

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УНИВЕРСИТЕТЕ

КУРС ПРОГРАММНОЙ МЕХАНИКИ

Под редакцией И. В. Лопатина

«Механика в техническом университете»

Серия основана в 1999 году

В восьми томах

Том 1

Ответственный редактор К.С. Колесников

Редакционный совет:

К.С. Колесников (председатель)

Н.А. Алфутов

О.С. Нарайкин

Д.Н. Попов

О.А. Ряховский

В.А. Светлицкий

В.И. Усюкин

К.В. Фролов

И.С. Шумилов



Москва

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

2005

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Под редакцией К.С. Колесникова

Издание третье, стереотипное

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки дипломированных специалистов
в области техники и технологии*

Москва

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

2005

УДК 531.8 (075.8)

ББК 22.21

К93

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук В. В. Сазонов, кафедра теоретической механики Московского государственного авиационного института (технического университета МАИ)

Авторы: В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин, К. С. Колесников, В. А. Космодемьянский, Б. П. Назаренко, А. А. Панкратов, П. Г. Русанов, Ю. С. Саратов, Ю. М. Степанчук, Г. М. Тушева, П. М. Шкапов

К93 Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 736 с.: ил. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 1).

ISBN 5-7038-1695-5 (Т. 1)

ISBN 5-7038-1371-9

Изложены кинематика, статика, динамика точки, твердого тела и механической системы; аналитическая механика; теория колебаний; теория удара; введение в динамику тел переменной массы; основы небесной механики. Приведены примеры решения задач.

Содержание учебника соответствует программе и курсу лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов машиностроительных вузов и технических университетов. Может быть полезен аспирантам и преподавателям, а также специалистам в области статике и динамике механических систем.

УДК 531.8 (075.8)

ББК 22.21

ISBN 5-7038-1695-5 (Т. 1)

ISBN 5-7038-1371-9

© Коллектив авторов, 2002

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2002

Предисловие

Учебник является результатом многолетней преподавательской деятельности авторов в МГТУ им. Н. Э. Баумана, выпускающем инженеров-конструкторов и исследователей, которые специализируются в области машино- и приборостроения. Ему предшествовали учебники, написанные также преподавателями университета В. В. Добронравовым, А. Л. Дворниковым, Н. Н. Никитиным, которые переиздавались несколько раз и сыграли большую роль в обучении студентов.

Переход к университетскому инженерному образованию потребовал расширения содержания курса, более полной физической трактовки ряда вопросов и естественного усложнения используемого математического аппарата. С этой целью в разделе «Кинематика» более полно изложена глава «Общий случай движения твердого тела».

Статика излагается как самостоятельный раздел, поскольку такие предметы, как сопротивление материалов, теория механизмов и механика машин, детали машин, предметы инженерного проектирования, требуют от студента четкого представления о способах преобразования и передачи силовых взаимодействий в механизмах машины.

Значительные дополнения сделаны в разделе «Динамика». Здесь введены интегральные вариационные принципы, элементы небесной механики; более полно изложены теория колебаний, теория удара и некоторые другие вопросы.

Материал в учебнике распределен между авторами следующим образом: Предисловие, Введение, главы 8–12 написаны К. С. Колесниковым (примеры в гл. 8–12 составлены В. И. Дронгом); § В1–В6, В8 гл. 6 — Г. М. Тушевой; § В7, § 4.2, гл. 5, § 16.2 и 16.3 — П. Г. Русановым; главы 1, 2, 7, § 16.1 — П. М. Шкаповым; главы 3, 4 — Б. П. Назаренко; гл. 13, § 19.10 — Ю. С. Саратовым; главы 14, 15, 20 — В. В. Дубининым; § 15.6, 15.7 — Ю. М. Степанчуком; главы 17, 18 — В. И. Дронгом; § 18.6 — В. А. Космодемьянским; гл. 19 — М. М. Ильиным; главы 21 и 22 — А. А. Панкратовым.

Авторы будут благодарны читателям, приславшим замечания и пожелания по адресу: 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Введение

Теоретическая механика (классическая механика Галилея—Ньютона) есть наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел. Будучи по существу одним из разделов физики, теоретическая механика выделилась в самостоятельную дисциплину и получила широкое развитие благодаря своим обширным и важным приложениям в естествознании и технике, одной из основ которой она является. Беря свое начало от техники и развиваясь вместе с ней, теоретическая механика особенно тесно связана с техническими науками, в которых законы и методы механики широко используются как при обосновании ряда исходных положений, так и при проведении многочисленных конкретных инженерных расчетов.

Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, есть форма существования материи и охватывает все происходящие во вселенной изменения и процессы. В теоретической механике изучается одна из форм движения — механическое, состоящее в том, что тело изменяет с течением времени свое положение в пространстве по отношению к другим телам.

Для учета меры механического взаимодействия между телами в классической механике, основание которой положили Галилео Галилей (1564—1642) и Исаак Ньютон (1643—1727), вводится понятие о силе. Для данного тела сила является внешним фактором, изменяющим его движение. Характер движения зависит как от силы, так и от степени инертности тела. Чем больше инертность тела, тем медленнее изменяется его движение под действием данной силы, и наоборот. Мерой инертности тела является его масса. Таким образом, понятиями, лежащими в основе классической механики, являются: движущаяся материя (материальные тела), пространство и время как формы существования движущейся материи, масса как мера инертности материальных тел и сила как мера механического взаимодействия между телами.

В классической механике Галилея—Ньютона пространство считается трехмерным евклидовым, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов. Положение точки в таком пространстве относительно какой-либо системы отсчета определяется тремя независимыми параметрами, или координатами точки. Время в классической механике универсально. Оно не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга, оно протекает одинаково. Массы материальных объектов не зависят от скорости их движения.

После Г. Галилея и И. Ньютона (Галилей опубликовал «Беседы о науках» в 1638 г., Ньютон — «Математические принципы натуральной философии» в 1687 г.) методы механики начали быстро совершенствоваться благодаря применению мощного математического аппарата — анализа бесконечно малых. Основная заслуга в приложении этих методов к решению задач динамики принадлежит великому математику и механику Леонарду Эйлеру (1707–1783), являвшемуся с 1727 г. действительным членом молодой тогда Российской Академии наук и прожившему в Петербурге 31 год. Л. Эйлер разработал аналитические методы решения задач динамики путем составления и интегрирования дифференциальных уравнений. Аналитическое направление в развитии механики достигло наиболее широких обобщений в капитальном сочинении «Аналитическая механика» крупнейшего французского ученого Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813), вышедшем в 1788 г.

Из наших соотечественников М. В. Остроградскому (1801–1861) принадлежит ряд существенных результатов в развитии теоретической механики по аналитическому пути, в частности, им дан вариационный принцип динамики, который называется принципом Остроградского–Гамильтона, так как независимо от М. В. Остроградского в несколько менее общем виде он одновременно был сформулирован ирландским математиком Уильямом Гамильтоном (1805–1865). К двум случаям, когда движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно аналитически изучить до конца, С. В. Ковалевская (1850–1891) добавила третий. Работы А. М. Ляпунова (1857–1918) об устойчивости движения до сих пор в мировой науке являются непревзойденными.

Н. Е. Жуковский (1847–1921) создал себе мировую известность работами в области аэродинамики. Он значительно расширил границы механики и разработал прочную теоретическую базу для ряда разделов техники. Для него механика была не разделом прикладной математики, а подлинной наукой о природе, использующей все средства математики, но во всех стадиях своего развития опирающейся на эксперимент. Н. Е. Жуковский в 1878 г. организовал первую в России кафедру теоретической механики в ИМТУ (МВТУ им. Н. Э. Баумана) и заведовал ею в течение 43 лет до конца своей жизни. И. В. Мещерский (1859–1935) впервые дал уравнение движения точки переменной массы.

Успехи физики в начале XX в., ознаменовавшиеся новыми исследованиями в области электродинамики и строения материи, показали, что законы классической механики Галилея–Ньютона применимы только к движению тел, размеры которых значительно больше размеров атома, а скорости — значительно меньше скорости света. Для тел очень малых размеров и для очень больших скоростей выводы классической механики теряют свою силу.

В теории относительности, созданной Альбертом Эйнштейном (1879–1955), свойства пространства зависят от материальных объектов и их движения; пространство и время связаны между собой, они рассматриваются как единое четырехмерное пространство – время; время при этом зависит от того, в какой системе отсчета оно изменяется. Теория относительности внесла довольно существенные изменения в основы механики и показала ограниченность ньютоновских представлений о пространстве, времени и материи, вследствие чего стало возможным дать теоретическое обоснование ряду явлений, которые не могли быть объяснены с точки зрения классической механики. Кроме того, классическая механика оказалась неприменимой к теории строения атома, и это обстоятельство явилось причиной возникновения атомной или квантовой механики.

Несмотря на это, классическая механика Галилея–Ньютона продолжает сохранять свою огромную ценность как мощное орудие научного исследования различных вопросов естествознания и техники, а ее законы дают при этом вполне достаточную для практики точность. Она явилась основой для создания

многих прикладных направлений, получивших большое развитие. Это механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела, теория колебаний, динамика и прочность машин, гироскопия, теория полета и управления, навигация и др. Классическая механика замечательна тем, что наряду со строгостью изложения имеет широкое инженерное приложение. Все разнообразные технические сооружения и все современные расчеты, связанные с космическими полетами, построены на основе законов классической механики и, как показывает опыт, с успехом выполняют свое назначение. Поправки и изменения, вносимые в законы классической механики теорией относительности и квантовой механикой, исчезающе малы в обычных условиях и становятся заметными только при больших скоростях, близких к скорости света, и для тел, размеры которых имеют порядок размеров атома. Поэтому классическая механика Галилея—Ньютона никогда не потеряет своего научного значения и практической ценности.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИЙ ВЕКТОРОВ

В.1. Скалярные и векторные величины.

Единичные векторы

В теоретической механике широко применяются методы векторного исчисления, имеющие большое преимущество перед координатным методом благодаря компактности и физической наглядности векторных формул.

Главным преимуществом этих методов является независимость векторных формул от выбора системы координат.

В математической физике встречаются два типа величин: скалярные и векторные.

Скаляром называется величина, которая не имеет направления, но выражается числовым значением, не зависящим от выбора системы координат.

Вектором называется количественная характеристика, имеющая как числовое значение, так и направление, и не связанная с выбором системы координат. Геометрический образ

вектора — это направленный отрезок прямой, определенным образом ориентированный в евклидовом пространстве.

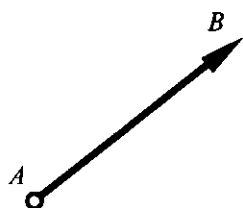


Рис. В.1

Точки A и B , ограничивающие вектор $\overline{AB}$ (рис. В.1), называют его началом и концом. Длина отрезка AB представляет собой модуль вектора $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = AB.$$

Часто вектор обозначают одной буквой с чертой над ней:

$$\overline{A} = \overline{AB},$$

а его модуль — символом

$$|\overline{A}| = A.$$

Если вектор не связан с какой-либо определенной линией или точкой, он называется *свободным*. Вектор, связанный с прямой, по которой он направлен, называется *скользящим*. Если же вектор связан с точкой своего приложения, он называется *приложенным*.

Рассмотрим далее основы векторного исчисления для свободных векторов.

Два вектора $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называются *равными*, если они равны по модулю и направлены вдоль параллельных прямых в одну сторону: если $A = B$, $\overline{A} \uparrow \overline{B}$, то $\overline{A} = \overline{B}$.

Если два вектора равны по модулю, но противоположно направлены, т. е. $A = B$, $\overline{A} \downarrow \overline{B}$, то $\overline{A} = -\overline{B}$.

Векторы, расположенные в одной плоскости, называются *компланарными*.

Если $\overline{A} \parallel \overline{B}$, то векторы называются *параллельными*, или *коллинеарными*; эти векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Единичным вектором, или **ортом**, данного вектора $\overline{A}$ называется вектор $\overline{a}_0$, по направлению совпадающий с данным вектором $\overline{A}$, а по модулю равный единице (рис. В.2). Тогда

$$\overline{A} = A \overline{a}_0, \text{ или } \overline{a}_0 = \overline{A} / A. \quad (\text{В.1})$$

Умножая вектор $\vec{A}$ на скаляр m , получаем новый вектор

$$\vec{B} = m \vec{A} = m A \vec{a}_0,$$

направленный в ту же или противоположную сторону в зависимости от знака скаляра m .

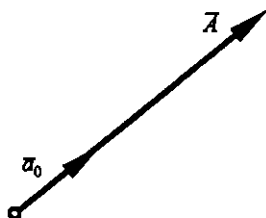


Рис. В.2

В.2. Проекция вектора на ось и плоскость

Осью называется прямая, на которой установлено положительное направление отсчета.

Ортогональной проекцией вектора $\vec{A} = \overline{AB}$ на ось l (рис. В.3) называется отрезок $A'B'$, заключенный между ортогональными проекциями на эту ось начала и конца вектора $\overline{AB}$, или алгебраическая величина, равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением вектора $\vec{A}$ и положительным направлением оси l :

$$(\overline{AB})_l = AB \cos(\overline{AB}, l) = \pm |A'B'|,$$

или

$$A_l = A \cos(\vec{A}, l). \quad (\text{В.2})$$

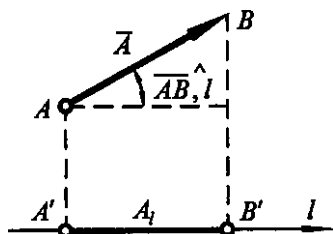


Рис. В.3

Ортогональной проекцией вектора $\vec{A} = \overline{AB}$ на плоскость Π называется вектор $\overline{A_1B_1}$, соединяющий ортогональные проекции начала и конца вектора $\overline{AB}$ на эту плоскость (рис. В.4). Модуль вектора $\vec{A}_\Pi$ определяется так:

$$|\vec{A}_\Pi| = A_\Pi = |\overline{A_1B_1}| = A \cos \varphi,$$

где φ — угол между $\vec{A}$ и $\vec{A}_\Pi$.

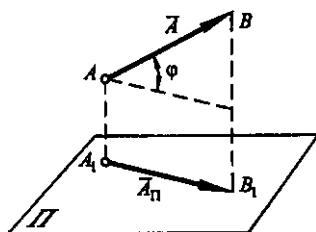


Рис. В.4

В.3. Координаты вектора. Аналитическое задание вектора. Радиус-вектор точки

Вектор $\vec{A} = \overrightarrow{OM}$ (рис. В.5) считается заданным, если известны его модуль A и направление, т. е. направляющие косинусы углов α , β и γ , образуемых этой прямой с осями прямоугольной системы координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(x, \overrightarrow{OM}), \quad \cos \beta = \cos(y, \overrightarrow{OM}), \\ \cos \gamma &= \cos(z, \overrightarrow{OM}).\end{aligned}\tag{В.3}$$

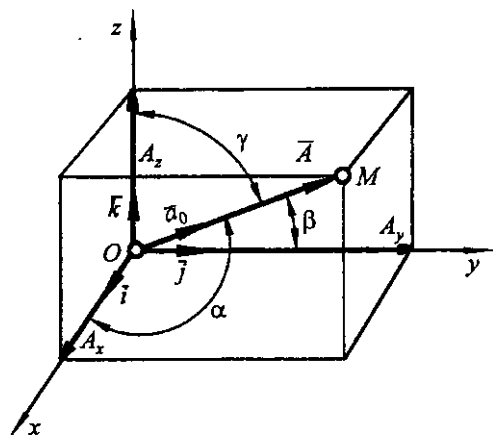


Рис. В.5

Поскольку косинусы углов α , β и γ связаны между собой известным соотношением $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то вектор однозначно определяется тремя независимыми величинами, называемыми *координатами вектора*. Удобнее всего принять за координаты вектора его проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned}A_x &= A \cos \alpha; \\ A_y &= A \cos \beta; \\ A_z &= A \cos \gamma.\end{aligned}\tag{В.4}$$

Поскольку

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2,$$

то модуль вектора и направляющие косинусы, согласно выражениям (В.3, В.4), определяются так:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}; \quad (\text{В.5})$$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A}. \quad (\text{В.6})$$

Введем в рассмотрение единичные векторы (или орты) координатных осей. Обозначим их соответственно $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (см. рис. В.5). Тогда $\bar{A}_x = A_x \bar{i} = \bar{i} A \cos \alpha$, $\bar{A}_y = A_y \bar{j} = \bar{j} A \cos \beta$, $\bar{A}_z = A_z \bar{k} = \bar{k} A \cos \gamma$ — ортогональные составляющие вектора $\bar{A}$, поэтому

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}. \quad (\text{В.7})$$

Однако, согласно (В.1), $\bar{A} = A \bar{a}_0$, $\bar{a}_0 = \bar{A}/A$. Тогда $\bar{a}_{0x} = a_{0x} \bar{i} = \bar{i} \cos \alpha$, $\bar{a}_{0y} = a_{0y} \bar{j} = \bar{j} \cos \beta$, $\bar{a}_{0z} = a_{0z} \bar{k} = \bar{k} \cos \gamma$.

Следовательно,

$$a_{0x} = \cos \alpha, \quad a_{0y} = \cos \beta, \quad a_{0z} = \cos \gamma, \quad (\text{В.8})$$

т. е. проекции единичного вектора $\bar{a}_0$ на оси координат равны косинусам углов α, β, γ для вектора $\bar{A}$.

В частном случае, если вектор $\overline{OM}$ измеряется в линейных единицах и имеет свое начало в начале координат O , а конец — в некоторой точке M , он

называется *радиус-вектором* точки M . Тогда проекциями вектора $\overline{OM} = \bar{r}$ (рис. В.6) являются координаты x, y и z точки M , и выражение для радиус-вектора точки M имеет вид

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}. \quad (\text{В.9})$$

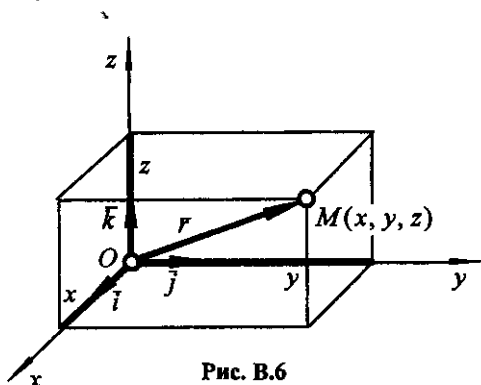


Рис. В.6

В.4. Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется вектор $\vec{A} + \vec{B}$, соединяющий начало вектора $\vec{A}$ с концом вектора $\vec{B}$ (рис. В. 7, а, б), если вектор $\vec{B}$ отложен от конца вектора $\vec{A}$. Это построение называется законом сложения векторов. Из рис. В.7, в ясно, что

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (\text{В.10})$$

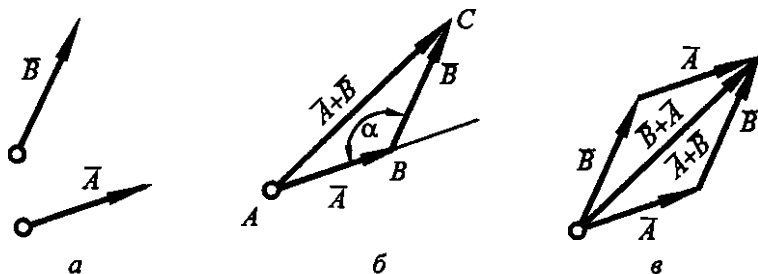


Рис. В.7

Таким образом, заключаем, что сложение двух векторов обладает свойством *коммутативности* (*переместительности*).

Из $\triangle ABC$ (см. рис. В.7, б) имеем

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha,$$

но $\alpha = \pi - (\vec{A}, \vec{B})$, тогда

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\vec{A}, \vec{B})}. \quad (\text{В.11})$$

Сумму нескольких векторов получим последовательным применением закона сложения двух векторов: сумму двух $(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)$ сложим с третьим вектором $\vec{A}_3$ (рис. В.8), полученную сумму $(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3)$ сложим с четвертым вектором и т. д. Сложив сумму $n-1$ первых векторов $(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_{n-1})$ с последним вектором $\vec{A}_n$, получим сумму n векторов:

$$\bar{S} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \dots + \bar{A}_n, \text{ или } \bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i. \quad (\text{B.12})$$

Таким образом, сумма n векторов есть вектор, который изображается замыкающей стороной векторного многоугольника, составленного из слагаемых векторов. Замыкающий вектор направлен от начала первого вектора к концу последнего.

Сумма n векторов обладает также свойством коммутативности.

На рис. В.8 видно также, что сумма n векторов обладает и свойством *сочетательности* (ассоциативности):

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \dots + \bar{A}_{n-1} + \bar{A}_n = \\ &= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) + \bar{A}_3 + \dots + (\bar{A}_{n-1} + \bar{A}_n) = \\ &= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) + (\bar{A}_4 + \dots + \bar{A}_{n-1}) + \bar{A}_n. \end{aligned}$$

Таким образом, построение векторного многоугольника можно осуществить, складывая векторы $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ в любом порядке, в любых сочетаниях.

Если векторный многоугольник оказался замкнутым (т. е. конец последнего из слагаемых векторов совпадает с началом первого), то сумма векторов равна нулю:

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i = 0.$$

Разностью двух векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называется вектор, полученный от сложения векторов $\bar{A}$ и $-\bar{B}$ (рис. В.9)

$$\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B}).$$

Видно, что сумма векторов $\bar{A} + \bar{B}$ есть одна диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{A}$ и $\bar{B}$, а разность — другая его диагональ.

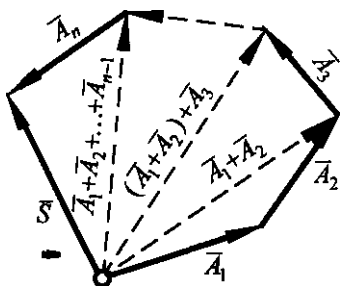


Рис. В.8

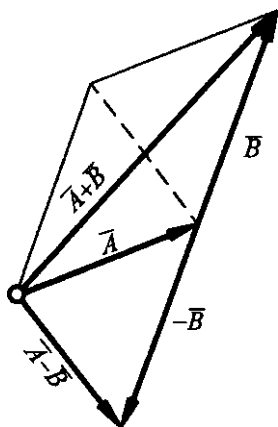


Рис. В.9

Чтобы определить модуль и направление вектора $\bar{S}$ вида (В.12), воспользуемся аналитическим способом сложения векторов. Пусть нужно сложить n векторов $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_i, \bar{A}_n$, где $\bar{A}_i = A_{ix}\bar{i} + A_{iy}\bar{j} + A_{iz}\bar{k}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Складывая эти векторы, согласно (В.12), получаем

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i = \left(\sum_{i=1}^n A_{ix} \right) \bar{i} + \left(\sum_{i=1}^n A_{iy} \right) \bar{j} + \left(\sum_{i=1}^n A_{iz} \right) \bar{k}. \quad (\text{В.13})$$

Здесь

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_{ix}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_{iy}, \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_{iz}. \quad (\text{В.14})$$

Согласно (В.5),

$$\begin{aligned} S = |\bar{S}| &= \left| \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \right| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n A_{ix} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_{iy} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_{iz} \right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

а направление вектора $\bar{S}$ определяется с помощью направляющих косинусов из выражений, аналогичных (В.6).

В.5. Умножение векторов

В векторном исчислении различают два вида произведений векторов: скалярное и векторное.

Скалярное произведение двух векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ есть скалярная величина, равная произведению модулей A и B этих векторов на косинус угла $(\bar{A}, \bar{B})$ между ними:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos(\bar{A}, \bar{B}) \geq 0, \quad (\text{В.16})$$

где $\bar{A} \cdot \bar{B} > 0$, если $0 \leq \bar{A}, \bar{B} < \frac{\pi}{2}$, и $\bar{A} \cdot \bar{B} < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \bar{A}, \bar{B} \leq \pi$.

Как показано на рис. В.10, скалярное произведение двух векторов можно еще рассматривать как произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого вектора:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B(A \cos \alpha) = A(B \cos \alpha). \quad (\text{B.17})$$

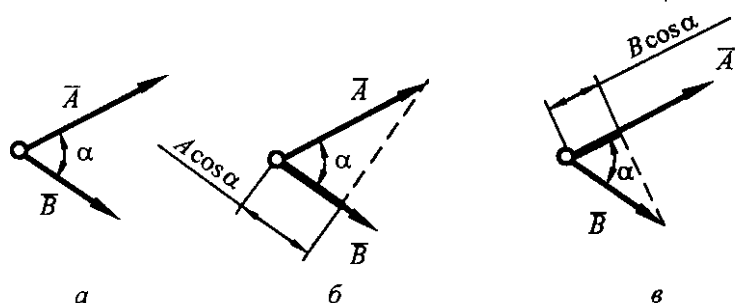


Рис. В.10

Из соотношений (В.16), (В.17) следует:

1) скалярное произведение двух векторов обладает свойством коммутативности, т. е.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}; \quad (\text{B.18})$$

2) скалярное произведение векторов обладает свойством распределительности относительно суммы векторов, т. е.

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}; \quad (\text{B.19})$$

3) при умножении вектора на скалярную величину имеет место сочетательный закон:

$$m \vec{A} \cdot n \vec{B} = mn \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (\text{B.20})$$

Кроме того, из (В.16) следует, что

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 1, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \quad \text{при} \quad \vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B}; \quad (\text{B.21})$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = -1, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = -AB \quad \text{при} \quad \vec{A} \uparrow \downarrow \vec{B};$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{при} \quad \vec{A} \perp \vec{B}; \quad (\text{B.22})$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 1, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A^2 \quad \text{при} \quad \vec{A} = \vec{B}.$$

Для единичных векторов, согласно (В.22), имеем

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; \\ \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Используя соотношения (B.19) и (B.23), запишем скалярное произведение двух векторов через их проекции. Если $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$, $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$, то

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений одноименных (по индексу) проекций векторов на координатные оси.

Из (B.24) имеем выражение для косинуса угла между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{A \cdot B}.\quad (\text{B.25})$$

Если $\vec{A} \perp \vec{B}$, то

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.\quad (\text{B.26})$$

Рассматривая выражение (B.2), видим, что

$$A_l = A \cos(\vec{A}, \vec{l}) = A \cdot 1 \cdot \cos(\vec{A}, \vec{l}) = \vec{A} \cdot \vec{l}_0,\quad (\text{B.27})$$

где $\vec{l}_0$ — единичный вектор оси l .

Из (B.25) следует, что косинус угла между единичными векторами $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ равен скалярному произведению этих векторов:

$$\cos(\vec{a}_0, \vec{b}_0) = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0.\quad (\text{B.28})$$

Векторным произведением двух векторов $\vec{A} \times \vec{B}$ называется вектор, модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними, а направление перпендикулярно плоскости, проходящей через эти векторы (рис. B.11, а), и выбрано так, чтобы с конца полученного вектора, можно видеть, что для кратчайшего совмещения первого сомножителя со вторым его нужно вращать против хода часовой стрелки. Согласно определению, если

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C},\quad (\text{B.29})$$

то

$$|\vec{C}| = C = AB \sin(\vec{A}, \vec{B}) = \text{пл. } \square ODEF,\quad (\text{B.30})$$

т. е. модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма $ODEF$, построенного на перемножаемых векторах.

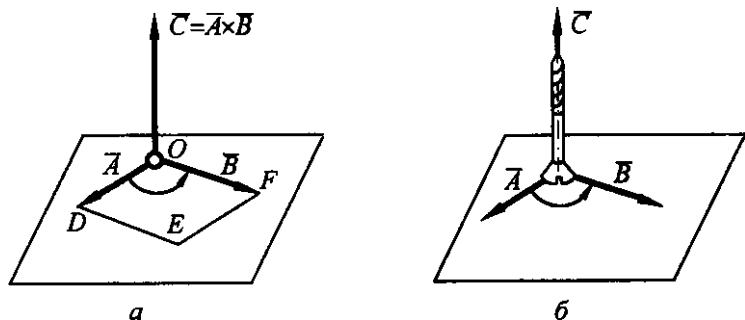


Рис. В.11

По установленному соглашению направление векторного произведения $\vec{C}$ определяется^а правилом правого винта (рис. В.11, б). В соответствии с этим правилом в правой системе прямоугольных декартовых координат (рис. В.12) направление кратчайшего совмещения оси Ox с осью Oy видно с конца оси Oz против направления движения часовой стрелки. Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют правую систему единичных векторов.

В дальнейшем будем пользоваться именно правой системой координат, чтобы иметь единообразный подход к рассмотрению вопросов теории и к решению задач.

Векторное произведение двух векторов свойством переместительности не обладает (рис. В.13):

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}). \quad (\text{В.31})$$

При умножении вектора на скаляр векторное произведение обладает свойством сочетательности:

$$(m \vec{A}) \times \vec{B} = m(\vec{A} \times \vec{B}). \quad (\text{В.32})$$

По отношению к сложению векторов векторное произведение обладает свойством распределительности:^б

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}. \quad (\text{В.33})$$

Отметим частные случаи векторного умножения:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A} \parallel \overline{B} \\ \overline{A} = \overline{B} \end{array} \right\}, \text{ то } \sin(\overline{A}, \overline{B}) = 0, \quad \overline{A} \times \overline{B} = 0, \quad \overline{A} \times \overline{A} = 0; \quad (\text{B.34})$$

$$(\text{B.35})$$

$$\text{если } \overline{A} \perp \overline{B}, \text{ то } \sin(\overline{A}, \overline{B}) = 1, \quad |\overline{A} \times \overline{B}| = AB. \quad (\text{B.36})$$

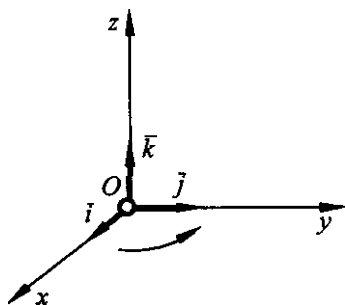


Рис. В.12

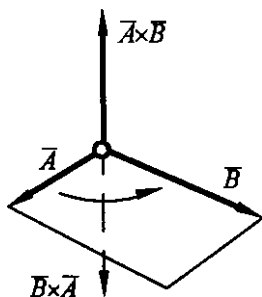


Рис. В.13

Для единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (см. рис. В.12) формулы (В.35) и (В.36) дают

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0; \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}. \quad (\text{B.38})$$

Запишем теперь выражение векторного произведения через его проекции на координатные оси. Имеем: $\overline{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}$, $\overline{B} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} + B_z \bar{k}$. Перемножая правые части этих соотношений векторно и пользуясь последовательно выражениями (В.33), (В.37) и (В.38), получаем

$$\overline{A} \times \overline{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \bar{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \bar{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \bar{k}, \quad (\text{B.39})$$

или

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

Из (В.40) видно, что проекции на оси координат для векторного произведения равны

$$(\bar{A} \times \bar{B})_x = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}; (\bar{A} \times \bar{B})_y = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}; (\bar{A} \times \bar{B})_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}. \quad (\text{B.41})$$

Произведение трех векторов типа $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ называется *смешанным произведением* векторов и представляет собой скаляр.

Запишем это произведение через проекции векторов $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$, воспользовавшись сначала выражением (B.24), а затем (B.41). Тогда

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

Численно смешанное произведение векторов определяет объем параллелепипеда с площадью основания $|\bar{B} \times \bar{C}|$ и боковым ребром $|\bar{A}|$ (рис. B.14).

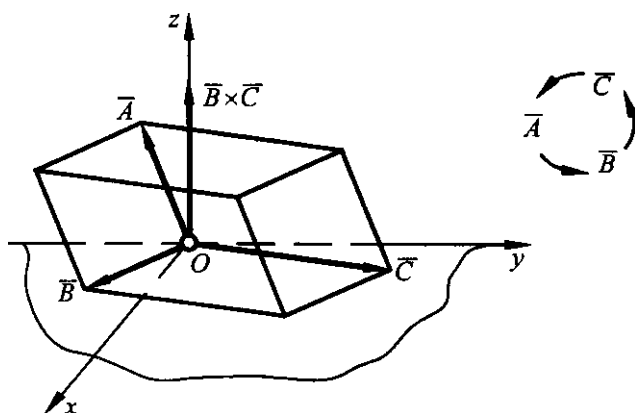


Рис. B.14

Из этого следует, во-первых, условие компланарности трех векторов:

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = 0, \quad (\text{B.43})$$

и, во-вторых, в смешанном произведении возможны циклические перестановки сомножителей:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (\text{B.44})$$

Произведение трех векторов типа $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ называется *двойным векторным произведением* и является вектором.

Вектор $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ (рис. В.15) перпендикулярен плоскости Π , в которой лежат векторы $\vec{A}$ и $(\vec{B} \times \vec{C})$. Поэтому вектор $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ лежит в плоскости векторов $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Тогда векторное произведение $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ есть вектор, лежащий в плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (рис. В.16). Ясно, что векторы $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ и $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ — разные величины, т. е. положение скобок имеет существенное значение.

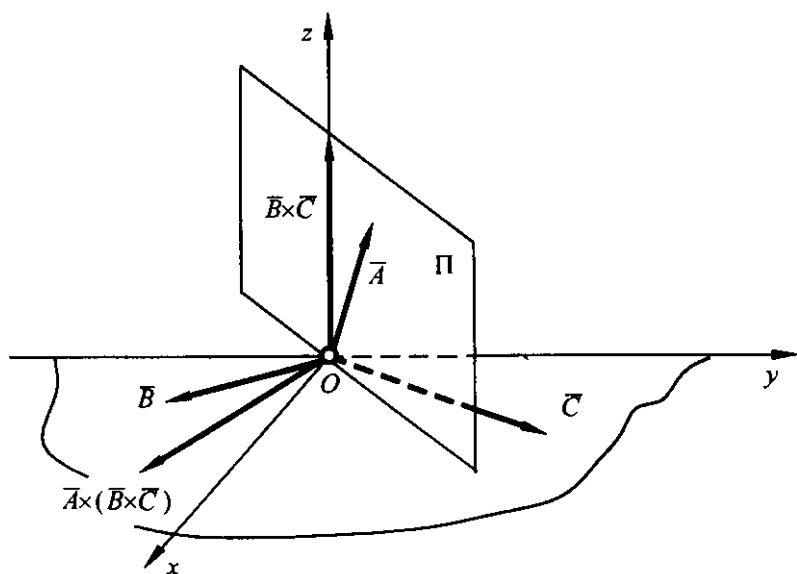


Рис. В.15

Согласно формуле (В.40), имеем

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (\bar{B} \times \bar{C})_x & (\bar{B} \times \bar{C})_y & (\bar{B} \times \bar{C})_z \end{vmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

где $(\bar{B} \times \bar{C})_x$, $(\bar{B} \times \bar{C})_y$ и $(\bar{B} \times \bar{C})_z$ — проекции на координатные оси векторного произведения $(\bar{B} \times \bar{C})$, определяемые соотношениями (B.41).

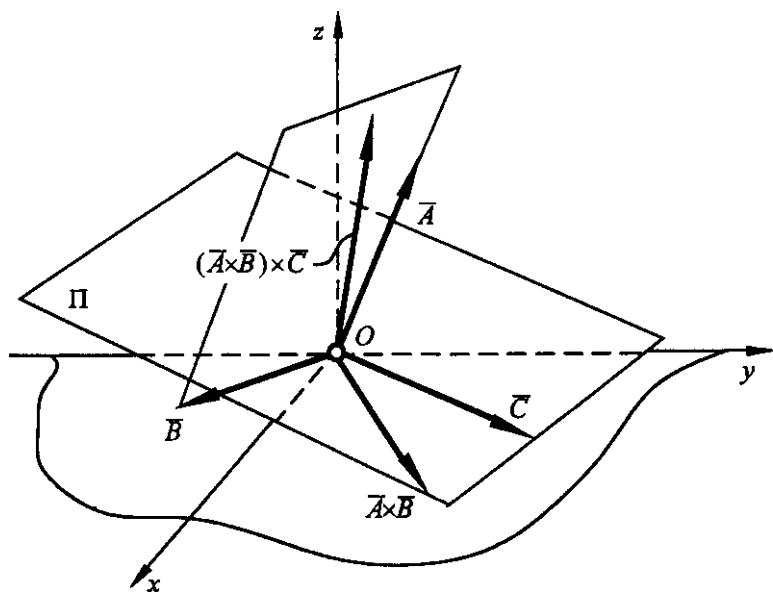


Рис. В.16

Проекции вектора $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ на координатные оси имеют вид

$$\begin{aligned} [\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})]_x &= B_x \bar{A} \cdot \bar{C} - C_x \bar{A} \cdot \bar{B}; \\ [\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})]_y &= B_y \bar{A} \cdot \bar{C} - C_y \bar{A} \cdot \bar{B}; \\ [\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})]_z &= B_z \bar{A} \cdot \bar{C} - C_z \bar{A} \cdot \bar{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Умножая равенства (B.46) соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и складывая почленно, получаем

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B}). \quad (\text{B.47})$$

В.6. Векторы и матрицы

Совокупность $m \times n$ величин a_{ik} , записанных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов, образует прямоугольную матрицу с размерами $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{В.48})$$

В записи элемента матрицы a_{ik} первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца. Компактная запись выражения (В.48) имеет вид

$$\mathbf{A} = [a_{ik}] \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{В.49})$$

Равными считаются две матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ одинакового размера $m \times n$, соответственные элементы которых равны, т. е.

$$a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n).$$

Матрица, у которой $m = n$, называется *квадратной*, ее элементы a_{ii} ($i = 1, \dots, n$) составляют *главную диагональ матрицы*. Квадратная матрица $n \times n$ называется *симметричной*, если $a_{ik} = a_{ki}$.

Диагональной называется симметричная матрица, у которой элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

где $d_1, \dots, d_n$ — любые числа.

Если в диагональной матрице $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$, то для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размером $n \times n$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{A}.$$

Если $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$, диагональная матрица называется *единичной* и обозначается $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.50})$$

Тогда справедливы соотношения

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Таким образом, особая роль единичной матрицы $\mathbf{E}$ аналогична той роли, которую играет число 1 при перемножении вещественных чисел.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, записанных в том же порядке, что и в матрице, называется *определителем матрицы* и обозначается

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\text{B.51})$$

Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$, определитель которой $\det \mathbf{A}$ отличен от нуля, существует *обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$, такая, что выполняется условие

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}, \text{ или } \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Если в выражении (B.48) поменять местами строки и столбцы, получится матрица размерами $n \times m$, которая по отношению к матрице (B.48) называется *транспонированной* и обозначается $\mathbf{A}^T$. Симметричная матрица $\mathbf{A}$ размерами $n \times n$ равна своей транспонированной:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Сложение и вычитание матриц может быть выполнено с матрицами одинаковых размеров $m \times n$. Суммой (разностью) двух таких матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется матрица $\mathbf{C}$, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}, \quad (\text{B.52})$$

если $c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$ ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$).

Суммы матриц обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Умножение матрицы на число означает, что каждый элемент этой матрицы умножается на данное число:

$$\lambda \mathbf{A} = [\lambda a_{ik}] \quad (i=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n). \quad (\text{B.53})$$

Умножение матрицы $\mathbf{A}$ порядка $(m \times p)$ на матрицу $\mathbf{B}$ порядка $(p \times n)$ осуществимо лишь тогда, когда число столбцов $\mathbf{A}$ равно числу строк $\mathbf{B}$. Тогда матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *конформными*, и их произведением $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ называется матрица размерами $m \times n$, элемент c_{ik} i -й строки и k -го столбца которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы $\mathbf{A}$ на элементы k -го столбца матрицы $\mathbf{B}$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} \quad (i=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n). \quad (\text{B.54})$$

Представим теперь вектор $\bar{A}$, определяемый совокупностью n величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ (n -мерный вектор), в виде вектора-столбца

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.55})$$

или матрицы $(n \times 1)$. Если компоненты $a_1, a_2, \dots, a_n$ расположить горизонтально, получим матрицу $(1 \times n)$, т. е.

$$\bar{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T. \quad (\text{B.56})$$

Одномерный вектор есть скаляр.

Поскольку все операции над векторами, о которых пойдет речь, можно проводить, лишь пользуясь векторами-столбцами, будем применять термин «вектор» для величины, заданной формулой (B.55).

Трехмерный вектор $\bar{A}$, заданный своими проекциями на оси декартовой системы координат, имеет компоненты $a_1 = A_x$, $a_2 = A_y$, $a_3 = A_z$ и записывается в виде

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Два вектора $\bar{A}$ и $\bar{B}$ одинаковых размеров n равны, если равны их соответствующие элементы:

$$a_i = b_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Сумма двух векторов одинаковых размеров n записывается в соответствии с (B.52), как

$$\bar{A} + \bar{B} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}; \quad (\text{B.57})$$

операция сложения векторов обладает свойством коммутативности (как при сложении матриц) и ассоциативности:

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}; \quad (\text{B.58})$$

$$\bar{A} + (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}. \quad (\text{B.59})$$

Умножение вектора на скаляр осуществляется как умножение матрицы на число, согласно (B.53),

$$c_1 \bar{A} = \bar{A} c_1 = \begin{bmatrix} c_1 a_1 \\ c_1 a_2 \\ \vdots \\ c_1 a_n \end{bmatrix}. \quad (\text{B.60})$$

Скалярное произведение векторов — это скалярная функция:

$$(\bar{A}, \bar{B})^* = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (\text{B.61})$$

Из (B.61) следуют известные свойства скалярного произведения векторов:

$$\begin{aligned} (\bar{A}, \bar{B}) &= (\bar{B}, \bar{A}); \quad (c_1 \bar{A}, \bar{B}) = c_1 (\bar{A}, \bar{B}); \\ (\bar{A} + \bar{B}, \bar{C} + \bar{D}) &= (\bar{A}, \bar{C}) + (\bar{B}, \bar{C}) + (\bar{A}, \bar{D}) + (\bar{B}, \bar{D}). \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

* Здесь использовано обозначение операций для многомерных векторов.

Тогда скалярную величину $(\bar{A}, \bar{A})$ можно рассматривать как квадрат «длины» вещественного вектора.

Два вещественных вектора $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называются *ортгоналичными*, если они удовлетворяют соотношению

$$(\bar{A}, \bar{B}) = 0.$$

При умножении вектора $\bar{C}$ на матрицу A имеем

$$\bar{B} = A \bar{C}, \quad (B.63)$$

где $\bar{B}$, $\bar{C}$ — векторы, связанные, согласно (B.54), соотношением

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \quad (i=1, \dots, n). \quad (B.64)$$

В сущности, выражение (B.63) можно рассматривать как операцию преобразования вектора $\bar{C}$ в вектор $\bar{B}$. Если, например, нужно преобразовать один трехмерный вектор $\bar{C}$ (с проекциями $C_x = c_1$, $C_y = c_2$, $C_z = c_3$) в другой вектор $\bar{B}$ ($B_x = b_1$, $B_y = b_2$, $B_z = b_3$), то, согласно (B.64), можно записать

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3; \\ b_2 &= a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3; \\ b_3 &= a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3. \end{aligned} \quad (B.65)$$

При этом в системе координат $Oxyz$ существует матрица A — тензор второго ранга с элементами a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (B.66)$$

Тензор A является самостоятельной физической величиной, способной преобразовать один трехмерный вектор в другой в любой координатной системе. Так, вектор главного момента количеств движения $\bar{K}_O$ твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O , определяется через вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ по известной зависимости

$$\bar{K}_O = J \bar{\omega}, \quad (B.67)$$

где $\mathbf{J}$ — тензор инерции тела в точке O , его компонентами являются осевые и центробежные моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \quad (\text{B.68})$$

В.7. Связь между проекциями вектора на оси двух прямоугольных систем координат

В евклидовом пространстве ненулевой вектор имеет в общем случае различные проекции на оси двух систем координат с произвольной взаимной ориентацией осей. Покажем, как влияет взаимная ориентация осей прямоугольных систем координат на связь между двумя вариантами проекций одного и того же вектора. Будем исходить из того, что оба варианта проекций задают один и тот же вектор, т. е., например, для вектора $\vec{b}$ (рис. В.17)

$$B_X \vec{I} + B_Y \vec{J} + B_Z \vec{K} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad (\text{B.69})$$

где B_X , B_Y , B_Z и b_x , b_y , b_z — соответственно проекции вектора $\vec{b}$ на оси двух систем координат; а $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты рассматриваемых систем координат.

