЯ

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми* сторонами.

На рисунке 135 вы видите трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD и боковыми сторонами BC и AD.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

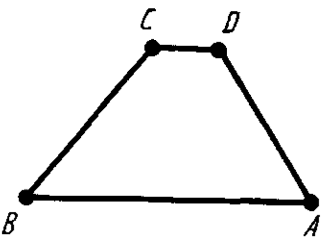


Рис. 135

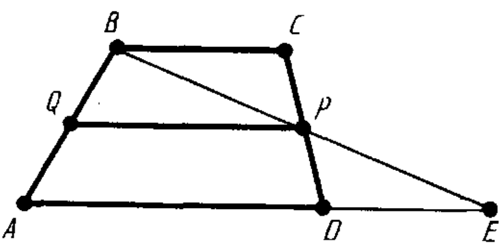


Рис. 136

Теорема 6.8. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 136). Проведем через вершину B и середину P боковой стороны CD прямую. Она пересекает прямую AD в некоторой точке E.

Треугольники PBC и PED равны по второму признаку равенства треугольников. У них $CP=DP$ по построению, углы при вершине P равны как вертикальные, а углы PCB и PDE равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $PB=PE$, $BC=ED$.

Значит, средняя линия PQ трапеции является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника $PQ \parallel AE$ и отрезок

$$PQ=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Теорема доказана.

Задача (60). Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

Решение. Пусть $ABCD$ — равнобокая трапеция (рис. 137). Докажем, что углы трапеции при основании CD равны.

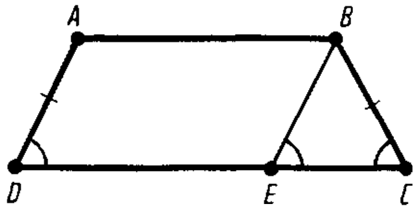


Рис. 137

Проведем через вершину B прямую, параллельную стороне AD. Она пересечет луч DC в некоторой точке E. Четырехугольник $ABED$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $BE=AD$. По условию $AD=BC$ (трапеция равнобокая), значит, треугольник BCE равнобедренный с основанием EC. Углы треугольника и трапеции при вершине C совпадают, а углы при вершинах E и D равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых секущей. Поэтому $\angle ADC = \angle BCD$. Утверждение доказано.

60. ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

Теорема 6.9. ***Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.***

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и B_1, C_1 соответственно (рис. 138). Теоремой утверждается, что

$$\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_1}{AB}. \qquad (*)$$

Докажем сначала равенство (*) в случае, когда существует такой отрезок длины δ, который укладывается целое число раз и на отрезке AC, и на отрезке AC_1. Пусть $AC=n\delta$, $AC_1=$ $=m\delta$ и $n>m$. Разобьем отрезок AC на n равных частей (длины δ). При этом точка C_1 будет одной из точек деления. Проведем через точки деления прямые, параллельные прямой BC. По теореме Фалеса эти прямые разбивают отрезок AB на равные отрезки некоторой длины δ_1. Имеем:

$$AB = n\delta_1,\ AB_1 = m\delta_1.$$

Мы видим, что

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n}.$$

Значит,

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB},$$

что и требовалось доказать.

Докажем теорему в общем случае (не для запоминания). Допустим, что $\frac{AC_1}{AC} \neq \frac{AB_1}{AB}$, например, что $\frac{AC_1}{AC} > \frac{AB_1}{AB}$.

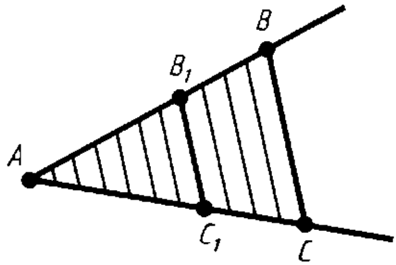


Рис. 138

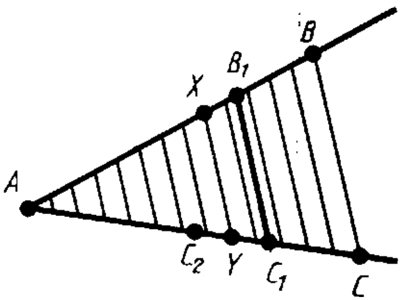


Рис. 139

Отложим на луче AC отрезок $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$ (рис. 139). При этом $AC_2 < AC_1$. Разобьем отрезок AC на большое число n равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные BC.

При достаточно большом n на отрезке C_1C_2 будут точки деления. Обозначим одну из них через Y, а соответствующую точку на отрезке AB_1 через X. По доказанному

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

Заменим в этом равенстве величину AY меньшей величиной AC_2, а величину AX большей величиной AB_1. Получим:

$$\frac{AC_2}{AC} < \frac{AB_1}{AB}.$$

Отсюда $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Но $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

61. ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ОТРЕЗКА

Задача 6.1. ***Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$.***

Решение. Строим любой неразвернутый угол с вершиной O (рис. 140). Откладываем на одной стороне угла отрезки $OA = a$ и $OB = b$, а на другой стороне отрезок $OC = c$. Соединяем точки A и C прямой и проводим параллельную ей прямую BD через точку B. Отрезок $OD = x$.

Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Отсюда

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Таким образом, отрезок OD есть искомый отрезок x.

Замечание. Построенный отрезок x называется четвертым пропорциональным. Это название связано с тем, что он является четвертым членом пропорции $a : b = c : x$.

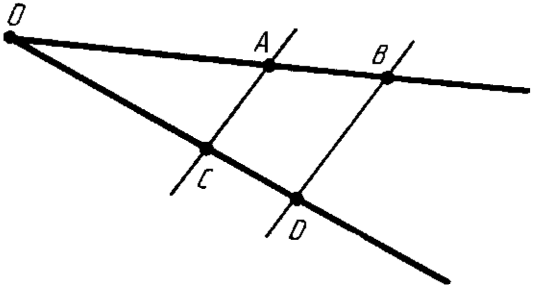


Рис. 140

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая фигура называется четырехугольником?
2. Какие вершины четырехугольника называются соседними, какие — противолежащими?
3. Что такое диагонали четырехугольника?
4. Какие стороны четырехугольника называются соседними? Какие называются противолежащими?
5. Как обозначается четырехугольник?
6. Что такое параллелограмм?
7. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.
8. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
9. Докажите, что у параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.
10. Что такое прямоугольник?
11. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
12. Что такое ромб?
13. Докажите, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом; диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
14. Что такое квадрат? Перечислите свойства квадрата.
15. Докажите теорему Фалеса.
16. Докажите, что средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны.
17. Какой четырехугольник называется трапецией?
18. Какая трапеция называется равнобокой?
19. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований.
20. Докажите теорему о пропорциональных отрезках.

ЗАДАЧИ

1. На рисунках 114—116 представлены три фигуры, каждая из которых состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. Какая из этих фигур является четырехугольником?
2. Постройте какой-нибудь четырехугольник $PQRS$. Укажите его противолежащие стороны и вершины.
3. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их.

4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.
5. Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Чему равны расстояния от нее до двух других вершин? Объясните ответ.
6. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключенный между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.
7. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE=2$ м и $AF=2{,}8$ м. Найдите стороны BC и AD.
8. У параллелограмма $ABCD$ $AB=10$ см, $BC=15$ см. Чему равны стороны AD и CD? Объясните ответ.
9. У параллелограмма $ABCD$ $\angle A=30°$. Чему равны углы B, C, D? Объясните ответ.
10. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 10 см. Найдите длину диагонали BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.
11. Один из углов параллелограмма равен 40°. Найдите остальные углы.
12. Найдите углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.
13. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой — 50°?
14. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.
15. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
16. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
17. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм.
18. Докажите, что если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.
19. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Чему равны отрезки BE и EC, если $AB=9$ см, $AD=15$ см?
20. Две стороны параллелограмма относятся как $3:4$, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны.

4 Заказ 574

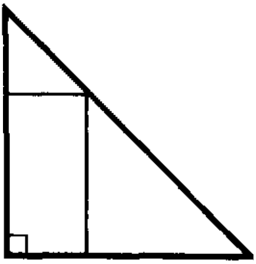


Рис. 141

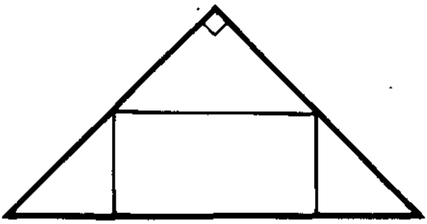


Рис. 142

21. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит ее пополам. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD равен 3 м.
22. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и диагонали; 2) по стороне и двум диагоналям.
23. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и углу; 2) по диагоналям и углу между ними.
24. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.
25. Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.
26. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.
27. Бетонная плита с прямолинейными краями должна иметь форму прямоугольника. Как при помощи бечевки проверить правильность формы плиты?
28. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.
29. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите стороны прямоугольника.
30. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите их длины.
31. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол (рис. 141). Найдите периметр прямоугольника.
32. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах (рис. 142). Чему

равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5 : 2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?

33. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

34. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.

35. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

36. Докажите, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

37. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.

•**38.** Постройте ромб: 1) по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла; 2) по диагонали и противолежащему углу.

∕**39.** Постройте ромб: 1) по стороне и диагонали; 2) по двум диагоналям.

40. Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он есть квадрат.

41. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата.

42. Дан квадрат $ABCD$. На каждой из его сторон отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат (рис. 143).

43. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего.

44. Дан квадрат, сторона которого 1 м, диагональ его равна стороне другого квадрата. Найдите диагональ последнего.

45. В квадрат (рис. 144) вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина

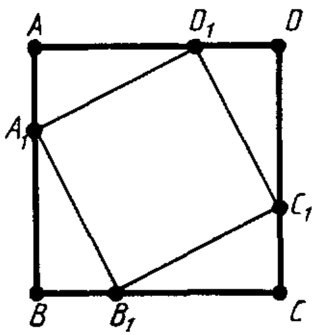


Рис. 143

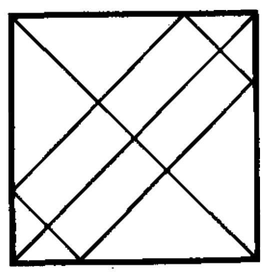


Рис. 144

прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите стороны прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.

46. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Найдите сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м.
47. Из данной точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные, радиус окружности 10 см. Найдите длины касательных (расстояние от данной точки до точки касания).
48. Разделите данный отрезок AB на n равных частей.
49. Разделите данный отрезок на указанное число равных частей: 1) 3; 2) 5; 3) 6.
50. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
51. Периметр треугольника равен 12 см, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника.
52. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.
53. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?
54. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, проходящей через середины двух его сторон.
55. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
56. Найдите стороны параллелограмма из предыдущей задачи, если известно, что диагонали четырехугольника равны 10 м и 12 м.
57. У четырехугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
58. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
59. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м.
60. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.
61. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?

62. В равиобокой трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.

63. В равнобокой трапеции высота, проведеиная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 см и 30 см. Найдите основания трапеции.

64*. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 145). Найдите углы трапеции.

65. По одну сторону от прямой a даны две точки A и B на расстояниях 10 м и 20 м от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

66. По разные стороны от прямой a даны две точки A и B на расстояниях 10 см и 4 см от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

67. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.

68. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на 1,6 м и 0,6 м. Найдите длину диаметра.

69. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.

70. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины a и b $(a > b)$. Найдите среднюю линию трапеции.

71*. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

72*. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

73*. Даны отрезки a, b, c, d, e. Постройте отрезок $x = \frac{abc}{de}$.

74*. 1) В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке M (рис. 146). В треугольнике

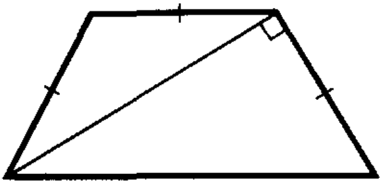


Рис. 145

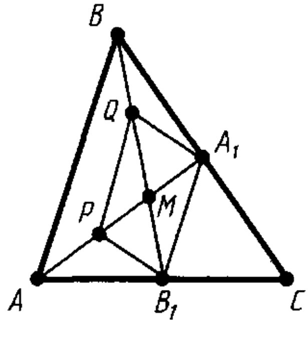


Рис. 146

AMB проведена средняя линия PQ. Докажите, что четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм.

2) Докажите, что любые две медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

3) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

§ 7. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

62. КОСИНУС УГЛА

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначается так: $\cos \alpha$. На рисунке 147 показан прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным α. Косинус угла α равен отношению катета AC, прилежащего к этому углу, к гипотенузе AB, т. е.

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Теорема 7.1. ***Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.***

Это означает, что у двух прямоугольных треугольников с одним и тем же острым углом косинусы этого угла равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два прямоугольных треугольника с одним и тем же углом при вершинах A и A', равным α (рис. 148). Требуется доказать, что

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

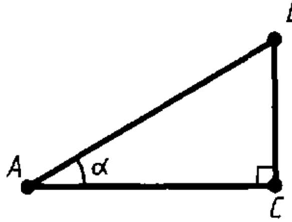


Рис. 147

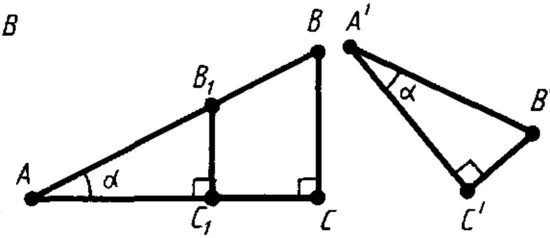


Рис. 148

Построим треугольник AB_1C_1, равный треугольнику $A'B'C'$, как показано на рисунке 148. Так как прямые BC и B_1C_1 перпендикулярны прямой AC, то они параллельны. По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}.$$

А так как по построению $AC_1=A'C'$, $AB_1=A'B'$, то

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}.$$

Теорема доказана.

63. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Теорема 7.2 (теорема Пифагора). ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла C (рис. 149).

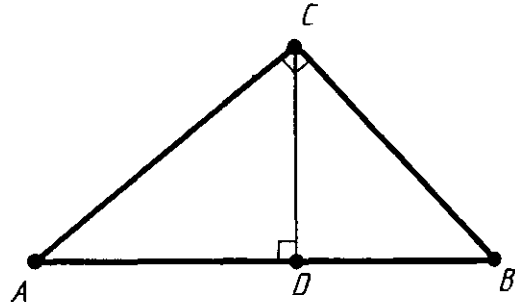


Рис. 149

По определению косинуса угла $\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$. Отсюда $AB\cdot AD=AC^2$. Аналогично $\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$. Отсюда $AB\cdot BD=$ $=BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD+DB=AB$, получим:

$$AC^2+BC^2=AB\,(AD+DB)=AB^2.$$

Теорема доказана.

Из теоремы Пифагора следует, что ***в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.*** Отсюда, в свою очередь, следует, что $\cos\alpha<1$ ***для любого острого угла*** α.

З а д а ч а (11). Найдите медиану равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b, проведенную к основанию.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его медиана, проведенная к основанию (рис. 150). Как мы знаем, медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой. Поэтому треугольник ACD прямоугольный с прямым углом D. По теореме Пифагора

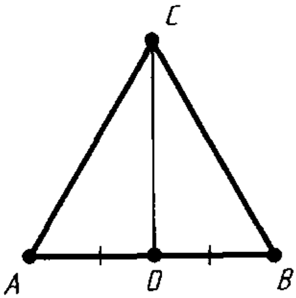


Рис. 150

$$AD^2+CD^2=AC^2,\ \left(\frac{a}{2}\right)^2+CD^2=b^2.$$

Отсюда

$$CD=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

64. ЕГИПЕТСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

З а д а ч а (17). Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2+b^2=c^2$, то у него угол, противолежащий стороне c, прямой.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — данный треугольник, у которого $AB=c$, $AC=a$, $BC=b$ (рис. 151). Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $A_1C_1=a$

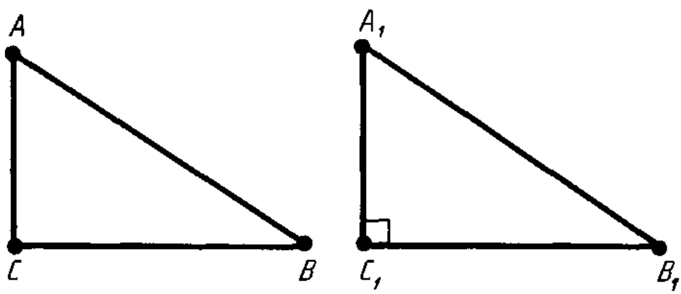


Рис. 151

и $B_1C_1 = b$. По теореме Пифагора у него гипотенуза $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует, что угол треугольника ABC при вершине C прямой.

Пифагор — древнегреческий ученый (VI в. до н. э.)

Землемеры Древнего Египта для построения прямого угла пользовались следующим приемом. Бечевку узлами делили на 12 равных частей и концы связывали. Затем бечевку растягивали на земле так, что получался треугольник со сторонами 3, 4 и 5 делений. Угол треугольника, противолежащий стороне с 5 делениями, был прямой $(3^2 + 4^2 = 5^2)$.

В связи с указанным способом построения прямого угла треугольник со сторонами 3, 4 и 5 ед. иногда называют *египетским*.

65. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C — любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a (рис. 152). Точка C называется *основанием наклонной*. Отрезок AC называется *проекцией наклонной*.

Из теоремы Пифагора следует, что ***если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.***

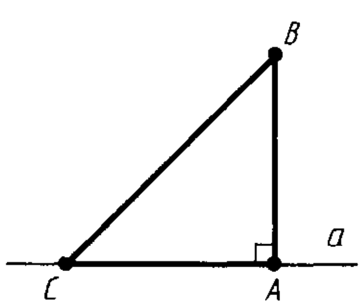


Рис. 152

Действительно (см. рис. 152), по теореме Пифагора

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Отсюда видно, что $BC > AB$. При данном AB чем больше AC, тем больше BC.

Задача (19). На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Докажите, что отрезок CX меньше по крайней мере одной из сторон AC или BC.

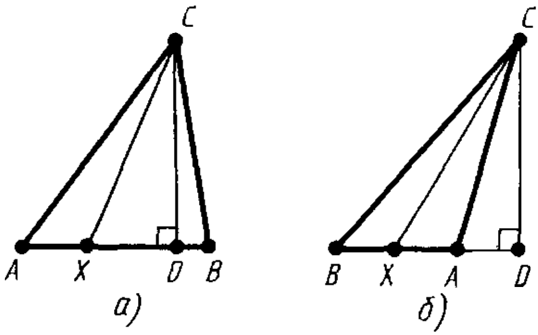


Рис. 153

Решение. Проведем высоту CD треугольника. В любом случае отрезок DX меньше либо AD (рис. 153, *а*), либо BD (рис. 153, *б*). По свойству наклонных, проведенных из одной точки, отсюда следует, что отрезок CX меньше по крайней мере одного из отрезков AC или BC. Что и требовалось доказать.

66. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Если точки A и B различны, то *расстоянием* между ними называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними принимается равным нулю.

Теорема 7.3 (неравенство треугольника). ***Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.***

Это значит, что каждое из этих расстояний меньше или равно суммы двух других.

Доказательство. Пусть A, B, C — три данные точки. Если две точки из трех или все три точки совпадают, то утверждение теоремы очевидно.

Если все точки различны и лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими, например B. В этом случае $AB+BC=AC$. Отсюда видно, что каждое из трех расстояний не больше суммы двух других.

Допустим теперь, что точки не лежат на одной прямой (рис. 154). Докажем, что $AB<AC+BC$. Опустим перпендикуляр CD на прямую AB. По доказанному $AB \leqslant AD+BD$. И так как $AD<AC$ и $BD<BC$, то $AB<AC+BC$. Теорема доказана.

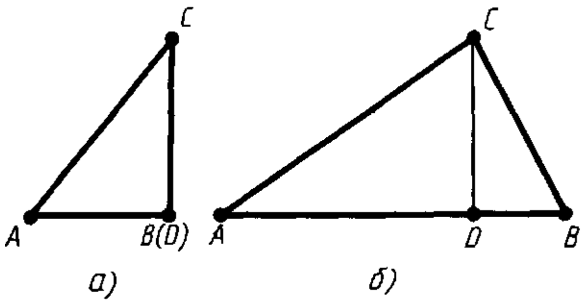


Рис. 154

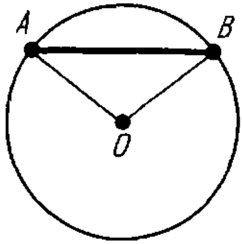


Рис. 155

Заметим, что в случае, когда точки не лежат на одной прямой, в неравенстве треугольника строгое неравенство. Отсюда следует, что ***в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.***

Задача (23). Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.

Решение (рис. 155). По неравенству треугольника $AB \leqslant OA+OB=2R$, причем если центр O не лежит на отрезке AB, то неравенство строгое. Равенство имеет место только в случае, когда хорда проходит через центр, т. е. является диаметром.

67. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 156). Согласно определению $\cos \alpha$ равен отношению катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе.

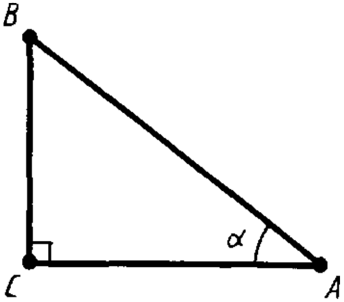


Рис. 156

Синусом угла α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Синус и тангенс угла так же, как и косинус, зависят только от величины угла.

Действительно, по теореме Пифагора

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}.$$

По определению

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$

Подставим значение BC:

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{AB^2-AC^2}}{AB}=\sqrt{1-\left(\frac{AC}{AB}\right)^2}=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Так как $\cos\alpha$ зависит только от величины угла, то и $\sin\alpha$ зависит только от величины угла.

По определению

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Разделим числитель и знаменатель на AB:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AB}:\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда видно, что и $\operatorname{tg}\alpha$ зависит только от величины угла.

Из определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ получаем следующие правила:

Катет, противолежащий углу α***, равен произведению гипотенузы на*** $\sin\alpha$.

Катет, прилежащий к углу α***, равен произведению гипотенузы на*** $\cos\alpha$.

Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg} \alpha$.

Эти правила позволяют, зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны; зная две стороны, находить острые углы (рис. 157).

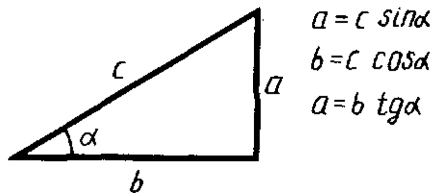


Рис. 157

Задача (47). В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

Решение (рис. 158).

$AC = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$;

$BC = AB \sin \alpha = c \sin \alpha$;

$BD = BC \sin \alpha = c \sin^2 \alpha$;

$AD = AC \cos \alpha = c \cos^2 \alpha$;

$CD = AC \sin \alpha = c \sin \alpha \cos \alpha$.

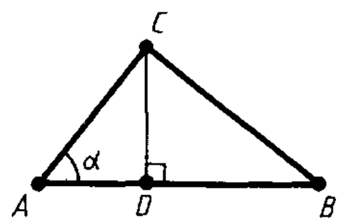


Рис. 158

Для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу α найти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ или по значениям $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ найти соответствующий угол. В настоящее время для этой цели обычно применяют микрокалькуляторы.

68. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Одно тождество вы уже знаете:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Докажем следующие тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

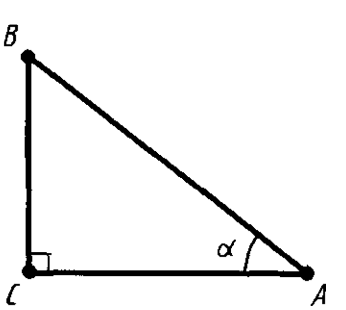


Рис. 159

Возьмем любой прямоугольный треугольник ABC с углом при вершине A, равным α (рис. 159). По теореме Пифагора

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Разделим обе части равенства на AB^2. Получим:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Но $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Таким образом,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Это равенство есть тождество. Оно верно для любого острого угла α.

Чтобы получить второе тождество, разделим обе части полученного тождества на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Если обе части тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ разделить на $\sin^2\alpha$, то получим третье тождество:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значение этих тождеств заключается в том, что они позволяют, зная одну из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$, найти две другие.

Задача (63). Вычислите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Решение. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}.$$

69. ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Теорема 7.4. ***Для любого острого угла*** α

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с острым углом α при вершине A (рис. 160). Тогда острый угол при вершине B равен $90^\circ-\alpha$. По определению

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\ \cos\alpha=\frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{AC}{AB},\ \cos(90^\circ-\alpha)=\frac{BC}{AB}.$$

Из второго и третьего равенств получаем $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$. Из первого и четвертого равенств получаем $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$. Теорема доказана.

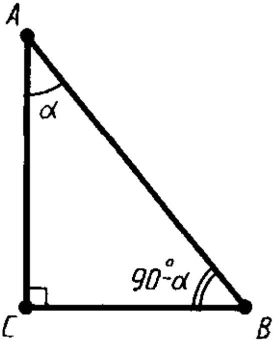


Рис. 160

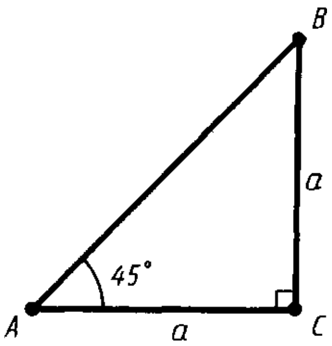


Рис. 161

Найдем синус, косинус и тангенс угла 45°. Для этого построим прямоугольный треугольник с острым углом 45° (рис. 161). Второй его острый угол тоже равен 45°, поэтому треугольник равнобедренный. Пусть катеты треугольника равны a. По теореме Пифагора гипотенуза будет $a\sqrt{2}$. Находим:

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45^\circ=\frac{a}{a}=1.$$

Найдем синус, косинус и тангенс угла 30°. Возьмем равносторонний треугольник ABC (рис. 162). Проведем в нем медиану AD. Она будет биссектрисой и высотой. Поэтому треугольник ABD прямоугольный с острым углом при вершине A, равным 30°. Пусть a — сторона равностороннего треугольника. Тогда $BD=\frac{a}{2}$. По теореме Пифагора

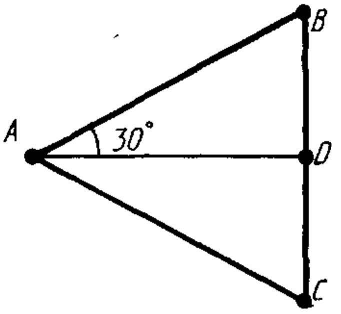


Рис. 162

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$\sin 30°=\frac{a}{2}:a=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,30°=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, то

$$\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,60°=\frac{\sin 60°}{\cos 60°}=\sqrt{3}.$$

70. ИЗМЕНЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА ПРИ ВОЗРАСТАНИИ УГЛА

Теорема 7.5. ***При возрастании острого угла*** $\sin\alpha$ ***и*** $\mathrm{tg}\,\alpha$ ***возрастают, а*** $\cos\alpha$ ***убывает.***

Доказательство. Пусть α и β — острые углы, причем $\alpha<\beta$. Отложим углы α и β от полупрямой AB в одну полуплоскость (рис. 163). Проведем через точку B прямую, перпендикулярную AB. Она пересекает стороны наших углов в точках C и D.

Так как $\alpha<\beta$, то точка C лежит между точками B и D. Поэтому $BC<BD$. А значит, по свойству наклонных, проведенных из одной точки к прямой, $AC<AD$.

Так как $\cos\alpha=\frac{AB}{AC}$, $\cos\beta=\frac{AB}{AD}$, то $\cos\alpha>\cos\beta$, т. е. при возрастании угла косинус убывает.

Так как $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании угла, то $\sin\alpha$ возрастает.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\sin\alpha$ возрастает, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании α, то $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает при возрастании α. Теорема доказана.

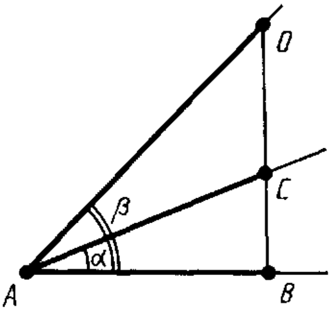


Рис. 163

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Докажите, что косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.
3. Докажите теорему Пифагора.
4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.
5. Докажите, что $\cos\alpha<1$ для острого угла α.
6. Докажите, что если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра. Равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.
7. Докажите неравенство треугольника.
8. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.
9. Дайте определения синуса и тангенса острого угла. Докажите, что они зависят только от градусной меры угла.
10. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол, через острый угол и другой катет?
11. Докажите тождества: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

12. Докажите, что для любого острого угла α
$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.
13. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°?
14. Докажите, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают при возрастании острого угла α, а $\cos\alpha$ убывает.

ЗАДАЧИ

1. Постройте угол, косинус которого равен: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5; 4) 0,8.
2. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу, если: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $a=1$, $b=1$; 3) $a=5$, $b=6$.
3. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: 1) $c=5$, $a=3$; 2) $c=13$, $a=5$; 3) $c=6$, $a=5$.
4. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Найдите третью сторону. (Два случая.)
5. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?
6. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 16 дм и 30 дм; 3) 5 м и 12 м.
7. Стороны прямоугольника 60 см и 91 см. Чему равна диагональ?
8. Диагональ квадрата a. Чему равна сторона квадрата?
9. Можно ли из круглого листа железа диаметром 1,4 м вырезать квадрат со стороной 1 м?
10. Найдите высоту равнобокой трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.
11. Найдите медиану равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b, проведенную к основанию.
12. Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте 230 км, если расстояние между ними по прямой равно 2200 км? Радиус Земли равен 6370 км.
13. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите высоту.
14. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок: 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$?

15*. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок $x=\sqrt{ab}$?

16. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Найдите длину желоба.

17. Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2+b^2=c^2$, то у него угол, противолежащий стороне c, прямой.
18. Чему равен угол треугольника со сторонами 5, 12, 13, противолежащий стороне 13?
19. На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Докажите, что отрезок CX меньше по крайней мере одной из сторон AC или BC.
20. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками на сторонах треугольника не больше большей из его сторон.
21. Даны прямая и точка C на расстоянии h от этой прямой. Докажите, что из точки C можно провести две и только две наклонные длины l, если $l>h$ (рис. 164).

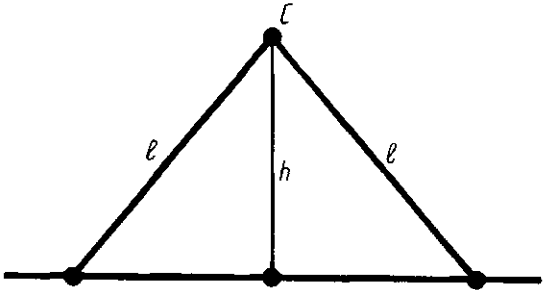


Рис. 164

22*. Докажите, что прямая, отстоящая от центра окружности на расстояние, меньшее радиуса, пересекает окружность в двух точках.
23. Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.
24. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если: 1) $AB=5$ м, $BC=7$ м, $AC=12$ м; 2) $AB=10{,}7$, $BC=17{,}1$, $AC=6{,}4$.
25. Докажите, что любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.
26. Может ли у параллелограмма со сторонами 4 см и 7 см одна из диагоналей быть равной 2 см?
27. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина равна целому числу метров.
28*. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC.
29*. Известно, что диагонали четырехугольника пересекают-

ся. Докажите, что сумма их длин меньше периметра, но больше полупериметра четырехугольника.

30. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что сумма расстояний от любой точки плоскости до точек A, B, C и D не меньше чем $OA+OB+OC+OD$.

31*. На прямолинейном шоссе требуется указать место автобусной остановки так, чтобы сумма расстояний от нее до населенных пунктов A и B была наименьшей. Рассмотрите два случая: 1) населенные пункты расположены по разные стороны от шоссе (рис. 165, *а*); 2) населенные пункты расположены по одну сторону от шоссе (рис. 165, *б*).

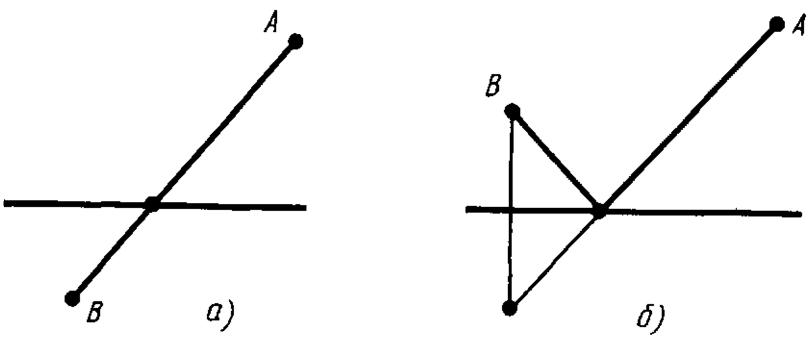


Рис. 165

32. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональными числам 1, 2, 3?

33. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.

34. Внутри окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.

35. Вне окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.

36. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 20 см, а радиусы 8 см и 11 см? Объясните ответ.

37. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 5 см, а радиусы 6 см и 12 см? Объясните ответ.

38*. Докажите, что в задаче 36 окружности находятся одна вне другой, а в задаче 37 окружность радиуса 6 см находится внутри окружности радиуса 12 см.

39. Могут ли пересекаться окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами d, если $R_1+R_2<d$?

40*. Даны три положительных числа a, b, c, удовлетворяющие условиям $a \leqslant b \leqslant c < a+b$. Докажите последовательно утверждения:

1) $0 < \frac{c^2+a^2-b^2}{2c} < a$;

2) существует прямоугольный треугольник BCD, у которого гипотенуза $BC = a$, а катет $BD = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$ (рис. 166);

3) треугольник ABC, у которого $BC = a$, $AB = c$, а расстояние BD равно $\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$, имеет сторону $AC = b$ (рис. 166).

41. Даны три положительных числа a, b, c. Докажите, что если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами a, b, c.

42. Можно ли построить треугольник со сторонами:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см; 4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

43*. Даны две окружности с радиусами R_1, R_2 и расстоянием между центрами d. Докажите, что если каждое из чисел R_1, R_2 и d меньше суммы двух других сторон, то окружности пересекаются в двух точках (рис. 167).

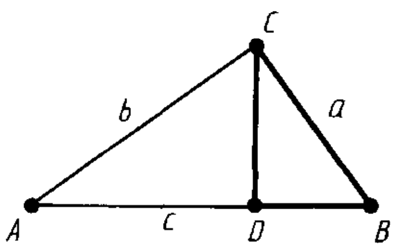


Рис. 166

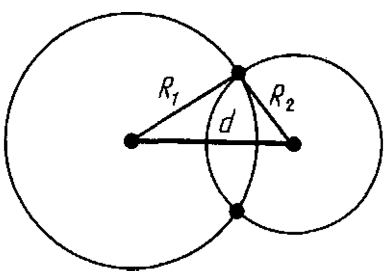


Рис. 167

44. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

45. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а один из острых углов α. Найдите второй острый угол и катеты.

46. В прямоугольном треугольнике катет равен a, а противолежащий ему угол α. Найдите второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.

47. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

48. 1) Найдите $\sin 22°$; $\sin 22°36'$; $\sin 22°38'$; $\sin 22°41'$; $\cos 68°$; $\cos 68°18'$; $\cos 68°23'$.
2) Найдите угол x, если $\sin x = 0{,}2850$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

49. Найдите значения синуса и косинуса углов: 1) $16°$; 2) $24°36'$; 3) $70°32'$; 4) $88°49'$.

50. Найдите величину острого угла x, если: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

51. Найдите значение тангенса угла: 1) $10°$; 2) $40°40'$; 3) $50°30'$; 4) $70°15'$.

52. Найдите острый угол x, если: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

53. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание 40,6 м. Найдите углы треугольника и боковую сторону.

54. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 19 : 28. Найдите его углы.

55. Стороны прямоугольника равны 12,4 и 26. Найдите угол между диагоналями.

56. Диагонали ромба равны 4,73 и 2,94. Найдите его углы.

57. Сторона ромба 241 м, высота 120 м. Найдите углы.

58. Радиус окружности равен 5 м. Из точки, отстоящей от центра на 13 м, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных и угол между ними.

59. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого 7 м, составляет 4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом (рис. 168).

60. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно a. Найдите боковую сторону.

61. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по следующим данным:
1) по двум катетам: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$; в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;
2) по гипотенузе и катету: а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$; в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;
3) по гипотенузе и острому углу: а) $c = 2$, $\alpha = 20°$; б) $c = 4$, $\alpha = 50°20'$; в) $c = 8$, $\alpha = 70°36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76°21'$;
4) по катету и противолежащему углу: а) $a = 3$, $\alpha = 30°27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40°48'$; в) $a = 7$, $\alpha = 60°35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68°$.

62. Упростите выражения: 1) $1 - \sin^2\alpha$;
2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; 3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

63. Вычислите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$.

64. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$.

65. Постройте угол α, если известно, что: 1) $\cos\alpha=\frac{4}{7}$;

2) $\sin\alpha=\frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}7$.

66. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

67. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус R окружности, описанной около него.

68. В треугольнике один из углов при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 см и 21 см. Найдите бо́льшую боковую сторону[1] (рис. 169).

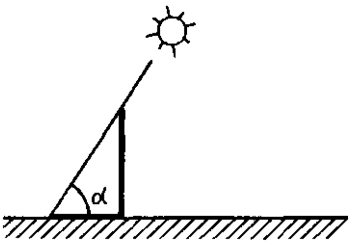


Рис. 168

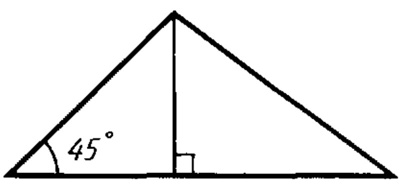


Рис. 169

69. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите другие стороны треугольника.

70. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.

71. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.

72. Какой из углов больше — α или β, если:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=\frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha=0{,}75$, $\cos\beta=0{,}74$;

5) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta=2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{2}$?

[1] Иногда в произвольном треугольнике, необязательно равнобедренном, сторона, проведенная горизонтально, называется основанием, а две другие — боковыми сторонами, как в данной задаче.

73. У прямоугольного треугольника ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше — AC или BC?

74. У прямоугольного треугольника ABC катет BC больше катета AC. Какой угол больше — A или B?

§ 8. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

71. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y — *оси координат* (рис. 170). Ось x (она обычно горизонтальная) называется *осью абсцисс*, а ось y — *осью ординат*. Точкой пересечения O — *началом координат* — каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть *положительной*, отмечая ее стрелкой, а другую — *отрицательной*.

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — *координаты точки* — абсциссу (x) и ординату (y) по такому правилу.

Через точку A проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. 171). Она пересечет ось абсцисс x в некоторой точке A_x. *Абсциссой* точки A мы будем называть число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки A_x. Это число будет положительным, если A_x принадлежит положительной полуоси и отрицательным, если A_x

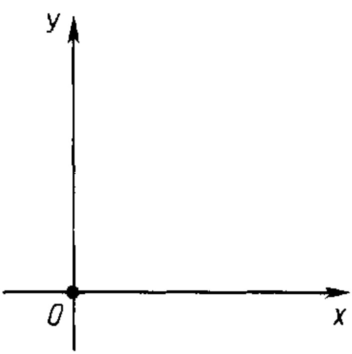


Рис. 170

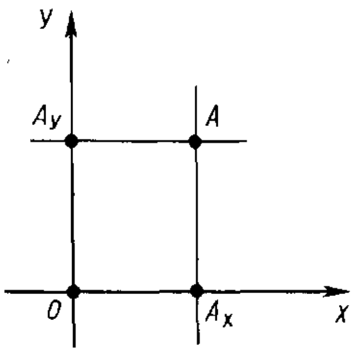


Рис. 171

принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси ординат y, то полагаем x равным нулю.

Р. Декарт — французский ученый (1596—1650)

Ордината (y) точки A определяется аналогично. Через точку A проведем прямую, параллельную оси абсцисс x (см. рис. 171). Она пересечет ось ординат y в некоторой точке A_y. *Ординатой* точки A мы будем называть число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки A_y. Это число будет положительным, если A_y принадлежит положительной полуоси и отрицательным, если A_y принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси абсцисс x, то полагаем y равным нулю.

Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например: $A\,(x;\ y)$ (на первом месте абсцисса, на втором — ордината).

Оси координат разбивают плоскость на четыре части — четверти: I, II, III, IV (рис. 172). В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

Точки оси x (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты ($y=0$), а точки оси y (оси ординат) имеют равные нулю абсциссы ($x=0$). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

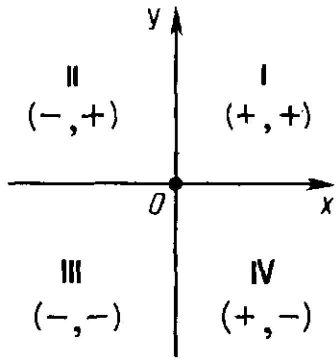


Рис. 172

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть *плоскостью xy*. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто $(x;\ y)$. Введенные на плоскости координаты x и y называются *декартовыми* по имени Р. Декарта, который впервые применил их в своих исследованиях.

Задача (9). Даны точки $A(-3;\ 2)$ и $B(4;\ 1)$. Докажите, что отрезок AB пересекает ось y, но не пересекает ось x.

Решение. Ось y разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости абсциссы точек положительны, а в другой — отрицательны. Так как у точек A и B абсциссы противоположных знаков, то точки A и B лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок AB пересекает ось y.

Ось x также разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости ординаты точек положительны, а в другой — отрицательны. У точек A и B ординаты одного знака (положительны). Значит, точки A и B лежат в одной полуплоскости. А следовательно, отрезок AB не пересекается с осью x.

72. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Пусть $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и $C(x;\ y)$ — середина отрезка AB. Найдем координаты x, y точки C.

Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен оси y, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки A, B, C прямые, параллельные оси y (рис. 173). Они пересекут ось x в точках $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $C_1(x;\ 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1.

Так как точка C_1 — середина отрезка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, а значит, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$. Первое равенство невозможно, так как $x_1 \neq x_2$. Поэтому верно второе. А из него получается формула

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

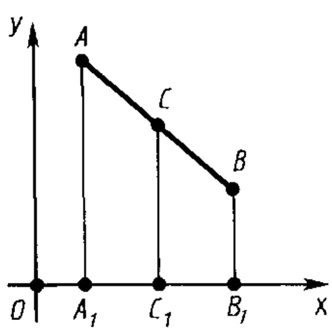


Рис. 173

Если $x_1 = x_2$, т. е. отрезок AB параллелен оси y, то все три точки A_1, B_1, C_1 имеют одну и ту же абсциссу. Значит, формула остается верной и в этом случае.

Ордината точки C находится аналогично. Через точки A, B, C проводятся прямые, параллельные оси x. Получается формула

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

З а д а ч а (15). Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$. Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.

Р е ш е н и е. Точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них. Поэтому она является серединой отрезка AC, а значит, имеет координаты

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Теперь, зная координаты точки пересечения диагоналей, находим координаты x, y четвертой вершины D. Пользуясь тем, что точка пересечения диагоналей является серединой отрезка BD, имеем:

$$\frac{2+x}{2} = 2, \quad \frac{3+y}{2} = 1. \text{ Отсюда } x = 2, \ y = -1.$$

73. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Пусть на плоскости xy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат, и обозначим через A точку их пересечения (рис. 174). Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Применяя к прямоугольному треугольнику AA_1A_2 теорему Пифагора, получим:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (*)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

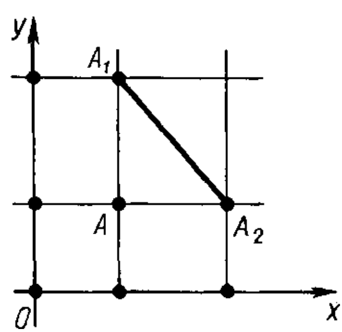


Рис. 174

Хотя формула (*) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, если $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d равно $|y_1 - y_2|$. Тот же результат дает и формула (*). Аналогично рассматривается случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. При $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ точки A_1 и A_2 совпадают и формула (*) дает $d = 0$.

Задача (19). Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек (1; 2) и (2; 3).

Решение. Пусть $(x;\ 0)$ — искомая точка. Приравнивая расстояния от нее до данных точек, получим:

$$(x-1)^2+(0-2)^2=(x-2)^2+(0-3)^2.$$

Отсюда находим $x = 4$. Значит, искомая точка есть (4; 0).

74. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Уравнением фигуры в декартовых координатах на плоскости называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

Составим уравнение окружности с центром в точке $A_0\ (a;\ b)$ и радиусом R (рис. 175). Возьмем произвольную точку $A\ (x;\ y)$ на окружности. Расстояние от нее до центра A_0 равно R. Квадрат расстояния от точки A до A_0 равен $(x-a)^2+(y-b)^2$. Таким образом, координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$

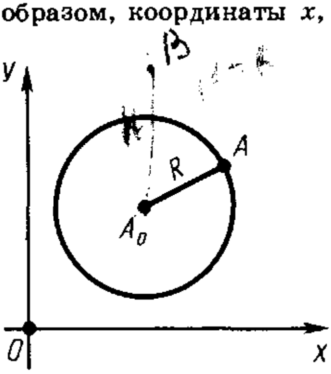


Рис. 175

Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению (*), принадлежит окружности, так как расстояние от нее до точки A_0 равно R. Отсюда следует, что уравнение (*) действительно является уравнением окружности с центром A_0 и радиусом R.

Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Задача (30). Какая геометрическая фигура задана уравнением

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,\ \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0?$$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c,$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\right)^2.$$

Мы видим, что рассматриваемая фигура есть окружность с центром $\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$ и радиусом $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$.

75. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Докажем, что ***любая прямая в декартовых координатах x, y имеет уравнение вида***

$$\boldsymbol{ax+by+c=0,} \tag{*}$$

где a, b, c — некоторые числа.

Пусть h — произвольная прямая на плоскости xy. Проведем какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой h, и отложим на ней от точки пересечения C с прямой h равные отрезки CA_1 и CA_2 (рис. 176).

Пусть a_1, b_1 — координаты точки A_1 и a_2, b_2 — координаты точки A_2. Как мы знаем, любая точка A $(x;\ y)$ прямой h равноудалена от точек A_1 и A_2. Поэтому координаты ее удовлетворяют уравнению

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=$$
$$=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2. \tag{**}$$

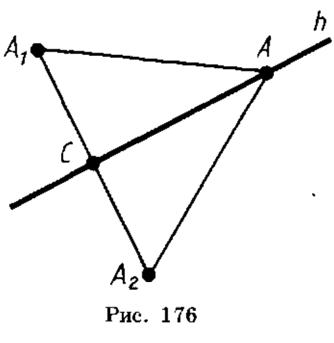


Рис. 176

Обратно: если координаты x и y какой-нибудь точки удовлетворяют уравнению (**), то эта точка равноудалена от точек A_1 и A_2, а значит, принадлежит прямой h. Таким образом, уравнение (**) является уравнением прямой h. Если в этом уравнении раскрыть скобки и перенести все члены уравнения в левую его часть, то оно примет вид:

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0.$$

Обозначая $2(a_2-a_1)=a$, $2(b_2-b_1)=b$, $a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=c$, получаем уравнение (*). Утверждение доказано.

Задача (35). Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 0)$.

Решение. Как мы знаем, наша прямая имеет уравнение вида $ax+by+c=0$. Точки A и B лежат на прямой, а значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению.

Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим:

$$-a+b+c=0,\ a+c=0.$$

Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например a и b, через третий: $a=-c$, $b=-2c$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой, получим:

$$-cx-2cy+c=0.$$

На c можно сократить. Тогда получим:

$$-x-2y+1=0.$$

Это и есть уравнение нашей прямой.

76. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМЫХ

Пусть заданы уравнения двух прямых:

$$ax+by+c=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Найдем координаты их точки пересечения.

Так как точка пересечения $(x;\ y)$ принадлежит каждой из прямых, то ее координаты удовлетворяют и первому и второму уравнению. Поэтому координаты точки пересечения являются решением системы уравнений, задающих прямые. Рассмотрим пример.

Пусть уравнениями данных прямых будут:

$$3x-y+2=0,$$
$$5x-2y+1=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим $x=-3$, $y=-7$. Точка пересечения прямых $(-3;\ -7)$.

Задача (43). Докажите, что прямые, задаваемые уравнениями

$$y=kx+l_1,$$
$$y=kx+l_2,$$

при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

Решение. Допустим, прямые не параллельны, а значит, пересекаются в некоторой точке $(x_1;\ y_1)$. Так как точка пересечения принадлежит каждой из прямых, то для нее

$$y_1=kx_1+l_1,$$
$$y_1=kx_1+l_2.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $0=l_1-l_2$. А это противоречит условию $(l_1 \neq l_2)$. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

77. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Выясним, как расположена прямая относительно осей координат, если ее уравнение $ax+by+c=0$ имеет тот или иной частный вид.

1. $a=0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$; следовательно, ***прямая параллельна оси*** $\boldsymbol{x}$ (рис. 177, *а*). В частности, если $c=0$, то прямая совпадает с осью x.

2. $b=0$, $a\neq 0$. Этот случай рассматривается аналогично. ***Прямая параллельна оси*** $\boldsymbol{y}$ (рис. 177, *б*) и совпадает с ней, если и $c=0$.

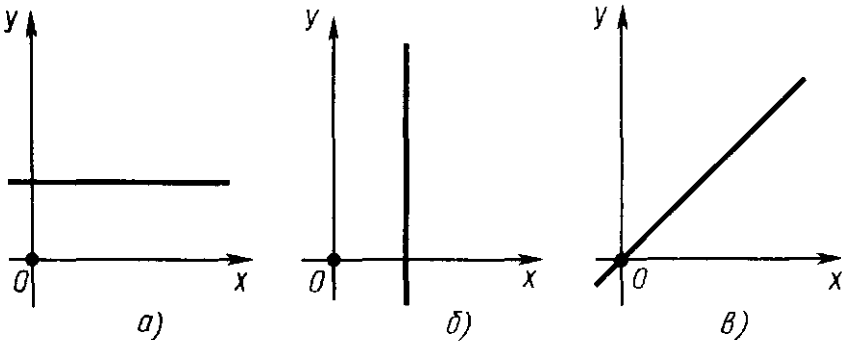


Рис. 177

3. $c=0$. ***Прямая проходит через начало координат***, так как его координаты (0; 0) удовлетворяют уравнению прямой (рис. 177, *в*).

Задача (45). Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси x и проходит через точку (2; -3).

Решение. Так как прямая параллельна оси x, то она имеет уравнение вида

$$y+c=0.$$

Так как точка (2; -3) лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению: $-3+c=0$. Отсюда $c=3$. Следовательно, уравнение прямой

$$y+3=0.$$

78. УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ В УРАВНЕНИИ ПРЯМОЙ

Если в общем уравнении прямой $ax+by+c=0$ коэффициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получим:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Или, обозначая $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=l$, получим:

$$y=kx+l.$$

Выясним геометрический смысл коэффициента k в этом уравнении.

Возьмем две точки на прямой $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ $(x_1<x_2)$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_1=kx_1+l, \qquad y_2=kx_2+l.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Отсюда

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

В случае, представленном на рисунке 178, *а*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha$.

В случае, представленном на рисунке 178, *б*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

Коэффициент k в уравнении прямой называется *угловым коэффициентом* прямой.

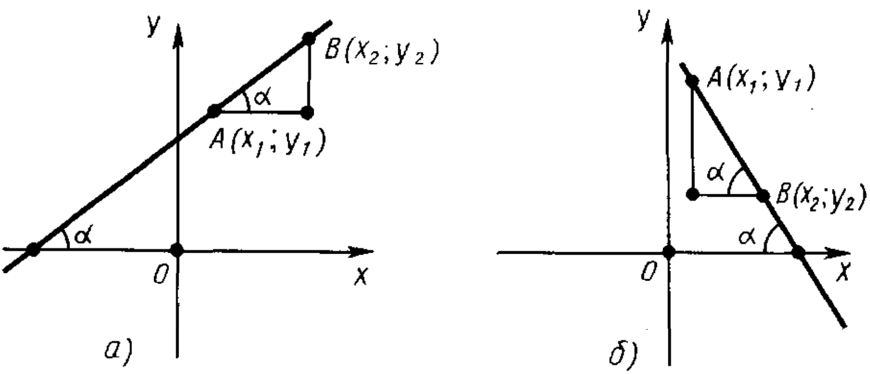


Рис. 178

79. ГРАФИК ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

При построении графиков функций на уроках алгебры вы, наверное, заметили, что графиком линейной функции является прямая. Теперь мы докажем это.

Пусть $y=ax+b$ — данная линейная функция. Докажем, что ее графиком является прямая.

Для данной функции если $x=0$, то $y=b$, если $x=1$. то $y=a+b$. Поэтому графику функции принадлежат точки $(0;\ b)$ и $(1;\ a+b)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки. Как мы знаем, оно имеет вид:

$$y=kx+l.$$

Так как указанные точки графика лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$b=k\cdot 0+l,$$

$$a+b=k\cdot 1+l.$$

Отсюда находим $l=b$, $k=a$. Итак, наша прямая имеет уравнение

$$y=ax+b.$$

Значит, уравнению прямой удовлетворяют все точки графика. То есть графиком линейной функции является прямая.

80. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Рассмотрим вопрос о пересечении прямой с окружностью.

Пусть R — радиус окружности и d — расстояние от центра окружности до прямой. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к данной, за ось x (рис. 179). Тогда уравнением окружности будет $x^2+y^2=R^2$, а уравнением прямой $x=d$.

Для того чтобы прямая и окружность пересекались, надо, чтобы система двух уравнений

$$x^2+y^2=R^2,\ x=d$$

имела решение. И обратно: всякое решение этой системы дает координаты x, y точки пересечения прямой с окружностью. Решая нашу систему, получим:

$$x=d,\ y=\pm\sqrt{R^2-d^2}.$$

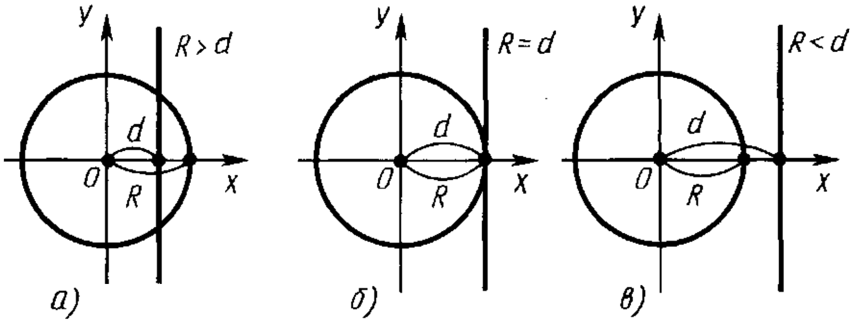


Рис. 179

Из выражения для y видно, что система имеет два решения, т. е. ***окружность и прямая имеют две точки пересечения, если*** $R>d$ (рис. 179, *а*).

Система имеет одно решение, ***если*** $R=d$ (рис. 179, *б*). В этом случае ***прямая и окружность касаются.***

Система не имеет решения, т. е. ***прямая и окружность не пересекаются, если*** $R<d$ (рис. 179, *в*).

Задача (50). Найдите точки пересечения окружности $x^2+y^2=1$ с прямой $y=2x+1$.

Решение. Так как точки пересечения лежат на окружности и на прямой, то их координаты удовлетворяют системе уравнений

$$x^2+y^2=1, \quad y=2x+1.$$

Решим эту систему. Подставим y из второго уравнения в первое. Получим уравнение для x:

$$5x^2+4x=0.$$

Уравнение имеет два корня $x_1=0$ и $x_2=-\frac{4}{5}$. Это абсциссы точек пересечения. Ординаты этих точек получим из уравнения прямой, подставляя в него x_1 и x_2. Получаем $y_1=1$, $y_2=-\frac{3}{5}$. Итак, точки пересечения прямой и окружности $(0;\ 1)$ и $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$.

81. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА ДЛЯ ЛЮБОГО УГЛА ОТ 0° ДО 180°

До сих пор значения синуса, косинуса и тангенса были определены только для острых углов. Теперь мы определим их для любого угла от 0° до 180°.

Возьмем окружность на плоскости xy с центром в начале координат и радиусом R (рис. 180). Отложим от положительной полуоси x в верхнюю полуплоскость (полуплоскость, где $y>0$) угол α. Пусть x и y — координаты точки A. Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для острого угла α выражаются через координаты точки A, а именно:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},\ \sin\alpha=\frac{y}{R},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

Определим теперь значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ этими формулами для любого угла α. (Для $\operatorname{tg}\alpha$ угол $\alpha=90°$ исключается.)

При таком определении $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg} 180°=0$.

Считая, что совпадающие лучи образуют угол 0°, будем иметь: $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\operatorname{tg} 0°=0$.

Докажем, что ***для любого угла*** α, $0°<\alpha<180°$, $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. ***Для угла*** $\alpha\neq 90°$ $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Действительно, треугольники OAB и OA_1B_1 равны по гипотенузе и острому углу (рис. 181). Из равенства треугольников

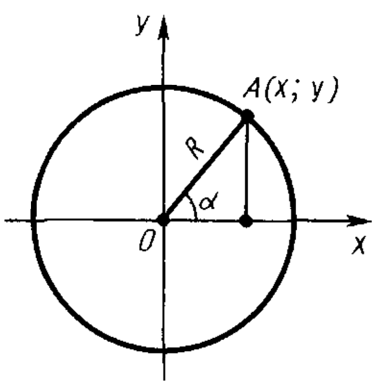


Рис. 180

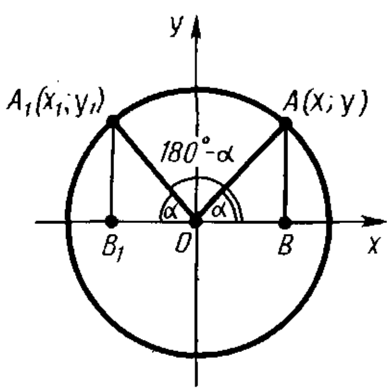


Рис. 181

следует, что $AB = A_1B_1$, т. е. $y = y_1$; $OB = OB_1$, следовательно, $x = -x_1$. Поэтому

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, как определяются координаты точки.
2. Какие знаки у координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвертой) четверти?
3. Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси ординат? Чему равны ординаты точек, лежащих на оси абсцисс? Чему равны координаты начала координат?
4. Выведите формулы для координат середины отрезка.
5. Выведите формулу для расстояния между точками.
6. Что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?
7. Выведите уравнение окружности.
8. Докажите, что прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$.
9. Как найти координаты точки пересечения двух прямых, если заданы уравнения этих прямых?
10. Как расположена прямая, если в ее уравнении коэффициент $a = 0$ ($b = 0$; $c = 0$)?
11. Что такое угловой коэффициент прямой и какой его геометрический смысл?
12. Докажите, что графиком линейной функции является прямая.
13. При каком условии прямая и окружность не пересекаются, пересекаются в двух точках, касаются?
14. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°.
15. Докажите, что для любого угла α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

ЗАДАЧИ

1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами: (1; 2), (−2; 1), (−1; −3), (2; −1).
2. Возьмите наудачу четыре точки на плоскости xy. Найдите координаты этих точек.
3. На прямой, параллельной оси x, взяты две точки. У одной из них ордината $y=2$. Чему равна ордината другой точки?
4. На прямой, перпендикулярной оси x, взяты две точки. У одной из них абсцисса $x=3$. Чему равна абсцисса другой точки?
5. Из точки A (2; 3) опущен перпендикуляр на ось x. Найдите координаты основания перпендикуляра.
6. Через точку A (2; 3) проведена прямая, параллельная оси x. Найдите координаты точки пересечения ее с осью y.
7. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых абсцисса $x=3$.
8. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $|x|=3$.
9. Даны точки A (−3; 2) и B (4; 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось y, но не пересекает ось x.
10. Какую из полуосей оси y (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?
11. Найдите расстояние от точки (−3; 4) до: 1) оси x; 2) оси y.
12. Найдите координаты середины отрезка AB, если: 1) A (1; −2), B (5; 6); 2) A (−3; 4), B (1; 2); 3) A (5; 7), B (−3; −5).
13. Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты второго конца отрезка AB, если: 1) A (0; 1), C (−1; 2); 2) A (−1; 3), C (1; −1); 3) A (0; 0), C (−2; 2).
14. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−1; −2), B (2; −5), C (1; −2), D (−2; 1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.
15. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2). Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.
16. Найдите середины сторон треугольника с вершинами в точках O (0; 0), A (0; 2), B (−4; 0).
17. Даны три точки A (4; −2), B (1; 2), C (−2; 6). Найдите расстояния между этими точками, взятыми попарно.
18. Докажите, что точки A, B, C в задаче 17 лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

19. Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек $(1;\ 2)$ и $(2;\ 3)$.
20. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки $(3;\ 6)$.
21*. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (4;\ 1)$, $B\ (0;\ 4)$, $C\ (-3;\ 0)$, $D\ (1;\ -3)$ является квадратом.
22. Докажите, что четыре точки $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$ являются вершинами квадрата.
23. Какие из точек $(1;\ 2)$, $(3;\ 4)$, $(-4;\ 3)$, $(0;\ 5)$, $(5;\ -1)$ лежат на окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=25$?
24. Найдите на окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=169$, точки: 1) с абсциссой 5; 2) с ординатой -12.
25. Даны точки $A\ (2;\ 0)$ и $B\ (-2;\ 6)$. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.
26. Даны точки $A\ (-1;\ -1)$ и $C\ (-4;\ 3)$. Составьте уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку A.
27. Найдите центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку $(1;\ 4)$ и радиус окружности равен 5.
28*. Составьте уравнение окружности с центром в точке $(1;\ 2)$, касающейся оси x.
29. Составьте уравнение окружности с центром $(-3;\ 4)$, проходящей через начало координат.
30*. Какая геометрическая фигура задана уравнением $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$?
31. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x+y-2=0$.
32. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ с осью x.
33. Докажите, что окружность $x^2+y^2+2ax+1=0$, $|a|>1$, не пересекается с осью y.
34. Докажите, что окружность $x^2+y^2+2ax=0$ касается оси y, $a\neq 0$.
35. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A\ (-1;\ 1)$, $B\ (1;\ 0)$.
36. Составьте уравнение прямой AB, если: 1) $A\ (2;\ 3)$, $B\ (3;\ 2)$; 2) $A\ (4;\ -1)$, $B\ (-6;\ 2)$; 3) $A\ (5;\ -3)$, $B\ (-1;\ -2)$.
37. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника OAB в задаче 16.
38. Чему равны координаты a и b в уравнении прямой $ax+by=1$, если известно, что она проходит через точки $(1;\ 2)$ и $(2;\ 1)$?
39. Найдите точки пересечения с осями координат прямой,

заданной уравнением: 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$.

40. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

1) $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$;
2) $3x-y-2=0$, $2x+y-8=0$;
3) $4x+5y+8=0$, $4x-2y-6=0$.

41*. Докажите, что три прямые $x+2y=3$, $2x-y=1$ и $3x+y=4$ пересекаются в одной точке.

42*. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 0), (2; 3), (3; 2).

43. Докажите, что прямые, задаваемые уравнениями $y=kx+l_1$, $y=kx+l_2$, при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

44. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых: 1) $x+y=1$; 2) $y=x-1$; 3) $x-y=2$; 4) $y=4$; 5) $y=3$; 6) $2x+2y+3=0$.

45. Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси y и проходит через точку (2; -3).

46. Составьте уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку (2; 3).

47. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (2; 3).

48. Найдите угловые коэффициенты прямых из задачи 39.

49. Найдите острые углы, которые образует заданная прямая с осью x: 1) $2y=2x+3$; 2) $x\sqrt{3}-y=2$; 3) $x+y\sqrt{3}+1=0$.

50. Найдите точки пересечения окружности $x^2+y^2=1$ с прямой: 1) $y=2x+1$; 2) $y=x+1$; 3) $y=3x+1$; 4) $y=kx+1$.

51*. При каких значениях c прямая $x+y+c=0$ и окружность $x^2+y^2=1$: 1) пересекаются; 2) не пересекаются; 3) касаются?

52. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.

53. Найдите: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$; 3) $\operatorname{tg} 130°$.

54. Найдите синус, косинус и тангенс углов: 1) 40°; 2) 14°36′; 3) 70°20′; 4) 30°16′; 5) 130°; 6) 150°30′; 7) 150°33′; 8) 170°28′.

55. Найдите углы, для которых: 1) $\sin\alpha=0{,}2$; 2) $\cos\alpha=-0{,}7$; $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}4$.

56. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если: 1) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=-0{,}5$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

57. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если: 1) $\sin\alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$; 2) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $90°<\alpha<180°$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $0°<\alpha<180°$.

58. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

59. Постройте угол α, если известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

60. Постройте угол α, если известно, что $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

61*. Докажите, что если $\cos\alpha=\cos\beta$, то $\alpha=\beta$.

62*. Докажите, что если $\sin\alpha=\sin\beta$, то либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha=180°-\beta$.

§ 9. ДВИЖЕНИЕ

82. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена *преобразованием* из данной (рис. 182).

Преобразование одной фигуры в другую называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X', Y' другой фигуры так, что $XY=X'Y'$ (рис. 183).

Замечание. Понятие движения в геометрии связано с обычным представлением о перемещении. Но если, говоря о перемещении, мы представляем себе непрерывный процесс, то в геометрии для нас будут иметь значение только начальное и конечное положения фигуры.

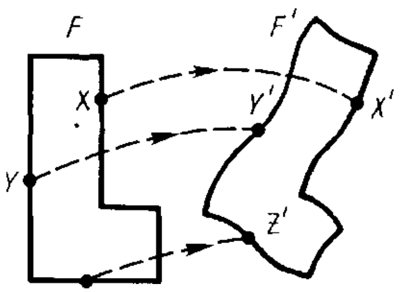


Рис. 182

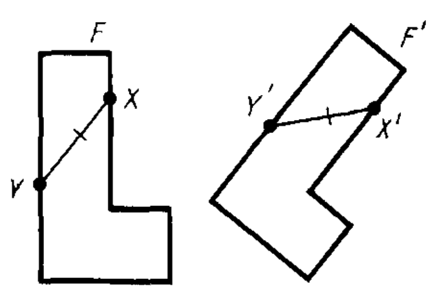


Рис. 183

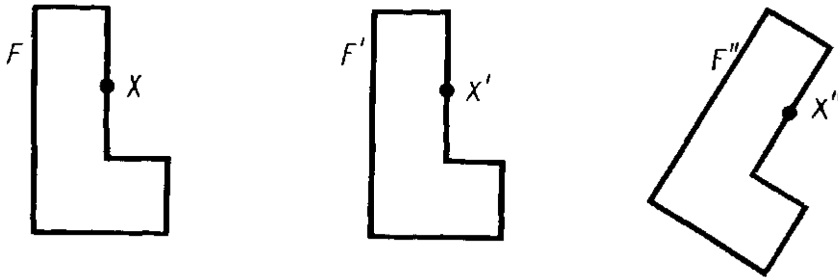


Рис. 184

Пусть фигура F переводится движением в фигуру F', а фигура F' переводится движением в фигуру F'' (рис. 184). Пусть при первом движении точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', а при втором движении точка X' фигуры F' переходит в точку X'' фигуры F''. Тогда преобразование фигуры F в фигуру F'', при котором произвольная точка X фигуры F переходит в точку X'' фигуры F'', сохраняет расстояние между точками, а значит, также является движением.

Это свойство движения выражают словами: ***два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.***

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F' переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F' (см. рис. 182). Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X' фигуры F'. Преобразование фигуры F' в фигуру F, при котором точка X' переходит в точку X, называется преобразованием, ***обратным*** данному. Движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные.

Очевидно, ***преобразование, обратное движению, также является движением.***

83. СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

Теорема 9.1. ***Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.***

Это значит, что если точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1, то эти точки также лежат на прямой;

если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Доказательство. Пусть точка B прямой AC лежит между точками A и C. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на прямой, то они являются вершинами треугольника. Поэтому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. По определению движения отсюда следует, что $AC < AB + BC$. Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$.

Мы пришли к противоречию. Значит, точка B_1 лежит на прямой A_1C_1. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем теперь, что точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Допустим, что точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1. Тогда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$, и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству $AB + BC = AC$. Таким образом, точка A_1 не может лежать между точками B_1 и C_1.

Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между точками A_1 и B_1.

Так как из трех точек A_1, B_1, C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1. Теорема доказана полностью.

Из теоремы 9.1 следует, что ***при движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки*** (рис. 185).

Докажем, что ***при движении сохраняются углы между полупрямыми.***

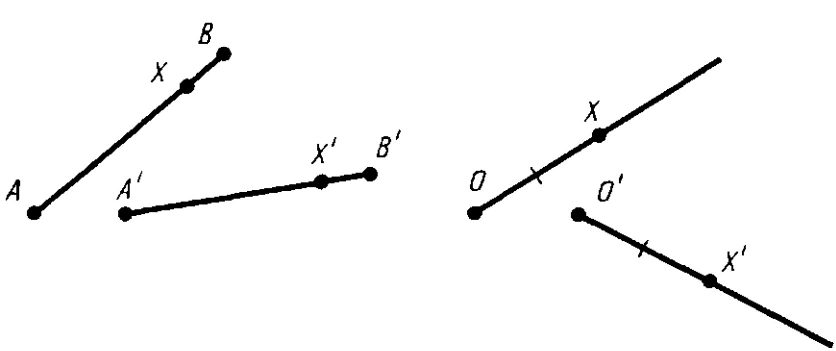


Рис. 185

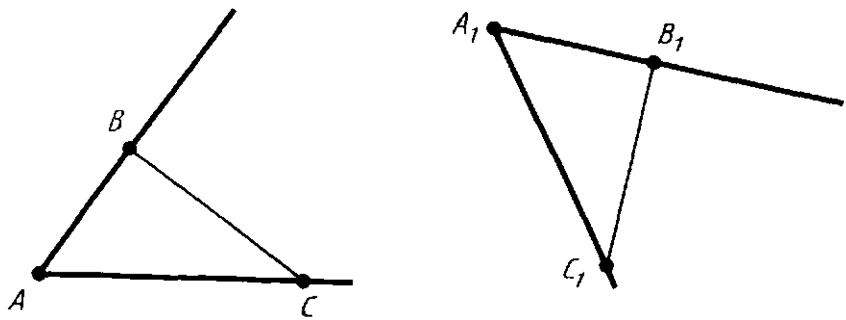


Рис. 186

Пусть AB и AC — две полупрямые, исходящие из точки A, не лежащие на одной прямой (рис. 186). При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

84. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка плоскости (рис. 187). Отложим на продолжении отрезка OX за точку O отрезок OX', равный OX. Точка X' называется *симметричной точке X относительно точки O*. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относитель-

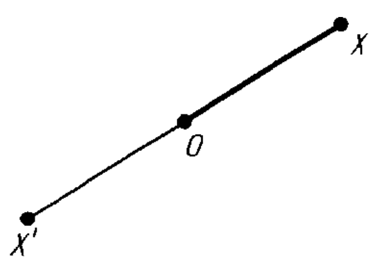


Рис. 187

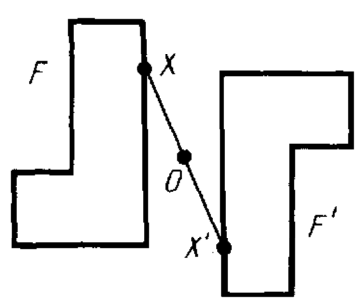


Рис. 188

но данной точки O, называется *преобразованием симметрии относительно точки O*. При этом фигуры F и F' называются *симметричными относительно точки O* (рис. 188).

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется *центрально-симметричной*, а точка O называется *центром симметрии*.

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 189).

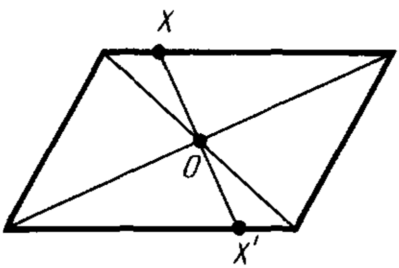


Рис. 189

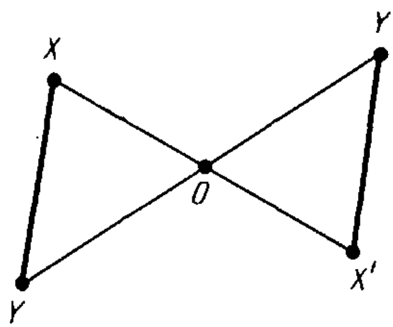


Рис. 190

Теорема 9.2. ***Преобразование симметрии относительно точки является движением.***

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки фигуры F (рис. 190). Преобразование симметрии относительно точки O переводит их в точки X' и Y'. Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OX=OX'$, $OY=OY'$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $XY=X'Y'$. А это значит, что симметрия относительно точки O есть движение. Теорема доказана.

85. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ

Пусть g — фиксированная прямая (рис. 191). Возьмем произвольную точку X и опустим перпендикуляр AX на прямую g. На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AX', равный отрезку AX. Точка X' называется *симметрич-*

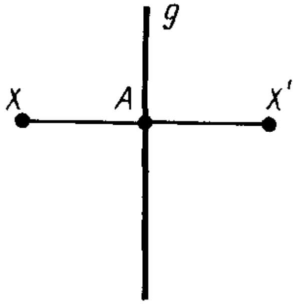


Рис. 191

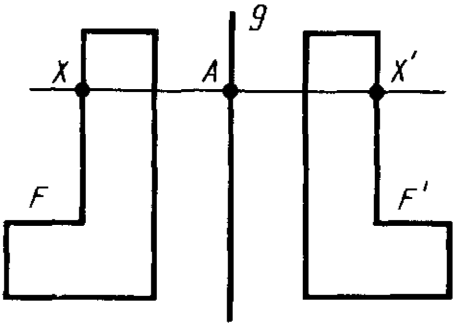


Рис. 192

ной точке X относительно прямой g. Если точка X лежит на прямой g, то симметричная ей точка есть сама точка X. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой g, называется ***преобразованием симметрии относительно прямой g.*** При этом фигуры F и F' называются ***симметричными относительно прямой g*** (рис. 192).

Если преобразование симметрии относительно прямой g переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется ***симметричной относительно прямой g***, а прямая g называется ***осью симметрии*** фигуры.

Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 193). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 194).

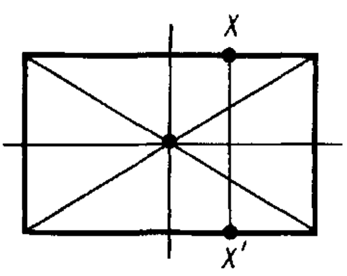


Рис. 193

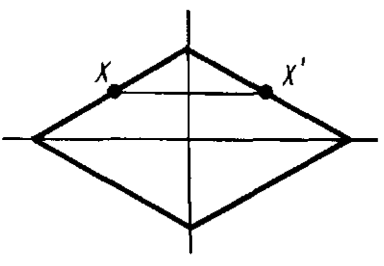


Рис. 194

Теорема 9.3. ***Преобразование симметрии относительно прямой является движением.***

Доказательство. Примем данную прямую за ось y декартовой системы координат (рис. 195). Пусть произвольная точка A $(x;\ y)$ фигуры F переходит в точку A' $(x';\ y')$ фигуры F'. Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек A и A' равные ординаты, а абсциссы отличаются только знаком: $x'=-x$.

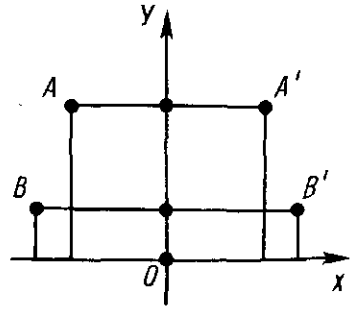


Рис. 195

Возьмем две произвольные точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$. Они перейдут в точки A' $(-x_1;\ y_1)$ и B' $(-x_2;\ y_2)$.

Имеем:

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

$$A'B'^2=(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда видно, что $AB=A'B'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение. Теорема доказана.

86. ПОВОРОТ

Поворотом плоскости около данной точки называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис. 196). Это значит, что если при повороте около точки O точка X переходит в точку X', то лучи OX и OX' образуют один и тот же угол, какова бы ни была точка X. Этот угол называется *углом поворота*. Преобразование фигур при повороте плоскости также называется *поворотом*.

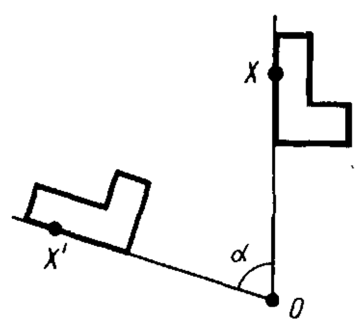


Рис. 196

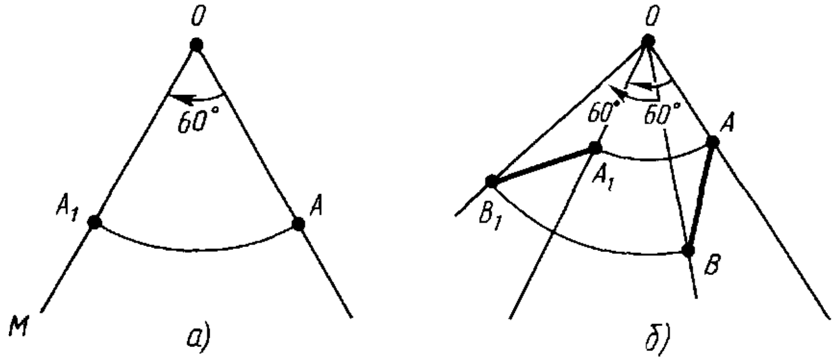


Рис. 197

Задача (25). 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.

2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.

Решение. 1) Проведем луч OA и построим луч OM так, что $\angle AOM = 60°$ (рис. 197, *а*). Отложим на луче OM отрезок OA_1, равный отрезку OA. Точка A_1 является искомой.

2) Построим точки A_1 и B_1, в которые переходят при заданном повороте точки A и B, являющиеся концами отрезка AB (рис. 197, *б*). Отрезок A_1B_1 является искомым, поскольку при повороте отрезок переходит в отрезок.

87. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЕГО СВОЙСТВА

Наглядно параллельный перенос определяется как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис. 198). Такое определение не является математически строгим, потому что в нем употребляется выражение «в одном и том же направлении», которое само нуждается в точном определении. В связи с этим параллельному переносу мы дадим другое, отвечающее тому же наглядному представлению, но уже строгое определение.

Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x;\ y)$ переходит в точку $(x+a;\ y+b)$, где a и b одни и те же для всех точек $(x;\ y)$, называется *параллельным переносом* (рис. 199). Параллельный перенос задается формулами

$$x'=x+a,\quad y'=y+b.$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка $(x;\ y)$ при параллельном переносе.

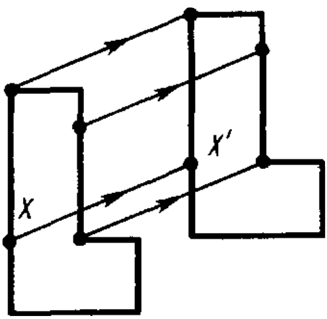


Рис. 198

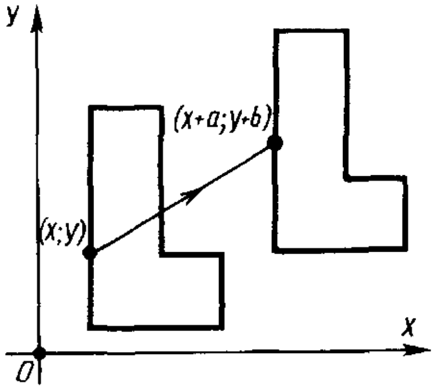


Рис. 199

Параллельный перенос есть движение.

Действительно, две произвольные точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ переходят при параллельном переносе в точки $A'\ (x_1+a;\ y_1+b)$, $B'\ (x_2+a;\ y_2+b)$. Поэтому

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда $AB=A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением, что и требовалось доказать.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что ***при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.***

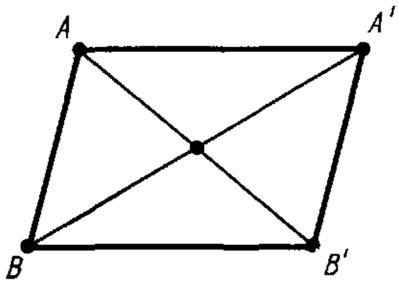


Рис. 200

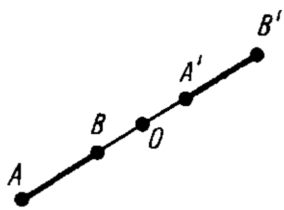


Рис. 201

Действительно, пусть точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$ переходят в точки A' $(x_1+a;\ y_1+b)$ и B' $(x_2+a;\ y_2+b)$ (рис. 200). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Те же координаты имеет и середина отрезка $A'B$. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA' и BB' параллельны и равны.

Заметим, что у параллелограмма $AA'B'B$ параллельны и две другие противолежащие стороны — AB и $A'B'$. Отсюда следует, что ***при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).***

Замечание. В предыдущем доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA'. В случае, когда точка B лежит на прямой AA', точка B' тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA' (рис. 201). Значит, все точки A, B, A', B' лежат на одной прямой. Далее,

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2+b^2}$, а прямая AB переходит в себя.

88. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

Теорема 9.4. ***Каковы бы ни были две точки A и A', существует один и только один параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.***

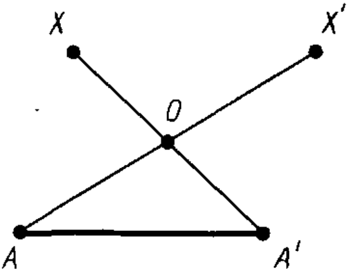


Рис. 202

Доказательство. Начнем с доказательства существования параллельного переноса, переводящего точку A в A'. Введем декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 — координаты точки A и a'_1, a'_2 — координаты точки A'. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x' = x + a'_1 - a_1, \quad y' = y + a'_2 - a_2,$$

переводит точку A в точку A'. Действительно, при $x = a_1$ и $y = a_2$ получаем $x' = a'_1$, $y' = a'_2$.

Докажем единственность параллельного переноса, переводящего точку A в точку A'. Пусть X — произвольная точка фигуры и X' — точка, в которую она переходит при параллельном переносе (рис. 202). Как мы знаем, отрезки XA' и AX' имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O — середину отрезка $A'X$. А точки A и O однозначно определяют точку X', так как точка O является серединой отрезка AX'. Однозначность в определении точки X' и означает единственность параллельного переноса.

Теорема доказана полностью.

Задача (30). При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0). В какую точку переходит начало координат?

Решение. Любой параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Так как точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0), то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2$, $b = -1$. Таким образом, наш параллельный перенос, переводящий точку (1; 1) в (−1; 0), задается формулами $x'=x-2$, $y'=y-1$. Подставляя в эти формулы координаты начала ($x=0$, $y=0$), получим $x'=-2$, $y'=-1$. Итак, начало координат переходит в точку (−2; −1).

89. СОНАПРАВЛЕННОСТЬ ПОЛУПРЯМЫХ

Две полупрямые называются *одинаково направленными*, или *сонаправленными*, если они совмещаются параллельным переносом. То есть существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены (рис. 203).

Действительно, пусть параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x'=x+m,\ y'=y+n, \qquad (*)$$

переводит полупрямую a в полупрямую b, а параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x''=x'+m_1,\ y''=y'+n_1, \qquad (**)$$

переводит полупрямую b в полупрямую c.

Рассмотрим параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x''=x+m+m_1,\ y''=y+n+n_1. \qquad (***)$$

Утверждаем, что этот параллельный перенос переводит полупрямую a в полупрямую c. Докажем это.

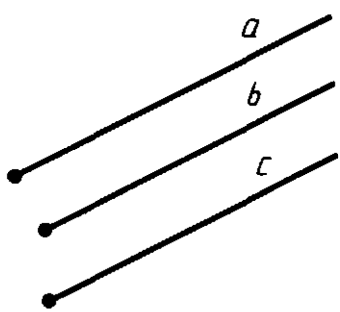


Рис. 203

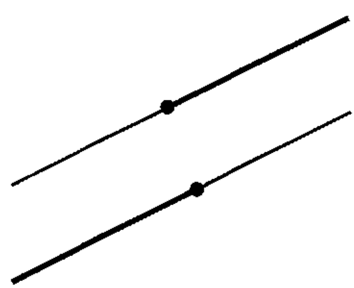


Рис. 204

Пусть $(x;\ y)$ — произвольная точка полупрямой a. Согласно формулам (*) точка $(x+m;\ y+n)$ принадлежит полупрямой b. Так как точка $(x+m;\ y+n)$ принадлежит полупрямой b, то согласно формулам (**) точка $(x+m+m_1;\ y+n+n_1)$ принадлежит полупрямой c. Таким образом, параллельный перенос, задаваемый формулами (***), переводит полупрямую a в полупрямую c. А это значит, что полупрямые a и c одинаково направлены, что и требовалось доказать.

Две полупрямые называются *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой (рис. 204).

Задача (32). Прямые AB и CD параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

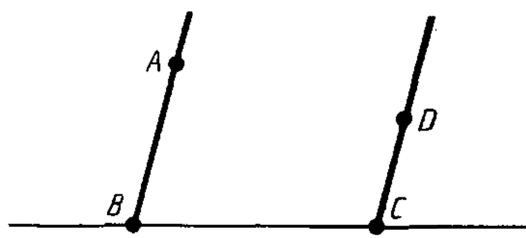


Рис. 205

Решение. Подвергнем луч CD параллельному переносу, при котором точка C переходит в точку B (рис. 205). При этом прямая CD совместится с прямой BA. Точка D, смещаясь по прямой, параллельной CB, остается в той же полуплоскости относительно прямой BC. Поэтому луч CD совместится с лучом BA, а значит, эти лучи одинаково направлены.

90. РАВЕНСТВО ФИГУР

Две фигуры называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F=F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'. В записи равенства треугольников: $\triangle ABC=$

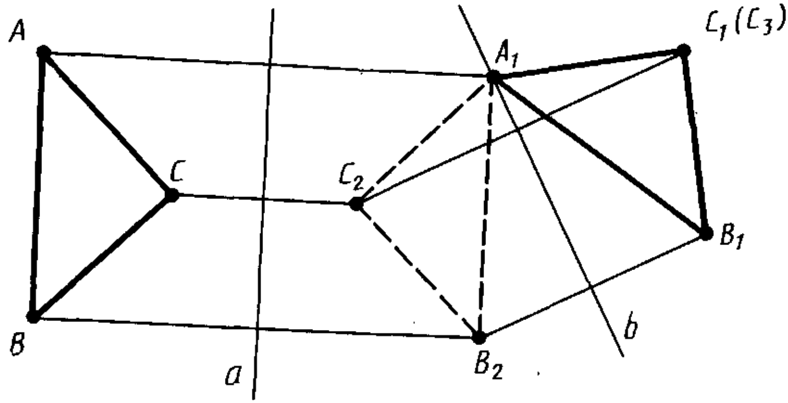


Рис. 206

$=\triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что совмещаемые при движении вершины стоят на соответствующих местах. При таком условии ***равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство, как мы его понимали до сих пор, выражают одно и то же.***

Это значит, что если у двух треугольников соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны, то эти треугольники совмещаются движением. И обратно: если два треугольника совмещаются движением, то у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. Докажем оба эти утверждения.

Пусть треугольник ABC совмещается движением с треугольником $A_1B_1C_1$, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1 и C — в C_1. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то для наших треугольников $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Докажем, что они совмещаются движением, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1. Подвергнем треугольник ABC преобразованию симметрии относительно прямой a, перпендикулярной к отрезку AA_1 и проходящей через его середину (рис. 206). Получим треугольник $A_1B_2C_2$. Если точки B_1 и B_2 различны, то подвергнем его симметрии относительно прямой b, которая проходит через точку A_1 и перпендикулярна к прямой B_1B_2. Получим треугольник $A_1B_1C_3$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, так как углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_3$ равны, то лучи A_1C_1 и A_1C_3 совпадают, а так как отрезки A_1C_1 и A_1C_3 равны, то совпадают точки C_1 и C_3. Таким образом, треугольник ABC движением переведен в треугольник $A_1B_1C_1$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, то для доказательства надо еще применить симметрию относительно прямой A_1B_1.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое преобразование фигуры называется движением?
2. Докажите, что точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
3. Во что переходят прямые, полупрямые, отрезки при движении?
4. Докажите, что при движении сохраняются углы.
5. Объясните, какие точки называются симметричными относительно данной точки.
6. Какое преобразование называется симметрией относительно данной точки?
7. Какая фигура называется центрально-симметричной?
8. Что такое центр симметрии фигуры? Приведите пример центрально-симметричной фигуры.
9. Докажите, что симметрия относительно точки есть движение.
10. Какие точки называются симметричными относительно данной прямой?
11. Какое преобразование называется симметрией относительно данной прямой?
12. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?
13. Что такое ось симметрии фигуры? Приведите пример.
14. Докажите, что симметрия относительно прямой есть движение.
15. Какое движение называется поворотом?
16. Что такое параллельный перенос?
17. Какие вы знаете свойства параллельного переноса?
18. Докажите существование и единственность параллель-

ного переноса, переводящего данную точку в другую данную точку.

19. Какие полупрямые называются одинаково направленными?
20. Докажите, что если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены.
21. Какие полупрямые называются противоположно направленными?
22. Какие фигуры называются равными?

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм.
2. В какую фигуру переходит при движении квадрат? Объясните ответ.
3. Даны точки A и B. Постройте точку B', симметричную точке B относительно точки A.
4. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.
5. Докажите, что центр окружности является ее центром симметрии.
6. При симметрии относительно некоторой точки точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.
7. Может ли у треугольника быть центр симметрии?
8. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.
9. Докажите, что четырехугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.

10*. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке (рис. 207).

11. Что представляет собой фигура, симметричная относительно данной точки: 1) отрезку; 2) углу; 3) треугольнику?
12. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.
13. Решите задачу 12, пользуясь только циркулем.
14. Чему равны координаты точки, симметричной точке $(-3;\ 4)$ относительно 1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат?
15. При симметрии относительно некоторой прямой точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.

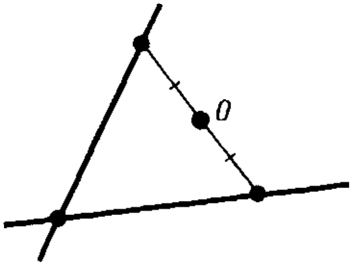


Рис. 207

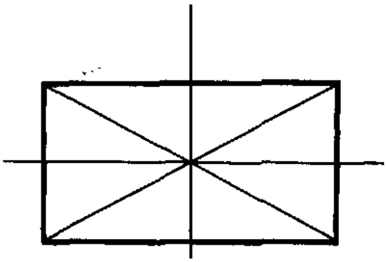


Рис. 208

16. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

17. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

18. Докажите, что если у треугольника есть ось симметрии, то 1) она проходит через одну из его вершин; 2) треугольник равнобедренный.

19. Сколько осей симметрии у равностороннего треугольника?

20. Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются его осями симметрии (рис. 208).

21. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

22. Докажите, что диагонали квадрата и прямые, проходящие через точку их пересечения параллельно его сторонам, являются осями симметрии квадрата (рис. 209).

23. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

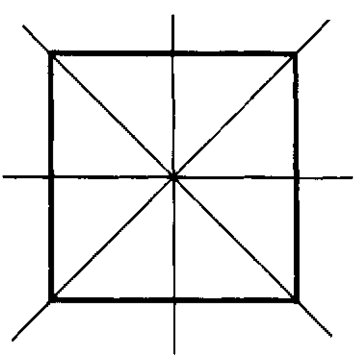


Рис. 209

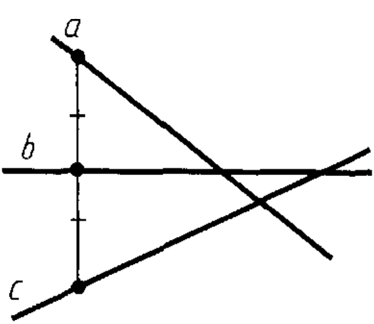


Рис. 210

24*. Даны три попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Как построить отрезок, перпендикулярный прямой b, с серединой на прямой b и концами на прямых a и c (рис. 210)? Всегда ли задача имеет решение?

25. 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.
2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.

26. Постройте фигуру, в которую переходит треугольник ABC при повороте его около вершины C на угол 60°.

27. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A в B.

28. Параллельный перенос задается формулами $x'=x+1$, $y'=y-1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки (0;0), (1;0), (0;2)?

29. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x'=x+a$, $y'=y+b$, если известно, что: 1) точка (1;2) переходит в точку (3;4); 2) точка (2; −3) — в точку (−1;5); 3) точка (−1; −3) — в точку (0; −2).

30. При параллельном переносе точка (1;1) переходит в точку (−1;0). В какую точку переходит начало координат?

31. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) точка (1;2) переходит в точку (3;4), а точка (0;1) — в точку (−1;0); 2) точка (2; −1) переходит в точку (1;0), а точка (−1;3) — в точку (0;4)?

32. Прямые AB и CD параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

33. Докажите, что в задаче 32 лучи BA и CD противоположно направлены, если точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC.

34. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Среди лучей AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA назовите пары одинаково направленных и противоположно направленных лучей.

35. Докажите, что отрезки равной длины и углы с равной градусной мерой совмещаются движением.

36*. У параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ и $\angle A=\angle A_1$. Докажите, что параллелограммы равны, т. е. совмещаются движением.

37*. Докажите, что ромбы равны, если у них равны диагонали.

38. Докажите, что две окружности одинакового радиуса равны, т. е. совмещаются движением.

§ 10. ВЕКТОРЫ

91. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Вектором мы будем называть направленный отрезок (рис. 211). Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a, b, c, ... Можно также обозначить вектор указанием его начала и конца. При этом начало вектора ставится на первом месте. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора иногда ставится стрелка или черта. Вектор на рисунке 211 можно обозначить так:

$$\bar{a},\ \vec{a} \text{ или } \overline{AB},\ \overrightarrow{AB}.$$

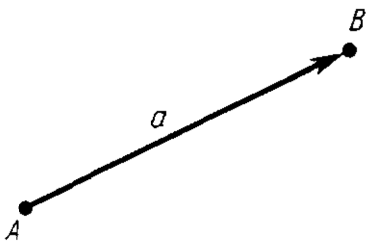


Рис. 211

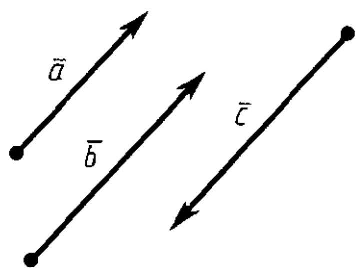


Рис. 212

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково направленными*, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *противоположно направленными*, если полупрямые AB и CD противоположно направлены. На рисунке 212 векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ противоположно направлены.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть *нулевым* вектором. Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой ($\bar{0}$). О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю.

92. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Из данного определения равенства векторов следует, что ***равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.***

Обратно: ***если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.***

Действительно, пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине (рис. 213). Параллельный перенос, переводящий точку C в точку A, совмещает полупрямую CD с полупрямой AB, так как они одинаково направлены. А так как отрезки AB и CD равны, то при этом точка D совмещается с точкой B, т. е. параллельный перенос переводит вектор $\overline{CD}$ в вектор $\overline{AB}$. Значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, что и требовалось доказать.

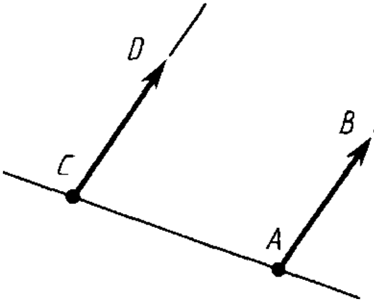


Рис. 213

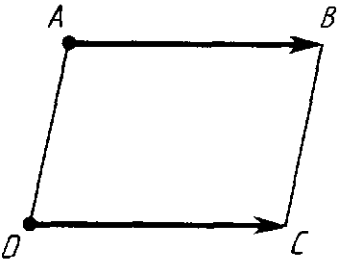


Рис. 214

Задача (2). Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Решение. Подвергнем вектор $\overline{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 214). При этом переносе точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC. Следовательно, точка B переходит в точку C. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{DC}$, а значит, эти векторы равны.

Пусть $\overline{a}$ — вектор и A — произвольная точка. Тогда от точки A можно отложить один и только один вектор $\overline{a}'$, равный вектору $\overline{a}$.

Действительно, существует единственный параллельный перенос, при котором начало вектора $\overline{a}$ переходит в точку A. Вектор, в который переходит при этом вектор $\overline{a}$, и есть вектор $\overline{a}'$.

Для практического откладывания от данной точки (D) вектора равного данному ($\overline{AB}$) можно воспользоваться задачей 2.

93. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть вектор $\overline{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1;\ y_1)$, а концом точку $A_2(x_2;\ y_2)$. Координатами вектора $\overline{a}$ будем называть числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ или просто $\overline{(a_1;\ a_2)}$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2 равна $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно: ***если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.***

Действительно, пусть $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ — начало и конец вектора $\overline{a}$. Так как равный ему вектор $\overline{a}'$ получается из вектора $\overline{a}$ параллельным переносом, то его началом и концом будут соответственно $A_1'(x_1+c;\ y_1+d)$, $A_2'(x_2+c;\ y_2+d)$. Отсюда видно, что оба вектора $\overline{a}$ и $\overline{a}'$ имеют одни и те же координаты: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть соответствующие координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ равны. Докажем, что векторы равны.

Пусть x_1' и y_1' — координаты точки A_1', а x_2', y_2' — координаты точки A_2'. По условию теоремы $x_2-x_1=x_2'-x_1'$, $y_2-y_1=$ $=y_2'-y_1'$. Отсюда $x_2'=x_2+x_1'-x_1$, $y_2'=y_2+y_1'-y_1$. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x'=x+x_1'-x_1,\ y'=y+y_1'-y_1,$$

переводит точку A_1 в точку A_1', а точку A_2 в точку A_2', т. е. векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ равны, что и требовалось доказать.

З а д а ч а (7). Даны три точки: A (1; 1), B (−1; 0), C (0; 1). Найдите такую точку D (x; y), чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

Р е ш е н и е. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты −2, −1. Вектор $\overline{CD}$ имеет координаты $x-0$, $y-1$. Так как $\overline{AB}=$ $=\overline{CD}$, то $x-0=-2$, $y-1=-1$. Отсюда находим координаты точки D: $x=-2$, $y=0$.

94. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами a_1, a_2 и b_1, b_2 называется вектор $\bar{c}$ с координатами a_1+b_1, a_2+b_2, т. е.

$$\bar{a}(a_1;\ a_2)+\bar{b}(b_1;\ b_2)=\bar{c}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2).$$

Для любых векторов $\bar{a}\,(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}\,(c_1;\ c_2)$

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},\quad \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенств. Мы видим, что они равны. А векторы с соответственно равными координатами равны.

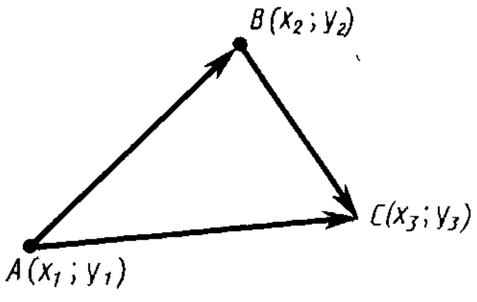


Рис. 215

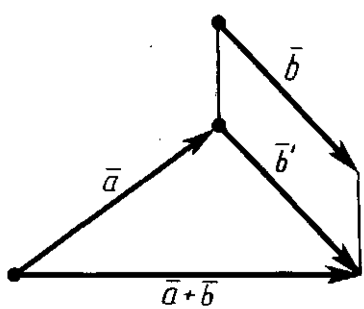


Рис. 216

Теорема 10.1. ***Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство***

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Доказательство. Пусть $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ — данные точки (рис. 215). Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты x_2-x_1, y_2-y_1, вектор $\overline{BC}$ имеет координаты x_3-x_2, y_3-y_2. Следовательно, вектор $\overline{AB}+\overline{BC}$ имеет координаты x_3-x_1, y_3-y_1. А это есть координаты вектора $\overline{AC}$. Значит, векторы $\overline{AB}+\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ равны. Теорема доказана.

Теорема 10.1 дает следующий способ построения суммы произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный вектору $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, будет суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 216). Такой способ получения суммы двух векторов называется *«правилом треугольника»* сложения векторов.

Для векторов с общим началом их сумма изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (*«правило параллелограмма»*, рис. 217). Действительно, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, а $\overline{BC}=\overline{AD}$. Значит, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

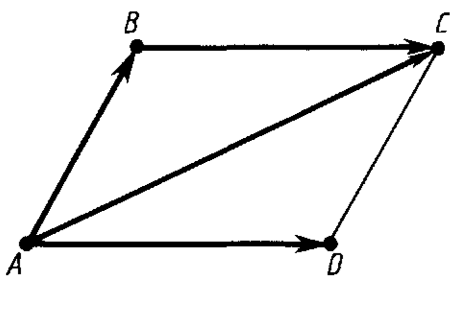


Рис. 217

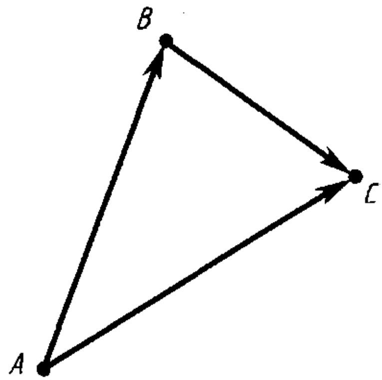


Рис. 218

Разностью векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\bar{c}(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$: $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$:

$$c_1=a_1-b_1;\quad c_2=a_2-b_2.$$

З а д а ч а (11). Даны векторы с общим началом: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 218). Докажите, что $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Р е ш е н и е. Имеем $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. А это значит, что $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

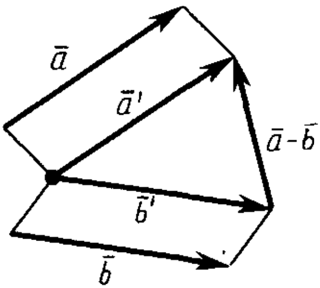


Рис. 219

Отсюда получается следующее правило для построения разности двух векторов. Чтобы построить вектор, равный разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, надо отложить равные им векторы $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ от одной точки. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\bar{b}'$, а конец — с концом вектора $\bar{a}'$, будет разностью векторов a и $\bar{b}$ (рис. 219).

95. СЛОЖЕНИЕ СИЛ

Силу, приложенную к телу, удобно изображать вектором, направление которого совпадает с направлением действия силы, а абсолютная величина пропорциональна величине силы. Как показывает опыт, при таком способе изображения сил равнодействующая двух или нескольких сил, приложенных к телу в одной точке, изображается суммой соответствующих им векторов. На рисунке 220, *а* к телу в точке *A* приложены две силы, изображенные векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Равнодействующая этих сил изображается вектором

$$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}.$$

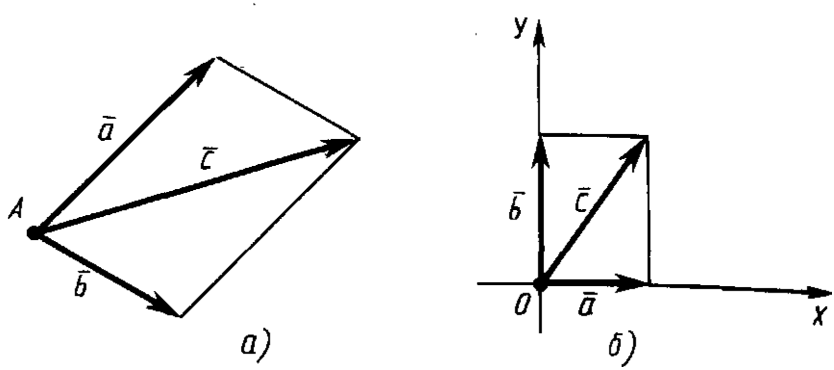


Рис. 220

Представление силы в виде суммы сил, действующих в двух заданных направлениях, называется разложением силы по этим направлениям. Так, на рисунке 220, *а* сила $\bar{c}$ разложена в сумму сил $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — составляющие силы $\bar{c}$.

Удобно производить разложение вектора по двум перпендикулярным осям. В этом случае составляющие вектора называются ***проекциями*** вектора на оси (рис. 220, *б*).

Задача (16). С какой силой F надо удерживать груз весом P на наклонной плоскости, чтобы он не сползал вниз (рис. 221)?

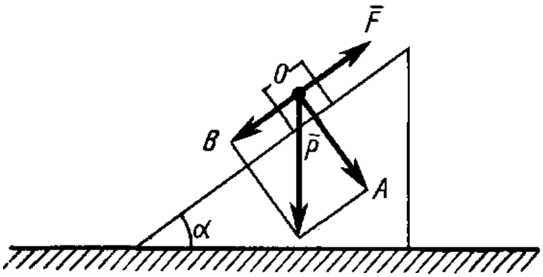


Рис. 221

Решение. Пусть O — центр тяжести груза, к которому приложена сила P. Разложим вектор $\bar{P}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям, как показано на рисунке 221. Сила $\overline{OA}$ перпендикулярна наклонной плоскости и не вызывает перемещения груза. Сила F, удерживающая груз, должна быть равной по величине и противоположной по направлению силе $\overline{OB}$. Поэтому $F = P \sin \alpha$.

96. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

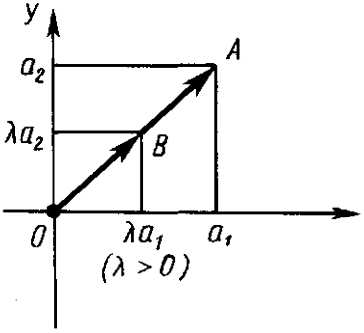
Произведением вектора $\overline{(a_1; a_2)}$ *на число* λ называется вектор $\overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}$, т. е. $\overline{(a_1; a_2)}\,\lambda = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}$.

По определению $\overline{(a_1; a_2)}\,\lambda = \lambda\,\overline{(a_1; a_2)}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что ***для любого вектора*** $\bar{a}$ ***и чисел*** λ, μ

$$(\lambda + \mu)\,\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$

6 Заказ 574



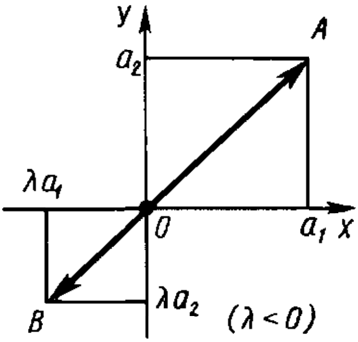


Рис. 222

Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа λ

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}.$$

Теорема 10.2. ***Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda||\bar{a}|$. Направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a}\neq 0$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$.***.

Доказательство. Построим векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равные $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ соответственно (O — начало координат). Пусть a_1 и a_2 — координаты вектора $\bar{a}$. Тогда координатами точки A будут числа a_1 и a_2, а координатами точки B будут λa_1, λa_2 (рис. 222). Уравнение прямой OA имеет вид:

$$\alpha x+\beta y=0.$$

Так как уравнению удовлетворяют координаты точки $A(a_1;a_2)$, то ему удовлетворяют и координаты точки $B(\lambda a_1;\lambda a_2)$. Отсюда следует, что точка B лежит на прямой OA. Координаты c_1 и c_2 любой точки C, лежащей на полупрямой OA, имеют те же знаки, что и координаты a_1 и a_2 точки A, а координаты любой точки, которая лежит на полупрямой, дополнительной к OA, имеют противоположные знаки.

Поэтому если $\lambda>0$, то точка B лежит на полупрямой OA, а следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ одинаково направлены. Если $\lambda<0$, то точка B лежит на дополнительной полупрямой, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ противоположно направлены.

Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна:

$$|\lambda\bar{a}|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2}=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|\lambda|\,|\bar{a}|.$$

Теорема доказана.

З а д а ч а (17). Даны точки $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

Р е ш е н и е. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты x_2-x_1 и y_2-y_1. Вектор $\overline{BA}$ имеет координаты x_1-x_2 и y_1-y_2. Мы видим, что $\overline{AB}=(-1)\overline{BA}$. А значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

97. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 223). Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — отличные от нуля коллинеарные векторы. Докажем, что существует число λ такое, что

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}.$$

Допустим, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены. Векторы

$$\bar{b} \text{ и } \left(\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\right)\bar{a}$$

одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину $|\bar{b}|$. Значит, они равны:

$$\bar{b}=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a}=\lambda\bar{a},\quad \lambda=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}.$$

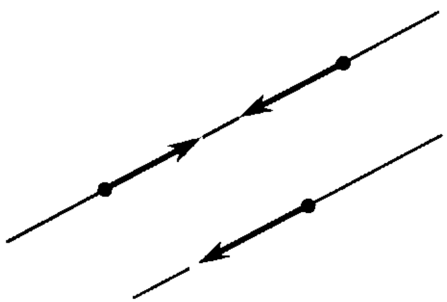


Рис. 223

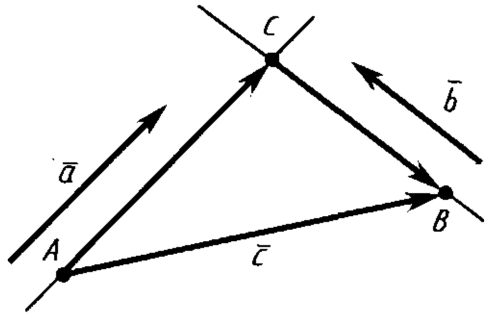


Рис. 224

В случае противоположно направленных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ аналогично заключаем, что

$$\bar{b} = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \lambda\bar{a}, \quad \lambda = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — отличные от нуля неколлинеарные векторы. Докажем, что ***любой вектор $\bar{c}$ можно представить в виде***

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}.$$

Пусть A и B — начало и конец вектора $\bar{c}$ (рис. 224). Проведем через точки A и B прямые, параллельные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Они пересекутся в некоторой точке C. Имеем:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Так как векторы $\bar{a}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, то $\overline{AC} = \lambda\bar{a}$. Так как векторы $\overline{CB}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\overline{CB} = \mu\bar{b}$. Таким образом,

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b},$$

что и требовалось доказать.

98. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением векторов $\bar{a}\,(a_1;\, a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1;\, b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Для скалярного произведения векторов используется такая же запись, как и для произведения чисел. Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$ и называется скалярным квадратом. Очевидно, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что ***для любых векторов*** $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}$ $(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}$ $(c_1;\ c_2)$

$$(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}=\bar{a}\,\bar{c}+\bar{b}\,\bar{c}.$$

Действительно, левая часть равенства есть $(a_1+b_1)\,c_1+$ $+(a_2+b_2)\,c_2$, а правая $a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2$. Очевидно, они равны.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол BAC. Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю

Теорема 10.3. ***Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.***

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — данные векторы и φ — угол между ними. Имеем:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}+\bar{b})\,(\bar{a}+\bar{b})=(\bar{a}+\bar{b})\bar{a}+(\bar{a}+\bar{b})\bar{b}=$$
$$=\bar{a}\bar{a}+\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{b}=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,$$

или

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}.$$

Отсюда видно, что скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$ выражается через длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a}+\bar{b}$, а поэтому не зависит от выбора системы координат, т. е. скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Возьмем систему координат xy так, как показано на рисунке 225. При таком выборе системы координат координа-

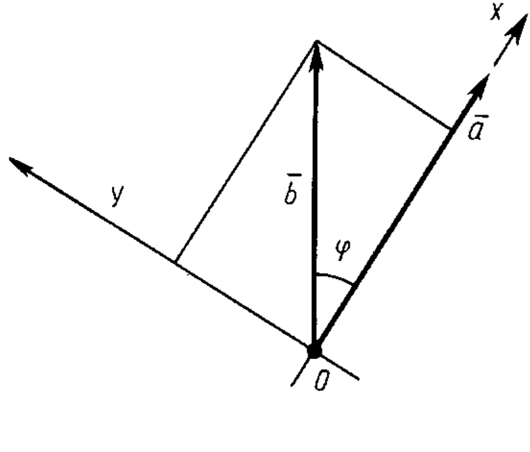


Рис. 225

тами вектора $\bar{a}$ будут $|\bar{a}|$ и 0, а координатами вектора $\bar{b}$ будут $|\bar{b}|\cos\varphi$ и $|\bar{b}|\sin\varphi$. Скалярное произведение

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi + 0|\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 10.3 следует, что ***если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.*** И обратно: ***если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.***

З а д а ч а (38). Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Р е ш е н и е. Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 226). Имеем векторные равенства

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC},$$
$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Возведем эти равенства в квадрат. Получим:

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$
$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2.$$

Сложим эти равенства почленно. Получим:

$$2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2.$$

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то это равенство и означает, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, что и требовалось доказать.

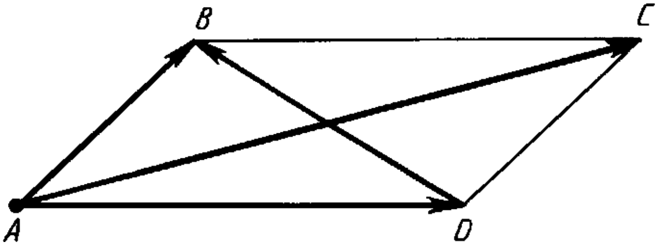


Рис. 226

99. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ

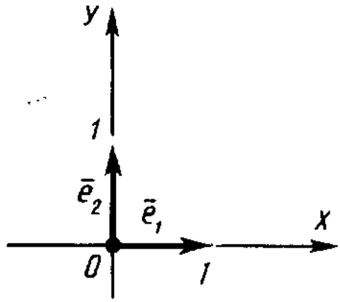


Рис. 227

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами* или *ортами*. Мы будем их обозначать $\bar{e}_1$ (1; 0) на оси x и $\bar{e}_2(0; 1)$ на оси y (рис. 227).

Так как координатные векторы отличны от нуля и не коллинеарны, то любой вектор $\bar{a}(a_1; a_2)$ допускает разложение по этим векторам:

$$\bar{a}=\lambda\bar{e}_1+\mu\bar{e}_2. \qquad (*)$$

Найдем коэффициенты λ и μ этого разложения. Умножим обе части равенства (*) на вектор $\bar{e}_1$. Так как

$$\bar{a}(a_1; a_2)\bar{e}_1=a_1,\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_1=1,\ \bar{e}_2\cdot\bar{e}_1=0, \text{ то } a_1=\lambda.$$

Аналогично, умножая обе части равенства (*) на вектор $\bar{e}_2$, получим $a_2=\mu$.

Таким образом, для любого вектора $\bar{a}(a_1; a_2)$ получается разложение

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2.$$

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое вектор? Как обозначаются векторы?
2. Какие векторы называются одинаково направленными (противоположно направленными)?
3. Что такое абсолютная величина вектора?
4. Что такое нулевой вектор?
5. Какие векторы называются равными?
6. Докажите, что равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. И обратно: одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине, равны.
7. Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.

8. Что такое координаты вектора? Чему равна абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2?
9. Докажите, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, а векторы с соответственно равными координатами равны.
10. Дайте определение суммы векторов.
11. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$
$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$$
12. Докажите, что для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$
13. Докажите векторное равенство $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.
14. Докажите, что для получения суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, равен $\bar{a}+\bar{b}$.
15. Сформулируйте «правило параллелограмма» сложения векторов.
16. Дайте определение разности векторов.
17. Дайте определение умножения вектора на число.
18. Докажите, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\,|\bar{a}|$, направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a}\neq\bar{0}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$.
19. Какие векторы называются коллинеарными?
20. Докажите, что если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличны от нулевого вектора и не коллинеарны, то любой вектор $\bar{c}$ можно представить в виде $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.
21. Дайте определение скалярного произведения векторов.
22. Докажите, что для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$
23. Как определяется угол между векторами?
24. Чему равен угол между одинаково направленными векторами?
25. Докажите, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.
26. Докажите, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

ЗАДАЧИ

1. На прямой даны три точки A, B, C, причем точка B лежит между точками A и C. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ назовите одинаково направленные и противоположно направленные.
2. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.
3. Даны вектор $\overline{AB}$ и точка C. Отложите от точки C вектор, равный вектору $\overline{AB}$, если: 1) точка C лежит на прямой AB; 2) точка C не лежит на прямой AB.
4. Векторы $\overline{a}(2;4)$, $\overline{b}(-1;2)$ и $\overline{c}(c_1;c_2)$ отложены от начала координат. Чему равны координаты их концов?
5. Абсолютная величина вектора $\overline{a}(5;\ m)$ равна 13, а вектора $\overline{b}\,(n;\ 24)$ равна 25. Найдите m и n.
6. Даны точки $A\,(0;\ 1)$, $B\,(1;\ 0)$, $C\,(1;\ 2)$, $D\,(2;\ 1)$. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
7. Даны три точки $A\,(1;\ 1)$, $B\,(-1;\ 0)$, $C\,(0;\ 1)$. Найдите такую точку $D\,(x;\ y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.
8. Найдите вектор $\overline{c}$, равный сумме векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и абсолютную величину вектора $\overline{c}$, если: 1) $\overline{a}\,(1;-4)$, $\overline{b}\,(-4;8)$; 2) $\overline{a}\,(2;\ 5)$, $\overline{b}\,(4;\ 3)$.
9. Дан треугольник ABC. Найдите сумму векторов: 1) $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$; 3) $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$; 4) $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.
10. Найдите вектор $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ и его абсолютную величину, если 1) $\overline{a}\,(1;\ -4)$, $\overline{b}\,(-4;\ 8)$; 2) $\overline{a}\,(-2;\ 7)$, $\overline{b}\,(4;\ -1)$.
11. Даны векторы с общим началом: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Докажите, что $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.
12. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M. Выразите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\overline{a}=\overline{AM}$, $\overline{b}=\overline{BM}$ (рис. 228).
13. Начертите три произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, как на рисун-

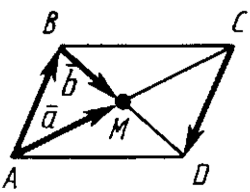


Рис. 228

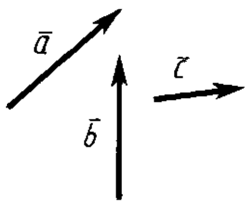


Рис. 229

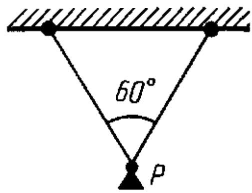


Рис. 230

ке 229. А теперь постройте векторы, равные: 1) $\bar{a}+\bar{b}+$ $+\bar{c}$; 2) $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$; 3) $-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

14. 1) Докажите, что для векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ имеет место неравенство $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.

2) Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место неравенство $|\bar{a}+\bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

15. К горизонтальной балке на двух равных нитях подвешен груз весом P. Определите силы натяжения нитей (рис. 230).

16. С какой силой F надо удерживать груз весом P на наклонной плоскости, чтобы он не сползал вниз?

17. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

18. Докажите, что векторы $\bar{a}(1; 2)$ и $\bar{b}(0{,}5; 1)$ одинаково направлены, а векторы $\bar{c}(-1; 2)$ и $\bar{d}(0{,}5; -1)$ противоположно направлены.

19. Даны векторы $\bar{a}(3; 2)$ и $\bar{b}(0; -1)$. Найдите вектор $\bar{c}=$ $=-2\bar{a}+4\bar{b}$ и его абсолютную величину.

20. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна 5. Найдите λ, если: 1) $\bar{a}(-6; 8)$; 2) $\bar{a}(3; -4)$; 3) $\bar{a}(5; 12)$.

21. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что $\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$.

22. Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите векторное равенство $\overline{MN}=$ $=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$ (рис. 231).

23. Дан параллелограмм $ABCD$, $\overline{AC}=\bar{a}$, $\overline{DB}=\bar{b}$ (рис. 232). Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

24*. Докажите, что у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно: если у двух ненулевых векторов соответствующие координаты пропорциональны, то эти векторы коллинеарны.

25. Даны векторы $\bar{a}(2; -4)$, $\bar{b}(1; 1)$, $\bar{c}(1; -2)$, $\bar{d}(-2; -4)$.

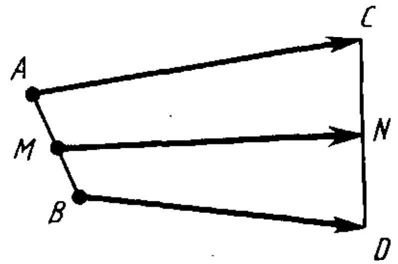


Рис. 231

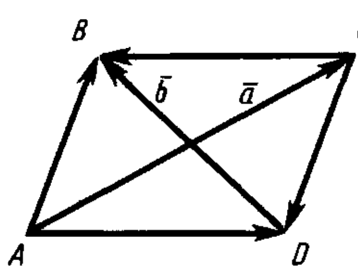


Рис. 232

Укажите пары коллинеарных векторов. Какие из данных векторов одинаково направлены, а какие — противоположно направлены?

26. Известно, что векторы $\bar{a}(1;\ -1)$ и $\bar{b}(-2;\ m)$ коллинеарны. Найдите, чему равно m.

27. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$, $\bar{b}(1;\ 1)$ и $\bar{c}(-1;\ 0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы имело место векторное равенство $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.

28. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(\bar{a}\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2\bar{b}^2$.

29. Найдите угол между векторами $\bar{a}(1;\ 2)$ и $\bar{b}\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

30*. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a}+\bar{b}$, если известно, что абсолютные величины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны 1, а угол между ними 60°.

31. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{a}+\bar{b}$ предыдущей задачи.

32. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1)$; $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Найдите косинусы углов треугольника.

33. Найдите углы треугольника с вершинами $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

34. Докажите, что векторы $\bar{a}(m;\ n)$ и $\bar{b}(-n;\ m)$ перпендикулярны или равны нулю.

35. Даны векторы $\bar{a}(3;\ 4)$ и $\bar{b}(m;\ 2)$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

36. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$ и $\bar{b}(1;\ 1)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

37. Докажите, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ отличны от нуля и перпендикулярны.

38*. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

39*. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите его медианы m_a, m_b, m_c.

40. Докажите, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна, есть окружность с центром в середине отрезка, соединяющего данные точки.

41. Векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\bar{a}|=|\bar{b}|$.

42. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

43. Даны четыре точки $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

44. Даны четыре точки $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$, $D(-1;1)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

45. Среди векторов $\bar{a}\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}(0;-1)$, $\bar{d}\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ найдите единичные и укажите, какие из них коллинеарны.

46. Найдите единичный вектор $\bar{e}$, коллинеарный вектору $\bar{a}(6;8)$ и одинаково с ним направленный.

47. Даны координатные векторы $\bar{e}_1(1;0)$ и $\bar{e}_2(0;1)$. Чему равны координаты вектора $2\bar{e}_1-3\bar{e}_2$?

48*. 1) Даны три точки O, A, B. Точка X делит отрезок AB в отношении $\lambda:\mu$, считая от точки A. Выразите вектор $\overline{OX}$ через векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$.

2) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении $2:1$, считая от соответствующих вершин.

49. Докажите, что проекция $\bar{a}$ вектора $\bar{c}$ на ось абсцисс с координатным вектором $\bar{e}_1(1;0)$ задается формулой

$$\bar{a}=k\bar{e}_1,\text{ где } k=\bar{c}\,\bar{e}_1.$$

50. Докажите, что проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось.

9 класс

§ 11. ПОДОБИЕ ФИГУР

100. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (рис. 233). Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число k — одно и то же для всех точек X, Y. Число k называется *коэффициентом подобия*. При $k=1$ преобразование подобия, очевидно, является движением.

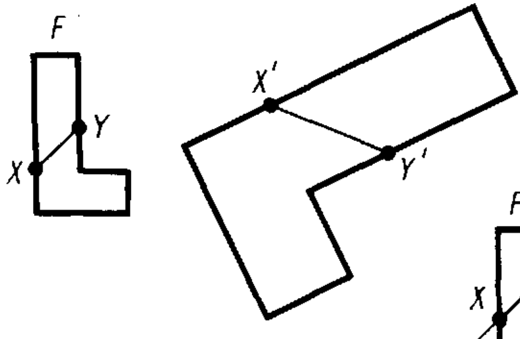


Рис. 233

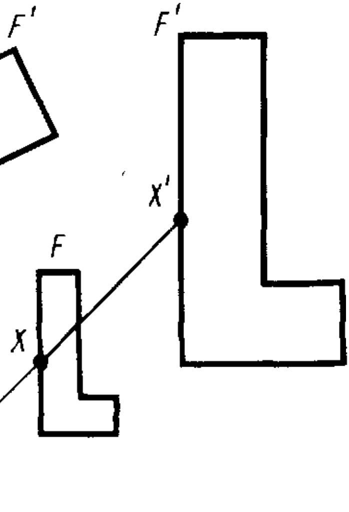


Рис. 234

Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка (рис. 234). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k — положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется *гомотетией относительно центра* O. Число k называется *коэффициентом гомотетии*, фигуры F и F' называются *гомотетичными*.

Теорема 11.1. ***Гомотетия есть преобразование подобия.***

Доказательство. Пусть O — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии, X и Y — две произвольные точки фигуры (рис. 235).

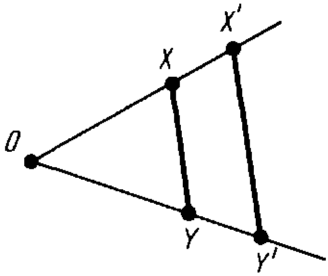


Рис. 235

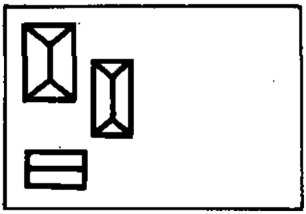


Рис. 236

При гомотетии точки X и Y переходят в точки X' и Y' на лучах OX и OY соответственно, причем $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Отсюда следуют векторные равенства

$$\overline{OX'} = k\overline{OX}, \quad \overline{OY'} = k\overline{OY}.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим:

$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = k\,(\overline{OY} - \overline{OX}).$$

Так как $\overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'}$, $\overline{OY} - \overline{OX} = \overline{XY}$, то $\overline{X'Y'} = k\,\overline{XY}$. Значит, $|\overline{X'Y'}| = k\,|\overline{XY}|$, т. е. $X'Y' = k\,XY$. Следовательно, гомотетия есть преобразование подобия. Теорема доказана.

Преобразование подобия широко применяется на практике при выполнении чертежей деталей машин, сооружений, планов местности и др. Эти изображения представляют собой подобные преобразования воображаемых изображений в натуральную величину. Коэффициент подобия при этом называется масштабом. Например, если участок местности изображается в масштабе 1:100, то это значит, что одному сантиметру на плане соответствует 1 м на местности.

Задача (4). На рисунке 236 изображен план усадьбы в масштабе 1:1000. Определите размеры усадьбы (длину и ширину).

Р е ш е н и е. Длина и ширина усадьбы на плане равны 4 см и 2,7 см. Так как план выполнен в масштабе 1:1000, то размеры усадьбы равны соответственно $2{,}7 \times 1000$ см $= 27$ (м), 4×1000 см $= 40$ (м).

101. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

Так же как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причем если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Отсюда следует, что ***преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.***

Докажем, что ***преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.***

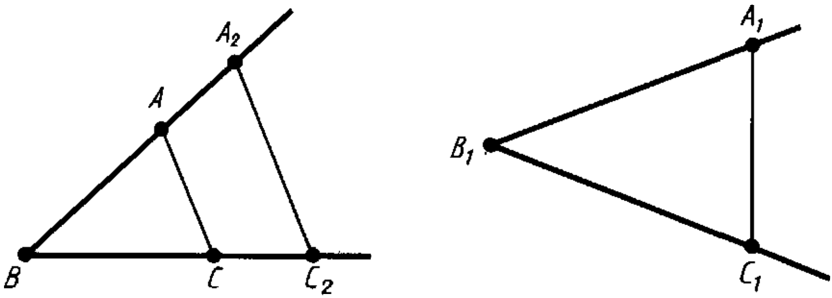


Рис. 237

Действительно, пусть угол ABC преобразованием подобия с коэффициентом k переводится в угол $A_1B_1C_1$ (рис. 237). Подвергнем угол ABC преобразованию гомотетии относительно его вершины B с коэффициентом гомотетии k. При этом точки A и C перейдут в точки A_2 и C_2. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует равенство углов A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$. Значит, углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны, что и требовалось доказать.

102. ПОДОБИЕ ФИГУР

Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: $\backsim$. Запись $F \backsim F'$ читается так: «Фигура F подобна фигуре F'».

Докажем, что ***если фигура F_1 подобна фигуре F_2, а фигура F_2 подобна фигуре F_3, то фигуры F_1 и F_3 подобны.***

Пусть X_1 и Y_1 — две произвольные точки фигуры F_1. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти точки в точки X_2, Y_2, для которых $X_2Y_2=k_1X_1Y_1$.

Преобразование подобия, переводящее фигуру F_2 в F_3, переводит точки X_2, Y_2 в точки X_3, Y_3, для которых $X_3Y_3= =k_2X_2Y_2$.

Из равенств

$$X_2Y_2=k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3=k_2X_2Y_2$$

следует, что $X_3Y_3=k_1k_2X_1Y_1$. А это значит, что преобразование фигуры F_1 в F_3, получающееся при последовательном выполнении двух преобразований подобия, есть подобие. Следовательно, фигуры F_1 и F_3 подобны, что и требовалось доказать.

В записи подобия треугольников: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B — в B_1 и C — в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что ***у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.*** В частности, ***у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$***

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

103. ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ДВУМ УГЛАМ

Теорема 11.2. ***Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \backsim \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Пусть $k=\frac{AB}{A_1B_1}$. Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 238). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle A_2=\angle A_1$, $\angle B_2=\angle B_1$. А значит, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ $\angle A= =\angle A_2$, $\angle B=\angle B_2$. Далее, $A_2B_2=kA_1B_1=AB$. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по второму признаку (по стороне и прилежащим к ней углам).

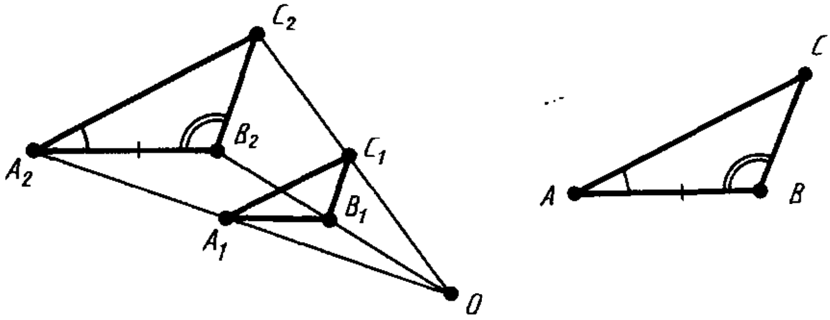


Рис. 238

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

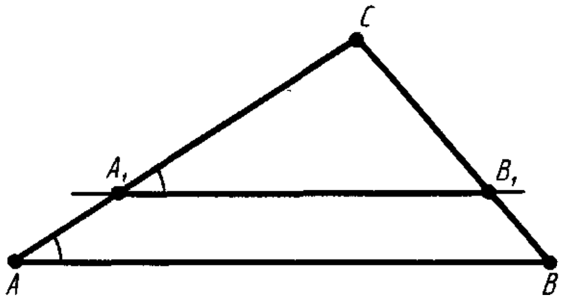


Рис. 239

З а д а ч а (15). Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C$.

Р е ш е н и е (рис. 239). У треугольннков ABC и A_1B_1C угол при вершине C общий, а углы CA_1B_1 и CAB равны как соответствующие углы параллельных AB и A_1B_1 с секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C$ по двум углам.

104. ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Т е о р е м а 11.3. ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.***

Доказательство (аналогично доказательству теоремы 11.2). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$ и $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 240).

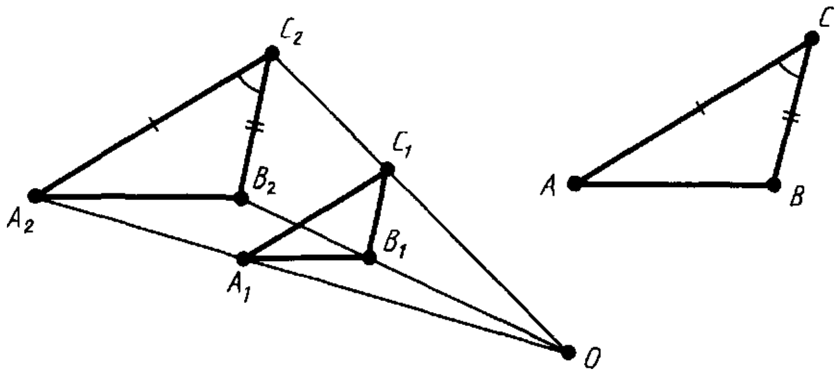


Рис. 240

При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle C_2 = \angle C_1$. А значит, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ $\angle C = \angle C_2$. Далее, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$, $B_2C_2 = kB_1C_1 = BC$. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними).

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

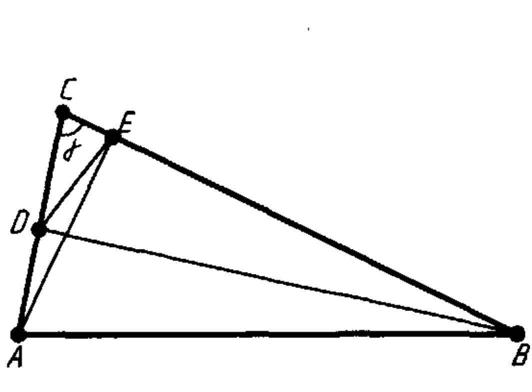


Рис. 241

Задача (31). В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD (рис. 241). Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$.

Решение. У треугольников ABC и EDC угол при вершине C общий. Докажем пропорциональность сторон треугольников, прилежащих к этому углу. Имеем $EC = AC \cos\gamma$, $DC = BC \cos\gamma$. То есть стороны, прилежащие к углу C, у треугольников пропорциональны. Значит, $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ по двум сторонам и углу между ними.

105. ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Теорема 11.4. ***Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

Доказательство (аналогично доказательству теоремы 11.2). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 242). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, у треугольников соответствующие стороны равны:

$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB,\ A_2C_2 = kA_1C_1 = AC,\ B_2C_2 = kB_1C_1 = BC.$$

Следовательно, треугольники равны по третьему признаку (по трем сторонам).

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

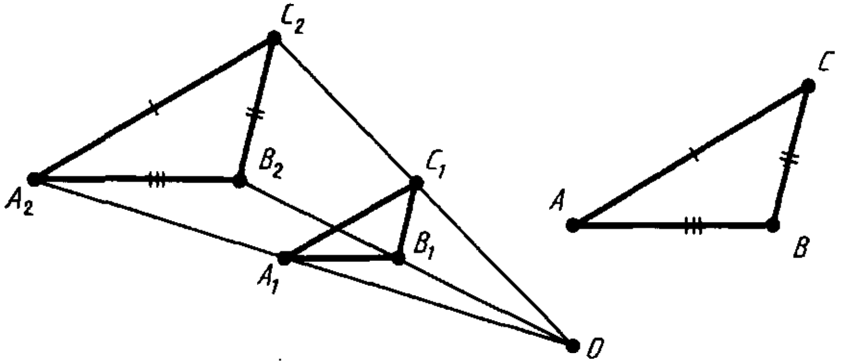


Рис. 242

З а д а ч а (36). Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

Р е ш е н и е. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — подобные треугольники. Тогда стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны сторонам треугольника ABC, т. е. $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Складывая эти равенства почленно, получим:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k(AB + BC + AC).$$

Отсюда

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}{AB + BC + AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

т. е. периметры треугольников относятся как соответствующие стороны.

106. ПОДОБИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

У прямоугольного треугольника один угол прямой. Поэтому по теореме 11.2 ***для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по равному острому углу.***

С помощью этого признака подобия прямоугольных треугольников докажем некоторые соотношения в треугольниках.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла (рис. 243).

Треугольники ABC и CBD имеют общий угол при вершине B. Следовательно, они подобны: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \text{ или } BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Это соотношение обычно формулируют так: ***катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.***

Прямоугольные треугольники ACD и CBD также подобны. У них равны острые углы при вершинах A и C. Из подобия этих треугольников следует пропорциональность их сторон:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ или } CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Это соотношение обычно формулируют так: ***высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.***

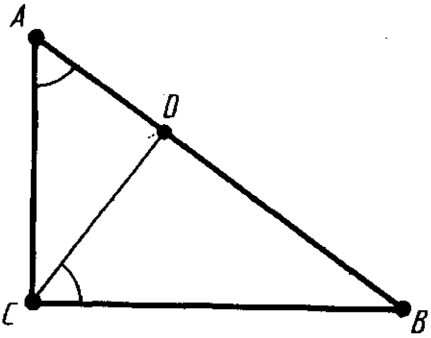


Рис. 243

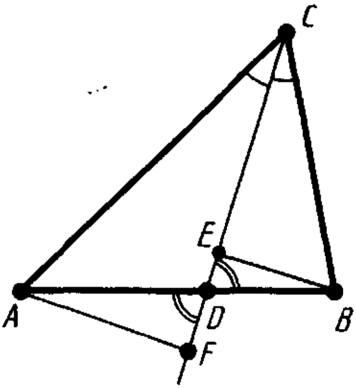


Рис. 244

Докажем следующее свойство биссектрисы треугольника: ***биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.***

Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 244). Если треугольник ABC равнобедренный с основанием AB, то указанное свойство биссектрисы очевидно, так как в этом случае биссектриса CD является и медианой.

Рассмотрим общий случай, когда $AC \neq BC$. Опустим перпендикуляры AF и BE из вершин A и B на прямую CD.

Прямоугольные треугольники ACF и BCE подобны, так как у них равны острые углы при вершине C. Из подобия треугольников следует пропорциональность сторон:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BE}.$$

Прямоугольные треугольники ADF и BDE тоже подобны. У них углы при вершине D равны как вертикальные. Из подобия треугольников следует пропорциональность сторон:

$$\frac{AF}{BE}=\frac{AD}{BD}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получим:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD} \text{ или } \frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD},$$

т. е. отрезки AD и BD пропорциональны сторонам AC и BC, что и требовалось доказать.

107. УГЛЫ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

Угол разбивает плоскость на две части. Каждая из частей называется *плоским* углом. На рисунке 245 заштрихован один из плоских углов со сторонами a и b. Плоские углы с общими сторонами называются *дополнительными*.

Если плоский угол является частью полуплоскости, то его градусной мерой называется градусная мера обычного угла с теми же сторонами. Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера принимается равной $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла (рис. 246).

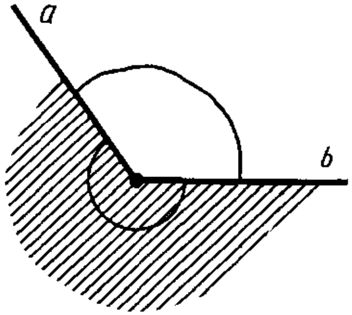


Рис. 245

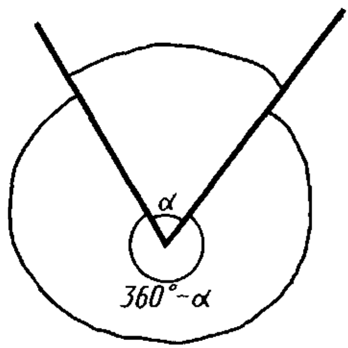


Рис. 246

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу (рис. 247). *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

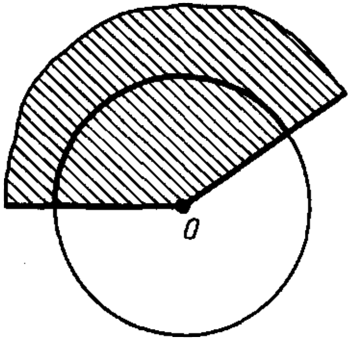


Рис. 247

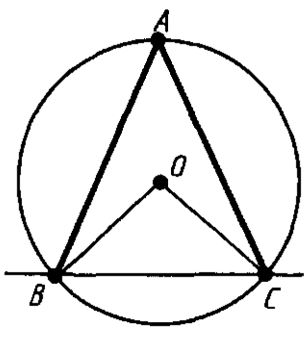


Рис. 248

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность называется ***вписанным в окружность***. Угол BAC на рисунке 248 вписан в окружность. Его вершина A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C. Говорят также, что угол A опирается на хорду BC. Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той из этих дуг, которая не содержит точку A, называется центральным углом, ***соответствующим данному вписанному углу***.

Теорема 11.5. ***Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.***

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности (рис. 249, *а*). Треугольник AOB равнобедренный, так как у него стороны OA и OB равны как радиусы. Поэтому углы A и B треугольника равны. А так как их сумма равна внешнему углу треугольника при вершине O, то угол B треугольника равен половине угла AOC, что и требовалось доказать.

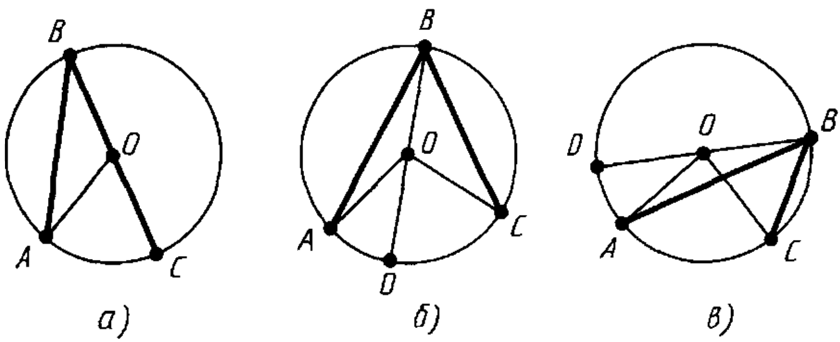


Рис. 249

Общий случай сводится к рассмотренному частному случаю проведением вспомогательного диаметра BD (рис. 249, *б*, *в*).

В случае, представленном на рисунке 249, *б*,

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

В случае, представленном на рисунке 249, *в*,

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Теорема доказана полностью.

Из теоремы 11.5 следует, что ***вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB, равны*** (рис. 250).

В частности, ***углы, опирающиеся на диаметр, прямые.***

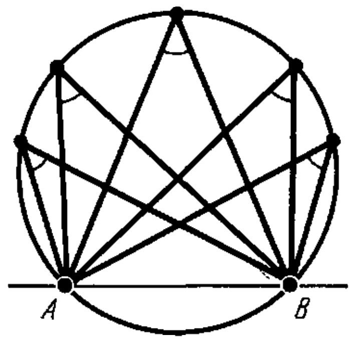


Рис. 250

108. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ ОКРУЖНОСТИ

Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Докажем сначала, что треугольники ASD и CSB подобны (рис. 251). Вписанные углы DCB и DAB равны по следствию из теоремы 11.5. Углы ASD и BSC равны как вертикальные. Из равенства указанных углов следует, что треугольники ASD и CSB подобны.

Из подобия треугольннков следует пропорцня

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

Отсюда

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS,$$

что и требовалось доказать.

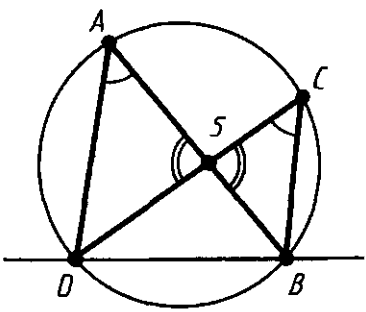


Рис. 251

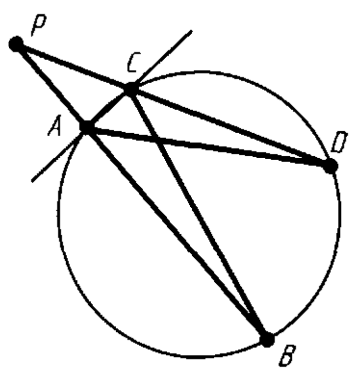


Рис. 252

Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

Пусть точки A и C — ближайшие к точке P точки пересечения секущих с окружностью (рис. 252). Треугольники PAD и PCB подобны. У них угол при вершине P общий, а углы при вершинах B и D равны по свойству углов, вписанных в окружность. Из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Отсюда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, что и требовалось доказать.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое преобразование подобия?
2. Что такое гомотетия (центр гомотетии, коэффициент гомотетии)?
3. Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.
4. Какие свойства преобразования подобия вы знаете? Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.
5. Какие фигуры называются подобными?
6. Каким знаком обозначается подобие фигур? Как записывается подобие треугольников?
7. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум углам.
8. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.
9. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по трем сторонам.
10. Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
11. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.
12. Докажите, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
13. Что такое плоский угол?
14. Что такое центральный угол?

15. Какой угол называется вписанным в окружность?
16. Докажите, что вписанный в окружность угол равен половине соответствующего центрального угла.
17. Докажите свойства отрезков пересекающихся хорд и свойства отрезков секущих.

ЗАДАЧИ

1. При гомотетии точка X переходит в точку X', а точка Y — в точку Y'. Как найти центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой?
2. При гомотетии точка X переходит в точку X'. Постройте центр гомотетии, если коэффициент гомотетии равен 2.
3. Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии равным 2.
4. На рисунке 236 изображен план усадьбы в масштабе 1:1000. Определите размеры усадьбы (длину и ширину).
5. Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?
6. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=30°$, $AB=1$ м, $BC=2$ м, $B_1C_1=3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1?
7. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.
8*. Даны угол и внутри его точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.
9*. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах.
10. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.
11. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.
12. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $AB=5$ м, $BC=7$ м, $A_1B_1=10$ м, $A_1C_1=8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.
13. Решите задачу 12 при условии, что $AB=16$ см, $BC=20$ см, $A_1B_1=12$ см, $AC-A_1C_1=6$ см.
14. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.
15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC,

пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

16. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах (рис. 253). Вычислите сторону квадрата.
17. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношении $m:n$, считая от вершины C. В каком отношении она делит сторону BC?
18. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите AD, если $AB=16$ см, $AC=20$ см и $DE=15$ см.
19. В задаче 18 найдите отношение $AD:BD$, если известно, что $AC:DE=55:28$.
20. Найдите длину отрезка DE в задаче 18, если: 1) $AC=$ $=20$ см, $AB=17$ см и $BD=11{,}9$ см; 2) $AC=18$ дм, $AB=15$ дм и $AD=10$ дм.
21. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 254). Докажите подобие треугольников BCE и DAE.

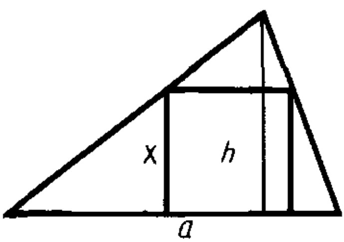


Рис. 253

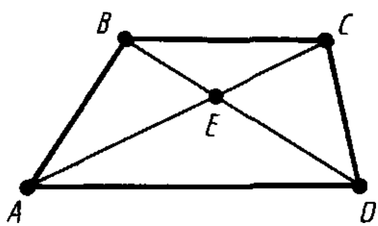


Рис. 254

22. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m:n$.
23. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении $m:n$. В каком отношении она делит другое основание?
24. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 м и 27 м.
25. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m:n$. В каком отношении делит она вторую боковую сторону?
26. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если $AB=5$ см, $BC=10$ см, $CD=6$ см, $AD=15$ см.

27. Найдите высоту треугольника AED из задачи 26, опущенную на сторону AD, если $BC=7$ см, $AD=21$ см и высота трапеции равна 3 см.

28*. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F. Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам (рис. 255).

29*. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом 36° проведена биссектриса AD.

1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD.

2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a.

30. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

31. В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

32*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Найдите углы треугольника DEF, зная углы треугольника ABC (рис. 256).

33*. Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче 32 лежат на высотах треугольника ABC.

34. Подобны ли два равносторонних треугольника?

35. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB=1$ м, $AC=1{,}5$ м, $BC=2$ м; $A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=15$ см, $B_1C_1=20$ см;

2) $AB=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}5$ м; $A_1B_1=8$ дм, $A_1C_1=16$ дм, $B_1C_1=12$ дм;

3) $AB=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}25$ м; $A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=20$ см, $B_1C_1=13$ см?

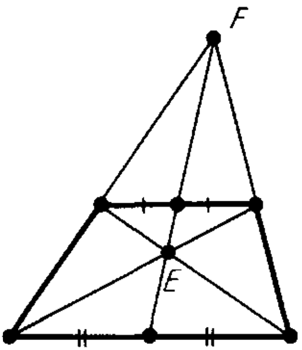


Рис. 255

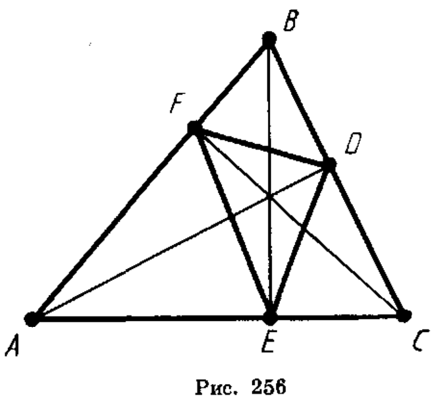


Рис. 256

36. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

37. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольннка, пернметр которого равен 5,5 м.

38. Пернметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите этн стороны.

39. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 40°, а у другого — угол, равный: 1) 50°; 2) 60°?

40. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делнт ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

41. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

42. Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.

43. Катеты прямоугольного треугольннка относятся как $m:n$. Как относятся проекции катетов на гипотенузу?

44. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м (рис. 257). Найдите высоту трубы.

45. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершнна E находнтся на стороне BC (рис. 258). Найдите сторону ромба, если $AB=c$ и $AC=b$.

46*. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D (рис. 259). Докажите, что $AD:BD=AC:BC$.

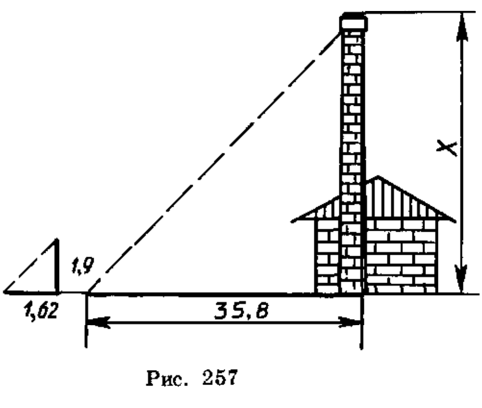


Рис. 257

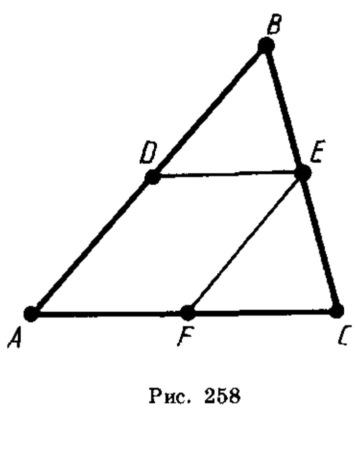


Рис. 258

47*. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.

48. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что: 1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на 100° больше другого; 3) разность их равна 20°.

49. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?

50. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

51. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

52. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

53. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

54. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? (Два случая.)

55. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ACD равен 80°. Найдите угол CAD.

56*. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°.

57. Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.

58. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону

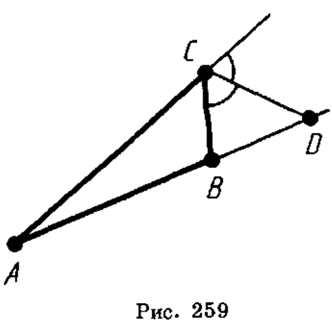


Рис. 259

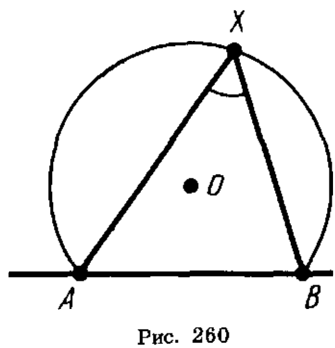


Рис. 260

от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках (рис. 260).

59. Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведенными к концам хорды (рис. 261).

60. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

61. Из точки C окружности проведен перпендикуляр CD к диаметру AB. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

62. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$ (рис. 262).

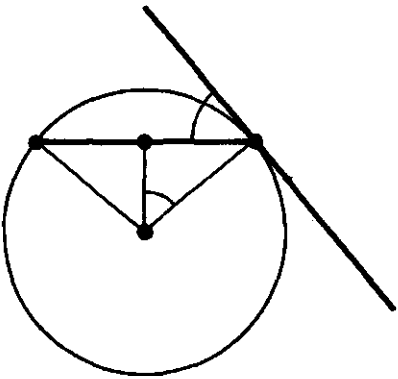


Рис. 261

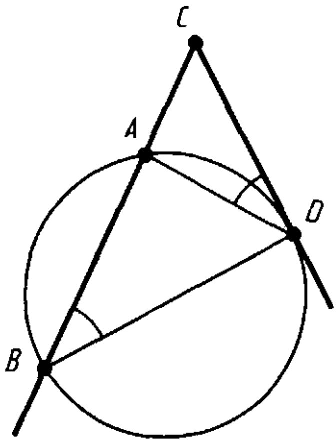


Рис. 262

63. Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над Землей, если радиус Земли 6370 км?

64. Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкине, высота которой 537 м.

§ 12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

109. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Теорема 12.1 (теорема косинусов). ***Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***

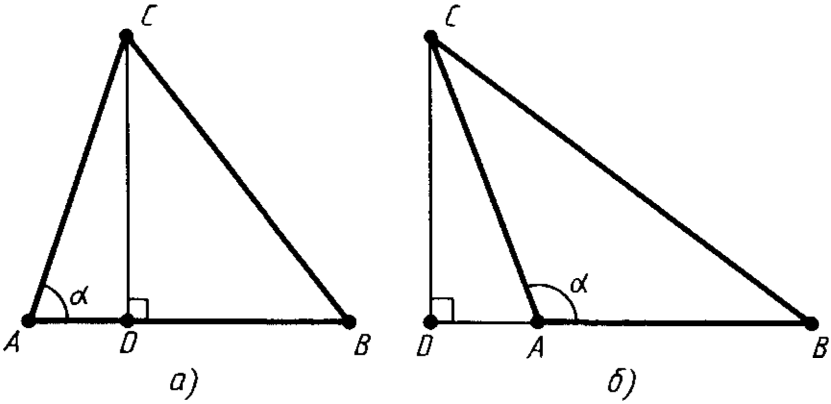


Рис. 263

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 263). Докажем, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Имеем векторное равенство $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Возводя это равенство скалярно в квадрат, получим:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC},$$

или

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $AC \cdot \cos A$ равно по абсолютной величине проекции AD стороны AC на сторону AB (рис. 263, *а*) или ее продолжение (рис. 263, *б*). Знак $AC \cdot \cos A$ зависит от угла A: «+», если угол A острый, «—», если угол A тупой. Отсюда получается следствие: ***квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «—», когда угол острый.***

Задача (7). Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Решение. Имеем $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (рис. 264). Отсюда $AD = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. По теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

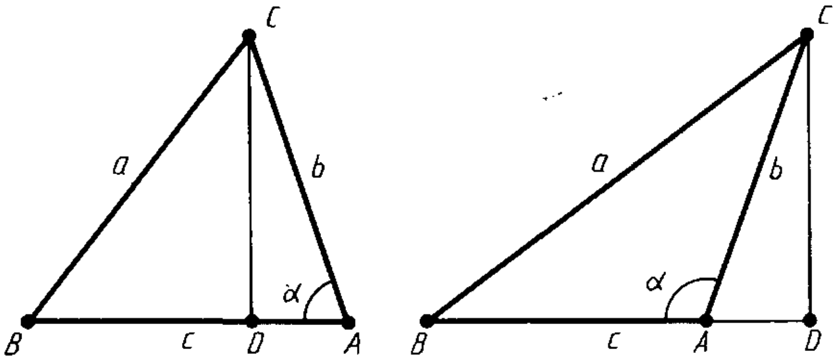


Рис. 264

110. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Т е о р е м а 12.2 (теорема синусов). ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ (рис. 265). Докажем, что

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Опустим из вершины C высоту CD. Из прямоугольного треугольника ACD, если угол α острый, получаем:

$$CD=b\sin\alpha$$

(рис. 265, *а*). Если угол α тупой, то

$$CD=b\sin(180^\circ-\alpha)=b\sin\alpha$$

(рис. 265, *б*). Аналогично из треугольника BCD получаем

$$CD=a\sin\beta.$$

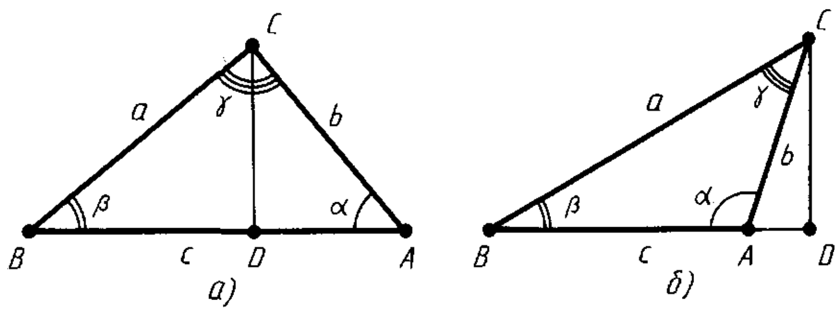


Рис. 265

Итак, $a \sin \beta = b \sin \alpha$. Отсюда

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Для доказательства надо провести высоту треугольника из вершины A. Теорема доказана.

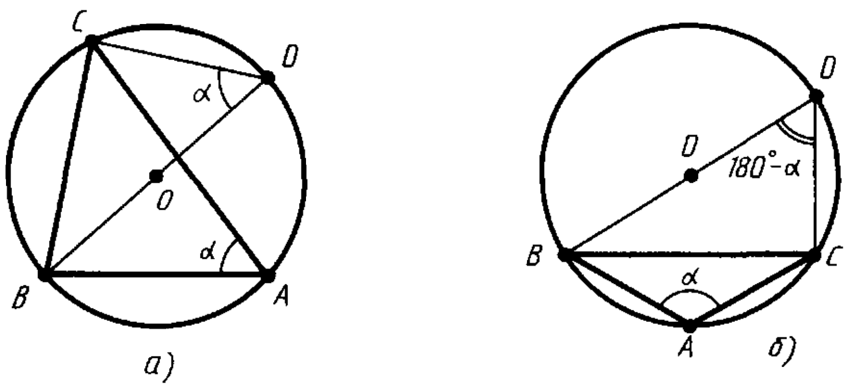


Рис. 266

З а д а ч а (13). Докажите, что в теореме синусов каждое из трех отношений: $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{b}{\sin \beta}$, $\frac{c}{\sin \gamma}$ — равно $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Р е ш е н и е. Проведем диаметр BD (рис. 266). По свойству углов, вписанных в окружность, угол при вершине D прямоугольного треугольника BCD равен либо α, если точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 266, *а*), либо $180° - \alpha$, если они лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 266, *б*). В первом случае $BC = BD \sin \alpha$, во втором $BC = BD \sin (180° - \alpha)$. Так как $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, то в любом случае $a = 2R \sin \alpha$. Следовательно,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

что и требовалось доказать.

111. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ПРОТИВОЛЕЖАЩИМИ СТОРОНАМИ

В треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, против большей стороны лежит бóльший угол.

Пусть a и b — две стороны треугольника и α, β — противолежащие им углы. Докажем, что если $\alpha > \beta$, то $a > b$. И обратно: если $a > b$, то $\alpha > \beta$.

Если углы α и β острые (рис. 267, *а*), то при $\alpha > \beta$ будет $\sin\alpha > \sin\beta$. А так как

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$

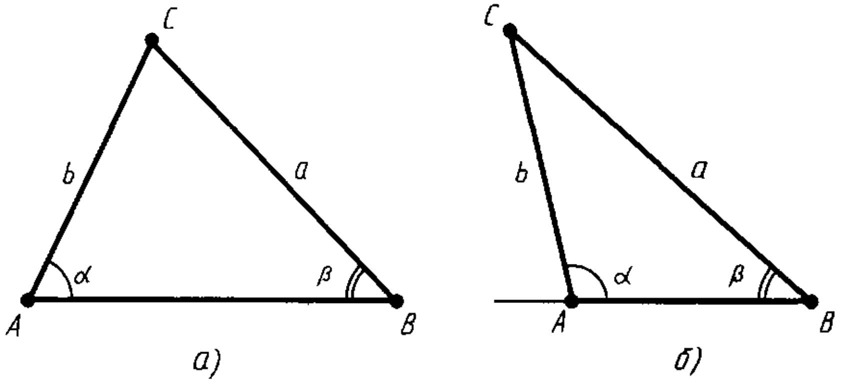


Рис. 267

то $a > b$. Если угол α тупой (оба угла не могут быть тупыми), то угол $180° - \alpha$ острый (рис. 267, *б*). Причем угол $180° - \alpha$ больше угла β как внешний угол треугольника, не смежный с углом β. Поэтому $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. И мы снова заключаем, что $a > b$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $a > b$. Надо доказать, что $\alpha > \beta$. Допустим, что $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha = \beta$, то треугольник равнобедренный и $a = b$. Если $\alpha < \beta$, то по доказанному $a < b$. В обоих случаях получается противоречие, так как по предположению $a > b$, значит $\alpha > \beta$, что и требовалось доказать.

Задача (17). Докажите, что если в треугольнике есть тупой угол, то противолежащая ему сторона наибольшая.

Решение. В треугольнике может быть только один тупой угол. Поэтому он больше любого из остальных углов. А значит, противолежащая ему сторона больше любой из двух других сторон треугольника.

112. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов треугольника по известным его углам и сторонам. Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы через α, β, γ (рис. 268).

З а д а ч а (26). 1) В треугольнике даны сторона $a=5$ и два угла $\beta=30°$, $\gamma=45°$. Найдите третий угол и остальные две стороны.

Р е ш е н и е. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол α выражается через заданные углы:

$$\alpha=180°-\beta-\gamma=180°-30°-45°=105°.$$

Зная сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны:

$$b=a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=5\,\frac{\sin 30°}{\sin 105°}\approx 5\cdot\frac{0{,}500}{0{,}966}\approx 2{,}59,$$

$$c=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\approx 5\cdot\frac{0{,}707}{0{,}966}\approx 3{,}66.$$

З а д а ч а (27). 1) В треугольнике даны две стороны $a=12$, $b=8$ и угол между ними $\gamma=60°$. Найдите остальные два угла и третью сторону.

Р е ш е н и е. Третью сторону находим по теореме косинусов:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}=\sqrt{144+64-2\cdot12\cdot8\cdot0{,}500}=$$
$$=\sqrt{112}\approx 10{,}6.$$

Теперь, имея три стороны, по теореме косинусов находим косинусы двух неизвестных углов и сами углы: $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx 0{,}191$, откуда $\alpha\approx 79°$, $\beta=180°-\alpha-\gamma\approx$ $\approx 41°$.

З а д а ч а (28). 5) В треугольнике даны две стороны $a=6$, $b=8$ и противолежащий стороне a угол $\alpha=30°$. Найдите остальные два угла и третью сторону.

Р е ш е н и е. По теореме синусов находим значение $\sin\beta$:

$$\sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{8}{6}\cdot\sin 30°\approx 0{,}667.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\beta_1\approx 42°$ и $\beta_2\approx 138°$.

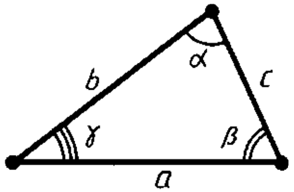


Рис. 268

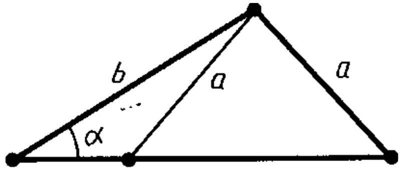


Рис. 269

Рассмотрим сначала угол $\beta_1 \approx 42°$. По нему находим третий угол $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta \approx 108°$ и по теореме синусов третью сторону

$$c_1 = \frac{a \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 6 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6 \cdot \frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналогично по углу $\beta_2 \approx 138°$ находим $\gamma_2 \approx 12°$ и $c_2 \approx 2{,}49$.

Замечание. Мы видим, что эта задача в отличие от предыдущих имеет два решения (рис. 269). При других численных данных, например при $\alpha \geqslant 90°$, задача может иметь лишь одно решение или вовсе не иметь решений.

Задача (29). 1) Даны три стороны треугольника: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найдите его углы.

Решение. Углы находятся по теореме косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0{,}875, \text{ откуда } \alpha \approx 29°.$$

Аналогично находится $\cos \beta = 0{,}688$, откуда $\beta \approx 47°$ и $\gamma \approx 180° - 47° - 29° = 104°$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Докажите теорему косинусов.
2. Докажите, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов других двух сторон «$\pm$» удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой. От чего зависит знак «$+$» или «$-$»?
3. Докажите теорему синусов.
4. Докажите, что в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и против большего угла лежит бóльшая сторона.