После скалярного умножения обеих частей уравнения (B.69) на орты $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, получим

$$\begin{aligned} B_X &= b_x(\vec{i} \cdot \vec{I}) + b_y(\vec{j} \cdot \vec{I}) + b_z(\vec{k} \cdot \vec{I}); \\ B_Y &= b_x(\vec{i} \cdot \vec{J}) + b_y(\vec{j} \cdot \vec{J}) + b_z(\vec{k} \cdot \vec{J}); \\ B_Z &= b_x(\vec{i} \cdot \vec{K}) + b_y(\vec{j} \cdot \vec{K}) + b_z(\vec{k} \cdot \vec{K}). \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Более компактный вид соотношения (B.70) имеют в векторно-матричной форме записи:

$$\vec{B} = \mathbf{A} \vec{b}, \quad (\text{B.71})$$

$$\text{где } \vec{B} = \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

В формуле (В.71) проекции одного и того же вектора $\bar{b}$ на оси соответствующих систем координат *считаются элементами* векторов-массивов $\bar{B}$ и $\bar{b}$, а скалярные произведения двух ортов — *элементами матрицы* A , т.е. $a_{11} = \bar{i} \cdot \bar{I}$, $a_{12} = \bar{j} \cdot \bar{I}$ и т. д.

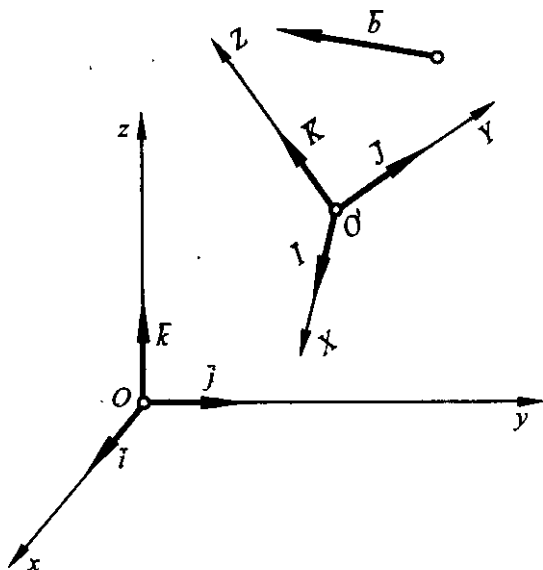


Рис. В.17

Отметим ряд важных свойств формулы (В.71) и матрицы A , причем условимся называть систему координат с ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — первой, а с ортами $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ — второй.

1. Формула (В.71) определяет правила расчета проекций вектора на оси второй системы координат по его известным проекциям на оси первой системы, при этом матрица A считается *матрицей перехода от осей первой системы координат к осям второй*.

2. Согласно формуле (В.28), скалярные произведения соответствующих ортов разноименных осей координат равны косинусам углов между перемножаемыми ортами (или между соответ-

ствующими осями систем координат), т. е. $a_{11} = \bar{i} \cdot \bar{I} = \cos(\hat{x}, X)$, $a_{12} = \bar{j} \cdot \bar{I} = \cos(\hat{y}, X)$ и т. д. Поэтому матрицу A называют *матрицей направляющих косинусов*.

3. Элементы каждой строки матрицы являются проекциями соответствующего орта второй системы координат на оси первой, а элементы каждого столбца матрицы — проекциями соответствующего орта первой системы координат на оси второй, например:

$$\bar{I} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T; \quad a_{11} = I_x; \quad a_{12} = I_y; \quad a_{13} = I_z.$$

$$\bar{i} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T; \quad a_{11} = i_x; \quad a_{21} = i_y; \quad a_{31} = i_z.$$

4. Сумма квадратов элементов *каждой строки* или *каждого столбца* равна единице, так как такая сумма выражает квадрат модуля орта, например:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = 1.$$

5. Скалярное произведение двух различных строк или двух различных столбцов равно нулю, так как такое произведение соответствует скалярному произведению двух ортогональных векторов, например:

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = I_xJ_x + I_yJ_y + I_zJ_z = 0.$$

6. Определитель матрицы равен единице:

$$\det A = 1.$$

Этот результат можно получить, опираясь на формулу расчета смешанного произведения трех векторов ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ или $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$), образующих правую тройку. Он соответствует объему куба со стороной, равной единице.

7. Обратная матрица A^{-1} равна матрице, транспонированной к матрице A :

$$A^{-1} = A^T.$$

8. Формула обратного пересчета проекций вектора на оси первой системы координат по его известным проекциям на оси второй имеет вид

$$\bar{b} = A^T \bar{B}. \quad (B.72)$$

В.8. Вектор-функция. Годограф вектора. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу

Если модуль и направление вектора $\vec{A}$ зависят от значений, принимаемых переменными t, u, v, w , то вектор $\vec{A}$ называется векторной функцией этих переменных, или *вектор-функцией*.

Ограничимся рассмотрением *вектор-функций* только от одной независимой переменной t :

$$\vec{A} = \vec{A}(t). \quad (\text{B.73})$$

При этом в общем случае с изменением скаляра t непрерывно изменяются и модуль, и направление вектора $\vec{A}$. Следовательно, с учетом (B.1) можно записать

$$\vec{A} = A(t)\vec{a}_0(t) = \vec{A}(t). \quad (\text{B.74})$$

В частных случаях вектор $\vec{A}$ может изменяться или только по модулю:

$$\vec{a}_0 = \overline{\text{const}}, \quad \vec{A} = A(t)\vec{a}_0, \quad (\text{B.75})$$

или только по направлению:

$$A = \text{const}, \quad \vec{A} = A\vec{a}_0(t). \quad (\text{B.76})$$

Если вектор $\vec{A} = \vec{A}(t) = \overline{OM}$ в процессе его изменения всегда откладывается от общего начала (полюса) O (рис. В.18, а), то геометрическим местом концов этого вектора будет некоторая кривая (плоская или пространственная), называемая *годографом вектора $\vec{A}$* .

Если полюс O принять за начало прямоугольной системы координат, то, согласно (B.7),

$$\vec{A} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}, \quad (\text{B.77})$$

где $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ — проекции вектора $\vec{A}$ на оси координат. Тогда уравнения годографа вектора $\vec{A}$, записанные в параметрической форме, имеют вид

$$x = A_x(t), \quad y = A_y(t), \quad z = A_z(t). \quad (\text{B.78})$$

В частности, если вектор $\vec{A}$ изменяется только по модулю (см. (B.75)), его годографом будет прямая, вдоль которой направ-

лен этот вектор. Если вектор $\bar{A}$ изменяется только по направлению (см. (В.76)), его годографом является кривая, расположенная на сфере радиусом A . Годограф будет плоской кривой, если вектор $\bar{A}$ остается параллельным некоторой неподвижной плоскости.

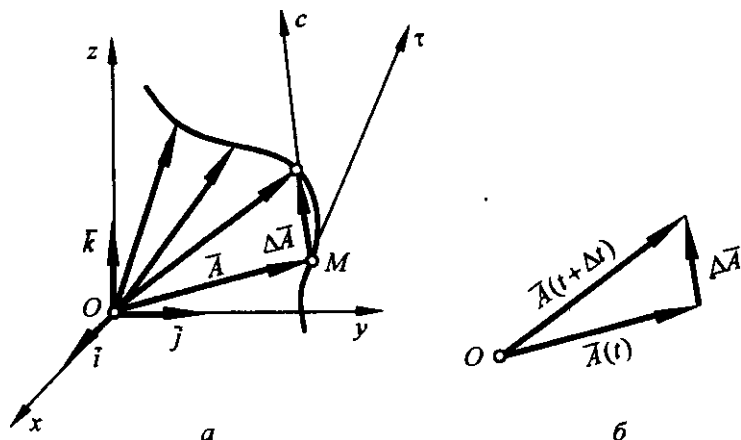


Рис. В.18

Найдем производную вектора $\bar{A}(t)$ по скалярному аргументу t . Предел отношения $\Delta \bar{A}$ (рис. В.18, б) к Δt (при $\Delta t \rightarrow 0$), если он существует, называется производной вектора по скалярному аргументу t . Это определение совпадает с определением производной от скалярной функции.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(t + \Delta t) - \bar{A}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{A}}{dt}. \quad (\text{В.79})$$

На годографе (см. рис. В.18, а) вектор $\Delta \bar{A}$ направлен вдоль хорды, или по секущей M_c . В пределе ($\Delta t \rightarrow 0$) секущая M_c занимает положение касательной M_t и, следовательно, направление производной $\frac{d\bar{A}}{dt}$ совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\bar{A}(t)$ в точке M .

Если вектор выражен через его проекции на неподвижные оси (см., например, (B.77), где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — векторы, постоянные по модулю и направлению), то

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}) = \frac{dA_x}{dt} \bar{i} + \frac{dA_y}{dt} \bar{j} + \frac{dA_z}{dt} \bar{k}, \quad (\text{B.80})$$

т. е. производная вектора по скалярному аргументу есть вектор, проекции которого на неподвижные оси равны производным по тому же аргументу от проекций дифференцируемого вектора. Это утверждение справедливо и для производной n -го порядка:

$$\frac{d^n \bar{A}}{dt^n} = \frac{d^n A_x}{dt^n} \bar{i} + \frac{d^n A_y}{dt^n} \bar{j} + \frac{d^n A_z}{dt^n} \bar{k}. \quad (\text{B.81})$$

Как и для скалярных, для векторных функций справедливы следующие выражения:

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt}, \quad (\text{B.82})$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} \times \bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt} \times \bar{B} + \bar{A} \times \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (\text{B.83})$$

Рассмотрим теперь частный случай дифференцирования некоторого вектора $\bar{B}$, который изменяется только по направлению, т. е. $|\bar{B}| = B = \text{const}$. Годограф такого вектора — кривая, расположенная на сфере радиусом B . Производная этого вектора $\frac{d\bar{B}}{dt}$ есть вектор, перпендикулярный к дифференцируемому (рис. B.19). Действительно, согласно (B.21),

$$\bar{B} \cdot \bar{B} = \bar{B}^2 = \text{const},$$

то, дифференцируя это равенство, с учетом (B.82) получаем

$$2\bar{B} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{B}}{dt} \perp \bar{B}.$$

Пусть за время Δt вектор $\bar{B}$ повернулся на угол $\Delta\varphi$ и получил приращение $\Delta\bar{B}$. Модуль $|\Delta\bar{B}|$ можно найти как длину основания равнобедренного треугольника ($|\bar{B}| = |\bar{B} + \Delta\bar{B}|$) с углом $\Delta\varphi$ при вершине (см. рис. В.19):

$$|\Delta\bar{B}| = 2|\bar{B}| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = |\bar{B}| \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} \Delta\varphi. \quad (\text{В.84})$$

Тогда

$$\left| \frac{d\bar{B}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\bar{B}|}{\Delta t} = |\bar{B}| \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = |\bar{B}| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (\text{В.85})$$

Обозначим предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega^*$. В

общем случае предел отношения

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ не является производной $\frac{d\varphi}{dt}$,

поскольку для вектора, годограф которого — пространственная кривая, не существует функции $\varphi = \varphi(t)$, которая определяла бы его положение.

Введем единичный вектор $\bar{p}_0 \perp \bar{B}$, направленный в соответ-

ствии с поворотом вектора $\bar{B}$. Тогда с учетом (В.85) имеем

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \left| \frac{d\bar{B}}{dt} \right| \bar{p}_0 = |\bar{B}| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \bar{p}_0 = |\bar{B}| \omega^* \bar{p}_0. \quad (\text{В.86})$$

Таким образом, производная вектора постоянного модуля по скалярному аргументу равна произведению его модуля на ω^* и на единичный вектор, перпендикулярный дифференцируемому и направленный в соответствии с поворотом вектора $\bar{B}$.

Остановимся на случае, когда вектор $\bar{B}$ остается параллельным неподвижной плоскости и поэтому его годографом будет окружность радиусом $|\bar{B}|$. Тогда существует функция $\varphi = \varphi(t)$,

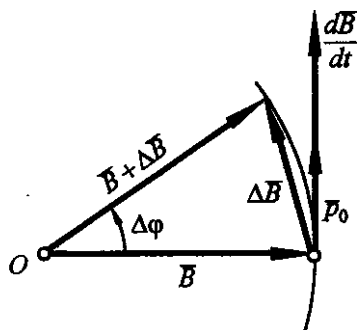


Рис. В.19

Если вектор $\bar{A}$ остается параллельным некоторой неподвижной плоскости (т. е. годографом $\bar{A}$ является плоская кривая), то из (В.87) и (В.90) следует:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA}{dt} \bar{a}_0 + A \frac{d\varphi}{dt} \bar{p}_0. \quad (\text{В.91})$$

Заметим, что равенство $\left| \frac{d\bar{A}}{dt} \right| = \left| \frac{dA}{dt} \right|$ имеет место лишь в случае, когда направление вектора $\bar{A}$ не меняется.

Кинематика — раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение тел без анализа определяющих это движение условий и причин (с геометрической точки зрения).

Механическое движение, то есть изменение положения материального тела в пространстве, определяется по отношению к некоторому телу, которое называется *телом отсчета*. С телом отсчета связывают *систему координат*, в которой рассматривают перемещение исследуемого материального тела или системы тел с течением времени. Начало отсчета времени выбирают произвольно. Связанная с телом отсчета система координат с принятым в ней отсчетом времени образуют *систему отсчета*.

Изучение механического движения в кинематике возможно на основе задания движения материальных тел. *Задать движение материального тела* означает указать способ или алгоритм, позволяющий однозначно определить положение рассматриваемого материального тела в выбранной системе отсчета в любой момент времени.

В данном разделе будут рассмотрены главы по кинематике точки и абсолютно твердого тела.

Простейшей моделью материального тела, размерами которого в условиях решаемой задачи можно пренебречь, является *материальная точка*. При этом в кинематике понятие материальной точки тождественно понятию геометрической точки.

Абсолютно твердым, или просто *твердым телом* называется модельное представление материального тела в виде тела (системы материальных точек), в котором расстояние между любыми точками является неизменным.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Скорость точки

Кинематика точки — раздел кинематики, в котором исследуется механическое движение материальных точек.

Одной из важных характеристик движения точки является **траектория**, т. е. геометрическое место последовательных (с течением времени) положений точки в пространстве, определяемое в той или иной системе отсчета.

Другими кинематическими характеристиками движения точки являются **скорость** и **ускорение**.

Основными задачами кинематики точки являются задачи по определению траектории, скорости и ускорения точки, а также исследованию закономерностей их изменения.

Среди способов задания движения точки выделяют **векторный**, **координатный** и **естественный**. Все три способа взаимосвязаны, т. е. возможен переход от одного способа задания движения точки к другому.

Предположим, что точка при движении по траектории в момент времени t совпадает с точкой M и ее положение определяет радиус-вектор $\vec{r}(t)$, проведенный в некоторой системе отсчета из неподвижной точки O , а в момент времени $(t + \Delta t)$ — с точкой M_1 , которой соответствует радиус-вектор $\vec{r}(t + \Delta t)$, (рис. 1.1). Приращение радиус-вектора за промежуток времени Δt составит $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Отношение этого приращения к промежутку времени Δt можно определить как среднюю скорость $\bar{v}_{cp}$ точки за время Δt , $\bar{v}_{cp} = \Delta \vec{r} / \Delta t$. Предел этого отношения, когда промежут-

ток времени Δt стремится к нулю, называют *скоростью точки в момент времени t* . Такой предел есть производная от радиус-вектора точки по времени, т. е.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.1)$$

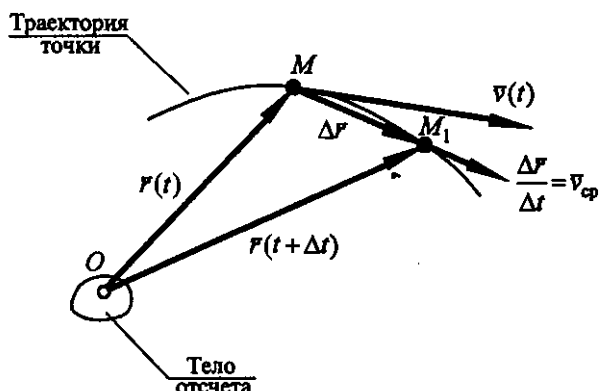


Рис. 1.1

Вектор $\vec{v}_{cp}$ направлен по приращению $\Delta \vec{r}$ радиус-вектора точки, т.е. по направлению секущей MM_1 . При стремлении Δt к нулю секущая в пределе становится касательной к траектории в точке M , поэтому вектор $\vec{v}$ направлен также по касательной (см. рис. 1.1).

Таким образом, *скорость точки есть векторная физическая величина, равная первой производной по времени от радиус-вектора точки; скорость всегда направлена по касательной к траектории, а ее численное значение определяется модулем $|\vec{v}|$* .

Единица измерения скорости в СИ — метр в секунду (м/с).

Путь L , пройденный точкой по траектории за промежуток времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$, можно определить как предел суммы модулей приращений радиус-вектора точки $|\Delta \vec{r}_k|$ за малые отрезки

временн Δt_k , на которые разбивается промежуток времени $(t_2 - t_1)$, при условии, что $|\Delta \vec{r}_k| \rightarrow 0$, $\Delta t_k \rightarrow 0$:

$$L = \lim_{|\Delta \vec{r}_k| \rightarrow 0} \sum_k |\Delta \vec{r}_k| = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_k \left| \frac{\Delta \vec{r}_k}{\Delta t_k} \right| \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.2)$$

Здесь $v(t) = |\vec{v}(t)|$ — модуль скорости, выраженный в виде функции времени.

1.2. Ускорение точки

Если откладывать вектор $\vec{v} = \vec{v}(t)$ точки в текущие моменты времени из некоторой неподвижной точки O_1 , то получим линию в пространстве, называемую годографом скорости (рис. 1.2, а). Очевидно, что приращение скорости за время Δt составит $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$. Отношение этого приращения к промежутку времени Δt , за который оно произошло, определяет среднее ускорение точки за рассматриваемый промежуток времени. Предел этого отношения при Δt , стремящемся к нулю, называется *ускорением точки* в момент времени t , т. е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.3)$$

По своему физическому смыслу ускорение есть скорость изменения скорости, и направлено оно по касательной к годографу скорости (см. рис. 1.2, а).

Определим направление вектора $\vec{a}$, вычисляемого согласно (1.3), по отношению к траектории точки. Очевидно, что направление вектора $\Delta \vec{v} / \Delta t$ всегда совпадает с направлением приращения скорости $\Delta \vec{v}$. При $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 на траектории приближается к точке M , а плоскость, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\Delta \vec{v}$, поворачиваясь вокруг вектора $\vec{v}$, т. е. касательной к траектории в точке M , занимает свое предельное положение, совпадающее с плоскостью, являющейся соприкасающейся плоскостью кривой

(траектории) в точке M (рис. 1.2, б)*. В итоге можно сделать заключение, что вектор $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости траектории в точке M , причем направлен он всегда внутрь вогнутости траектории точки в этой плоскости.

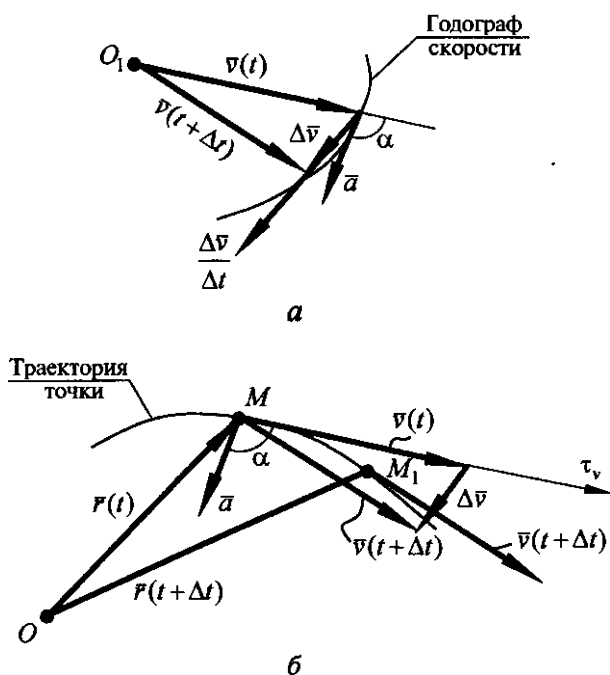


Рис. 1.2

Если траектория точки является плоской кривой, то соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью, в которой лежит траектория точки.

Таким образом, ускорение точки $\bar{a}$ есть векторная физическая величина, равная первой производной по времени от скорости

* Геометрически соприкасающаяся плоскость определяется как предельное положение плоскости, образованной касательными к кривой в точке M и в соседней точке M_1 при неограниченном сближении этих точек.

точки или второй производной от радиус-вектора точки; вектор $\bar{a}$ расположен в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории точки в этой плоскости; численное значение ускорения определяется модулем $|\bar{a}|$.

Единица измерения ускорения в СИ — метр на секунду в квадрате (м/с^2).

Если при движении точки по траектории модуль скорости возрастает со временем ($dv/dt > 0$), то такое движение называется **ускоренным**, причем, если $dv/dt = \text{const} > 0$, то **равноускоренным**. Если же модуль скорости при движении точки уменьшается ($dv/dt < 0$), то движение является **замедленным**, а при $dv/dt = \text{const} < 0$ — **равнозамедленным**. В случае $v(t) = \text{const}$ ($dv/dt = 0$) движение называется **равномерным**.

Производную dv/dt можно интерпретировать как проекцию ускорения $\bar{a}$ на ось $M\tau_v$, совпадающую по направлению с направлением скорости $\bar{v}$ (см. рис. 1.2, б). Эта проекция может быть найдена так: $a_v = \text{Пр}_{\bar{v}} \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{\tau}_v$, где $\bar{\tau}_v = \bar{v}/v$ — вектор, имеющий направление скорости, и модуль, равный единице. Тогда

$$a_v = \bar{a} \cdot \frac{\bar{v}}{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \frac{1}{v} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.4)$$

Модуль проекции ускорения на ось $M\tau_v$, равный $|a_v| = |dv/dt|$, характеризует собственно изменение скорости по величине. Знак этой проекции определяет характер движения. Так, при $a_v = dv/dt > 0$ (угол α между векторами $\bar{a}$ и $\bar{v}$ меньше 90°) движение ускоренное, при $a_v = dv/dt < 0$ (угол $\alpha > 90^\circ$) — замедленное, а при $a_v = dv/dt \equiv 0$ — равномерное ($v = \text{const}$). В общем случае равномерного движения точки по прямолинейному участку траектории $\bar{a} = 0$, $\bar{v} = \text{const}$; при равномерном движении по криволинейному участку траектории $v = \text{const}$, но $\bar{v} \neq \text{const}$, поэтому $\bar{a} \perp \bar{v}$, $a \neq 0$.

1.3. Векторный способ задания движения точки

Движение точки можно задать, если выразить ее радиус-вектор в некоторой системе отсчета в виде функции времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.5)$$

Функция $\vec{r}(t)$ для определенности дальнейших рассуждений предполагается непрерывной, дважды дифференцируемой. Такое задание радиус-вектора точки предполагает наличие системы отсчета, но не конкретизирует ее. В данном случае *траекторию точки можно определить как годограф ее радиус-вектора, т.е. геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}$, изменяющегося во времени согласно зависимости (1.5).*

Определения скорости и ускорения точки при векторном способе задания движения соответствуют приведенным в § 1.1 и 1.2. Формулы для их выражения имеют вид (1.1) и (1.3).

Векторный способ задания движения точки ввиду своей простоты и компактности широко применяется для введения основных понятий и кинематических характеристик движения точки, которые в дальнейшем используются в том числе и при других способах задания ее движения, а также в теоретическом изложении различных разделов курса.

1.4. Координатный способ задания движения точки

Для задания движения точки координатным способом необходимо ввести систему отсчета с некоторой системой координат и дать зависимости изменения координат точки в виде функций времени*. Эти зависимости называются кинематическими *уравнениями движения точки* в соответствующей системе координат. Рассмотрим случаи задания движения точки в конкретных системах координат.

* Функции, определяющие изменение координат во времени, во всех далее рассматриваемых случаях будут полагаться непрерывными, дважды дифференцируемыми.

Задание движения точки в прямоугольной декартовой системе координат

Прямоугольная декартова система координат с началом в точке O и осями Ox , Oy , Oz показана на рис. 1.3. Положение точки M в пространстве с использованием данной системы координат задается ее координатами x , y , z . Чтобы знать положение точки в пространстве в любой момент времени необходимо иметь уравнения движения точки в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.6)$$

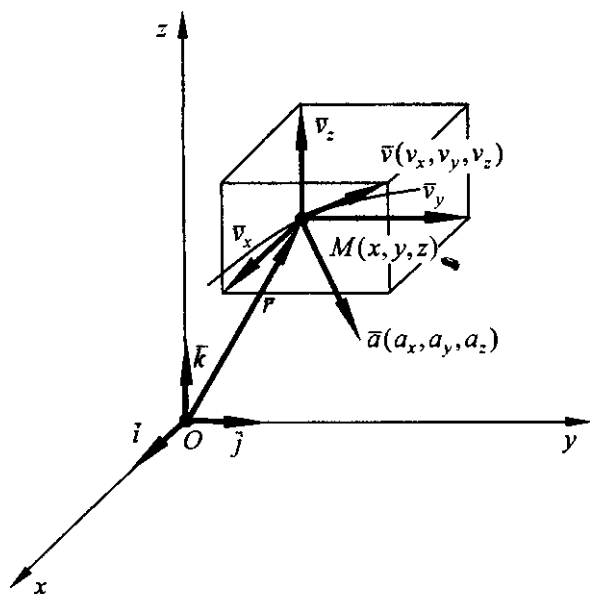


Рис. 1.3

Выражения (1.6) представляют собой уравнения движения точки в декартовой системе координат и одновременно являются уравнениями траектории точки, записанными в параметрической форме, где параметром является время t .

Чтобы найти уравнение траектории в форме непосредственной зависимости между координатами x , y , z , из системы уравне-

ний (1.6) необходимо исключить время. В таком случае траекторию будет определять, например, система уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, z) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Следовательно, траектория представляет собой линию пересечения цилиндрических поверхностей, уравнения которых составляют систему (1.7).

В частном случае задания движения точки на плоскости Oxy , например в виде уравнений движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, уравнение траектории будет

$$f(x, y) = 0. \quad (1.7')$$

Следует также заметить, что траекторией точки может быть не вся кривая, описываемая (1.7) или (1.7'), а только ее часть, соответствующая физически реализуемому процессу и положительным значениям времени t .

Проведем из начала декартовой системы координат (см. рис. 1.3) радиус-вектор $\vec{r}$ точки M и выразим его через координаты точки и орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этой системы координат, составляющие ее векторный базис. С учетом уравнений (1.6) будем иметь

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что координаты точки есть проекции ее радиус-вектора на оси декартовой системы координат, т. е.

$$x = \vec{r} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{r} \cdot \vec{j}, \quad z = \vec{r} \cdot \vec{k}. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.8) и (1.9) устанавливают взаимный переход от задания движения точки в декартовой системе координат к векторному способу и наоборот.

На основании (1.1) и (1.8) скорость точки, при задании ее движения в декартовой системе координат, определится так:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \quad (1.10)$$

В (1.10) производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, т. е. коэффициенты при $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, имеют смысл проекций скорости точки на оси декартовой системы координат. Действительно,

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = \dot{x}(t), \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} = \dot{y}(t), \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k} = \dot{z}(t). \quad (1.11)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае скорость точки представляет собой сумму составляющих векторов, параллельных осям декартовой системы координат:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z,$$

где $\vec{v}_x = v_x \vec{i}$, $\vec{v}_y = v_y \vec{j}$, $\vec{v}_z = v_z \vec{k}$, а ее численное значение (модуль) определится по формуле

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.12)$$

Представление о направлении вектора $\vec{v}$ можно получить по значениям направляющих косинусов углов, которые составляет этот вектор с осями декартовой системы координат:

$$\cos \alpha = v_x / v, \quad \cos \beta = v_y / v, \quad \cos \gamma = v_z / v.$$

Здесь α , β , γ — углы, которые составляет вектор $\vec{v}$ с осями Ox , Oy и Oz соответственно.

На основании (1.3) и (1.8) формула для расчета ускорения примет вид

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}, \quad (1.13)$$

проекции ускорения на оси декартовой системы координат будут

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = \ddot{x} = \dot{v}_x; \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = \ddot{y} = \dot{v}_y; \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = \ddot{z} = \dot{v}_z, \quad (1.14)$$

составляющие ускорения, параллельные осям координат, определяются как $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$; $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$; $\vec{a}_z = a_z \vec{k}$, а численное значение ускорения будет равно модулю вектора $\vec{a}$:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.15)$$

Представление о направлении ускорения можно получить по значениям направляющих косинусов углов, которые составляет вектор $\vec{a}$ с осями декартовой системы координат:

$$\cos \alpha = a_x / a, \quad \cos \beta = a_y / a, \quad \cos \gamma = a_z / a.$$

Проекцию ускорения на ось, совпадающую по направлению с вектором $\vec{v}$, для определения характера движения точки (т. е. ускоренно или замедленно она движется) можно в данном случае найти, согласно (1.4), в виде

$$a_v = \frac{dv}{dt} = \bar{a} \cdot \frac{\bar{v}}{v} = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v}.$$

Пример 1.1. Движение точки задано на плоскости в декартовой системе координат уравнениями движения вида $x = bt^2$; $y = ct$, где $b = 1 \text{ м/с}^2$; $c = 1 \text{ м/с}$.

Определить траекторию точки, а также для момента времени $t = 1 \text{ с}$ найти и изобразить на чертеже ее скорость, ускорение и их составляющие в декартовой системе координат. Установить характер движения точки (ускоренное или замедленное) для данного момента времени.

Решение. Исключив из уравнений движения время, получим уравнение траектории точки в виде $x = (b/c^2)y^2$, что соответствует уравнению параболы (рис. 1.4). Траекторией будет являться лишь часть параболы, расположенная выше оси абсцисс, так как координата y при $t \geq 0$ может быть только неотрицательной, т. е. $y \geq 0$. Проекции скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат, согласно (1.11) и (1.14), имеют вид: $v_x = 2bt$; $v_y = c$; $a_x = 2b$; $a_y = 0$.

Для $t = 1 \text{ с}$ получаем $x = 1 \text{ м}$, $y = 1 \text{ м}$, $v_x = 2 \text{ м/с}$, $v_y = 1 \text{ м/с}$, $a_x = 2 \text{ м/с}^2$, $a_y = 0$. Составляющие скорости $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$ и ускорения $\bar{a}_x$ точки, а также ее скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{a}$ изображены на рис. 1.4. Модули скорости и ускорения равны

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5} \approx 2,23 \text{ м/с}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ м/с}^2.$$

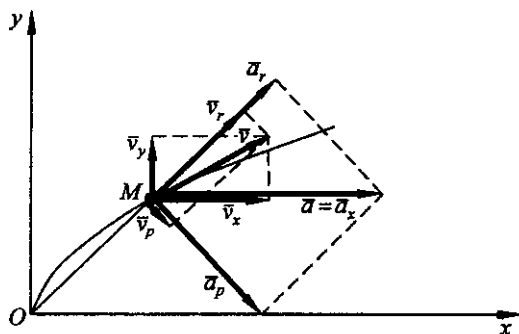


Рис. 1.4

На чертеже видно, что угол между векторами $\bar{v}$ и $\bar{a}$ меньше 90° , так что движение точки следует считать ускоренным ($a_v > 0$). Действительно, в данном случае при $t = 1 \text{ с}$

$$a_v = \frac{dv}{dt} = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v}, \quad a_v = 1,79 \text{ м/с}^2.$$

Задание движения точки в полярной системе координат

Если движение точки происходит в некоторой плоскости, то иногда целесообразно использовать полярную систему координат. Положение точки M в ней определяется координатами r и φ , являющимися скалярными величинами (рис. 1.5).

Расположение *полярной оси* (луча, проведенного на плоскости из некоторой точки O) выбирают в плоскости движения точки, исходя из удобства решения задачи. *Полярный радиус* r — скалярный неотрицательный параметр, равный длине отрезка OM , т. е. расстоянию от начала координат (точки O) до точки M . *Полярный угол* φ — это угол между полярной осью и линией OM . При отсчете угла φ за положительное принимают направление, противоположное направлению движения часовой стрелки. Осями полярной системы координат, составляющими ее векторный базис, являются единичные векторы $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$. Первый из них направлен из начала координат O к точке M и задает положительное направление *радиальной оси* Or . Второму ему перпендикулярен, находится путем поворота первого на 90° против направления движения часовой стрелки и определяет положительное направление *трансверсали*, т. е. *поперечной оси* Op , перпендикулярной радиальной оси (см. рис. 1.5, а). Остры полярной системы координат $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$ являются подвижными, изменяющими свое направление с изменением угла φ .

Для задания движения точки в полярной системе координат необходимо иметь уравнения движения в виде

$$\begin{cases} r = r(t); \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (1.16)$$

Система (1.16) является также параметрической формой записи уравнения траектории точки. Если из (1.16) исключить время, то уравнение траектории можно получить в форме

* Как будет показано далее, для общего случая криволинейных координат, частным случаем которых являются полярные координаты, начало указанных на данном рисунке осей и единичных векторов может быть отнесено и в текущее положение точки на траектории ее движения (см. рис. 1.5, б).

$$f(r, \varphi) = 0. \quad (1.17)$$

В полярной системе координат радиус-вектор точки, проведенный из центра O , равен $\vec{r} = r\vec{r}_0$ и, согласно (1.16), выражается так:

$$\vec{r} = r(t)\vec{r}_0. \quad (1.18)$$

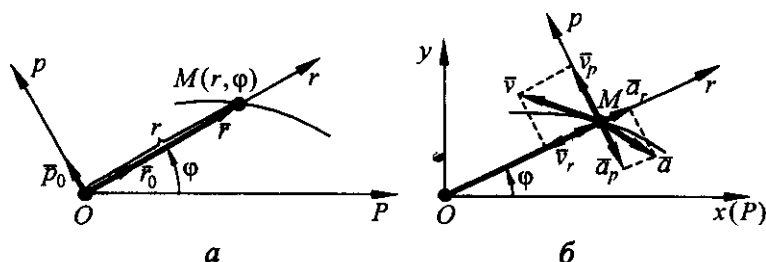


Рис. 1.5

Уравнение (1.18) соответствует векторному уравнению движения точки в форме (1.5). Тогда на основании (1.1) скорость точки

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{r}_0)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (1.19)$$

В (1.19) производную $d\vec{r}_0/dt$, согласно правилу дифференцирования вектора постоянного модуля (см. формулу В.87), можно определить так:

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{p}_0. \quad (1.20)$$

С учетом (1.20) выражение (1.19) примет вид

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\vec{r}_0 + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{p}_0. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что вектор $\vec{v}$ представляется в виде суммы двух векторов, каждый из которых является составляющей скорости по направлению, задаваемому векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{p}_0$ соответственно. Первое слагаемое в (1.21) называется **радиальной составляющей**, а второе — **трансверсальной составляющей** скорости точки:

$$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{r}_0; \quad \vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}_0. \quad (1.22)$$

Проекции скорости на радиальную и трансверсальную оси имеют вид

$$v_r = \bar{v} \cdot \bar{r}_0 = \dot{r}; \quad v_p = \bar{v} \cdot \bar{p}_0 = r\dot{\phi}. \quad (1.23)$$

По знакам проекций v_r и v_p можно установить направления составляющих скорости (1.22) по отношению к направлениям радиальной и трансверсальной осей или единичных векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$ соответственно.

Так как составляющие скорости в (1.22) взаимно перпендикулярны, то ее модуль

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2}. \quad (1.24)$$

Согласно (1.3) и (1.21), ускорение точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\phi}\bar{p}_0).$$

Отсюда можно получить

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\phi}\bar{p}_0) = \ddot{r}\bar{r}_0 + \dot{r}\dot{\bar{r}}_0 + \dot{r}\dot{\phi}\bar{p}_0 + r\ddot{\phi}\bar{p}_0 + r\dot{\phi}\dot{\bar{p}}_0. \quad (1.25)$$

В правой части выражения (1.25), согласно правилу дифференцирования единичных векторов (B.87), $\dot{\bar{r}}_0 = \dot{\phi}\bar{p}_0$, $\dot{\bar{p}}_0 = -\dot{\phi}\bar{r}_0$. Таким образом,

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{r}_0 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{p}_0. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует, что ускорение точки также можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_p, \quad (1.27)$$

где $\bar{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{r}_0$, $\bar{a}_p = (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{p}_0$ — **радиальная и трансверсальная составляющие** ускорения точки соответственно.

Проекции ускорения на радиальную и трансверсальную оси*, задаваемые единичными векторами $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$, найдутся так:

* Следует заметить, что в рассматриваемом случае направления осей проецирования, задаваемые направлениями единичных векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$, изменяются в пространстве с течением времени, поэтому в отличие от (1.13) проекции ускорения на направления этих осей не равны производным от проекций скоростей на те же оси: $a_r \neq \dot{v}_r$; $a_p \neq \dot{v}_p$.

$$a_r = \bar{a} \bar{r}_0 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_p = \bar{a} \bar{p}_0 = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (1.28)$$

Так как составляющие ускорения в (1.27) взаимно перпендикулярны, то его модуль

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2}. \quad (1.29)$$

Для определения характера движения (ускоренное или замедленное) точки по траектории следует найти проекцию ускорения на ось, совпадающую по направлению с вектором $\bar{v}$. В соответствии с (1.4)

$$a_v = \bar{a} \cdot \bar{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v} = \frac{a_r v_r + a_p v_p}{\sqrt{v_r^2 + v_p^2}}.$$

Если полагать, что полярная ось OP совпадает с осью Ox декартовой системы координат и движение точки происходит в плоскости Oxy , то уравнения для перехода от задания движения точки в полярной системе координат в форме (1.16) к заданию ее движения в декартовой системе координат в виде (1.6) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} x &= r(t) \cos[\varphi(t)]; \\ y &= r(t) \sin[\varphi(t)]. \end{aligned}$$

Уравнения для обратного перехода будут следующими:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}; \\ \varphi &= \arctg[y(t)/x(t)]. \end{aligned}$$

Единичные векторы, образующие векторный базис полярной и декартовой систем координат, связаны зависимостями

$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \bar{p}_0 = \frac{x\bar{j} - y\bar{i}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

так что

$$v_r = \bar{v} \bar{r}_0 = \frac{xv_x + yv_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad v_p = \bar{v} \bar{p}_0 = \frac{xv_y - yv_x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (1.23^*)$$

$$a_r = \bar{a} \bar{r}_0 = \frac{xa_x + ya_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad a_p = \bar{a} \bar{p}_0 = \frac{xa_y - ya_x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.28^*)$$

Несложно получить и обратные выражения для проекций скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат через их проекции на оси полярной системы координат.

Пример 1.2. В условиях задачи, сформулированной в примере 1.1 перейти к заданию движения точки в полярной системе координат, полярная ось которой совпадает с осью Ox декартовой системы координат. Для указанного момента

времени $t = 1$ с найти радиальную и трансверсальную составляющие скорости и ускорения точки, показать их на чертеже.

Решение. В данном случае

$$r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = t\sqrt{b^2t^2 + c^2};$$

$$\varphi = \arctg[y(t)/x(t)] = \arctg[c/(bt)].$$

Проекции скорости и ускорения точки на радиальную и трансверсальную оси полярной системы координат могут быть вычислены по формулам (1.23) и (1.28) соответственно. Однако удобнее воспользоваться формулами (1.23') и (1.28'), подставив в них вычисленные в примере 1.1 для момента времени $t=1$ с значения координат точки и проекций скорости и ускорения на оси декартовой системы координат. В итоге получаем: $v_r = 3/\sqrt{2} \approx 2,12$ м/с; $v_p = -1/\sqrt{2} \approx -0,707$ м/с; $a_r = \sqrt{2} \approx 1,41$ м/с²; $a_p = -\sqrt{2} \approx -1,41$ м/с². Радиальные и трансверсальные составляющие скорости и ускорения точки изображены на рис. 1.4.

Задание движения точки в криволинейных координатах

Движение точки в пространстве можно считать заданным, если известны законы изменения трех ее декартовых координат x, y, z как функций времени (см. (1.6)). Однако в некоторых случаях пространственного движения материальных точек (например, в областях, ограниченных поверхностями различной формы) использование уравнений движения в декартовых координатах неудобно, так как они становятся слишком громоздкими. В таких случаях можно выбрать другие три независимых скалярных параметра q_1, q_2, q_3 , называемых **криволинейными**, или **обобщенными координатами**, которые также однозначно определяют положение точки в пространстве. Тогда радиус-вектор точки может быть выражен функцией как декартовых, так и криволинейных координат:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (1.30)$$

При этом следует иметь в виду, что декартовы координаты точки могут также быть выражены в виде функций, зависящих от криволинейных координат:

$$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Для задания движения точки в криволинейных координатах необходимо иметь уравнения движения точки в виде

$$q_i = q_i(t); \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.31)$$

Характеристиками криволинейной системы координат являются *координатные линии* и *координатные оси*.

Координатные линии (q_i), проходящие через любую выделенную точку M пространства с фиксированными значениями координат q_{1M}, q_{2M}, q_{3M} и соответствующие каждой i -й криволинейной координате, можно определить как годограф радиус-вектора $\vec{r}_{iM}$ точки M , изменяющегося в результате варьирования одной выделенной i -й криволинейной координаты при условии, что другие сохраняются постоянными и равными их значениям в выделенной точке:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{1M} &= \vec{r}(q_1, q_{2M}, q_{3M}); \\ \vec{r}_{2M} &= \vec{r}(q_{1M}, q_2, q_{3M}); \\ \vec{r}_{3M} &= \vec{r}(q_{1M}, q_{2M}, q_3). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Касательная к i -й координатной линии в данной точке называется *координатной осью* Mq_i , относящейся к i -й криволинейной координате в данной точке (рис. 1.6).

Положительные направления координатных осей задаются единичными векторами, которые называются базисными. Они определяются через частные производные от радиус-вектора точки по i -й обобщенной координате в данной точке M :

$$\vec{e}_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_M, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.33)$$

Здесь $H_i = \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_M \right|$ — параметр, который называется *i -м коэффициентом Ламе* и равен значению модуля частной производной от радиус-вектора точки по i -й криволинейной координате, вычисленной в данной точке M . Каждый из векторов $\vec{e}_i$ имеет направление, соответствующее направлению движения точки конца радиус-вектора $\vec{r}_{iM}$ при возрастании i -й обобщенной координаты (см. (1.32)).