ЗАДАЧИ

1. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.
2. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.
3. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что если $a^2+b^2>c^2$, то угол, противолежащий стороне c, острый. Если $a^2+b^2<c^2$, то угол, противолежащий стороне c, тупой.
4. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α. Найдите стороны параллелограмма.
5. Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов α. Найдите диагонали параллелограмма.
6. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.
7. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.
8. Найдите высоты треугольника в задаче 1.
9. Найдите медианы треугольника в задаче 1.

10*. Найдите биссектрисы треугольника в задаче 1.

11*. Как изменяется сторона AB треугольника ABC, если угол C возрастает, а длины сторон AC и BC остаются без изменений (рис. 270)?

12. У треугольника ABC $AB=15$ см, $AC=10$ см. Может ли $\sin\beta=\frac{3}{4}$?
13. Докажите, что в теореме синусов каждое из трех отношений $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ равно $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.
14. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.
15. Объясните, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 271), зная расстояние AC и углы α и β.
16. Объясните, как найти высоту x здания (рис. 272) по углам α и β и расстоянию a.
17. Докажите, что если в треугольнике есть тупой угол, то противолежащая ему сторона наибольшая.
18. В треугольнике ABC $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. Какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?
19. У треугольника ABC стороны $AB=5{,}1$ м, $BC=6{,}2$ м, $AC=7{,}3$ м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

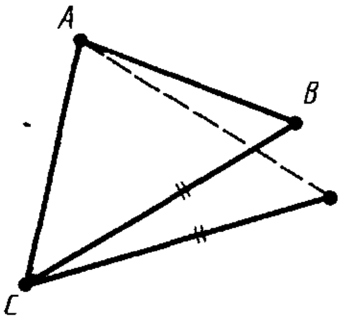


Рис. 270

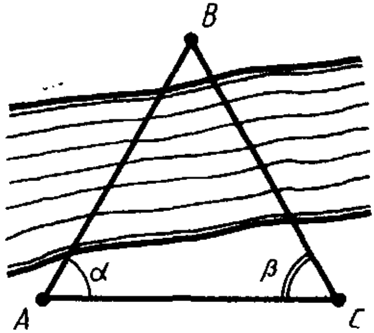


Рис. 271

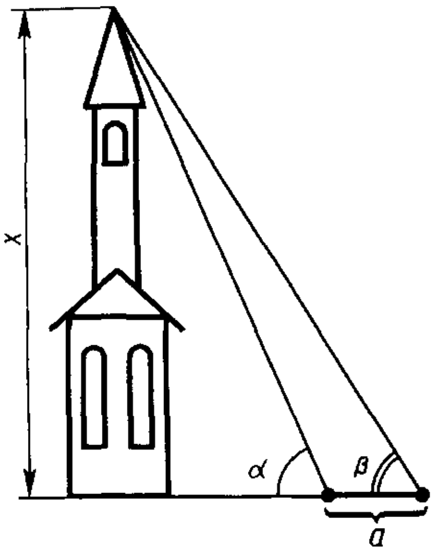


Рис. 272

20. Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60°?

21. У треугольника *ABC* угол *C* тупой. Докажите, что если точка *X* лежит на стороне *AC*, то $BX < AB$.

22. У треугольника *ABC* угол *C* тупой. Докажите, что если точка *X* лежит на стороне *AC*, а точка *Y* — на стороне *BC*, то $XY < AB$.

23. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *D*. Докажите, что отрезок *CD* меньше по крайней мере одной из сторон: *AC* или *BC*.

24*. Дан треугольник ABC. CD — медиана, проведенная к стороне AB. Докажите, что если $AC>BC$, то угол ACD меньше угла BCD.

25*. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из этой же вершины.

26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

1) $a=5$, $\beta=30°$, $\gamma=45°$;
2) $a=20$, $\alpha=75°$, $\beta=60°$;
3) $a=35$, $\beta=40°$, $\gamma=120°$;
4) $b=12$, $\alpha=36°$, $\beta=25°$;
5) $c=14$, $\alpha=64°$, $\beta=48°$.

27. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:

1) $a=12$, $b=8$, $\gamma=60°$;
2) $a=7$, $b=23$, $\gamma=130°$;
3) $b=9$, $c=17$, $\alpha=95°$;
4) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145°$;
5) $a=32$, $c=23$, $\beta=152°$;
6) $a=24$, $c=18$, $\beta=15°$.

28. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если:

1) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120°$;
2) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138°$;
3) $a=34$, $b=12$, $\alpha=164°$;
4) $a=2$, $b=4$, $\alpha=60°$;
5) $a=6$, $b=8$, $\alpha=30°$.

29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:

1) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
2) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
3) $a=4$, $b=5$, $c=7$;
4) $a=15$, $b=24$, $c=18$;
5) $a=23$, $b=17$, $c=39$;
6) $a=55$, $b=21$, $c=38$.

§ 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ

113. ЛОМАНАЯ

Ломаной $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***вершинами*** ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ — ***звеньями*** ло-

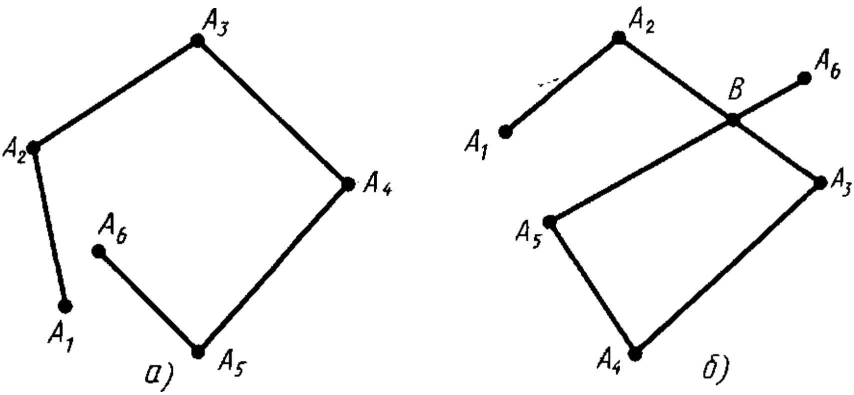


Рис. 273

маной. Ломаная называется ***простой***, если она не имеет самопересечений. На рисунке 273, *а* показана простая ломаная, а на рисунке 273, *б* — ломаная с самопересечением (в точке B). ***Длиной ломаной*** называется сумма длин ее звеньев.

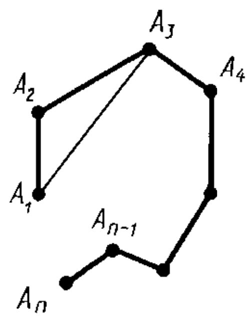


Рис. 274

Теорема 13.1. ***Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.***

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3...$ $...A_n$ — данная ломаная (рис. 274).

Заменим звенья A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3. Получим ломаную $A_1A_3A_4$ ... $...A_n$. Так как по неравенству треугольника

$$A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3,$$

то ломаная $A_1A_3A_4$ ... A_n имеет длину, не большую, чем исходная ломаная.

Заменяя таким же образом звенья A_1A_3 и A_3A_4 звеном A_1A_4, переходим к ломаной $A_1A_4A_5$ ... A_n, которая также имеет длину, не большую, чем исходная ломаная. И т. д. В итоге мы придем к отрезку A_1A_n, соединяющему концы ломаной. Отсюда следует, что исходная ломаная имела длину, не меньшую длины отрезка A_1A_n. Теорема доказана.

Задача (1). Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?

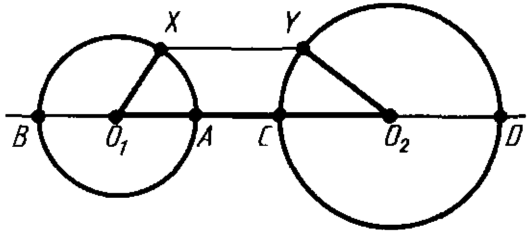


Рис. 275

Решение. Для ломаной O_1XYO_2 по теореме 13.1 $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (рис. 275). Значит, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Отсюда $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. Так как $AC = d - R_1 - R_2$, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно $d - R_1 - R_2$.

Для ломаной XO_1O_2Y по той же теореме $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. Так как $BD = d + R_1 + R_2$, то наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + R_1 + R_2$.

114. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой (рис. 276). Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а звенья ломаной — *сторонами многоугольника*. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются *диагоналями*. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется *n-угольником*.

Плоским многоугольником или *многоугольной областью* называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником (рис. 277).

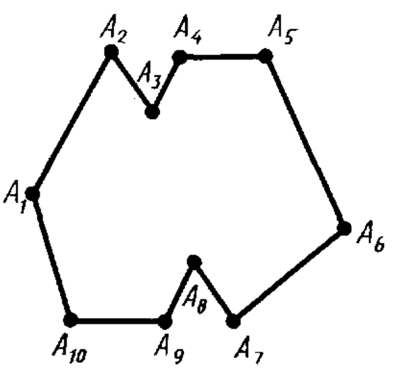


Рис. 276

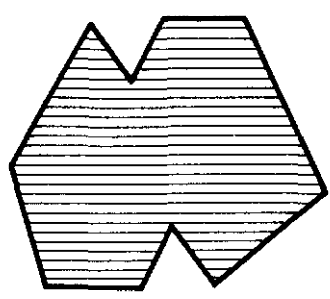


Рис. 277

Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунке 278, *а* изображен выпуклый многоугольник, а на рисунке 278, *б* — невыпуклый. ***Углом выпуклого многоугольника*** при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

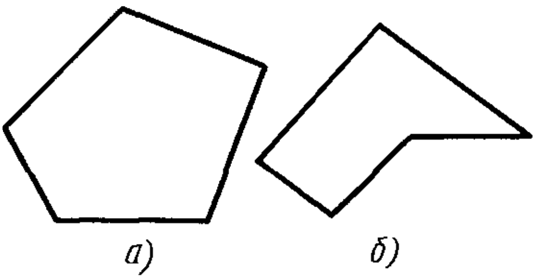


Рис. 278

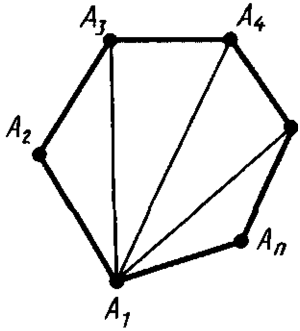


Рис. 279

Теорема 13.2. ***Сумма углов выпуклого n-угольника равна 180° (n — 2).***

Доказательство. В случае $n=3$ теорема справедлива. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — данный выпуклый многоугольник и $n>3$ (рис. 279). Проведем $n-3$ диагонали: A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}. Так как многоугольник выпуклый, то эти диагонали разбивают его на $n-2$ треугольника: $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, ..., $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. Сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ совпадает с суммой углов всех этих треугольников. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, а число этих треугольников есть $n-2$. Поэтому сумма углов выпуклого n-угольника $A_1A_2 \dots$ $\dots A_n$ равна $180° \cdot (n-2)$. Теорема доказана.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

Задача (9). Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Решение. Сумма внутреннего угла многоугольника и смежного с ним внешнего равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и внешних углов равна $180° \cdot n$. Но сумма всех внутренних углов равна $180° \cdot (n-2)$. Значит, сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $180° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 360°$.

115. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

Теорема 13.3. ***Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.***

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины правильного многоугольника (рис. 280). Проведем биссектрисы углов многоугольника из вершин A и B. Пусть O — точка их пересечения. Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB и углами при основании, равными $\frac{\alpha}{2}$, где α — угол многоугольника.

Соединим точку O с вершиной C, соседней с B. Треугольники ABO и CBO равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона OB общая, стороны AB и BC равны как стороны многоугольника, а углы при вершине B равны $\frac{\alpha}{2}$. Из равенства треугольников следует, что треугольник OBC равнобедренный с углом при вершине C, равным $\frac{\alpha}{2}$, т. е. CO есть биссектриса угла C.

Теперь соединяем точку O с вершиной D, соседней с C, и доказываем, что треугольник COD равнобедренный и DO — биссектриса угла D многоугольника. И т. д.

В итоге получается, что каждый треугольник, у которого одна сторона есть сторона многоугольника, а противолежащая вершина — точка O, является равнобедренным. Все эти треугольники имеют равные боковые стороны и равные высоты, опущенные на их основания. Отсюда следует, что все вершины многоугольника находятся на окружности с центром O и радиусом, равным боковым сторонам треугольников, а все стороны многоугольника касаются окружности с центром O и радиусом, равным высотам треугольников, опущенным из вершины O. Теорема доказана.

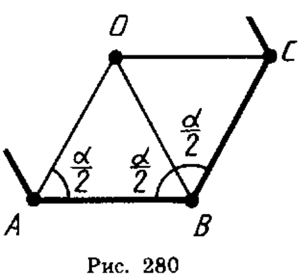


Рис. 280

Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют один и тот же центр. Его называют *центром многоугольника*. Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется *центральным углом* многоугольника.

116. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДИУСОВ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Найдем радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n (рис. 281).

Имеем:

$$\beta=\frac{180^\circ}{n},$$

$$R=OB=\frac{CB}{\sin\beta}=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

$$r=OC=\frac{CB}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

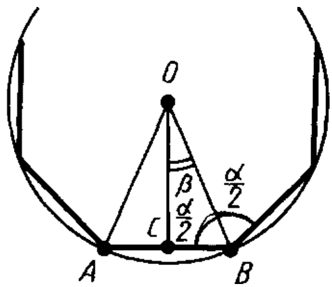


Рис. 281

Для правильного (равностороннего) треугольника $n=3$, $\beta=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ}=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного четырехугольника (квадрата) $n=4$, $\beta=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 45^\circ}=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ}=\frac{a}{2}.$$

Для правильного шестиугольника $n=6$, $\beta=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 30^\circ}=a,\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача (16). Найдите выражения для стороны a_n правильного n-угольника через радиус R описанной около него окружности и радиус r вписанной окружности. Вычислите a_n при $n=3$, 4, 6.

Решение. Поскольку $R=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, то отсюда следует:

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

В частности,

$$a_3=R\sqrt{3},\ a_4=R\sqrt{2},\ a_6=R.$$

Поскольку $r = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}$, то отсюда следует:

$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

В частности,

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

117. ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Для построения правильного многоугольника, вписанного в окружность, достаточно построить его центральный угол. У правильного шестиугольника такой угол равен $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Поэтому для построения правильного шестиугольника одну вершину (A_1) на окружности берем произвольно. Из нее как из центра радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечку и получаем вершину A_2 (рис. 282). Затем аналогично строим остальные вершины A_3, A_4, A_5, A_6 и соединяем их отрезками.

Для построения правильного вписанного треугольника достаточно соединить через одну вершины правильного вписанного шестиугольника (рис. 283).

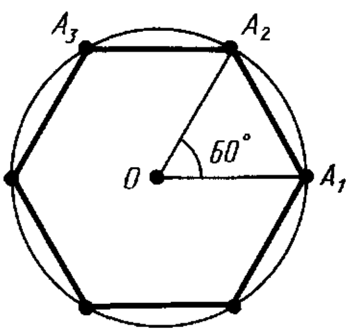


Рис. 282

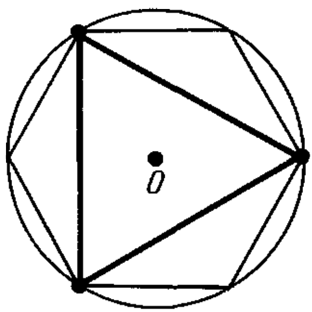


Рис. 283

Для построения правильного вписанного четырехугольника (квадрата) достаточно провести через центр окружности перпендикулярные прямые. Они пересекут окружность в вершинах квадрата (рис. 284).

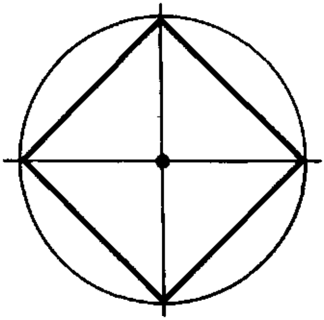


Рис. 284

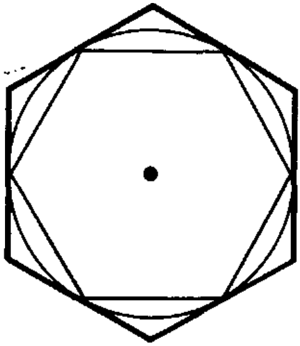


Рис. 285

Для построения правильного описанного многоугольника достаточно провести касательные к окружности в вершинах правильного вписанного многоугольника. Касательные, проходящие через вершины правильного вписанного многоугольника, пересекаются в вершинах правильного описанного многоугольника (рис. 285).

Если в окружность вписан правильный n-угольник, то легко построить правильный вписанный $2n$-угольник. На рисунке 286 показано построение правильного восьмиугольника.

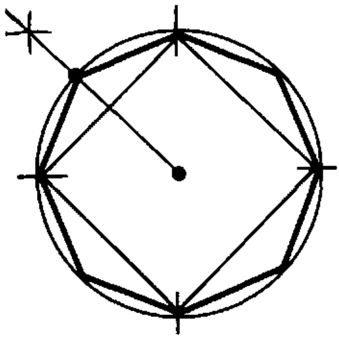


Рис. 286

118. ПОДОБИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Теорема 13.4. ***Правильные выпуклые n-угольники подобны. В частности, если у них стороны одинаковы, то они равны.***

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение теоремы. Итак, пусть $P_1: A_1A_2...A_n$, $P_2: B_1B_2...B_n$ — правильные выпуклые n-угольники с одинаковыми сторонами (рис. 287). Докажем, что они равны, т. е. совмещаются движением.

Треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ равны по первому признаку. У них $A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3$ и $\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$.

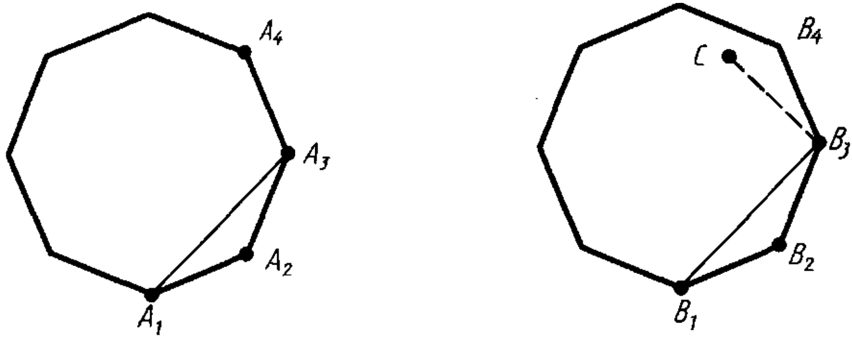


Рис. 287

Подвергнем многоугольник P_1 движению, при котором его вершины A_1, A_2, A_3 переходят в вершины B_1, B_2, B_3 соответственно. Как мы знаем, такое движение существует. При этом вершина A_4 перейдет в некоторую точку C. Точки B_4 и C лежат по одну сторону с точкой B_1 относительно прямой B_2B_3. Так как движение сохраняет углы и расстояния, то $\angle B_2B_3C = \angle B_2B_3B_4$ и $B_3C = B_3B_4$. А значит, точка C совпадает с точкой B_4. Итак, при нашем движении вершина A_4 переходит в вершину B_4. Далее таким же способом заключаем, что вершина A_5 переходит в вершину B_5 и т. д. То есть многоугольник P_1 переводится движением в многоугольник P_2, а значит, они равны.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, подвергнем сначала многоугольник P_1 преобразованию подобия, например гомотетии, с коэффициентом подобия $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. При этом получим правильный n-угольник P' с такими же сторонами, как и у P_2.

По доказанному многоугольник P' переводится движением в многоугольник P_2, а значит, многоугольник P_1 переводится в многоугольник P_2 преобразованием подобия и движением. А это есть снова преобразование подобия. Теорема доказана.

У подобных фигур коэффициент подобия равен отношению соответствующих линейных размеров. У правильных n-угольников такими линейными размерами являются длины сторон, радиусы вписанных и описанных окружностей. Отсюда следует, что у правильных n-угольников отношения сторон, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны. А так как периметры n-угольников тоже относятся как стороны, то ***у правильных n-угольников отношения периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны.***

119. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

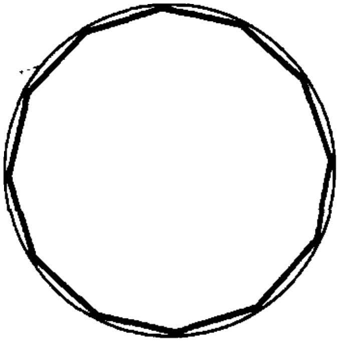


Рис. 288

Наглядное представление о длине окружности получается следующим образом. Представим себе нить в форме окружности. Разрежем ее и растянем за концы. Длина полученного отрезка и есть длина окружности. Как найти длину окружности, зная ее радиус? Ясно, что при неограниченном увеличении числа сторон вписанного в окружность правильного многоугольника его периметр неограниченно приближается к длине окружности (рис. 288). Исходя из этого, докажем некоторые свойства длины окружности.

Теорема 13.5. ***Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.***

Доказательство. Возьмем две произвольные окружности. Пусть R_1 и R_2 — их радиусы, а l_1 и l_2 — их длины. Допустим, что утверждение теоремы неверно и $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, например:

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Впишем в наши окружности правильные выпуклые многоугольники с большим числом сторон n. Если n очень велико, то длины наших окружностей будут очень мало отличаться от периметров p_1 и p_2 вписанных многоугольников. Поэтому неравенство (*) не нарушится, если в нем заменить l_1 на p_1, а l_2 на p_2:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Но, как мы знаем, периметры правильных выпуклых n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$. А это противоречит неравенсту (**). Теорема доказана.

Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»):

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

Архимед — древнегреческий ученый (III в. до н. э.)

Число π иррациональное. Приближенное значение

$$\pi \approx 3,1416.$$

Приближенное значение числа π было известно уже древним грекам. Очень простое приближенное значение π нашел Архимед: $\frac{22}{7}$. Оно отличается от точного значения π меньше чем на 0,002.

Так как $\frac{l}{2R} = \pi$, то длина окружности вычисляется по формуле

$$l = 2\pi R.$$

120. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Найдем длину дуги окружности, отвечающей центральному углу в n° (рис. 289). Развернутому углу соответствует длина полуокружности πR. Следовательно, углу в 1° соответствует дуга длины $\frac{\pi R}{180}$, а углу в n° соответствует дуга длины

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы для длины дуги окружности следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n,$$

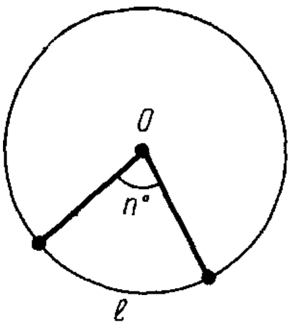


Рис. 289

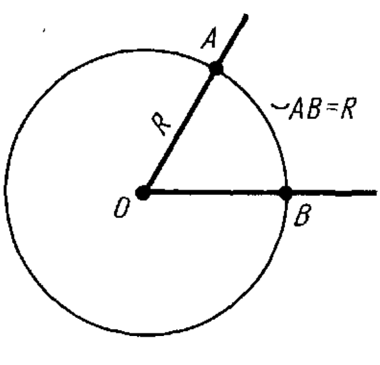


Рис. 290

т. е. ***радианная мера угла получается из градусной умножением на*** $\frac{\pi}{180^\circ}$. В частности, радианная мера угла 180° равна π, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$.

Единицей радианной меры углов является ***радиан.*** Угол в один радиан — это угол, у которого длина дуги равна радиусу (рис. 290). Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

З а д а ч а (50). Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Р е ш е н и е. Радианная мера угла A равна

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Радианная мера угла B равна $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое ломаная, длина ломаной?
2. Докажите, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.
3. Что такое многоугольник, выпуклый многоугольник?
4. Что такое плоский многоугольник?
5. Что такое угол выпуклого многоугольника при данной вершине?
6. Выведите формулу для суммы углов выпуклого многоугольника.
7. Что такое внешний угол выпуклого многоугольника?
8. Докажите, что правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.
9. Что называется центром многоугольника? центральным углом многоугольника?
10. Выведите формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника.
11. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для правильного треугольника, четырехугольника (квадрата), шестиугольника.
12. Как построить правильный выпуклый шестиугольник, треугольник, четырехугольник, восьмиугольник?
13. Докажите, что правильные выпуклые n-угольники подобны. В частности, если у них стороны одинаковы, то они равны.

14. Докажите, что отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для всех окружностей.
15. По какой формуле вычисляется длина окружности?
16. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
17. Что такое радианная мера угла?
18. Чему равны радианные меры углов 180° и 90°?

ЗАДАЧИ

1. Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?
2. Решите задачу 1 при условии, что $d < R_1 - R_2$ (рис. 291).
3. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.
4. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.
5. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.
6. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.
7. Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую (рис. 292).
8. Сколько диагоналей у n-угольника?
9. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

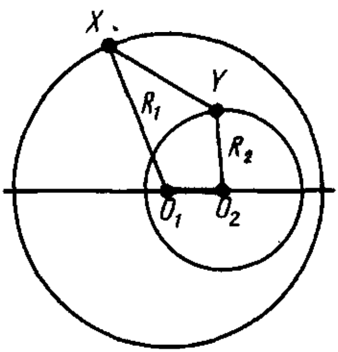


Рис. 291

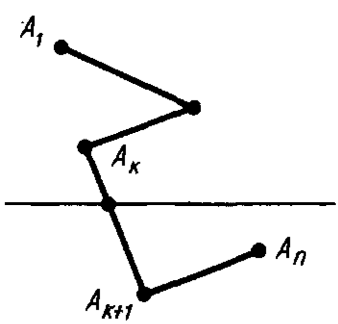


Рис. 292

10. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.
11. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы длин противолежащих сторон равны.
12. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1) 135°; 2) 150°?
13. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1) 36°; 2) 24°?
14. Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.
15. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.
16. Найдите выражения для стороны a_n правильного n-угольника через радиус R описанной около него окружности и радиус r вписанной окружности. Вычислите a_n при $n = 3, 4, 6$.
17. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.
18. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.
19. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.
20. В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.
21. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Определите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.
22. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр 2 см?
23. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.
24. Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.
25*. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса R.
26. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус

описанной окружности R. Найдите радиус вписанной окружности.

27. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус вписанной окружности r. Найдите радиус описанной окружности.
28. Выразите сторону b правильного описанного многоугольника через радиус R окружности и сторону a правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.
29. Выразите сторону a правильного вписанного многоугольника через радиус R окружности и сторону b правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.
30. Впишите в окружность правильный 12-угольник.
31. Опишите около окружности правильный треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.
32. Радиусы вписанной и описанной окружностей одного правильного n-угольника равны r_1 и R_1, а радиус вписанной окружности другого правильного n-угольника равен r_2. Чему равен радиус описанной окружности другого n-угольника?
33. Периметры двух правильных n-угольников относятся как $a:b$. Как относятся радиусы их вписанных и описанных окружностей?
34. Вычислите длину окружности, если радиус равен: 1) 10 м; 2) 15 м.
35. На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?
36. Найдите отношение периметра правильного вписанного 8-угольника к диаметру и сравните его с приближенным значением π.
37. Решите задачу 36 для правильного 12-угольника.
38. Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.
39. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?
40. Внутри окружности радиуса R расположены n равных окружностей, которые касаются друг друга и данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число их равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6 (рис. 293).
41. Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.
42. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.
43. Найдите длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу: 1) 30°; 2) 45°; 3) 120°; 4) 270°.

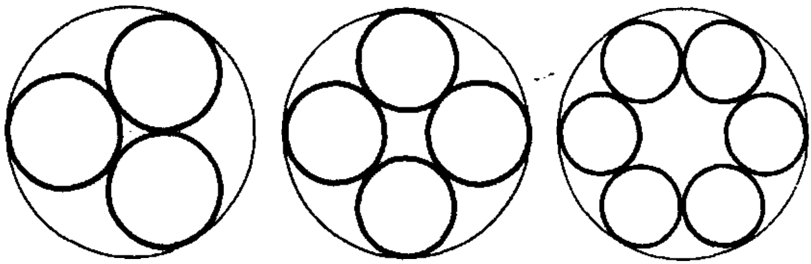


Рис. 293

44. Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга составляет: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ окружности?
45. Какой угол образуют радиусы Земли, проведенные в две точки на ее поверхности, расстояние между которыми равно 1 км? Радиус Земли равен 6370 км.
46. По радиусу $R=1$ м найдите длину дуги, отвечающей центральному углу: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′.
47. По данной хорде a найдите длину ее дуги, если градусная мера дуги равна: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.
48. По данной длине дуги l найдите ее хорду, если дуга содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.
49. Найдите радианную меру углов: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.
50. Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A=60°$, $\angle B=45°$.
51. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{18}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$.

§ 14. ПЛОЩАДИ ФИГУР

121. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ

Геометрическую фигуру будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число плоских треугольников. Напомним, что плоским треугольником мы называем конечную часть плоскости, ограниченную треугольником (рис. 294).

Примером простой фигуры является выпуклый плоский многоугольник. Он разбивается на плоские треугольники диа-

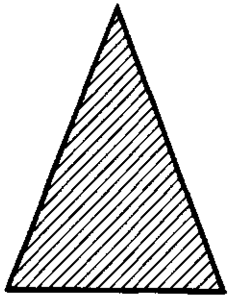


Рис. 294

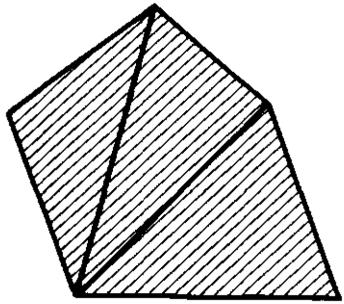


Рис. 295

гоналями, проведенными из какой-нибудь его вершины (рис. 295). В этом параграфе мы рассматриваем только плоские многоугольники и поэтому повторять каждый раз слово «плоский» не будем.

Дадим определение площади для простых фигур.

Для простых фигур *площадь — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:*

1) *Равные фигуры имеют равные площади.*

2) *Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.*

3) *Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.*

Если квадрат, о котором идет речь в определении, имеет сторону 1 м, то площадь будет в квадратных метрах ($м^2$). Если сторона квадрата 100 м, то площадь будет в гектарах. Если сторона квадрата 1 км, то площадь будет в квадратных километрах, и т. п.

122. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Найдем площадь прямоугольника со сторонами a, b. Для этого сначала докажем, что площади двух прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты.

Пусть $ABCD$ и AB_1C_1D — два прямоугольника с общим основанием AD (рис. 296, *а*). Пусть S и S_1 — их площади. Докажем, что $\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{AB_1}$. Разобьем сторону AB прямоугольника на большое число n равных частей, каждая из них равна $\frac{AB}{n}$. Пусть

m — число точек деления, которые лежат на стороне AB_1. Тогда

$$\left(\frac{AB}{n}\right) m \leqslant AB_1 \leqslant \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда, разделив на AB, получим:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведем через точки деления прямые, параллельные основанию AD. Они разобьют прямоугольник $ABCD$ на n равных прямоугольников. Каждый из них имеет площадь $\frac{S}{n}$. Прямоугольник AB_1C_1D содержит первые m прямоугольников, считая снизу, и содержится в $m+1$ прямоугольниках. Поэтому

$$\left(\frac{S}{n}\right) m \leqslant S_1 \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

Из неравенств $(*)$ и $(**)$ мы видим, что оба числа $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_1}{S}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем

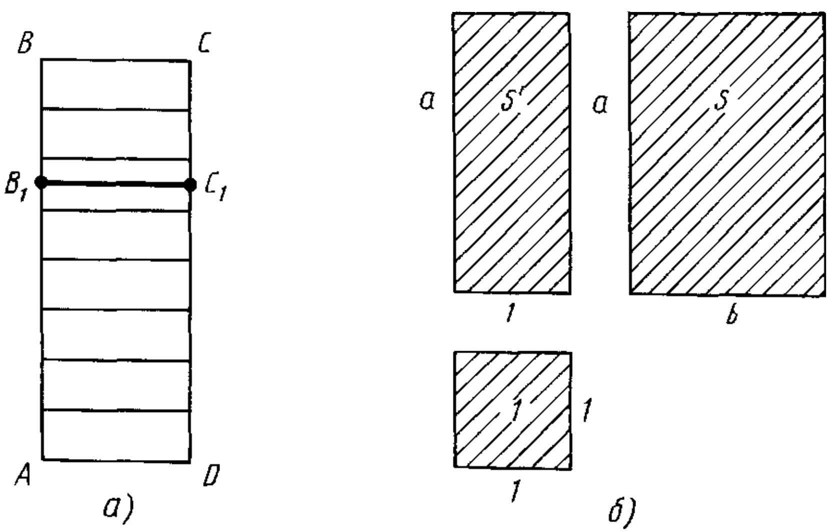


Рис. 296

на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим, то это может быть только при $\frac{S_1}{S}=\frac{AB_1}{AB}$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь квадрат, являющийся единицей площади, прямоугольник со сторонами 1, a и прямоугольник со сторонами a, b (рис. 296, *б*). Сравнивая их площади, по доказанному будем иметь:

$$\frac{S'}{1}=\frac{a}{1} \text{ и } \frac{S}{S'}=\frac{b}{1}.$$

Перемножая эти равенства почленно, получим:

$$S=ab.$$

Итак, ***площадь прямоугольника со сторонами a, b вычисляется по формуле S=ab.***

123. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Если он не является прямоугольником, то один из его углов — A или B — острый. Пусть для определенности угол A острый, как изображено на рисунке 297.

Опустим перпендикуляр AE из вершины A на прямую CD. Площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADE.

Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую CD. Тогда площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BCF.

Прямоугольные треугольники ADE и BCF равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABFE$, т. е. равна $AB \cdot BF$.

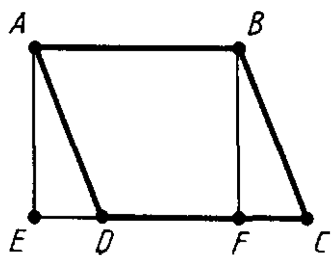


Рис. 297

Отрезок BF называется *высотой* параллелограмма, соответствующей сторонам AB и CD.

Итак, ***площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

124. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

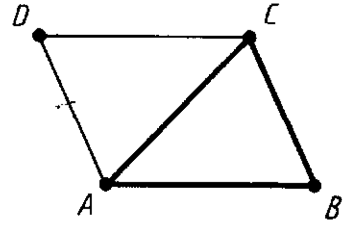


Рис. 298

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 298). Дополним этот треугольник до параллелограмма $ABCD$, как указано на рисунке. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне AB.

Отсюда следует, что ***площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту:***

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

Докажем теперь, что ***площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.***

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 299). Докажем, что

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A.$$

Проведем в треугольнике ABC высоту BD. Имеем

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

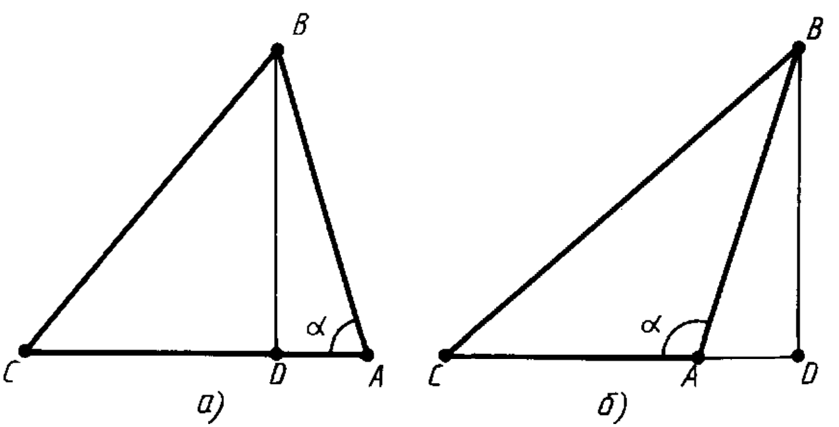


Рис. 299

Из прямоугольного треугольника ABD $BD=AB\cdot\sin\alpha$, если угол α острый (рис. 299, *а*), $BD=AB\sin(180°-\alpha)$, если угол α тупой (рис. 299, *б*). Так как $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, то в любом случае $BD=AB\cdot\sin\alpha$. Следовательно, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A$, что и требовалось доказать.

125. ФОРМУЛА ГЕРОНА ДЛЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача (29). Выведите формулу Герона[1] для площади треугольника:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

Решение. Имеем:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Отсюда

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Значит,

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=$$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Замечая, что $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=$ $=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$, получаем:

$$\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

[1] Герон Александрийский — древнегреческий ученый, живший в I в.н.э.

126. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 300). Диагональ трапеции AC разбивает ее на два треугольника: ABC и CDA. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB\cdot CE$, площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}DC\cdot AF$. Высоты CE и AF этих треугольников равны расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. Это расстояние называется *высотой* трапеции.

Следовательно, ***площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:*** $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

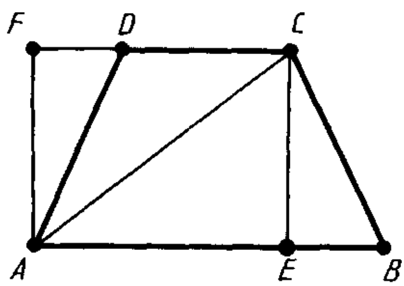


Рис. 300

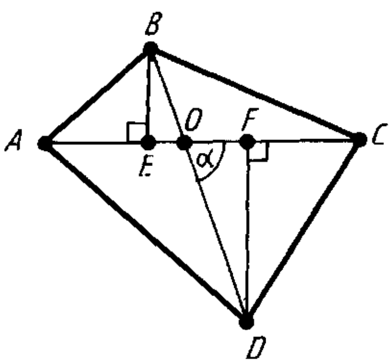


Рис. 301

Задача (40). Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Решение. Площадь S четырехугольника равна сумме площадей треугольников ABC и ADC (рис. 301):

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BE+\frac{1}{2}AC\cdot DF=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AC\cdot DO\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}AC\sin\alpha\,(BO+OD)=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

127. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДИУСОВ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача (42). Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника:

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Решение. Начнем с формулы для R. Как мы знаем, $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, где α — угол, противолежащий стороне a треугольника.

Умножая числитель и знаменатель правой части на bc и замечая, что $\frac{1}{2}bc\sin\alpha=S$, получим:

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

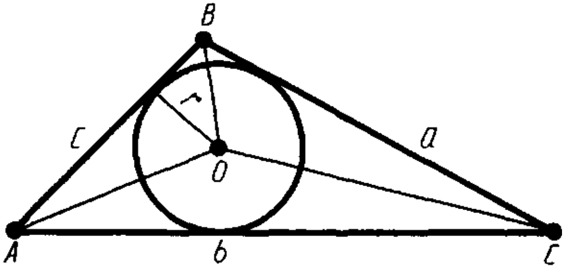


Рис. 302

Выведем формулу для r (рис. 302). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников OAB, OBC и OCA:

$$S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br.$$

Отсюда

$$r=\frac{2S}{a+b+c}.$$

128. ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ФИГУР

Пусть F' и F'' — две подобные простые фигуры. Выясним, как относятся площади этих фигур. Так как фнгуры подобны, то существует преобразование подобия, при котором фнгура F' переходит в фигуру F''.

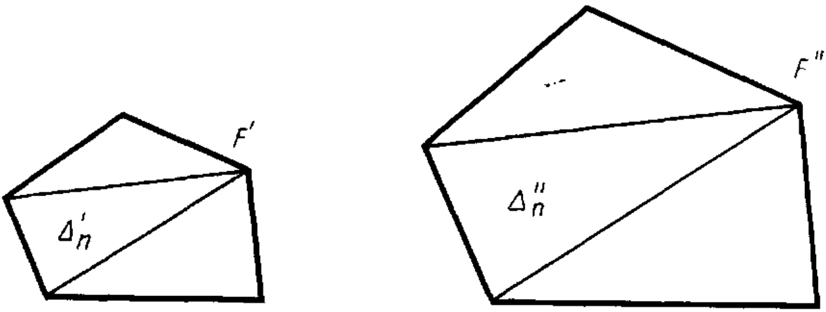


Рис. 303

Разобьем фигуру F' на треугольники Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, ... (рис. 303). Преобразование подобия, переводящее фигуру F' в F'', переводит эти треугольники в треугольники Δ''_1, Δ''_2, Δ''_3, ... разбиения фигуры F''. Площадь фигуры F' равна сумме площадей треугольников Δ'_1, Δ'_2, ..., а площадь фигуры F'' равна сумме площадей треугольников Δ''_1, Δ''_2, ...

Если коэффициент подобия равен k, то размеры треугольника Δ''_n в k раз больше соответствующих размеров треугольника Δ'_n. В частности, стороны и высоты треугольника Δ''_n в k раз больше соответствующих сторон и высот треугольника Δ'_n. Отсюда следует, что

$$S(\Delta''_n)=k^2S(\Delta'_n).$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$S(F'')=k^2S(F').$$

Коэффициент подобия k равен отношению соответствующих линейных размеров фигур F'' и F'. Поэтому *площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.*

129. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Если фигура простая, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольников, то ее площадь равна сумме площадей этих треугольников. Для произвольной фигуры площадь определяется следующим образом.

Данная фигура имеет площадь S, если существуют содержащие ее простые фигуры и содержащиеся в ней простые фигуры с площадями, как угодно мало отличающимися от S. Применим это определение к нахождению площади круга.

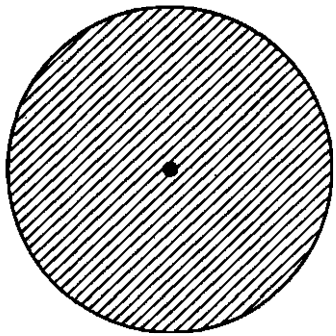


Рис. 304

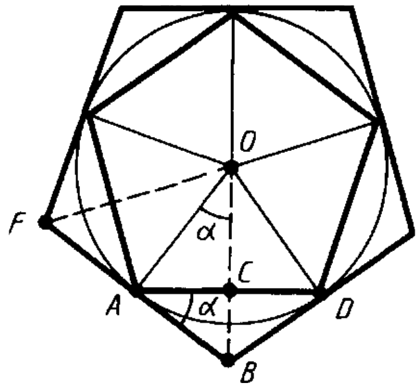


Рис. 305

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Эта точка называется *центром круга*, а данное расстояние — *радиусом круга*. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом (рис. 304).

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус.

Докажем это. Построим два правильных n-угольника: P_1 — вписанный в круг и P_2 — описанный около круга (рис. 305). Многоугольники P_1 и P_2 являются простыми фигурами. Многоугольник P_2 содержит круг, а многоугольник P_1 содержится в круге.

Радиусы, проведенные в вершины многоугольника P_1, разбивают его на n треугольников, равных треугольнику AOD. Поэтому

$$S_{P_1} = n\,S_{AOD}.$$

Так как $S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cdot \cos\alpha$, то

$$S_{P_1} = (nAC)\,AO\cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

где p — периметр многоугольника P_1, R — радиус круга. Аналогично находим площадь многоугольника P_2:

$$S_{P_2} = n\,S_{BOF},$$

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S_{P_2} = \frac{(n\,AC)\,AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Итак, многоугольник P_1, содержащийся в круге, имеет площадь

$$S_{P_1} = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

а многоугольник P_2, содержащий круг, имеет площадь

$$S_{P_2}=\frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Так как при достаточно большом n периметр p отличается сколь угодно мало от длины l окружности, а $\cos\alpha$ сколь угодно мало отличается от единицы, то площади многоугольников P_1 и P_2 сколь угодно мало отличаются от $\frac{lR}{2}$. Согласно определению это значит, что площадь круга

$$S=\frac{lR}{2}=\pi R^2,$$

что и требовалось доказать.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 306).

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha},$$

где R — радиус круга, а α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 307).

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_\Delta},$$

где α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «$-$» надо брать, когда $\alpha<180°$, а знак «$+$» надо брать, когда $\alpha>180°$.

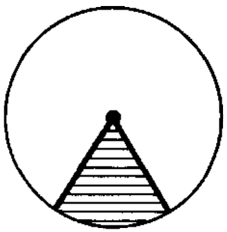


Рис. 306

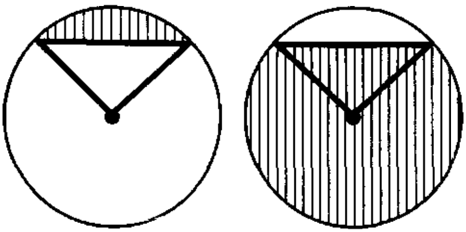


Рис. 307

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте свойства площади для простых фигур.
2. Докажите, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.
3. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
4. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
5. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.
6. Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
7. Как относятся площади подобных фигур?
8. Выведите формулу площади круга.
9. По каким формулам вычисляются площади кругового сектора и кругового сегмента?

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе (рис. 308).
2. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.
3. Найдите площадь квадрата S по его диагонали a.
4. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?

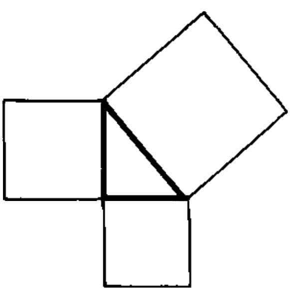


Рис. 308

5. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?
6. Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?
7. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь 144 м^2?
8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2?
9. Параллелограмм и прямоугольник

имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

10. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет бо́льшую площадь? Объясните ответ.
11. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 30°.
12. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.
13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.
14. Найдите стороны ромба, зная, что его диагонали относятся как 1 : 2, а площадь ромба равна 12 см^2.
15. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.
16.* Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.
17. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?
18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a.
19. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведенная к стороне 4 см?
20. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т. е.

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

21. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.
22. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R.
23. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.
24. Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 см^2?
25. У треугольника ABC $AC=a$, $BC=b$. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?
26. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен 70°.
27. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен 70°.

28.* Найдите площадь треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам α и β.

29. Выведите формулу Герона для площади треугольника: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, а p — полупериметр.

30. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

31. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

32. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

33. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту треугольника, опущенную на боковую сторону.

34. Найдите высоты треугольника, у которого стороны равны 13 см, 14 см и 15 см.

35. Найдите высоту треугольника со сторонами $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83, проведенную к стороне $2\frac{1}{12}$.

36. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80 и наибольшую высоту треугольника со сторонами: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

37. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.

38. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.

39. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.

40. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

41*. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.

42. Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника:

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

43. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

44. Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведенная к основанию, 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

45. Найдите радиусы окружностей, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b и вписанной в него.

46. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

47. Докажите, что в прямоугольном треугольиике радиус вписанной окружности равен половиие разности между суммой катетов и гипотенузой.

48. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описаниой и вписанной окружиостей.

49. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения периметра многоугольника на радиус окружности.

50. Через середину высоты треугольника проведена перпендикулярная к ней прямая. В каком отношении она делит площадь треугольника?

51. Прямая, перпендикулярная высоте треугольника, делит его площадь пополам. Найдите расстояние от этой прямой до вершины треугольника, из которой проведена высота, если она равна h.

52. Периметры правильных n-угольников относятся как $a:b$. Как относятся их площади?

53. Найдите площадь круга, если длина окружности l.

54. Найдите площадь кругового кольца (рис. 309), заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b, $a > b$.

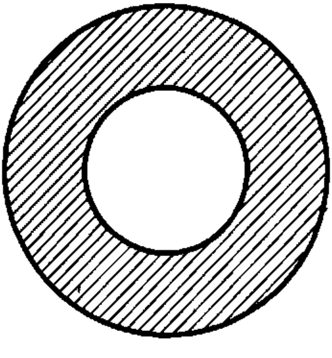


Рис. 309

55. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в m раз?

56. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

57. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около него.

58. Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга, вписанного в него.

59. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

60. Дана окружность радиуса R. Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1) R; 2) l.

61*. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

62. Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника. Радиус круга R (рис. 310).

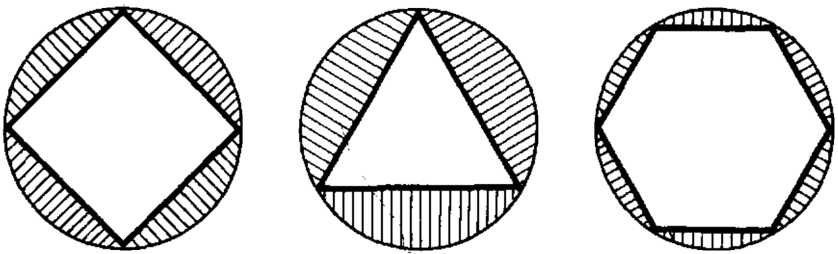


Рис. 310

10 класс

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 15. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

130. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии, так же как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

Плоскость мы представляем себе как ровную поверхность крышки стола (рис. 311, *а*) и поэтому будем изображать ее в виде параллелограмма (рис. 311, *б*). Плоскость, как и прямая, бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть плоскости, но представляем ее неограниченно продолженной во все стороны. Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, ...

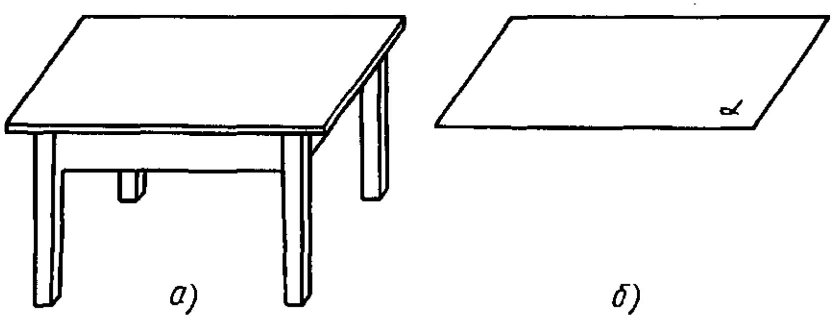


Рис. 311

Введение нового геометрического образа — плоскости заставляет расширить систему аксиом. Поэтому мы вводим группу аксиом С, которая выражает основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

C_1. ***Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.***

C_2. ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

Этой аксиомой утверждается, что если две различные плоскости α и β имеют общую точку, то существует прямая c, принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если точка C принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой c.

C_3. ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку C, то существует плоскость γ, содержащая прямые a и b. Плоскость, обладающая этим свойством, единственна.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из аксиом I—IX планиметрии и группы аксиом С.

Замечание. В планиметрии мы имели одну плоскость, на которой располагались все рассматриваемые нами фигуры. В стереометрии много, даже бесконечно много, плоскостей. В связи с этим формулировки некоторых аксиом планиметрии, как аксиом стереометрии, требуют уточнения. Это относится к аксиомам IV, VII, VIII, IX. Приведем эти уточненные формулировки.

IV. Прямая, *принадлежащая плоскости*, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

VII. От полупрямой *на содержащей ее плоскости* в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

VIII. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник *в данной плоскости* в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

IX. *На плоскости* через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Для удобства изложения напомним аксиому I.

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

131. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ПРЯМУЮ И ДАННУЮ ТОЧКУ

Теорема 15.1. ***Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть AB — данная прямая и C — не лежащая на ней точка (рис. 312). Проведем через точки A и C прямую (аксиома I). Прямые AB и AC различны, так как точка C не лежит на прямой AB. Проведем через прямые AB и AC плоскость α (аксиома C_3). Она проходит через прямую AB и точку C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через прямую AB и точку C, единственна.

Допустим, существует другая плоскость α', проходящая через прямую AB и точку C. По аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по прямой. Эта прямая должна содержать точки A, B, C. Но они не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

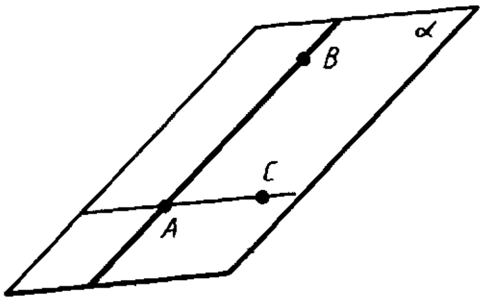


Рис. 312

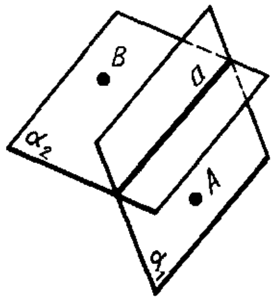


Рис. 313

Задача (7). Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Решение. Пусть a — данная прямая (рис. 313). По аксиоме I существует точка A, не лежащая на прямой a. По теореме 15.1 через прямую a и точку A можно провести плоскость, обозначим ее α_1. По аксиоме C_1 существует точка B, не лежащая в плоскости α_1. Проведем через прямую a и точку B плоскость α_2. Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка B плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

132. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

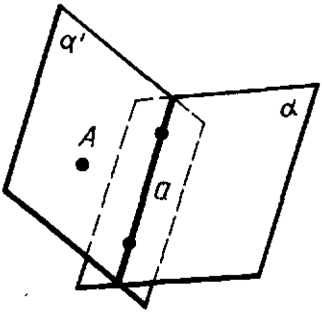


Рис. 314

Теорема 15.2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 314). По аксиоме I существует точка A, не лежащая на прямой a. Проведем через прямую a и точку A плоскость α'. Если плоскость α' совпадает с α, то плоскость α содержит прямую a, что и утверждается теоремой. Если плоскость α' отлична от α, то эти плоскости пересекаются по прямой a', содержащей две точки прямой a. По аксиоме I прямая a' совпадает с a, и, следовательно, прямая a лежит в плоскости α. Теорема доказана.

Из теоремы 15.2 следует, что ***плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке*** (рис. 315).

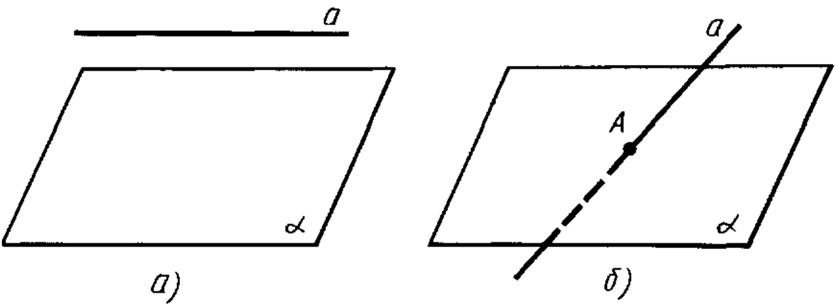


Рис. 315

Задача (9). Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

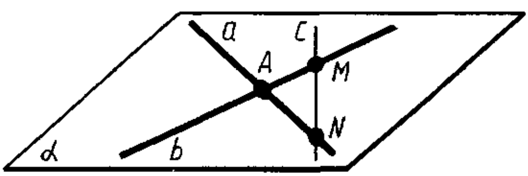


Рис. 316

Решение. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис. 316). Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямымн). По теореме 15.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

133. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Теорема 15.3. ***Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть A, B, C — три данные точкн, не лежащие на одной прямой (рис. 317). Проведем прямые AB и AC; они различны, так как точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость α. Эта плоскость содержит точки A, B, C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через точки A, B, C, единственна. Действительно, плоскость, проходящая через точки A, B, C, по теореме 15.2 содержит прямые AB и AC. А по аксноме C_3 такая плоскость единственна.