Таким образом, в общем случае при любом текущем положении точки M в пространстве можно построить семейство координатных линий (q_i) , осей Mq_i и базисных векторов $\bar{e}_i$, соответствующих каждой из трех криволинейных координат q_i (см. рис. 1.6).

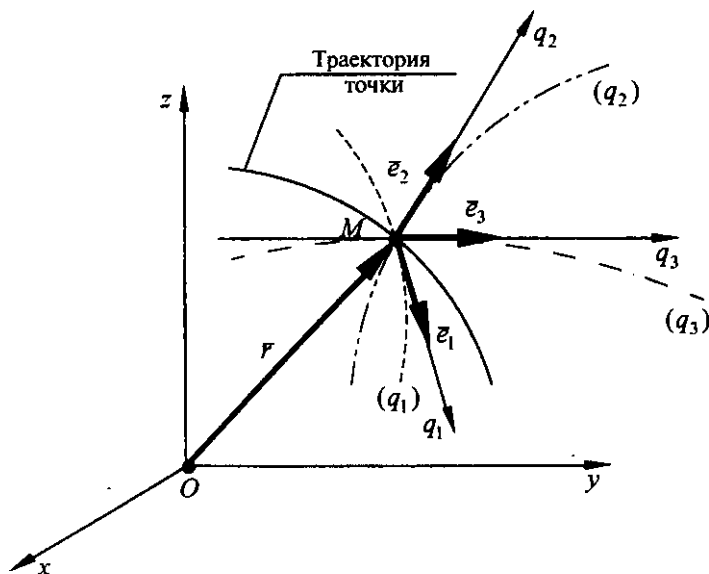


Рис. 1.6

Если базисные векторы $\bar{e}_i$ во всех точках пространства взаимно перпендикулярны, то такая система криволинейных координат называется *ортогональной*. При этом $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$, если $i \neq j$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 3}$. В дальнейшем будем рассматривать только такие системы.

С учетом (1.30) коэффициенты Ламе могут быть выражены через частные производные от декартовых по криволинейным координатам в виде

$$H_i = \left| \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (1.34)$$

Скорость точки M при задании ее движения в криволинейных координатах определится в виде векторной суммы составляющих скоростей, параллельных координатным осям:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = v_{q_1} \bar{e}_1 + v_{q_2} \bar{e}_2 + v_{q_3} \bar{e}_3. \quad (1.35)$$

Проекции скорости на соответствующие координатные оси равны

$$v_{q_i} = \bar{v} \cdot \bar{e}_i = H_i \dot{q}_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.36)$$

Модуль скорости в ортогональной криволинейной системе координат можно рассчитать по зависимости

$$v = \sqrt{v_{q_1}^2 + v_{q_2}^2 + v_{q_3}^2} = \sqrt{H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2}. \quad (1.37)$$

В формулах (1.34) – (1.37) значения производных и коэффициентов Ламе вычисляют для текущего положения точки M в пространстве.

Проекции ускорения точки M на оси криволинейной системы координат определяют в соответствии с (1.3), (1.33) и (1.35) по формуле

$$a_{q_i} = \bar{a} \cdot \bar{e}_i = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{e}_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.38)$$

Преобразуем выражение (1.38) к удобной для расчетов форме. Для этого выражение в скобках представим в виде

$$\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \bar{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right). \quad (1.39)$$

В последнем слагаемом в (1.39), изменяя порядок дифференцирования, проведем тождественное преобразование

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}. \quad (1.40)$$

Дифференцируя левую и правую части выражения (1.35), получаем

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (1.41)$$

Соотношение (1.41) называется *тождеством Лагранжа*.

С учетом (1.39), (1.40) и (1.41) из (1.38) можно последовательно выразить

$$\begin{aligned} a_{q_i} &= \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right] = \\ &= \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{v}^2 / 2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \bar{v}^2 / 2}{\partial \dot{q}_i} \right] \end{aligned}$$

или, обозначив $\frac{\bar{v}^2}{2} = T$, окончательно имеем

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]. \quad (1.42)$$

Таким образом, *ускорение точки при задании ее движения в криволинейных координатах определится в виде векторной суммы составляющих ускорений, параллельных осям этой системы координат*,

$$\bar{a} = a_{q_1} \bar{e}_1 + a_{q_2} \bar{e}_2 + a_{q_3} \bar{e}_3,$$

где a_{q_i} — проекции ускорения на оси, определяемые согласно (1.42), $i = \overline{1, 3}$.

Модуль ускорения в ортогональной криволинейной системе координат вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_{q_1}^2 + a_{q_2}^2 + a_{q_3}^2}. \quad (1.43)$$

Задание движения точки в цилиндрической системе координат

Координатами точки в цилиндрической системе координат являются скалярные параметры R , φ , Z . Система уравнений движения точки имеет вид

$$\begin{cases} R = R(t); \\ \varphi = \varphi(t); \\ Z = Z(t). \end{cases} \quad (1.44)$$

На рис. 1.7 показаны радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат, а также координатные линии и оси рассматриваемой системы в произвольной точке M траектории. Видно, что координатные линии (Z) и (φ) расположены на поверхности кругового цилиндра с радиусом основания, равным R , при этом координатная линия (Z) является его образующей. Данная криволинейная система координат — ортогональная, так как ее оси (MR , $M\varphi$, MZ) и соответствующие им базисные векторы ($\vec{r}_0$, $\vec{p}_0$, $\vec{k}_0$) взаимно перпендикулярны.

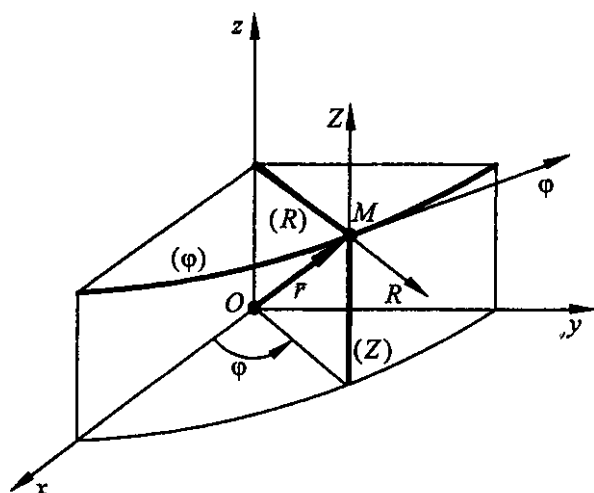


Рис. 1.7

В рассматриваемом случае декартовы координаты точки могут быть выражены через криволинейные в виде $x = R \cos \varphi$; $y = R \sin \varphi$; $z = Z$. Тогда коэффициенты Ламе, согласно (1.34), для данных криволинейных координат во всех точках определяются так:

$$H_R = 1; \quad H_\varphi = R; \quad H_Z = 1.$$

Проекции скорости точки на оси цилиндрической системы координат

$$v_R = \dot{R}; \quad v_\varphi = R\dot{\varphi}; \quad v_Z = \dot{Z}, \quad (1.45)$$

а ее модуль

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_\varphi^2 + v_Z^2} = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{Z}^2}.$$

Функция $T = v^2 / 2 = (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{Z}^2) / 2$. Тогда проекции ускорения будут

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}; \quad a_Z = \ddot{Z}, \quad (1.46)$$

а его модуль, согласно (1.43),

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_\varphi^2 + a_Z^2}.$$

Как частный случай, полагая в (1.45) и (1.46) $Z = 0$, можно получить формулы для проекций скорости и ускорения на оси полярной системы координат с полярной осью, совпадающей с осью Ox (см. рис. 1.7), с полярной координатой $r = R$ и полярным углом φ (см. (1.23), (1.28)).

Задание движения точки в сферической системе координат

Координатами точки в сферической системе координат являются скалярные параметры r, φ, θ , отсчитываемые так, как показано на рис. 1.8. Система уравнений движения точки в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} r = r(t); \\ \varphi = \varphi(t); \\ \theta = \theta(t). \end{cases} \quad (1.47)$$

На рис. 1.8 изображены радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат, углы φ и θ , а также координатные линии и оси рассматриваемой системы в произвольной точке M траектории. Видно, что координатные линии (φ) и (θ) лежат на поверхности сферы радиусом r . Данная криволинейная система координат также является ортогональной. Ее оси Mr , $M\varphi$ и $M\theta$ и

* Приведенные ниже формулы даны для сферической системы координат с углом θ , отсчитываемым от оси Oz , как показано на рис. 1.8. В некоторых других случаях угол θ можно отсчитывать от проекции радиус-вектора точки на плоскость Oxy , и тогда приведенные здесь соотношения несколько изменятся.

соответствующие им единичные векторы $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_\theta$, определяющие положительные направления осей, взаимно перпендикулярны.

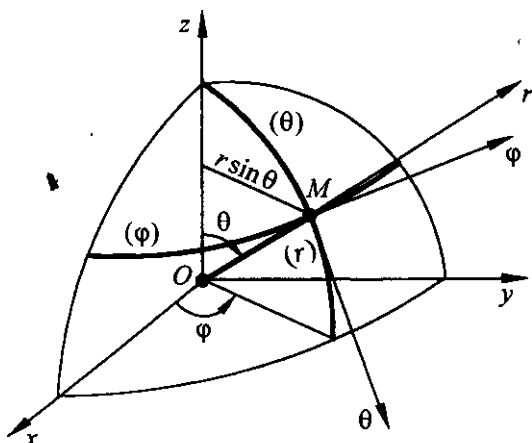


Рис. 1.8

Декартовы координаты точки в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.8, могут быть выражены через криволинейные координаты так:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta; \quad y = r \sin \varphi \sin \theta; \quad z = r \cos \theta.$$

Тогда коэффициенты Ламе (1.34)

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r \sin \theta, \quad H_\theta = r;$$

проекции скорости точки на оси сферической системы координат

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad (1.48)$$

а ее модуль

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2}.$$

Функция $T = v^2 / 2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2) / 2$, следовательно проекции ускорения (1.42) на оси сферической системы координат

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2; \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta; \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.49)$$

а его модуль

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2 + a_\theta^2}.$$

Как частный случай, полагая в (1.48) и (1.49) $\theta \equiv \pi/2$, можно получить формулы для проекций скорости и ускорения на оси полярной системы координат с полярной осью, совпадающей с осью Ox (см. рис. 1.8), полярной координатой r и полярным углом ϕ (см. (1.23), (1.28)).

1.5. Естественный способ задания движения точки

Если траектория точки известна (т. е. в некоторой системе отсчета определена графически, с помощью уравнения или другим образом), то задать движение точки можно *естественным способом*. Для этого необходимо: зафиксировать на траектории точку начала отсчета, выбрать положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты и указать уравнение движения точки по траектории в виде

$$s = s(t). \quad (1.50)$$

Всего этого в совокупности достаточно для однозначного определения положения точки в пространстве в любой момент времени.

Скалярный параметр s в данном случае имеет смысл криволинейной (дуговой) координаты, модуль которой определяет текущее расстояние по траектории от начала отсчета (точки O) до подвижной точки M , а знак показывает, по какую сторону от начала отсчета находится точка M на траектории (рис. 1.9).

Следует отметить, что уравнение движения в форме (1.50) определяет текущее положение точки именно на траектории, при этом может быть установлена взаимно однозначная связь между значениями

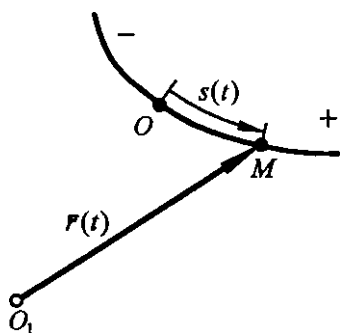


Рис. 1.9

координаты s и радиус-вектором точки M в той системе отсчета, в которой определена в рассматриваемом случае траектория движения точки (см. рис. 1.9). Тогда радиус-вектор точки может быть представлен в виде функциональной зависимости от параметра s в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \quad (1.51)$$

Прежде чем находить скорость и ускорение при рассматриваемом способе задания движения точки, определим естественную систему осей и ее векторный базис, т. е. систему трех единичных векторов, задающих положительное направление этих осей.

Первая ось естественной системы — ось, касательная к кривой (траектории) в данной точке M , может быть определена как предельное положение секущей, проходящей через две близлежащие точки M и M_1 кривой, когда расстояние между этими точками стремится к нулю. При этом положительное направление касательной оси следует принимать в направлении возрастания значений дуговой координаты s . Задавать это направление оси можно с помощью единичного вектора $\vec{\tau}$, касательного к траектории в данной точке. Исходя из (1.51), этот вектор можно определить так:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{\tau}| = 1.$$

Единичный вектор $\vec{\tau}$ всегда направлен по касательной к траектории в направлении возрастания значений дуговой координаты s .

Вторая ось естественной системы, которая называется *нормальной осью* (нормалью), расположена в соприкасающейся плоскости. Она перпендикулярна касательной к траектории в точке и направлена в сторону вогнутости траектории точки* по главной нормали.

* Определение соприкасающейся плоскости дано в 1.1 и 1.2 как предельное положение плоскости, проходящей через касательные в точке M и вблизилежащей точке M_1 на кривой при ее предельном сближении с точкой M . Там же показано, что в этой плоскости находятся скорость и ускорение точки.

Здесь следует напомнить, что производная от единичного вектора $\bar{\tau}$ по скалярному аргументу s есть вектор, перпендикулярный $\bar{\tau}$ и направленный по нормали к касательной траектории движения точки в сторону ее вогнутости. Модуль этой производной равен *кривизне кривой в данной точке*:

$$K = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — *радиус кривизны траектории в данной точке*.

Тогда единичный вектор $\bar{n}$, задающий положительное направление нормальной оси, может быть определен так:

$$\bar{n} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho = \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right) \cdot \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|^{-1}, \quad |\bar{n}| = 1.$$

Вектор $\bar{n}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен по главной нормали в сторону вогнутости траектории к центру ее кривизны в данной точке.

Третья ось естественной системы называется *бинормальной осью (бинормалью)*. Она перпендикулярна к касательной и нормальной осям, а ее положительное направление можно найти по единичному вектору бинормали $\bar{b}$, который определяется как результат векторного произведения единичных векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ в виде

$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}, \quad |\bar{b}| = 1.$$

Таким образом, *векторный базис $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ определяет положительные направления соответствующих координатных осей в каждой точке траектории*.

Оси естественной системы (касательная $[\tau]$, нормаль $[n]$ и бинормаль $[b]$), построенные в точке M траектории, образуют *естественный трехгранник*. Грани его, определяемые каждой парой пересекающихся осей, совпадают с *соприкасающейся* (τ , n), *нормальной* (n , b) и *спрямляющей*, или касательной, (b , τ) плоскостями (рис. 1.10). При движении точки M по своей траектории естественный трехгранник с вершиной в точке M также движется и ориентация его граней и осей, их образующих, изменяется в пространстве.

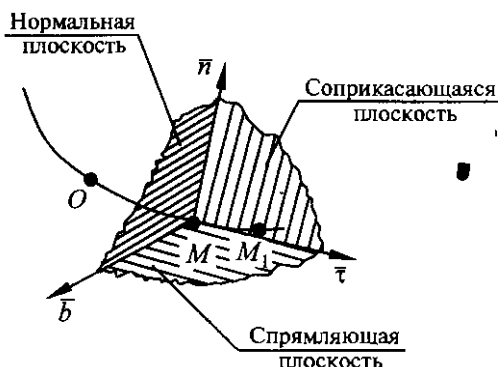


Рис. 1.10

Теперь можно перейти к определению скорости при естественном способе задания движения точки. Согласно основному определению скорости (1.1) и (1.51),

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \dot{s},$$

или, с учетом определения единичного вектора $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$,

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau}. \quad (1.52)$$

Из (1.52) следует, что **проекция скорости точки на ось, касательную к траектории точки, равна**

$$v_{\tau} = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = \dot{s}.$$

Очевидно, что $\bar{v} = \bar{v}_{\tau} = v_{\tau} \bar{\tau}$.

При $v_{\tau} = \dot{s} > 0$ точка движется в положительном направлении отсчета s , а при $v_{\tau} = \dot{s} < 0$ — в противоположную сторону.

Модуль скорости, т. е. ее численное значение, при естественном способе задания движения точки определяется так:

$$v = |\bar{v}| = |v_{\tau}| = |\dot{s}|.$$

Для ускорения на основании (1.3) имеем

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(v_{\tau} \bar{\tau})}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + v_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt},$$

где $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} \bar{n}$.

Таким образом,

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}, \quad (1.53)$$

или

$$\bar{a} = \dot{v}_\tau \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}.$$

Из (1.53) следует, что ускорение представляет собой сумму касательной $\bar{a}_\tau = \ddot{s} \bar{\tau}$ и нормальной $\bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}$ составляющих (рис. 1.11):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

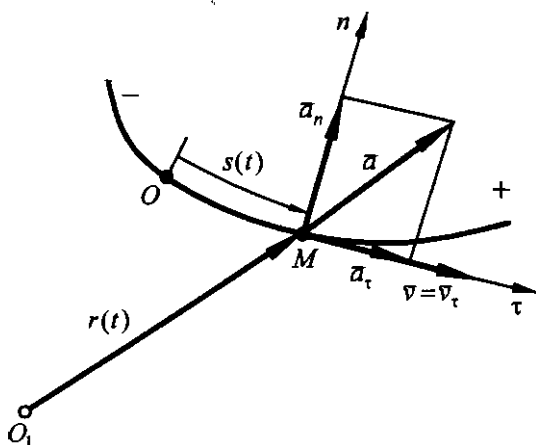


Рис. 1.11

Полученный результат подтверждает вывод о том, что вектор $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости (τ, n) (см. § 1.2). Проекции ускорения на оси естественной системы координат (касательную, нормаль и бинормаль) равны

$$a_\tau = \bar{a} \cdot \bar{\tau} = \ddot{s} = \dot{v}_\tau;$$

$$a_n = \bar{a} \cdot \bar{n} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}; \quad (1.54)$$

$$a_b = \bar{a} \cdot \bar{b} \equiv 0.$$

Модуль проекции ускорения на касательную ось характеризует изменение скорости по величине, а знак показывает соответствие направления касательной составляющей ускорения направлению единичного вектора $\bar{\tau}$, т. е. выбранному положительному направлению отсчета s .

Проекция ускорения на нормаль всегда неотрицательна* и характеризует изменение скорости только по направлению. Если точка на криволинейном участке траектории движется с постоянной по модулю скоростью ($v = \text{const}$), то она все же будет иметь ускорение, направленное по нормали и определяющее изменение направления вектора $\bar{v}$, так что в этом случае $\bar{a} \perp \bar{v}$ и $\bar{a} = \bar{a}_n$.

Очевидно, что $\bar{a}_\tau = a_\tau \bar{\tau}$, $\bar{a}_n = a_n \bar{n}$, $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, и модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.55)$$

Характер движения точки по траектории (ускоренный или замедленный) можно определить, исходя из знака скалярного произведения ускорения и скорости: в случае $\bar{a} \cdot \bar{v} = a_\tau v_\tau > 0$ — движение точки ускоренное ($\dot{v} > 0$), при этом $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}$ направлены в одну сторону; в случае $\bar{a} \cdot \bar{v} = a_\tau v_\tau < 0$ — движение точки замедленное ($\dot{v} < 0$), при этом $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}$ направлены в противоположные стороны. При $a_\tau(t) \equiv 0$ движение точки равномерное ($|\bar{v}| = \text{const}$), в этом случае при движении по криволинейной траектории $\bar{a} = \bar{a}_n$ и $\bar{a} \perp \bar{v}$.

Заметим, что проекции ускорения на касательную ($a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau$) и на ось, совпадающую по направлению с вектором $\bar{v}$ ($a_v = \dot{v}$), равны по модулю, т. е. $|a_\tau| = |a_v|$.

* Положительное направление нормали всегда принимается в сторону вогнутости траектории точки в соприкасающейся плоскости.

Текущее значение пути $L(t)$, пройденного точкой по траектории, и закон движения точки по траектории $s(t)$ также могут совпадать (с точностью до знака), но только в случае, если начало отсчета пути соответствует такому моменту времени t_0 , при котором $s(t_0) = 0$, и за рассматриваемый промежуток времени $t - t_0$ проекция скорости на касательную не меняла своего знака. Тогда можно записать

$$L(t) = |s(t)| = \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Пример 1.3. В задаче, сформулированной в примере 1.1, дополнительно определить закон движения точки M по ее траектории.

Решение. Согласно приведенному в примере 1.1 решению, движение точки M происходит по траектории, являющейся частью параболы, расположенной над осью Ox (см. рис. 1.4). Примем начало отсчета криволинейной координаты s в точке O и будем считать положительным направление, соответствующее направлению перемещения точки вверх по параболе. В рассматриваемом случае в течение всего времени движения перемещение точки происходит по траектории в положительном направлении (проекции скорости на оси координат $v_x = 2bt$, $v_y = c$ не меняют своего знака). Следовательно, закон движения точки по тра-

ектории имеет вид $s(t) = \int_0^t v(t) dt$, где $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2bt)^2 + c^2}$. После вычисления интеграла получаем

$$s(t) = \frac{t\sqrt{(2bt)^2 + c^2}}{2} + \frac{c^2}{4b} \ln \left[\frac{2bt + \sqrt{(2bt)^2 + c^2}}{c} \right].$$

Значения констант b и c даны в примере 1.1.

Пример 1.4. Движение точки M происходит в плоскости Oxy по окружности радиусом $R = 1$ м согласно закону $s(t) = c \sin(bt)$, где $c = \pi/2$ м, $b = 1$ с⁻¹, t — время в секундах. Начало отсчета (точка M_0) и положительное направление отсчета координаты $s(M_0M)$ заданы на рис. 1.12. Для момента времени $t_1 = \pi/6$ с найти скорость и ускорение точки M , показать их на чертеже.

Решение. Положение точки на окружности удобно определять через значения центрального угла α , опирающегося на дугу окружности $\cup M_0M$ с длиной, равной s :

$$\alpha = s(t)/R. \quad (1.56)$$

Положительные значения угла в данном случае будем откладывать от горизонтального диаметра против направления движения часовой стрелки, а отрицательные по ее ходу. При этом диапазон изменения дуговой координаты $-c \leq s \leq c$, поэтому $\alpha_{\min} = -\pi/2$, $\alpha_{\max} = \pi/2$, так что траекторией является лишь правая половина окружности, выделенная на рис. 1.12 жирной линией.

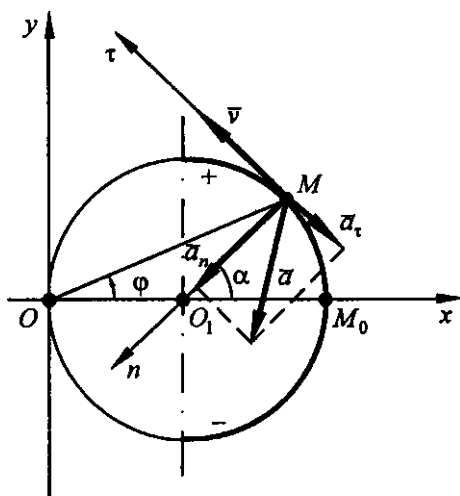


Рис. 1.12

Проекция скорости точки M на касательную $v_t = \dot{s} = cb \cos(bt)$. Проекция ускорения точки M на касательную ось и нормаль соответственно равны $a_t = \ddot{s} = -cb^2 \sin(bt)$, $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{[cb \cos(bt)]^2}{R}$.

В момент времени $t = t_1 = \pi/6$ с $\alpha = \pi/4$, $v_t = \pi\sqrt{3}/4 \approx 1,36$ м/с, $a_t = -\pi/4 \approx -0,785$ м/с², $a_n = 3\pi^2/16 \approx 1,85$ м/с². Положение точки на траектории, касательная и нормальная оси, а также скорость и ускорение точки M показаны на рис. 1.12. Так как $v_t > 0$, то вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в положительном направлении касательной оси, а касательная составляющая ускорения $\vec{a}_t$, поскольку $a_t < 0$, — в противоположном направлении. Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена по нормали от точки M к точке O_1 . Полное ускорение точки M $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ совпадает с диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_t$ и $\vec{a}_n$ как на сторонах (см. рис. 1.12).

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \approx 2,01$ м/с².

Пример 1.5. В задаче, решаемой в примере 1.4, перейти от естественного способа задания движения точки M к заданию ее движения в декартовой системе координат Ox (см. рис. 1.12). Рассмотреть также движение точки в полярной системе координат, полярная ось которой совпадает с осью Ox декартовой системы координат. Записать уравнения траектории точки M в этих системах координат.

Решение. Согласно чертежу, приведенному на рис. 1.12, геометрические соотношения для декартовых координат точки M имеют вид

$$x = R + R \cos \alpha; \quad y = R \sin \alpha.$$

Уравнения движения точки в декартовой системе координат, с учетом (1.56), можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= R + R \cos[s(t)/R]; \\ y &= R \sin[s(t)/R], \end{aligned}$$

где закон движения точки по траектории $s(t)$ имеет вид, приведенный в условии задачи из примера 1.4.

Уравнение траектории в данном случае можно получить в форме

$$\frac{(x-R)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

При этом следует учесть диапазоны изменения декартовых координат точки:

$$\begin{aligned} R &\leq x \leq 2R; \\ -R &\leq y \leq R. \end{aligned}$$

На рис. 1.12 видно, что полярный угол $\varphi = \alpha/2$, а полярная координата r равна длине отрезка OM , являющегося стороной равнобедренного треугольника OO_1M . Из этого треугольника находим $OM = 2R \cos \varphi$.

Таким образом, уравнения движения точки M в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} r &= 2R \cos[s(t)/(2R)]; \\ \varphi &= s(t)/(2R). \end{aligned}$$

Уравнение траектории будет $r = 2R \cos \varphi$. При этом диапазоны изменения полярных координат точки M следующие:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}R &\leq r \leq 2R; \\ -\pi/4 &\leq \varphi \leq \pi/4. \end{aligned}$$

Читателю предоставляется возможность самостоятельно решить вопрос о целесообразности и трудоемкости определения кинематических характеристик движения точки в задачах, рассмотренных в примерах 1.1–1.5, для разных способов задания ее движения.

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Степени свободы и теорема о проекциях скоростей

Кинематика твердого тела — раздел кинематики, в котором изучают кинематику абсолютно твердого тела.

Основным свойством твердого тела является неизменность расстояния между любыми его точками. В кинематике форма твердого тела не влияет на кинематические параметры его движения, и в данном случае можно использовать аксиому неограниченного расширения тела, полагая, что в движение вместе с ним увлекаются любые точки из примыкающей области пространства, так что их также можно отнести к рассматриваемому твердому телу.

Задачи кинематики твердого тела сводятся к разработке способов задания его движения, определению на этой основе характеристик движений самого тела и отдельных точек, ему принадлежащих.

Для задания движения твердого тела необходимо прежде всего установить *число степеней свободы*, т. е. минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве.

В гл. 1 данного раздела показано, например, что для однозначного определения положения точки в пространстве в общем случае надо знать три ее координаты (декартовы или криволинейные), и, следовательно, свободная материальная точка имеет три степени свободы. При движении на плоскости требуются две

* Эти переменные называются также *обобщенными координатами*.

координаты, однозначно определяющие положение точки на этой плоскости; в этом случае материальная точка имеет две степени свободы. Наконец, при движении точки по заданной траектории одна координата определяет ее положение на траектории; в этом случае точка имеет одну степень свободы.

При задании движения твердого тела следует исходить из того, что его положение в пространстве можно считать определенным, если известно положение трех его точек, не лежащих на одной прямой, например A, B, C (рис. 2.1). В таком случае для однозначного определения положения твердого тела в пространстве необходимо знать по три координаты каждой из этих точек, т. е. для точек A, B и C нужно знать $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$. Однако все эти девять параметров нельзя считать независимыми, так как координаты тех же точек твердого тела будут связаны тремя уравнениями, вытекающими из условия неизменности расстояния между точками в твердом теле:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = L_{AB}^2;$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = L_{AC}^2;$$

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = L_{BC}^2,$$

где L_{AB}, L_{AC}, L_{BC} — расстояния между соответствующими точками в теле.

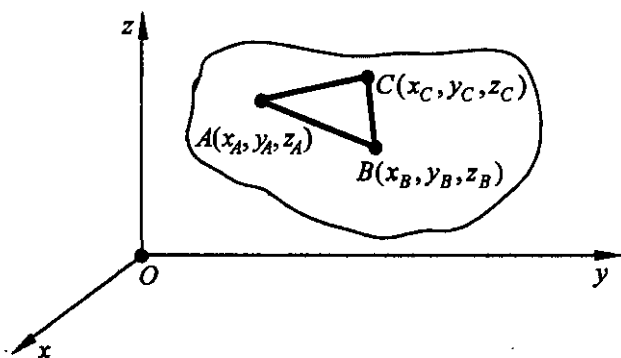


Рис. 2.1

Таким образом, можно сделать вывод, что число степеней свободы для свободного, т. е. ничем не ограниченного в своем движении, твердого тела в общем случае его перемещения в пространстве равно шести ($3 \times 3 - 3 = 6$). При этом в качестве независимых параметров могут выступать как любые шесть независимых координат точек A , B , C и (или) их комбинаций, так и шесть других независимых скалярных переменных, конкретный перечень которых будет определен при рассмотрении этого вида движения твердого тела.

Кроме общего случая движения твердого тела могут быть выделены и другие его виды, характеризующиеся некоторыми отличительными признаками, позволяющими выделить их из всей возможной совокупности движений. Простейшими движениями являются: *поступательное* движение твердого тела и его *вращение вокруг неподвижной оси*, более сложными — *плоское* и *сферическое* движения, а также *общий случай* движения твердого тела.

Для любого вида движения твердого тела справедлива теорема, которую иногда называют основной теоремой кинематики твердого тела.

Теорема 2.1. *Проекции скоростей точек тела на ось, совпадающую с прямой, проходящей через них, равны.*

Доказательство. Выделим в теле две точки A и B , положение которых в пространстве определяют радиус-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ соответственно (рис. 2.2). Тогда вектор $\overline{AB}$ можно записать в виде

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overline{AB}.$$

При возведении в квадрат левой и правой частей этого выражения получим

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = (\overline{AB})^2 = \bar{l}^2,$$

где $\bar{l} = \overline{AB}$; $\bar{l}^2 = l^2$; $l = |\overline{AB}| = \text{const}$ — расстояние между точками A и B в рассматриваемом твердом теле.

Дифференцируя по времени последнее соотношение, получаем

$$2(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \left(\frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \right) = 0.$$

Так как в этом равенстве $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$, $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B$, $\bar{r}_B - \bar{r}_A = \bar{l}$, то после замены имеем

$$2\bar{l}(\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0, \text{ или } \bar{l}\bar{v}_B = \bar{l}\bar{v}_A.$$

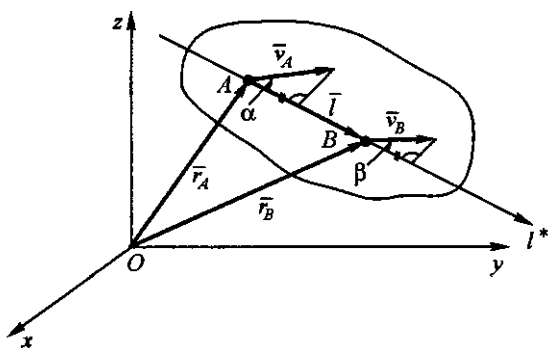


Рис. 2.2

Раскрывая скалярное произведение векторов и сокращая на l , получаем

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha,$$

где α и β — углы между скоростями соответствующих точек и осью l^* , направленной по прямой AB (см. рис. 2.2).

Таким образом, сформулированную выше теорему можно считать доказанной.

2.2. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки в этом теле, будет оставаться параллельной своему первоначальному положению во все время движения*. Заметим, что при этом траектории точек тела могут быть любыми и иметь форму прямой, окружности, пространственной кривой и т. д.

* Для идентификации этого вида движения достаточно, чтобы указанный признак выполнялся для любых двух непараллельных прямых, проведенных через точки рассматриваемого тела.

Примерами поступательного движения служат движения контактной рейки трамвайного пантографа относительно вагона, кабины колеса обозрения в парке относительно земли, ступеней эскалатора относительно пола в метро и т. д.

Свойства поступательного движения:

- 1) траектории всех точек тела, совершающего поступательное движение, конгруэнтны, т. е. одинаковы, и могут быть получены одна из другой параллельным переносом;
- 2) скорости всех точек тела одинаковы;
- 3) ускорения всех точек тела одинаковы.

Эти выводы можно подтвердить на основании следующего анализа.

Для двух любых точек A и B тела, совершающего поступательное движение (рис. 2.3), можно записать соотношение

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB},$$

где $\vec{AB} = \text{const}$ — вектор, имеющий постоянные модуль и направление во время движения, так что траектории точек A и B как годографы соответствующих радиус-векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ оказываются смещенными в любой момент времени одна относительно другой на одну и ту же величину в одном и том же направлении, что и доказывает первое свойство.

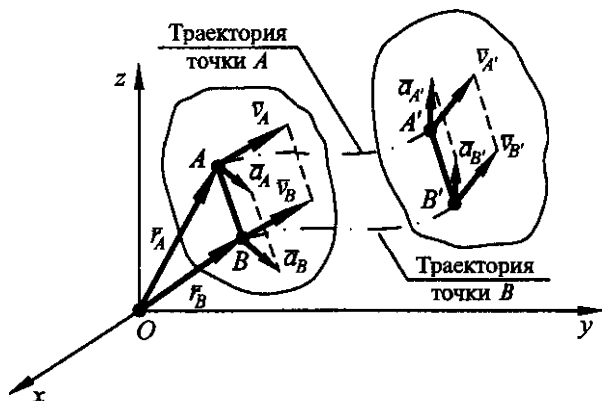


Рис. 2.3

Дифференцируя левую и правую части приведенного выше векторного соотношения и учитывая, что $d\overline{AB}/dt = 0$, получаем $d\overline{r}_B/dt = d\overline{r}_A/dt$, или $\overline{v}_B = \overline{v}_A$. Дифференцируя по времени левую и правую части полученного соотношения для скоростей, находим $d\overline{v}_B/dt = d\overline{v}_A/dt$, или $\overline{a}_B = \overline{a}_A$.

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: чтобы задать движение и определить кинематические характеристики тела, совершающего поступательное движение, достаточно задать движение одной его любой точки (полюса) и найти ее кинематические характеристики.

Как и материальная точка, тело при его поступательном движении будет иметь одну степень свободы при движении по направляющей, задающей траекторию его точкам; две степени свободы в случае движения на плоскости (при постоянном контакте с ней хотя бы одной точкой) и три степени свободы в общем случае движения в пространстве.

2.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси (или просто вращательным движением) называется такое движение твердого тела, при котором в теле можно выделить прямую, все точки которой будут оставаться неподвижными во время движения. Эта прямая называется **осью вращения** твердого тела. Очевидно, что для ее задания достаточно указать как минимум две неподвижные точки в рассматриваемом теле, через которые она проходит.

Алгоритм задания вращательного движения может быть определен на основе следующего анализа.

Введем неподвижную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и аналогичную подвижную систему координат $OXYZ$, жестко связанную с рассматриваемым телом, расположив оси Oz и OZ на оси вращения тела (рис. 2.4).

Пусть в начальный момент времени оси координат подвижной и неподвижной систем совпадали. Тогда положение вращающегося тела относительно неподвижной системы координат в любой текущий момент времени однозначно определится значением двугранного угла φ между неподвижной плоскостью Oxz и подвиж-

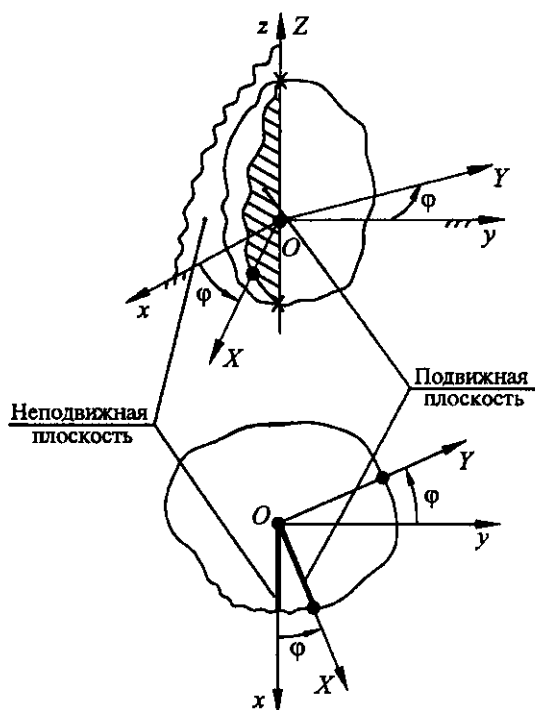


Рис. 2.4

ной плоскостью OXZ , вращающейся вместе с рассматриваемым телом. Таким образом, при вращении вокруг неподвижной оси тело имеет одну степень свободы, так как его положение в неподвижной системе координат $Oxyz$ однозначно определяется значением одного скалярного параметра — угла φ . Уравнение, определяющее изменение этого угла как функции времени, общего вида

$$\varphi = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная дважды дифференцируемая функция времени, называется *законом вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*^{*}.

^{*} Угол φ также может быть углом между любой неподвижной плоскостью, проходящей через ось вращения, и подвижной, связанной с телом и также проходящей через указанную ось плоскостью.

Отношение изменения угла поворота тела вокруг неподвижной оси к промежутку времени Δt называется средней угловой скоростью вращения тела:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется угловой скоростью вращения тела в момент времени t :

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Здесь $\dot{\varphi}$ — скалярная алгебраическая величина, которая может принимать положительные и отрицательные значения.

На чертеже угол поворота тела и направление угловой скорости принято условно изображать дуговыми стрелками. При этом за положительное направление отсчета угла φ обычно принимают направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления координатной оси, совмещенной с осью вращения тела. Это, в частности, соответствует так называемой правой декартовой системе координат.

Угловую скорость можно определить и как вектор $\vec{\omega}$, расположенный на оси вращения и равный

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k},$$

где $\vec{k}$ — единичный вектор, задающий положительное направление оси вращения, или орт оси Oz (рис. 2.5).

Проекция вектора угловой скорости на ось вращения Oz

$$\omega_z = \vec{\omega} \vec{k} = \dot{\varphi},$$

т. е. она равна угловой скорости вращения тела. Положительные направления отсчета φ , $\dot{\varphi}$ и оси Oz соответствуют правой декартовой системе координат.

Численное значение угловой скорости ω равно модулю вектора $\vec{\omega}$ и определяется как модуль проекции ω_z либо как модуль угловой скорости тела при его вращении вокруг неподвижной оси:

$$\omega = |\vec{\omega}| = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|.$$

Единица измерения угловой скорости в СИ — радиан в секунду (рад/с).

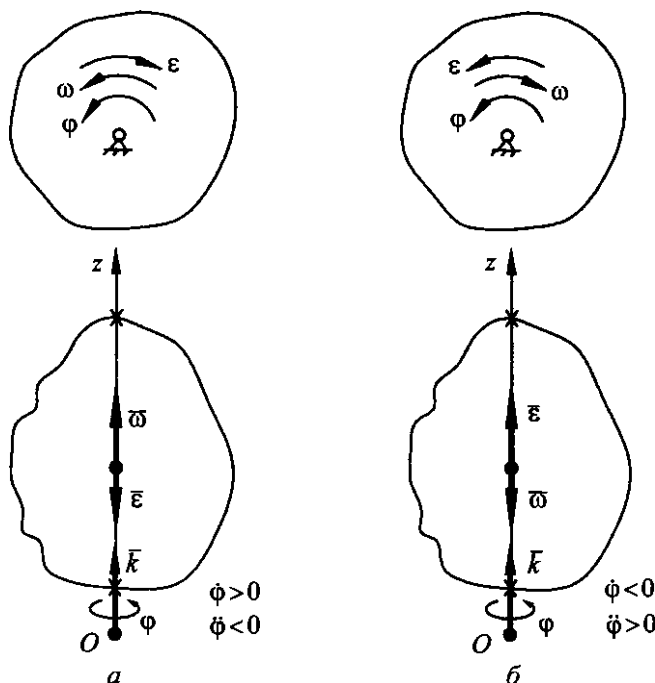


Рис. 2.5

Изменение угловой скорости тела во времени характеризуется его *угловым ускорением*.

Угловым ускорением тела называется первая производная от угловой скорости или вторая производная по времени от угла поворота вокруг неподвижной оси:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где $\ddot{\varphi}$ — скалярная алгебраическая величина.

Как векторную величину угловое ускорение можно определить так:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\phi} \bar{k}.$$

Проекция углового ускорения на ось вращения Oz

$$\varepsilon_z = \bar{\varepsilon} \bar{k} = \ddot{\phi},$$

т. е. она равна угловому ускорению тела. Положительные направления отсчета ϕ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ и оси Oz соответствуют правой декартовой системе координат.

Значение (модуль) углового ускорения

$$\varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = |\varepsilon_z| = |\ddot{\phi}|.$$

Единица измерения углового ускорения в СИ — радиан на секунду в квадрате (рад/с^2).

На чертеже угловое ускорение условно изображают дуговой стрелкой, направленной при $\ddot{\phi} > 0$ так же, как и стрелка, задающая положительное направление отсчета угла ϕ , и противоположно при $\ddot{\phi} < 0$. Угловое ускорение можно также изображать в виде вектора, расположенного на оси вращения и совпадающего по направлению с осью вращения Oz при $\varepsilon_z = \ddot{\phi} > 0$ или направленного в противоположную сторону при $\varepsilon_z = \ddot{\phi} < 0$ (см. рис. 2.5).

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются скользящими векторами, расположенными на оси вращения тела и не имеющими на ней конкретной точки приложения.

Вращательное движение называется **ускоренным**, если производная от модуля угловой скорости положительна ($d\omega/dt > 0$), и **замедленным**, если эта производная отрицательна ($d\omega/dt < 0$). Эту характеристику можно дать также исходя из знака скалярного произведения $\bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon}$: при $\bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon} = \omega_z \varepsilon_z = \dot{\phi} \ddot{\phi} > 0$ вращательное движение будет ускоренное, а при $\bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon} = \omega_z \varepsilon_z = \dot{\phi} \ddot{\phi} < 0$ — замедленное; при $\varepsilon(t) \equiv 0$ тело вращается равномерно, в этом случае $\omega = \text{const}$.

При вращательном движении твердого тела траектории всех точек этого тела являются окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Центры всех этих окружностей лежат на оси вращения, а радиусы равны кратчайшему расстоянию

от этих точек до оси вращения. На рис. 2.6 для точки A тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz , показана ее траектория — окружность радиусом h , а также единичные векторы $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ естественной системы осей, причем вектор бинормали $\bar{b}$ направлен так же, как единичный вектор $\bar{k}$ на оси Oz . Запишем радиус-вектор $\bar{r}$ этой точки, проведенный из точки O на оси вращения $\bar{r} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}$, где $\overline{OO_1} = OO_1 \bar{k}$; $\overline{O_1A} = -h \bar{n}$, причем $\overline{OO_1} = \text{const}$. Скорость точки A определим в виде

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -h \frac{d\bar{n}}{dt}.$$

Согласно правилу дифференцирования вектора

постоянного модуля (В.87) в данном случае $\frac{d\bar{n}}{dt} = -\dot{\phi} \bar{\tau}$, так что

$$\bar{v} = h\dot{\phi} \bar{\tau}. \text{ Поскольку } \bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{b} = \bar{n} \times \bar{k}, \text{ то } \bar{v} = h\dot{\phi} \bar{n} \times \bar{k} = \dot{\phi} \bar{k} \times (-h\bar{n}) = \\ = \dot{\phi} \bar{k} \times (\overline{OO_1} \cdot \bar{k} - h\bar{n}). \text{ В итоге получаем}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.1)$$

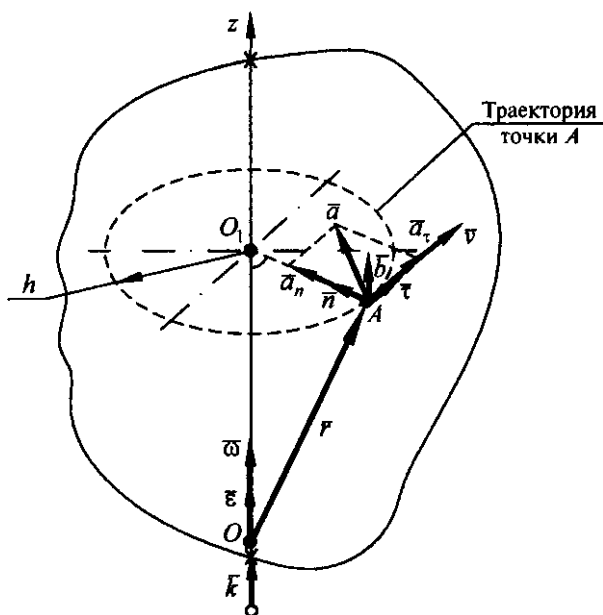


Рис. 2.6

Формула (2.1) называется **векторной формулой Эйлера**.

Численное значение (модуль) скорости точки тела при этом определится как модуль соответствующего векторного произведения, т. е.

$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega h.$$

Скорости точек при вращении вокруг неподвижной оси направлены по касательной к окружности радиусом h в соответствии с направлением угловой скорости тела. Направление вектора $\vec{v}$ можно определить, исходя из свойств векторного произведения (2.1).

Ускорение точки A тела

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В последнем выражении $d\vec{\omega}/dt = \vec{\epsilon}$, $d\vec{r}/dt = \vec{v}$. Следовательно,

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.2)$$

Слагаемые в правой части выражения (2.2) представляют собой касательную (тангенциальную) $\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$ и нормальную $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ составляющие ускорения точки.

Действительно, направление $\vec{a}_\tau$, исходя из векторного произведения $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$, будет определено как направление вектора, касательного к окружности радиусом h в точке A , $\vec{a}_\tau = h\vec{\phi}\vec{r}$. На рис. 2.6 видно, что это направление также соответствует направлению углового ускорения тела. Модуль касательного ускорения точки в данном случае равен

$$|\vec{a}_\tau| = |\vec{\epsilon} \times \vec{r}| = \epsilon r \sin(\vec{\epsilon}, \vec{r}) = \epsilon h. \quad (2.3)$$

Вектор $\vec{a}_n$ всегда направлен по нормали к траектории точки A в сторону ее вогнутости (к оси вращения тела, перпендикулярно к ней). Модуль нормального ускорения точки

$$|\vec{a}_n| = a_n = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\pi/2) = \omega^2 h. \quad (2.4)$$

Полное ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела (см. рис. 2.6), а его численное значение (модуль) определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{(\epsilon h)^2 + (\omega^2 h)^2} = h \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.5)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что *модули скоростей и ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, прямо пропорциональны кратчайшему расстоянию от них до оси вращения, причем, чем дальше находится точка от оси вращения, тем больше ее скорость и ускорение.*

Пример 2.1. В механизме, изображенном на рис. 2.7, связь тел 1 и 2 с неподвижным основанием осуществляется с помощью цилиндрических шарниров O и O_1 , а тела 3 с телами 1 и 2 с помощью цилиндрических шарниров A и B соответственно. Тело 4 перемещается в вертикальных направляющих M и N и не проскальзывает относительно тела 2 в точке E . Известно, что $OA = O_1B = L = 0,2$ м, $OO_1 = AB = d = 0,4$ м, $BD = e = 0,5$ м, $R = 0,5L$, $AB \perp BD$. Движение стержня 1 задается уравнением изменения его угла поворота вокруг оси Oz , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа в виде $\varphi(t) = bt - ct^2 - \pi$, где $b = 2\pi$ рад/с; $c = 3\pi/4$ рад/с²; t — время в секундах.

Для момента времени $t_1 = 1$ с определить угловые скорости и угловые ускорения тел 1 и 2, а также скорости и ускорения точек A , D , E и тела 4. Все найденные кинематические параметры движения тел и точек показать на чертеже (включая траектории точек A и D).

Решение. В рассматриваемом механизме тела 1 и 2 совершают вращательное движение (их неподвижные оси вращения совпадают с осями цилиндрических шарниров O и O_1 соответственно). Тело 3 совершает поступательное движение (линия, проходящая через точки A и B , все время остается вертикальной, а линия, проходящая через точки B и D , — горизонтальной). Тело 4 также совершает поступательное движение, перемещаясь в вертикальных направляющих.

Проекции угловой скорости и углового ускорения тела 1 на ось вращения Oz найдем по формулам

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = b - 2ct; \quad \epsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = -2c.$$

При $t = 1$ с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ рад; $\omega_{1z} = \frac{\pi}{2}$ рад/с; $\epsilon_{1z} = -\frac{3\pi}{2}$ рад/с², а модули угловой скорости и углового ускорения тела 1 $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ рад/с; $\epsilon_1 = \frac{3\pi}{2}$ рад/с².

Направление угловой скорости тела 1 показано на рис. 2.7, а дуговой стрелкой, совпадающей по направлению с дуговой стрелкой, указывающей положительное изменение угла φ , так как $\omega_{1z} > 0$; дуговая стрелка углового ускорения, для которого $\epsilon_{1z} < 0$, имеет противоположное направление.

Углы поворота тел 1 и 2 в их вращательных движениях одинаковы (OA и O_1B являются противоположными сторонами подвижного параллелограмма

$OABO_1$), так что угловая скорость и угловое ускорение тела 2 идентичны аналогичным параметрам тела 1 ($\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$; $\bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_1$).

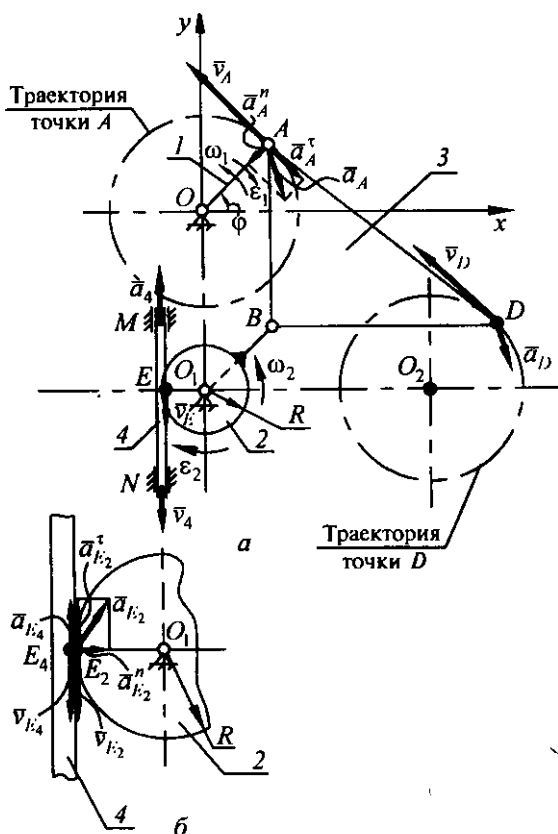


Рис. 2.7

Для точки A , как точки, принадлежащей телу 1, совершающему вращательное движение, $v_A = \omega_1 l = (\pi/2) \cdot 0,2 \approx 0,314$ м/с. Вектор $\bar{v}_A \perp OA$ и направлен в соответствии с направлением дуговой стрелки угловой скорости тела 1 (см. рис. 2.7, а). Ускорение точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$. Вектор $\bar{a}_A^\tau \perp OA$, его направление соответствует направлению углового ускорения тела 1, а модуль $|\bar{a}_A^\tau| = \epsilon_1 l = (3\pi/2) \cdot 0,2 \approx 0,942$ м/с². Нормальная составляющая ускорения $\bar{a}_A^n$ направлена из точки A к точке O , $a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = (\pi/2)^2 \cdot 0,2 \approx 0,493$ м/с². Полное ускорение точки A разложено на диагонали прямоугольника, построенного на

векторах $\vec{a}_A'$ и $\vec{a}_A''$ как на сторонах; его модуль $a_A = \sqrt{(a_A')^2 + (a_A'')^2} \approx 1,07 \text{ м/с}^2$ (см. рис. 2.7, а).

Так как тело 3 совершает поступательное движение, то скорости и ускорения всех его точек одинаковы и равны скорости и ускорению самого тела 3, поэтому $\vec{v}_3 = \vec{v}_D = \vec{v}_A$, $\vec{a}_3 = \vec{a}_D = \vec{a}_A$. Траекторией точки A является окружность радиусом $r = L = 0,2 \text{ м}$ с центром в точке $O(0, 0)$, а точки D — окружность с таким же радиусом и центром в точке O_2 с координатами $x_{O_2} = e = 0,5 \text{ м}$, $y_{O_2} = -d = -0,4 \text{ м}$ (см. рис. 2.7, а).

В месте контакта тел 2 и 4 в точке E выделим точки E_2 и E_4 , физически принадлежащие телам 2 и 4 соответственно. Для точки E_2 имеем: $v_{E_2} = \omega_2 R \approx 0,157 \text{ м/с}$; вектор $\vec{v}_{E_2} \perp O_1 E$ и его направление соответствует направлению дуговой стрелки угловой скорости тела 2; ускорение $\vec{a}_{E_2} = \vec{a}_{E_2}' + \vec{a}_{E_2}''$, где вектор $\vec{a}_{E_2}' \perp O_1 E$ и направлен в соответствии с направлением углового ускорения тела 2, $|\vec{a}_{E_2}'| = \varepsilon_2 R = (3\pi/2) \cdot 0,1 \approx 0,471 \text{ м/с}^2$, а вектор $\vec{a}_{E_2}''$ направлен из точки E к точке O_1 , $a_{E_2}'' = \omega_2^2 R = (\pi/2)^2 \cdot 0,1 \approx 0,247 \text{ м/с}^2$; полное ускорение $\vec{a}_{E_2}$ расположено на диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{E_2}'$ и $\vec{a}_{E_2}''$ как на сторонах, его модуль $a_{E_2} = \sqrt{a_{E_2}'^2 + a_{E_2}''^2} \approx 0,532 \text{ м/с}^2$ (см. рис. 2.7, б).

Из условия отсутствия проскальзывания между телами 2 и 4 в точке их контакта следует $\vec{v}_{E_4} = \vec{v}_{E_2}$, т. е. скорости точек E_2 и E_4 одинаковы (равны и по величине, и по направлению); $\vec{a}_{E_4} = \vec{a}_{E_2}'$, т. е. полное ускорение точки E_4 равно тангенциальной составляющей ускорения точки E_2 . Скорости и ускорения всех точек тела 4, совершающего поступательное движение, одинаковы и равны скорости и ускорению самого тела 4: $\vec{v}_4 = \vec{v}_{E_4}$, $\vec{a}_4 = \vec{a}_{E_4}$ (см. рис. 2.7).

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Разложение плоского движения твердого тела на поступательное и вращательное движения

Плоским, или плоскопараллельным, движением твердого тела называют такое его движение, при котором точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Примерами такого движения могут служить: качение шестерни с подвижной осью по другой неподвижной шестерне, качение колеса по прямолинейной направляющей, движение шатуна кривошипно-шатунного механизма.

Плоское движение твердого тела имеет большое практическое значение, поскольку звенья большинства механизмов и машин, применяемых в технике, совершают в процессе их эксплуатации именно такое движение.

При изучении плоского движения необходимо рассмотреть способы задания этого движения, приемы и методы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

Пусть твердое тело совершает плоское движение. Тогда, согласно определению, все точки тела будут перемещаться в плоскостях, параллельных между собой и некоторой неподвижной плоскости Π_0 (рис. 3.1). Отсюда следует, что любая прямая AB , перпендикулярная этой плоскости и принадлежащая телу, будет в процессе его движения перемещаться вместе с ним поступательно, т. е. траектории, скорости и ускорения всех точек этой прямой будут одинаковыми. Таким образом, для изучения движения точек, лежащих на рассматриваемой прямой, в соот-

ветствии с основной теоремой о поступательном движении достаточно знать движение одной из них, например точки A . Следовательно, плоское движение твердого тела полностью определяется движением плоской фигуры S , образованной пересечением тела любой плоскостью Π , параллельной неподвижной плоскости, и задание плоского движения твердого тела может быть сведено к заданию движения плоской фигуры в плоскости, параллельной плоскости Π_0 .

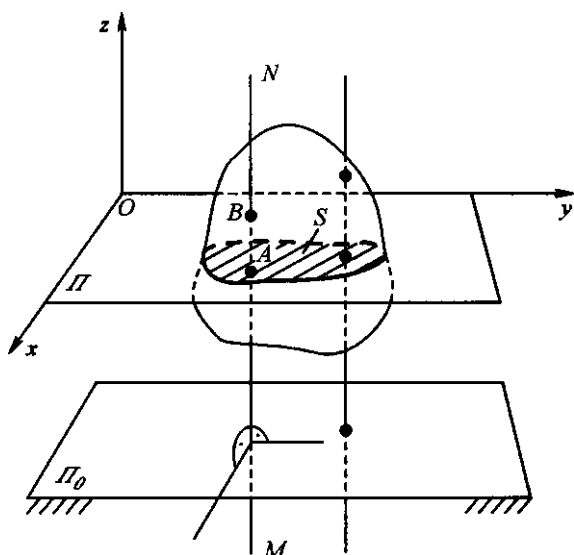


Рис. 3.1

Рассмотрим твердое тело, участвующее в плоском движении (рис. 3.2). Совместим координатную плоскость Oxy системы координат $Oxyz$ с плоской фигурой S тела. Выделим два любых положения фигуры S , которые она занимает в процессе плоского движения тела. Поскольку положение плоской фигуры вполне определяется положением ее двух точек или отрезка, соединяющего эти точки, то исследование движения плоской фигуры можно свести к изучению движения принадлежащего ей отрезка AB .

Перемещение фигуры из одного положения в другое можно разложить на поступательное движение вместе с произвольной ее

точкой, называемой полюсом, и вращение в плоскости Oxy фигуры вокруг оси, параллельной оси Oz и проходящей через выбранный полюс.

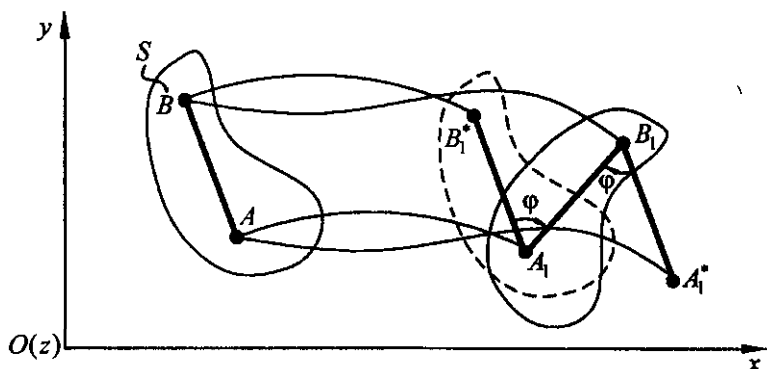


Рис. 3.2

В самом деле, выберем за полюс, например, точку A . Тогда при поступательном движении фигуры отрезок AB , перемещаясь параллельно самому себе, займет положение $A_1B_1^*$. Повернув отрезок на угол φ , совместим его с отрезком A_1B_1 плоской фигуры в новом положении, обеспечив тем самым рассматриваемое движение плоской фигуры. Аналогичный результат получается, если выбрать за полюс точку B .

Важно отметить, что *тогда как поступательная составляющая плоского движения тела в общем случае различна для разных точек тела, величина и направление отсчета угла поворота плоской фигуры всегда одни и те же, т. е. они не зависят от выбора полюса.*

3.2. Уравнения движения, угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при плоском движении

Итак, для исследования плоского движения твердого тела достаточно изучить движение его плоской фигуры. Совместим плоскость Oxy неподвижной системы координат $Oxyz$ с плоскостью Π , в которой движется плоская фигура (рис. 3.3).

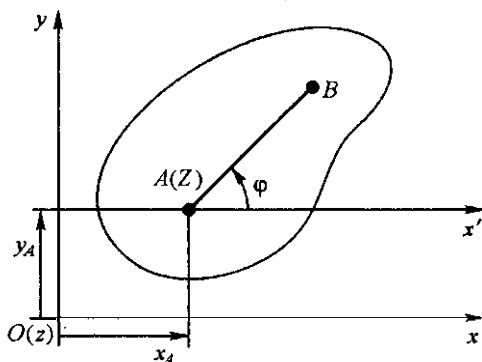


Рис. 3.3

Плоская фигура при движении имеет три степени свободы и ее положение определяется тремя независимыми координатами: декартовыми координатами x_A и y_A полюса A и углом поворота φ отрезка AB вокруг этого полюса. При движении плоской фигуры координаты x_A , y_A полюса A и угол φ , изменяясь с течением времени, являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями времени t . Уравнения

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t),$$

определяющие положение и движение плоской фигуры в неподвижной плоскости Oxy , называются **уравнениями плоского движения твердого тела**.

В плоском движении вращение твердого тела вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, характеризуется углом φ . Как и при вращении тела вокруг неподвижной оси, за положительное направление отсчета угла φ принимают направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки. Введем проекцию угловой скорости ω_Z и проекцию углового ускорения ε_Z на ось AZ для плоского движения твердого тела:

$$\omega_Z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon_Z = \frac{d\omega_Z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega}_Z = \ddot{\varphi}.$$

Алгебраические величины ω_Z и ε_Z могут быть как положительными, так и отрицательными; они не зависят от выбора полюса.

При плоском движении твердого тела угловую скорость и угловое ускорение считают векторами, направленными вдоль подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре. Направление вектора $\vec{\omega}$ должно быть таким, чтобы с его конца вращение фигуры виделось бы происходящим против вращения часовой стрелки. При ускоренном вращении направления $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ совпадают, при замедленном — противоположны. Поскольку выбор полюса произвольный, $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ являются свободными векторами.

Очевидно, при этом, что угловая скорость $\dot{\phi}$ и угловое ускорение $\ddot{\phi}$ плоского движения твердого тела — суть проекции соответствующих векторов на ось Z , а их знаки — свидетельство совпадения или несовпадения направлений векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ с положительным направлением оси $Z(z)$.

3.3. Скорости точек тела при плоском движении

Представим движение плоской фигуры и ее отрезка AB в неподвижной системе координат $Oxyz$ (рис. 3.4). Для произвольного момента времени справедливо векторное равенство

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (3.1)$$

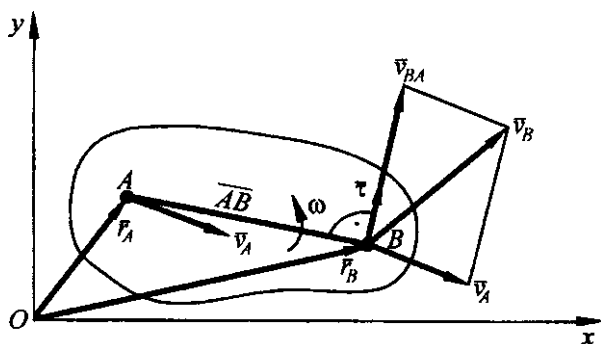


Рис. 3.4

При движении плоской фигуры векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ изменяются и по модулю, и по направлению, вектор же $\vec{AB}$ изменяется только по направлению, так как его модуль равен постоянному для твердого тела расстоянию между точками A и B . Запишем производную по времени от обеих частей равенства (3.1):

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Обозначив $\frac{d\overline{AB}}{dt} = \bar{v}_{BA}$ и назвав $\bar{v}_{BA}$ скоростью точки B тела при вращении его вокруг полюса A , получим

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вектор $\bar{v}_{BA}$. Поскольку $\overline{AB}$ — вектор постоянного модуля, то

$$\bar{v}_{BA} = \frac{d}{dt}(\overline{AB}) = |\overline{AB}| \frac{d\phi}{dt} \bar{\tau} = AB\dot{\phi} \bar{\tau},$$

где $\bar{\tau}$ — единичный вектор, лежащий в плоскости фигуры, перпендикулярный $\overline{AB}$ и направленный в сторону возрастания угла поворота фигуры ϕ . Тогда вектор $\bar{v}_{BA}$ лежит в плоскости движущейся фигуры, перпендикулярен отрезку AB , соединяющему точку B с полюсом A , и направлен в сторону вращения фигуры вокруг этого полюса (см. рис. 3.4).

Определим модуль вектора $\bar{v}_{BA}$:

$$v_{BA} = |\bar{v}_{BA}| = |\overline{AB}| \dot{\phi} |\bar{\tau}|.$$

Обозначив $|\dot{\phi}| = \omega$, запишем

$$v_{BA} = \omega AB. \quad (3.3)$$

Применив формулу Эйлера, представим выражение (3.3) в векторной форме:

$$\bar{v}_{BA} = \frac{d\overline{AB}}{dt} = \bar{\omega} \times \overline{AB}.$$

Окончательно имеем

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (3.4)$$

Таким образом, скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.

3.4. Мгновенный центр скоростей

В любой момент времени при плоском движении фигуры существует единственная точка фигуры, скорость которой равна

нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей (МЦС)*. Найдем эту точку, обозначив ее P .

Возьмем за полюс точку A фигуры S , скорость $\vec{v}_A$ которой известна (рис. 3.5). Пусть в этот момент времени угловая скорость фигуры равна ω .

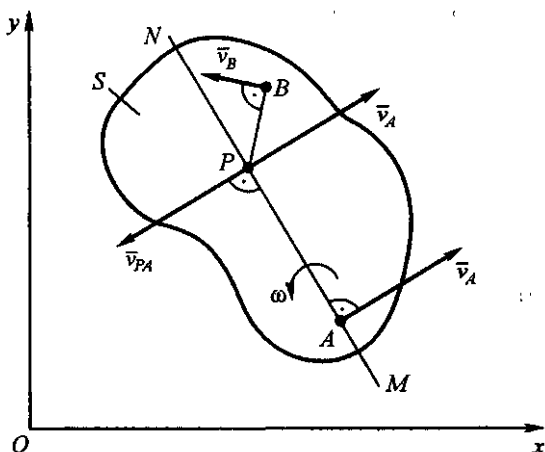


Рис. 3.5

Для определения скорости точки P воспользуемся формулой (3.2):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0.$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{PA}$ должны быть равны по модулю и противоположны по направлению. Так как вектор $\vec{v}_{PA}$ перпендикулярен отрезку AP , то прямая, на которой должна находиться точка P , перпендикулярна вектору $\vec{v}_A$. Проведем такую прямую MN через точку A . Чтобы выполнялось условие $\vec{v}_A = -\vec{v}_{PA}$, точка P должна находиться на луче AN . Поскольку $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_{PA}|$, а $v_{PA} = \omega \cdot AP$, находим $AP = v_A / \omega$.

Таким образом, МЦС находится на перпендикуляре, восстановленном к вектору скорости точки $\vec{v}_A$, на расстоянии, равном

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Примем точку P за полюс фигуры. Тогда для ее произвольной точки B можно записать:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}; \quad v_B = v_{BP} = \omega \cdot PB, \quad (3.5)$$

где PB — расстояние от МЦС — точки P до точки B ; вектор $\bar{v}_B$ перпендикулярен отрезку PB , направлен в сторону вращения фигуры вокруг МЦС (см. рис. 3.5), а его модуль пропорционален расстоянию от МЦС до точки.

Таким образом, *скорости точек плоской фигуры в данный момент времени вычисляются так же, как если бы фигура вращалась вокруг неподвижной оси, проходящей через МЦС перпендикулярно плоскости движения, с той же угловой скоростью $\bar{\omega}$.*

Использование МЦС часто упрощает определение скоростей точек твердого тела в плоском движении.

Рассмотрим случаи, когда положение МЦС может быть установлено либо с помощью геометрических построений, либо в силу физических соображений.

Пусть известны направления скоростей двух точек A и B фигуры (рис. 3.6, а). Тогда МЦС будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям их скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$.

В том случае, когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к их неравным скоростям, МЦС фигуры находится в точке пересечения перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей этих точек (рис. 3.6, б, в).

Если скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны, направлены в одну сторону и равны между собой, то МЦС лежит в бесконечности, а угловая скорость плоской фигуры равна нулю (так как $\bar{v}_A = \bar{v}_B$, то $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB} = 0$). Такое движение тела называют *мгновенно-поступательным*. При нем скорости всех точек фигуры одинаковы по направлению и модулю (рис. 3.6, г). Однако следует иметь в виду, что ускорения точек при таком движении различны.

В некоторых случаях, исходя из физических соображений, удается сразу установить МЦС плоской фигуры. Речь идет о довольно распространенном на практике классе задач, в которых рассматривается качение без скольжения плоской фигуры по

некоторой неподвижной плоской линии (рис. 3.6, δ). Например, качение без скольжения колеса по неподвижной прямой линии или одного колеса по другому неподвижному колесу. В таких случаях МЦС плоской фигуры находится в точке ее контакта с опорой, скорость которой равна нулю.

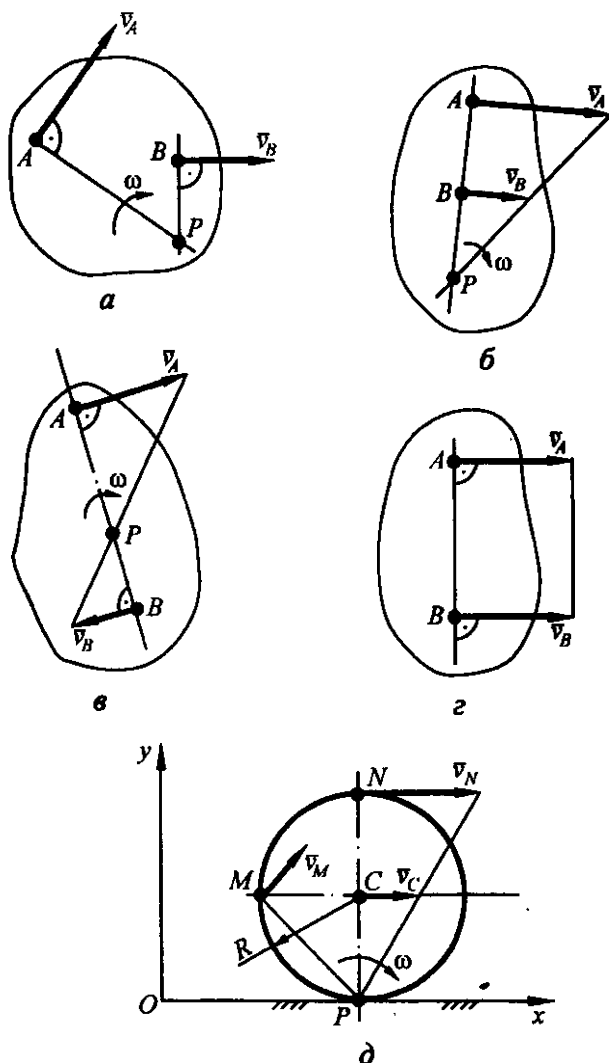


Рис. 3.6

Пример 3.1. Колесо радиусом R (см. рис. 3.6, д) катится без скольжения по неподвижной прямой; скорость центра $\vec{v}_C$. Используя понятие МЦС, определить скорости точек M и N обода колеса.

Решение. Поскольку колесо катится без скольжения, его МЦС находится в точке P контакта обода с неподвижной прямой. Тогда, в соответствии с (3.5), угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R},$$

а направление его вращения определится направлением вектора $\vec{v}_C$ по отношению к МЦС (направление вращения колеса совпадает с направлением движения часовой стрелки).

Теперь, так как $PM = \sqrt{2}R$, а $PN = 2R$, то

$$v_M = \omega PM = \sqrt{2}v_C; \quad v_N = \omega PN = 2v_C.$$

Векторы скоростей точек M и N колеса перпендикулярны отрезкам прямых, соединяющих эти точки с МЦС, и направлены в сторону вращения колеса вокруг МЦС (см. рис. 3.6, д).

3.5. Мгновенный центр вращения. Центроиды

На рис. 3.6 видно, что скорости точек сечения тела при плоском движении распределены в каждый момент времени так, как если бы движение сечения тела представляло собой вращение вокруг МЦС. Поэтому МЦС называют **мгновенным центром вращения**. Ось Pz , вокруг которой в данный момент времени происходит вращение тела, перпендикулярную к его сечению и проходящую через МЦС — точку P , называют **мгновенной осью вращения**.

Мгновенный центр вращения при плоском движении тела меняет свое положение как на неподвижной плоскости, в которой движется фигура, так и на связанной с ней подвижной.

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называют **неподвижной центроидой**, а геометрическое место этих же центров на подвижной плоскости, связанной с движущейся фигурой, — **подвижной центроидой**.

Например, при качении диска по плоской кривой без скольжения (рис. 3.7) неподвижной центроидой является кривая K , по которой катится диск, а подвижной — окружность L диска. В каждый момент времени подвижная и неподвижная центроиды

имеют общую точку касания P , скорость которой равна нулю. Эта точка является мгновенным центром скоростей диска. Таким образом, при действительном движении плоской фигуры подвижная centroида катится без скольжения по неподвижной.

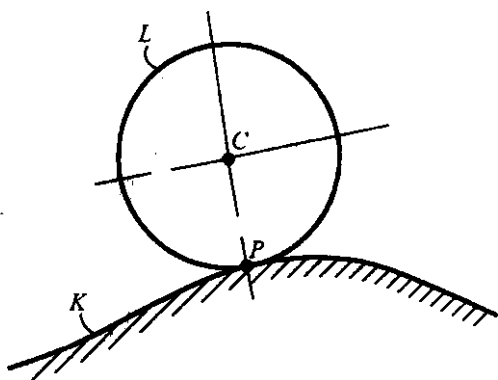


Рис. 3.7

Если вместо движения плоской фигуры рассмотреть плоское движение твердого тела, то неподвижная и подвижная centroиды будут для него неподвижной и подвижной цилиндрическими поверхностями.

Теория centroид нашла широкое применение в специальных курсах кинематики механизмов, в теории механизмов и машин при профилировании зубчатых колес.

Рассматривая в качестве примера движение линейки эллипсографа (рис. 3.8), убедимся, что оно тождественно движению окружности L , катящейся без скольжения внутри неподвижной окружности K вдвое большего радиуса, при котором точки B и A первой окружности движутся соответственно по горизонтальному и вертикальному диаметрам второй (см. рис. 3.8). В самом деле, проведя перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B эллипсографа, найдем МЦС — точку P . Очевидно, что на неподвижной плоскости Oxy разным положениям линейки AB соответствуют разные положения центра P , но при этом OP остается постоянным и равным AB . Следовательно, неподвижная centroида — это окружность K , описанная из центра O радиусом, равным AB . Положение центра P в процессе движения механизма меняется и относительно линейки AB , но расстояние между серединой линейки C и центром P остается постоянным и равным $CP = AB/2$. Таким образом, окружность L с радиусом $AB/2$ и центром в точке C будет подвижной centroидой.

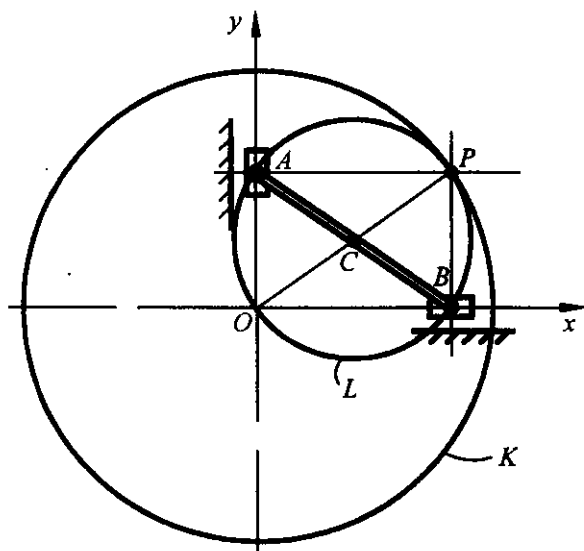


Рис. 3.8

3.6. Вычисление угловой скорости твердого тела при плоском движении

При решении задач на определение скоростей точек плоской фигуры необходимым этапом является нахождение ее угловой скорости. Рассмотрим ряд приемов определения ω .

1. Если заданы уравнения движения плоской фигуры, то модуль угловой скорости можно определить как модуль производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = |\dot{\phi}|.$$

Вектор угловой скорости при этом направлен перпендикулярно плоскости движения так, что с его конца направление вращения плоской фигуры было бы противоположно направлению движения часовой стрелки.

Направление угловой скорости плоской фигуры удобно задавать дуговой стрелкой. Если в данный момент при выбранном выше положительном направлении отсчета угла поворота ϕ тела при

его плоском движении алгебраическое значение угловой скорости $\dot{\varphi} > 0$, то направление дуговой стрелки ω противоположно направлению движения часовой стрелки, а если $\dot{\varphi} < 0$, то совпадает с ним.

2. В ряде задач модуль угловой скорости ω можно определить, разделив скорость какой-либо ее точки на расстояние между этой точкой и МЦС фигуры:

$$\omega = v_A / AP.$$

Направление же вращения фигуры (дуговой стрелки ω) определяется при этом направлением вектора $\vec{v}_A$ упомянутой точки по отношению к МЦС.

3. Угловую скорость фигуры при плоском движении можно установить из уравнения (3.2), связывающего скорости двух точек плоской фигуры, если задана $\vec{v}_A$ и известно направление $\vec{v}_B$. Проецируя векторы скоростей, входящие в уравнение (3.2), на направление, перпендикулярное $\vec{v}_B$, исключаем $\vec{v}_B$ и определяем ω по формуле (3.3).

Пример 3.2. Кривошип O_1A (рис. 3.9, а) вращается вокруг неподвижного центра O_1 с угловой скоростью ω_1 . Шатун AB соединен шарнирно с кривошипом O_1A и диском, который может вращаться вокруг неподвижного центра O_2 . Найти угловую скорость ω_2 шатуна AB , если механизм занимает в данный момент положение, указанное на рис. 3.9, а, а размеры его звеньев известны.

Решение. Построим для шатуна AB механизма *план скоростей* — графическое изображение векторного уравнения для скоростей точек плоской фигуры в данный момент времени.

Так как скорость точки A известна из условия задачи ($v_A = \omega_1 O_1A$, $\vec{v}_A \perp O_1A$), выберем эту точку за полюс. Тогда

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Для построения векторного треугольника выберем вне плоской фигуры точку B_O (см. рис. 3.9, б) и построим в некотором масштабе вектор $\vec{v}_A$. Через конец этого вектора (точку a) проведем прямую $ab \perp AB$ ($\vec{v}_{BA} \perp AB$) до пересечения ее в точке b с прямой, проведенной из B_O параллельно направлению искомой скорости точки B ($\vec{v}_B \perp O_2B$). Тогда вектор $\overline{ab}$ представляет собой в выбранном масштабе скорость точки B при вращении шатуна вокруг полюса A , т. е. $\vec{v}_{BA}$, а вектор $\overline{B_O b}$ — искомую скорость $\vec{v}_B$.

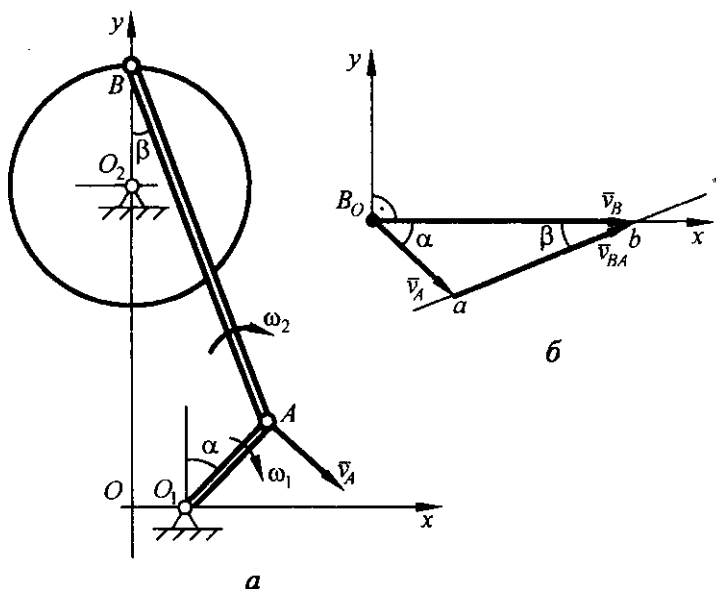


Рис. 3.9

Спроецировав векторы, входящие в уравнение $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, на направление O_2y , получим

$$0 = -v_A \sin \alpha + v_{BA} \sin \beta,$$

или

$$-\omega_1 O_1 A \sin \alpha + \omega_2 AB \sin \beta = 0.$$

Откуда находим

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 O_1 A \sin \alpha}{AB \sin \beta}.$$

3.7. Ускорения точек тела при плоском движении

Перейдем теперь к определению ускорений точек плоской фигуры. Выше было показано (см. § 3.3), что при движении плоской фигуры в любой момент времени справедливо соотношение (3.2) между скоростями двух ее точек. Продифференцировав его по времени, получим

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt}.$$

Здесь $\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \bar{a}_B$, $\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A$ — ускорения точек B и A относительно неподвижной системы координат; $\frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_{BA}$ — ускорение точки B при вращательном движении плоской фигуры вокруг подвижной оси, проходящей через полюс A перпендикулярно плоскости фигуры, или просто вокруг полюса A .

Таким образом,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad (3.6)$$

т. е. ускорение какой-либо точки плоской фигуры при плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Учитывая, что $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$, найдем

$$\begin{aligned} \bar{a}_{BA} &= \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \overline{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt} = \\ &= \bar{\epsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}$ — угловое ускорение тела при плоском движении.

Оценивая слагаемые в соотношении (3.7), отмечаем, что ускорение точки $\bar{a}_{BA}$ при вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса, как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, состоит из касательной и нормальной составляющих:

$$\bar{a}_{BA}^{\tau} = \bar{\epsilon} \times \overline{AB}, \quad \bar{a}_{BA}^n = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}, \quad (3.8)$$

модули которых

$$|a_{BA}^{\tau}| = \epsilon AB, \quad a_{BA}^n = \omega^2 AB. \quad (3.9)$$

Касательное ускорение $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ направлено перпендикулярно отрезку AB в сторону, указанную дуговой стрелкой ϵ (рис. 3.10, а). Нормальное ускорение $\bar{a}_{BA}^n$ направлено от точки B к полюсу A . Таким образом,

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^n)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.10)$$

Обозначив угол между ускорением $\vec{a}_{BA}$ и отрезком AB через α , найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.11)$$

Угол α постоянен для заданных ω и ε , т. е. в данный момент времени, и не зависит от положения точек тела.

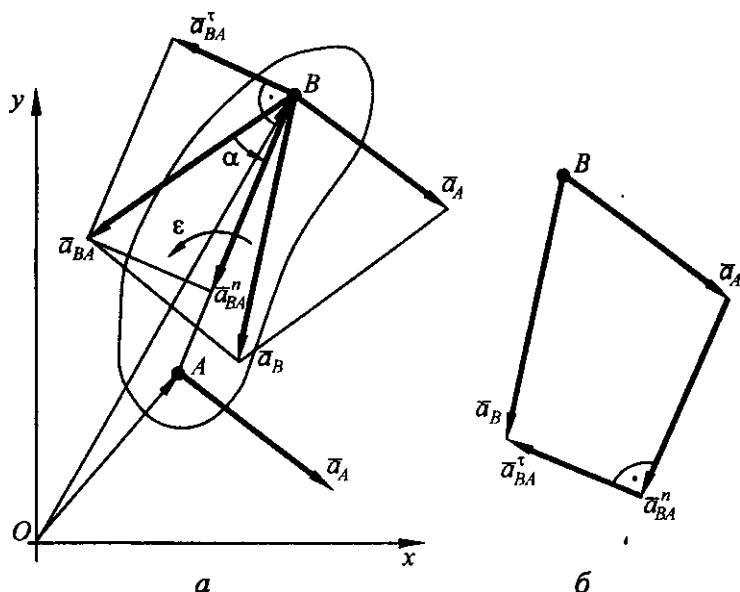


Рис. 3.10

Как и при определении скоростей точек движущейся плоской фигуры, в необходимых случаях рассматривают *план ускорений* точек фигуры. На рис. 3.10, б построен в масштабе многоугольник ускорений.

Пример 3.3. Колесо радиусом R катится по неподвижной прямой (рис. 3.11). Известны ускорение центра колеса $\vec{a}_C$, угловая скорость ω и угловое ускорение ε . Определить в данный момент времени ускорения точек A , B и P , расположенных на концах вертикального и горизонтального диаметров обода колеса.

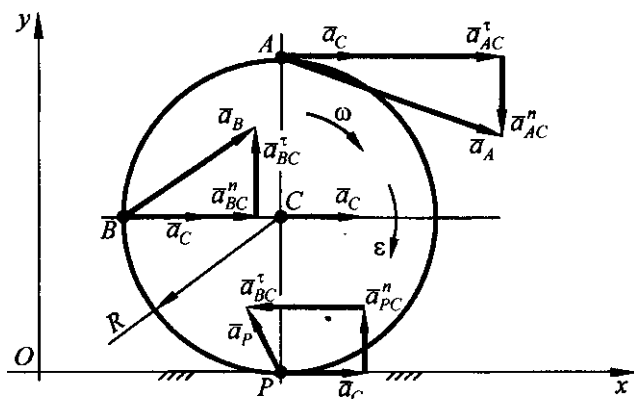


Рис. 3.11

Решение. Примем за полюс точку C , ускорение которой задано. Тогда, согласно (3.6) и (3.8), ускорение точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^\tau + \vec{a}_{AC}^n,$$

где $a_{AC}^\tau = \epsilon CA = \epsilon R$; $a_{AC}^n = \omega^2 CA = \omega^2 R$.

Ускорение $\vec{a}_{AC}^\tau$ перпендикулярно отрезку CA и направлено в сторону, указанную дуговой стрелкой ϵ , а $\vec{a}_{AC}^n$ направлено от точки A к полюсу C . Построив для точки A план ускорений, входящих в правую часть исходного равенства, найдем искомый вектор как вектор $\vec{a}_A$ (см. рис. 3.11). Его модуль

$$a_A = \sqrt{(a_C + a_{AC}^\tau)^2 + (a_{AC}^n)^2} = \sqrt{(a_C + \epsilon R)^2 + \omega^4 R^2}.$$

Рассуждая аналогично, находим для точек B и P соответственно:

$$a_{BC}^\tau = \epsilon CB = \epsilon R; \quad a_{BC}^n = \omega^2 CB = \omega^2 R;$$

$$a_B = \sqrt{(a_C + a_{BC}^\tau)^2 + (a_{BC}^n)^2} = \sqrt{(a_C + \omega^2 R)^2 + \epsilon^2 R^2}$$

и

$$|\vec{a}_{PC}^\tau| = \epsilon CP = \epsilon R; \quad a_{PC}^n = \omega^2 PC = \omega^2 R;$$

$$a_P = \sqrt{(a_C - a_{PC}^\tau)^2 + (a_{PC}^n)^2} = \sqrt{(a_C - \epsilon R)^2 + \omega^4 R^2}.$$

В частном случае, если $a_C = a_{PC}^\tau = \epsilon R$, то $a_P = \omega^2 R = a_{PC}^n$. Этот результат возможен, очевидно, когда колесо катится по неподвижной прямой без скольжения, то есть когда МЦС колеса совпадает с точкой контакта его с основанием — точкой P .