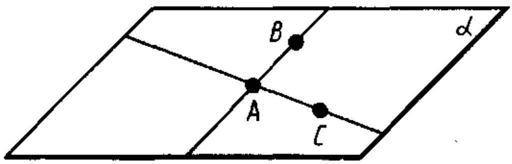


Рис. 317

Задача (13). Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Решение. Пусть A, B, C — три точки, лежащие на прямой a. Возьмем точку D, не лежащую на прямой a (аксиома I). Через точки A, B, D можно провести плоскость (теорема 15.3). Эта плоскость содержит две точки прямой a — точки A и B, а значнт, содержит и точку C этой прямой (теорема 15.2). Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

134. ЗАМЕЧАНИЕ К АКСИОМЕ I

Аксиома I в списке аксиом стереометрии приобретает новый смысл по сравнению с тем, который она имела в планиметрии. В планиметрии эта аксиома утверждает существование точек вне данной прямой *на плоскости*, в которой лежит прямая. Именно в таком смысле эта аксиома применялась нами при построении геометрии на плоскости. Теперь эта аксиома утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Из нее непосредственно не следует, что существуют точки вне данной прямой на плоскости, в которой лежит прямая. Это требует специального доказательства. Дадим такое доказательство.

Пусть α — плоскость и a — прямая в этой плоскости (рис. 318). Докажем существование точек в плоскости α, не лежащих на прямой a.

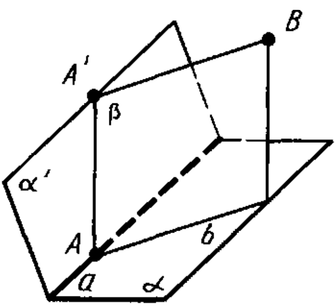


Рис. 318

Отметим точку A на прямой a и точку A' вне плоскости α. Проведем плоскость α' через прямую a и точку A'. Возьмем точку B вне плоскости α' и проведем через прямую AA' и точку B плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b, проходящей через точку A и отличной от прямой a. Точки этой прямой, отличные от A, лежат в плоскости α вне прямой a, что и требовалось доказать.

135. РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПЛОСКОСТЬЮ НА ДВА ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Теорема 15.4. ***Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.***

Доказательство (не для запоминания). Пусть α — данная плоскость. Отметим точку A, не лежащую в плоскости α. Такая точка существует по аксиоме C_1. Разобьем все точки пространства, не лежащие в плоскости α, на два полупространства следующим образом. Точку X отнесем к первому полупространству, если отрезок AX не пересекает плоскость α, и ко второму полупространству, если отрезок AX пересекает плоскость α. Покажем, что это разбиение пространства обладает свойствами, указанными в теореме.

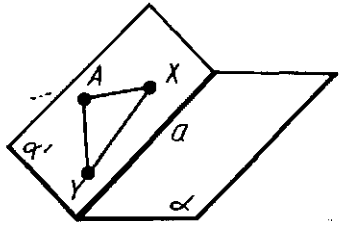


Рис. 319

Пусть точки X и Y принадлежат первому полупространству. Проведем через точки A, X и Y плоскость α'. Если плоскость α' не пересекает плоскость α, то отрезок XY тоже не пересекает эту плоскость. Допустим, что плоскость α' пересекает плоскость α (рис. 319). Так как плоскости различны, то их пересечение происходит по некоторой прямой a. Прямая a разбивает плоскость α' на две полуплоскости. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости, именно той, в которой лежит точка A. Поэтому отрезок XY не пересекает прямую a, а значит, и плоскость α.

Если точки X и Y принадлежат второму полупространству, то плоскость α' заведомо пересекает плоскость α, так как отрезок AX пересекает плоскость α. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости α' прямой a. Следовательно, отрезок XY не пересекает прямую a, а значит, и плоскость α.

Если, наконец, точка X принадлежит одному полупространству, а точка Y — другому, то плоскость α' пересекает плоскость α, а точки X и Y лежат в разных полуплоскостях плоскости α' относительно прямой a. Поэтому отрезок XY пересекает прямую a, а значит, и плоскость α. Теорема доказана.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое стереометрия?
2. Сформулируйте аксиомы группы С.
3. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
4. Докажите, что если две точки прямой прииадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.
5. Докажите, что через три точки, не лежащие на одиой прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

ЗАДАЧИ

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.
2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.
3. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажнте, что эти точки лежат на одной прямой.

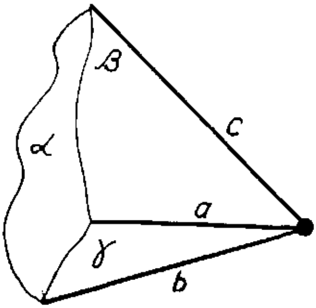


Рис. 320

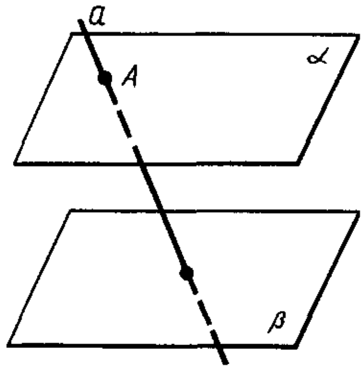


Рис. 321

4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения (рис. 320).
5. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.
6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.
7. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.
8*. Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую (рис. 321).
9. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.
10. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.
11. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.
12. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Объясните ответ.
13. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

14*. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

§ 16. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

136. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися* (рис. 322).

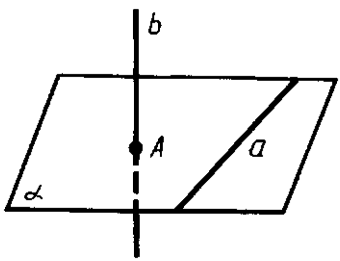


Рис. 322

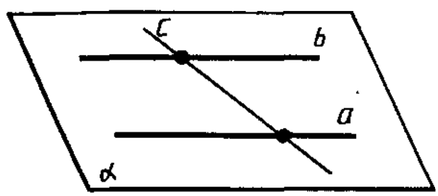


Рис. 323

Задача (3). Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

Решение. Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 323). Обозначим ее α. Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки — точки пересечения с данными прямыми. По теореме 15.2 эта прямая лежит в плоскости α. Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости α.

Теорема 16.1. ***Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.***

Замечание. Утверждение единственности в теореме 16.1 не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости. Поэтому она требует доказательства.

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A —

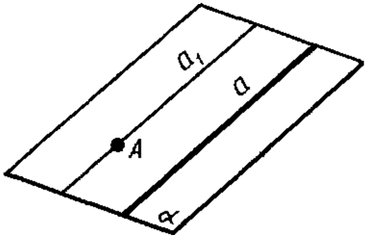


Рис. 324

точка, не лежащая на этой прямой (рис. 324). Проведем через прямую a и точку A плоскость α. Проведем через точку A в плоскости α прямую a_1, параллельную a. Докажем, что прямая a_1, параллельная a, единственна.

Допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через точку A и параллельная прямой a. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость α_2. Плоскость α_2 проходит через прямую a и точку A; следовательно, по теореме 15.1 она совпадает с α. Теперь по аксиоме параллельных прямые a_1 и a_2 совпадают. Теорема доказана.

137. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Теорема 16.2. ***Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.***

Доказательство. Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β — плоскость, в которой лежат прямые a и b, а γ — плоскость, в которой лежат прямые a и c. Плоскости β и γ различны (рис. 325). Отметим на прямой b какую-нибудь точку B и проведем плоскость γ_1 через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость β по прямой b_1.

Прямая b_1 не пересекает плоскость γ. Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой a, так как прямая b_1 лежит в плоскости β. С другой стороны, она должна лежать и на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ_1. Но прямые a и c как параллельные не пересекаются.

Так как прямая b_1 лежит в плоскости β и не пересекает прямую a, то она параллельна a, а значит, совпадает с b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ_1) и не пересекает ее. Значит, прямые b и c параллельны. Теорема доказана.

Задача (11). Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Решение. Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник (рис. 326). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — сере-

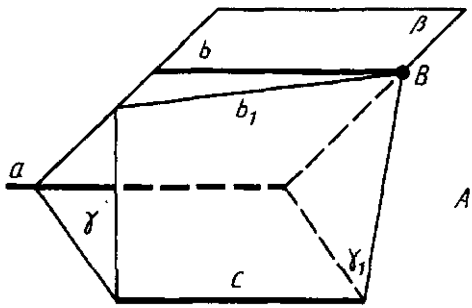


Рис. 325

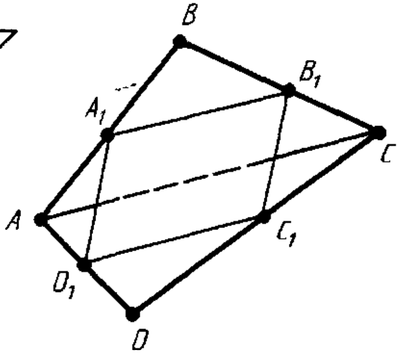


Рис. 326

дины его сторон. Тогда A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1 — средняя линия треугольника ACD, тоже параллельная стороне AC. По теореме 16.2 прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Точно так же доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Итак, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.

138. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 16.3. ***Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.***

Доказательство. Пусть α — плоскость, a — не лежащая в ней прямая и a_1 — прямая в плоскости α, параллельная прямой a. Проведем плоскость α_1 через прямые a и a_1 (рис. 327). Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые a и a_1 параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α. Теорема доказана.

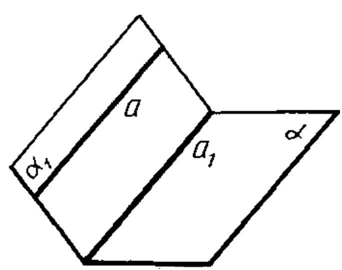


Рис. 327

Задача (15). Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

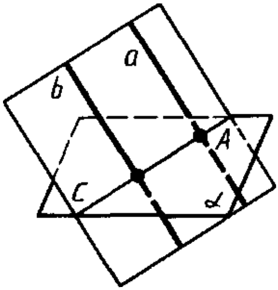


Рис. 328

Решение. Пусть a и b — две параллельные прямые и α — плоскость, пересекающая прямую a в точке A (рис. 328). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a (в точке A), а значит, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b.

139. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 16.4. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

Доказательство. Пусть α и β — данные плоскости, a_1 и a_2 — прямые в плоскости α, пересекающиеся в точке A, b_1 и b_2 — соответственно параллельные им прямые в плоскости β (рис. 329). Допустим, что плоскости α и β не параллельны, т. е. пересекаются по некоторой прямой c. По теореме 16.3 прямые a_1 и a_2, как параллельные прямым b_1 и b_2, параллельны плоскости β, и поэтому они не пересекают лежащую в этой плоскости прямую c. Таким образом, в плоскости α через точку A проходят две прямые (a_1 и a_2), параллельные прямой c. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

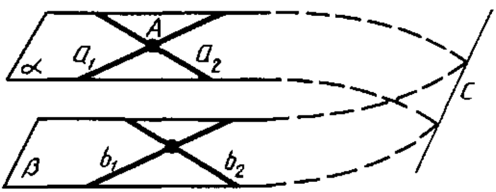


Рис. 329

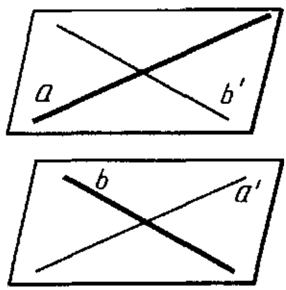


Рис. 330

Задача (19). Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

Решение. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 330). Через произвольную точку прямой a проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку прямой b проведем прямую a', параллельную a. Теперь проведем две плоскости: одну через прямые a и b', а другую через прямые b и a'. По теореме 16.4 эти плоскости параллельны. В первой из них лежит прямая a, а во второй — прямая b.

140. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ

Теорема 16.5. ***Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.***

Доказательство. Проведем в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b (рис. 331). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость β, проходящая через прямые a_1 и b_1, по теореме 16.4 параллельна плоскости α.

Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β_1, тоже параллельная плоскости α (рис. 332). Отметим на плоскости β_1 какую-нибудь точку C, не лежащую в плоскости β. Проведем плоскость γ через точки A, C и какую-нибудь точку B плоскости α. Эта плоскость пересечет плоскости α, β и β_1 по прямым b, a и c. Прямые a и c не пересекают прямую b, так как не пересекают плоскость α. Следовательно, они параллельны

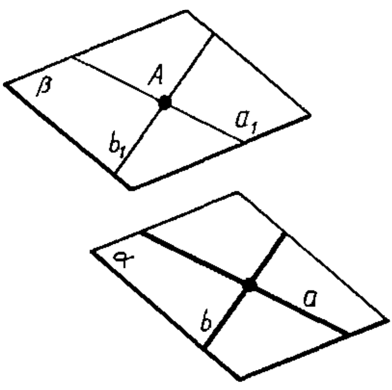


Рис. 331

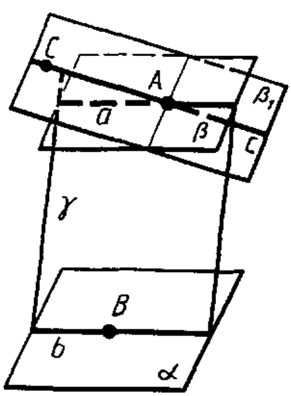


Рис. 332

прямой b. Но в плоскости γ через точку A может проходить только одна прямая, параллельная прямой b. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Задача (23). Плоскости α и β параллельны плоскости γ, Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Решение. Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. А это противоречит теореме 16.5.

141. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

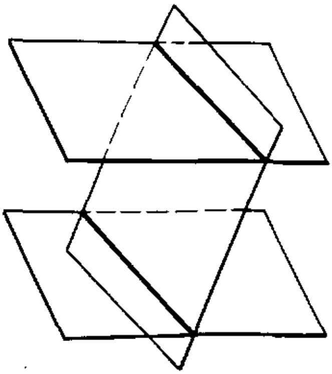


Рис. 333

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (рис. 333).

Действительно, согласно определению параллельные прямые — это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Наши прямые лежат в одной плоскости — секущей плоскости. Они не пересекаются, так как не пересекаются содержащие их параллельные плоскости. Значит, прямые параллельны, что и требовалось доказать.

Задача (33). Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1:AX_2$ не зависит от взятой прямой.

Решение. Проведем через точку A другую прямую и обозначим через Y_1 и Y_2 точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 334). Проведем через прямые AX_1 и AY_1 плоскость. Она пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым X_1Y_1 и X_2Y_2. Отсюда следует подобие треугольников AX_1Y_1 и AX_2Y_2. А из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2},$$

т. е. отношения $AX_1:AX_2$ и $AY_1:AY_2$ одинаковы для обеих прямых.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Действительно, пусть α_1 и α_2 — параллельные плоскости,

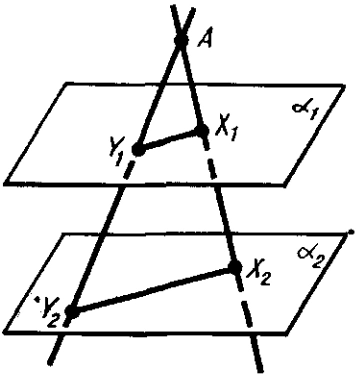


Рис. 334

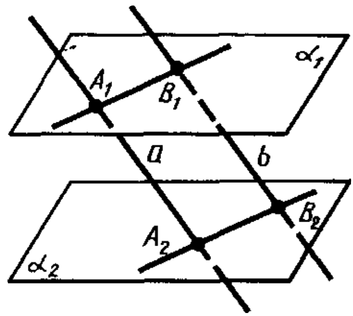


Рис. 335

a и b — пересекающие их параллельные прямые, A_1, A_2 и B_1, B_2 — точки пересечения прямых с плоскостями (рис. 335). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм, так как у него противолежащие стороны параллельны. А у параллелограмма противолежащие стороны равны. Значит, $A_1A_2=B_1B_2$, что и требовалось доказать.

142. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость чертежа α, проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 336). Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры. Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассматривании ее издали.

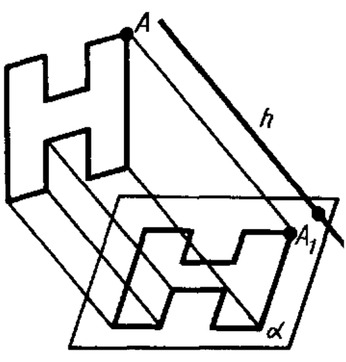


Рис. 336

Отметим некоторые свойства изображения фигуры на плоскости, вытекающие из описанного ее построения.

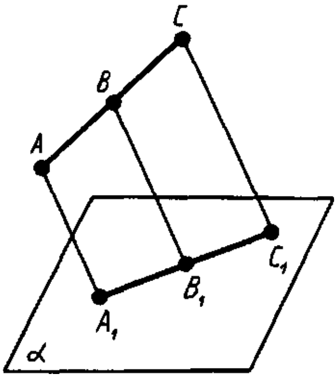


Рис. 337

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками (рис. 337).

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа α по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

З а м е ч а н и е. В только что доказанном свойстве и далее предполагается, конечно, что проектируемые отрезки не параллельны направлению проектирования.

Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками (рис. 338).

Действительно, пусть AC и $A'C'$ — параллельные отрезки фигуры. Прямые A_1C_1 и $A_1'C_1'$ параллельны, так как они получаются при пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые $A'C'$ и $A'A_1'$.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

Покажем, например, что (рис. 339)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Проведем через точку B прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1=A_2B$ и $B_1C_1=BC_2$ следует пропорция (*).

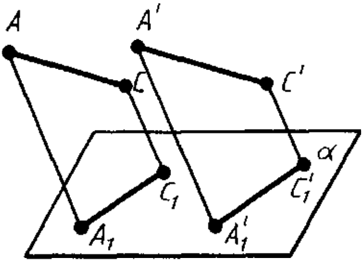


Рис. 338

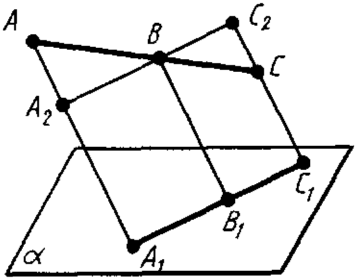


Рис. 339

З а д а ч а (37). Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Р е ш е н и е. При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
4. Докажите признак параллельности прямых.
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.
7. Какие плоскости называются параллельными?
8. Докажите признак параллельности плоскостей.
9. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
10. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
11. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.
12. Перечислите свойства параллельного проектирования.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещиваются.
2. Можно ли через точку C, не принадлежащую скрещивающимся прямым a и b, провести две различные прямые, каждая из которых пересекает прямые a и b? Объясните ответ.
3. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.
4. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

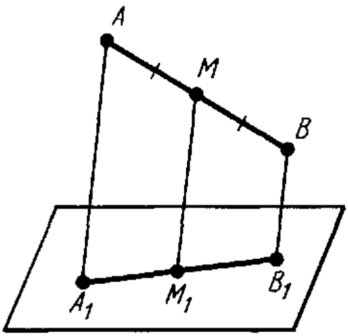


Рис. 340

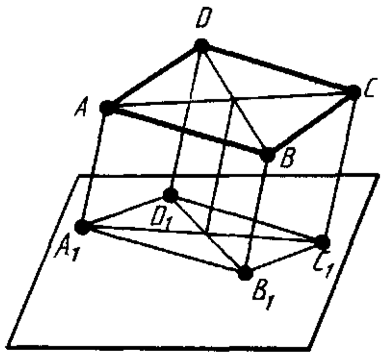


Рис. 341

5. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость (рис. 340) и если: 1) $AA_1=5$ м, $BB_1=7$ м; 2) $AA_1=3{,}6$ дм, $BB_1=4{,}8$ дм; 3) $AA_1=8{,}3$ см, $BB_1=4{,}1$ см; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$.

6*. Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.

7. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если: 1) $CC_1=15$ см, $AC:BC=2:3$; 2) $CC_1=8{,}1$ см, $AB:AC=11:9$; 3) $AB=6$ см, $AC:CC_1=2:5$; 4) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

8*. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 341). Найдите длину отрезка DD_1, если: 1) $AA_1=2$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=8$ м; 2) $AA_1=4$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=1$ м; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$.

9. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

10. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.

11. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

12*. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

13. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) $AB=15$ см, $AA_1:AC=2:3$; 2) $AB=8$ см, $AA_1:A_1C=5:3$; 3) $B_1C=10$ см, $AB:BC=4:5$; 4) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$.

14. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

15. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

16. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

17. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α (рис. 342).

18. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

19. Докажите, что через две скрещивающие прямые можно провести параллельные плоскости.

20. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых (рис. 343). Всегда ли это возможно?

21*. Докажите, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым (рис. 344).

22. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма (рис. 345).

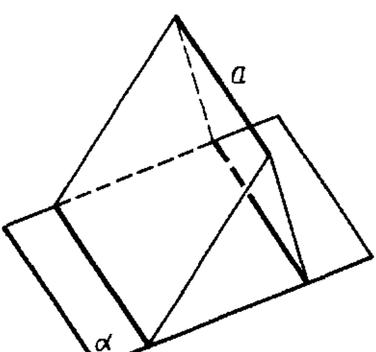


Рис. 342

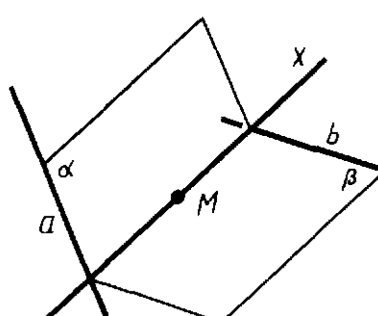


Рис. 343

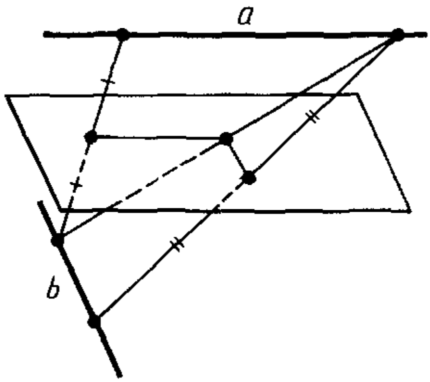


Рис. 344

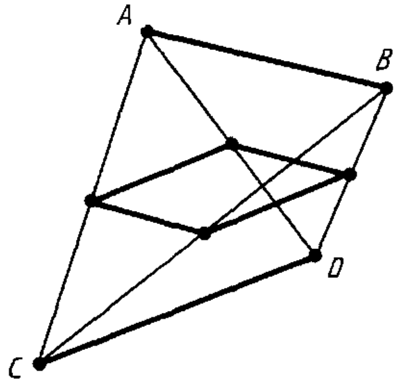


Рис. 345

23. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

24. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.

25. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

26. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?

27. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 тоже параллелограмм (рис. 346).

28. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в од-

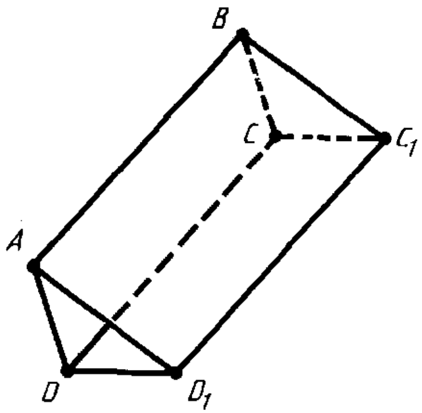


Рис. 346

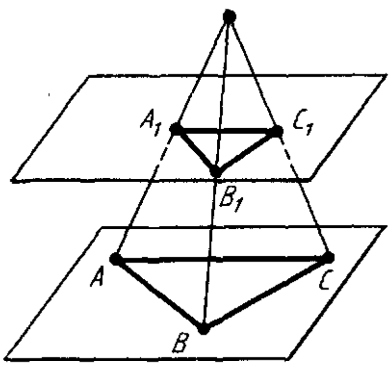


Рис. 347

ной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.

29. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

30. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 347).

31. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через точку A, тоже в вершинах параллелограмма (рис. 348).

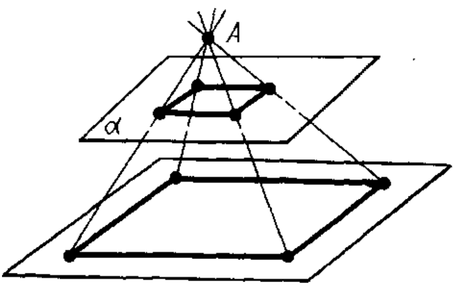


Рис. 348

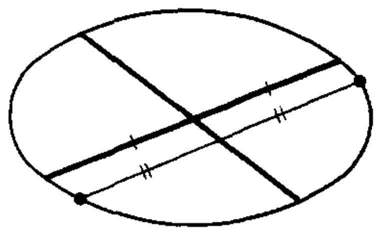


Рис. 349

32. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB=a$?

33*. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1:AX_2$ не зависит от взятой прямой.

34*. Точка A лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X' — точка отрезка AX, делящая его в отношении $m:n$. Докажите, что геометрическое место точек X' есть плоскость, параллельная плоскости α.

35*. Даны три параллельные плоскости α_1, α_2, α_3. Пусть X_1, X_2, X_3 — точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков

$X_1X_2:X_2X_3$ не зависит от прямой, т. е. одинаково для любых двух прямых.

36. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная данным прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.

37. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

38. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника?

39. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Объясните ответ.

40. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?

41. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

42*. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра (рис. 349). Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

§ 17. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

143. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же как и на плоскости, две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 17.1. ***Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть a и b — перпендикулярные прямые, a_1 и b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны.

Если прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости, то они обладают указанным в теореме свойством, как это известно из планиметрии.

Допустим теперь, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 — в некоторой плоскости α_1 (рис. 350). По теореме 16.4 плоскости α и α_1 параллельны. Пусть C — точка пересечения прямых a и b, а C_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведем в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечет прямые a и a_1 в точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем пря-

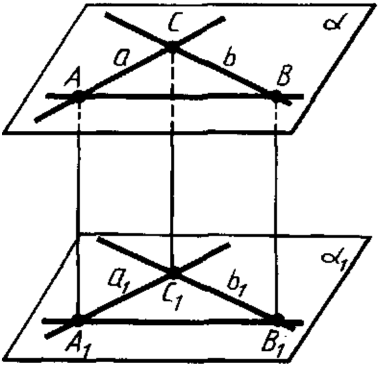


Рис. 350

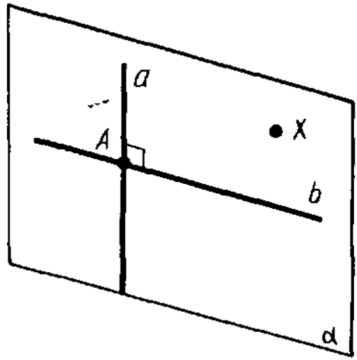


Рис. 351

мую, параллельную прямой CC_1, и обозначим через B и B_1 точки ее пересечения с прямыми b и b_1.

Четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 — параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны. Четырехугольник ABB_1A_1 также параллелограмм. У него стороны AA_1, BB_1 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой CC_1. Таким образом, четырехугольник лежит в плоскости, проходящей через параллельные прямые AA_1 и BB_1. А она пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Итак, угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB, прямой, т. е. прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Теорема доказана.

Задача (1). Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть a — прямая и A — точка на ней (рис. 351). Возьмем любую точку X вне прямой a и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (теорема 15.1). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a.

144. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения (рис. 352).

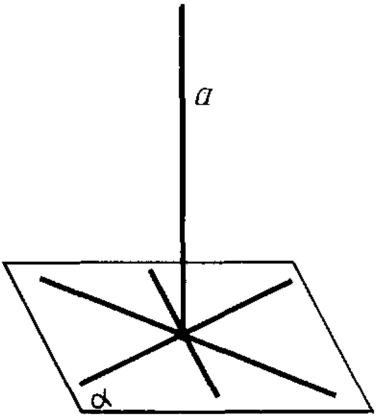


Рис. 352

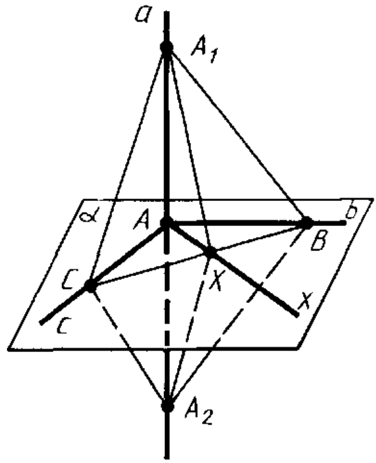


Рис. 353

Теорема 17.2. ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.***

Доказательство. Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c (рис. 353). Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1 = AA_2$). По той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX, A_2BX и, следовательно, равенство треугольников A_1BX и A_2BX по первому признаку равенства треугольников. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

145. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Задача (9). Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 354). Проведем через нее две плоскости и проведем в них через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a по теореме 17.2.

Докажем, что эта плоскость единственна. Допустим, что, кроме плоскости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 355). Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по различным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, так как на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Итак, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственна.

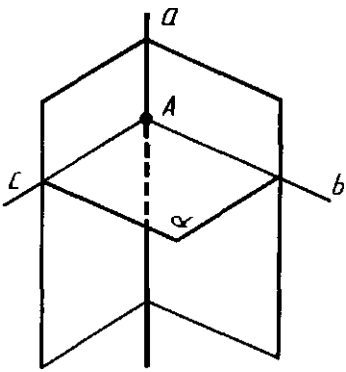


Рис. 354

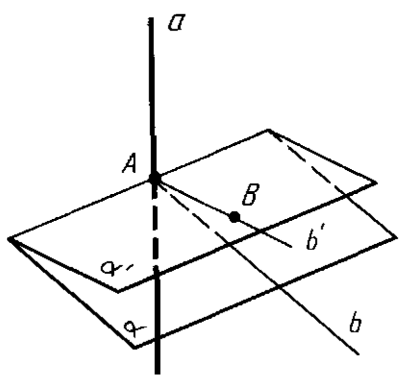


Рис. 355

Задача (11). Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 356). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендику-

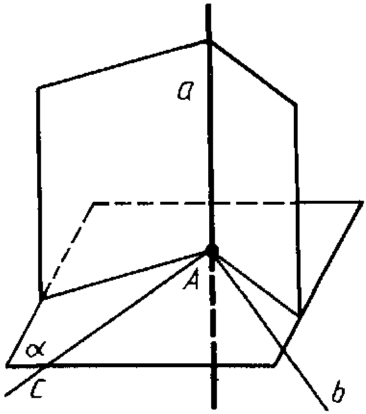


Рис. 356

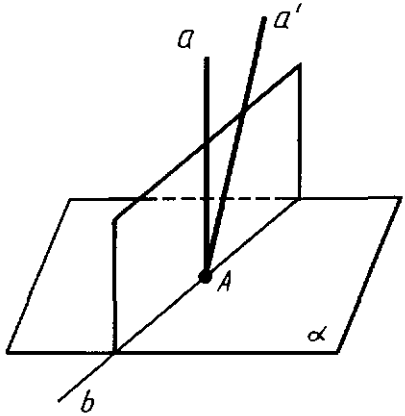


Рис. 357

лярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

Докажем, что эта прямая единственна. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 357). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это, как мы знаем, невозможно. Итак, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственна.

146. СВОЙСТВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Теорема 17.3. ***Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — две параллельные прямые и α — плоскость, перпендикулярная прямой a_1 (рис. 358). Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2.

Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с α прямую x_1, параллельную прямой x_2. Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 17.1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_2 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это

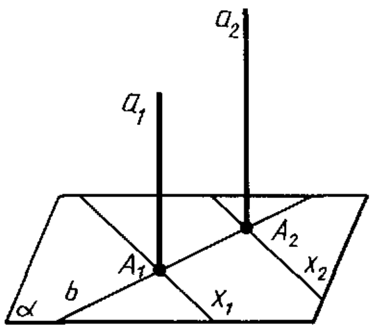


Рис. 358

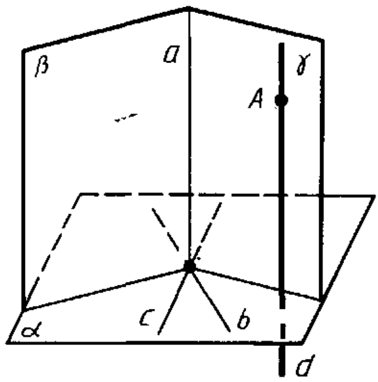


Рис. 359

значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Задача (12). Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение. Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c (рис. 359). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно. Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 17.3 она перпендикулярна плоскости α.

Теорема 17.4. ***Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.***

Доказательство. Пусть a и b — две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 360). Допустим, что прямые a и b не параллельны.

Выберем на прямой b точку C, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку C прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна плоскости α (теорема 17.3). Пусть B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α. Тогда прямая BB' перпендикулярна пересекающимся прямым b и b'. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

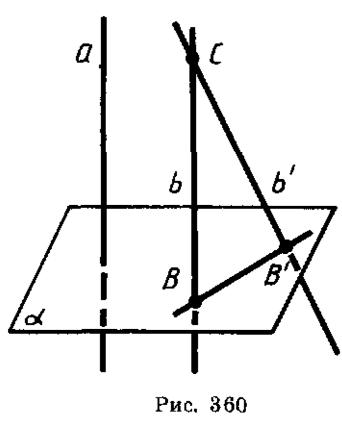


Рис. 360

147. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

На рисунке 361 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

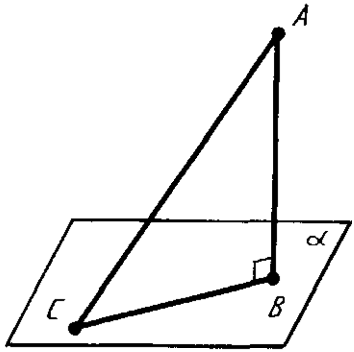


Рис. 361

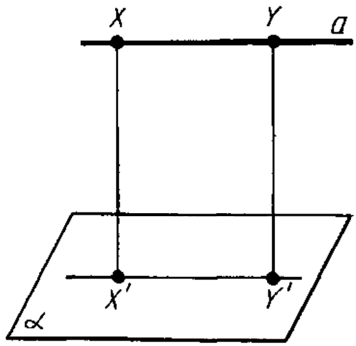


Рис. 362

Задача (26). Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Решение. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 362). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и YY', опущенных на эту плоскость. По теореме 17.4 прямые XX' и YY' параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой $X'Y'$. Прямая a параллельна прямой $X'Y'$, так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, у четырехугольника $XX'Y'Y$ противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а значит, $XX'=YY'$.

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Точно так же, как в решении задачи 26, доказывается, что расстояние от любых двух точек плоскости до параллельной плоскости равны. В связи с этим *расстоянием* между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

148. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Теорема 17.5. ***Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.*** И обратно: ***если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.***

Доказательство. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, проходящая через основание C наклонной (рис. 363). Проведем прямую CA', параллельную прямой AB. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые AB и $A'C$ плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA'. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично если прямая c перпендикулярна наклонной CA то она, будучи перпендикулярна и прямой CA', перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

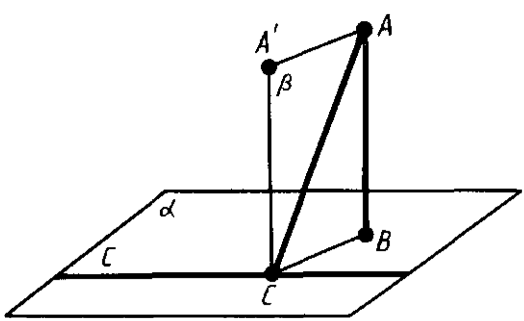


Рис. 363

Задача (45). Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Решение. Пусть A, B, C — точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S — точка на перпендикуляре (рис. 364). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина — расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора $SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$, где r — радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

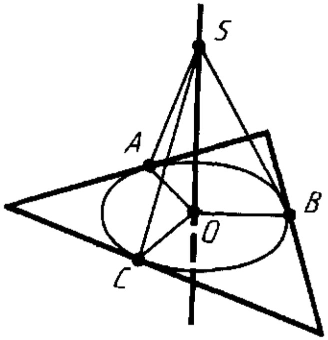


Рис. 364

149. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

На рисунке 365, a вы видите две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a и b.

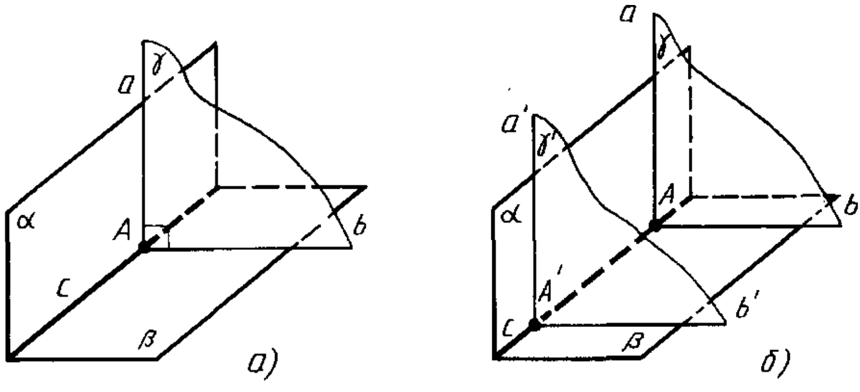


Рис. 365

Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Действительно, если взять другую плоскость γ', перпендикулярную прямой c, (рис. 365, *б*), то она пересечет плоскость α по прямой a', перпендикулярной c, а значит, параллельной прямой a, а плоскость β по прямой b', перпендикулярной c и, значит, параллельной прямой b. По теореме 17.1 из перпендикулярности прямых a и b следует перпендикулярность прямых a' и b', что и требовалось доказать.

Теорема 17.6. ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть α — плоскость, b — перпендикулярная ей прямая, β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 366). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны.

Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, перпендикулярную прямой c. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Так как прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β перпендикулярны. Теорема доказана.

Задача (54). Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

Решение. Через произвольную точку прямой a проводим прямую b (рис. 367), перпендикулярную плоскости α (задача 12). Через прямые a и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 17.6.

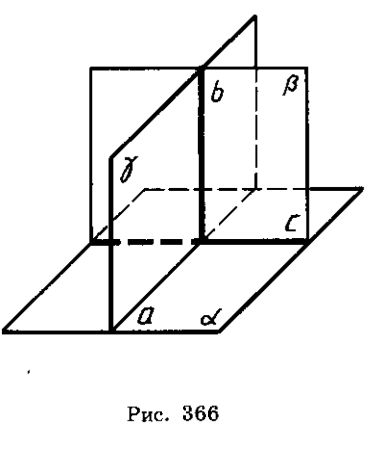


Рис. 366

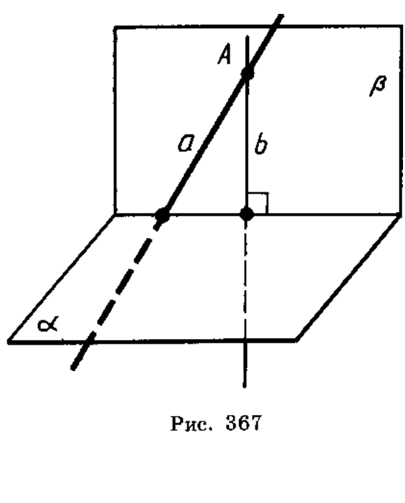


Рис. 367

150. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

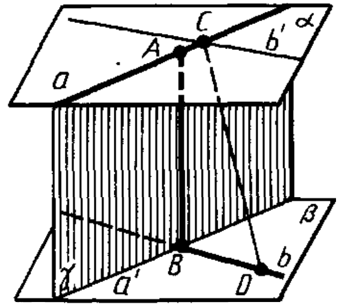


Рис. 368

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Докажем, что ***две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.***

Действительно, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 368). Проведем через них параллельные плоскости α и β. Прямые, пересекающие прямую a и перпендикулярные плоскости α, лежат в одной плоскости (γ). Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a', параллельной a. Пусть B — точка пересечения прямых a' и b. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, так как β параллельна α. Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

Докажем, что этот общий перпендикуляр единственный. Допустим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b', параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а значит, и b'. Так как она перпендикулярна прямой a, то она перпендикулярна плоскости α, а значит, параллельна прямой AB. Выходит, что через прямые AB и CD, как через параллельные, можно провести плоскость. В этой плоскости будут лежать наши скрещивающиеся прямые AC и BD, а это невозможно, что и требовалось доказать.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

151. ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ ЧЕРЧЕНИИ

В черчении применяется ортогональное проектирование, т. е. параллельное проектирование прямыми, перпендикулярными плоскости проекции. Чертежи деталей машин получаются путем ортогонального проектирования на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости. Эти плоскости называются плоскостями проекций. Плоскости проекций с проекциями изображаемой детали на них совмещаются поворотом около прямых, по которым они пересекаются.

На рисунке 369 показано выполнение чертежа болта путем проектирования на две плоскости: горизонтальную *H* и вертикальную *V*. Чертеж болта в двух проекциях показан на рисунке 370.

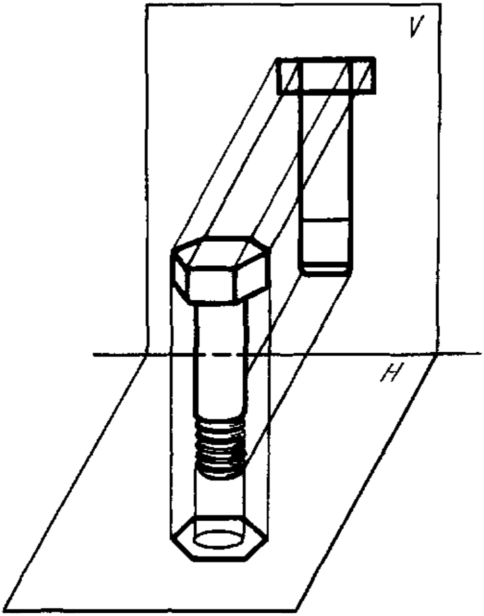


Рис. 369

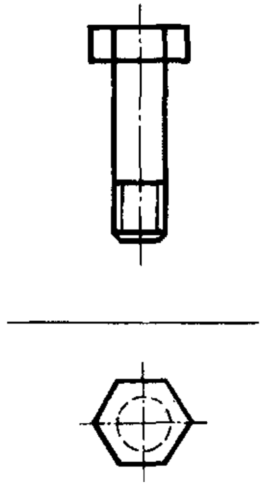


Рис. 370

При выполнении чертежей деталей машин пользуются различными условностями, предусмотренными стандартом. В частности, резьба условно изображается сплошной тонкой линией, а центровые и осевые — штрихпунктирными линиями. Эти условности изображения применены на чертеже болта (рис. 370).

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Докажите, что пересекающиеся прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

3. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
7. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
9. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
10. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
11. Какие плоскости называются перпендикулярными?
12. Докажите признак перпендикулярности плоскостей.
13. Что такое общий перпендикуляр скрещивающихся прямых?
14. Докажите, что скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.
15. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.
2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.
3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны (рис. 371). Найдите отрезок CD, если: 1) $AB=3$ см, $BC=7$ см, $AD=1{,}5$ см; 2) $BD=9$ см, $BC=16$ см, $AD=5$ см; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.
4*. Стороны четырехугольника $ABCD$ и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
5. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной плоскости.
6. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника (рис. 372).

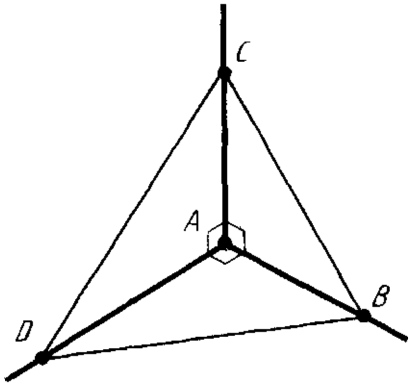


Рис. 371

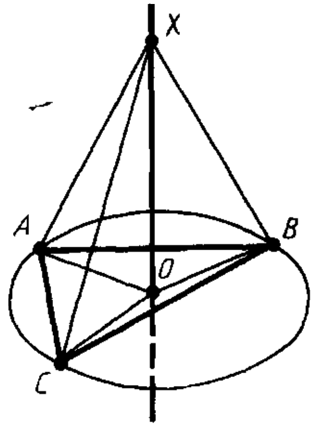


Рис. 372

7. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.
8. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.
9. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.
10. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.
11. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.
12. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.
13. Через вершину квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что: 1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM; 2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.
14. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC=3$ м, $BD=2$ м, $CD=2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.
15. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной.

Высота одного столба 5,8 м, а другого — 3,9 м. Найдите длину перекладины.

16. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

17. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

18. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

19. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.

20*. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

21. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

22. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.

23. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

24. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см; 2) наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

25. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.

26. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

27. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

28. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диа-

гоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

29. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB (рис. 373). Чему равно расстояние CD, если $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$?

30. Докажите, что расстояния от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.

31. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длины b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

32. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

33. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3:7?

34. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

35. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

36. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.

37*. Решите предыдущую задачу, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.

38. Отрезок длины 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

39*. Через основание трапеции проведена плоскость, отстоящая от другого основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m:n$ (рис. 374).

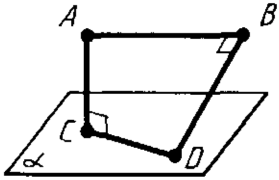


Рис. 373

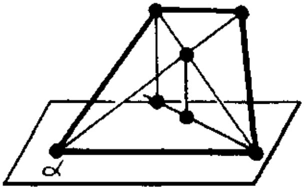


Рис. 374

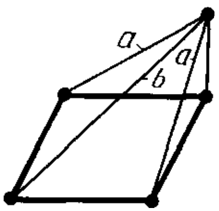


Рис. 375

40. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.

41. Из вершины квадрата восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b $(a<b)$. Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата (рис. 375).

42. Из вершины прямоугольника восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c $(a<c,\ b<c)$. Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.

43. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60°, а их проекции перпендикулярны.

44. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60°.

45. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

46. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восставлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

47. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон — 6,1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD=13$ см, $BC=6$ см.

49. Через конец A отрезка AB длины b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

50. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

51*. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

52*. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

53. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восставлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$.

54. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

55. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

56. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB=2$ м, $CA_1=3$ м, $CB_1=7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

57. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C=4$ м, $A_1A=$ $=3$ м, $B_1C=6$ м, $B_1B=2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

58*. Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

59. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC=6$ м, $BD=7$ м, $CD=6$ м; 2) $AC=3$ м, $BD=4$ м, $CD=12$ м; 3) $AD=4$ м, $BC=7$ м, $CD=1$ м; 4) $AD=BC=5$ м, $CD=1$ м; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.

60. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей (рис. 376).

61. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая на 1,2 м от нее. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

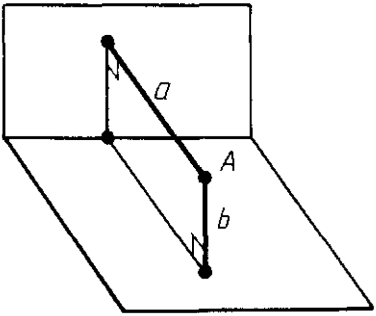


Рис. 376

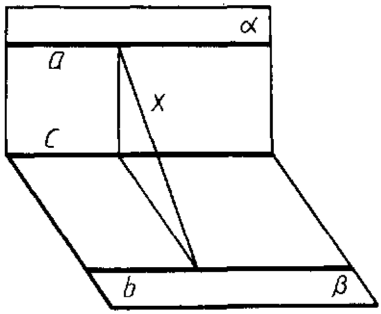


Рис. 377

62. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, в плоскости β — прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c — 0,8 м (рис. 377).

§ 18. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

152. ВВЕДЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 378). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями* (или *осями координат*), точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, yz и xz — *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые — полуоси, которые мы условимся называть положительной и отрицательной.

Возьмем теперь произвольную точку A и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 379). Она пересекает ось x в некоторой точке A_x. *Координатой* x точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x: положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то полагаем $x=0$. Аналогично определяются координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A(x; y; z)$. Иногда будем обозначать точку просто ее координатами $(x; y; z)$.

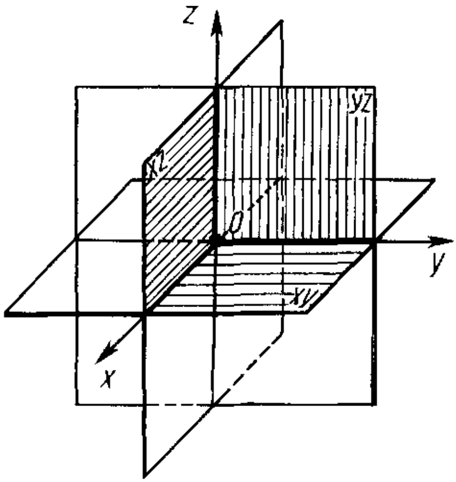


Рис. 378

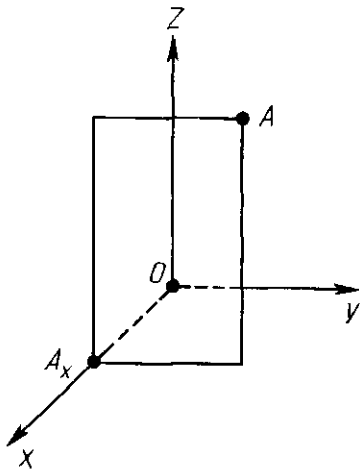


Рис. 379

Задача (2). Даны точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

Решение. У точек плоскости xy координата z равна нулю. Поэтому только точка D лежит в плоскости xy. У точек плоскости yz координата x равна нулю. Следовательно, точки B и C лежат в плоскости yz. У точек на оси z две координаты (x и y) равны нулю. Поэтому только точка C лежит на оси z.

153. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Выразим расстояние между двумя точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z (рис. 380). Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках A_1' и A_2'. Эти точки имеют те же координаты x, y,

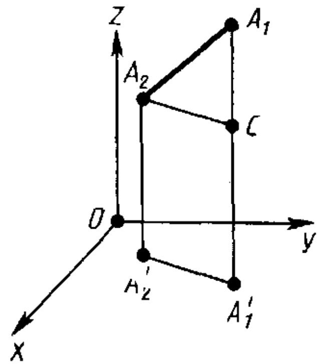


Рис. 380

что и точки A_1, A_2, а координата z у них равна нулю. Проведем теперь плоскость через точку A_2, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую A_1A_1' в некоторой точке C. По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Отрезки CA_2 и $A_1'A_2'$ равны, а

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Длина отрезка A_1C равна $|z_1 - z_2|$. Поэтому

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Тот же результат дает и полученная формула, так как в этом случае $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Таким образом, ***расстояние между точками A_1 и A_2 вычисляется по формуле***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача (5). В плоскости xy найти точку $D\,(x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех точек: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(-1;\ 0;\ 1)$, $C\,(0;\ -1;\ 0)$.

Решение. Имеем:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Приравнивая первые два расстояния третьему, получим два уравнения для определения x и y:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Отсюда $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Искомая точка $D\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$.

154. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Пусть $A_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две произвольные точки. Выразим координаты x, y, z середины C отрезка A_1A_2 через координаты его концов A_1 и A_2 (рис. 381). Для этого проведем через точки A_1, A_2 и C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $A_1'\,(x_1;\ y_1;\ 0)$, $A_2'\,(x_2;\ y_2;\ 0)$ и $C'\,(x;\ y;\ 0)$. По теореме Фалеса точка C' является серединой отрезка $A_1'A_2'$. А мы знаем, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Для того чтобы найти выражение для z, достаточно вместо плоскости xy взять плоскость xz или yz. При этом для z получается аналогичная формула:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

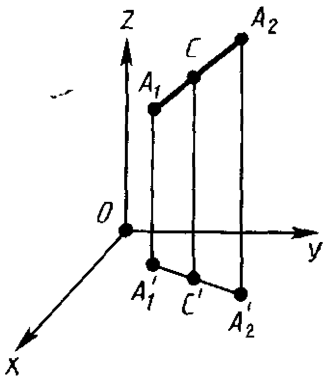


Рис. 381

Задача (9). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (1; 3; 2), B (0; 2; 4), C (1; 1; 4), D (2; 2; 2) является параллелограммом.

Решение. Как мы знаем, четырехугольник, у которого диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, есть параллелограмм. Воспользуемся этим для решения задачи. Координатами середины отрезка AC будут

$$x=\frac{1+1}{2}=1, \quad y=\frac{3+1}{2}=2, \quad z=\frac{2+4}{2}=3.$$

Координатами середины отрезка BD будут

$$x=\frac{0+2}{2}=1, \quad y=\frac{2+2}{2}=2, \quad z=\frac{4+2}{2}=3.$$

Мы видим, что координаты середин отрезков AC и BD одинаковы. Значит, эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

155. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Так же, как и на плоскости, определяются преобразования симметрии относительно точки и прямой.

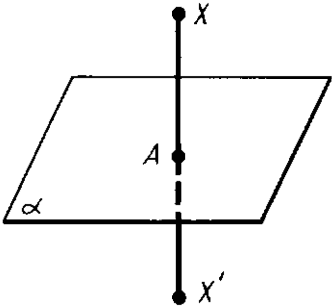


Рис. 382

Кроме симметрий относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 382). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр XA на плоскость α и на его продолжении за точку A откладываем отрезок AX', равный XA. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно плоскости α, а преобразование, которое переводит точку X в симметричную ей точку X', называется *преобразованием симметрии относительно плоскости* α.

Если точка X лежит в плоскости α, то считается, что точка X переходит в себя. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии* этой фигуры.

Задача (17). Даны точки (1; 2; 3), (0; —1; 2), (1; 0; —3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение. Точка, симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy. Поэтому у нее те же координаты x и y: $x=1$, $y=2$. Симметричная точка находится на том же расстоянии от плоскости xy, но по другую сторону от нее. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, т. е. $z=-3$. Итак, точкой, симметричной точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, будет (1; 2; —3). Для других точек и других координатных плоскостей решение аналогично.

156. СИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И НА ПРАКТИКЕ

Симметрия широко распространена в природе. Ее можно наблюдать в форме листьев и цветов растений, в расположении различных органов животных, в форме кристаллических тел (рис. 383).

Симметрия широко используется на практике, в строительстве и технике (рис. 384).