Таким образом, ускорение точки P колеса при его качении по неподвижному основанию не может быть равно нулю, поскольку нормальная составляющая ускорения $a_{PC}^n = \omega^2 R$ имеет ненулевое значение.

3.8. Мгновенный центр ускорений

При определении скоростей точек плоской фигуры было установлено, что в каждый момент времени существует такая точка P фигуры (МЦС), скорость которой равна нулю. Покажем, что в каждый момент времени существует точка фигуры, ускорение которой равно нулю. Такая точка называется **мгновенным центром ускорений (МЦУ)**. Обозначим ее через Q .

Рассмотрим плоскую фигуру, совершающую движение в плоскости рисунка (рис. 3.12). Примем за полюс какую-либо точку A , модуль и направление ускорения $\vec{a}_A$ которой известны в рассматриваемый момент времени. Пусть в этот момент времени известны угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры. Из формулы (3.6) следует, что точка Q будет МЦУ, если $\vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = 0$, т. е. когда $\vec{a}_A = -\vec{a}_{QA}$. Так как вектор $\vec{a}_{QA}$ составляет с линией AQ угол α ($\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \omega^2$), то параллельный ему вектор $\vec{a}_A$ направлен к линии, соединяющей полюс A с точкой Q , также под углом α (см. рис. 3.12).

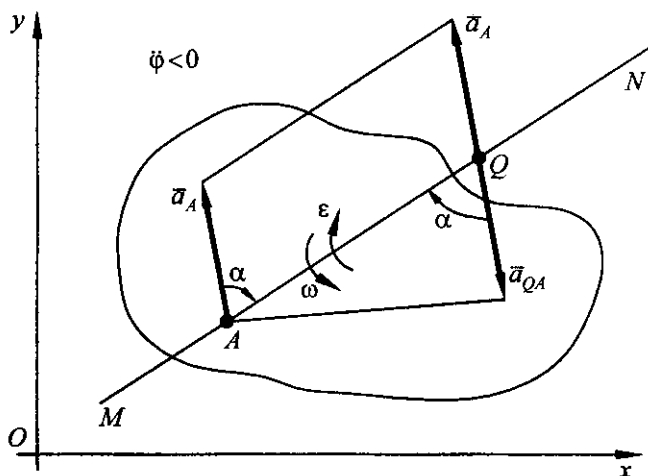


Рис. 3.12

Проведем через полюс A прямую MN , составляющую с вектором его ускорения угол α , откладываемый от вектора $\bar{a}_A$ в направлении дуговой стрелки ϵ . Тогда на луче AN найдется точка Q , для которой $\bar{a}_A = -\bar{a}_{QA}$.

Поскольку, согласно (3.10), $|\bar{a}_{QA}| = AQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$, то точка Q (МЦУ) будет отстоять от полюса A на расстоянии

$$AQ = \frac{|\bar{a}_A|}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}. \quad (3.12)$$

Таким образом, в каждый момент движения плоской фигуры, если ω и ϵ не равны нулю одновременно, имеется единственная точка этой фигуры, ускорение которой равно нулю. В каждый последующий момент времени МЦУ плоской фигуры будет находиться в различных ее точках.

Если МЦУ — точку Q выбрать за полюс, то ускорение любой точки A плоской фигуры

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ} = \bar{a}_{AQ},$$

так как $\bar{a}_Q = 0$. Тогда

$$a_A = a_{QA} = QA\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.13)$$

Ускорение $\bar{a}_A$ составляет с отрезком QA , соединяющим эту точку с МЦУ, угол α , откладываемый от QA в сторону, противоположную направлению дуговой стрелки углового ускорения ϵ (см. рис. 3.12).

Ускорения точек фигуры при плоском движении пропорциональны расстояниям от МЦУ до этих точек (см. (3.13)).

Таким образом, ускорение всякой точки фигуры при ее плоском движении определяется в данный момент времени так же, как и при вращательном движении фигуры вокруг МЦУ.

Выше (см. пример 3.3) было показано, что при качении колеса по прямой без скольжения ускорение его МЦС не равно нулю. Следовательно, в общем случае МЦС и МЦУ являются разными точками плоской фигуры.

Рассмотрим случаи, когда положение МЦУ можно определить с помощью геометрических построений.

1. Пусть известны направления ускорений двух точек плоской фигуры, ее угловая скорость и ускорение (рис. 3.13). Тогда МЦУ лежит на пересечении прямых линий, проведенных к векторам ускорений точек фигуры под одним и тем же острым углом

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2} \neq 0,$$

отложенным от векторов ускорений точек в направлении дуговой стрелки углового ускорения.

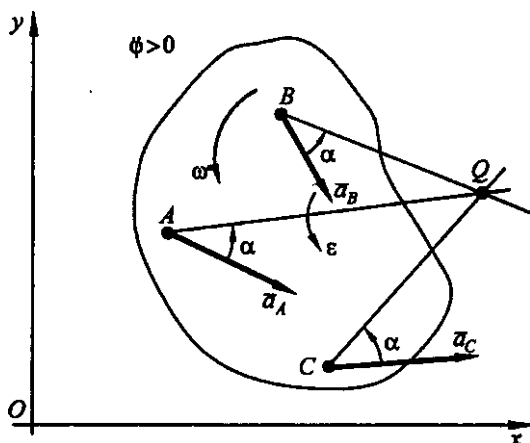


Рис. 3.13

2. Пусть известны направления ускорений хотя бы двух точек плоской фигуры, ее угловое ускорение $\varepsilon = 0$, а угловая скорость $\omega \neq 0$. Это возможно, например, когда плоская фигура вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью или $\varepsilon = 0$ в какой-либо момент времени. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \omega^2 = 0, \quad \alpha = 0,$$

и МЦУ лежит в точке пересечения прямых линий, по которым направлены ускорения ее точек (рис. 3.14), а сами ускорения направлены к этому центру, так как они представлены лишь нормальными составляющими от вращения фигуры вокруг МЦУ.

Следовательно, расстояния от них до МЦУ будут

$$AQ = a_A / \omega^2, \quad BQ = a_B / \omega^2.$$

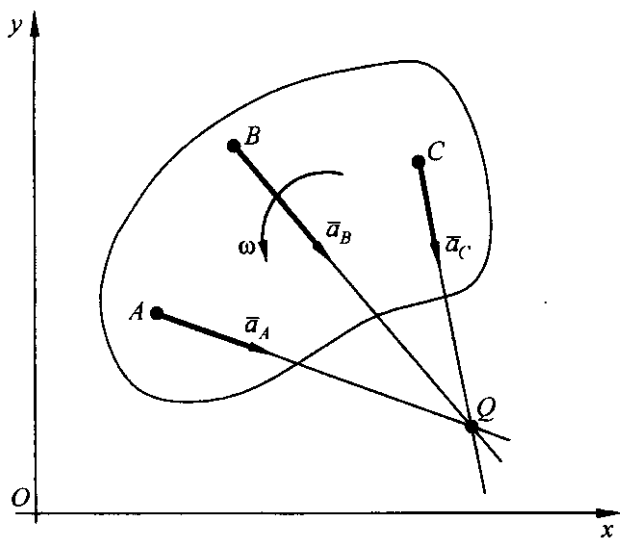


Рис. 3.14

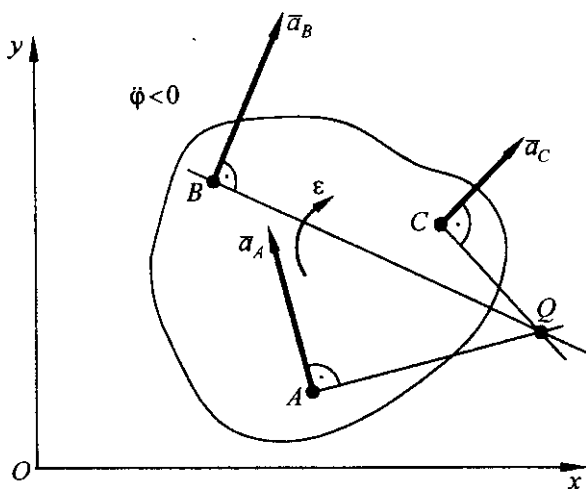


Рис. 3.15

3. Пусть известны направления ускорений хотя бы двух точек плоской фигуры, ее угловая скорость $\omega = 0$, а угловое ускорение $\epsilon \neq 0$. Это возможно, когда в процессе плоского движения

тела меняется направление его вращения. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \omega^2 = \infty$, угол α — прямой. Следовательно, МЦУ лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек фигуры к векторам их ускорений (рис. 3.15). Расстояния от точек, ускорения которой известны, до МЦУ будут

$$AQ = a_A / \varepsilon, \quad BQ = a_B / \varepsilon$$

(см. (3.12)).

3.9. Способы вычисления углового ускорения тела при плоском движении

Из (3.7) следует, что для определения ускорения произвольной точки плоской фигуры необходимо знать угловое ускорение тела ε . Рассмотрим некоторые способы его нахождения.

1. Угловое ускорение можно определить дифференцированием по времени угловой скорости или угла поворота плоской фигуры, если они заданы как функции времени:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Причем, если в данный момент времени алгебраическое значение углового ускорения тела $\ddot{\varphi} > 0$, то направление дуговой стрелки ε совпадает с принятым положительным направлением отсчета угла поворота φ , если же $\ddot{\varphi} < 0$ — то противоположно ему.

Во многих задачах зависимость угла поворота или угловой скорости данного тела рассматриваемой системы от времени неизвестна, но ее можно установить по параметрам движения других тел этой системы, известным в рассматриваемый момент времени. Например, в планетарном механизме (рис. 3.16) известен закон изменения угловой скорости $\omega_2 = \omega_2(t)$ водила OA . Требуется определить угловое ускорение ε_1 планетарного колеса. Поскольку обкатывание его происходит без скольжения, то его МЦС лежит в точке P контакта колес. Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \omega_2 \frac{AO}{r} = \omega_2 \left(1 + \frac{R}{r} \right),$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} \left(1 + \frac{R}{r}\right) = \varepsilon_2 \left(1 + \frac{R}{r}\right).$$

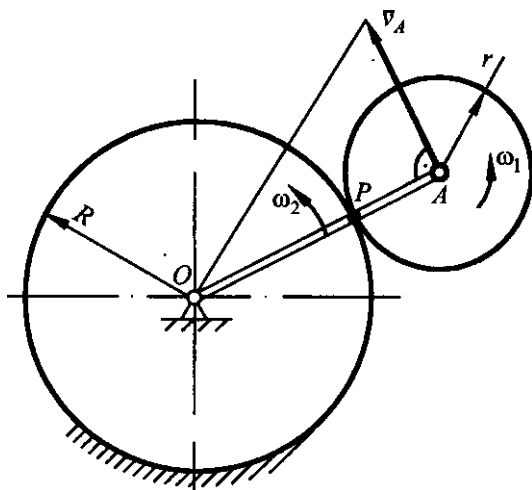


Рис. 3.16

2. Угловое ускорение можно определить, зная вектор скорости какой-либо точки плоской фигуры и положение ее МЦС. Пусть известны скорость $\vec{v}_A$ и расстояние от точки A до МЦС AP как функции времени $v_A = v_A(t)$; $AP = AP(t)$. Тогда

$$\omega = v_A / AP.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем

$$\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \frac{1}{AP} \left| \frac{dv_A}{dt} \right| + v_A \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{AP} \right) \right|.$$

Если $AP = \text{const}$ (качение колеса радиусом R без скольжения, точка A — центр колеса), то

$$\varepsilon = \frac{1}{AP} \left| \frac{dv_A}{dt} \right| = \left| \frac{a_A^{\tau}}{R} \right|.$$

3. Угловое ускорение плоской фигуры можно найти по уравнению, связывающему известные ускорения двух точек плоской фигуры,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (3.14)$$

Записывая данное равенство в проекциях на ось, перпендикулярную вектору ускорения $\bar{a}_B$, и считая $\bar{a}_A$ и ω известными, получаем уравнение с одним неизвестным $|a_{BA}^\tau|$. Решив его относительно $|a_{BA}^\tau|$, находим

$$\varepsilon = \frac{|a_{BA}^\tau|}{BA}.$$

Пример 3.4. Определить угловое ускорение ε_2 линейки AB эллипсографа (рис. 3.17), если в рассматриваемый момент времени, угловые скорость ω_1 и ускорение ε_1 кривошипа OC известны, а размеры звеньев и положение механизма заданы.

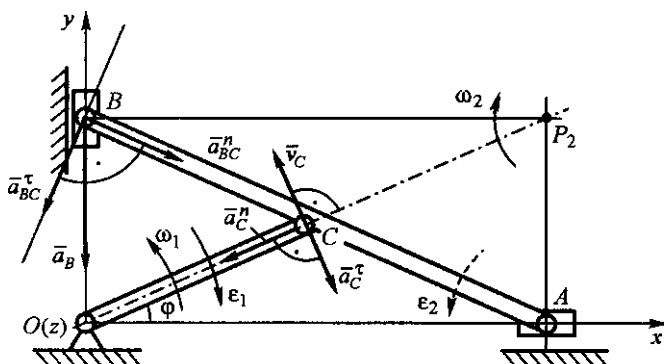


Рис. 3.17

Решение. Так как ускорение шарнира C , по сути, задано, примем точку C за полюс, участвующей в плоском движении линейки AB . Тогда, согласно (3.14),

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC} = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau.$$

В этом уравнении векторы $\bar{a}_C^n$, $\bar{a}_C^\tau$ и $\bar{a}_{BC}^n$ известны по модулю и направлению. Вектор $\bar{a}_C^n$ по модулю $|\bar{a}_C^n| = \omega_1^2 \cdot OC$ и направлен к оси вращения кривошипа $O(z)$. Вектор $\bar{a}_C^\tau$ по модулю равен $|\bar{a}_C^\tau| = \varepsilon_1 \cdot OC$ и направлен в соответствии с направлением дуговой стрелки углового ускорения ε_1 . Так как

$v_C = \omega_1 \cdot OC = \omega_2 CP_2$, где P_2 — МЦС линейки AB , $OC = CP_2$ и $\omega_2 = v_C / CP_2 = OC \cdot \omega_1 / OC = \omega_1$, то, следовательно вектор $\vec{a}_{BC}^n$ по модулю $|\vec{a}_{BC}^n| = \omega_2^2 BC = \omega_1^2 OC$ и направлен от точки B к полюсу C). Векторы $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BC}^t$ известны лишь по направлению ($\vec{a}_{BC}^t$ перпендикулярен BC , а $\vec{a}_B$ параллелен оси Oy) (см. рис. 3.17). Спроецировав упомянутое векторное уравнение на ось Ox , перпендикулярную неизвестному вектору $\vec{a}_B$, и полагая, что дуговая стрелка углового ускорения ϵ_2 линейки направлена против направления движения часовой стрелки, найдем

$$0 = -a_C^n \cos \varphi + a_C^t \sin \varphi + a_{BC}^n \cos \varphi - a_{BC}^t \sin \varphi.$$

(Здесь в силу принятого направления дуговой стрелки ϵ_2 проекция $\vec{a}_{BC}^t$ на ось Ox будет отрицательной.) Отсюда

$$a_{BC}^t = (a_{BC}^n - a_C^n) \operatorname{ctg} \varphi + a_C^t = a_C^t > 0 \quad (a_{BC}^n = a_C^n).$$

Поскольку $a_{BC}^t = \epsilon_2 BC = \epsilon_2 OC$ ($BC = OC$),

то

$$\epsilon_2 = \frac{a_C^t}{OC} = \frac{\epsilon_1 OC}{OC} = \epsilon_1.$$

Направление дуговой стрелки углового ускорения линейки эллипсографа определяется установленным знаком $\vec{a}_{BC}^t$. Так как $a_{BC}^t > 0$, то это означает, что выбранное ранее направление углового ускорения ϵ_2 верно, т. е. его дуговая стрелка действительно в данный момент времени направлена против направления движения часовой стрелки.

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

4.1. Число степеней свободы. Углы Эйлера. Уравнения вращения

Движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной точки, если во все время движения одна и та же точка твердого тела остается неподвижной. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки называют *сферическим движением*, поскольку траектория любой точки тела располагается на поверхности сферы с центром в неподвижной точке тела.

Положение свободного твердого тела можно определить тремя точками, не лежащими на одной прямой и неизменно связанными с телом. Поскольку на девять координат этих точек наложено три ограничения, выражающих неизменность расстояний между ними, можно сделать вывод, что *число независимых параметров, задающих положение свободного тела в пространстве, а значит, и число степеней его свободы, равно шести.*

Если во время движения твердого тела одна и та же его точка остается неподвижной, то число степеней свободы такого тела уменьшится по сравнению со свободным на три единицы. Следовательно, тело, совершающее вращение вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы, и для оценки его положения и движения необходимо задать три независимых параметра (координаты). Сделать это можно различными способами.

Например, в качестве таких параметров могут быть введены предложенные А. Н. Крыловым так называемые корабельные углы, определяющие положение тела (корабля) относительно системы координат, связанной своим началом с его центром

тяжести C . Пусть система координат $CXYZ$ (рис. 4.1), жестко связанная с кораблем, в исходном положении совпадает своими осями с осями неизменного направления неподвижной системы координат $Cxyz$. Тогда, если ось CX направлена от кормы к носу корабля, ось CY — к его левому борту, а ось CZ образует с ними правую систему координат, то углы Крылова будут определены следующим образом: *угол дифферента* ψ — угол между осью Cx и линией CK пересечения координатных плоскостей Cxz и CXY ; *угол рыскания* φ — угол между линией CK и осью CX и, наконец, *угол крена* ϑ — угол между осью CZ и линией CM пересечения плоскостей Cxz и CZy . Зная эти углы для каждого момента времени, можно всегда найти положение системы координат $CXYZ$, а следовательно, и положение тела (корабля), скрепленного с ней, относительно неподвижной системы координат $Cxyz$.

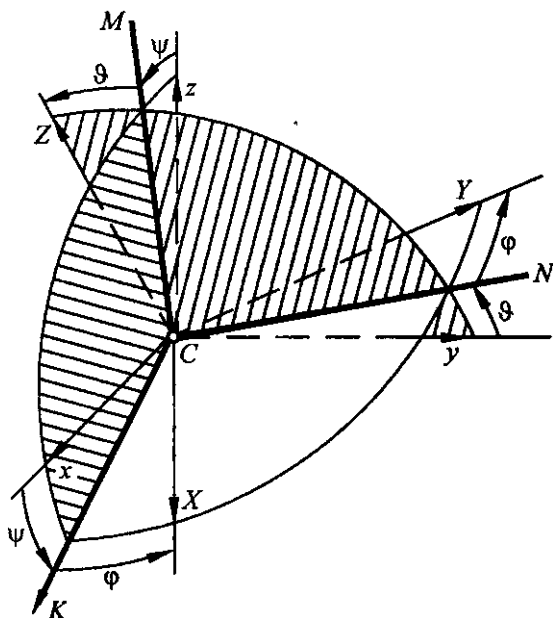


Рис. 4.1

В тех случаях, когда угловая скорость вращения в одном направлении значительно больше угловых скоростей вращений в

двух других направлениях (генераторы, моторы, турбины, гироскопы), положение тела, как правило, определяется углами Эйлера: *углом прецессии* ψ , *углом нутации* θ , *углом собственного вращения* φ .

Чтобы задать эти углы, представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (рис. 4.2). Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, имеющую начало в точке O . Жестко свяжем с телом вторую, подвижную систему координат $OXYZ$ с началом в той же точке. Чтобы определить положение твердого тела в неподвижной системе координат $Oxyz$, достаточно определить в ней положение неизменно связанной с телом подвижной системы координат $OXYZ$.

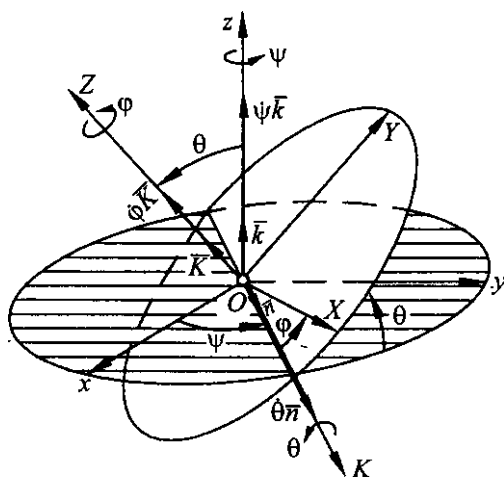


Рис. 4.2

Линию OK пересечения координатных плоскостей Oxy (на рис. 4.2 изображена в виде заштрихованного овала) и OXY (ограничена белым овалом) назовем *линией узлов*. Тогда угол прецессии ψ определяет положение линии узлов OK относительно неподвижной координатной оси Ox . Для изменения этого угла тело должно вращаться вокруг неподвижной оси Oz , называемой *осью прецессии*. Угол нутации θ определяет положение подвижной

оси OZ относительно неподвижной Oz и равен углу между этими осями. Изменение угла θ сопровождается вращением тела вокруг линии узлов OK , называемой *осью нутации*. Наконец, угол собственного вращения φ характеризует вращение тела вокруг оси OZ , называемой *осью собственного вращения*. В подвижной плоскости OXY это угол между линией узлов OK и подвижной осью OX .

Положительное направление отсчета углов Эйлера ψ , θ и φ противоположно направлению движения часовой стрелки, если смотреть на поворот тела с положительных направлений осей Oz , OK и OZ соответственно.

Углы Эйлера являются независимыми параметрами, характеризующими положение тела с одной неподвижной точкой относительно неподвижной системы координат. Они широко используются в теории гироскопов. Движение гироскопа — симметричного тела, имеющего неподвижную точку на своей оси симметрии, в общем случае можно представить состоящим из трех движений (рис. 4.3): вращения с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии (оси собственного вращения), при котором меняется угол собственного вращения φ ; вращения вместе с осью симметрии вокруг неподвижной оси Oz (оси прецессии), при котором меняется угол прецессии ψ , и движения оси симметрии гироскопа относительно линии узлов OK , в результате которого меняется угол нутации θ между осями OZ и Oz . При прецессионном движении ось симметрии гироскопа OZ описывает волюстную коническую поверхность, если же угол нутации θ не меняется, то описываемая ею поверхность будет правильной конической.

При движении твердого тела около неподвижной точки углы ψ , θ , φ являются некоторыми функциями времени:

$$\psi = f_1(t); \theta = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (4.1)$$

Эти выражения называются *уравнениями вращения твердого тела вокруг неподвижной точки*. Если уравнения (4.1) заданы, то положение твердого тела относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ может быть определено для любого момента времени.

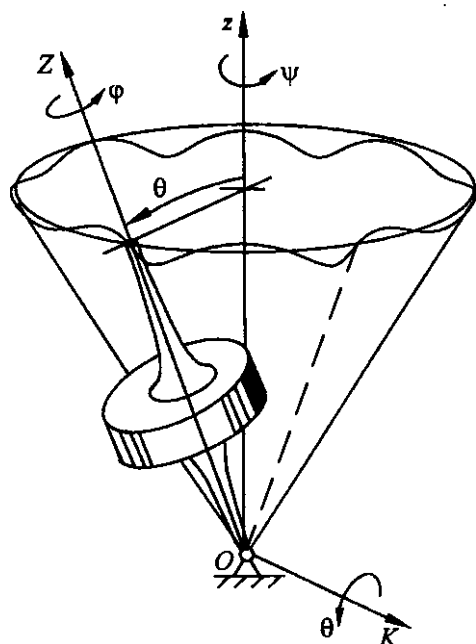


Рис. 4.3

4.2. Матрица направляющих косинусов. Траектория точки тела

Пусть X, Y, Z — координаты произвольной точки M тела в подвижной системе координат S , жестко связанной с ним, а x, y, z — ее же координаты в неподвижной системе координат S_0 . Очевидно, что при движении тела координаты X, Y, Z остаются постоянными в отличие от координат x, y, z .

Полагая, что закон движения тела имеет вид (4.1), установим зависимость координат x, y, z от времени в явном виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, что позволит судить о закономерностях движения точки M относительно неподвижной системы S_0 .

В отношении вектора $\overline{OM}$ воспользуемся формулой (В.72), устанавливающей взаимосвязь проекций вектора на оси двух систем координат,

$$\bar{r} = A^T \bar{\rho}, \quad (4.2)$$

где $\bar{r} = [x, y, z]^T$, $\bar{\rho} = [X, Y, Z]^T$ — проекции вектора $\overline{OM}$ на оси координат систем S_0 и S соответственно; A^T — матрица, транспонированная к матрице направляющих косинусов A (3×3), задающей преобразование поворота от осей системы S_0 к осям системы S .

Получим выражение $A = A(t)$, основываясь на взаимном положении четырех систем S_0, S_1, S_2, S (рис. 4.4), из которых системы S_1 и S_2 выполняют вспомогательную роль. Переход от осей системы S_0 к осям системы S_1 осуществляется поворотом на угол ψ вокруг оси Oz системы S_0 , от осей системы S_1 к осям системы S_2 — поворотом на угол θ вокруг оси Ox_1 системы S_1 и от осей системы S_2 к осям системы S — поворотом на угол φ вокруг оси Oz_2 системы S_2 .

Каждому из трех преобразований систем координат соответствуют матрицы направляющих косинусов $A_\psi, A_\theta, A_\varphi$:

$$A_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix}; A_\varphi = \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Здесь для краткости записи тригонометрических функций $\sin$ и $\cos$ углов Эйлера вместо самих функций указаны лишь первые буквы их названий.)

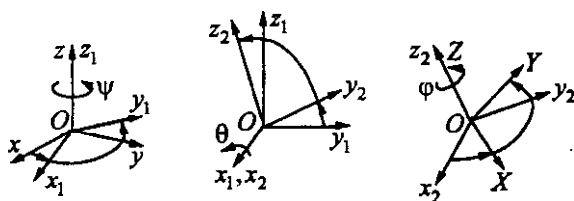
Тогда

$$A = A_\varphi A_\theta A_\psi = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & s\theta s\varphi \\ -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & s\theta c\varphi \\ s\psi s\theta & -c\psi s\theta & c\theta \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

При заданном законе сферического движения (4.1) выражение (4.3) позволяет сформировать зависимость $A = A(t)$, опреде-

* Следует обратить внимание на порядок расположения сомножителей в произведении матриц $A_\varphi A_\theta A_\psi$, поскольку он влияет на результат перемножения.

ляющую искомым закон движения и траекторию выбранной точки тела: $\vec{r}(t) = A^T(t)\vec{p}$.



$$S_0 \xrightarrow{\psi_z} S_1 \xrightarrow{\theta_{x_1}} S_2 \xrightarrow{\phi_{z_2}} S$$

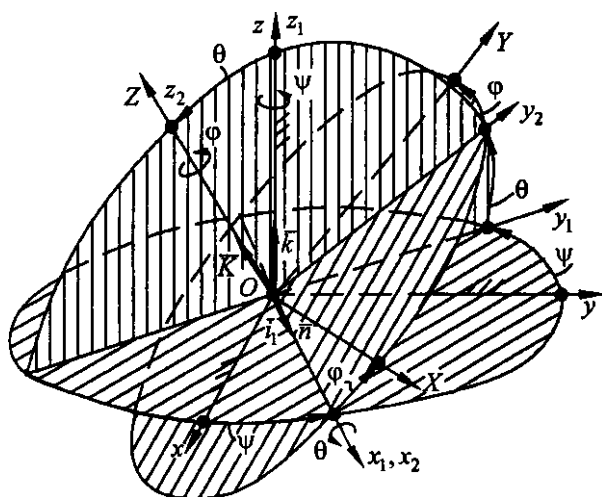


Рис. 4.4

4.3. Мгновенная ось вращения. Аксоиды

Положение твердого тела в пространстве определяется положением любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. При неподвижной точке O положение тела определится положением любых двух других точек, не лежащих на одной прямой с точкой O . Перемещение твердого тела с неподвижной точкой

из одного заданного положения в другое может быть осуществлено различными способами, в частности путем изменения углов Эйлера при последовательных поворотах вокруг соответствующих осей.

Докажем теорему о конечном перемещении твердого тела.

Теорема Эйлера–Даламбера. *Самое общее конечное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку O , есть вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку.*

Доказательство. Возьмем в теле две точки A и B , равноудаленные от неподвижной точки O , но не лежащие с ней на одной прямой. Проведем через точки A и B сферу с центром в неподвижной точке O (рис. 4.5). Пусть в результате конечного перемещения тела точки A и B займут положения A_1 и B_1 .

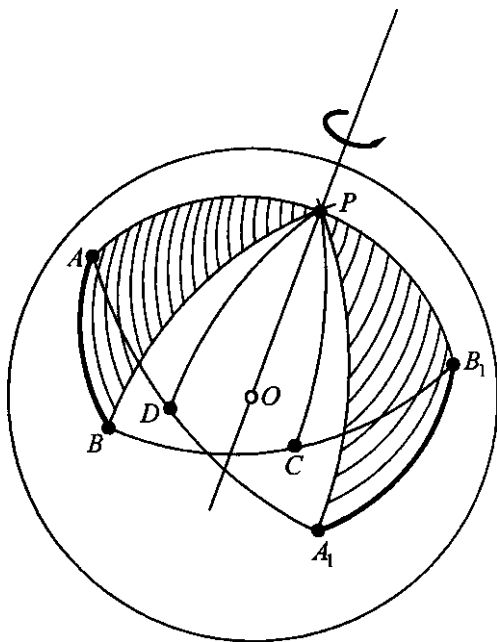


Рис. 4.5

Соединим дугами больших кругов, проведенных из неподвижной точки, между собой A и B , A_1 и B_1 , A и A_1 , B и B_1 . Очевидно, $AB = A_1B_1$ (как расстояния между точками твердого тела).

Из середин дуг $\overset{\circ}{BB}_1$ и $\overset{\circ}{AA}_1$ (точек D и C) проведем к этим дугам сферические перпендикуляры — дуги больших кругов, плоскости которых перпендикулярны плоскостям дуг $\overset{\circ}{AA}_1$ и $\overset{\circ}{BB}_1$. Перпендикуляры пересекутся в точке P сферы. В построенных таким образом сферических треугольниках APA_1 и BPB_1 $\overset{\circ}{AP} = \overset{\circ}{A_1P}$, а $\overset{\circ}{BP} = \overset{\circ}{B_1P}$ как дуги, имеющие равные проекции. Следовательно, сферические треугольники APB и A_1PB_1 равны (по трем сторонам), и при повороте тела вокруг оси, проведенной через точки P и неподвижную O , сферический треугольник APB , перемещаясь по сфере, совпадет с треугольником A_1PB_1 . Что доказывает теорему.

Ось OP называют *осью конечного вращения*. Для любых двух положений тела имеет место своя ось конечного вращения, проходящая через неподвижную точку. Ось, вокруг которой следует вращать тело для перевода его из одного положения в другое, бесконечно близкое первому, называют *мгновенной осью вращения*.

Мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Отсюда следует, что движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно представить непрерывной последовательностью его вращений вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через неподвижную точку. Положение мгновенной оси вращения тела не остается неизменным: в различные моменты времени она занимает различные положения в пространстве, но всегда проходит через неподвижную точку.

Геометрическое место мгновенных осей вращения в пространстве неподвижных осей координат *называется неподвижным аксоидом* и является конической поверхностью (в частном случае правильной) с вершиной в неподвижной точке. Геометрическое место мгновенных осей вращения в движущемся теле называется *подвижным аксоидом*. Как и неподвижный, подвижный аксоид в общем случае сферического движения тела представляет собой коническую поверхность с вершиной в не-

подвижной точке тела. При вращении твердого тела связанный с ним подвижный аксоид перекачивается по неподвижному так, что в каждый момент времени он касается неподвижного аксоида по общей образующей OP , являющейся мгновенной осью вращения тела.

4.4. Мгновенные угловая скорость и угловое ускорение

На основании теоремы Эйлера–Даламбера о мгновенной оси вращения тела положим, что за малый промежуток времени Δt поворот тела вокруг оси характеризуется углом $\Delta\gamma$. Введем единичный вектор $\bar{K}_\gamma$, лежащий на этой оси вращения тела и направленный так, что с конца его поворот тела на $\Delta\phi$ виден происходящим против направления движения часовой стрелки. Тогда мгновенную угловую скорость тела в сферическом движении как характеристику изменения угла его поворота вокруг мгновенной оси вращения можно определить как:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \bar{K}_\gamma. \quad (4.4)$$

Вектор $\bar{\omega}$ лежит на мгновенной оси вращения тела и его считают приложенным в неподвижной точке. Поэтому мгновенная ось вращения тела есть предельное при $\Delta t \rightarrow 0$ положение оси, вокруг которой был совершен поворот на угол $\Delta\gamma$ (рис. 4.6). Модуль угловой скорости

$$\omega = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right|.$$

В приведенных формулах в общем случае предел используемого отношения $\Delta\gamma/\Delta t$ нельзя

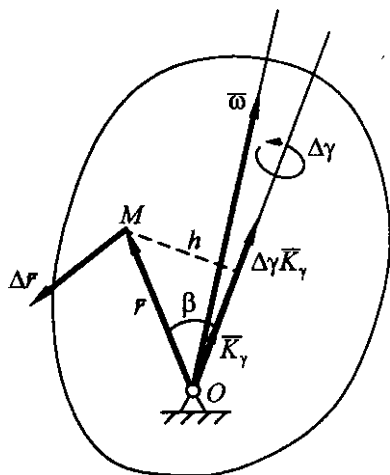


Рис. 4.6

заменить производной, так как угол поворота вокруг мгновенной оси вращения не выражается скалярной функцией времени и дифференциала этого угла не существует*.

Очевидно, что тело с одной неподвижной точкой в общем случае участвует одновременно в трех вращениях, векторы угловых скоростей которых в случае использования углов Эйлера определяются следующим образом: $\dot{\psi}\bar{k}$ — вектор угловой скорости прецессии; $\dot{\theta}\bar{n}$ — вектор угловой скорости нутации; $\dot{\phi}\bar{K}$ — вектор угловой скорости собственного вращения, где $\bar{k}$, $\bar{n}$, $\bar{K}$ — единичные векторы осей Oz , OK и OZ соответственно (рис. 4.7). Поскольку названные оси пересекаются в точке O , то, как будет показано в гл. 7 этого раздела, абсолютное совокупное движение тела представляет собой в каждый момент времени вращение вокруг мгновенной оси, проходящей

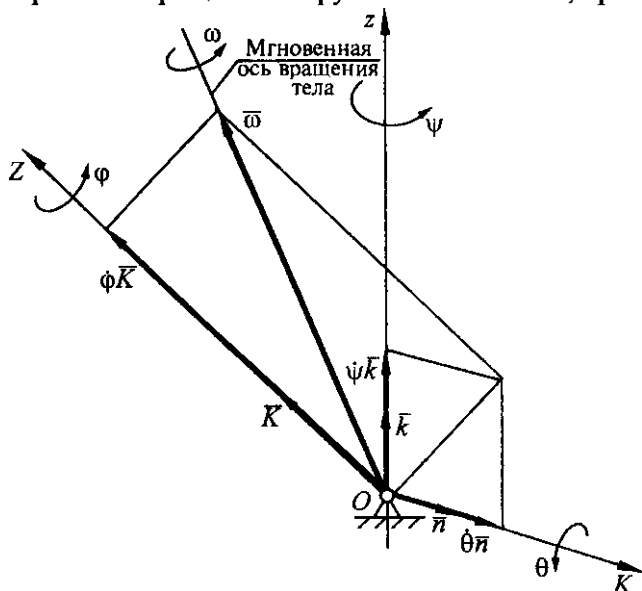


Рис. 4.7

* При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси (частный случай сферического движения тела) этот предел равен производной от угла поворота тела вокруг его оси вращения (см. гл. 2).

изменения направления последнего, в чем нетрудно убедиться, представив вектор $\bar{\omega}$ как произведение ω на единичный вектор $\bar{\omega}_0$, т. е. $\bar{\omega} = \omega \bar{\omega}_0$. Тогда

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \bar{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt} \bar{\omega}_0 + \omega \frac{d\bar{\omega}_0}{dt},$$

или

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2,$$

где $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \bar{\omega}_0$ — составляющая $\bar{\varepsilon}$, направленная вдоль мгновенной оси вращения и характеризующая изменение $\bar{\omega}$ по величине; $\bar{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\bar{\omega}_0}{dt}$ — составляющая $\bar{\varepsilon}$, перпендикулярная вектору $\bar{\omega}_0$ и характеризующая изменение $\bar{\omega}$ по направлению ($\bar{\varepsilon}_1 \perp \bar{\varepsilon}_2$).

Условимся вектор мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ откладывать от неподвижной точки O тела (рис. 4.8).

4.5. Скорости точек тела. Кинематические уравнения Эйлера

Поворот тела за малый промежуток времени Δt на угол $\Delta \gamma$ вокруг мгновенной оси вращения приводит к изменению проведенного из неподвижной точки тела радиус-вектора $\bar{r}$ на величину $\Delta \bar{r}$. Это изменение, если пренебречь изменением положения мгновенной оси вращения тела за рассматриваемый малый промежуток времени Δt , с точностью до величин второго порядка малости может быть выражено так (см. рис. 4.6):

$$\Delta \bar{r} = (\Delta \gamma \bar{K}_\gamma) \times \bar{r},$$

а его модуль

$$\Delta r = \Delta \gamma r \sin \beta = \Delta \gamma h.$$

Разделим обе части приведенной зависимости на Δt и найдем пределы, устремив Δt к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \bar{K}_\gamma \times \bar{r} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \right) \bar{K}_\gamma \times \bar{r}.$$

Учитывая (4.4), найдем, что соотношение, устанавливающее скорость точки тела в случае его сферического движения, принимает вид формулы Эйлера*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (4.6)$$

Модуль скорости точки тела $v = \omega h$, где h — кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки тела до мгновенной оси вращения (рис. 4.9). Следовательно, как и при вращении тела вокруг неподвижной оси, при вращательном движении вокруг неподвижной точки скорости точек тела в данный момент времени пропорциональны расстояниям от точек до мгновенной оси вращения тела.

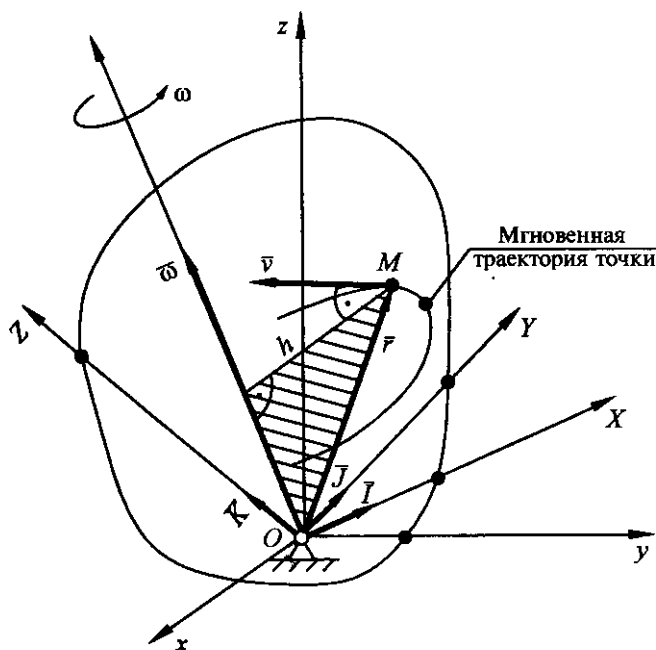


Рис. 4.9

Вектор скорости точки тела перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ (заштрихованная плоскость

* Для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси формула Эйлера выведена в гл. 2.

на рис. 4.9), а следовательно, перпендикулярен h и направлен по касательной к мгновенной траектории точки в сторону дуговой стрелки угловой скорости тела, вращающегося вокруг мгновенной оси. Найдем вектор $\bar{v}$ через его проекции на оси подвижной системы координат $OXYZ$.

Представив правую часть равенства (4.6) в виде определителя, получим

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

где $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ — орты подвижной системы координат $OXYZ$; ω_x , ω_y , ω_z — проекции вектора мгновенной угловой скорости на подвижные оси координат; X , Y , Z — координаты точки тела в подвижной системе координат.

Развернув этот определитель по элементам верхней строки, найдем

$$\bar{v} = (\omega_y Z - \omega_z Y) \bar{I} + (\omega_z X - \omega_x Z) \bar{J} + (\omega_x Y - \omega_y X) \bar{K}.$$

Таким образом, проекции скорости $\bar{v}$ точки тела на координатные оси подвижной системы координат $OXYZ$ будут равны

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y Z - \omega_z Y; \\ v_y &= \omega_z X - \omega_x Z; \\ v_z &= \omega_x Y - \omega_y X. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Установим теперь проекции вектора $\bar{\omega}$, определяемого соотношением (4.5), на оси той же подвижной системы координат $OXYZ$ (рис. 4.10).

Вектор $\psi \bar{k}$ угловой скорости прецессии разложим предварительно на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых совпадает с осью OZ и равна $\psi \cos \theta$, а вторая, равная $\psi \sin \theta$, принадлежит плоскости OXY и совпадает с вспомогательной осью OL , составляющей с осью OY угол φ . Тогда, проецируя последнюю составляющую на оси плоскости, которой она принадлежит, находим

$$\psi \bar{k} = \psi \sin \theta \sin \varphi \bar{I} + \psi \sin \theta \cos \varphi \bar{J} + \psi \cos \theta \bar{K}.$$

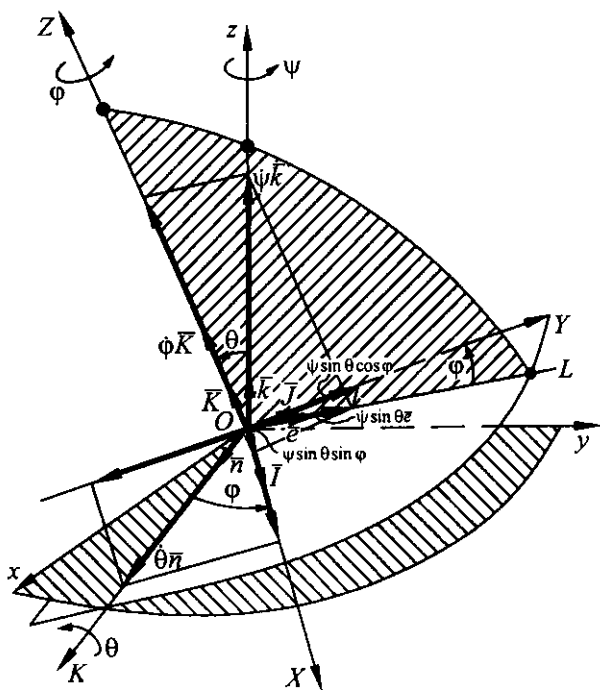


Рис. 4.10

Вектор $\dot{\theta} \bar{n}$ угловой скорости нутации, совпадая с линией узлов OK , располагается в плоскости OXY подвижной системы координат и составляет с осью OX угол φ (см. рис. 4.10). Следовательно, для него можно записать

$$\dot{\theta} \bar{n} = \dot{\theta} \cos \varphi \bar{I} - \dot{\theta} \sin \varphi \bar{J}.$$

И, наконец, вектор угловой скорости собственного вращения, совпадающий с осью OZ тела, будет равен $\dot{\varphi} \bar{K}$.

Составим вспомогательную таблицу проекций векторов, входящих в соотношение (4.5) на оси подвижной системы координат:

$\bar{\omega}$	ω_x	ω_y	ω_z
$\dot{\psi} \bar{k}$	$\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi$	$\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi$	$\dot{\psi} \cos \theta$
$\dot{\theta} \bar{n}$	$\dot{\theta} \cos \varphi$	$-\dot{\theta} \sin \varphi$	0
$\dot{\varphi} \bar{K}$	0	0	$\dot{\varphi}$

Таким образом, искомые проекции вектора угловой скорости на оси подвижной (скрепленной с телом) системы координат будут равны

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Полученные соотношения носят название *кинематических уравнений Эйлера*. Они устанавливают связь между проекциями вектора угловой скорости тела $\vec{\omega}$, углами Эйлера ψ , θ , φ и их первыми производными по времени.

Подстановка (4.8) в (4.7) и дает искомые проекции вектора $\vec{v}$ на оси координат $OXYZ$.

Скорости точек тела, лежащих на мгновенной оси (см. рис. 4.9), в рассматриваемый момент времени равны нулю, и их проекции на оси координат должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\omega_y Z - \omega_z Y = 0; \quad \omega_z X - \omega_x Z = 0; \quad \omega_x Y - \omega_y X = 0,$$

или

$$\frac{X}{\omega_x} = \frac{Y}{\omega_y} = \frac{Z}{\omega_z}.\tag{4.9}$$

Соотношения (4.9) являются уравнениями прямых, проходящих через начало координат, и представляют собой *уравнения мгновенных осей вращения тела в подвижной системе координат*. Если величины, входящие в (4.9), рассматривать как функции времени, то эти соотношения будут представлять собой параметрическую форму *уравнений подвижного аксоида*.

Для неподвижной системы координат $Oxyz$ в формулы (4.7) и (4.9) вместо ω_x , ω_y , ω_z и X , Y , Z нужно подставить ω_x , ω_y , ω_z и x , y , z , т. е. проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки тела на неподвижные оси Ox , Oy , Oz .

Если положение мгновенной оси вращения установлено, то для определения модуля угловой скорости тела ω в данный момент времени достаточно модуль скорости какой-либо точки тела в тот же момент времени разделить на кратчайшее расстояние от нее до мгновенной оси вращения тела.

Пример 4.1. Найти неподвижный и подвижный аксоиды и угловую скорость конуса высотой H и углом полураствора при вершине α (рис. 4.11), если конус катится по горизонтальной неподвижной плоскости без скольжения, его вершина O неподвижна, а скорость $\vec{v}$ центра C его основания постоянна.

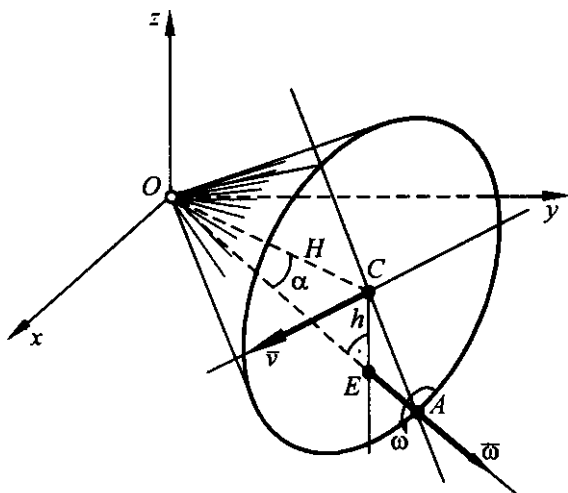


Рис. 4.11

Решение. Так как движение конуса происходит без скольжения, то скорость его точки A контакта с неподвижным основанием равна нулю. Неподвижной точкой является и точка O . Следовательно, прямая OA — мгновенная ось вращения конуса.

Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижной системе координат $Oxyz$ — плоскость Oxy , по которой катится конус (неподвижный аксоид). В подвижной же системе, связанной с конусом, геометрическое место мгновенных осей образует коническую поверхность, совпадающую с поверхностью самого конуса (подвижный аксоид).

Так как $v = \omega h$, а $h = CE = H \sin \alpha$, то

$$\omega = \frac{v}{H \sin \alpha}.$$

Если вектор скорости точки C конуса направлен в сторону, указанную на рис. 4.11, то вектор его мгновенной угловой скорости направлен от вершины конуса к основанию по мгновенной оси вращения OA .

Учитывая, что скорость какой-либо точки тела, с одной стороны, есть первая производная по времени от ее радиус-вектора

$\bar{r}$, проведенного из неподвижной точки тела, а с другой — определяется векторной формулой Эйлера (4.9), можно записать

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (4.10)$$

Поскольку модуль радиус-вектора $\bar{r}$ — расстояние между двумя точками M и O твердого тела — постоянен (см. рис. 4.9), равенство (4.10) можно рассматривать как формулу для вычисления производной по времени от вектора постоянного модуля, изменение которого сводится лишь к его повороту вокруг неподвижной точки. Если взять в качестве таких векторов единичные векторы $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ подвижной системы координат $OXYZ$, вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (см. рис. 4.9), то

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{I}; \quad \frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{J}; \quad \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{K}. \quad (4.11)$$

Формулы (4.11) называют **формулами Пуассона**.

4.6. Ускорения точек тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O , и выберем в нем какую-либо точку M (рис. 4.12). Если в данный момент времени скорость точки тела равна $\bar{v}$, то ее ускорение может быть выражено формулой

$$\bar{a} = d\bar{v}/dt.$$

Полагая $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, запишем

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Поскольку $d\bar{\omega}/dt = \bar{\epsilon}$, а $d\bar{r}/dt = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, то

$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (4.12)$$

Установленное соотношение называют **формулой Ривальса**. Она дает представление о распределении ускорений точек в твердом теле, движущемся вокруг неподвижной точки. Ускорение $\bar{a}$ есть сумма двух ускорений. Первое

$$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} \quad (4.13)$$

называют **вращательным ускорением**, второе

$$a_{oc} = \bar{\omega} \times \bar{v} \quad (4.14)$$

осеостремительным ускорением точки. Таким образом,

$$\bar{a} = \bar{a}_{вр} + \bar{a}_{oc}. \quad (4.15)$$

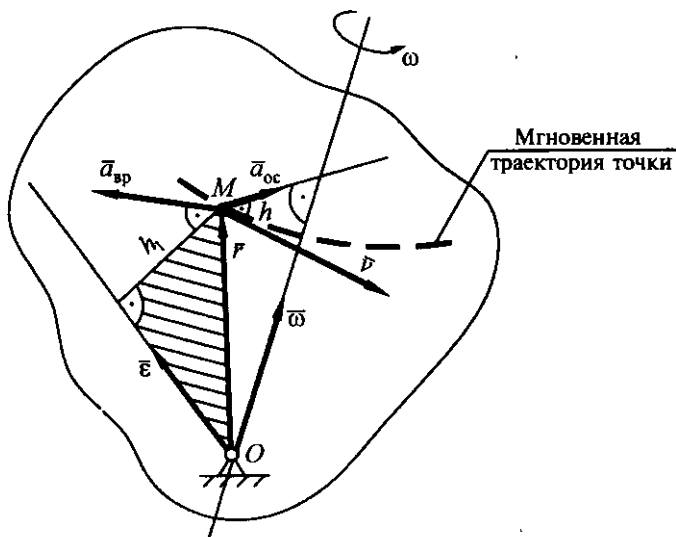


Рис. 4.12

Вектор вращательного ускорения $\bar{a}_{вр}$ направлен перпендикулярно к плоскости, образованной векторами $\bar{\epsilon}$ и $\bar{r}$ (заштрихованная плоскость на рис. 4.12), так, что с конца его поворот первого вектора до совмещения его со вторым виден происходящим против направления движения часовой стрелки. Модуль вектора $\bar{a}_{вр}$ равен

$$a_{вр} = |\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon r \sin(\hat{\bar{\epsilon}}, \hat{\bar{r}}) = \epsilon h_1, \quad (4.16)$$

где $h_1 = r \sin(\hat{\bar{\epsilon}}, \hat{\bar{r}})$ — кратчайшее расстояние от точки до линии, вдоль которой направлен вектор углового ускорения $\bar{\epsilon}$ в данный момент времени (см. рис. 4.12).

Вектор осеостремительного ускорения $\bar{a}_{oc}$ (см. рис. 4.12), являясь результатом векторного произведения $\bar{\omega}$ и $\bar{v}$, перпенди-

кулярен к плоскости, образованной последними, и направлен от точки M по перпендикуляру, проведенному из нее на мгновенную ось вращения тела.

Модуль вектора $\vec{a}_{oc}$, учитывая (4.6) и то, что $\vec{a}_{oc} \perp \vec{v}$, равен

$$a_{oc} = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\hat{\vec{\omega}}, \vec{v}) = \omega v = \omega^2 h. \quad (4.17)$$

Итак, *ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равно векторной сумме вращательного и осеостремительного ускорений.*

Модуль ускорения $\vec{a}$ равен

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{oc}^2 + 2a_{вр}a_{oc} \cos(\hat{\vec{a}}_{вр}, \vec{a}_{oc})}. \quad (4.18)$$

Отметим, что формула Ривальса (4.12) напоминает формулу (2.2) для ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вращательному и осеостремительному ускорениям здесь соответствуют тангенциальное $a_t = \varepsilon R$ и нормальное $a_n = \omega^2 R$ ускорения.

4.7. Вычисление углового ускорения тела

Для вычисления ускорения произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, необходимо знать его угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Рассмотрим один из способов его определения.

Если угловая скорость, а значит, и ее проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на неподвижные оси координат являются известными функциями времени, то проекции углового ускорения тела на те же оси определяются следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (4.19)$$

Зная проекции вектора $\vec{\varepsilon}$, найдем его модуль и направление в пространстве (косинусы тех углов, которые вектор $\vec{\varepsilon}$ составляет с осями координат).

Если угловая скорость постоянна по модулю, то

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}, \quad (4.20)$$

где $\bar{\omega}_e$ — угловая скорость дифференцируемого по времени вектора угловой скорости $\bar{\omega}$.

Рассмотрим пример вычисления угловой скорости и углового ускорения тела, а также скоростей и ускорений его точек при вращении тела вокруг неподвижного центра.

Пример 4.2. Правильный конус с углом при вершине 2α и высотой H катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения, при этом вершина O конуса остается неподвижной, а центр C его основания движется по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости, с постоянной скоростью $\bar{v}$ (рис. 4.13). Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса, скорости и ускорения точек A и B его основания.

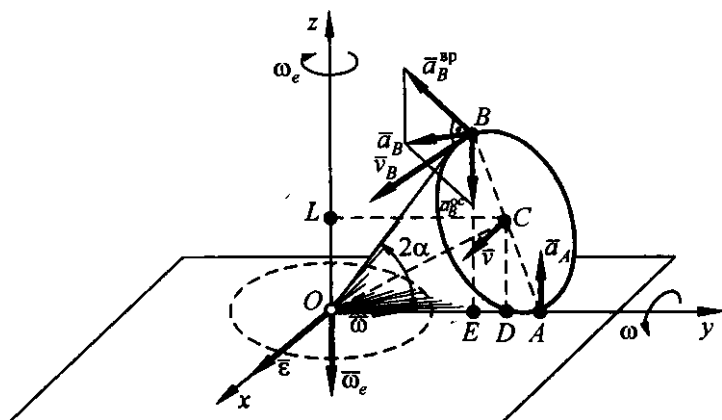


Рис. 4.13

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в точке O конуса и осью Oy , направленной в данный момент по его образующей OA , вдоль которой конус касается неподвижной плоскости.

Поскольку конус катится без скольжения, то скорости всех его точек, лежащих на образующей OA , равны в данный момент нулю. Следовательно, мгновенная ось вращения конуса совпадает с образующей OA и направлена вдоль оси Oy .

Установив положение мгновенной оси вращения, найдем модуль мгновенной угловой скорости конуса. Поскольку

$$v_C = \omega CD,$$

где $CD = OC \sin \alpha$ — кратчайшее расстояние от точки C до мгновенной оси, то

$$\omega = \frac{v_C}{CD} = \frac{v}{H \sin \alpha} = \text{const}.$$

Учитывая заданное направление вектора $\vec{v}_C = \vec{v}$, отложим от точки O вдоль мгновенной оси OA вектор $\vec{\omega}$ так, чтобы видеть с его конца вращение конуса вокруг этой оси в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки (см. рис. 4.13).

Скорость точки A $v_A = 0$, так как в данный момент времени эта точка принадлежит мгновенной оси вращения конуса.

Скорость точки B

$$v_B = \omega h_B = \omega BE = \frac{v}{H \sin \alpha} 2H \sin \alpha = 2v.$$

Вектор $\vec{v}_B$ перпендикулярен плоскости OBE и в соответствии с направлением вращения конуса вокруг мгновенной оси OA направлен параллельно оси Ox неподвижной системы координат.

Поскольку мгновенная угловая скорость ω конуса постоянна, его угловое ускорение определяется как производная от вектора постоянного модуля (4.20):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}.$$

Кратчайшее расстояние от точки C до оси Oz равно $CL = OC \cos \alpha = H \cos \alpha$ и

$$\omega_e = \frac{v_C}{CL} = \frac{v}{H \cos \alpha}.$$

Так как $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}$, то

$$\varepsilon = \omega_e \omega \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}) = \omega_e \omega = \frac{2v^2}{H^2 \sin 2\alpha}.$$

Ускорение какой-либо точки конуса определим в соответствии с (4.15) как геометрическую сумму вращательного и осестремительного ускорений.

Для точки A конуса

$$\vec{a}_A^{sp} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA}; \quad a_A^{sp} = \varepsilon \cdot OA; \quad \vec{a}_A^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A.$$

Вектор $\vec{a}_A^{sp}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{OA}$, т. е. параллельно оси Oz вверх. Поскольку $\vec{v}_A = 0$, то $\vec{a}_A^{oc} = 0$.

Таким образом,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{sp}; \quad a_A = a_A^{sp} = \varepsilon OA = \frac{2v^2}{H^2 \sin 2\alpha} \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{v^2}{H \cos^2 \alpha \sin \alpha}.$$

Для точки B конуса

$$\begin{aligned} \vec{a}_B^{sp} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{OB}; \\ a_B^{sp} &= \varepsilon OB = \frac{2v^2}{H^2 \sin 2\alpha} \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{v^2}{H \cos^2 \alpha \sin \alpha}; \\ \vec{a}_B^{oc} &= \vec{\omega} \times \vec{v}_B; \end{aligned}$$

$$a_B^{\text{oc}} = \omega^2 BE = \frac{v^2}{H^2 \sin^2 \alpha} 2H \sin \alpha = \frac{2v^2}{H \sin \alpha}.$$

Вектор $\vec{a}_B^{\text{sp}}$ перпендикулярен плоскости, образованной в точке B векторами $\vec{e}$, $\vec{OB}$, принадлежит плоскости Oyz , а его направление определяется векторным произведением $\vec{e} \times \vec{OB}$.

Вектор $\vec{a}_B^{\text{oc}}$ перпендикулярен плоскости, образованной в точке B векторами $\vec{\omega}$, $\vec{v}_B$, и направлен от точки B к мгновенной оси вращения конуса (см. рис. 4.13).

Полное ускорение точки B найдем как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_B^{\text{oc}}$, $\vec{a}_B^{\text{sp}}$:

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{oc}})^2 + (a_B^{\text{sp}})^2 - 2a_B^{\text{oc}} a_B^{\text{sp}} \cos 2\alpha} = \frac{v^2}{H \sin \alpha} \sqrt{4 + \frac{1}{\cos^4 \alpha} - \frac{4 \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}}.$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**5.1. Число степеней свободы. Обобщенные координаты.
Уравнения движения**

Движение твердого тела относительно рассматриваемой системы отсчета S_0 на интервале времени (t_1, t_2) называется *общим случаем движения*, если на этом интервале времени нет геометрических ограничений на положение и ориентацию тела. В данном случае в отличие от ранее рассмотренных движений предполагается, что тело может геометрически свободно двигаться в пространстве. Свобода движения тела здесь понимается не как отсутствие препятствующих сил, а как принципиальная возможность осуществления любого варианта движения тела из занимаемого им положения. Такую возможность твердое тело имеет, например, находясь в пустоте или в деформируемой среде — газе, жидкости. Если учитывать деформирование поверхностей всех смежных с ним тел в зонах контактов, то движение твердого тела должно быть также отнесено к случаю общего движения.

Термин «общий случай движения» дан в связи с тем, что все иные типы движения твердого тела можно рассматривать как его частные проявления. Формулы кинематики и динамики общего случая движения справедливы для любых движений твердого тела.

Приведем примеры общего случая движения твердого тела: полеты самолета, ракеты, спутника относительно планеты; качка судна в воде относительно берегов; галопирование вагона или подрессоренного корпуса автомобиля относительно грунта при езде по неровной дороге; вибрация вращающегося ротора,

установленного в упругих опорах, относительно корпуса; движение груза, подвешенного на упругом тросе, при движении стрелы подъемного крана.

Положение любой точки твердого тела, а следовательно, и положение самого твердого тела в системе отсчета движения S_0 определяется положением каких-либо *трех фиксированных его точек, не лежащих на одной прямой*, ибо такие точки позволяют построить в теле базисную систему S с началом в одной из них. Поскольку в системе S координаты любой точки тела постоянны, то движение точек тела является следствием движения самой системы S , т. е. выбранных базисных точек.

Последнее доказывает, что характеристики движения произвольной точки полностью определяются движением трех выбранных базисных точек тела. Поэтому при изложении формулировок определений частных случаев движения твердого тела достаточно указывать свойства геометрических ограничений лишь для его базисных точек. Например, движение тела будет поступательным относительно системы S_0 , пока хотя бы два из трех отрезков, соединяющих три базисные точки, не изменяют своей ориентации в S_0 .

Из девяти координат трех базисных точек тела лишь *шесть* могут быть независимыми, поскольку длины трех отрезков между этими точками твердого тела должны сохраняться. Поэтому положение тела в общем случае движения задается *шестью* независимыми переменными параметрами $q_1, \dots, q_6$, называемыми *обобщенными координатами* тела. Это означает, что тело имеет *шесть степеней свободы* относительно системы S_0 . Большого числа степеней свободы твердое тело как самостоятельный объект изучения никогда не имеет.

Возможны различные варианты выбора обобщенных координат. Для наглядности восприятия в качестве последних обычно выбирают геометрические параметры — прямолинейные или криволинейные координаты и углы. Типовой вариант выбора обобщенных координат для общего случая движения твердого тела показан на рис. 5.1. Тело здесь изображено в виде прямоугольного параллелепипеда, который надо воспринимать как некоторый «кусочек» тела произвольной формы. Помимо основной

системы S_0 отсчета движения здесь используются две вспомогательные подвижные системы S_1 и S_2 . С некоторой точкой тела, например A , связано начало осей системы S_1 , направления которых всегда совпадают с направлениями одноименных осей исходной системы S_0 . При таком условии система S_1 движется поступательно относительно системы S_0 . Положение системы S_1 относительно S_0 может быть задано, например, с помощью декартовых координат точки A .

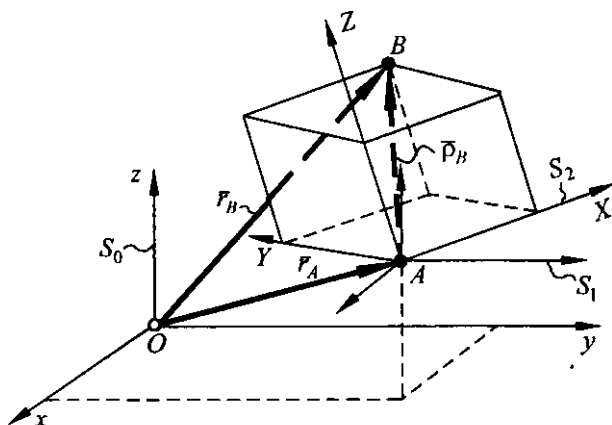


Рис. 5.1

Система S_2 с началом в точке A жестко связана с телом. Поэтому любое нетривиальное движение тела (и осей системы S_2) относительно системы S_1 будет сферическим по определению этого вида движения. Пространственная ориентация осей системы S_2 относительно системы S_1 может быть задана, например, тремя углами Эйлера.

Три декартовы координаты x_A , y_A , z_A точки A и три угла Эйлера ψ , θ , ϕ являются обобщенными координатами тела в системе S_0 . Представленный вариант обобщенных координат не является единственным. Начала систем S_1 и S_2 можно совместить с любой точкой тела. Вместо декартовых координат точки A

можно использовать, например, ее цилиндрические координаты, а вместо углов Эйлера — иную систему углов.

Совокупность уравнений

$$q_j = f_j(t) \quad (j = \overline{1, 6}), \quad (5.1)$$

определяющих зависимость обобщенных координат тела от времени, называют *законом движения тела, или уравнениями его движения*, на некотором интервале времени (t_1, t_2) .

Например:

$$\begin{aligned} q_1 = x_A = f_1(t), \quad q_2 = y_A = f_2(t), \quad q_3 = z_A = f_3(t), \\ q_4 = \psi = f_4(t), \quad q_5 = \theta = f_5(t), \quad q_6 = \varphi = f_6(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Информация, заключенная в уравнениях движения (5.2), является исчерпывающей для расчета любых кинематических характеристик движения отдельных точек и пространственной ориентации тела. Получение информации об общем случае движения тела в заданных физических условиях в виде (5.1) обычно составляет главную цель задач динамики твердого тела.

Любой вид движения твердого тела можно рассматривать как частный случай общего движения. Нетрудно убедиться, что частным случаям законов изменения обобщенных координат твердого тела (5.2) отвечают частные виды движений твердого тела, в том числе и покой. Так, если углы Эйлера на некотором интервале времени остаются постоянными, то движение тела соответствует определению поступательного движения. Аналогично, если координаты точки A остаются постоянными, то движение тела соответствует определению сферического движения. Если же остаются постоянными координата z_A и два угла Эйлера $\psi, \theta (\theta = 0)$, то движение тела соответствует определению плоского движения, параллельного плоскости осей Oxy системы S_0 . Таким образом, фиксируя некоторые обобщенные координаты, можно генерировать различные частные случаи движения тела с меньшим числом степеней свободы.

Другой вариант сокращения числа степеней свободы твердого тела — установление какой-либо функциональной зависимости между двумя или несколькими исходными обобщенными координатами. Например, будем считать, что при движении тела

изменяются лишь две координаты: z_A и угол φ , причем их изменения пропорциональны одно другому, т. е.

$$z_A = z_A^0 + H\varphi/(2\pi).$$

Тогда движение тела соответствует одностепенному винтовому движению с шагом винта H , поскольку за полный оборот тела ($\varphi = 2\pi$) точка A перемещается вдоль оси Oz на расстояние H (рис. 5.2). Закон такого винтового движения задается лишь одной функцией, например $\varphi = f(t)$.

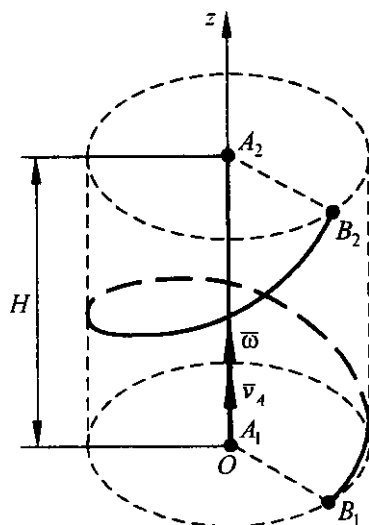


Рис. 5.2

Взаимосвязь между исходными обобщенными координатами может иметь более сложный вид, например при движении тела по поверхности с непрерывным контактированием. Аналитическое выражение такой зависимости определяется формой тела и формой поверхности. Для простоты рассмотрим случай движения круглого тонкого диска — монеты радиусом R по плоскости стола (рис. 5.3). Расположим оси Ox и Oy системы S_0 в опорной плоскости, а в качестве точки A системы S_2 возьмем центральную точку диска, при этом ось AZ системы S_2 направим перпендикулярно плоскости диска. При непрерывном кон-

тактировании тел значение координаты z_A будет зависеть от угла наклона плоскости монеты к плоскости стола:

$$z_A = R \sin(\bar{K}, \bar{k}) = R \sin \theta,$$

где θ — угол нутации в группе углов Эйлера, задающих пространственную ориентацию осей системы S_2 относительно системы S_0 . Так как переменные параметры z_A и θ оказались взаимозависимыми, то в данном случае движения диск не может иметь более пяти степеней свободы.

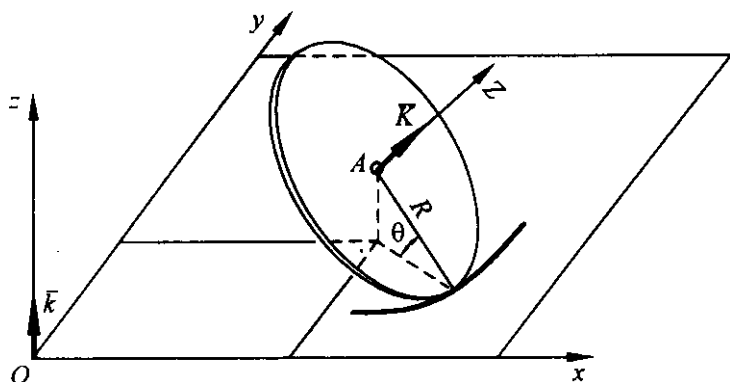


Рис. 5.3

Вопросы кинематики движения тел произвольной формы по поверхности без или со скольжением в точках контакта выходят за рамки данного учебника.

5.2. Траектория произвольной точки тела

Покажем, как рассчитать траекторию произвольной точки тела, если уравнения его движения записаны в форме (5.2). Пусть такой точкой является точка B , находящаяся от точки A на расстоянии l . Радиус-векторы точек B и A в системе S_0 связаны соотношением

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \quad (5.3)$$

Вектор $\overline{AB}$ имеет различные проекции на оси координат двух систем S_0 и S_2 : в S_0 $\overline{AB} = \bar{R} = [l_x, l_y, l_z]^T$, а в S_2 $\overline{AB} = \bar{\rho} = [l_x, l_y, l_z]^T$, причем l_x, l_y, l_z остаются постоянными при движении тела.

На основании формулы (B.71) запишем связь проекций $\overline{AB}$ на оси координат систем S_0 и S_2 :

$$\bar{R} = A^T \bar{\rho}, \quad (5.4)$$

где A^T — матрица, транспонированная к матрице A направляющих косинусов углов между осями систем S_0, S_1 и S_2 , элементы

которой, согласно (4.3), могут быть выражены через углы Эйлера, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}[\psi(t), \theta(t), \varphi(t)]$.

Соотношение (5.3) с учетом (5.2) и (5.4) позволяет получить в явном виде уравнения движения точки B на заданном интервале изменения времени t :

$$\bar{\mathbf{r}}_B = x_A(t)\bar{\mathbf{i}} + y_A(t)\bar{\mathbf{j}} + z_A(t)\bar{\mathbf{k}} + \mathbf{A}^T[\psi(t), \theta(t), \varphi(t)](l_x\bar{\mathbf{I}} + l_y\bar{\mathbf{J}} + l_z\bar{\mathbf{K}}).$$

Представленное уравнение можно считать параметрической формой задания траектории точки B относительно системы координат S_0 .

5.3. Скорость произвольной точки тела

Отметим, что по уравнениям движения (5.2) можно рассчитать проекции вектора скорости точки A на оси S_0 :

$$v_{Ax} = \dot{x}_A; \quad v_{Ay} = \dot{y}_A; \quad v_{Az} = \dot{z}_A,$$

а также проекции вектора угловой скорости сферического движения тела относительно системы S_1 на оси системы координат S_2 (см. формулы (4.8)).

Вектор $\bar{\omega}$ и его производную по времени $\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}$ будем называть соответственно векторами угловой скорости и углового ускорения тела в общем случае его движения.

Продифференцировав по времени уравнение (5.3), получим

$$\bar{\mathbf{v}}_B = \bar{\mathbf{v}}_A + \dot{\overline{AB}}.$$

Так как $\overline{AB}$ является вектором постоянного модуля, его производную по времени можно вычислить по формуле Эйлера (4.6):

$$\dot{\overline{AB}} = \bar{\omega} \times \overline{AB}.$$

Тогда

$$\bar{\mathbf{v}}_B = \bar{\mathbf{v}}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (5.5)$$

При известном законе движения тела (см. (5.2)) формула (5.5) позволяет рассчитать скорость произвольной точки B тела для любого момента времени на заданном интервале времени.

Отметим важное свойство, характерное для общего, а следовательно, и для любого частного случая движения твердого тела. Докажем, что вектор $\vec{\omega}$, а следовательно, и вектор $\vec{e}$ не зависят от выбора точки A в теле и ориентации осей системы S_2 по отношению к телу.

Предположим, что при выборе, например, точки B в качестве начала координат системы S_2 (с иным направлением осей по отношению к телу) угловая скорость $\vec{\omega}_1$ изменения ориентации тела отлична от $\vec{\omega}$. Воспользуемся закономерностью (5.5) для различных случаев выбора начала координат системы S_2 . Если начало координат системы S_2 находится в точке A , то $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}$, если же в точке B , то $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_1 \times \overline{BA}$. Суммируя эти равенства для одного и того же момента времени, приходим к следующему условию:

$$0 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_1) \times \overline{AB}.$$

Поскольку A и B — произвольные точки тела, это условие выполняется лишь при $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$.

5.4. Ускорение произвольной точки тела

Отметим, что по уравнениям движения (5.2) можно рассчитать проекции вектора ускорения точки A на оси координат системы S_0 :

$$a_{Ax} = \ddot{x}_A; \quad a_{Ay} = \ddot{y}_A; \quad a_{Az} = \ddot{z}_A,$$

а также проекции вектора углового ускорения сферического движения тела относительно системы S_1 на оси координат системы S_2 :

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z.$$

Дважды продифференцировав по времени уравнение (5.3), получим

$$\ddot{\vec{a}}_B = \ddot{\vec{a}}_A + \ddot{\overline{AB}}.$$

Так как вектор $\overline{AB}$ жестко связан с твердым телом и его модуль постоянен, вторая производная вектора $\overline{AB}$ по времени может быть вычислена по формуле Ривальса (4.12):

$$\ddot{\overline{AB}} = \overline{\epsilon} \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB}).$$

Тогда

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\text{вп}} + \overline{a}_{BA}^{\text{ос}}, \quad (5.6)$$

где $\overline{a}_{BA}^{\text{вп}} = \overline{\epsilon} \times \overline{AB}$ и $\overline{a}_{BA}^{\text{ос}} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB})$ — соответственно вращательное и осестремительное ускорения точки B при ее движении вокруг точки A вследствие сферического движения тела относительно системы координат S_1 . При известном законе движения тела (см. (5.2)) формула (5.6) позволяет рассчитать ускорение произвольной точки B тела для любого момента времени на заданном интервале.

Обратим внимание на математическую особенность применения уравнений (5.5) и (5.6), правые части которых представляют собой суммы векторов. При геометрическом суммировании этих векторов не возникают какие-либо методические трудности, однако при выполнении аналитических расчетов вручную или с помощью компьютера к операции сложения векторов следует относиться неформально. *Математическая операция аналитического сложения векторов предполагает, что складываемые векторы заданы своими проекциями на оси координат одной и той же системы.*

Согласно принятым обобщенным координатам и закону движения тела (5.2) векторы $\overline{v}_A$ и $\overline{a}_A$ были заданы проекциями на оси системы S_0 . В таком случае в формулах (5.5) и (5.6) остальные (прибавляемые) векторы должны быть также представлены в виде проекций на оси системы S_0 . Следует иметь в виду, что во многих задачах динамики свободного движения твердого тела векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\epsilon}$ обычно предполагаются заданными своими проекциями на оси подвижной системы S_2 , так как в этой системе осевые и центробежные моменты инерции тела постоянны. Поэтому в этих случаях при применении формул (5.5) и (5.6) сначала рассчитывают проекции векторов, являющихся результатами произведений $\overline{\omega} \times \overline{AB}$, $\overline{\epsilon} \times \overline{AB}$, $\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB})$ на оси системы S_2 (как указывалось выше, в этой системе координат вектор $\overline{AB}$ предполагается заданным в форме вектора $\overline{\rho}$), а затем с помощью соотношения (B.72) — на оси системы S_0 .

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

6.1. Относительное, переносное и абсолютное
движения точки

В ряде задач механики оказывается целесообразным рассмотреть движения точки одновременно в нескольких системах координат, из которых одна (основная) условно принимается за неподвижную, а другие определенным образом движутся относительно нее. Так, движение космического корабля к Луне нужно рассматривать одновременно и относительно Земли, и относительно Луны. Движение точки, исследуемое одновременно в основной и подвижной (подвижных) системах отсчета, называется **сложным**. В простейшем случае сложное движение точки состоит из относительного и переносного движений. Определим эти движения.

Рассмотрим сложное движение точки M , перемещающейся по отношению к подвижной системе $O'XYZ$ (рис. 6.1), связанной с некоторым телом Q , которое в свою очередь совершает свободное движение по отношению к основной, условно неподвижной системе $Oxyz$.

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$ называется **абсолютным**, или сложным, состоящим из **относительного движения** по отношению к подвижной системе $O'XYZ$ и **переносного** — движения подвижной системы отсчета $O'XYZ$ по отношению к неподвижной системе $Oxyz$.

Положение точки M в неподвижной системе $Oxyz$ зададим вектором $\vec{r}(t)$ с началом в точке O . Тогда абсолютная траектория M_0M точки M является голографом этого радиус-вектора $\vec{r}(t)$, а абсолютные скорость и ускорение точки M определяются выражениями

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6.1)$$

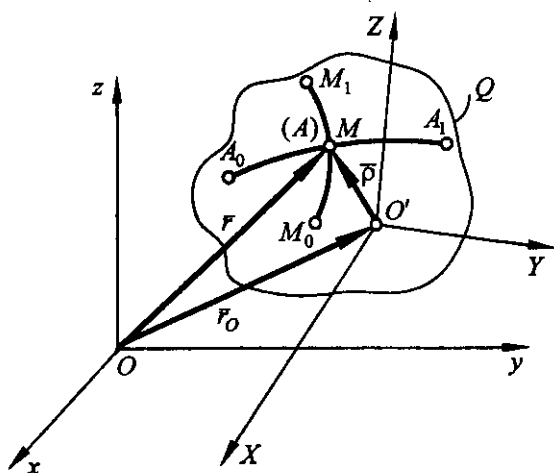


Рис. 6.1

Положение точки M в подвижной системе координат $O'XYZ$ характеризует радиус-вектор $\vec{r}(t)$ с началом в точке O' . Траектория точки M в подвижной системе отсчета называется *относительной траекторией* и представляет собой годограф радиус-вектора $\vec{r}(t)$. Скорость движения точки M по отношению к осям подвижной системы координат называется *относительной скоростью* и обозначается $\vec{v}_r$. Вектор $\vec{v}_r$ определяет скорость изменения с течением времени радиус-вектора $\vec{r}(t)$ в подвижной системе $O'XYZ$ и поэтому выражается его относительной, или локальной, производной по времени,

$$\vec{v}_r = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}. \quad (6.2)$$

Ускорение точки M в этом движении называется *относительным ускорением* и обозначается $\vec{a}_r$. Вектор $\vec{a}_r$ характеризует скорость изменения вектора относительной скорости $\vec{v}_r$ в подвижной системе $O'XYZ$ и поэтому выражается относительной, или локальной, производной по времени от $\vec{v}_r$:

$$\vec{a}_r = \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6.3)$$

Движение подвижной системы $O'XYZ$ по отношению к неподвижной $Oxyz$ является для точки M *переносным движением*, а скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки A , с которой в данный момент времени совпадает точка M , называют *переносными скоростью и ускорением* точки M и обозначают $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$.

В рассматриваемом нами общем случае переносным является движение тела Q и связанной с ним системы $O'XYZ$. Напомним, что тогда тело Q имеет шесть степеней свободы и его движение в каждый момент времени складывается из поступательного движения вместе с полюсом O' со скоростью $\bar{v}_{O'}$ и ускорением $\bar{a}_{O'}$ и мгновенного вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$ и угловым ускорением $\bar{\epsilon}_e$. Поэтому переносные скорость и ускорение точки M определяются по формулам

$$\bar{v}_e = \bar{v}_A = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}; \quad (6.4)$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_A = \bar{a}_{O'} + \bar{\epsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}), \quad (6.5)$$

где $\bar{v}_{O'}$ и $\bar{a}_{O'}$ — скорость и ускорение точки O' подвижной системы координат.

В задачах кинематики сложного движения точки устанавливают зависимости между абсолютными, относительными и переносными скоростями и ускорениями точки. Для этого прежде всего определяют связь между изменениями вектора в подвижной и неподвижной системах координат.

6.2. Абсолютная и относительная производные вектора.

Формула Бура

Рассмотрим изменение вектора $\bar{b}(t)$ (рис. 6.2) по отношению к двум системам координат — подвижной $O'XYZ$ и неподвижной $Oxyz$.

Абсолютной, или *полной*, производной вектора $\bar{b}$ по аргументу t называется вектор $\frac{d\bar{b}}{dt}$, определяющий изменение вектора $\bar{b}(t)$ в неподвижной системе $Oxyz$. *Относительная*, или *ло-*

кальная, производная $\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt}$ определяет изменение вектора $\bar{b}(t)$ в подвижной системе $O'XYZ$.

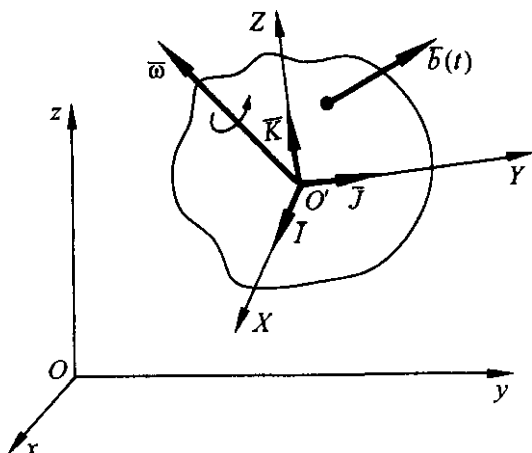


Рис. 6.2

Найдем зависимость между этими производными. Если воспользоваться проекциями вектора $\bar{b}(t)$ на оси подвижной системы $O'XYZ$, то можно записать

$$\bar{b}(t) = b_x \bar{I} + b_y \bar{J} + b_z \bar{K}, \quad (6.6)$$

где $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ — орты, не изменяемые в этой системе отсчета. Поэтому локальная производная

$$\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \bar{I} + \frac{db_y}{dt} \bar{J} + \frac{db_z}{dt} \bar{K}, \quad (6.7)$$

а полная производная $\frac{d\bar{b}}{dt}$ с учетом изменения также ортов $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ имеет вид

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \bar{I} + \frac{db_y}{dt} \bar{J} + \frac{db_z}{dt} \bar{K} + b_x \frac{d\bar{I}}{dt} + b_y \frac{d\bar{J}}{dt} + b_z \frac{d\bar{K}}{dt}. \quad (6.8)$$

В правой части уравнения (6.8) первые три слагаемые выражают локальную производную (6.7), а производные от ортов $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ определяются формулами Пуассона (4.11), т. е.

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{b}}{dt} &= \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + b_x(\bar{\omega} \times \bar{I}) + b_y(\bar{\omega} \times \bar{J}) + b_z(\bar{\omega} \times \bar{K}) = \\ &= \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times (b_x\bar{I} + b_y\bar{J} + b_z\bar{K}).\end{aligned}\quad (6.9)$$

С учетом (6.6) получаем

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (6.10)$$

Выражение (6.10) носит название *формулы Бура* и устанавливает, что *абсолютная производная вектора равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения вектора угловой скорости подвижной системы отсчета на дифференцируемый вектор.*

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $\bar{\omega} = 0$, то

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt}.$$

2. Если вектор $\bar{b}$ не меняется в подвижной системе отсчета $\left(\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} = 0\right)$, то

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{b}.$$

3. Если $\bar{b} = k\bar{\omega}$, т. е. вектор $\bar{b}$ все время параллелен вектору угловой скорости ($\bar{\omega} \times \bar{b} = 0$), то

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt}.$$

В частности, если $\bar{b} = \bar{\omega}$, то

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon},$$

т. е. вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ изменяется одинаково для подвижной и неподвижной систем координат.

6.3. Теорема о сложении скоростей

Зависимость между абсолютной $\vec{v}$, относительной $\vec{v}_r$ и переносной $\vec{v}_e$ скоростями точки в сложном ее движении устанавливает теорема о сложении скоростей.

Теорема. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Доказательство. Действительно, поскольку для любого момента времени (рис. 6.3)

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{\rho},$$

то, продифференцировав по времени это векторное равенство, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (6.11)$$

где $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}$ и $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ — полные производные, причем $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ есть абсолютная скорость точки M ; $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_{O'}$ — скорость точки O' .

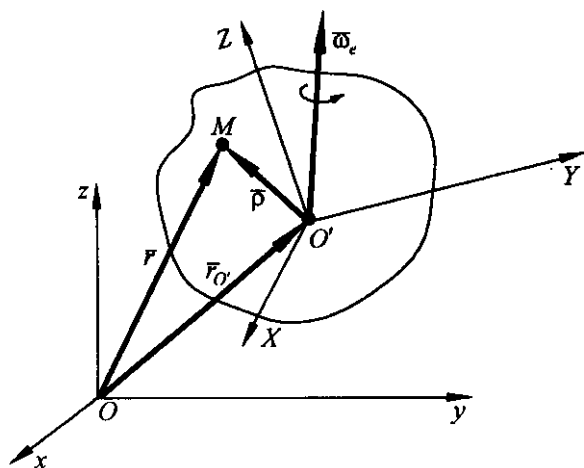


Рис. 6.3

Согласно формуле Бура,

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} = \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}. \quad (6.12)$$

Здесь локальная производная $\frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_r$ представляет собой относительную скорость точки M . Таким образом,

$$\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}.$$

Поскольку $\bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} = \bar{v}_e$ — вектор переносной скорости точки M , то, следовательно,

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \quad (6.13)$$

Пример 6.1. Точка M движется с постоянной скоростью u вниз по образующей конуса, вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (рис. 6.4). Найти зависимость скорости точки M от расстояния $s = A_0M$, если угол $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Абсолютное движение точки M по отношению к неподвижной системе $Oxyz$ представим в виде суммы двух движений: относительного по образующей A_0A_1 конуса (с которым свяжем подвижную систему $O'XYZ$) и переносного — вращения конуса вокруг оси Oz . Тогда в произвольный момент времени t точка M , находясь на расстоянии $s = A_0M$ от вершины конуса, имеет относительную скорость $v_r = u = \text{const}$, направленную сверху вниз по образующей конуса. Переносной скоростью для точки M будет скорость точки A конуса, с которой в этот момент времени совпала точка M : $v_e = \omega h = \omega s \sin 30^\circ = \omega s/2$, где h — расстояние от точки M до оси вращения. Вектор $\bar{v}_e$ направлен по касательной к траектории точки A . Поскольку в нашем случае векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ взаимно перпендикулярны, получаем

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + \frac{\omega^2 s^2}{4}}.$$

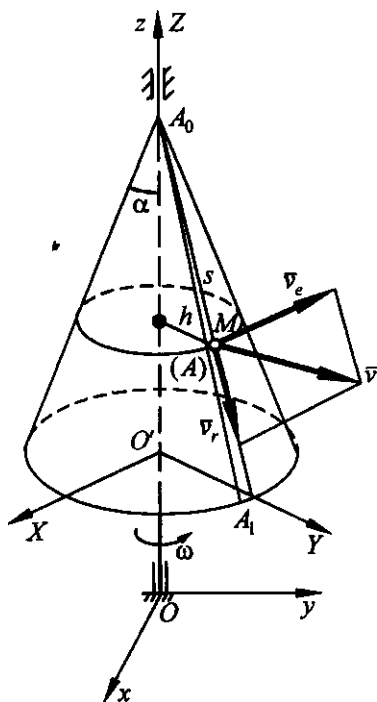


Рис. 6.4

6.4. Теорема о сложении ускорений, или кинематическая теорема Кориолиса. Ускорение Кориолиса*

Найдем зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями точки. С учетом (6.13) абсолютное ускорение точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}), \quad (6.14)$$

где $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$ и $\frac{d\bar{v}_e}{dt}$ — полные производные векторов $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$, записанные для неподвижной системы координат.