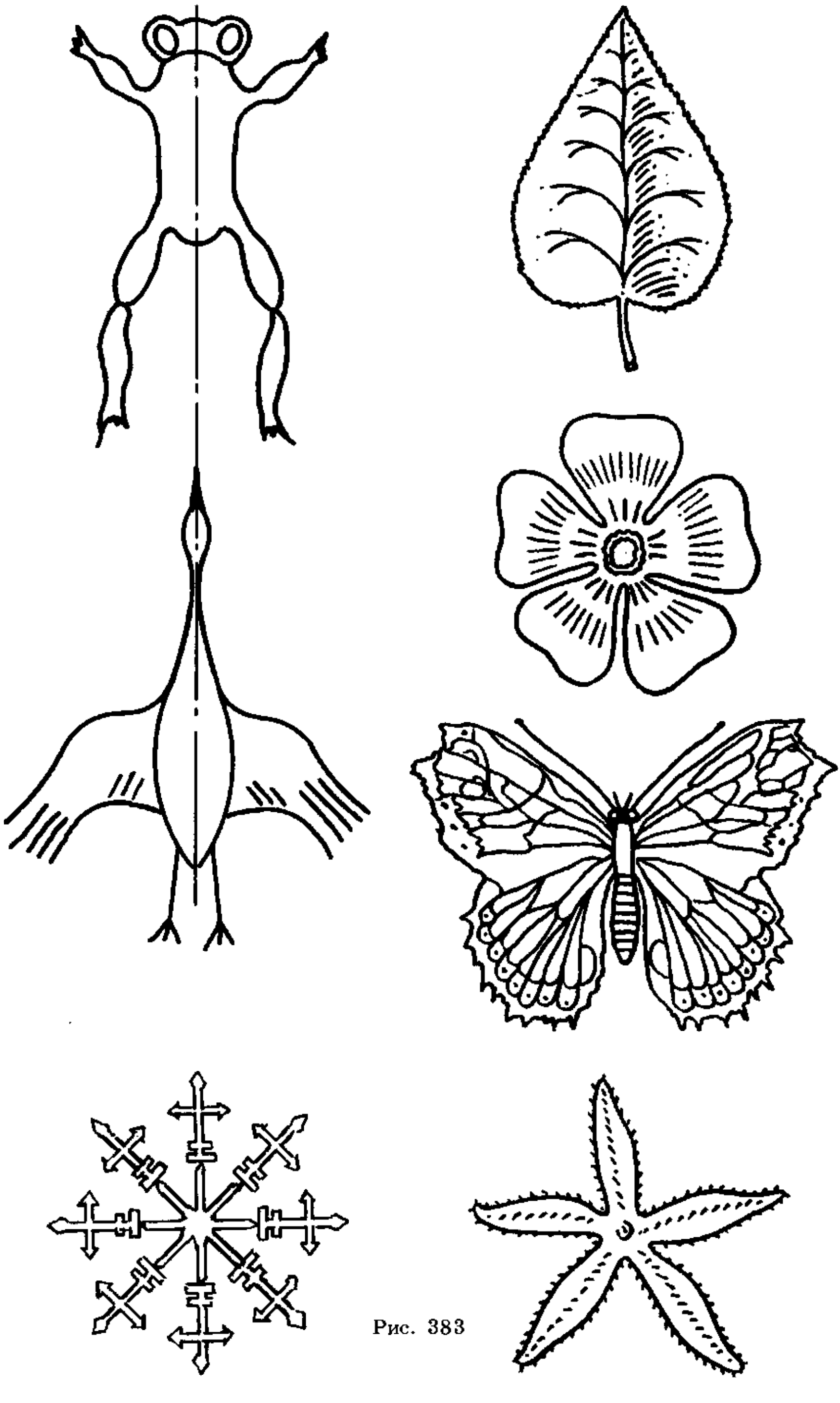


Рис. 383

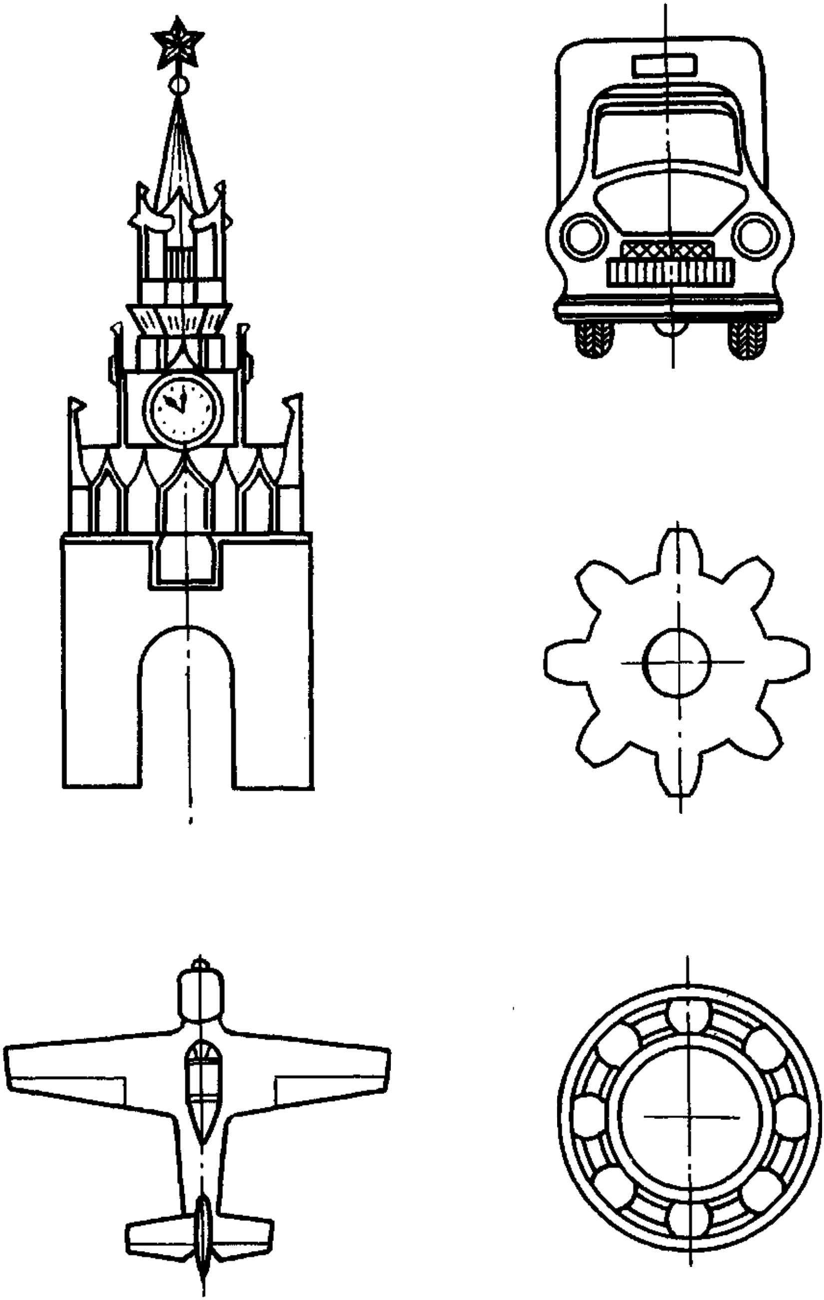


Рис. 384

157. ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Движение в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: *движением* называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что ***движение переводит плоскости в плоскости.***

Докажем это свойство. Пусть α — произвольная плоскость (рис. 385). Отметим на ней любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Проведем через них плоскость α'.

Докажем, что при рассматриваемом движении плоскость α переходит в плоскость α'.

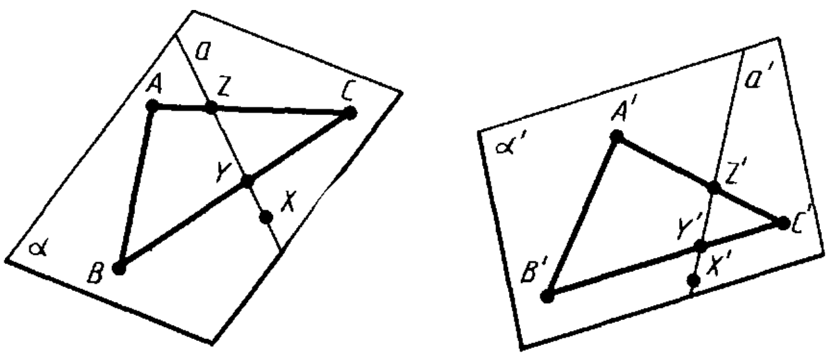


Рис. 385

Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее какую-нибудь прямую a в плоскости α, пересекающую треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут в точки Y' и Z', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, плоскости α'.

Итак, прямая a' лежит в плоскости α'. Точка X при движении переходит в точку X' прямой a', а значит, и плоскости α', что и требовалось доказать.

В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются *равными*, если они совмещаются движением.

158. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС В ПРОСТРАНСТВЕ

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x;\ y;\ z)$ фигуры переходит в точку $(x+a;\ y+b;\ z+c)$, где числа a, b, c одни и те же для всех точек $(x;\ y;\ z)$. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x;\ y;\ z)$ при параллельном переносе. Так же, как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Задача (23). Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка $A\ (1;\ 0;\ 2)$ переходит в точку $A'\ (2;\ 1;\ 0)$.

Решение. Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', т. е. $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$, получим уравнения, из которых определяются a, b, c:

$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Отсюда $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

5. ***При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.***

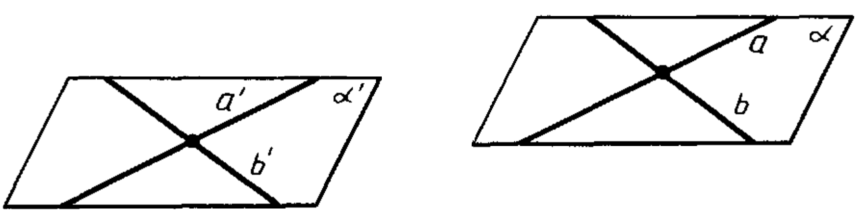


Рис. 386

Действительно, пусть α — произвольная плоскость (рис. 386). Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то по теореме 16.4 она параллельна α, что и требовалось доказать.

159. ПОДОБИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: преобразование фигуры F называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. для любых двух точек X и Y фигуры F и точек X', Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = k \cdot XY$.

Так же, как и на плоскости, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и сохраняет углы между полупрямыми. Такими же рассуждениями, как в п. 157, доказывается, что преобразование подобия переводит плоскости в плоскости. Так же, как и на плоскости, две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Простейшим преобразованием подобия в пространстве является гомотетия. Так же, как и на плоскости, *гомотетия* относительно центра O с коэффициентом гомотетии k — это преобразование, которое переводит произвольную точку X в точку X' луча OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя при $k = 1$).

Действительно, пусть O — центр гомотетии и α — любая плоскость, не проходящая через точку O (рис. 387). Возьмем любую прямую AB в плоскости α. Преобразование гомотетии переводит точку A в точку A' на луче OA, а точку B в точку B' на луче OB, причем $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, где k — коэффициент гомотетии. Отсюда следует подобие треугольников AOB и $A'OB'$. Из подобия треугольников следует равенство соответственных углов OAB и $OA'B'$, а значит, параллельность прямых AB и $A'B'$.

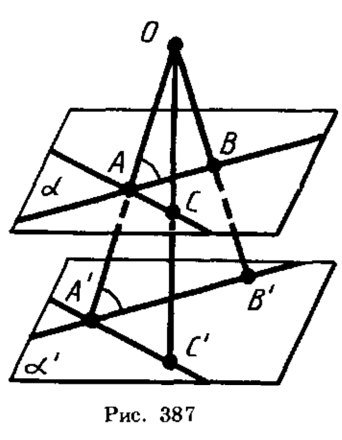


Рис. 387

Возьмем теперь другую прямую AC в плоскости α. Она при гомотетии перейдет в параллельную прямую $A'C'$. При рассматриваемой гомотетии плоскость α перейдет в плоскость α', проходящую через прямые $A'B'$, $A'C'$. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, то по теореме 16.4 плоскости α и α' параллельны, что и требовалось доказать.

160. УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению. Угол между параллельными прямыми считаем равным нулю.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые. Докажем это.

Пусть a_1 и b_1 — пересекающиеся в точке A прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым a и b (рис. 388). Пусть a_2 и b_2 — другие прямые, параллельные данным и пересекающиеся в точке B. По теореме 16.2 прямые a_1 и a_2 параллельны (или совпадают) и прямые b_1 и b_2 параллельны (или совпадают).

Выполним параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Так как при параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую, то указанный параллельный перенос переводит прямую a_1

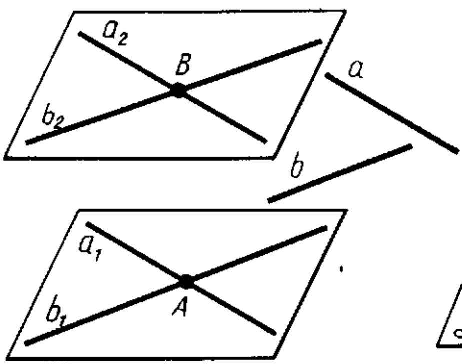


Рис. 388

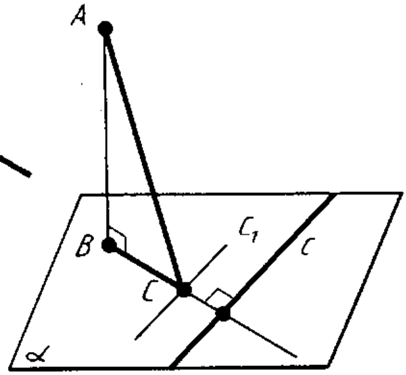


Рис. 389

в прямую a_2, а прямую b_1 в прямую b_2. Так как параллельный перенос сохраняет величину угла, то угол между прямыми a_1 и b_1 равен углу между прямыми a_2 и b_2. А это и требовалось доказать.

По данному раиее определению перпендикулярными называются прямые, пересекающиеся под прямым углом. Одиако иногда скрещивающиеся прямые тоже называются перпеидикулярными, если угол между ними равен 90°.

З а д а ч а (33). Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратио: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Р е ш е н и е. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, перпеидикулярная BC (рис. 389). Проведем через основание C наклонной прямую $c_1 \parallel c$.

По теореме о трех перпендикулярах c_1 перпеидикуляриа наклониой AC. А так как угол между прямой c и наклонной AC равен углу между прямыми AC и c_1, то прямая c тоже перпендикулярна наклонной AC.

Обратно: если прямая c перпендикулярна наклонной AC, то прямая c_1 тоже перпендикулярна ей, а значит, по теореме о трех перпендикулярах и ее проекции BC. Так как $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

161. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Определим понятие угла между прямой и плоскостью.

Пусть α — плоскость и a — пересекающая ее прямая, не перпендикулярная плоскости α (рис. 390). Основаиия перпеидикуляров, опущенных из точек прямой a на плоскость α, лежат на прямой a'. Эта прямая называется *проекцией* прямой a иа плоскость α. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол считается равным 90°. Если параллельна, то 0°. Так как прямая a, ее проекция a' на плоскость α и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой a лежат в одной плоскости, то *угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.*

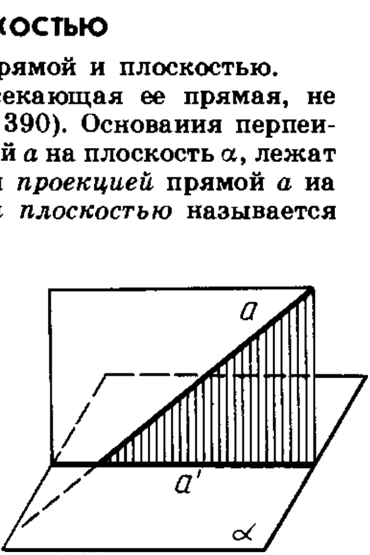


Рис. 390

З а д а ч а (35). Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

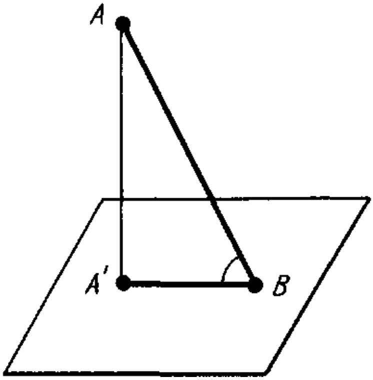


Рис. 391

Р е ш е н и е. Опустим перпендикуляр AA' на плоскость (рис. 391). Треугольник $AA'B$ прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Острый угол этого треугольника, противолежащий катету AA', равен 30° (соответственно 45°, 60°). Поэтому в первом случае наклонная $AB=\frac{AA'}{\sin 30^\circ}=2h$. Во втором случае $AB=h\sqrt{2}$, в третьем $AB=\frac{2h}{\sqrt{3}}$.

162. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Определим понятие угла между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями* (рис. 392).

Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости. Докажем это.

Пусть α и β — данные плоскости, пересекающиеся по прямой c. Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.

Возьмем другую секущую плоскость γ', перпендикулярную прямой c. Пусть a' и b' — прямые пересечения этой плоскости с плоскостями α и β.

Выполним параллельный перенос, при котором точка пересечения плоскости γ с прямой c переходит в точку пересечения плоскости γ' с прямой c. При этом по свойству параллельного переноса прямая a переходит в прямую a', а прямая b — в прямую b'.

Это значит, что углы между прямыми a и b, a' и b' равны, что и требовалось доказать.

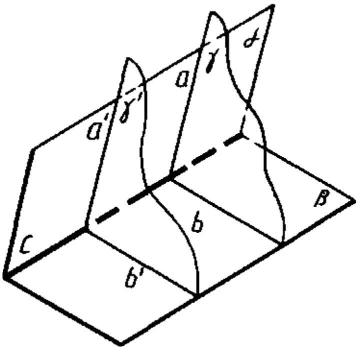


Рис. 392

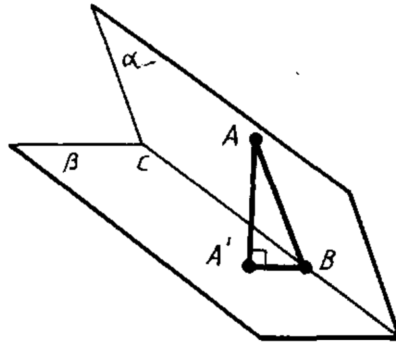


Рис. 393

Задача (43). Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение. Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 393). Опустим перпендикуляр AA' на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах $A'B \perp c$. Плоскость треугольника ABA' перпендикулярна прямой c и потому угол при вершине B прямоугольного треугольника ABA' равен 30°. Имеем:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Расстояние от точки A до прямой c равно $2a$.

163. ПЛОЩАДЬ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Теорема 18.1. ***Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.***

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон (рис. 394). Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости α. Проведем высоту CD треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем:

$$C_1D = CD \cos \varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Отсюда

$$S_{ABC_1} = S_{ABC} \cos \varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема верна. Теорема верна и в случае, когда вместо плоскости α взята любая параллельная ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости ее проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещаемые параллельным переносом фигуры равны.

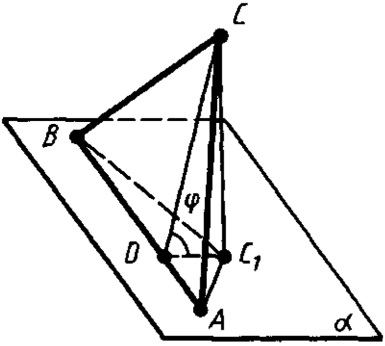


Рис. 394

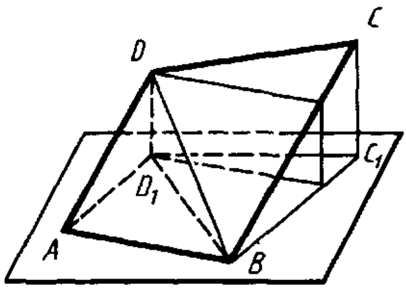


Рис. 395

Рассмотрим теперь общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, мы разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 395.

Теперь для каждого треугольника Δ нашего разбиения и его проекции Δ' запишем равенство $S_{\Delta'} = S_{\Delta} \cos \varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Тогда получим слева площадь проекции многоугольника, а справа площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos \varphi$. Теорема доказана.

164. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве, как и на плоскости, *вектором* называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ называются числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. Так же, как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты и, обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ или просто $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$.

Задача (50). Даны четыре точки $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$, $D(-2;\ 3;\ -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Решение. Надо найти координаты указанных векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\overline{AB}$ координаты: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. У вектора $\overline{DC}$ такие же координаты: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны. Другой парой равных векторов будут $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

165. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же, как и на плоскости, определяются действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$.

Так же, как и на плоскости, доказывается векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Произведением вектора $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{a}=\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)}$.

Так же, как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\,|\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$.

З а д а ч а (54). Дан вектор $\bar{a}\,(1;\ 2;\ 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A\,(1;\ 1;\ 1)$ и концом B на плоскости xy.

Р е ш е н и е. Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}$: $x-1,\ y-1,\ 0-1=-1$. Из коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Скалярным произведением векторов $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$ и $\overline{(b_1;\ b_2;\ b_3)}$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

З а д а ч а (59). Даны четыре точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Р е ш е н и е. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$
$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Координатами вектора $\overline{CD}$ будут

$$2-3=-1,\ -3-1=-4,\ 1-0=1;$$
$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Значит,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\ |\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве.
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.

4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?
7. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
8. Какие фигуры в пространстве называются равными?
9. Дайте определение параллельного переноса.
10. Перечислите свойства параллельного переноса.
11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Что такое преобразование подобия? Перечислите его свойства.
13. Какое преобразование называется гомотетией? Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя).
14. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
15. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
16. Дайте определение угла между плоскостями.
17. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
18. Что такое абсолютная величина вектора? Какие векторы называются одинаково направленными?
19. Дайте определение координат вектора с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.
20. Дайте определение действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.

ЗАДАЧИ

1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?
2. Даны точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$, $D(1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?
3. Дана точка $A(1;\ 2;\ 3)$. Найдите основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.
4. Найдите расстояния от точки $(1;\ 2;\ -3)$ до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.

5. В плоскости xy найдите точку $D(x; y; 0)$, равноудаленную от трех данных точек: $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; -1; 0)$.
6. Найдите точки, равноотстоящие от точек $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 0; 0)$ и отстоящие от плоскости yz на расстояние 2.
7. На оси x найдите точку $C(x; 0; 0)$, равноудаленную от двух точек $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 3)$.
8. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(1; 2; 3)$ и начала координат.
9. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$ является параллелограммом.
10. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: 1) $A(0; 2; -3)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(2; -2; -1)$, $D(3; -1; -5)$; 2) $A(2; 1; 3)$, $B(1; 0; 7)$, $C(-2; 1; 5)$, $D(-1; 2; 1)$.
11. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если: 1) $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$; 2) $A(0; 2; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$.
12. Даны один конец отрезка $A(2; 3; -1)$ и его середина $C(1; 1; 1)$. Найдите второй конец отрезка $B(x; y; z)$.
13. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны: 1) $A(2; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 1; 0)$; 2) $A(1; -1; 0)$, $B(0; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$; 3) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; 2)$, $C(-4; 2; 1)$.
14. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $A(a; c; -b)$ и $B(-a; d; b)$ лежит на оси y.
15. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $C(a; b; c)$ и $D(p; q; -c)$ лежит в плоскости xy.
16. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатной плоскости xy задается формулами $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$.
17. Даны точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.
18. Даны точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.
19. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки есть движение.
20*. Докажите, что преобразование симметрии относительно плоскости есть движение.
21. Докажите, что при движении в пространстве круг переходит в круг того же радиуса.
22. Докажите, что при движении в пространстве три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой.

23. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, если при этом параллельном переносе точка $A(1;\ 0;\ 2)$ переходит в точку $A'(2;\ 1;\ 0)$.

24. При параллельном переносе точка $A(2;\ 1;\ -1)$ переходит в точку $A'(1;\ -1;\ 0)$. В какую точку переходит начало координат?

25. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если:
1) $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$;
2) $A(-2;3;5)$, $B(1;2;4)$, $C(4;-3;6)$, $D(7;-2;5)$;
3) $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$;
4) $A(1;1;0)$, $B(0;0;0)$, $C(-2;2;1)$, $D(1;1;1)$?

26. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.

27. Четыре параллельные прямые пересекают параллельные плоскости в вершинах параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом.

28. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия.

29. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

30. Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b перпендикулярна этой плоскости. Чему равен угол между прямыми a и b?

31*. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Чему равен угол между прямыми CA и CB, если эти прямые образуют углы α и β с прямой AB и $\alpha+\beta<90°$?

32. Прямые a, b, c параллельны одной и той же плоскости. Чему равен угол между прямыми b и c, если углы этих прямых с прямой a равны 60° и 80°?

33. Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

34. 1) Докажите, что прямая, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.
2) Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные прямые, пересекает их под равными углами.

35. Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

36. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью угол, равный: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

37. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость, концы его находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

38. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных (рис. 396).

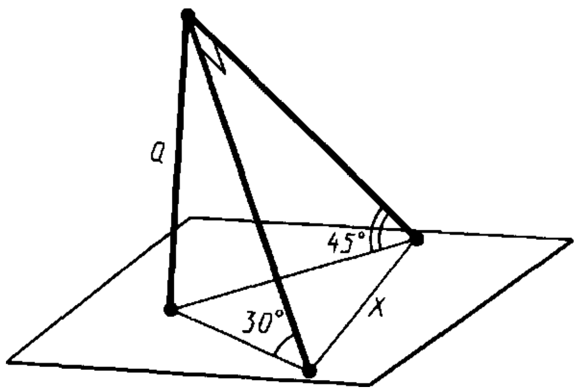


Рис. 396

39. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45°, а между собой угол 60°. Найдите расстояние между концами наклонных.

40. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные под углом 30° к плоскости, причем их проекции образуют угол 120°. Найдите расстояние между концами наклонных.

41. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45° ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.

42. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.

43. Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

44. Найдите угол между плоскостями, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

45. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60°. Общее основание равно 16 м, боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

46. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в различных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите $\cos\alpha$, если:
1) $AB=24$ см, $AC=13$ см, $AD=37$ см, $CD=35$ см;
2) $AB=32$ м, $AC=65$ м, $AD=20$ м, $CD=63$ м.

47. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.

48. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

49. 1) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC из задачи 46 на плоскость треугольника ABD.
2) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABD из задачи 46 на плоскость треугольника ABC.

50. Даны четыре точки $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$, $D(-2;\ 3;\ -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

51. Даны три точки $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Найдите точку $D(x;\ y;\ z)$, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

52. Найдите точку D в задаче 51, если сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулю.

53. Даны векторы $\overline{(2;\ n;\ 3)}$ и $\overline{(3;\ 2;\ m)}$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

54. Дан вектор $\bar{a}(1;\ 2;\ 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A(1;\ 1;\ 1)$ и концом B на плоскости xy.

55. При каком значении n данные векторы перпендикулярны:
1) $\bar{a}(2;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ n)$; 2) $\bar{a}(n;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}(n;\ -n;\ 1)$;
3) $\bar{a}(n;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}(n;\ 2n;\ 4)$; 4) $\bar{a}(4;\ 2n;\ -1)$, $\bar{b}(-1;\ 1;\ n)$?

56. Даны три точки $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Найдите на оси z такую точку $D(0;\ 0;\ c)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

57*. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\bar{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

58*. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол φ между векторами: 1) $\bar{a}$ и $\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}$ и $\bar{b}-\bar{c}$.

59. Даны четыре точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

60. Даны три точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

61*. Докажите, что угол φ между прямыми, содержащими векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, определяется из уравнения

$$|\bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\varphi.$$

62*. Из вершины прямого угла A треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β (рис. 397).

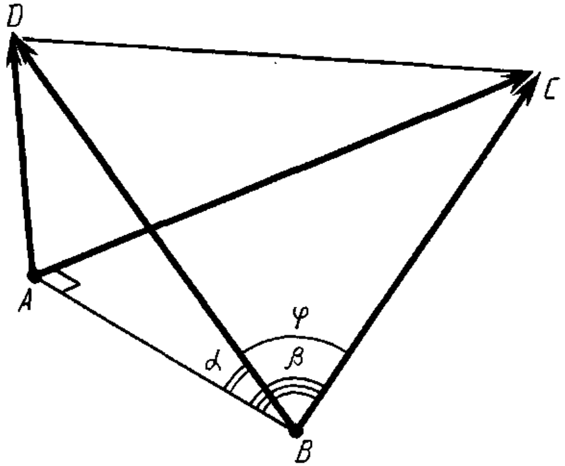


Рис. 397

63. Наклонная образует угол $45°$ с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом $45°$ к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной.

64*. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными β.

11 класс

§ 19. МНОГОГРАННИКИ

166. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 398). Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом* двугранного угла.

За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, а значит, равны. Поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

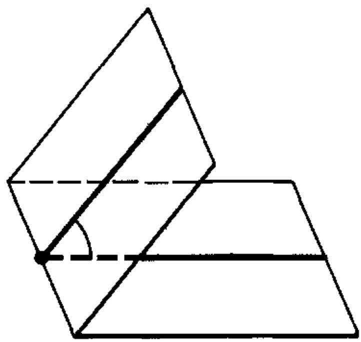


Рис. 398

З а д а ч а (1). Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ и двугранный угол равен α (рис. 399).

Р е ш е н и е. Проведем прямые $A_1C \parallel BB_1$ и $BC \parallel A_1B_1$. Четырехугольник A_1B_1BC — параллелограмм, значит $A_1C=BB_1=b$. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости

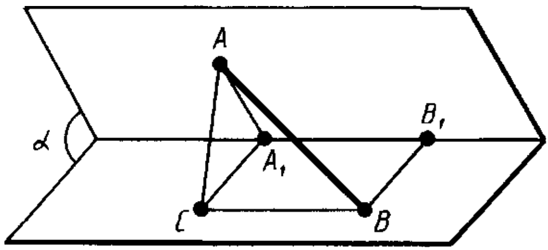


Рис. 399

треугольника AA_1C, так как она перпендикулярна двум прямым в этой плоскости AA_1 и CA_1. Следовательно, параллельная ей прямая BC тоже перпендикулярна этой плоскости. Значит, треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C. По теореме косинусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

167. ТРЕХГРАННЫЙ И МНОГОГРАННЫЙ УГЛЫ

Рассмотрим три луча a, b, c, исходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости. *Трехгранным углом* (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) (рис. 400). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

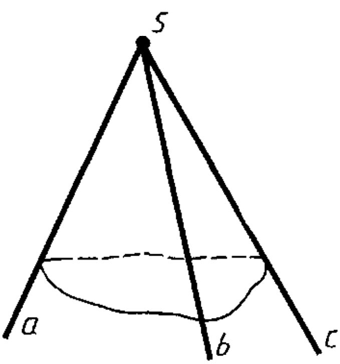


Рис. 400

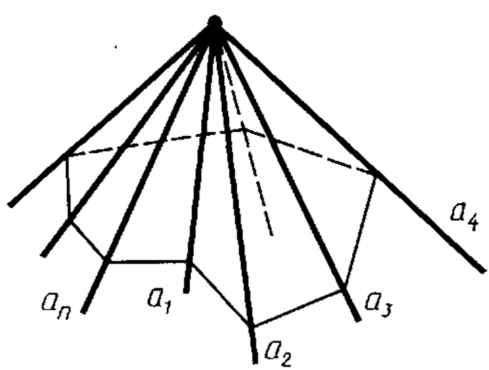


Рис. 401

Аналогично определяется понятие многогранного угла (рис. 401).

Задача (2). У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\gamma\left(\varphi,\ \gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла: $\alpha=\angle(ab)$, $\beta=\angle(ac)$.

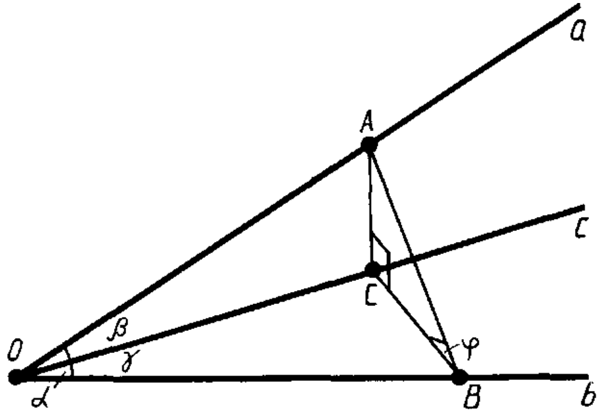


Рис. 402

Решение. Опустим из произвольной точки A ребра a перпендикуляр AB на ребро b и перпендикуляр AC на ребро c (рис. 402). По теореме о трех перпендикулярах CB — перпендикуляр к ребру b.

Из прямоугольных треугольников OAB, OCB, AOC и ABC получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=AB:OB=\frac{BC}{\cos\varphi}:\frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta=AC:OC=BC\operatorname{tg}\varphi:\frac{BC}{\sin\gamma}=\operatorname{tg}\varphi\sin\gamma.$$

Замечание. Полученные зависимости между углами α, β, γ, φ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},\ \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\varphi\sin\gamma\ —$$

позволяют, зная два угла, найти два других.

168. МНОГОГРАННИК

В стереометрии изучаются фигуры в пространстве, называемые телами. Наглядно (геометрическое) тело надо представлять себе как часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью.

Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 403). Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется *гранью*. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются *ребрами многогранника*, а вершины — *вершинами многогранника*.

Поясним сказанное на примере знакомого вам куба (рис. 404). Куб есть выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов: $ABCD$, $BEFC$, ... Они являются его гранями. Ребрами куба являются стороны этих квадратов: AB, BC, BE, ... Вершинами куба являются вершины квадратов: A, B, C, D, E, ... У куба шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин.

Простейшим многогранникам — призмам и пирамидам, которые будут основным объектом нашего изучения,— мы дадим такие определения, которые, по существу, не используют понятие тела. Они будут определены как геометрические фигуры с указанием всех принадлежащих им точек пространства. Понятие геометрического тела и его поверхности в общем случае будет дано позже.

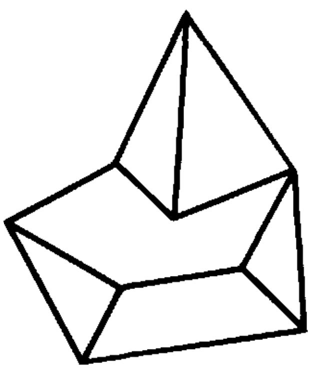


Рис. 403

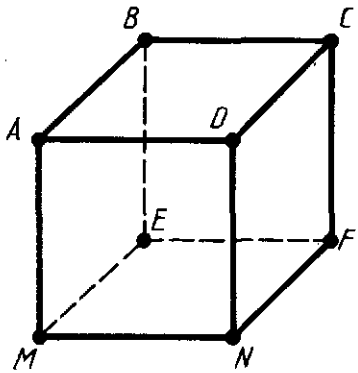


Рис. 404

169. ПРИЗМА

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 405). Многоугольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины,— *боковыми ребрами призмы*.

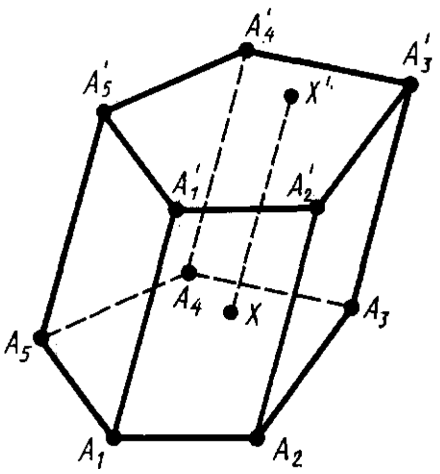


Рис. 405

Так как параллельный перенос есть движение, то ***основания призмы равны***.

Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то ***у призмы основания лежат в параллельных плоскостях***.

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то ***у призмы боковые ребра параллельны и равны***.

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. *Боковая поверхность* состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие — соседними боковыми ребрами.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, иазывается *диагональю призмы*.

Призма называется n-угольиой, если ее осиования — n-угольники.

В дальнейшем мы будем рассматривать только призмы, у которых основания — выпуклые многоугольники. Такие призмы являются выпуклыми многогранниками.

На рисунке 405 изображена пятиугольная призма. У нее основаниями являются пятиугольники $A_1A_2...A_5$, $A'_1A'_2...A'_5$. XX' — отрезок, соединяющий соответствующие точки оснований. Боковые ребра призмы — отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_5A'_5$. Боковые грани призмы — параллелограммы $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...

170. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИЗМЫ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ СЕЧЕНИЙ

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение призмы строится следующим образом. Сначала строится одно из оснований P (рис. 406). Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем из вершин многоугольника P проводятся боковые ребра призмы в виде параллельных отрезков равной длины. Концы этих отрезков соединяются и получается другое основание призмы. Невидимые ребра проводятся штриховыми линиями.

Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым ребрам, являются параллелограммами. В частности, параллелограммами являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани (рис. 407).

На практике, в частности, при решении задач часто приходится строить сечение призмы плоскостью, проходящей через заданную прямую g на плоскости одного из оснований приз-

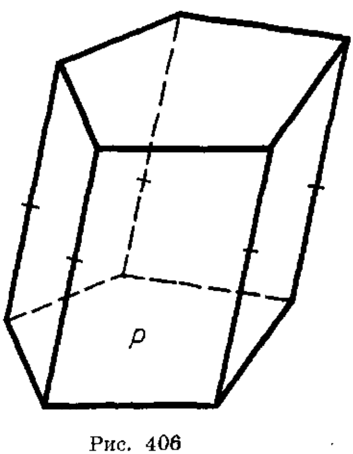


Рис. 406

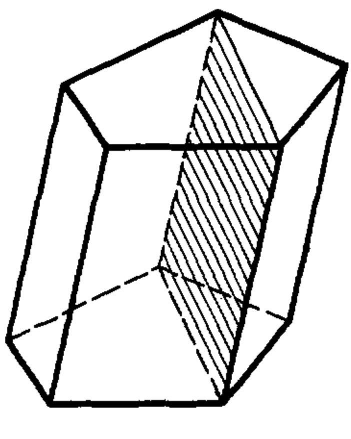


Рис. 407

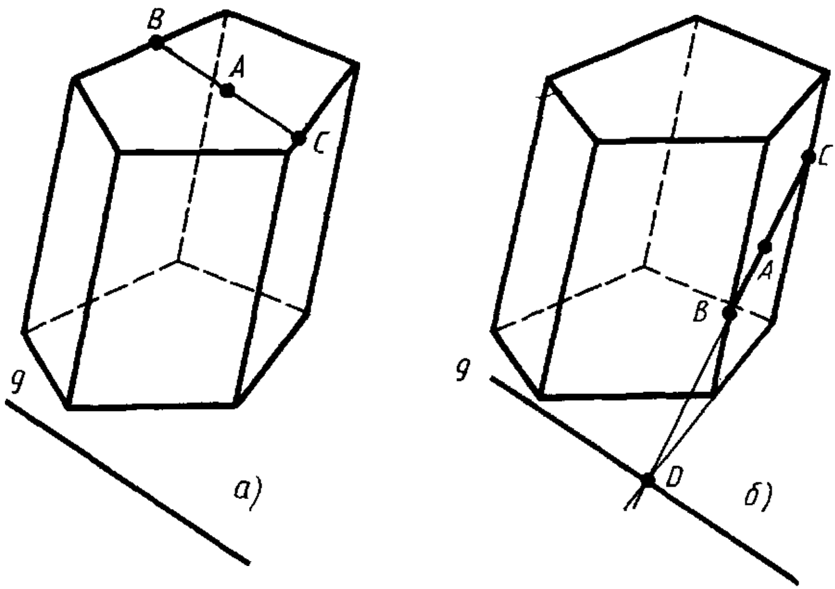


Рис. 408

мы. Такая прямая называется *следом* секущей плоскости на плоскости основания. Для построения сечения призмы достаточно построить отрезки пересечения секущей плоскости с гранями призмы. Покажем, как строится такое сечение, если известна какая-нибудь точка A на поверхности призмы, принадлежащая сечению (рис. 408).

Если данная точка A принадлежит другому основанию призмы, то его пересечение с секущей плоскостью представляет собой отрезок BC, параллельный следу g и содержащий данную точку A (рис. 408, *а*).

Если данная точка A принадлежит боковой грани, то пересечение этой грани с секущей плоскостью строится, как показано на рисунке 408, *б*. Именно: сначала строится точка D, в которой плоскость грани пересекает заданный след g. Затем проводится прямая через точки A и D. Отрезок BC прямой AD на рассматриваемой грани и есть пересечение этой грани с секущей плоскостью. Если грань, содержащая точку A, параллельна следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку BC, проходящему через точку A и параллельному прямой g.

Концы отрезка BC принадлежат и соседним граням. Поэтому описанным способом можно построить пересечение этих граней с нашей секущей плоскостью. И т. д.

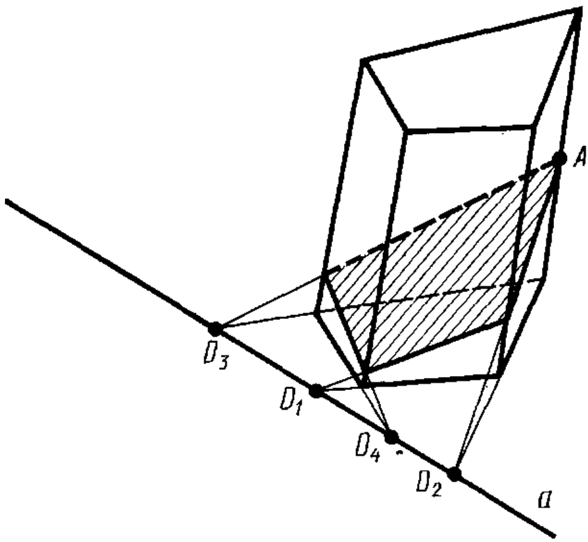


Рис. 409

На рисунке 409 показано построение сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через прямую a в плоскости нижнего основания призмы и точку A на одном из боковых ребер.

171. ПРЯМАЯ ПРИЗМА

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*.

У прямой призмы боковые грани являются прямоугольниками. При изображении прямой призмы на рисунке боковые ребра обычно проводят вертикально (рис. 410).

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. *Полная поверхность призмы* равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 19.1. ***Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.***

Доказательство. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

$$S = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = pl,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — длины ребер основания, p — периметр основания призмы, а l — длина боковых ребер. Теорема доказана.

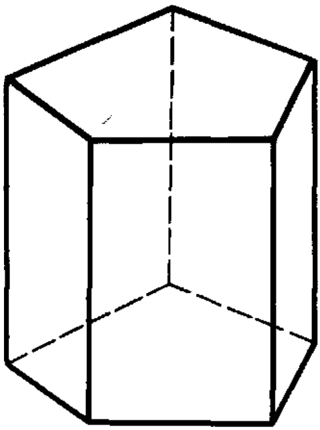


Рис. 410

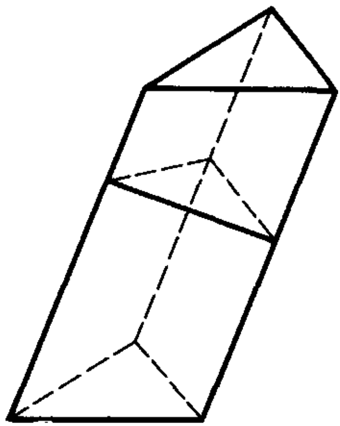


Рис. 411

Задача (22). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

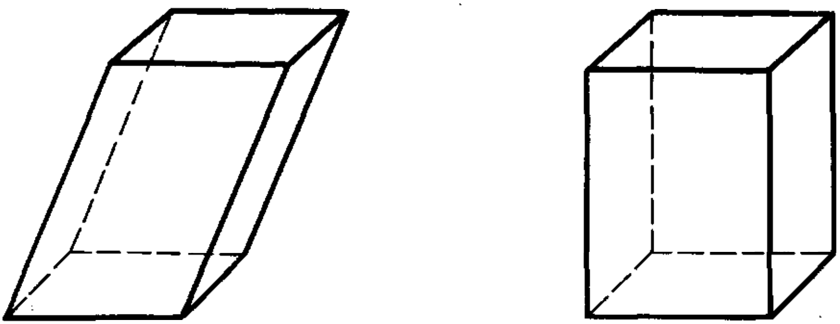
Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 411). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а боковые ребра равны l. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и исходная. Таким образом, боковая поверхность исходной призмы равна pl.

172. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

На рисунке 412, *а* изображен наклонный параллелепипед, а на рисунке 412, *б* — прямой параллелепипед.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.



а) б)

Рис. 412

Теорема 19.2. ***У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.***

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда, например $A_1A_2A_2'A_1'$ и $A_3A_4A_4'A_3'$ (рис. 413). Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_4A_3, а прямая A_1A_1' параллельна прямой A_4A_4'. Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны.

Из того, что грани параллелепипеда — параллелограммы, следует, что отрезки A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ и A_2A_3 — параллельны и равны. Отсюда заключаем, что грань $A_1A_2A_2'A_1'$ совмещается параллельным переносом вдоль ребра A_1A_4 с гранью $A_3A_4A_4'A_3'$. Значит, эти грани равны.

Аналогично доказывается параллельность и равенство любых других противолежащих граней параллелепипеда. Теорема доказана.

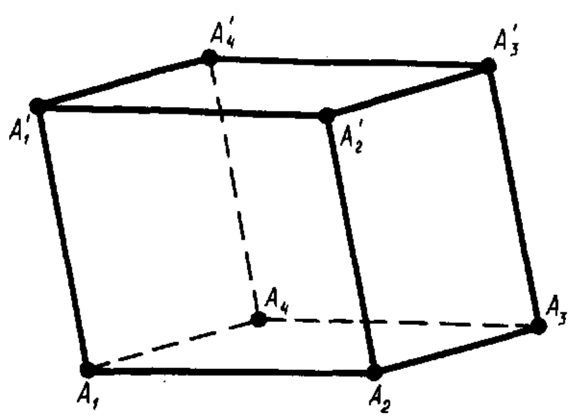


Рис. 413

173. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

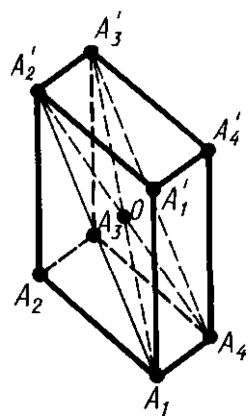


Рис. 414

Теорема 19.3. ***Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например A_1A_3' и A_4A_2' (рис. 414). Так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A_2'A_3'A_3$ — параллелограммы с общей стороной A_2A_3, то их стороны A_1A_4 и $A_2'A_3'$ параллельны друг другу, а значит, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскости противолежащих граней параллелепипеда по параллельным прямым A_1A_2' и A_4A_3'. Следовательно, четырехугольник $A_4A_1A_2'A_3'$ — параллелограмм. Диагонали параллелепипеда A_1A_3' и A_4A_2' являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

Аналогично доказывается, что диагонали A_1A_3' и A_2A_4', а также диагонали A_1A_3' и A_3A_1' пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Из теоремы 19.3 следует, что ***точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.***

174. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*.

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами (измерениями)*. У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

Теорема 19.4. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.***

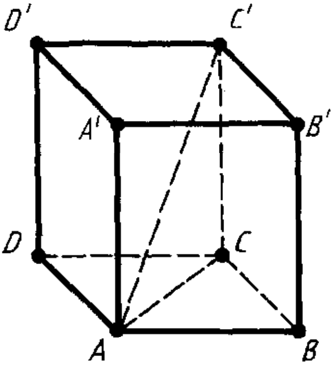


Рис. 415

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 415). Из прямоугольного треугольника $AC'C$ по теореме Пифагора получаем:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Из прямоугольного треугольника ACB по теореме Пифагора получаем $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Отсюда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Ребра AB, BC и CC' не параллельны, а следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

175. СИММЕТРИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

У прямоугольного параллелепипеда, как у всякого параллелепипеда, есть центр симметрии — точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно граням. На рисунке 416 показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда. Концы ребер являются симметричными точками.

Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме названных.

Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на рисунке 417.

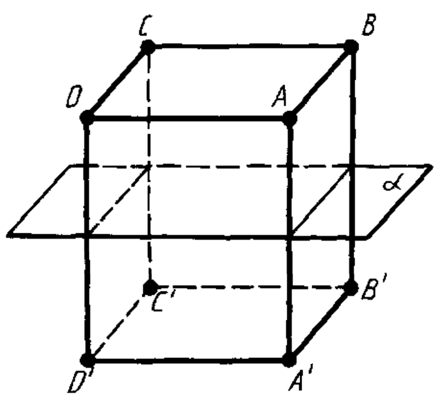


Рис. 416

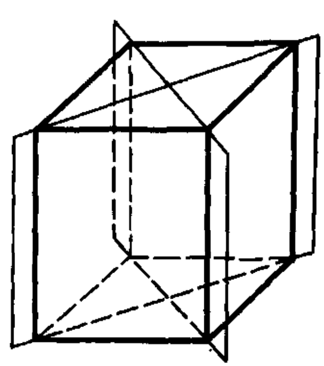


Рис. 417

Если у параллелепипеда все линейные размеры равны, т. е. он является кубом, то у него плоскость любого диагонального сечения является плоскостью симметрии. Таким образом, у куба девять плоскостей симметрии.

176. ПИРАМИДА

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания,— *вершины пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 418).

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами*.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной — сторона основания пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*.

У пирамиды, изображенной на рисунке 418, основание — многоугольник $A_1A_2...A_n$, вершина пирамиды — S, боковые ребра — SA_1, SA_2, ..., SA_n, боковые грани — $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, ...

В дальнейшем мы будем рассматривать только пирамиды с выпуклым многоугольником в основании. Такие пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

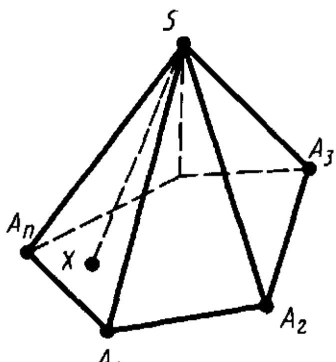


Рис. 418

177. ПОСТРОЕНИЕ ПИРАМИДЫ И ЕЕ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В соответствии с правилами параллельного проектирования изображение пирамиды строится следующим образом. Сначала строится основание. Это будет некоторый плоский многоугольник. Затем отмечается вершина пирамиды, которая соединяется боковыми ребрами с вершинами основания. На рисунке 418 показано изображение пятиугольной пирамиды.

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники (рис. 419). В частности, треугольниками являются *диагональные сечения*. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды (рис. 420).

Сечение пирамиды плоскостью с заданным следом g на плоскости основания строится так же, как и сечение призмы. Для построения сечения пирамиды плоскостью достаточно построить пересечения ее боковых граней с секущей плоскостью.

Если на грани, не параллельной следу g, известна какая-нибудь точка A, принадлежащая сечению, то сначала строится пересечение следа g секущей плоскости с плоскостью этой грани — точка D на рисунке 421. Точка D соединяется с точкой A прямой. Тогда отрезок этой прямой, принадлежащий грани, есть пересечение этой грани с секущей плоскостью. Если точка A лежит на грани, параллельной следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой g. Переходя к соседней боковой грани, строят ее пересечение с секущей плоскостью и т. д. В итоге получается требуемое сечение пирамиды.

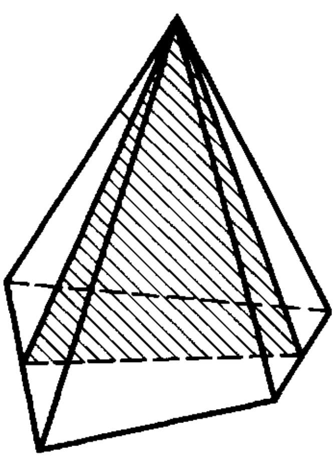


Рис. 419

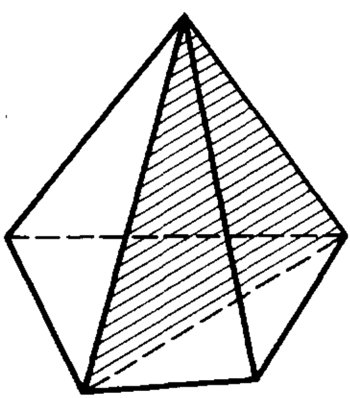


Рис. 420

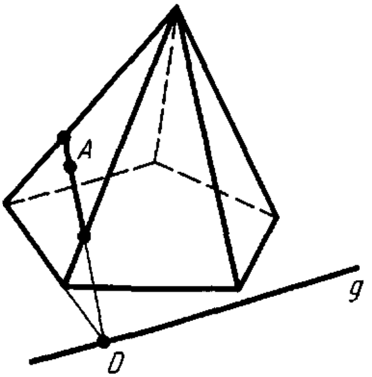


Рис. 421

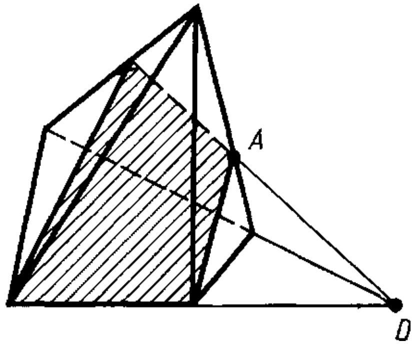


Рис. 422

На рисунке 422 построено сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку A на одном из ее боковых ребер.

178. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Теорема 19.5. ***Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.***

Доказательство. Пусть S — вершина пирамиды, A — вершина основания и A' — точка пересечения секущей плоскости с боковым ребром SA (рис. 423). Подвергнем пирамиду преобразованию гомотетии относительно вершины S с коэффициентом гомотетии

$$k=\frac{SA'}{SA}.$$

При этой гомотетии плоскость основания переходит в параллельную плоскость, проходящую через точку A', т. е. в секущую плоскость, а следовательно, вся пирамида — в отсекаемую этой плоскостью часть. Так как гомотетия есть преобразование подобия, то отсекаемая часть пирамиды является пирамидой, подобной данной. Теорема доказана.

По теореме 19.5 плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть представляет собой многогранник, который называется *усеченной пирамидой* (рис. 424). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями*; остальные грани называются

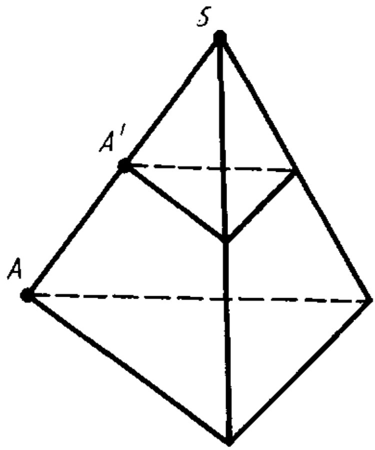


Рис. 423

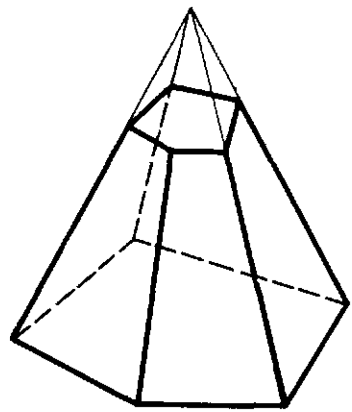


Рис. 424

боковыми гранями. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции.

Задача (54). Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

Решение. Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров. Поэтому отношения площадей сечений к площади основания пирамиды есть $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Следовательно, площади сечений равны

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25 \text{ (см}^2\text{)}, \quad 400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)}, \quad 400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225 \text{ (см}^2\text{)}.$$

179. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. *Осью* правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*. *Боковой поверхностью пирамиды* называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 19.6. ***Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.***

Доказательство. Если сторона основания a, число сторон n, то боковая поверхность пирамиды равна:

$$\frac{al}{2}n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2},$$

где l — апофема, а p — периметр основания пирамиды. Теорема доказана.

Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции; их высоты называются *апофемами*.

Задача (69). Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Решение. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции с одним и тем же верхним основанием a, нижним b и высотой (апофемой) l. Поэтому площадь одной грани равна $\frac{1}{2}(a+b)l$. Площадь всех граней, т. е. боковая поверхность, равна $\frac{1}{2}(an+bn)l$, где n — число вершин у основания пирамиды, an и bn — периметры оснований пирамиды.

180. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 425): *правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

У правильного тетраэдра грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

У куба все грани — квадраты; в каждой вершине сходится

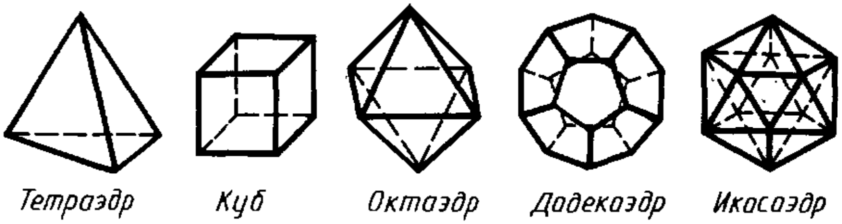


Рис. 425

по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

У октаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

У додекаэдра грани — правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.

У икосаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

З а д а ч а (81). Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

Р е ш е н и е. Проведем из вершины S тетраэдра высоты SA, SB, SC его граней, сходящихся в этой вершине, и высоту SO тетраэдра (рис. 426). Если ребро тетраэдра обозначить через a, то высоты граней будут равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из равенства высот SA, SB, SC следует равенство отрезков OA, OB, OC. А они перпендикулярны сторонам треугольника в основании тетраэдра (по теореме о трех перпендикулярах). Отсюда следует, что точка O является центром окружности, вписанной в основание тетраэдра. Следовательно, отрезки OA, OB и OC равны $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Обозначим через φ двугранный угол при ребре, содержащем точку A. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3},\ \varphi \approx 70°32'.$$

Очевидно, двугранные углы при остальных ребрах тетраэдра такие же по величине.

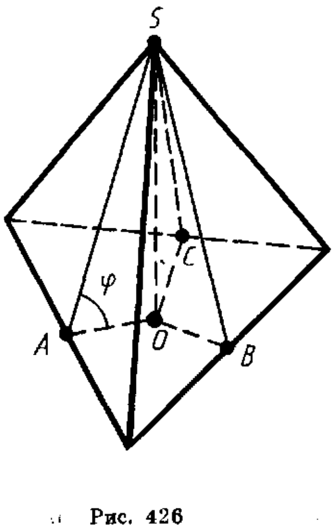


Рис. 426

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла?
4. Объясните, что такое трехгранный угол (грани и ребра трехгранного угла).
5. Объясните, что такое плоские и двугранные углы трехгранного угла.
6. Что такое многогранник?
7. Какой многогранник называется выпуклым?
8. Что такое грань выпуклого многогранника, ребро, вершина?
9. Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?
10. Докажите, что у призмы основания лежат в параллельных плоскостях и равны, боковые ребра параллельны и равны, боковые грани — параллелограммы.
11. Что такое высота призмы?
12. Что такое диагональ призмы?
13. Что представляет собой сечение призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, в частности диагональное сечение?
14. Как строится сечение призмы плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания призмы и данную точку на одной из боковых граней?
15. Какая призма называется прямой (наклонной)?
16. Какая призма называется правильной?
17. Что такое боковая поверхность призмы (полная поверхность призмы)?
18. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
19. Что такое параллелепипед?
20. Докажите, что у параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
21. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
22. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
23. Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
24. Что такое куб?
25. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

26. Сколько плоскостей симметрии у прямоугольного параллелепипеда?
27. Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?
28. Что представляют собой сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину?
29. Что такое диагональное сечение пирамиды?
30. Как построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания пирамиды и заданную точку на одной из боковых граней?
31. Докажите, что плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.
32. Объясните, что такое усеченная пирамида.
33. Какая пирамида называется правильной? Что такое ось правильной пирамиды?
34. Что такое апофема правильной пирамиды?
35. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
36. Какой многогранник называется правильным?
37. Перечислите пять типов правильных многогранников и опишите их.

ЗАДАЧИ

1. Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите: 1) отрезок AB, если $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ и двугранный угол равен α; 2) двугранный угол α, если $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$.
2. У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\gamma\left(\varphi,\ \gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла: $\alpha=\angle(ab)$, $\beta=\angle(ac)$.
3. У трехгранного угла один плоский угол равен γ, а прилежащие к нему двугранные углы равны $\varphi\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром.
4*. У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.
5. Докажите, что сечение призмы, параллельное основаниям, равно основаниям.
6. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

7. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и одну из вершин другого основания.

8. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки на боковых ребрах призмы.

9. У призмы одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что остальные боковые ребра тоже перпендикулярны плоскости основания.

10. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

11. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.

12*. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

13. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.

14*. В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения (рис. 427).

15. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, угол между которыми α. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы (рис. 428).

16. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость,

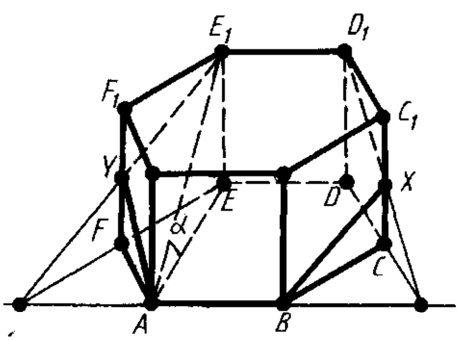


Рис. 427

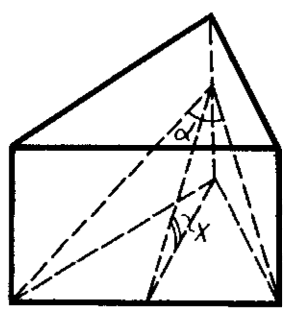


Рис. 428

пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Найдите площадь полученного сечения.

17. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.
18. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь диагонального сечения.
19*. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы (рис. 429).
20. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.
21. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.
22*. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.
23. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.
24. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
25. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания l. Найдите боковую поверхность призмы.
26. У параллелепипеда три грани имеют площади 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?
27. Известны углы, образуемые ребрами параллелепипеда, сходящимися в одной вершине. Как найти углы между ребрами, сходящимися в любой другой вершине?
28. Докажите, что отрезок, соединяющий центры оснований параллелепипеда, параллелен боковым ребрам.
29. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30°, боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
30. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см, угол между ними 60°. Боковая поверхность равна 220 см^2. Найдите полную поверхность.
31. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите бóльшую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.

32. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

33*. Боковое ребро прямого параллелепипеда 5 м, стороны основания 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.

34. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

35. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

36*. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

37. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.

38. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.

39. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.

40. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные размеры параллелепипеда (рис. 430).

41. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды.

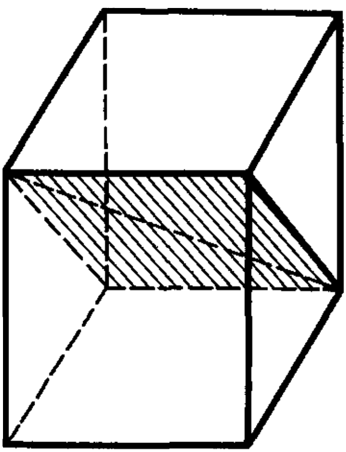


Рис. 429

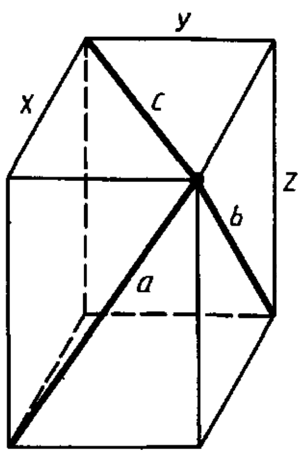


Рис. 430

42. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.
43. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?
44. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите ее высоту.
45. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.
46. Основание пирамиды — параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.
47*. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1 м. Найдите боковую поверхность пирамиды.
48. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Ее высота проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.
49. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота 21 дм (рис. 431).
50. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на ее основании.
51. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания пирамиды и данную точку на противолежащем ребре.
52. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на одном из боковых ребер.
53. У четырехугольной усеченной пирамиды стороны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.
54. Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.
55. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна

512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2?

56. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания a проведена плоскость, пересекающая противолежащее боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения.

57. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.

58. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.

59. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

60. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

61. По стороне основания a и высоте h найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

62. Найдите полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро a, а радиус окружности, вписанной в основание, r.

63. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

64. По стороне основания a найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

65. Найдите боковую поверхность пирамиды, если площадь основания Q, а двугранные углы при основании φ.

66. Найдите двугранные углы при основании правильной пирамиды, у которой площадь основания равна Q, а боковая поверхность S.

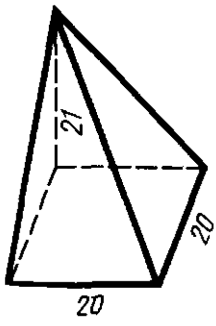


Рис. 431

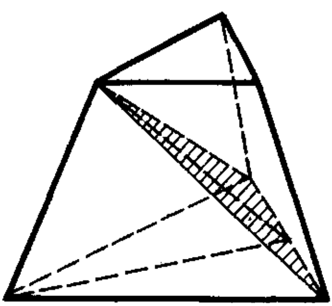


Рис. 432

67. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность равна 144 см^2.
68. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.
69. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.
70. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.
71. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.
72. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.
73. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с бо́льшим основанием угол 60°. Найдите высоту.
74. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего — b. Боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды[1].
75. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см. Стороны оснований равны 2 см и 8 см. Найдите площади диагональных сечений.
76. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 м, верхнего — 5 м, а высота 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием (рис. 432).
77. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.
78. Найдите полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если высота h, а стороны оснований a и b.
79. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.

---

[1] Ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды.

80. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противолежащих граней куба являются вершинами тетраэдра.
81. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.
82*. Найдите двугранные углы октаэдра.
83. Какие плоскости симметрии имеет правильный тетраэдр?
84*. Сколько плоскостей симметрии у правильного октаэдра, додекаэдра и икосаэдра?

§ 20. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

181. ЦИЛИНДР

Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 433). Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,— *образующими цилиндра*.

Так как параллельный перенос есть движение, то ***основания цилиндра равны.***

Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то ***у цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях.***

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то ***у цилиндра образующие параллельны и равны.***

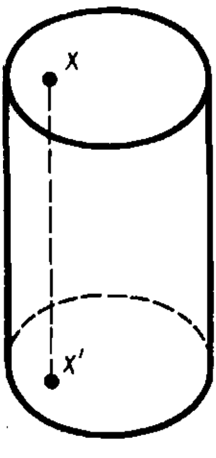


Рис. 433

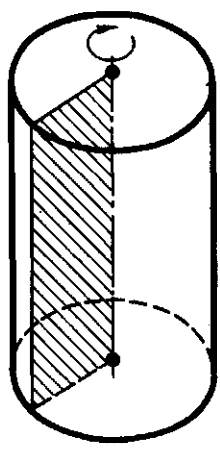


Рис. 434

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром. Прямой цилиндр наглядно можно представить себе как тело, которое описывает прямоугольник при вращении его около стороны как оси (рис. 434).

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. *Высотой цилиндра* называется расстояние между плоскостями его оснований. *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

182. СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник (рис. 435). Две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является *осевое сечение*. Это — сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 436).

Задача (2). Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$.

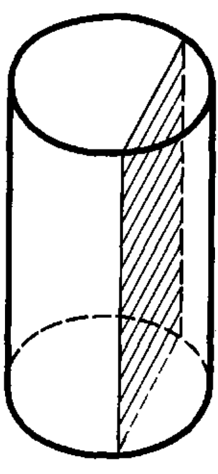


Рис. 435

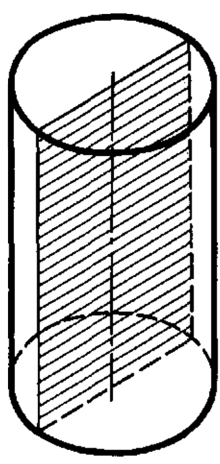


Рис. 436

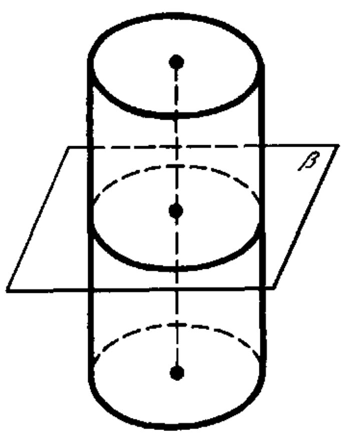


Рис. 437

Теорема 20.1. ***Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.***

Доказательство. Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра (рис. 437). Параллельный перенос в направлении оси цилиидра, совмещающий плоскость β с плоскостью основаиия цилиидра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружиостью основания. Теорема доказана.

183. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПРИЗМЫ

Призмой, вписанной в цилиндр, иазывается такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами — образующие цилиндра (рис. 438).

Задача (7). В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение. Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, впнсанного в окружность, равна радиусу (рис. 439). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как гранн — квадраты.

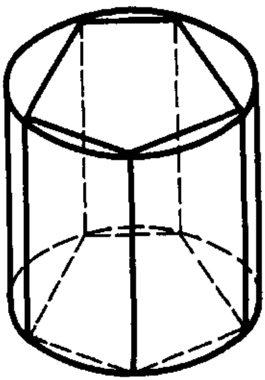


Рис. 438

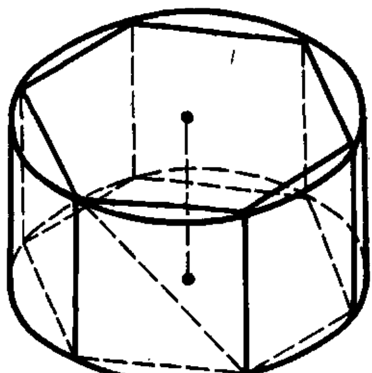


Рис. 439

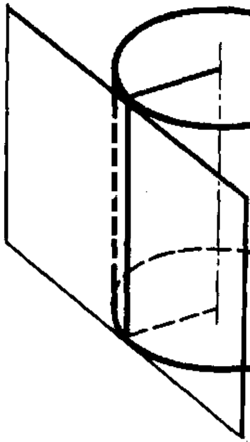


Рис. 440

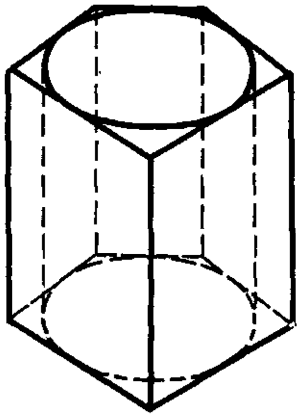


Рис. 441

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 440).

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (рис. 441).

184. КОНУС

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга,— *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 442). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом. Наглядно прямой круговой конус можно представлять себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 443).

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью прямого кругового конуса* называется прямая, содержащая его высоту.

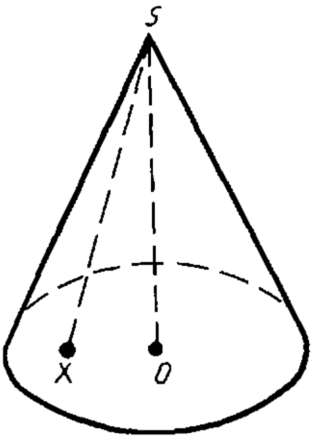


Рис. 442

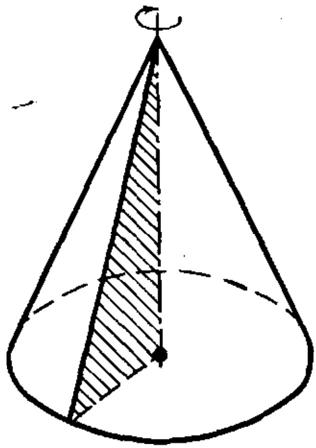


Рис. 443

185. СЕЧЕНИЯ КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 444). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса (рис. 445).

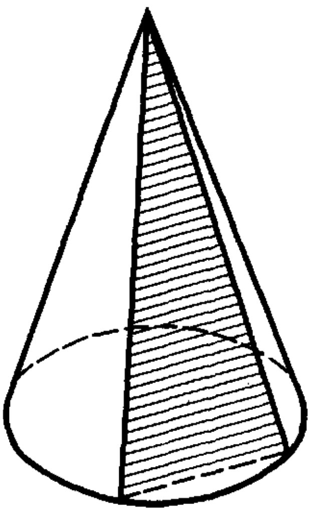


Рис. 444

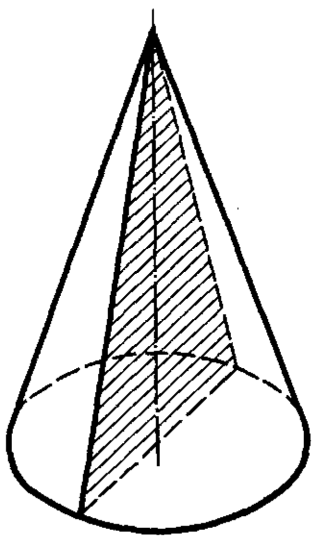


Рис. 445

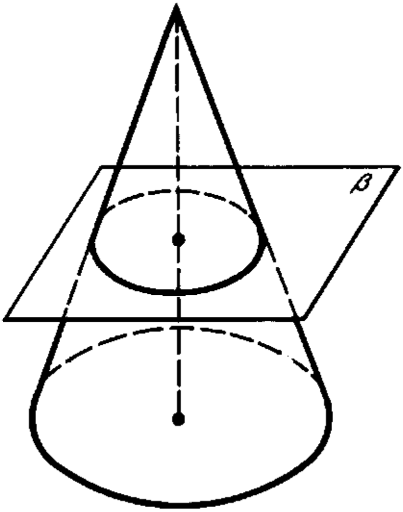


Рис. 446

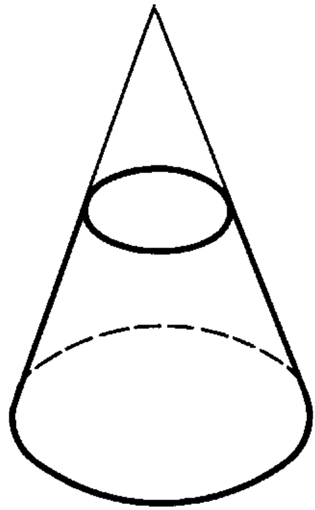


Рис. 447

Теорема 20.2. ***Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.***

Доказательство. Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основання конуса н пересекающая конус (рис. 446). Преобразованне гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательио, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

Задача (15). Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение. Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетни относнтельно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k=\frac{d}{H}$. Поэтому радиус круга в сечении $r=R\frac{d}{H}$. Следовательно, площадь сечения

$$S=\pi R^2\frac{d^2}{H^2}.$$

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 447).

186. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПИРАМИДЫ

Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 448). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

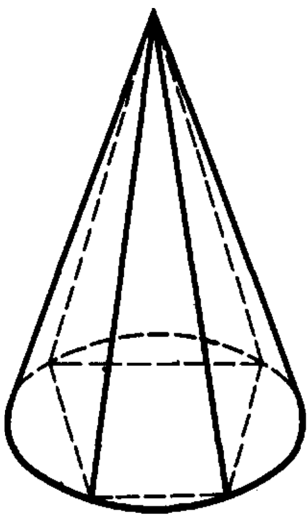


Рис. 448

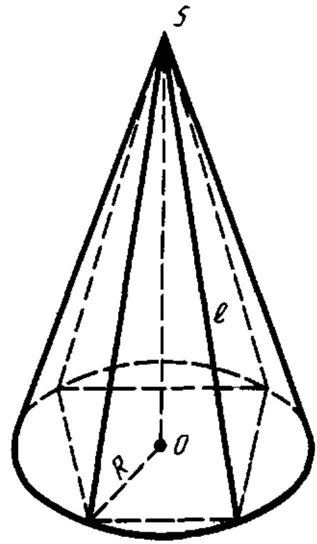


Рис. 449

Задача (25). У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

Решение. Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 449) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания удалены от точки O на одно и то же расстояние

$$R=\sqrt{l^2-OS^2}.$$

Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, у которого вершиной является вершина пирамиды, а основанием — круг с центром O и радиусом R.

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 450).

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около

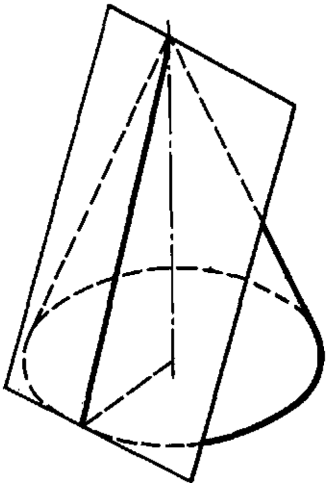


Рис. 450

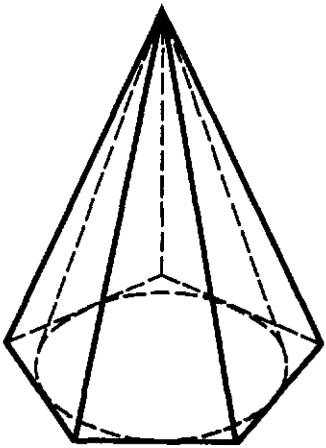


Рис. 451

основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 451). Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

187. ШАР

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние *радиусом шара*.

Граница шара называется *шаровой поверхностью*, или *сферой*. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

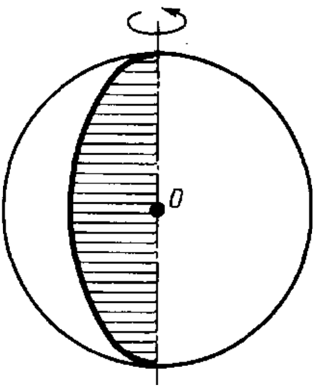


Рис. 452

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара*.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 452).

188. СЕЧЕНИЕ ШАРА ПЛОСКОСТЬЮ

Теорема 20.3. ***Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.***

Доказательство. Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 453). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра.

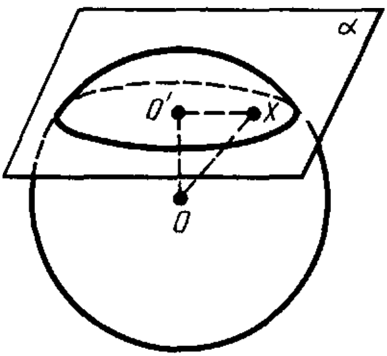


Рис. 453

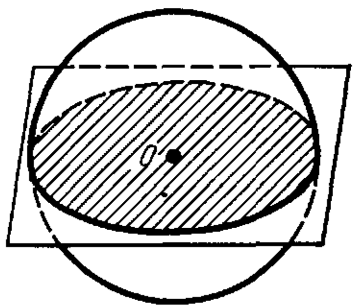


Рис. 454

Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2=OO'^2+O'X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O'X\leqslant\sqrt{R^2-OO'^2}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2-OO'^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2-OO'^2}$.

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (рис. 454), а сечение сферы — *большой окружностью*.

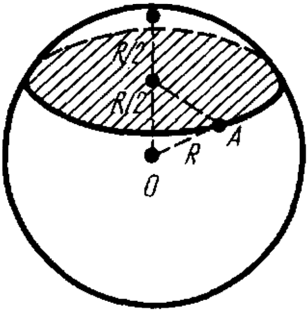


Рис. 455

З а д а ч а (30). Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Р е ш е н и е. Если радиус шара R (рис. 455), то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2:\pi R^2=\frac{3}{4}$.

189. СИММЕТРИЯ ШАРА

Т е о р е м а 20.4. ***Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 456). Построим точку X', симметричиую точке X относительно плоскости α. Плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и пересекается с ним в его середине (в точке A). Из равенства прямоугольиых треугольников OAX и OAX' следует, что $OX'=OX$.

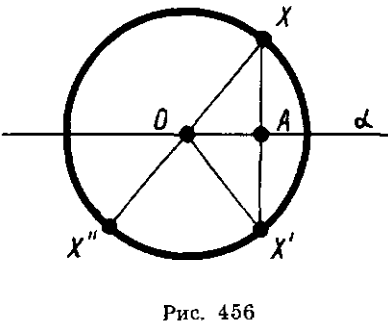


Рис. 456

Так как $OX\leqslant R$, то и $OX'\leqslant R$, т. е. точка, симметричная точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX''=OX\leqslant R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

190. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ШАРУ

Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A, называется *касательной плоскостью*. Точка A называется *точкой касания* (рис. 457).

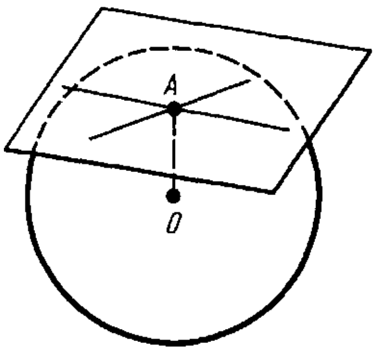


Рис. 457

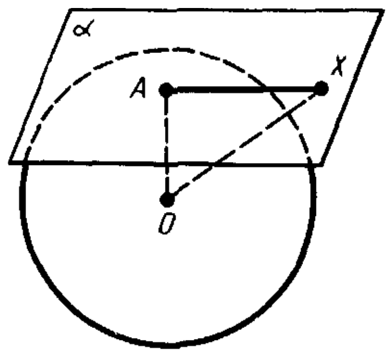


Рис. 458

Т е о р е м а 20.5. ***Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — плоскость, касательная к шару, и A — точка касания (рис. 458). Возьмем произвольную точку X плоскости α, отличную от A. Так как OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то

$$OX > OA = R.$$

Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется *касательной к шару* в этой точке. Так как касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку, то касательная прямая тоже имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

З а д а ч а (39). Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 459). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B и O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника.

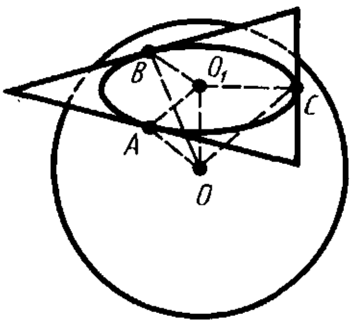


Рис. 459

Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A=O_1B=O_1C$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник. Радиус этой окружности, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние. Оно равно

$$\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{12}}.$$

191. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ СФЕР

Теорема 20.6. ***Линия пересечения двух сфер есть окружность.***

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер и A — их точка пересечения (рис. 460). Проведем через точку A плоскость α, перпендикулярную прямой O_1O_2.

Обозначнм через B точку пересечения плоскости α с прямой O_1O_2. По теореме 20.3 плоскость α пересекает обе сферы по окружности K с центром B, проходящей через точку A. Таким образом, окружность K принадлежит пересечению сфер.

Покажем теперь, что сферы не имеют других точек пересечения, кроме точек окружности K. Допустим, точка X пересечения сфер не лежит на окружности K. Проведем плоскость через точку X и прямую O_1O_2. Она пересечет сферы по окружностям с центрамн O_1 н O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, принадлежащих окружности K, да еще в точке X. Но две окружности не могут иметь больше двух точек пересечения. Мы пришли к противоречию. Итак, пересечение наших сфер есть окружность (K). Теорема доказана.

Задача (44). Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит иа поверхиости другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение. Проведем сечение через центры шаров (рис. 461). Линия, о которой идет речь в задаче, есть окружность (теорема 20.6). Ее радиус равеи высоте равиостороннего треугольника OAO_1 со сторонами, равиыми R. Высота равиа $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, длииа линии равна $\pi R\sqrt{3}$.

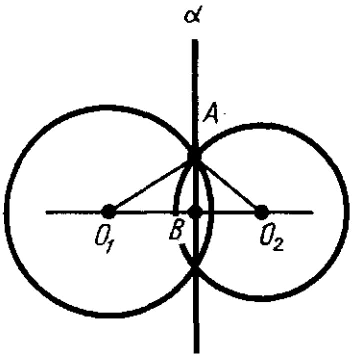


Рис. 460

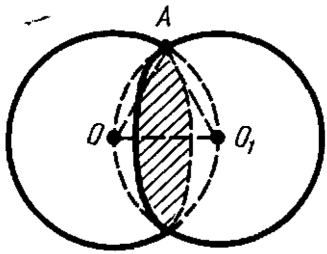


Рис. 461

192. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется ***вписанным в шар***, если все его вершины лежат на поверхности шара. Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются поверхности шара.

Задача (47). Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Решение. Опустим перпендикуляр OA из центра шара O на плоскость основания пирамиды (рис. 462). Пусть X — произвольная вершина основания пирамиды. По теореме Пифагора

$$AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2.$$

Таким образом, AX одно и то же для любой вершины основания пирамиды. А это значит, что точка A является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Следовательно, центр шара O лежит на оси пирамиды.

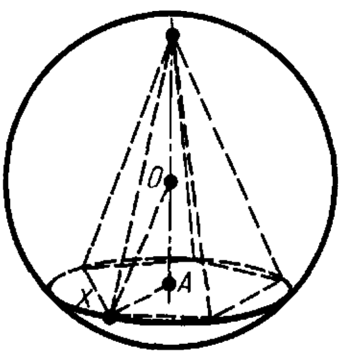


Рис. 462

193. О ПОНЯТИИ ТЕЛА И ЕГО ПОВЕРХНОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

В предыдущем изложении мы неоднократно употребляли слова *тело* и *поверхность тела*, вкладывая в их содержанне известные вам наглядные представления. Теперь мы дадим определение геометрического тела и его поверхности.

Точка фигуры называется *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий фигуре. Фигура называется *областью*, если все ее точки внутренние и если любые две ее точки можно соединнть ломаной, целиком принадлежащей фигуре. Поясним данное определение на примере шара (рис. 463).

Каждая точка шара, которая удалена от его центра на расстояние r, меньшее R, является внутренней точкой шара, так как шар с центром в этой точке и раднусом $R-r$ содержится в исходном шаре радиуса R. Все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, меньшее R, образуют область. В самом деле, любые две такие точки A н B соединяются отрезком AB, все точки которого удалены от центра на расстояние, меньшее R.

Точка пространства называется *граничной точкой* данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Для шара граничными точками являются точки, которые удалены от точки O на расстояние, равное R, т. е. граница шара есть сфера. Для каждой такой точки C можно указать в каждом шаре с центром C и радиусом $r>0$ точки C_1 и C_2, отстоящие от точки O на расстояние, большее R, и на расстояние, меньшее R.

Область вместе с ее границей называется *замкнутой областью*.

Телом называется конечная замкнутая область. Граница тела называется *поверхностью тела*. Шар является примером тела. Другими знакомыми нам примерами тел являются многогранник, цилиндр и конус.

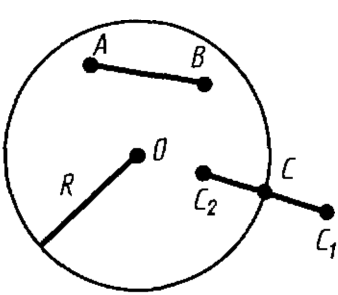


Рис. 463

Подобно тому как в пространстве, на плоскости вводятся понятия внутренней точки фигуры, граничной точки и области. Граничные точки области образуют границу области. В круге радиуса R точки, которые находятся на расстоянии, меньшем R, от центра, внутренние, а точки, находящиеся на расстоянии R, граничные. Круг — замкнутая область.

Плоский многоугольник — это ограниченная замкнутая область на плоскости, граница которой является многоугольником.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания цилиндра, боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра?
4. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
5. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)? Что такое касательная плоскость к цилиндру?
6. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, основание конуса, боковая поверхность конуса?
7. Какой конус называется прямым?
8. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?
9. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.
10. Что такое усеченный конус?
11. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)? Что такое касательная плоскость к конусу?
12. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
13. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
14. Докажите, что пересечение шара с плоскостью есть круг.
15. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара? Что такое большой круг?
16. Докажите, что любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии; центр шара является его центром симметрии.
17. Какая плоскость называется касательной к шару?
18. Докажите, что касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.
19. Какая прямая называется касательной к шару?
20. Докажите, что линия пересечения двух сфер есть окружность.
21. Какой многогранник называется вписанным в шар (описанным около шара)?

ЗАДАЧИ

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси (рис. 464).

262

5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка AB, равного 10 дм, лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.
6. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 60°. Найдите угол x между проведенной прямой и осью цилиндра (рис. 465).
7. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

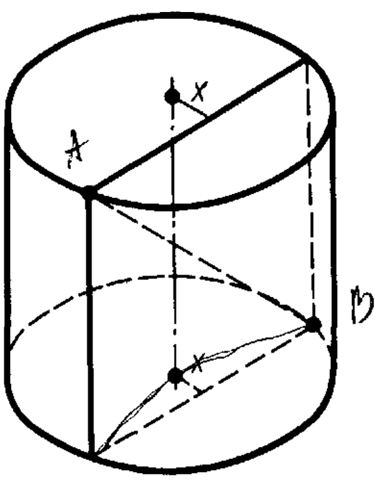


Рис. 464

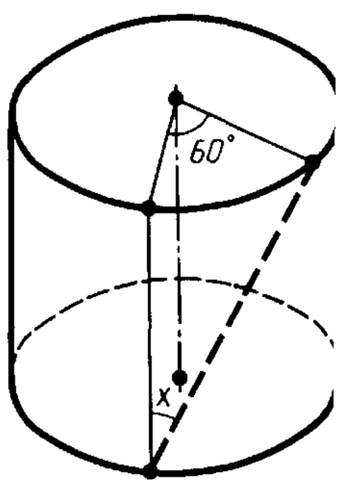


Рис. 465

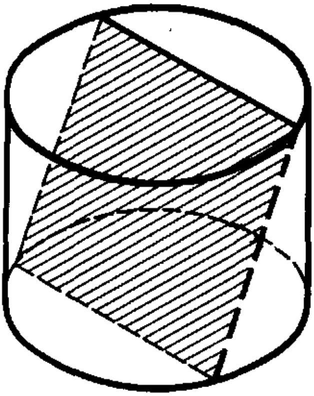


Рис. 466

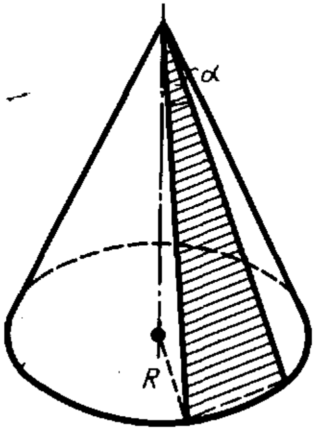


Рис. 467

8. Высота цилиндра 2 м. Радиус оснований 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата (рис. 466).
9. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.
10. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту.
11. Радиус основания конуса R. Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
12. В равностороннем конусе (в осевом сечении правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α (рис. 467).
13. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.
14. Радиус основания конуса R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.
15. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.
16. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?
17. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найдите длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

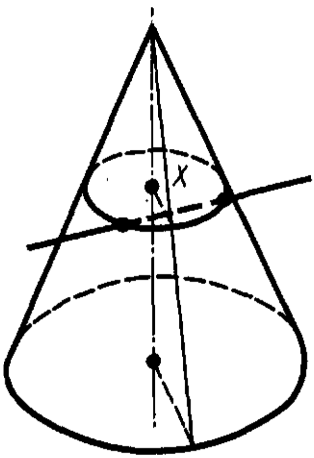


Рис. 468

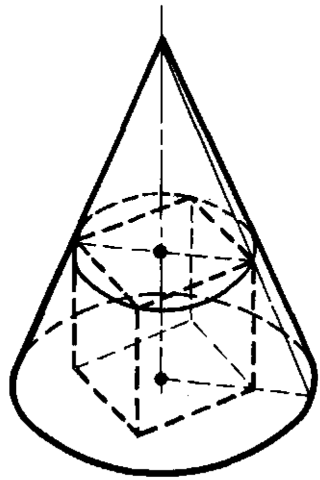


Рис. 469

18*. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты — 2 см. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри конуса (рис. 468).

19. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

20. Радиусы основаиий усеченного конуса R и r, образующая наклоиеиа к основанию под углом 45°. Найдите высоту.

21. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанню под углом 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите каждый из радиусов.

22. Радиусы основаиий усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.

23. Площади основаиий усеченного коиуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Череэ середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

24. Площади осиоваиий усечениого коиуса M и m. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

25. У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что оиа является вписанной в некоторый конус.

26*. В коиусе даны радиус основания R и высота H. Найдите ребро вписанного в иего куба (рис. 469).

27*. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольиая призма, у которой боковые грани — квадраты. Найдите ребро призмы.

28. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания (рис. 470).

29. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

30. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

31. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Найдите площадь сечения.

32. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта $60°$ (рис. 471)?

33. Город N находится на $60°$ северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1 ч вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.

34. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки.

35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от A на 15 см. Найдите радиус этой окружности.

36*. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны (рис. 472).

37. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару,

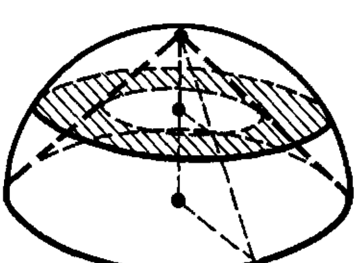


Рис. 470

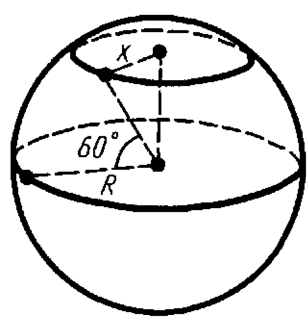


Рис. 471

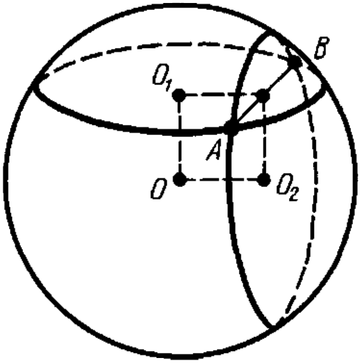


Рис. 472

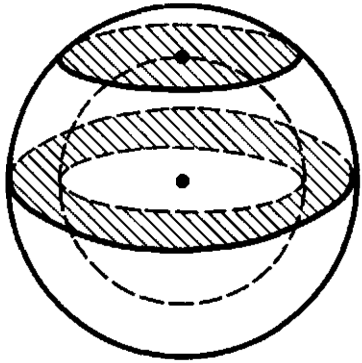


Рис. 473

вторая — под углом 30° к первой. Найдите площадь сечения.

38. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности (рис. 473).

39. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

40. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5 см.

41. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

42. Через касательную к поверхности шара проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус шара R.

43. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

44. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

45. Радиусы шаров равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

46. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной a.

47. Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.
48. Докажите, что центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.
49. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.
50. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.
51*. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине. Найдите высоту пирамиды.
52. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.
53. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.
54. Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

§ 21. ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

194. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

Подобно тому, как для фигур на плоскости вводится понятие площади, для тел в пространстве вводится понятие объема. Сначала рассмотрим только простые тела. Тело называется *простым*, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Для простых тел *объем — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:*

1. *Равные тела имеют равные объемы.*

2. *Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.*

3. *Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.*

Если куб, о котором идет речь в определении, имеет ребро 1 см, то объем будет в кубических сантиметрах; если ребро куба равно 1 м, то объем будет в кубических метрах; если ребро куба равно 1 км, то объем будет в кубических километрах и т. д.

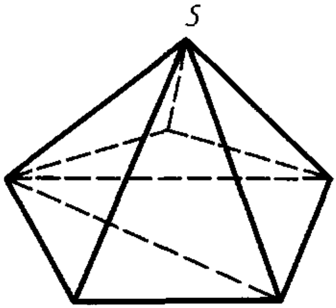


Рис. 474

Примером простого тела является любой выпуклый многогранник. Его можно разбить на конечное число треугольных пирамид следующим образом. Отметим какую-нибудь вершину S многогранника. Разобьем на треугольники все грани многогранника, не содержащие вершину S. Тогда треугольные пирамиды, для которых основаниями являются эти треугольники, а общей вершиной — точка S, дают разбиение многогранника на треугольные пирамиды. На рисунке 474 показано такое разбиение для произвольной пирамиды.

195. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c. Для этого сначала докажем, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты.

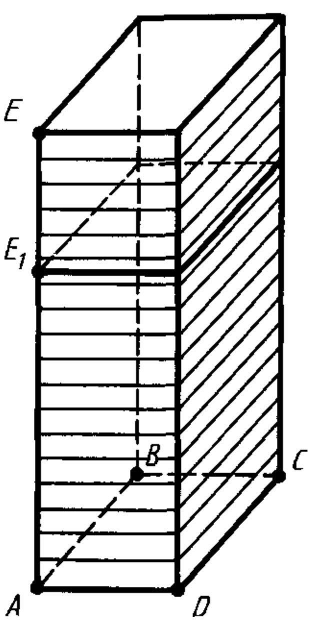


Рис. 475

Пусть P и P_1 — два прямоугольных параллелепипеда с общим основанием $ABCD$ и высотами AE и AE_1. Будем считать для определенности, что $AE_1 < AE$ (рис. 475). Пусть V и V_1 — объемы параллелепипедов. Разобьем ребро AE параллелепипеда P на большое число n равных частей. Каждая из них равна $\frac{AE}{n}$. Пусть m — число точек деления, которые лежат на ребре AE_1. Тогда

$$\left(\frac{AE}{n}\right) m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию. Они разобьют параллелепипед P на n равных параллелепипедов.

Каждый из них имеет объем $\frac{V}{n}$. Параллелепипед P_1 содержит первые m параллелепипедов, считая снизу, и содержится в $m+1$ параллелепипедах. Поэтому

$$\left(\frac{V}{n}\right) m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) мы видим, что оба числа $\frac{V_1}{V}$ и $\frac{AE_1}{AE}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим, то это может быть только при $\frac{V_1}{V}=\frac{AE_1}{AE}$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь куб, являющийся единицей измерения объема, и три прямоугольных параллелепипеда с измерениями: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c. Обозначим их объемы V_1, V_2 и V соответственно. По доказанному

$$\frac{V_1}{1}=\frac{a}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{b}{1}, \quad \frac{V}{V_2}=\frac{c}{1}.$$

Перемножая эти три равенства почленно, получим:

$$V=abc.$$

Итак, ***объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c вычисляется по формуле $V=abc$.***

З а д а ч а (3). Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Р е ш е н и е. Обозначим ребро куба через x, тогда $(x+2)^3-x^3=98$, т. е. $x^2+2x-15=0$. Уравнение имеет два корня: $x=3$, $x=-5$. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Итак, ребро куба равно 3 см.

196. ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 476).

Проведем через ребро BC плоскость, перпендикулярную основанию $ABCD$, и дополним наклонный параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$ (рис. 476, *а*). Отсечем теперь от полученного тела треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD и перпендикулярной основанию $ABCD$. Тогда получим снова параллелепипед. Этот параллелепипед имеет объем, равный объему исходного параллелепипеда.

Действительно, достроенная призма и отсекаемая совмещаются параллельным переносом на отрезок AB, следовательно, имеют одинаковые объемы. При описанном преобразовании параллелепипеда сохраняются площадь его основания и высота. Сохраняются также плоскости двух боковых граней, а две другие становятся перпендикулярными основанию.

Применяя еще раз такое преобразование к наклонным граням, получим параллелепипед, у которого все боковые грани перпендикулярны основанию, т. е. прямой параллелепипед.

Полученный прямой параллелепипед подвергнем аналогичному преобразованию в прямоугольный параллелепипед, дополняя его сначала призмой 1, а затем отсекая призму 2 (рис. 476, *б*). Это преобразование также сохраняет объем параллелепипеда, площадь основания и высоту.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Произведение двух измерений есть площадь основания параллелепипеда, а третье измерение — его высота.

Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту. Так как при описанном выше преобразовании данного параллелепипеда в прямоугольный каждый раз сохраняются объем, площадь основания и высота, то и у исходного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту.

Итак, ***объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

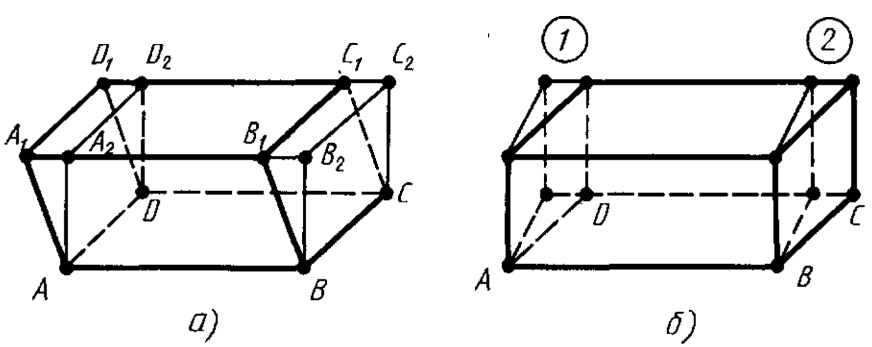


Рис. 476

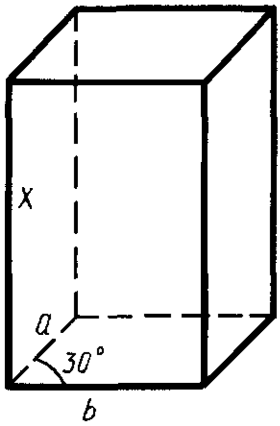


Рис. 477

Задача (11). В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 477). Тогда

$$(2a+2b)x=S.$$

Отсюда

$$x=\frac{S}{2(a+b)}.$$

Площадь основания параллелепипеда равна $ab\sin 30^\circ=\frac{ab}{2}$. Объем равен $\frac{abS}{4(a+b)}$.

197. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

Рассмотрим сначала треугольную призму (рис. 478). Дополним ее до параллелепипеда, как указано на рисунке. Точка O является центром симметрии параллелепипеда. Поэтому достроенная призма симметрична исходной относительно точки O, следовательно, имеет объем, равный объему исходной призмы. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника ABC, а высота равна высоте исходной призмы. Отсюда заключаем, что объем исходной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

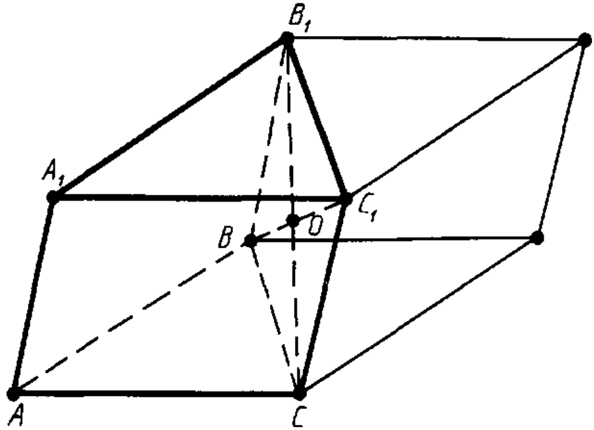


Рис. 478

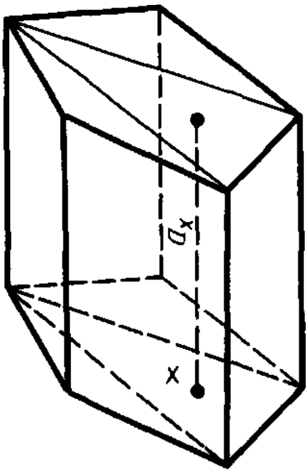


Рис. 479

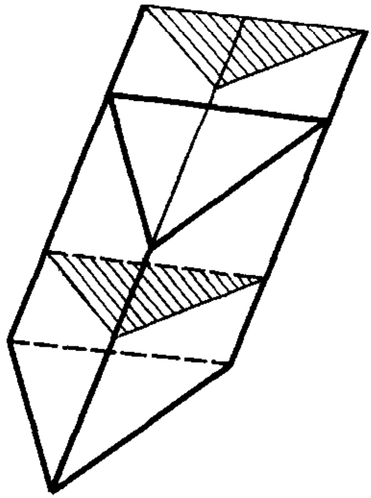


Рис. 480

Рассмотрим теперь произвольную призму (рис. 479). Разобьем ее основание на треугольники. Пусть $\triangle$ — один из этих треугольников. Проведем через произвольную точку X треугольника $\triangle$ прямую, параллельную боковым ребрам. Пусть a_x — отрезок этой прямой, принадлежащий призме. Когда точка X описывает треугольник $\triangle$, отрезки a_x заполняют треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника $\triangle$, мы получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы.

Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, ее составляющих. По доказанному объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Отсюда следует, что объем исходной призмы равен:

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади треугольников, на которые разбито основание призмы, а H — высота призмы. Сумма площадей треугольников равна площади S основания данной призмы. Поэтому

$$V = SH.$$

Итак, ***объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.***

Задача (24). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 480). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет тот же объем. Таким образом, объем исходной призмы равен Ql.

198. РАВНОВЕЛИКИЕ ТЕЛА

Два тела называются *равновеликими*, если они имеют равные объемы.

Две треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.

Действительно, пусть треугольные пирамиды имеют равные площади оснований и равные высоты. Докажем, что они равновелики, т. е. имеют равные объемы.

Разделим высоту каждой пирамиды на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные основаниям. Эти плоскости разбивают пирамиду на n слоев. Для каждого слоя первой пирамиды построим содержащуюся в нем призму, как показано на рисунке 481, *а*. Для каждого слоя второй пирамиды построим призму, содержащую слой (рис. 481, *б*). Призма в k-м (считая от вершины) слое первой пирамиды и призма, содержащая $(k-1)$-й слой второй пирами-

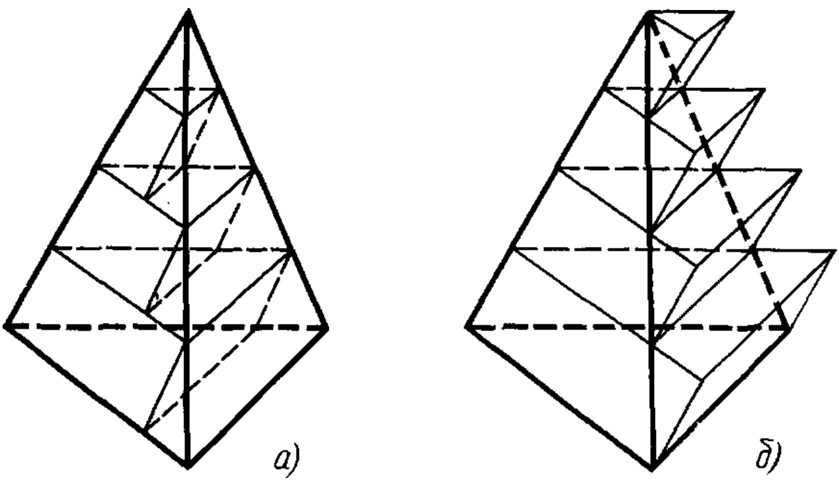


Рис. 481

ды, имеют равные площади оснований, так как эти основания подобны основаниям пирамид и коэффициент подобия один и тот же $\left(\frac{k}{n}\right)$. Так как у этих призм и высоты одинаковы $\left(\frac{H}{n}\right)$, то они имеют равные объемы.

Пусть V_1 и V_2 — объемы пирамид, а V_1' и V_2' — суммы объемов построенных для них призм. Так как объем призмы в k-м слое первой пирамиды равен объему призмы $(k-1)$-го слоя второй пирамиды, то сумма объемов всех призм для первой пирамиды равна сумме объемов призм всех слоев второй пирамиды, кроме последнего. Объем призмы последнего слоя равен $S\frac{H}{n}$, где S — площадь основания пирамиды, а H — высота. Отсюда следует, что $V_1'=V_2'-S\frac{H}{n}$. Так как, кроме того, $V_1>V_1'$, а $V_2<V_2'$, то $V_1>V_2-\frac{SH}{n}$, или $V_2-V_1\leqslant\frac{SH}{n}$. Это неравенство выполняется при любом сколь угодно большом n. А это возможно только при $V_2-V_1\leqslant 0$, т. е. при $V_2\leqslant V_1$. Поменяв ролями пирамиды, получим противоположное неравенство $V_2\geqslant V_1$. А отсюда следует, что $V_1=V_2$. Утверждение доказано.

199. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Пусть $SABC$ — треугольная пирамида с вершиной S и основанием ABC. Дополним эту пирамиду до треугольной призмы с тем же основанием и высотой (рис. 482). Эта призма составлена из трех пирамид: данной пирамиды $SABC$ и еще двух треугольных пирамид SCC_1B_1 и $SCBB_1$.

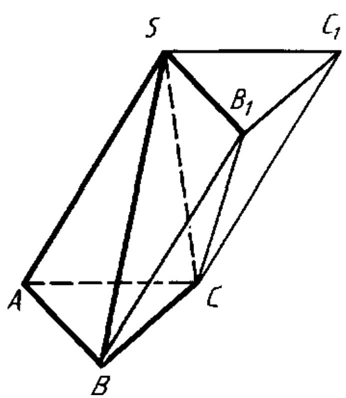


Рис. 482

У второй и третьей пирамид равные основания — $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle B_1BC$ и общая высота, проведенная из вершины S. Поэтому у них равные объемы.

У первой и третьей пирамид тоже равные основания — $\triangle SAB$ и $\triangle BB_1S$ и совпадающие высоты, проведенные из вершины C. Поэтому у них тоже равные объемы.

Значит, все три пирамиды имеют один и тот же объем. Так как сумма этих объемов равна объему призмы, то объемы пирамид равны $\frac{SH}{3}$.

Итак, ***объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:***

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

Пусть теперь имеем любую, не обязательно треугольную пирамиду. Разобьем ее основание на треугольники $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$. Пирамиды, у которых основаниями являются эти треугольники, а вершинами — вершина данной пирамиды, составляют данную пирамиду. Объем данной пирамиды равен сумме объемов составляющих ее пирамид. Так как все они имеют ту же высоту H, что и данная пирамида, то объем ее равен:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3} SH.$$

Итак, ***объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.***

200. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Задача (44). Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 $(Q_1 > Q_2)$ и высотой h.

Решение. Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 483). Пусть x — ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной с площадью основания Q_1 и высотой x, другой с площадью основания Q_2 и высотой $x - h$.

Из подобия этих пирамид находим x: $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. Объем усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3} h (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2).$$

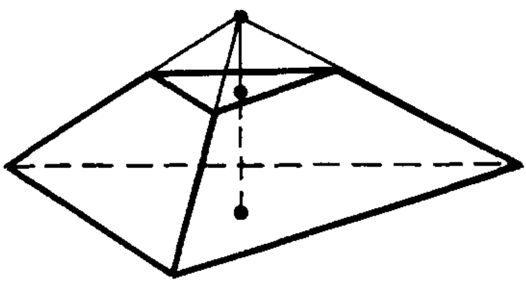


Рис. 483

201. ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ТЕЛ

Пусть T и T' — два простых подобных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, при котором тело T переходит в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьем тело T на треугольные пирамиды P_1, P_2, ..., P_n. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T', переводит пирамиды P_1, P_2, ..., P_n в пирамиды P_1', P_2', ..., P_n'. Эти пирамиды составляют тело T', и поэтому объем тела T' равен сумме объемов пирамид P_1', P_2', ..., P_n'.

Так как пирамиды P_i' и P_i подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Следовательно, отношение объемов пирамид равно k^3. Так как тело T составлено из пирамид P_i, а тело T' составлено из пирамид P_i', то отношение объемов тел T' и T тоже равно k^3.

Число k — коэффициент подобия — равно отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Объемы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

З а д а ч а (48). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

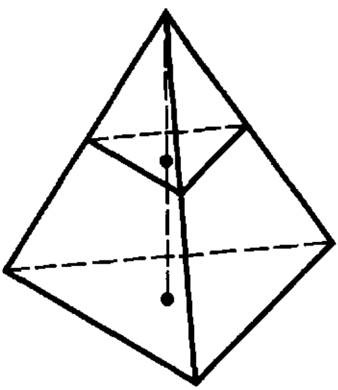


Рис. 484

Р е ш е н и е. Как мы знаем, проведенная плоскость отсекает подобную пирамиду (рис. 484). Коэффициент подобия равен отношению высот, т. е. $\frac{1}{2}$.

Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$. Следовательно, плоскость делит нашу пирамиду на части, объемы которых относятся как

$$\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные свойства объема.
2. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.
3. Докажите, что объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.
4. Докажите, что объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
5. Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
6. Докажите, что треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.
7. Выведите формулу для объема треугольной пирамиды.
8. Докажите, что объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.
9. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.

ЗАДАЧИ

1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?
2. Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514,15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Найдите плотность металла, из которого сделан куб.
3. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 $см^3$. Чему равно ребро куба?
4. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро.
5. Кирпич размером $25 \times 12 \times 6{,}5$ см имеет массу 3,51 кг. Найдите его плотность.
6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 $м^3$ на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.
7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.
8. Измерения прямоугольного бруска 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 $см^2$. Как увеличится его объем?
9. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса одного погонного метра трубы (плотность чугуна 7,3 $г/см^3$)?
10. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диа-

гональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β?

11. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол $30°$. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

12. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол $45°$. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.

13. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 $м^2$. Площади диагональных сечений 3 $м^2$ и 6 $м^2$. Найдите объем параллелепипеда.

14. Решите предыдущую задачу в общем случае, если площадь ромба Q, а площади диагональных сечений M и N.

15. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

16*. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

17*. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по 2α каждый. Найдите объем параллелепипеда.

18*. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α (рис. 485). Найдите объем параллелепипеда.

19. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

20. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3 г. Найдите плотность дерева.

21. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.

22. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите ее объем.

23. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 $м^2$, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.

24. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l (рис. 486).

25. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м,

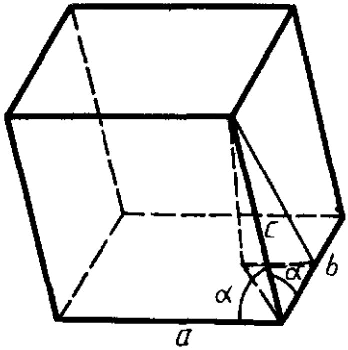


Рис. 485

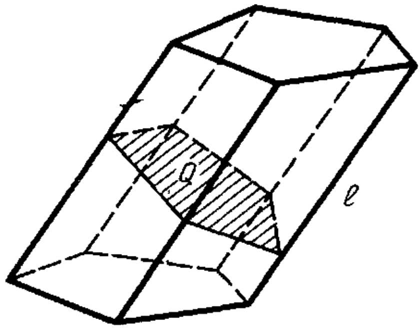


Рис. 486

а расстояния между содержащими их параллельными прямыми 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объем призмы.

26. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения 2 м/с.

27. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

28. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы.

29. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Найдите объем.

30. Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро равновеликого куба.

31. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы.

32. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен γ?

33. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

34. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды

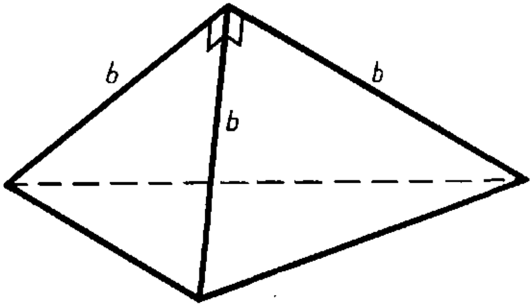


Рис. 487

a, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

35. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое равно b (рис. 487). Найдите объем пирамиды.
36. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны?
37. По ребру a правильного тетраэдра найдите его объем.
38. По ребру a октаэдра найдите его объем.
39. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, все боковые ребра равны 12,5 м. Найдите объем пирамиды.
40*. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.
41. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 см, каждое из остальных 3 см. Найдите объем пирамиды.
42. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.
43. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.
44. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.
45. В пирамиде с площадью основания Q_1 проведено сечение, параллельное основанию, на расстоянии h от него. Площадь сечения равна Q_2. Найдите высоту пирамиды.
46. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

47. Решите предыдущую задачу в случае правильной усеченной треугольной пирамиды.

48. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

49. Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

§ 22. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

202. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Если тело простое, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

Применим это определение к нахождению объема цилиндра с радиусом основания R и высотой H.

При выводе формулы для площади круга были построены такие два n-угольника (один — содержащий круг, второй — содержащийся в круге), что их площади при неограниченном увеличении n неограниченно приближались к площади круга. Построим такие многоугольники для круга в основании цилиндра. Пусть P — многоугольник, содержащий круг, а P' — многоугольник, содержащийся в круге (рис. 488).

Построим две прямые призмы с основаниями P и P' и высотой H, равной высоте цилиндра. Первая призма содержит цилиндр, а вторая призма содержится в цилиндре. Так как при неограниченном увеличении n площади оснований призм неограниченно приближаются к площади основания цилиндра S, то их объемы неограниченно приближаются к SH. Согласно определению объем цилиндра

$$V = SH = \pi R^2 H.$$

Итак, ***объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

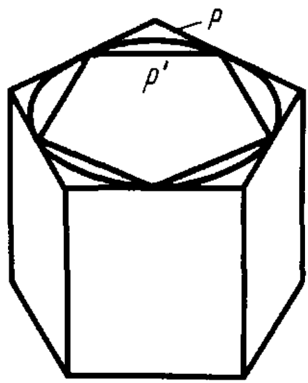


Рис. 488

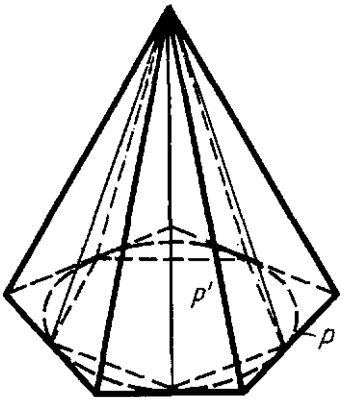


Рис. 489

203. ОБЪЕМ КОНУСА

Построим два многоугольника в плоскости основания конуса: многоугольник P, содержащий основание конуса и многоугольник P', содержащийся в основании конуса (рис. 489). Построим две пирамиды с основаниями P и P' и вершиной в вершине конуса. Первая пирамида содержит конус, а вторая пирамида содержится в конусе.

Как мы знаем, существуют такие многоугольники P и P', площади которых при неограниченном увеличении числа их сторон n неограниченно приближаются к площади круга в основании конуса. Для таких многоугольников объемы построенных пирамид неограниченно приближаются к $\frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания конуса, а H — его высота. Согласно определению отсюда следует, что объем конуса

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Итак, ***объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

204. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Задача (15). Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2<R_1$), а высота h.

Решение. Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 490). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой $x-h$.

Из подобия конусов находим x: $\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2}$, $x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}$.

Объем усеченного конуса равен:

$$V=\frac{1}{3}\left[\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\,\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2+R_1R_2+R_2^2).$$

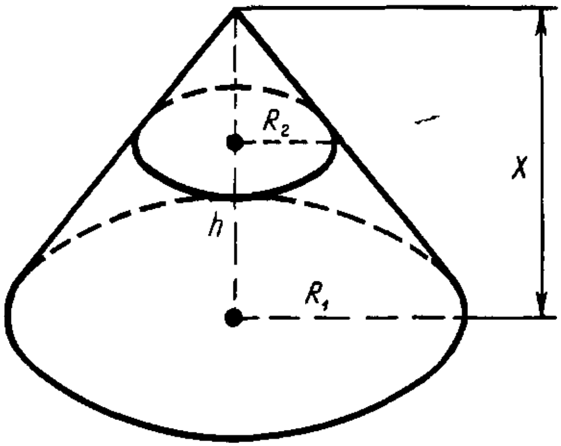


Рис. 490

205. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Телом вращения в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой. Круговой цилиндр, конус, шар являются примерами тел вращения. Найдем формулу для вычисления объема тела вращения.

Проведем плоскость через ось тела и введем в этой плоскости декартовы координаты x, y, приняв ось тела за ось x (рис. 491). Плоскость xy пересекает поверхность тела по линии, для которой ось x является осью симметрии. Пусть $y=f(x)$ — уравнение той части этой линии, которая расположена над осью x.

Проведем через точку $(x, 0)$ плоскость, перпендикулярную оси x, и обозначим через $V(x)$ объем части тела, лежащей слева от этой плоскости; $V(x)$ является функцией от x. Разность $V(x+h)-V(x)$ представляет собой объем слоя тела толщиной h, заключенного между двумя плоскостями, которые перпендикулярны оси x и проходят через точки с абсциссами x и $x+h$. Пусть M — наибольшее, а m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x, x+h]$. Тогда рассматриваемый слой тела содержит

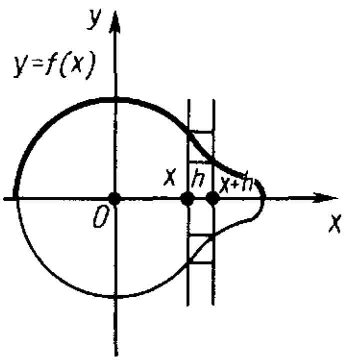


Рис. 491

цилиндр с радиусом m и высотой h и содержится в цилиндре с радиусом M и той же высотой h (см. рис. 491). Поэтому

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

При стремлении высоты h к нулю левая и правая части последнего неравенства стремятся к одной и той же величине $\pi f^2(x)$. Средняя же часть этого неравенства при стремлении h к 0 стремится к производной $V'(x)$ функции $V(x)$. Значит,

$$V'(x) = \pi f^2(x).$$

По известной формуле анализа

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)\,dx = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx,\ a < b.$$

Эта формула и дает объем части тела, заключенной между параллельными плоскостями $x = a$ и $x = b$.

206. ОБЪЕМ ШАРА

Применим полученную формулу для объема тел вращения к вычислению объема шара.

Введем декартовы координаты, приняв центр шара за начало координат (рис. 492). Плоскость xy пересекает поверхность шара радиуса R по окружности, которая, как известно, задается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

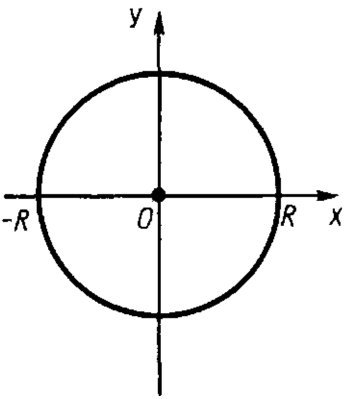


Рис. 492

Полуокружность, расположенная над осью x, задается уравнением

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2},\quad -R < x \leqslant R.$$

Поэтому объем шара определяется по формуле

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = $$

$$= \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Итак, *объем шара равен* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

207. ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА И СЕКТОРА

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Формулу для объема шарового сегмента получаем аналогично формуле объема шара (рис. 493):

$$V=\pi\int\limits_{R-H}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется (рис. 494). Объем шарового сектора получается сложением или вычитанием объемов соответствующих сегмента и конуса. Для объема шарового сектора получается следующая формула:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

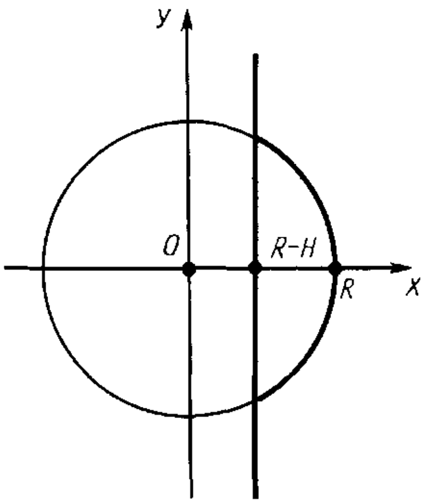


Рис. 493

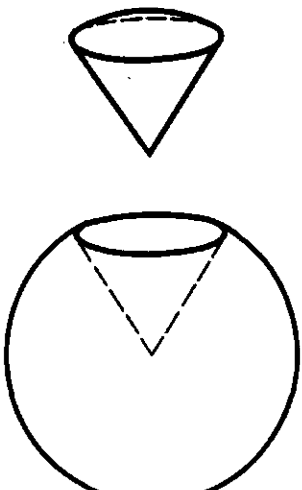


Рис. 494

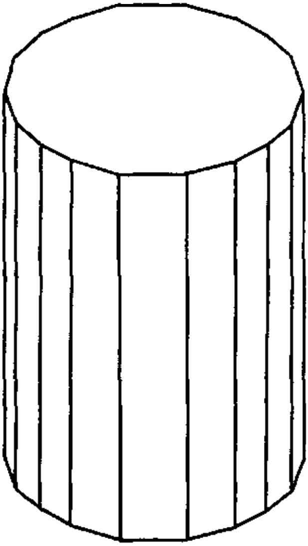


Рис. 495

208. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму (рис. 495). Площадь боковой поверхности этой призмы $S_n = P_n H$, где P_n — периметр основания призмы, а H — ее высота.

Как мы знаем, при неограниченном увеличении n периметр P_n неограниченно приближается к длине C окружности основания цилиндра. Следовательно, площадь боковой поверхности призмы неограниченно приближается к CH. Поэтому величина CH принимается за площадь боковой поверхности цилиндра.

Таким образом, ***площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле***

$$S = CH = 2\pi Rh,$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

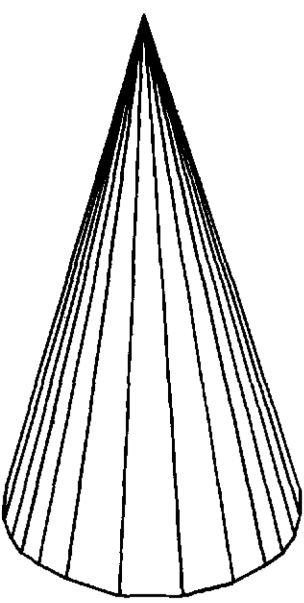


Рис. 496

209. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду (рис. 496). Площадь ее боковой поверхности

$$S_n = \frac{1}{2} P_n l_n,$$

где P_n — периметр основания пирамиды, а l_n — апофема.

При неограниченном увеличении n периметр основания P_n неограниченно приближается к длине C окружности основания конуса, а апофема l_n — к длине l образующей. Соответственно боковая поверхность пирамиды неограниченно приближается к $C\frac{l}{2}$. В связи с этим величина $C\frac{l}{2}$ принимается за площадь боковой поверхности конуса.

Итак, ***площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле***

$$S=\frac{1}{2}Cl=\pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1, R_2 и образующей l получается формула

$$S=\pi(R_1+R_2)\,l.$$

210. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

Опишем около сферы выпуклый многогранник с малыми гранями (рис. 497). Пусть S' — площадь поверхности многогранника, т. е. сумма площадей его граней. Найдем приближенное значение площади поверхности многогранника, предполагая, что линейные размеры граней, т. е. расстояние между любыми двумя точками любой грани, меньше ε.

Объем многогранника равен сумме объемов пирамид, имеющих своими основаниями грани многогранника, а вершиной — центр сферы (рис. 498). Так как все пирамиды имеют одну и ту же высоту, равную радиусу R сферы, то объем многогранника

$$V=\frac{1}{3}S'R.$$

Объем многогранника больше объема шара, ограниченного сферой, но меньше объема шара с тем же центром и с радиусом $R+\varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{4}{3}\pi R^3<\frac{1}{3}S'R<\frac{4}{3}\pi\,(R+\varepsilon)^3.$$

Отсюда

$$4\pi R^2<S'<4\pi\,(R+\varepsilon)^2\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right).$$

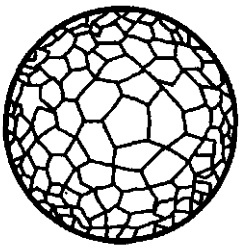


Рис. 497

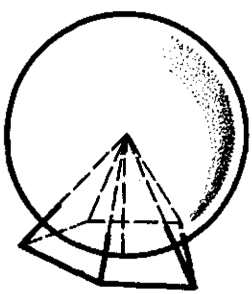


Рис. 498

Мы видим, что площадь поверхности описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, т. е. при неограниченном уменьшении ε, стремится к $4\pi R^2$. Поэтому величина $4\pi R^2$ принимается за площадь сферы.

Итак, ***площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле***

$$S=4\pi R^2.$$

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т. е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула

$$S=2\pi RH,$$

где H — высота сегмента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу для объема цилиндра.
2. Выведите формулу для объема конуса.
3. Выведите формулу для объема тел вращення.
4. Выведите формулу для объема шара.
5. Что такое шаровой сегмент? Выведите формулу для объема шарового сегмента.
6. Что такое шаровой сектор? По какой формуле вычисляется объем шарового сектора?
7. По какой формуле вычисляется площадь боковой поверхности цилиндра?
8. По какой формуле находится площадь боковой поверхности конуса (боковой поверхности усеченного конуса)?
9. По какой формуле вычисляется площадь сферы?

ЗАДАЧИ

1. 25 м медной проволокн имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
2. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?
3. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увелнчить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?
4. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

5. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.
6. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса 25 м этой трубы?
7. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня.
8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса.
9. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания c. Найдите объем конуса.
10. Образующая конуса l составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса.
11. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.
12. Жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м и диаметром основания 0,24 м, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?
13. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем полученного тела вращения.
14. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается около гипотенузы. Найдите объем полученного тела (рис. 499).
15*. Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.
16. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Какую ошибку (в процентах) совершают, когда вычисляют объем бревна, умножая его длину на площадь поперечного сечения в середине бревна?
17. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.
18. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Найдите объем этого конуса.
19. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?

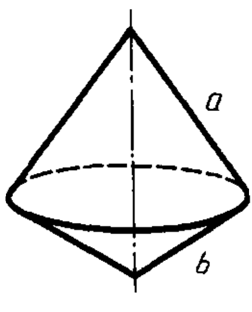


Рис. 499

20. По данным радиусам оснований R и r определите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.
21. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).
22. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.
23. Имеется кусок свинца массой 1 кг. Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска (плотность свинца 11,4 г/см^3)?
24. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?
25. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.
26. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?
27. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?
28. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
29. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?
30. Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.
31. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?
32. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела.
33. Поверхности двух шаров относятся как $m:n$. Как относятся их объемы?
34. Гипотенуза и катеты треугольника являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?
35. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Докажите.
36. Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 25 см (рис. 500)?
37. Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найдите полную поверхность тела.

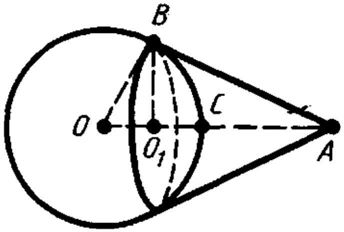


Рис. 500

38. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% материала?

39. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Найдите полную поверхность подвала.

40. Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найдите диаметр листа.

41. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения M. Чему равна полная поверхность цилиндра?

42. Конусообразная палатка высотой 3,5 м с диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

43. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м. Найдите поверхность крыши.

44. Площадь основания конуса S, а образующие наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.

45. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник?

46. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.

47. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью конуса.

48. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.

49. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого конца 0,036 м и образующая 1,42 м?

50. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер, имеющих форму усеченного конуса с диаметрами оснований 25 см и 30 см и образующей 27,5 см, если на 1 м^2 требуется 150 г олифы?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

§ 1.

4. Через две точки можно провести только одну прямую. **7.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **10.** Не принадлежит. **11.** Не может. **12.** Не могут. **13.** Не могут. **14.** 0,5 м или 5,9 м. **15.** 1) $AC=9$ м, $BC=6$ м; 2) $AC=10$ м, $BC=5$ м; 3) $AC=BC=7{,}5$ м; 4) $AC=6$ м, $BC=9$ м. **18.** 1), 4), 6) Пересекает; 2), 3), 5) не пересекает. **19.** 6 отрезков. **24.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **25.** 2), 3) Не может. **26.** 1) $\angle(ac)=45°$, $\angle(bc)=15°$; 2) $\angle(ac)=40°$, $\angle(bc)=20°$; 3) $\angle(ac)=\angle(bc)=30°$; 4) $\angle(ac)=24°$, $\angle(bc)=36°$. **29.** Не существует. **31.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **33.** 11 см. **34.** 100°. **36.** $PQ=5$ см, $QR=6$ см, $PR=7$ см. **37.** $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. **39.** В $\triangle ABC$ $AB=5$ см, $BC=6$ см, $AC=7$ см. **40.** Существует. **42.** Нельзя. **43.** Не может. **49.** 2) Указание. Соедините отрезком точки A и C и воспользуйтесь утверждением задачи 49, 1). **51.** 1) См. решение задачи 30 в тексте; 2) проведите через точку A прямую, отличную от a.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Не могут; 3) могут. **4.** 1) 105° и 75°; 2) 110° и 70°; 3) 45° и 135°; 4) 90° и 90°. **5.** 180°; 90°; 120°. **6.** 1) 72° и 108°; 2) 54° и 126°; 3) 55° и 125°; 4) 88° и 92°. **7.** 150°, 150°, 30°. **8.** 130°. **10.** 144° и 36°. **11.** 65° и 115°. **12.** Все углы прямые. **15.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **16.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **18.** Указание. Стороны угла лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, частью которой является данный луч. **19.** 90°. **20.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 19 и теоремой 2.3. **21.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **22.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 1.1. **23.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **24.** $\angle(a_1b)=120°$, $\angle(a_1c)=150°$, $\angle(bc)=30°$. **25.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°; 4) 130°. **26.** 1) Не проходит; 2) не может.

§ 3.

7. Указание. Продлите медианы на их длину. **9.** 0,3 м. **10.** 3,5 м. **11.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **22.** Указание. Воспользуйтесь свойством медианы в равнобедренном треугольнике. **25.** 3) Указание. Продлите биссектрису BD на ее длину. **27.** 15 м. **30.** Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 29. **39.** Указание. Продлите медианы на их длину.

§ 4.

5. Углы AB_1C_1 и AC_1B_1 и углы BB_1C_1 и CC_1B_1 внутренние односторонние, а углы AB_1C_1 и CC_1B_1 и углы BB_1C_1 и AC_1B_1 внутренние накрест лежащие. **7.** Углы BCA и DBC внутренние накрест лежащие, углы CAB и DBA внутренние односторонние. **14.** 1) 105° и 75°; 2) 75°. **15.** Три угла по 72° каждый и четыре угла по 108° каждый. **16.** Не может. **18.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **19.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **20.** Не может. **21.** Не может. **22.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **23.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **24.** 40°, 40°. **25.** 70° и 40° или 55° и 55°. **27.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°; 70°, 40°; 3) два угла равны $120° - \frac{2}{3}\alpha$ и один $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **29.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **31.** 90°. **32.** 110°, 35°, 35°. **33.** 60°, 30° и 90°. **34.** 110°. **36.** Точка A. **38.** 60°. **39.** $\angle D = \frac{\angle A}{2}$, $\angle E = \frac{\angle C}{2}$, $\angle DBE = \angle B + \frac{\angle A + \angle C}{2}$. **40.** 140°, 10°. **41.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **42.** Углы $\triangle ABD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$; углы $\triangle CBD$: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **44.** 90°, 45°, 45°. **45.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **46.** 150°. **47.** 90°.

§ 5.

1. Указание. Отложите на луче отрезок, равный радиусу. **2.** Указание. См. задачу 1. **5.** 1) 60°; 2) 120°. **7.** Не может. **9.** 30°. **10.** 60° и 120°. **11.** 70 см, 10 см. **12.** Не могут. **13.** 1) Не могут; 2) не могут. **14.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. **15.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. 3) Указание. Докажите сначала, что общая точка данных окружностей лежит на прямой, проходящей через их центры. **16.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. **18.** Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 16, 1). **28.** Указание. Начните с построения равностороннего треугольника. **32.** Указание. В искомом треугольнике продлите медиану на ее длину. **36.** Указание. См. задачу 35. **37.** Указание. См. задачу 35. **38.** Указание. См. задачу 35. **39.** Указание. Начните с построения высоты. **41.** Указание. См. задачу 50 § 4. **42.** Указание. См. задачу 41. **46.** Указание. Постройте сначала треугольник, у которого одна сторона равна заданной стороне искомого треугольника, другая сторона — сумме двух других его сторон и угол между ними равен заданному углу. **47.** Указание. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче с той разницей, что вместо суммы двух сторон искомого треугольника надо взять их разность. **48.** См. указание к задаче 46. **50.** Указание. Сведите решение задачи к предыдущей, построив вспомогательную окружность, концентричную одной из данных, с радиусом, равным сумме или разности радиусов данных окружностей.

§ 6.

3. Три. **4.** 10 м. **5.** 3 см и 4 см. **7.** $BC = AD = 4{,}8$ м. **8.** $AD = 15$ см, $CD = 10$ см. **9.** $\angle B = \angle D = 150°$, $\angle C = 30°$. **10.** 3 см. **11.** 40°, 140°, 140°. **12.** 115° и 65°. **13.** Не могут. **14.** 60°, 60°, 120°, 120°. **15.** 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. **16.** 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. **19.** $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Указание. Докажите, что

$\triangle ABE$ равнобедренный с основанием AE. **20.** 0,6 м и 0,8 м. **21.** $AB=BD=1{,}1$ м, $AD=0{,}8$ м. **28.** 60 см. **29.** 10 см и 18 см. **30.** 12 см, 20 см. **31.** 12 см. **32.** 10 см и 25 см или 7,5 см и 18,75 см. **35.** 80° и 100°. **37.** 60° и 120°. **41.** 4 м. **43.** 2 м. **44.** 2 м. **45.** 4 м, 8 м. **46.** 1 м. **47.** 10 см. **50.** 4 см, 5 см, 6 см. **51.** 6 см. **52.** 6см, 5 см, 5 см. **56.** 5 м, 6 м. **57.** $a+b$. **59.** 3 м, 4 м. **61.** 70° и 110°. **62.** 1,7 м. **63.** 24 см, 36 см. **64.** 60° и 120°. **65.** 15 м. **66.** 3 см. **67.** 4 м, 6 м. **68.** 2,2 м. **69.** 9 см и 5 см. **70.** a. **71.** Указание. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны боковым сторонам трапеции, а третья — разности оснований. **72.** Указание. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а третья — сумме ее оснований. **73.** Постройте сначала отрезок $x=\frac{ab}{d}$, воспользовавшись решением задачи 6.1.

§ 7.

2. 1) 5; 2) $\sqrt{2}\approx1{,}4$; 3) $\sqrt{61}\approx7{,}8$. **3.** 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11}\approx3{,}3$. **4.** 5 м или $\sqrt{7}$ м $\approx2{,}6$ м. **5.** Не могут. **6.** 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. **7.** 109 см. **8.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **9.** Нельзя. **10.** $\sqrt{7}$ м $\approx2{,}6$ м. **12.** Могут. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.** Указание. Постройте сначала отрезки $c=\frac{a+b}{2}$ и $d=\frac{|a-b|}{2}$. Тогда искомый отрезок $x=\sqrt{c^2-d^2}$. **16.** $\sqrt{116}$ м $\approx10{,}8$ м. **18.** 90°. **20.** Указание. Соедините одну из точек с вершиной треугольника отрезком и воспользуйтесь результатом задачи 19. **22.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 21. **26.** Не может. **27.** 2 м. **28.** Указание. Продлите медиану на ее длину. **31.** 2) Указание. Сведите решение этой задачи к предыдущей согласно рисунку 165, *б*. **32.** Не могут. **34.** $R-d$, $R+d$. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **35.** $d+R$, $d-R$. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **36.** Не могут. **37.** Не могут. **38.** Указание. Сравните расстояние между центрами окружностей с их радиусами. **39.** Не могут. **41.** Указание. Данные числа удовлетворяют условиям задачи 40. **42.** 1), 3), 4) Нельзя; 2) можно. **43.** Воспользуйтесь результатом задачи 41. **44.** 10 см, 6 см. **45.** $90°-\alpha$, $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. **46.** $90°-\alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. **49.** 1) $\sin 16°=0{,}2756$, $\cos 16°=0{,}9613$; 2) $\sin 24°36'=0{,}4163$, $\cos 24°36'=0{,}9092$; 3) $\sin 70°32'=0{,}9428$, $\cos 70°32'=0{,}3333$; 4) $\sin 88°49'=0{,}9998$, $\cos 88°49'=0{,}0206$. **50.** 1) $x=1°$; 2) $x=30°6'$; 3) $x=47°3'$; 4) $x=86°9'$. **51.** 1) $\operatorname{tg}10°=0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg}40°40'=0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg}50°30'=1{,}213$; 4) $\operatorname{tg}70°15'=2{,}785$. **52.** 1) $x=17°53'$; 2) $x=38°7'$; 3) $x=80°46'$; 4) $x=83°50'$. **53.** 31°25′; 31°25′; 117°10′; 23,8 м. **54.** 34°10′ и 55°50′. **55.** 51°. **56.** 116°16′ и 63°44′. **57.** 29°52′ и 150°8′. **58.** 12 м, 45°14′. **59.** 60°16′. **60.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **61.** 1) а) 5; 36°52′; 53°8′; б) 41; 12°41′; 77°19′; в) 29; 43°36′; 46°24′; г) 61; 10°23′; 79°37′; 2) а) 12; 22°37′; 67°23′; б) 24; 16°16′; 73°44′; в) 15; 28°4′; 61°56′; г) 13; 81°12′; 8°48′; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40′; 3,08; 2,55; в) 19°24′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78; 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **62.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1+\operatorname{tg}^6\alpha$. **63.** 1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **64.** 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **66.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **67.** $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$,

$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. **68.** 29 см или $\sqrt{882}$ см $\approx 29{,}7$ см. **69.** $(\sqrt{3}-1)$ м $\approx 0{,}732$ м; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\approx$ $\approx 0{,}517$ м. **70.** $60°$ и $120°$. **71.** $60°$, $60°$, $120°$, $120°$. **72.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **73.** BC. **74.** $\angle A$.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** Прямая, параллельная оси y. **8.** Две прямые $x=3$ и $x=-3$. **10.** Положительную. **11.** 4; 3. **12.** 1) (3; 2); 2) $(-1;\ 3)$; 3) (1; 1). **13.** 1) $(-2;\ 3)$; 2) $(3;\ -5)$; 3) $(-4;\ 4)$. **16.** (0; 1), $(-2;\ 0)$, $(-2;\ 1)$. **17.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **18.** Точка B. **20.** (3; 3) и (15; 15). **23.** (3; 4), $(-4;\ 3)$, (0; 5). **24.** (5; 12) и $(5;\ -12)$; $(5;\ -12)$ и $(-5;\ -12)$. **25.** $x^2+(y-3)^2=13$. **26.** $(x+4)^2+$ $+(y-3)^2=25$. **27.** $(-2;\ 0)$ или (4; 0). **28.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **29.** $(x+3)^2+$ $+(y-4)^2=25$. **31.** (0; 1) и $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$. **32.** (7; 0) и (1; 0). **36.** 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$. **37.** $x=0$, $y=0$, $x+2y-4=0$. **38.** $a=b=\frac{1}{3}$. **39.** 1) $(-3;\ 0)$ и $\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$; 2) (4; 0) и (0; 3); 3) $(-2;\ 0)$ и (0; 3); 4) (2,5; 0) и $(0;\ -5)$. **40.** 1) $(1;\ -2)$; 2) (2; 4); 3) $(0{,}5;\ -2)$. **41.** Указание. Найдите точку пересечения двух прямых и проверьте, лежит ли она на третьей прямой. **42.** $\left(2;\ \frac{5}{3}\right)$. **43.** 1) и 6), 2) и 3), 4) и 5). **45.** $x=2$. **46.** $y=3$. **47.** $3x-2y=0$. **48.** 1) $k=-\frac{1}{2}$; 2) $k=-\frac{3}{4}$; 3) $k=\frac{3}{2}$; 4) $k=2$. **49.** 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $30°$. **50.** 2) (0; 1) и $(-1;\ 0)$; 3) (0; 1) и $\left(-\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$; 4) (0; 1) и $\left(-\frac{2k}{k^2+1};\ \frac{1-k^2}{k^2+1}\right)$. **51.** Прямая касается окружности при $c=\pm\sqrt{2}$, пересекает ее при $|c|<\sqrt{2}$ и не пересекает при $|c|>\sqrt{2}$. Указание. Прямая, касающаяся окружности, имеет с ней единственную общую точку, т. е. корни соответствующего квадратного уравнения должны совпадать. **52.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120°=-\sqrt{3}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **53.** $\sin 160°=0{,}3420$; $\cos 140°=-0{,}7660$; $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$. **54.** 1) $\sin 40°=$ $=0{,}6428$, $\cos 40°=0{,}7660$, $\operatorname{tg} 40°=0{,}8391$; 2) $\sin 14°36'=0{,}2521$, $\cos 14°36'=$ $=0{,}9677$, $\operatorname{tg} 14°36'=0{,}2605$; 3) $\sin 70°20'=0{,}9417$, $\cos 70°20'=0{,}3365$; $\operatorname{tg} 70°20'=2{,}798$; 4) $\sin 30°16'=0{,}5040$, $\cos 30°16'=0{,}8637$, $\operatorname{tg} 30°16'=0{,}5836$; 5) $\sin 130°=0{,}7660$, $\cos 130°=-0{,}6428$, $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$; 6) $\sin 150°30'=$ $=0{,}4924$, $\cos 150°30'=-0{,}8704$, $\operatorname{tg} 150°30'=-0{,}5658$. **55.** $\alpha_1\approx 11°32'$ или $168°28'$; $\alpha_2\approx 134°26'$; $\alpha_3\approx 158°12'$. **56.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$. **58.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$. **61.** Указание. Рассмотрите сначала случай, когда оба угла α и β острые. **62.** См. указание к задаче 61.

§ 9

2. В квадрат. **4.** Указание. Постройте последовательно вершины C, D и E равносторонних треугольников ABC, ACD, ADE. Точка E искомая. **7.** Не может. **9.** Указание. Вершины данного четырехугольника переходят при симметрии относительно его центра в вершины. **10.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно данной точки. **11.** 1) Отрезок; 2) угол; 3) треугольник. **14.** 1) $(-3;\ -4)$; 2) $(3;\ 4)$; 3) $(3;\ -4)$. **19.** Три. **24.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно прямой b. **28.** $(1;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(1;\ 1)$. **29.** 1) $a=b=2$; 2) $a=-3$, $b=8$; 3) $a=b=1$. **31.** 1) Не существует; 2) существует. **34.** Одинаково направленные лучи: AB и DC, AD и BC, CD и BA, DA и CB. Противоположно направленные лучи: AB и CD, BC и DA, DC и BA, AD и CB.

§ 10.

1. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ одинаково направлены, $\overline{BA}$ и каждый из векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ противоположно направлены. **4.** $(2;\ 4)$, $(-1;\ 2)$ и $(c_1;\ c_2)$. **5.** $m=\pm 12$, $n=\pm 7$. **8.** 1) $\bar c\,(-3;\ 4)$, $|\bar c|=5$; 2) $\bar c\,(6;\ 8)$, $|\bar c|=10$. **10.** 1) $\bar c\,(5;\ -12)$, $|\bar c|=13$; 2) $\bar c\,(-6;\ 8)$, $|\bar c|=10$. **12.** $\overline{AB}=\bar a-\bar b$, $\overline{CD}=\bar b-\bar a$. **14.** 2) Указание. Постройте $\triangle ABC$, у которого $\overline{AB}=\bar a$, $\overline{BC}=\bar b$. Тогда $\overline{AC}=\bar a+\bar b$. **15.** $\dfrac{P}{\sqrt3}$. **19.** $\bar c\,(-6;\ -8)$, $|\bar c|=10$.

20. 1) $\pm\dfrac12$; 2) ± 1; 3) $\pm\dfrac{5}{13}$. **23.** $\overline{AB}=\dfrac12(\bar a+\bar b)$, $\overline{CD}=-\dfrac12(\bar a+\bar b)$, $\overline{CB}=\dfrac12(\bar b-\bar a)$, $\overline{AD}=\dfrac12(\bar a-\bar b)$. **25.** $\bar a$ и $\bar c$, $\bar b$ и $\bar d$. Векторы $\bar a$ и $\bar c$ одинаково направлены, а $\bar b$ и $\bar d$ противоположно направлены. **26.** $m=2$. **27.** $\lambda=-1$, $\mu=0$. **28.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 10.3. **29.** 90°. **30.** $\sqrt3$. Указание. $|\bar a+\bar b|^2=(\bar a+\bar b)^2$. **31.** 30°. **32.** $\cos A=0{,}6$, $\cos B=0$, $\cos C=0{,}8$. **33.** $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$. **35.** $m=-\dfrac83$. **36.** $\lambda=-1$. **39.** $m_a=\dfrac12\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b=\dfrac12\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c=\dfrac12\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. **40.** Указание. Воспользуйтесь задачей 38. **45.** Единичные векторы $\bar a$, $\bar c$ и $\bar d$, векторы $\bar a$ и $\bar d$ коллинеарны. **46.** $\bar e\,(0{,}6;\ 0{,}8)$. **47.** 2, -3. **48.** 1) $\overline{OX}=\dfrac{\mu\bar a+\lambda\bar b}{\mu+\lambda}$.

§ 11.

5. Треугольник. **6.** $\angle A=30^\circ$, $A_1B_1=1{,}5$ м. **8.** Указание. Постройте сначала какую-нибудь окружность, касающуюся сторон угла, и воспользуйтесь гомотетией относительно вершины угла. **9.** Указание. Воспользуйтесь гомотетией относительно одной из вершин треугольника. **11.** 13,6 см. **12.** $AC=4$ м, $B_1C_1=14$ м. **13.** $AC=24$ см, $A_1C_1=18$ см, $B_1C_1=15$ см. **16.** $\dfrac{ah}{a+h}$. **17.** $\dfrac{m}{n}$. **18.** 4 см. **19.** $\dfrac{27}{28}$. **20.** 1) 14 см; 2) 6 дм. **22.** $m:n$. **23.** $n:m$. **24.** $AC=18$ м. Указание. Треугольники ACD и CBA подобны. **25.** $m:n$. **26.** 15 см, 18 см. **27.** 4,5 см. **29.** $\dfrac{a(\sqrt5-1)}{2}$. **30.** $A_1C_1=1{,}2$ м, $AC=3$ м. **32.** $\angle D=180^\circ-2\angle A$, $\angle E=180^\circ-2\angle B$, $\angle F=180^\circ-2\angle C$. **34.** Подобны. **35.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **37.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **38.** 6,5 м, 5,5 м. **39.** 1) Подобны; 2) не подобны. **40.** 15 см, 20 см, 25 см. **41.** 21 см. **43.** $m^2 : n^2$. **4.** ≈ 42 м. **45.** $\frac{bc}{b+c}$. **46.** Указание. Проведите через точку B прямую, параллельную прямой DC. **47.** Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей. **48.** 1) 300° и 60°; 2) 230° и 130°; 3) 190° и 170°. **49.** 5 см. **50.** 30° или 150°. **52.** Указание. См. задачу 51. **54.** α или $180° - \alpha$. **55.** 50°. **56.** Указание. Докажите сначала, что противолежащие вершины вписанного четырехугольника лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие противолежащие вершины. **60.** Указание. Воспользуйтесь двумя предыдущими задачами. **63.** $\approx 225{,}8$ км. Указание. См. задачу 62. **64.** $\approx 82{,}7$ км.

§ 12.

1. $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\sqrt{13}$ или $\sqrt{109}$ м. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2 \pm 2cd\cos\alpha}$. **5.** $\sqrt{a^2+b^2 \pm 2ab\cos\alpha}$. **6.** 2,25 м, 3,75 м. **8.** $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $2\sqrt{6}$ м, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ м. **9.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ м, $2\sqrt{7}$ м, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ м. **10.** $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ м, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ м, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ м. **11.** Сторона AB увеличивается. **12.** Не может. **14.** $\frac{35}{2\sqrt{6}}$ м. **15.** $AB = \frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **18.** Сторона AB наибольшая, сторона BC наименьшая. **19.** Угол B наибольший, угол C наименьший. **20.** Боковая сторона больше. **24.** Указание. Продлите медиану CD за точку D на ее длину. **25.** Указание. Воспользуйтесь свойством перпендикуляра и наклонных, проведенных к прямой из одной точки, и утверждением предыдущей задачи.

26. 1) $\alpha = 105°$,	$b \approx 2{,}59$,	$c \approx 3{,}66$;
2) $\gamma = 45°$,	$b \approx 17{,}9$,	$c \approx 14{,}6$;
3) $\alpha = 20°$,	$b \approx 65{,}8$,	$c \approx 88{,}6$;
4) $\gamma = 119°$,	$a \approx 16{,}7$,	$c \approx 24{,}8$;
5) $\gamma = 68°$,	$a \approx 13{,}6$,	$b \approx 11{,}2$.
27. 1) $\alpha \approx 79°$,	$\beta \approx 41°$,	$c \approx 10{,}6$;
2) $\alpha \approx 11°$,	$\beta \approx 39°$,	$c \approx 28$;
3) $\beta \approx 27°$,	$\gamma \approx 58°$,	$a \approx 19{,}9$;
4) $\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 15°$,	$a \approx 22{,}9$;
5) $\alpha \approx 16°$,	$\gamma \approx 12°$,	$b \approx 53{,}4$;
6) $\alpha \approx 130°$,	$\gamma \approx 35°$,	$b \approx 8{,}09$.
28. 1) $c \approx 8{,}69$,	$\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 39°$;
2) $c \approx 19{,}6$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 29°$;
3) $c \approx 22{,}3$,	$\beta \approx 6°$,	$\gamma \approx 10°$;
4) решения не имеет;		
5) $c \approx 11{,}4$,	$\alpha \approx 42°$,	$\gamma \approx 108°$
или $c \approx 2{,}49$,	$\beta \approx 138°$,	$\gamma \approx 12°$.
29. 1) $\alpha \approx 29°$,	$\beta \approx 47°$,	$\gamma \approx 104°$;
2) $\alpha \approx 54°$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 113°$;
3) $\alpha \approx 34°$,	$\beta \approx 44°$,	$\gamma \approx 102°$;
4) $\alpha \approx 39°$,	$\beta \approx 93°$,	$\gamma \approx 48°$;
5) $\alpha \approx 15°$,	$\beta \approx 11°$,	$\gamma \approx 154°$;
6) $\alpha \approx 136°$,	$\beta \approx 15°$,	$\gamma \approx 29°$.

§ 13.

2. R_1+R_2+d, R_1-R_2-d. **6.** Не может. **8.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **12.** 1) 8; 2) 12. **13.** 1) 10 сторон; 2) 15 сторон. **14.** Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. **15.** Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. **18.** Указание. Выразите оба радиуса через сторону треугольника. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Найдите радиус окружности. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21.** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24.** Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов. **25.** Указание. Сначала с помощью задачи 29 § 11 найдите сторону 10-угольника, а затем по теореме косинусов — сторону 5-угольника. $a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **28.** $b=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. **29.** $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **30.** Указание. Впишите сначала правильный шестиугольник. **32.** $\frac{R_1r_2}{r_1}$. **33.** $a:b$. **34.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **35.** 6,28 мм. **36.** $\approx 3{,}06$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 23. **37.** $\approx 3{,}11$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 24. **38.** $\approx 6366{,}2$ км. **39.** $\approx 6{,}3$ см. **40.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. **41.** 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3) R. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. **42.** $\approx 351{,}9$ м/мин. **43.** 1) $\frac{\pi}{6}$ см; 2) $\frac{\pi}{4}$ см; 3) $\frac{2\pi}{3}$ см; 4) $\frac{3\pi}{2}$ см. **44.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **45.** $\approx 31''$. **46.** 1) $\approx 0{,}79$ м; 2) $\approx 0{,}52$ м; 3) $\approx 2{,}09$ м; 4) $\approx 0{,}80$ м; 5) $\approx 1{,}06$ м; 6) $\approx 2{,}63$ м. **47.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Указание. По хорде и соответствующему центральному углу найдите радиус окружности. **48.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}l}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}l}{2\pi}$. Указание. Найдите сначала радиус окружности. **49.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **51.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 22,5°; 4) 150°; 5) 70°; 6) 240°.

§ 14.

1. Указание. Примените теорему Пифагора. **2.** ≈ 180 м. **3.** $S=\frac{a^2}{2}$. **4.** В 2 раза. **5.** Площадь увеличится в 9 раз. **6.** В 5 раз. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см^2. **12.** 202,8 см^2. **14.** $\sqrt{15}$ см. **17.** 4800 м^2. **18.** $\frac{a^2}{4}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** 600 см^2. **24.** 55 см, 48 см. **25.** $\angle C=90°$. **26.** $\approx 0{,}47$ м^2. **27.** 5,64 м^2. **28.** $\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **30.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **31.** $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **32.** 1) 24 см; 2) 24 см. **33.** 13,44 см. **34.** 12 см; 11,2 см; $\frac{168}{13}$ см. **35.** 1,344. **36.** 1) 4; 2) 7,2; 3) 4,8; 4) $\frac{5040}{169}$. **37.** 480 см^2. **38.** 408 см^2. **39.** 540 м^2. **43.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$,

$r=1{,}5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{4\sqrt{6}}$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **44.** 4,5 см. **45.** $R=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **46.** $R=\frac{169}{24}$ см, $r=\frac{10}{3}$ см. **47.** Указание. Воспользуйтесь свойством касательных, проведенных из одной точки к окружности. **48.** $R=29$ см, $r=12$ см. **50.** 1 : 4. **51.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **52.** $a^2:b^2$. **53.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **54.** 1) 20π см^2; 2) 12π м^2; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **55.** 1) В 4 раза; 2) в 25 раз; 3) в m^2 раз. **56.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **57.** $\frac{1}{4}$. **58.** 2. **59.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **60.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. **61.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **62.** 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 15.

2. Можно. **8.** Указание. Возьмите точку в другой плоскости и проведите через нее и данную прямую плоскость. Примените к этой плоскости аксиому параллельных. **12.** Четыре плоскости. **14.** Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного.

§ 16.

2. Нельзя. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **7.** 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **8.** 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. **9.** Нельзя. **13.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **19.** Указание. См. задачу 16. **20.** Не всегда. Указание. См. задачу 16. **26.** Решения нет, если точка лежит в плоскости прямых. **32.** $A_1B_1=a$. **35.** Указание. Сравните отношение отрезков двух произвольных прямых: $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$. **38.** Средней линией. **39.** Не может. **40.** Может. **41.** Указание. Отношение отрезков сохраняется. **42.** Указание. Проекция перпендикулярного диаметра проходит через середины хорд, параллельных проекции данного диаметра.

§ 17.

2. Указание. См. задачу 1. **3.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **7.** 2 м. **8.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **14.** 2,6 м. **15.** $\approx 3{,}9$ м. **16.** 9 м. **17.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** 1 м. **20.** 6,5 м. **21.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **22.** Окружность. **23.** 6 см, 15 см. **24.** 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. **25.** 9 см. **27.** 6 м. **28.** 5 м, 3 м. **29.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **31.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **33.** 0,36 м или 0,44 м. **36.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **37.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **38.** 0,6 м. **39.** $\frac{am}{m+n}$ (m соответствует основанию, через которое проведена плоскость).

40. $\frac{a}{2}$. 41. Длина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, длина стороны $\sqrt{b^2-a^2}$. 42. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. 43. $\sqrt{2}$ м. 44. $2\sqrt{2}$ м. 46. 2,5 м. 47. 6 м. 48. 14 см. 49. $\sqrt{a^2+b^2}$. 50. $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. 51. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 52. 2,5 м. 53. $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. 55. Указание. Прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны. 56. $\sqrt{23}$ м. 57. 4 м. 59. 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. 60. $\sqrt{a^2+b^2}$. 61. 1,3 м. 62. 1,7 м.

§ 18.

1. На оси z. 3. (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3); (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). 4. Расстояние от плоскости xy равно 3, от плоскости xz равно 2, от плоскости yz равно 1; расстояния от осей x, y, z соответственно равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; расстояние от начала координат равно $\sqrt{14}$. 6. (2; 2; 2) и (−2; −2; −2). 7. $C(0; 0; 0)$. 8. $x+2y+3z=7$. 12. $B(0; -1; 3)$. 13. 1) $D(6; 2; -2)$; 2) $D(0; -2; 2)$; 3) $D(-1; 7; -2)$. 18. (−1; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3). 20. Указание. См. задачу 16. 24. (−1; −2; 1). 25. 1), 2), 4) Не существует; 3) существует. 30. 90°. 31. $\alpha+\beta$ или $|\alpha-\beta|$. 32. 40° или 20°. 36. 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 37. 30°. 38. $a\sqrt{6}$. 39. $a\sqrt{2}$. 40. $3a$. 41. 30°. 44. 30°. 45. 13 м; $\sqrt{409}$ м. 46. 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. 47. 3,36 м. 48. 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 49. 1) $\frac{30}{7}$ м^2 или 48 м^2; 2) 2,5 м^2 или $\frac{128}{7}$ м^2. 51. $D(-2; 3; 0)$. 52. $D(2; 1; -2)$. 53. $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. 55. 1) $n=\frac{1}{3}$, 2) $n=-1$, 3) $n=2$, 4) $n=4$. 56. $c=1$. 57. $\sqrt{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+|\bar{a}||\bar{b}|}$. 58. 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. 60. $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. 62. $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. 63. 60°. 64. $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

§ 19.

1. 2) 60°. 4. $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. 6. $n(n-3)$. 9. Указание. Воспользуйтесь теоремой 17.3. 10. 144 см^2. 11. 7,5 см. 12. 12 см. 13. $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. 14. $3a^2$. 15. $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 16. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. 17. 22 см. 18. $Q\sqrt{2}$. 19. 12. 20. 2 м. 21. 4 м. 23. 45 см^2. 24. 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. 25. $3l^2\sqrt{3}$. 26. 12 м^2. 29. 188 м^2. 30. ≈262 см^2. 31. 10 см^2. 32. $2a$, $a\sqrt{2}$. 33. 13 м, 9 м. 34. 2 м^2, 3 м^2. 35. 1) 3; 2) 7; 3) 11. 36. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

37. 2 м^2. **38.** 1464 см^2. **39.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.** 3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 м^2. **48.** 540 см^2. **49.** 10 м^2. **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. **61.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a^2+\sqrt{a^2+12h^2})$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. **62.** $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$. **65.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **66.** $\cos\varphi=\frac{Q}{5}$. **67.** 16 см и 6 см или 12 см и 8 см. **68.** $\sqrt{2}$ см. **70.** 9 см. **71.** 1 дм. **72.** 6 см. **73.** 2 см. **74.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **75.** $20\sqrt{2}$. **76.** 24 м^2, 30°. **77.** 168 м^2. **78.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. **82.** 109°28′. Указание. Докажите сначала, что в каждой вершине октаэдра сходятся две пары перпендикулярных ребер. Затем примените формулу задачи 4.

§ 20.

1. 5 м. **3.** 36 см^2. **4.** 3 дм. **5.** 3 дм. **6.** $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. **8.** 10 м. **9.** 5 м. **10.** $\frac{l}{2}$. **11.** R^2. **12.** $2R^2\sin\alpha$. **13.** 500. **14.** $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$, если $\alpha+\varphi<90°$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$. **18.** 3 см. **19.** 5 м. **20.** $R-r$. **12.** a, $2a$. **22.** 30 дм^2. **23.** 9 дм^2. **24.** $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. **26.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **29.** 16π м^2. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR. **33.** ≈ 785 км. **34.** 12 см. **35.** 12 см. **36.** 5 см. **37.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **40.** 3 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **43.** $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **45.** 4π м. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **50.** $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **51.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **52.** 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **53.** $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **54.** $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$.

§ 21.

1. 6 см. 2. $\approx 8{,}4$ г/см^3. 4. 25 см. 5. 1,8 г/см^3. 6. $\approx 2{,}29$ м. 7. 30 м. 8. Вдвое. 9. $\approx 192{,}72$ кг. 12. 60 см^3. 13. 3м^3. 14. $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. 15. $\sqrt{2}$ м^3. 16. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. 17. $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3 \alpha}$. 18. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 19. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 20. 0,5 г/см^3. 21. 3 см^3. 22. $\frac{a^3}{8}$. 23. 6 м^3. 25. 3060 м^3. 26. 6048 м^3/ч. 27. 35 200 м^3. 28. 48 см^3. 29. 12 см^3. 30. 2 см. 31. $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 32. $\frac{h^3 \sin\gamma}{2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. 33. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 34. $\frac{3a^3}{4}$. Указание. Высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в основание. 35. $\frac{1}{6}b^3$. 36. $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. 37. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 38. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Указание. Разбейте октаэдр на две правильные четырехугольные пирамиды. 39. 360 м^3. 40. 48 см^3. Указание. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды. 41. $\sqrt{11}$ см^3. 42. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 43. $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. 45. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. 46. $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Воспользуйтесь формулой задачи 44. 47. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 49. $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 22.

1. $\approx 0{,}75$ мм. 2. ≈ 4500 л. 3. В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. 4. 4:1. 5. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 6. ≈ 61 кг. 7. $\approx 6{,}3$ м^3. 8. 9π м^3. Указание. Высота конуса равна радиусу его основания. 9. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. 10. $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. 11. $\approx 1{,}6$ т. 12. $\approx 0{,}35$ м. 13. $\frac{\pi a^3}{4}$. 14. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. 16. $\approx 2\%$. 17. $\frac{\pi}{3}|R^3-r^3|$. 18. $\frac{\pi^2}{3}|R^3-r^3|$. 19. 14 см. 20. $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, если $r<R$. 21. ≈ 14 см. 22. ≈ 39 см. 23. 167. 24. $33\frac{1}{3}\%$. Указание. Диаметр шара равен диаметру цилиндра. 25. ≈ 2148 см^3. 26. $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. 27. 45π см^3, 243π см^3. 28. 0,028. 29. 5:16. 30. 3528π см^3. Указание. Разбейте указанную часть шара на цилиндр и два сегмента. 31. $112{,}5\pi$ дм^3 или 450π дм^3. 32. $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. Указание. Тело является шаровым сектором. 33. $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. 34. Большая поверхность равновелика сумме двух других. 35. Указание. Выразите обе поверхности через сторону квадрата. 36. 180π см^2. 37. 512π см^2. 38. $\approx 40{,}4$ м^2. 39. ≈ 116 м^2. 40. 75 см. 41. $\pi m+2Q$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 42. $\approx 25{,}3$ м^2. 43. $\approx 33{,}98$ м^2. 44. $\frac{S}{\cos\alpha}$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 45. 2:3. 46. Выразите поверхность шара и конуса через длину образующей конуса. 47. 30°. 48. 1 м. Указание. Длина окружности основания равна длине дуги сектора. 49. $\approx 1{,}04$ м^2. 50. $\approx 4{,}3$ кг.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Погорелов Алексей Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник
для 7—11 классов
средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Спец. редактор *А. М. Зубков*
Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Оформление художника *Б. Л. Николаева*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Н. А. Киселева*
Корректор *Г. И. Мосякина*

ИБ № 14701

Подписано к печати с диапозитивов 24. 10. 91. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. офсетная. Гарнит. Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 24,5. Уч.-изд. л. 19,83+0,42 форз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано при посредстве В/О «Внешторгиздат»

Отпечатано Графишер Гросбетриб Пёснек ГмбХ · Эйн Мондрук-Бетриб
Gedruckt bei Graphischer Großbetrieb Pößneck GmbH · Ein Mohndruck-Betrieb