Воспользовавшись формулой Бура, имеем

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \\ &= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_{O'} + \bar{\epsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right) = \\ &= \bar{a}_r + \bar{a}_{O'} + \bar{\epsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r). \end{aligned}$$

Так как

$$\bar{a}_{O'} + \bar{\epsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) = \bar{a}_e,$$

получаем

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r),$$

или

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_K, \quad (6.15)$$

где

$$\bar{a}_K = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) \quad (6.16)$$

ускорение Кориолиса, или поворотное ускорение.

Формула (6.15) выражает теорему о сложении ускорений, или **кинематическую теорему Кориолиса**: абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

Остановимся на вычислении ускорения Кориолиса, определяемого по формуле (6.16).

* Ускорение $\bar{a}_K$ было получено Г. Кориолисом в 1833 г., К. Гауссом в 1803 г. и Л. Эйлером в 1765 г.

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Согласно общему правилу векторного умножения, вектор $\vec{a}_K$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ (рис. 6.5, а), в ту сторону, откуда поворот $\vec{\omega}_e$ к $\vec{v}_r$ на наименьший угол виден происходящим против направления движения часовой стрелки. Если угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ обозначить α , то по модулю ускорение Кориолиса

$$a_K = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{v}_r| \sin \alpha.$$

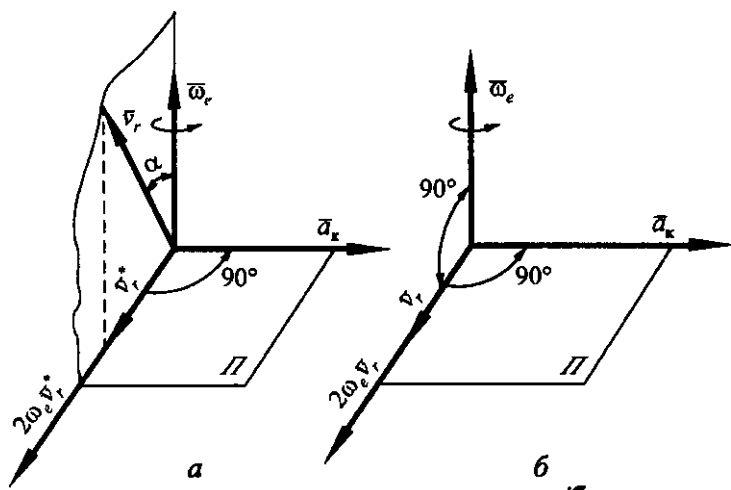


Рис. 6.5

Заметим, что вектор $\vec{v}_r^*$ (см. рис. 6.5, а), равный по модулю $v_r^* = v_r \sin \alpha$, представляет собой проекцию вектора относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость Π , перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$. Сформулируем **правило Жуковского**, очень удобное для определения ускорения Кориолиса: ускорение $\vec{a}_K$ можно получить, спроецировав вектор $\vec{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$, увеличив полученную проекцию $\vec{v}_r^*$ в $2\omega_e$ раз и повернув ее на 90° в направлении переносного вращения.

Если траектория относительного движения — плоская кривая, находящаяся в плоскости, перпендикулярной $\vec{\omega}_e$, то, согласно правилу Жуковского, направление $\vec{a}_k$ можно получить, повернув на 90° в направлении переносного вращения сам вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ (рис. 6.5, б).

Пусть точка M движется по гипотенузе AB треугольника $O'AB$, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ (рис. 6.6). На рис. 6.6, а относительная траектория точки M описывает коническую поверхность, а в случае, изображенном на рис. 6.6, б, плоскость треугольника $O'AB$ перпендикулярна оси $O(z)$ переносного вращения. Поэтому направление вектора $\vec{a}_k$ на рис. 6.6, б получено поворотом вектора $\vec{v}_r$ на 90° в направлении переносного вращения.

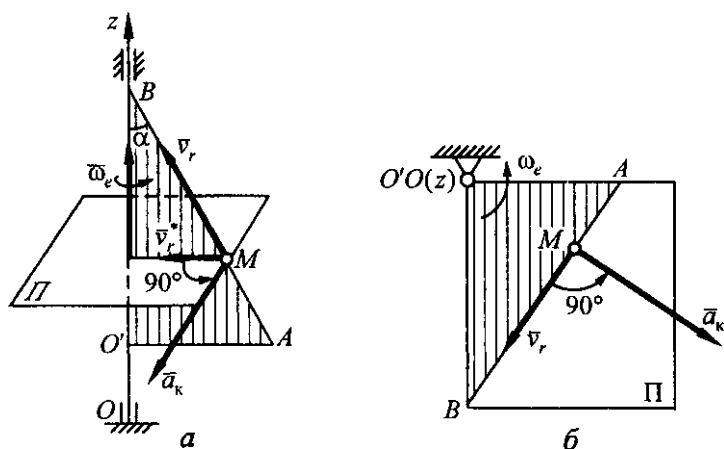


Рис. 6.6

Остановимся на частных случаях, когда ускорение Кориолиса обращается в нуль.

- 1) $\omega_e = 0$, т. е. переносное движение — поступательное;
- 2) $v_r = 0$, т. е. в те моменты времени, когда в относительном движении точка останавливается, например, при изменении направления относительного движения;

3) $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin \alpha = 0$, когда вектор скорости относительного движения параллелен вектору угловой скорости переносного вращения ($\vec{v}_r \parallel \vec{\omega}_e$).

Следует также отметить, что ускорение Кориолиса зависит от выбора подвижной системы координат, т. е. при разном разложении одного и того же абсолютного движения на относительное и переносное возможны разные ускорения Кориолиса.

6.5. Сложение ускорений в частных случаях переносного движения

1. Переносное движение — поступательное.

В этом случае ускорение Кориолиса обращается в нуль ($\vec{\omega}_e = 0$) и абсолютное ускорение складывается из относительного и переносного:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e.$$

Если переносное движение — поступательное, равномерное и прямолинейное, то абсолютное ускорение равно относительному:

$$\vec{a} = \vec{a}_r.$$

Действительно, в этом случае $\vec{a}_k = 0$, $\vec{a}_e = 0$.

2. Переносное движение — вращение вокруг неподвижной оси.

В этом случае переносная скорость и ускорение определяются по формулам

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}, \quad v_{e\tau} = \omega_e r h; \quad (6.17)$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau;$$

$$\vec{a}_e^n = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}), \quad a_e^n = \omega_e^2 h; \quad (6.18)$$

$$\vec{a}_e^\tau = \vec{\epsilon}_e \times \vec{\rho}, \quad a_e^\tau = \epsilon_e h, \quad (6.19)$$

где h — расстояние от точки до оси вращения.

Пример 6.2. Трубка (рис. 6.7, а), имеющая форму полукольца радиусом $R = 0,1$ м, закреплена на пластинке, вращающейся вокруг неподвижной оси Oz по закону $\varphi(t) = 4t - t^2$ (φ — в рад, t — в с). Внутри трубки движется шарик M

по закону $s(t) = 0,1(\pi/3)t^2$ (s — в м, t — в с). Для момента времени $t_1 = 1$ с определить абсолютные скорость и ускорение шарика M .

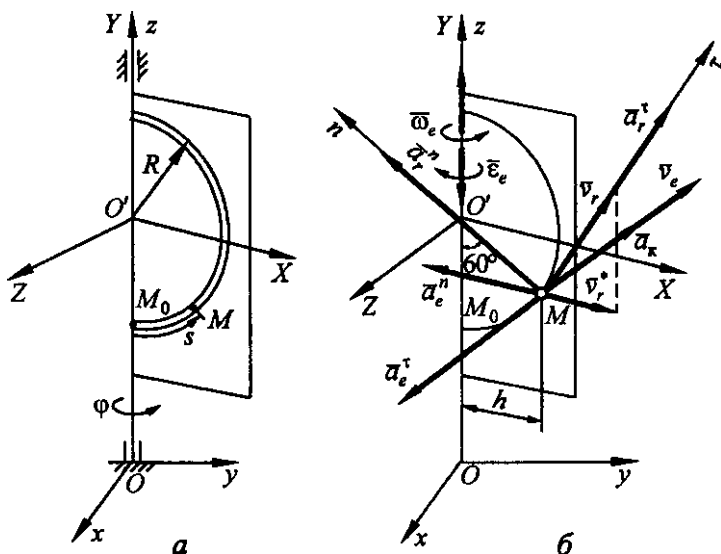


Рис. 6.7

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, где ось Oz совпадает с осью вращения пластинки. Подвижную систему координат $O'XYZ$ свяжем с пластинкой.

Принимая шарик M за точку, представим абсолютное движение точки M как сумму относительного движения по трубке на пластинке и переносного вращения пластинки вокруг оси Oz .

В относительном движении траектория точки M — полуокружность радиусом $R = 0,1$ м. К моменту времени $t_1 = 1$ с точка M переместилась по этой траектории на расстояние $M_0M = s|_{t_1=1\text{ с}} = 0,1(\pi/3)$ м (рис 6.7, б). Тогда $\angle M_0O'M =$

$$= \frac{s}{R} \Big|_{t_1=1\text{ с}} = \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60^\circ.$$

Определим в этот момент времени положения касательной τ и нормальной n осей на относительной траектории точки. Относительная скорость точки M

$$v_r^\tau = \dot{s} = 0,2(\pi/3)t, \quad v_r^\tau \Big|_{t_1=1\text{ с}} = 0,21 \text{ м/с},$$

относительное ускорение

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau,$$

где $a_r^n = v_r^2/R$, $a_r^n|_{t_1=1\text{ с}} = 0,21^2/0,1 = 0,44 \text{ м/с}^2$; $a_r^\tau = \dot{v}_r = \ddot{s} = \text{const} > 0$, $a_r^\tau = 0,2\pi/3 = 0,21 \text{ м/с}^2$.

Векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r^\tau$ направлены по касательной в сторону увеличения координаты s .

Переносное движение для точки M — вращение пластинки вокруг оси Oz с угловой скоростью

$$\omega_{sz} = \dot{\phi} = 4 - 2t|_{t_1=1\text{ с}} > 0, \quad \omega_{sz}|_{t_1=1\text{ с}} = 2 \text{ рад/с}$$

и угловым ускорением

$$\varepsilon_{sz} = \dot{\omega}_{sz} = \ddot{\phi} = \text{const} < 0, \quad \varepsilon_{sz} = -2 \text{ рад/с}^2.$$

Векторы $\bar{\omega}_s$ и $\bar{\varepsilon}_s$ указаны на рис. 6.7, б. В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ точка M находится на расстоянии $h = R \sin 60^\circ = 0,086 \text{ м}$ от оси вращения и совпадает с той точкой пластинки, которая движется по окружности радиусом $h = 0,086 \text{ м}$. Следовательно, переносные скорость и ускорение точки M находим из выражений (6.17), (6.18) и (6.19):

$$v_s = \omega_s h = 2 \cdot 0,086 = 0,172 \text{ м/с};$$

$$\bar{a}_s = \bar{a}_s^n + \bar{a}_s^\tau, \quad a_s^n = \omega_s^2 h = 4 \cdot 0,086 = 0,344 \text{ м/с}^2;$$

$$|a_s^\tau| = |\varepsilon_{sz}| h = 2 \cdot 0,086 = 0,172 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{v}_s$ направлен по касательной к окружности радиусом h в направлении переносного вращения, вектор $\bar{a}_s^n$ — к оси вращения Oz , а вектор $\bar{a}_s^\tau$ (в соответствии с $\bar{\varepsilon}_s$) — противоположно вектору $\bar{v}_s$.

Как видно на рис. 6.7, б, векторы $\bar{v}_s$ и $\bar{a}_s^\tau$ параллельны оси OZ .

Ускорение Кориолиса, согласно (6.16),

$$\bar{a}_K = 2(\bar{\omega}_s \times \bar{v}_r), \quad a_K = 2|\bar{\omega}_s| \cdot |\bar{v}_r| \sin(\hat{\bar{\omega}_s}, \hat{\bar{v}_r}).$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$ $a_K = 2 \cdot 2 \cdot 0,21 \cdot \sin 30^\circ = 0,42 \text{ м/с}^2$.

Вектор $\bar{a}_K$ (рис. 6.7, б) направлен перпендикулярно к плоскости пластинки, содержащей векторы $\bar{\omega}_s$ и $\bar{v}_r$, так, что с конца вектора $\bar{a}_K$ поворот вектора $\bar{\omega}_s$ к $\bar{v}_r$ на наименьший угол виден происходящим против направления движения часовой стрелки.

Найдем абсолютные скорость и ускорение точки M . Известно, что

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_s.$$

Поскольку в рассматриваемом случае векторы $\bar{v}_s$ и $\bar{v}_r$ оказались взаимно перпендикулярными, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{0,21^2 + 0,172^2} = 0,27 \text{ м/с}.$$

Для определения абсолютного ускорения точки M найдем проекции всех векторов, входящих в выражение $\vec{a} = \vec{a}_r'' + \vec{a}_r' + \vec{a}_e'' + \vec{a}_e' + \vec{a}_K$, на оси $O'X$, $O'Y$ и $O'Z$:

$$a_x = a_r' \cos 60^\circ - a_r'' \sin 60^\circ - a_e'' = 0,21 \cdot \frac{1}{2} - 0,44 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,344 = -0,62 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = a_r' \sin 60^\circ + a_r'' \cos 60^\circ = 0,21 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,44 \cdot \frac{1}{2} = 0,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z = a_e' - a_K = 0,172 - 0,42 = -0,248 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{0,62^2 + 0,4^2 + 0,248^2} = 0,78 \text{ м/с}^2.$$

Теоремы о сложении скоростей и ускорений удобно применять в случаях, когда, например, известно абсолютное движение точки и требуется найти кинематические параметры переносного и относительного движений.

Пример 6.3. В мальтийском механизме (рис. 6.8, а) кривошип вращается вокруг оси $O(z)$, перпендикулярной плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \sqrt{2}$ рад/с. Палец D , неподвижно закрепленный на кривошипе, скользит вдоль паза диска и приводит его во вращение вокруг оси $O'(Z)$, параллельной оси $O(z)$.

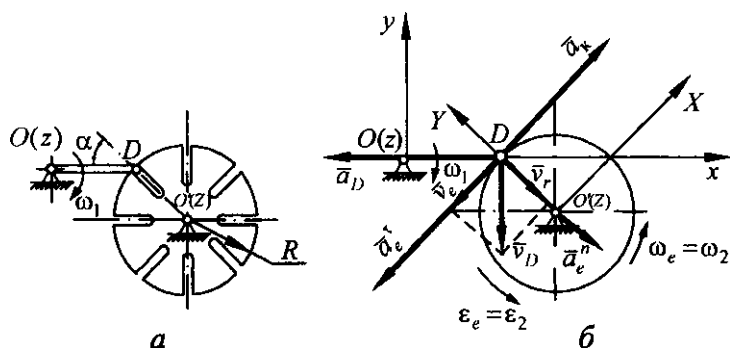


Рис. 6.8

Для показанного на рис. 6.8, а положения механизма определить угловую скорость и угловое ускорение диска, а также относительное ускорение пальца D относительно паза диска, если $O'D = OD = R = 0,2 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Свяжем неподвижную систему $Oxyz$ с опорой O , а подвижную систему $O'XYZ$ — с вращающимся диском (рис. 6.8, б). Принимая палец D за точку, рассмотрим движение точки D кривошипа как сложное, состоящее из относительного движения точки D по пазу диска и переносного движения — вращения диска вокруг оси $O'(Z)$.

В абсолютном движении точка D перемещается по окружности радиусом OD . Абсолютная скорость точки D

$$v_D = \omega_1 OD = \text{const}, \quad v_D = \sqrt{2} \cdot 0,2 = 0,2\sqrt{2} \text{ м/с}$$

направлена перпендикулярно радиусу OD в сторону вращения кривошипа.

Абсолютное ускорение точки D

$$\underline{\bar{a}}_D = \underline{\bar{a}}_D^n + \underline{\bar{a}}_D^{\tau},$$

но $\underline{\bar{a}}_D^{\tau} = \varepsilon_1 OD = 0$, поскольку $\varepsilon_1 = 0$ при $\omega_1 = \text{const}$; тогда ускорение

$$a_D = a_D^n = \omega_1^2 OD = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2$$

и направлено к оси вращения $O(z)$ (см. рис. 6.8, б). Таким образом, абсолютное движение точки D известно.

Получим теперь кинематические характеристики относительного и переносного движений. Относительное движение точки D — прямолинейное, следовательно, векторы $\underline{\bar{v}}_r$ и $\underline{\bar{a}}_r = \underline{\bar{a}}_r^{\tau}$ должны быть направлены вдоль паза. В переносном движении в заданном положении механизма точка D находится на окружности радиусом $O'D = R$, поэтому вектор скорости $\underline{\bar{v}}_e \perp O'D$, а переносное ускорение определяется выражением

$$\underline{\bar{a}}_e = \underline{\bar{a}}_e^n + \underline{\bar{a}}_e^{\tau}.$$

Воспользуемся теоремой о сложении скоростей

$$\underline{\bar{v}}_D = \underline{\bar{v}}_r + \underline{\bar{v}}_e.$$

Направления относительной $\underline{\bar{v}}_r$ и переносной $\underline{\bar{v}}_e$ скоростей известны, поэтому с учетом треугольника скоростей (рис. 6.9, а) можно записать

$$v_r = v_e = \frac{v_D}{\sqrt{2}} = 0,2 \text{ м/с}.$$

Тогда, поскольку $v_e = \omega_2 O'D = \omega_2 R$, угловая скорость диска

$$\omega_2 = \omega_e = v_e / R = 0,2 : 0,2 = 1 \text{ рад/с},$$

а направление дуговой стрелки ω_e соответствует направлению вращения вектора $\underline{\bar{v}}_e$ вокруг оси $O'(Z)$ (см. рис. 6.8, б).

Согласно теореме о сложении ускорений, в рассматриваемом случае получаем выражение

$$\underline{\bar{a}}_D = \underline{\bar{a}}_D^n = \underline{\bar{a}}_r + \underline{\bar{a}}_e^n + \underline{\bar{a}}_e^{\tau} + \underline{\bar{a}}_K. \quad (6.20)$$

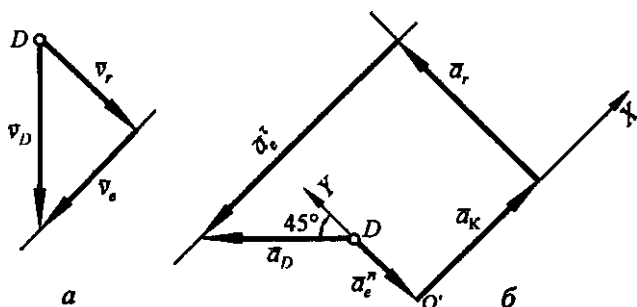


Рис. 6.9

Модуль и направление вектора $\vec{a}_D^n$ уже были определены. Модуль вектора $\vec{a}_e^n$

$$a_e^n = \omega_e^2 R = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с}^2,$$

направлен он к оси $O'(Z)$. Для вектора $\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ получаем

$$a_K = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Его направление установим, пользуясь правилом векторного произведения (см. рис. 6.8, б).

Направления векторов $\vec{a}_r$ и $\vec{a}_e^\tau \perp \vec{a}_e^n$ известны. Построив, согласно (6.20), многоугольник ускорений (рис. 6.9, б), запишем проекции векторов, входящих в (6.20), на оси $O'X$ и $O'Y$ соответственно:

$$-a_D \cos 45^\circ = 0 + 0 + a_K - \left| \vec{a}_e^\tau \right|; \quad (6.21)$$

$$a_D \cos 45^\circ = a_r - a_e^n + 0 + 0. \quad (6.22)$$

Из (6.21) находим

$$\left| \vec{a}_e^\tau \right| = a_K + a_D \cos 45^\circ = 0,4 + 0,4\sqrt{2} : 2 = 0,68 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, угловое ускорение диска

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_e = \frac{\left| \vec{a}_e^\tau \right|}{O'D} = \frac{\left| \vec{a}_e^\tau \right|}{R} = \frac{0,68}{0,2} = 3,4 \text{ рад/с}^2.$$

Направление дуговой стрелки ε_2 соответствует направлению вектора $\vec{a}_e^\tau$.

Из (6.22) находим

$$a_r = a_D \cos 45^\circ + a_e^n = 0,4\sqrt{2} : 2 + 0,2 = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

3. Переносное движение — плоскопараллельное (плоское).

В этом случае переносные скорость и ускорение точки M находим как скорость и ускорение точки тела, совершающего плоское движение. Пусть при этом за полюс выбрана точка C . Тогда

$$\vec{v}_M^e = \vec{v}_e = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}; \quad (6.23)$$

$$\vec{a}_M^e = \vec{a}_e = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^n + \vec{a}_{MC}^r, \quad (6.24)$$

где $v_{MC} = \omega_e CM$, $a_{MC}^n = \omega_e^2 CM$, $a_{MC}^r = \varepsilon_e CM$, CM — расстояние точки M до полюса C .

Пример 6.4. Диск 1 радиусом $R = 0,4$ м (рис. 6.10, а) катится без скольжения по прямолинейной направляющей 2, закон вращения диска $\varphi = 3t - t^2$ (φ в рад, t в с). Внутри паза 3 на диске 1 движется точка M по закону $M_0M = s(t) = 0,23(t^2 + t)$, где s в м, t в с.

Для изображенного на рис. 6.10, а в момент времени $t_1 = 1$ с положения диска 1, когда $\alpha = 30^\circ$, определить абсолютные скорость и ускорение точки M .

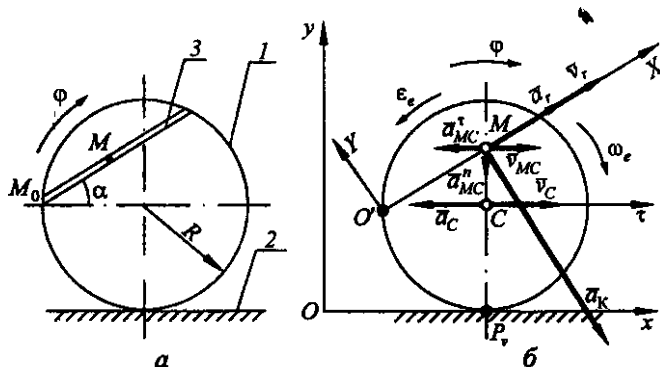


Рис. 6.10

Решение. Свяжем неподвижную систему отсчета Oxy с направляющей 2, а подвижную систему $O'X'Y'$ с диском 1 (рис. 6.10, б). Тогда абсолютное движение точки M будет состоять из относительного (прямолинейного) движения точки M по пазу 3 и переносного (плоского) движения диска 1. В относительном движении к моменту времени $t_1 = 1$ с точка M переместится на расстояние $M_0M|_{t_1=1} = 0,46$ м. Поскольку $O'M = M_0M = X_M(t) = s(t)$, то относительные скорость $\vec{v}_r$ и ускорение $\vec{a}_r$ найдем так:

$$v_{rx} = \dot{X}_M = \dot{s} = 0,23(2t + 1) > 0, \quad v_{rx}|_{t_1=1} = 0,69 \text{ м/с};$$

$$v_r = v_{rx} = 0,69 \text{ м/с}.$$

$$a_{rX} = v_{rX} = \ddot{X}_M = \text{const} > 0, \quad a_r = |a_{rX}| = 0,46 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$ направлены вдоль паза 3 в сторону возрастания координаты $X_M(t)$ (см. рис. 6.10, б).

Вычислим теперь угловые скорость и ускорение диска 1 в переносном движении по заданному закону $\varphi(t)$:

$$\omega_{1z} = \omega_{ez} = \dot{\varphi} = 3 - 2t \Big|_{t=1\text{ с}} > 0, \quad \omega_{ez} \Big|_{t=1\text{ с}} = 1 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = \ddot{\varphi} < 0, \quad \varepsilon_{ez} = -2 \text{ рад/с}^2.$$

Таким образом, при $t = 1$ с диск катится замедленно, т. е. направления дуговых стрелок ω_e и ε_e противоположны (см. рис. 6.10, б).

При отсутствии скольжения точка контакта диска 1 с направляющей 2 является МЦС диска. Поэтому для точки С центра диска несложно определить скорость $\bar{v}_C$ и ускорение $\bar{a}_C$:

$$v_C = \omega_1 CP_v = \omega_1 R, \quad v_C = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ м/с},$$

$$a_C = |a_C^t| = \left| \frac{dv_C}{dt} \right| = \left| \frac{d\omega_1}{dt} \right| R = |\varepsilon_1| R, \quad a_C = |\bar{a}_C^t| = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\bar{v}_C$ соответствует направлению вращения диска вокруг МЦС, а вектора $\bar{a}_C = \bar{a}_C^t$ — противоположно $\bar{v}_C$ при замедленном движении (см. рис. 6.10, б).

Переносные скорость и ускорение точки М найдем, согласно (6.23) и (6.24), приняв за полюс точку С:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}, \quad v_{MC} = \omega_e MC,$$

$$MC \Big|_{t=1\text{ с}} = OM \sin 30^\circ = 0,46 \cdot 0,5 = 0,23 \text{ м}, \quad v_{MC} \Big|_{t=1\text{ с}} = 1 \cdot 0,23 = 0,23 \text{ м/с};$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_C + \bar{a}_{MC}^n + \bar{a}_{MC}^t, \quad a_{MC}^n = \omega_e^2 MC = 1^2 \cdot 0,23 = 0,23 \text{ м/с}^2,$$

$$|a_{MC}^t| = \varepsilon_e MC = |\varepsilon_1| MC = 2 \cdot 0,23 = 0,46 \text{ м/с}^2.$$

Абсолютная скорость точки М

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \text{ или } \bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}.$$

Записав последнее равенство в проекциях на оси Ox и Oy (рис. 6.11, а):

$$v_x = v_r \cos 30^\circ + v_C + v_{MC} = 0,69\sqrt{3} : 2 + 0,4 + 0,23 = 1,23 \text{ м/с},$$

$$v_y = v_r \sin 30^\circ, \quad v_y = 0,69 \cdot 0,5 = 0,345 \text{ м/с},$$

находим

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v = \sqrt{1,23^2 + 0,345^2} = 1,28 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение точки М

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_K,$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^n + \vec{a}_{MC}^t + \vec{a}_K, \quad (6.25)$$

где $\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$, $a_K = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 0,69 = 1,38 \text{ м/с}^2$.

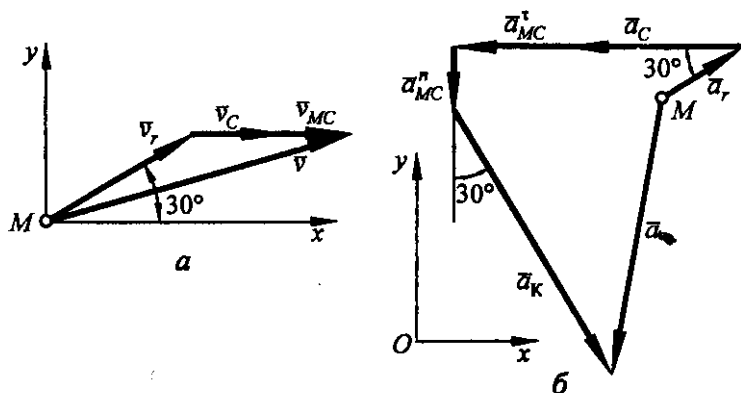


Рис. 6.11

Направление вектора $\vec{a}_K$ получим, повернув вектор $\vec{v}_r$ на 90° в направлении переносного вращения. На рис. 6.11, б изображен многоугольник ускорений точки M , построенный с учетом (6.25). Записав (6.25) в проекциях на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned} a_x &= a_r \cos 30^\circ - a_C - |a_{MC}^t| + a_K \sin 30^\circ = \\ &= 0,46\sqrt{3} : 2 - 0,8 - 0,46 + 1,38 \cdot 0,5 = -0,17 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_y = a_r \sin 30^\circ - a_{MC}^n - a_K \cos 30^\circ = 0,46 \cdot 0,5 - 0,23 - 1,38\sqrt{3} : 2 = -1,19 \text{ м/с}^2,$$

найдем абсолютное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0,17^2 + 1,19^2} = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

7.1. Теорема о сложении угловых скоростей при сложном движении твердого тела

Движение твердого тела так же, как и материальной точки, может быть рассмотрено одновременно в нескольких системах координат (см. гл. 6). Пусть одна из них является условно неподвижной, а другая движется относительно первой (рис. 7.1, а). Тогда движение тела относительно неподвижной системы координат (абсолютное движение) можно рассматривать как сложное, состоящее из движения тела относительно подвижной системы координат (относительное движение) и движения вместе с подвижной системой координат как единого целого относительно неподвижной системы координат (переносное движение). Таким образом, *сложное движение твердого тела представляется как результат сложения двух движений: относительного и переносного*^{*}.

Подобным образом движение твердого тела можно разложить на n составляющих движений при введении в рассмотрение n систем координат, из которых одну принимают условно неподвижной, а движение каждой из последующих определяют относительно предыдущей (рис. 7.1, б).

Теорема. При любом виде переносного и относительного движений твердого тела его абсолютная угловая скорость (в не-

^{*} В этой главе при рассмотрении задач на сложение соответствующих движений рассчитываются лишь угловые скорости тел и скорости их точек в заданный момент времени, считая, что ускорения могут быть определены, исходя из конкретного вида движения (абсолютное, относительное или переносное) твердого тела либо на основании рассмотрения сложного движения точек тела.

подвижной системе координат) равна сумме относительной и переносной угловых скоростей тела.

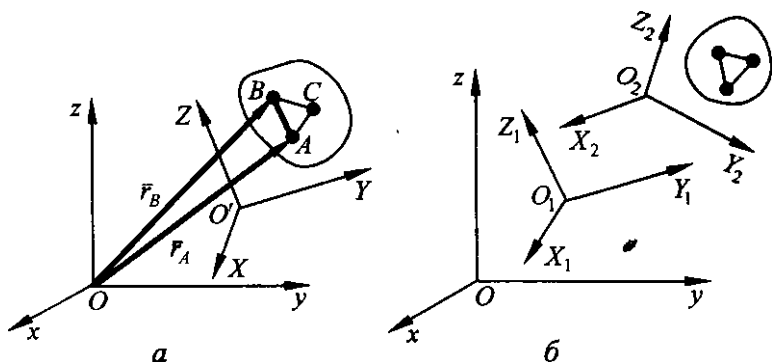


Рис. 7.1

Доказательство. Рассмотрим движение твердого тела относительно подвижной системы $O'XYZ$, которая в свою очередь движется относительно неподвижной системы $Oxyz$ (см. рис. 7.1, а). В каждом из рассматриваемых движений твердого тела связь скоростей его точек A и B в любой произвольный момент времени может быть установлена по формулам

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad \bar{v}_B^r = \bar{v}_A^r + \bar{v}_{BA}^r; \quad \bar{v}_B^e = \bar{v}_A^e + \bar{v}_{BA}^e, \quad (7.1)$$

где $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$; $\bar{v}_{BA}^r = \bar{\omega}_r \times \overline{AB}$; $\bar{v}_{BA}^e = \bar{\omega}_e \times \overline{AB}$; $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_e$, $\bar{\omega}_r$ — соответственно абсолютная, относительная и переносная угловые скорости движения тела.

Скорости точек A и B могут быть также определены, исходя из теоремы о сложении скоростей точек

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= \bar{v}_A^r + \bar{v}_A^e; \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_B^r + \bar{v}_B^e. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) последовательно несложно получить

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}, \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}^r + \bar{v}_{BA}^e = \bar{v}_A + \bar{\omega}_r \times \overline{AB} + \bar{\omega}_e \times \overline{AB}. \end{aligned}$$

Приравнявая правые части этих равенств, находим

$$\overline{\omega} \times \overline{AB} = \overline{\omega}_r \times \overline{AB} + \overline{\omega}_e \times \overline{AB} = (\overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e) \times \overline{AB}.$$

Так как вектор $\overline{AB}$ произвольный, то

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e. \quad (7.3)$$

Последнее и требовалось доказать.

В случае n составляющих движения тела, в каждой из которых угловая скорость равна $\overline{\omega}_i$, где $i=1, 2, \dots, n$, абсолютная угловая скорость тела определится как векторная сумма ее составляющих:

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_i.$$

Так как абсолютная угловая скорость тела не зависит от разложения движения на составляющие, то ее можно рассматривать как кинематический инвариант.

7.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

В случае вращательных относительного и переносного движений твердого тела, когда оси их вращений пересекаются в точке O (рис. 7.2), абсолютное движение будет движением твердого тела вокруг неподвижной точки O (сферическим движением) с угловой скоростью, определяемой согласно (7.3). Нетрудно убедиться, что скорости всех точек, лежащих на линии, по которой направлен вектор $\overline{\omega}$, равны нулю. В самом деле, например, скорость находящейся на этой линии точки A тела $\vec{v} = \overline{\omega} \times \vec{r} = 0$ (по свойству произведения коллинеарных векторов $\overline{\omega}$ и $\vec{r}$). Таким образом, прямая, на которой расположен вектор $\overline{\omega}$, является мгновенной осью вращения тела.

Скорость любой точки M тела в данном случае можно определить так:

$$\vec{v} = \overline{\omega} \times \vec{r}_M,$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

где $\vec{v}_e = \overline{\omega}_e \times \vec{r}_M$; $\vec{v}_r = \overline{\omega}_r \times \vec{r}_M$.

Модули составляющих, а также абсолютной скорости точки M равны модулям соответствующих векторных произведений и могут быть вычислены по формулам

$$v_e = \omega_e h_e; \quad v_r = \omega_r h_r; \quad v = \omega h,$$

где h_e , h_r , h — кратчайшие расстояния от точки M до соответствующих осей вращения (см. рис. 7.2).

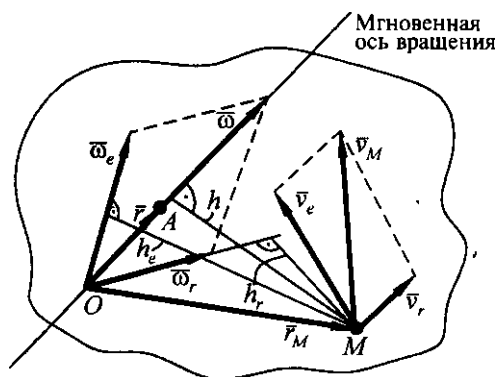


Рис. 7.2

7.3. Сложение вращений вокруг параллельных осей. Пара вращений

Если оси вращательных движений тела параллельны, то вектор результирующей угловой скорости $\bar{\omega}$ тела в неподвижной системе координат, определяемый согласно (7.3), будет коллинеарен векторам ее составляющих $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$. Положение мгновенной оси вращения тела как оси, проходящей через неподвижную в данный момент точку P тела, т. е. точку его МЦС в плоскости Π , перпендикулярной осям вращений (рис. 7.3), можно определить из следующего анализа. Относительная скорость точки P $\bar{v}_r = \bar{\omega}_r \times \overline{O_r P}$, а переносная $\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \overline{O_e P}$. Здесь O_r и O_e — точки пересечения плоскости Π с соответствующими осями вращения. Тогда скорость точки P в неподвижной системе координат $\bar{v}_p = \bar{v}_e + \bar{v}_r$, причем, согласно определению МЦС, $\bar{v}_p = 0$. Отсюда следует $\bar{v}_e = -\bar{v}_r$, так что $v_e = v_r$ и $\omega_e O_e P = \omega_r O_r P$.

В зависимости от взаимного расположения и численного значения векторов $\bar{\omega}_r$ и $\bar{\omega}_e$ можно выделить три случая сложения вращательных движений.

1. При совпадении направлений векторов $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$ абсолютное движение будет плоским (см. рис. 7.3).

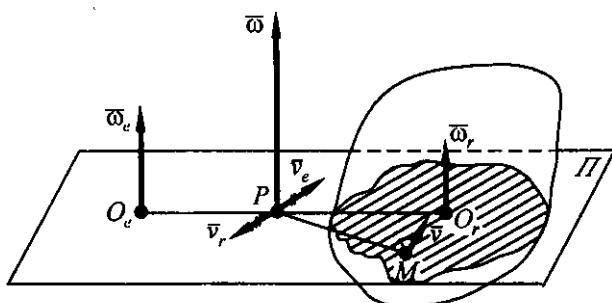


Рис. 7.3

Абсолютная угловая скорость в этом случае будет иметь направление, совпадающее с направлениями ее составляющих, а ее модуль $\omega = \omega_r + \omega_e$.

Точка P , через которую проходит мгновенная ось вращения тела, лежит на отрезке, соединяющем точки O_r и O_e . При этом $O_e O_r = O_r P + O_e P$ и положение точки P можно найти из пропорции

$$\frac{\omega_e}{O_r P} = \frac{\omega_r}{O_e P} = \frac{\omega}{O_e O_r}. \quad (7.4)$$

Скорость любой точки тела, например M , в данном случае может быть найдена по формуле $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{PM}$, а ее модуль $v = \omega h_M$, где h_M — кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси вращения, проходящей через точку P .

2. При противоположных направлениях векторов $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$, когда $\omega_r \neq \omega_e$, абсолютное движение, как и в первом случае, будет плоским (рис. 7.4).

Абсолютная угловая скорость при этом будет иметь направление, совпадающее с направлением большей по модулю составляющей угловой скорости, а ее модуль $\omega = |\omega_r - \omega_e|$.

Точка P , через которую проходит мгновенная ось вращения тела, лежит в плоскости Π , перпендикулярной осям вращатель-

ных движений, на прямой, проходящей через точки O_e и O_r ; расположена она внешним образом по отношению к этим точкам со стороны той точки, через которую проходит ось вращения движения с большей угловой скоростью. При этом

$$O_e P = -O_e O_r + O_r P, \text{ если } \omega_e > \omega_r;$$

$$O_r P = -O_e O_r + O_e P, \text{ если } \omega_e < \omega_r.$$

Пропорции для нахождения положения точки P имеют вид (7.4).

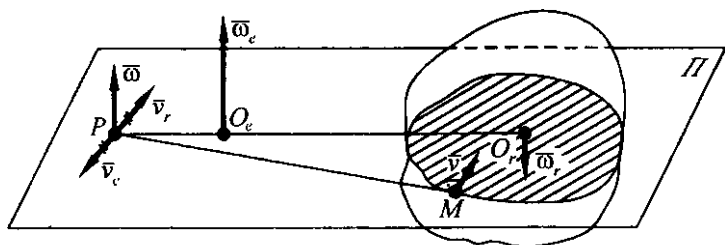


Рис. 7.4

3. При противоположных направлениях векторов $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$ и равенстве их модулей ($\omega_r = \omega_e$), если условие $\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r$ выполняется на отрезке времени $t_2 - t_1$, абсолютное движение будет поступательным*. Такой случай сложения вращательных движений называется *парой вращений*.

Действительно, в данном случае $\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r$, так что $\bar{\omega} = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r = 0$, и для любой точки тела справедливы соотношения

$$\bar{v} = \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_r \times \bar{r}_2 = \bar{\omega}_e \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \bar{\omega}_e \times \overline{O_e O_r} = \bar{\omega}_r \times \overline{O_r O_e};$$

$$v = \omega_e O_e O_r = \omega_r O_e O_r,$$

где $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ — радиус-векторы точки, проведенные из O_e и O_r соответственно.

Следовательно, скорости всех точек тела в данном случае одинаковы и равны скорости поступательного движения тела.

* Если условие $\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r$ выполняется лишь в момент времени $t = t_1$, абсолютное движение будет мгновенным поступательным движением.

Примером такого движения может служить движение кабины колеса обозрения (рис. 7.5). Кабина поворачивается вокруг оси подвеса на ободе колеса относительно системы координат $O'XY$, связанной с колесом, на угол φ_r с угловой скоростью ω_r , а поворот подвижной системы координат $O'XY$ вместе с колесом относительно системы координат Oxy , связанной с неподвижным основанием, на угол φ_e происходит с угловой скоростью ω_e . Очевидно, что $\varphi_e = \varphi_r$, а направления изменения этих углов противоположны. Отсюда следует, что переносная и относительная угловые скорости равны по модулю и противоположны по направлению. В результате движение кабины является поступательным ($\omega = 0$), поэтому скорости всех ее точек одинаковы и равны скорости движения самой кабины $\bar{v}_{O'} = \bar{v}_A = \bar{v}$, а ее модуль $v = \omega_e OO' = \omega_r OO'$.

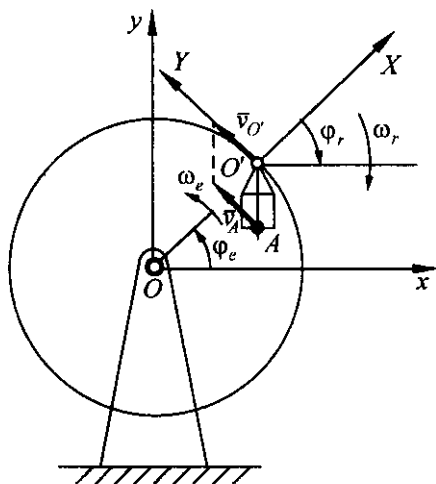


Рис. 7.5

7.4. Сложение поступательных движений

Если переносное и относительное движения твердого тела в его сложном движении являются поступательными (мгновенно-поступательными), т. е. $\omega_r = \omega_e = 0$, то абсолютное движение твердого тела будет также поступательным (мгновенно-поступательным).

Очевидно, что в данном случае в соответствии с (7.3) $\omega \neq 0$ и скорость абсолютного поступательного движения тела и принадлежащих ему точек определится в виде векторной суммы скоростей составляющих поступательных движений тела, т. е. $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ (рис. 7.6).

Все это справедливо и в случае n поступательных составляющих движений. Абсолютное движение будет также поступательным движением со скоростью, определяемой по формуле

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i,$$

где $\bar{v}_i$ — скорость i -го составляющего поступательного движения тела.

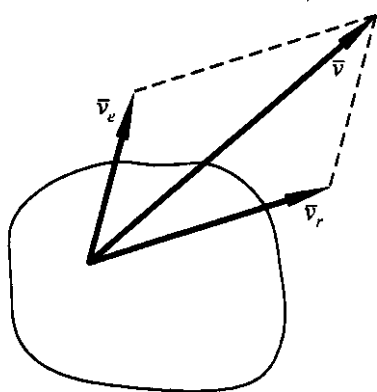


Рис. 7.6

7.5. Сложение поступательного и вращательного движений

Пусть переносное движение тела — поступательное со скоростью $\bar{v}_e$, а относительное — вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_r$. Тогда абсолютная угловая скорость тела $\bar{\omega} = \bar{\omega}_r$.

В зависимости от взаимного расположения векторов $\bar{v}_e$ и $\bar{\omega}_r$ рассмотрим два отдельных случая.

1. Скорость переносного поступательного движения перпендикулярна оси относительного вращения ($\bar{v}_e \perp \bar{\omega}_r$).

Выделим плоскость Π , перпендикулярную оси относительного вращения тела и пересекающуюся с ней в точке O (рис. 7.7). Скорости всех точек сечения тела этой плоскостью будут лежать в данной плоскости, а скорости других точек тела — в параллельных ей плоскостях. Таким образом, можно утверждать, что тело совершает в данном случае *плоскопараллельное* движение и

* Общий случай сложения переносного поступательного и относительного вращательного движений здесь не рассматривается.

в плоскости Π имеется точка P (МЦС), скорость которой равна нулю. Для этой точки $\vec{v}_P = \vec{v}_e + \vec{v}_r = 0$, так что $\vec{v}_e = -\vec{v}_r$ (здесь $\vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{OP}$). Тогда $v_e = \omega_r OP$ и, следовательно,

$$OP = v_e / \omega_r.$$

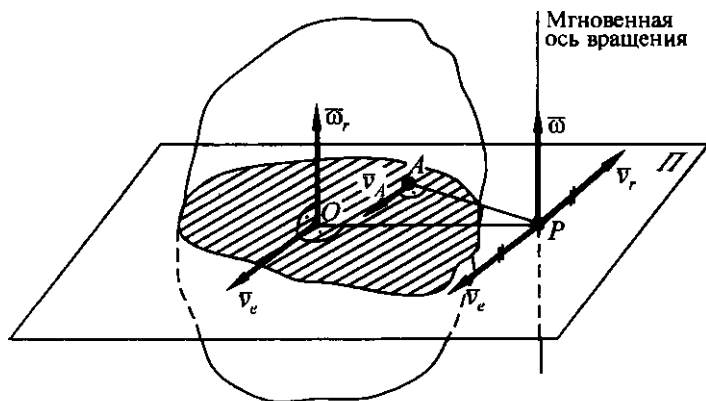


Рис. 7.7

Точка P находится в плоскости Π на линии, перпендикулярной к вектору $\vec{v}_e$, на расстоянии OP от точки O . Очевидно, что другие точки тела, имеющие нулевую скорость, будут находиться на оси, перпендикулярной плоскости Π в точке P . Эта ось является мгновенной осью вращения твердого тела.

Таким образом, в данном случае абсолютное движение твердого тела есть вращение с угловой скоростью, равной по модулю и одинаковой по направлению с угловой скоростью относительного вращения вокруг мгновенной оси вращения. Эта ось параллельна оси относительного вращения и находится от нее на расстоянии, равном отношению модуля скорости поступательного переносного движения к модулю угловой скорости относительного вращательного движения.

Скорость любой точки тела, например A , может быть определена тогда по формуле $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{PA}$, а ее модуль $v = \omega h_A$, где h_A — кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси вращения тела.

Примером рассмотренного выше сложения движений может служить плоское движение твердого тела (см. гл. 4), которое можно представить в виде суммы поступательного движения тела вместе с полюсом (переносное движение) и вращения вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной к плоскости движения (относительное движение).

2. Относительное движение есть вращение вокруг оси, параллельной скорости переносного поступательного движения ($\vec{\omega}_r \parallel \vec{v}_e$) (рис. 7.8).

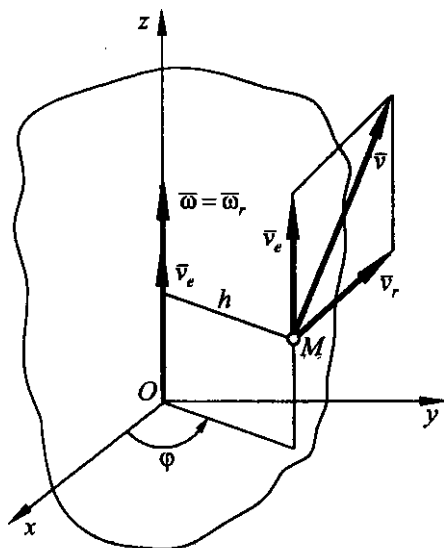


Рис. 7.8

Абсолютное движение тела в данном случае называется **винтовым движением**, или **кинематическим винтом**. Оно не сводится к какому-либо другому более простому эквивалентному движению и характеризуется собственными параметрами и отличительными особенностями.

Ось относительного вращения называют **осью винта**. **Параметром винтового движения** называют величину, равную отношению модуля переносной скорости поступательного движения тела к модулю относительной угловой скорости его вращения, $p = v_e / \omega_r$. В общем случае $v_e = |ds / dt|$, где $s = s(t)$ —

закон перемещения тела вдоль оси винтового движения; $\omega = \omega_r = |d\varphi / dt|$, где φ — угол относительного поворота тела вокруг оси винта.

Таким образом, параметр p численно равен расстоянию, на которое переместится тело при винтовом движении вдоль оси винта при повороте на один радиан (при данных значениях v_e и ω_r), и может быть вычислен по формуле

$$p = |ds / d\varphi|.$$

При совпадении направлений векторов $\bar{v}_e$ и $\bar{\omega}$ винтовое движение (винт) называется *правым*, а при противоположных их направлениях — *левым*.

Траекторией любой точки M тела является винтовая линия. Скорость точки, удаленной от оси винта на расстояние h , складывается из ее скоростей в переносном и относительном движениях: $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$, где $\bar{v}_r = \bar{\omega} \times \bar{r}$, а $v_r = \omega h$, причем скорости $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$ взаимно перпендикулярны, так что $v = \omega \sqrt{p^2 + h^2}$.

В случае $v_e = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ параметр p постоянен, и для характеристики движения можно использовать понятие *шаг винта*, который равен смещению тела вдоль оси винта при повороте на один оборот:

$$H = 2\pi p = 2\pi v_e / \omega.$$

Уравнения движения произвольной точки M тела по винтовой линии в декартовой системе координат (см. рис. 7.8) в данном случае будут иметь вид

$$x = h \cos \varphi = h \cos \omega t;$$

$$y = h \sin \varphi = h \sin \omega t;$$

$$z = v_e t.$$

Глава 8

АКСИОМЫ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

Статика — раздел механики, в котором изучают условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил, и операции преобразования одних систем сил в другие.

При изучении равновесия используют принцип неизменности геометрических форм и размеров твердых тел, поскольку их изменение под действием сил обычно мало по сравнению с первоначальными размерами. Поэтому в статике материальные тела считают абсолютно твердыми.

Понятие «сила» в механике является одним из важнейших. *Силой* называется векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного материального тела на другое. Вектор-сила характеризуется числовым значением, или модулем, и направлением действия. Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ) является 1 ньютон (1 Н); применяется и более крупная единица 1 килоньютон (1 кН = 1000 Н).

Вектор-силу обозначают какой-либо буквой со знаком вектора, например, $\vec{F}$, а модуль силы — символом $|\vec{F}|$ или просто буквой F . Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Приведем основные определения статики.

Системой сил называется совокупность сил, действующих на твердое тело.

Если систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом механического состояния тела, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной*, или *эквивалентной нулю*.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Силы, действующие на данное тело или систему тел, можно разделить на *внешние* — силы, действующие на данную систему со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему, и *внутренние* — силы, с которыми действуют друг на друга тела, входящие в рассматриваемую систему.

Механической системой называется любая совокупность взаимодействующих материальных точек.

8.1. Аксиомы статики

1. Если на свободное твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой в противоположные стороны.

2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил (рис. 8.1).

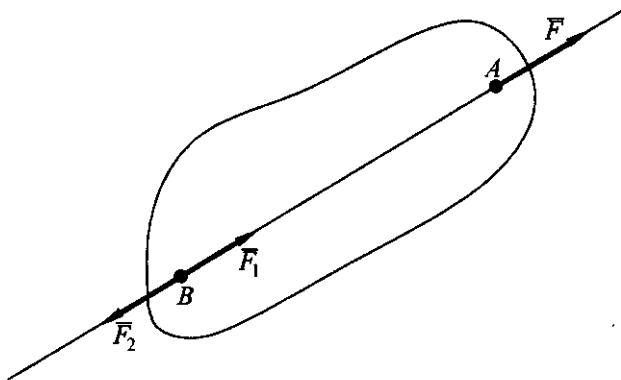


Рис. 8.1

Следствие. Не изменяя действия силы на абсолютно твердое тело, силу можно переносить по линии ее действия в любую точку тела.

В самом деле, если в точке *B* (см. рис. 8.1) приложить уравновешенную систему сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) и принять $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $\vec{F}_1 = \vec{F}$,

то можно образовать новую уравновешенную систему сил ($\bar{F}$, $\bar{F}_2$) и отбросить ее. В результате на тело будет действовать только одна сила $\bar{F}_1 = \bar{F}$, но приложенная не в точке A , а в точке B . Вектор, изображающий силу $\bar{F}$, называется *скользящим*.

Сформулированные положения справедливы только для сил, действующих на абсолютно твердое тело. В этом нетрудно убедиться, рассмотрим, например, равновесие тонкого длинного стержня под действием сжимающей силы $\bar{F}$ (рис. 8.2). Для равновесия абсолютно твердого стержня безразлично, где приложена сила — в точке A или B . Для равновесия упругого стержня это далеко не так. Сила, приложенная в точке A , может вызвать потерю устойчивости прямого стержня и способствовать его изгибу, тогда как сила, приложенная в точке B , таким действием обладать не будет. Переносить силу вдоль линии действия нельзя и тогда, когда требуется определить внутренние силы в какой-либо части конструкции. Например, внутренняя сила в сечении $I-I$ равна $\bar{F}$, когда внешняя сила приложена в точке A , и нулю, если внешняя сила перенесена в точку B .

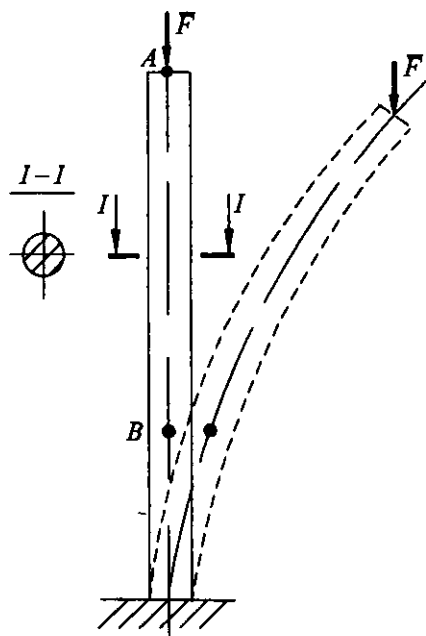


Рис. 8.2

3. При всяком действии одного материального тела на другое со стороны другого тела имеется противодействие, такое же по величине, но противоположное по направлению. Другими словами, силы взаимодействия двух тел всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Эту аксиому называют законом равенства действия и противодействия. Он был

сформулирован Ньютоном и принят в качестве третьего основного закона механики.

Например, груз лежит на поверхности Земли и давит на нее силой, равной своему весу $\bar{P}$. Земля действует на груз такой же силой $\bar{P}'$, но направленной в противоположную сторону. Сила $\bar{P}$ приложена к Земле, а $\bar{P}'$ — к грузу. Таких примеров можно привести сколь угодно много. Но нужно твердо усвоить, что силы взаимодействия двух тел не создают уравновешенную или эквивалентную нулю систему (хотя равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны), так как приложены к разным телам. Действие одного тела может вызвать движение другого, например электровоз вызывает движение железнодорожного состава, действуя на него силой $\bar{F}$, в то время как железнодорожный состав сопротивляется этому движению и действует на электровоз силой $-\bar{F}$.

Следствие. Сумма всех внутренних сил всегда равна нулю. Действительно, разделяя мысленно твердое тело или механическую систему на отдельные части и принимая во внимание, что все они взаимодействуют между собой с силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны, приходим к выводу о равенстве нулю суммы всех внутренних сил. Это означает, что при рассмотрении условий равновесия тела или системы тел нужно учитывать только внешние силы.

4. Две силы, приложенные к твердому телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах. Это так называемое правило параллелограмма сил. Сила $\bar{R}^*$ эквивалентна системе двух сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. Вектор $\bar{R}^*$ равен геометрической сумме векторов $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, т. е. $\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

5. Механическое состояние системы не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей. Эту аксиому называют аксиомой о связях.

Материальные тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называют **связями**.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется *силой реакции связи*, или просто *реакцией связи*.

8.2. Основные виды связей и их реакции

Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Правильное определение направлений реакций связей играет важную роль при решении задач механики. Поэтому рассмотрим подробно, как направлены реакции некоторых основных видов связей. Поверхности связей полагаем идеально гладкими, т. е. такими, в которых не возникают силы трения. Подобные связи называют *идеальными*.

1. Гладкая поверхность (плоскость). Реакция $\vec{R}$ в случае гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям связи и тела в точке их контакта и приложена к телу. На рис. 8.3 показаны некоторые примеры направления реакций.

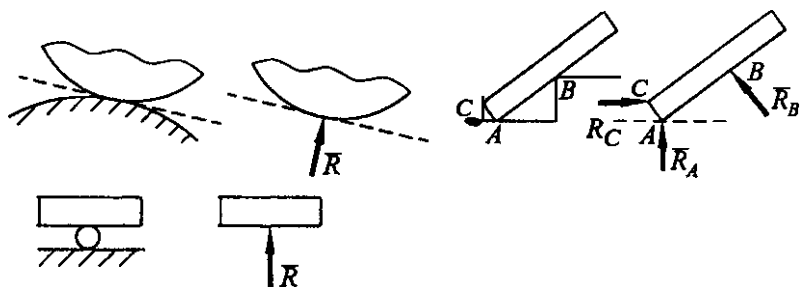


Рис. 8.3

2. Нить. Этим термином обозначают цепи, тросы, канаты, которые могут воспринимать только силы растяжения. Нить считается гибкой и нерастяжимой. Реакция нити на тело направлена по касательной к нити в точке ее закрепления (рис. 8.4).

3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Цилиндрический шарнир представляет собой цилиндрическую втулку, в которой находится ось вращения (рис. 8.5). Он не воспринимает осевой силы, его реакция находится в плоскости Ax , перпенди-

кулярной оси шарнира. Реакция $\bar{R}_A$ может быть направлена по любому радиусу шарнира в плоскости Axy .

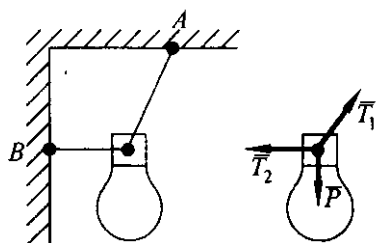


Рис. 8.4

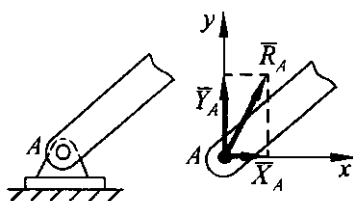


Рис. 8.5

4. Сферический шарнир. Он позволяет телу поворачиваться, но не разрешает линейные перемещения. Реакция сферического шарнира $\bar{R}$ приложена к его центру и может быть направлена по любому радиусу шарнира (рис. 8.6).

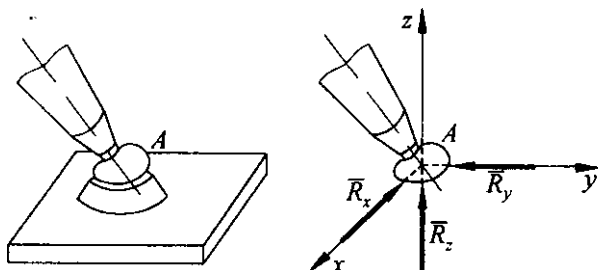


Рис. 8.6

5. Подпятник. Он отличается от цилиндрического шарнира тем, что кроме радиальных сил может воспринимать и осевую силу (рис. 8.7). Реакция подпятника, как и реакция сферического шарнира, может иметь любое направление.

6. Невесомый стержень с шарнирами на концах (рис. 8.8). Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирами на концах направлена вдоль оси стержня. В отличие от нити такой стержень может передавать как силы растяжения, так и силы сжатия.

Если связью является криволинейный стержень, то его реакция будет направлена по прямой AB , соединяющей шарниры A и B .

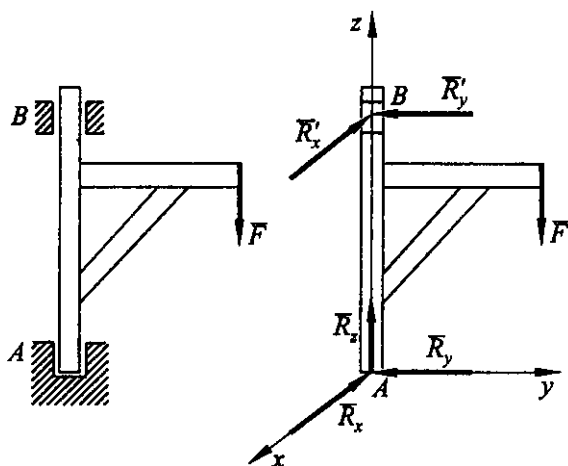


Рис. 8.7

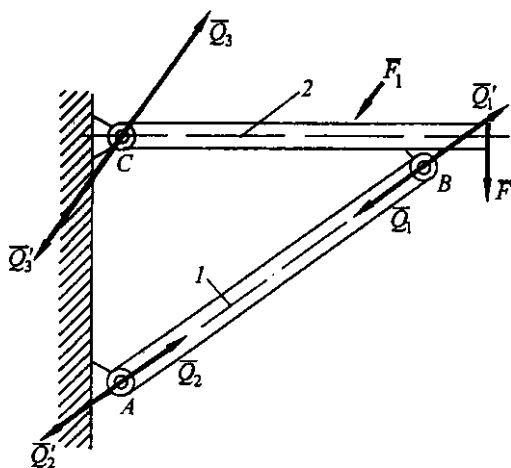


Рис. 8.8

При решении задач статики реакции связей обычно являются неизвестными и подлежат определению, а зная силы, действующие на систему, и силы реакций связей, можно определить внутренние силы в телах, необходимые для расчета на прочность.

На рис. 8.9 и 8.10 показаны реакции связей соответственно для стержня AB , опирающегося в точке A на гладкую стену и подвешенного в точке B к стене нитью, и полукруглой плоской арки, опирающейся в точке A на подвижный шарнир (каток), а в точке B — на неподвижный шарнир.

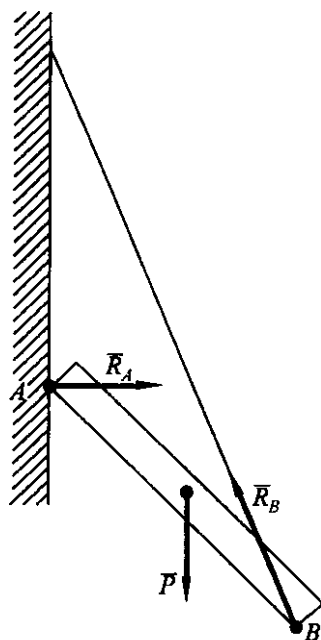


Рис. 8.9

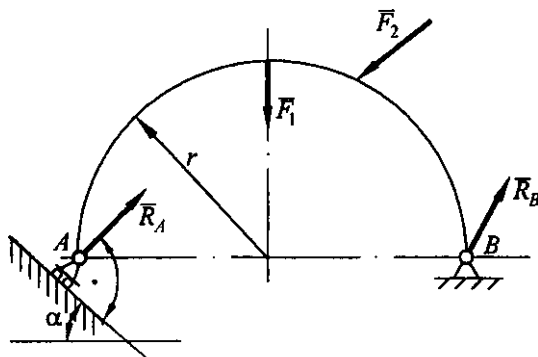


Рис. 8.10

8.3. Система сходящихся сил

Равнодействующая системы сходящихся сил

Систему сил, приложенных к твердому телу, называют **системой сходящихся сил**, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке.

Пусть на тело действуют силы, линии действия которых расположены в пространстве и пересекаются в одной точке O (рис. 8.11, а). Перенеся силы вдоль линий действия в эту точку и сложив их последовательно по правилу параллелограмма, найдем равнодействующую $\vec{R}^*$ данной системы сил (рис. 8.11, б):

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

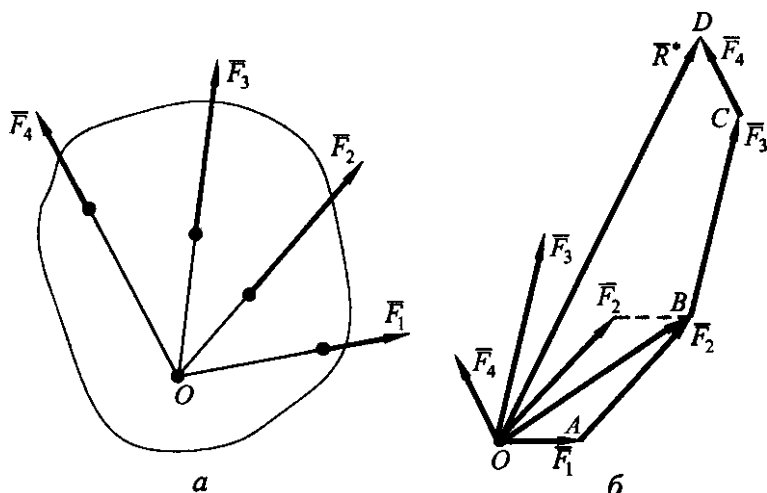


Рис. 8.11

В общем случае для системы сходящихся сил:

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k. \quad (8.1)$$

Результат сложения векторов не зависит от последовательности их сложения. Графическое сложение векторов возможно и без построения параллелограммов сил. Для этого нужно

от конца вектора одной силы отложить вектор другой силы, затем от его конца отложить вектор какой-либо третьей силы и т. д., пока не будут отложены все силы. Для нахождения равнодействующей системы сил нужно соединить начало первого вектора с концом последнего (см. рис. 8.11, б). Многоугольник $OABCD$ называется **силовым многоугольником**.

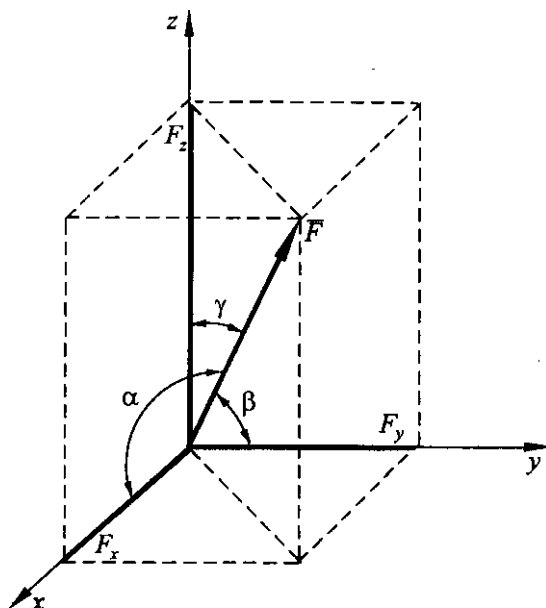


Рис. 8.12

Таким образом, *система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей силе, которую можно определить замыкающим вектором $\bar{R}^*$ силового многоугольника, построенного на векторах-силах системы сходящихся сил*. Другими словами, равнодействующая системы сходящихся сил равна их геометрической сумме.

Аналитический способ задания и сложения сил

Аналитический способ решения задач статики основывается на представлении вектора силы в виде трех его составляющих по

направлениям осей прямоугольной декартовой системы координат. Будем пользоваться правой системой координат (рис. 8.12). В этой системе координат

$$\begin{aligned}\bar{F} &= F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}; \\ F_x &= F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma; \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.\end{aligned}$$

Проекция вектора $\bar{F}$ на координатную ось есть скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Если равнодействующая

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k, \quad \bar{F}_k = F_{kx} \bar{i} + F_{ky} \bar{j} + F_{kz} \bar{k},$$

то

$$R_x^* = \sum_{k=1}^N F_{kx}, \quad R_y^* = \sum_{k=1}^N F_{ky}, \quad R_z^* = \sum_{k=1}^N F_{kz}. \quad (8.2)$$

Таким образом, проекция вектора равнодействующей системы сил на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций векторов (составляющих) сил на ту же ось.

Модуль равнодействующей

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2}, \quad (8.3)$$

а ее направление можно определить через направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z^*}{R^*}. \quad (8.4)$$

Кроме сложения сил иногда возникает необходимость их разложения. Разложить данную силу на несколько составляющих означает найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Задача разложения является обратной задаче сложения сил. Разложить вектор $\bar{R}$ по двум заданным направлениям на плоскости или по трем направлениям в пространстве труда не представляет. В первом случае вектор $\bar{R}$ будет диагональю параллелограмма, во втором — диагональю параллелепипеда, ребра которого параллельны заданным направлениям.

Условия равновесия системы сходящихся сил

Так как система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей, то тело под действием такой системы сил будет находиться в равновесии тогда, когда равнодействующая равна нулю, т. е. **силовой многоугольник должен быть замкнут**. Условия равновесия в векторной и аналитической форме имеют соответственно следующий вид:

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k = 0; \quad (8.5)$$

$$R_x^* = \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \quad R_y^* = \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; \quad R_z^* = \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0. \quad (8.6)$$

Равенства (8.5) и (8.6) содержат заданные и неизвестные величины. Их называют **уравнениями равновесия**.

Последовательность решения задач статики

Для решения задач статики целесообразна следующая методика.

1. Выбор тела (или тел), равновесие которого должно быть рассмотрено.

2. Освобождение от связей, т. е. действие связей нужно заменить действием сил.

3. Составление уравнений равновесия. После освобождения от связей выбранное тело (или система тел) стало «свободным». На него действуют заданные силы и неизвестные силы реакций. Для свободного тела, находящегося в равновесии, записывают уравнения равновесия в векторной (8.5) или в аналитической (8.6) форме.

4. Решение уравнений равновесия. Решение рекомендуется, как правило, проводить в общем виде (алгебраически): получить формулы для искомых величин, подставить числовые значения и найти результат. Решение в общем виде проще проверить и, если допущены ошибки, то обнаружить их.

5. Качественная оценка решения. Полученным результатам целесообразно дать качественную оценку, т. е. проанализировать их соответствие физическому представлению о распределении сил. Такая оценка на практике иногда помогает обнаружить

ошибки. Например, если стержень AB (рис. 8.13), поддерживающий балку, в результате решения задачи получился растянутым, то такое решение ошибочно, так как на самом деле стержень сжат.

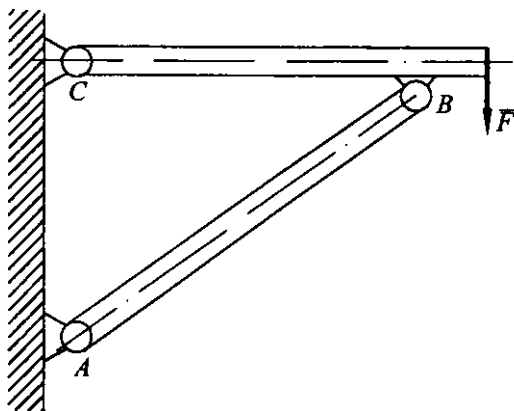


Рис. 8.13

Приведем примеры решения таких задач.

Пример 8.1. Между вертикальной стенкой и заделанной в нее пластиной находится цилиндр, вес которого P (рис. 8.14, а). Определить силы давления цилиндра на стенку и пластину.

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра. Для этого освободим его от связей. Приложим к центру тяжести цилиндра силу P , а действие связей заменим действием сил. Силы $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ реакций связей должны быть направлены по нормальным к поверхностям в точках контакта (рис. 8.14, б).

Важно правильно наметить линию действия реакции связи. Если линии действия всех сил пересекаются в одной точке, то система сил будет системой сходящихся сил. Условием равновесия является равенство нулю равнодействующей системы сил:

$$\bar{R}^* = \bar{P} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 0.$$

Построим векторный треугольник (рис. 8.14, в) и найдем

$$N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_2 = P / \sin \alpha$$

(при малом угле α N_1 и N_2 могут быть очень большими).

По условию задачи требуется найти силы давления цилиндра на стенку и пластину. Применив закон действия и противодействия, получаем силы $-\bar{N}_1$ и $-\bar{N}_2$, показанные на рис. 8.14, г.

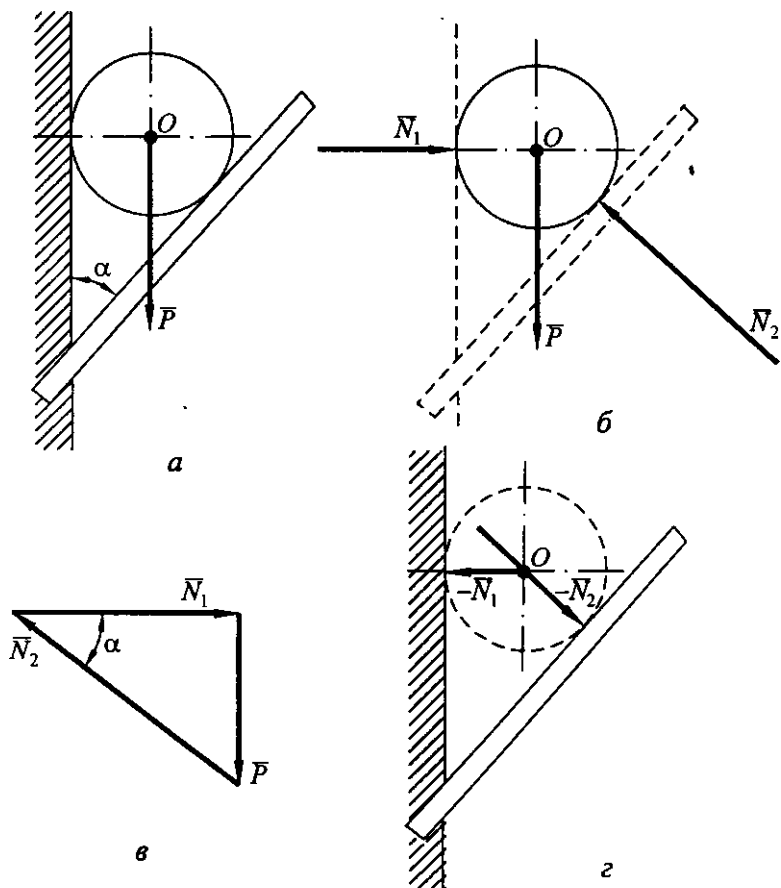


Рис. 8.14

Пример 8.2. Нить, на концах которой закреплены грузы весом P_1 и P_2 , перекинута через блоки A и B (рис. 8.15, а). В точке O к нити подвешен груз, вес которого $P = 1000$ Н. Система грузов находится в равновесии при $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Пренебрегая трением на осях блоков, определить вес грузов P_1 и P_2 .

Решение. Силы натяжения $\bar{T}$, $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ нити грузами равны по модулю их весам. В данной задаче блоки не изменяют значений сил, а изменяют только их направления. В точке O пересекаются линии действия всех сил ($\bar{T}$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$), поэтому рассмотрим ее равновесие (рис. 8.15, б).

Для составления условий равновесия воспользуемся их аналитической формой (8.6):

$$R_x^* = \sum_{k=1}^{k=3} F_{kx} = 0, \quad R_y^* = \sum_{k=1}^{k=3} F_{ky} = 0.$$

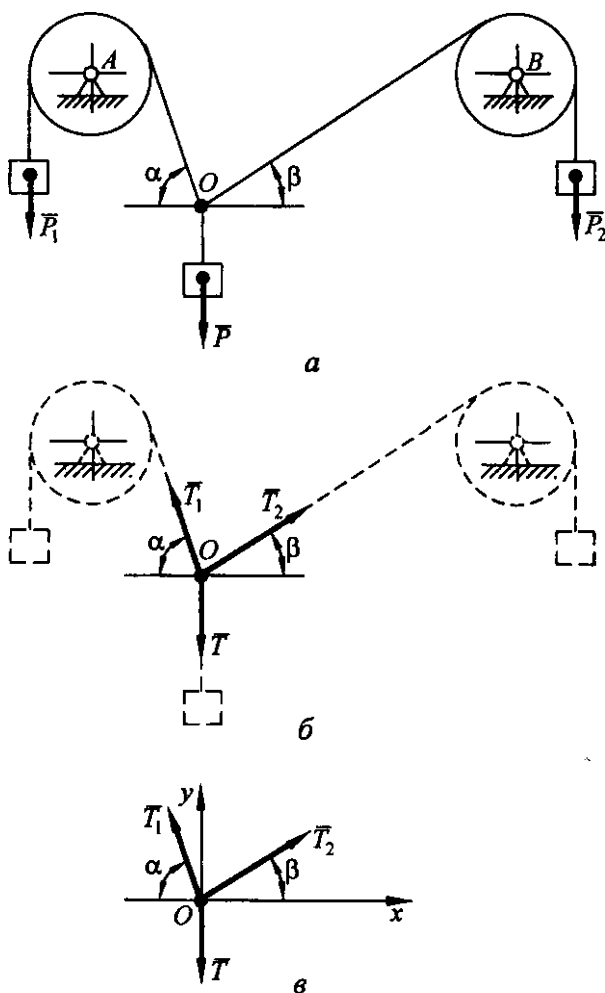


Рис. 8.15

Построим систему координат с началом в точке O (рис. 8.15, в). Проецируя силы на оси координат, находим

$$R_x^* = T_2 \cos \beta - T_1 \cos \alpha = 0, \quad R_y^* = -T + T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = 0.$$

Откуда

$$T_1 = T_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}, \quad T = T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta,$$

или

$$T = T_2 \left[\sin \alpha \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + \sin \beta \right].$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$T_2 = P_2 = 500 \text{ Н}; \quad T_1 = P_1 = 866 \text{ Н}.$$

Положительные значения $T_1 = P_1$ и $T_2 = P_2$ свидетельствуют о том, что их направления выбраны правильно. Верно и то, что $P_1 > P_2$, так как в противном случае не будет соблюдаться условие равновесия $R_x^* = 0$.

При решении задач статики иногда удобно пользоваться *теоремой о трех силах*. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство. Сложив две из трех сил, например $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}^*$, приходим к выводу, что тело находится в равновесии под действием двух сил $\vec{F}_3$ и $\vec{R}^*$. Следовательно, силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}^*$ лежат на одной прямой, а линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку пересечения линий действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, что и требовалось доказать.

Пример 8.3. Однородный стержень весом P и длиной $4l$ опирается на неподвижный цилиндрический шарнир A и упор B (рис. 8.16, а). Угол наклона стержня к горизонту $\alpha = 30^\circ$, $AB = 3l$. Определить реакции связей.

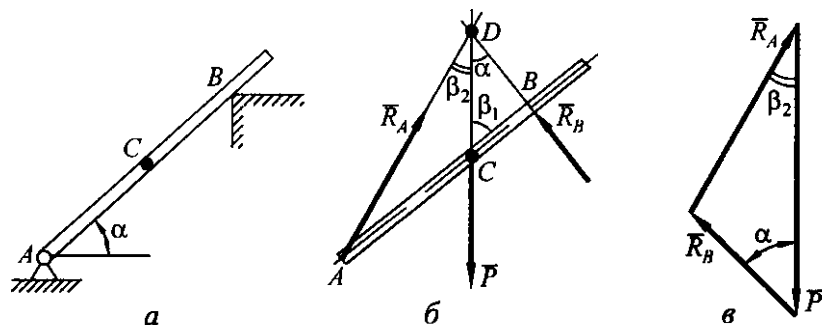


Рис. 8.16

Решение. Рассмотрим равновесие стержня. Реакцию связи неподвижного шарнира вместо двух составляющих представим одной силой $\bar{R}_A$, направленной в точку D пересечения линий действия сил $\bar{P}$ и $\bar{R}_B$ (рис. 8.16, б). Из геометрических соображений (см. рис. 8.16, а, б) находим $\beta_1 = 60^\circ$ и $\beta_2 = 30^\circ$, а из силового треугольника (рис. 8.16, в) определяем

$$R_A = P \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad R_B = P \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

8.4. Момент силы относительно точки и относительно оси

Момент силы относительно точки

Пусть к телу в точке A приложена сила $\bar{F}$ (рис. 8.17). Тогда **моментом силы $\bar{F}$ относительно точки O** называется вектор $\bar{M}_O(\bar{F})$, приложенный в точке O перпендикулярно плоскости треугольника OAB и равный

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (8.7)$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A приложения силы $\bar{F}$.

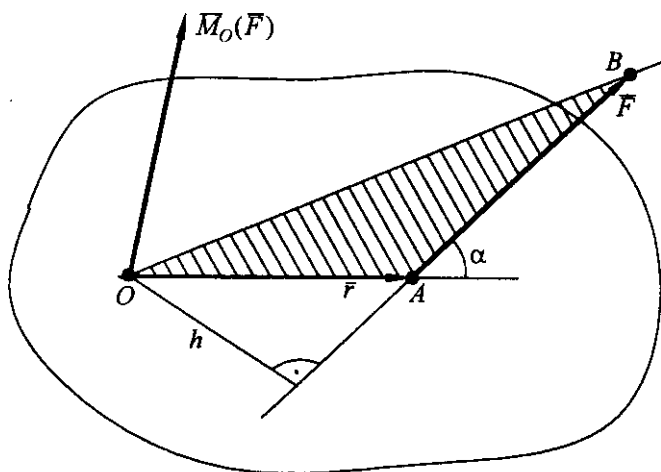


Рис. 8.17

Модуль вектора $\overline{M}_O(\overline{F})$ равен произведению модуля силы $\overline{F}$ на расстояние h от точки O до линии действия силы, которое называется плечом силы относительно точки O , т. е.

$$|\overline{M}_O(\overline{F})| = |\overline{F}| \cdot |\overline{r}| \sin \alpha = Fh.$$

Нетрудно заметить, что радиус-вектор $\overline{r}$ из точки O может быть проведен не только в точку A , но и в любую другую точку, лежащую на линии действия силы $\overline{F}$, так как при этом будет изменяться и $\overline{r}$, и угол α , однако $|\overline{r}| \sin \alpha = h$ останется без изменения.

Момент силы относительно точки равен нулю, когда линия действия силы проходит через эту точку.

Момент системы сил относительно точки

Если мы имеем систему сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_k, \dots, \overline{F}_N$ (рис. 8.18), то вектор $\overline{L}_O$, равный сумме моментов всех этих сил относительно точки O

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^N (\overline{r}_k \times \overline{F}_k), \quad (8.8)$$

называется **главным моментом системы сил относительно точки O** .

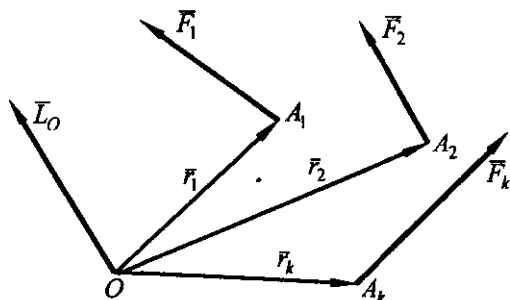


Рис. 8.18

Если все силы приложены в одной точке (рис. 8.19), то

$$\bar{L}_O = \sum_{k=1}^N (\bar{r} \times \bar{F}_k) = \bar{r} \times \sum_{k=1}^N \bar{F}_k = \bar{r} \times \bar{R}^*. \quad (8.9)$$

Выражение (8.9) представляет собой векторную запись **теоремы Вариньона**: момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

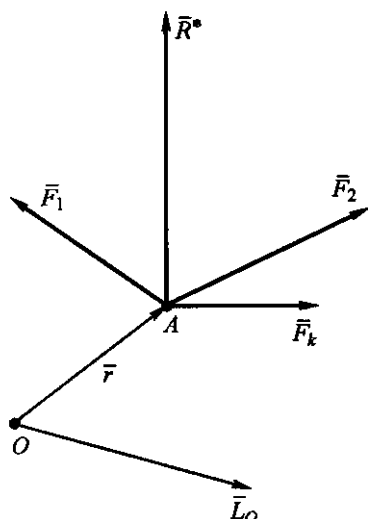


Рис. 8.19

Момент силы относительно оси

Моментом силы $\bar{F}$ относительно оси называется проекция векторного момента этой силы, взятого относительно любой точки оси, на эту ось, т. е.

$$M_z(\bar{F}) = (\bar{r} \times \bar{F})_z. \quad (8.10)$$

Покажем, что проекция момента силы $\bar{F}$, взятого относительно какой-либо точки O оси Oz , на эту ось не зависит от положения точки на оси (рис. 8.20).

Равенство (8.10) можно представить в виде

$$M_z(\bar{F}) = (\bar{r} \times \bar{F})_z = (\bar{r} \times \bar{F})\bar{k} = (\bar{k} \times \bar{r})\bar{F}.$$

Из рис. 8.20 следует, что модуль векторного произведения $(\bar{k} \times \bar{r})$ есть величина постоянная для любой точки на оси. Численно он равен удвоенной площади треугольника с основанием k и высо-

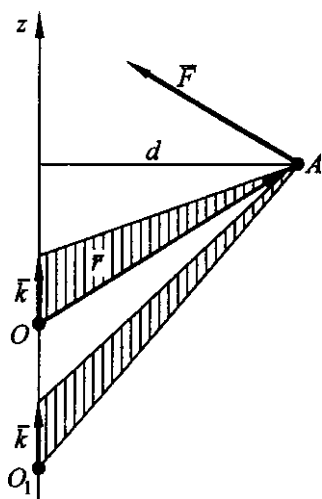


Рис. 8.20

той $d = r \sin(\bar{k}, \bar{r})$. Сила $\bar{F}$ тоже остается постоянной, следовательно, величина $(\bar{r} \times \bar{F})_z$ не зависит от положения точки O .

Моменту силы относительно оси можно дать другое определение: моментом силы $\bar{F}$ относительно произвольной оси Oz называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси Oz , взятый относительно точки O_1 пересечения оси с плоскостью Π (рис. 8.21). При этом момент силы рассматривается как скалярная величина

$$M_z(\bar{F}) = \pm F_{\Pi} h = M_{O_1}(\bar{F}_{\Pi}), \quad (8.11)$$

для которой берется знак «+», если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремится вращать тело вокруг оси противоположно часовой стрелки, и знак «-» в противном случае. В формуле (8.11) $M_{O_1}(\bar{F}_{\Pi}) = \pm F_{\Pi} h$ есть алгебраический момент силы $\bar{F}_{\Pi}$ относительно точки O_1 .

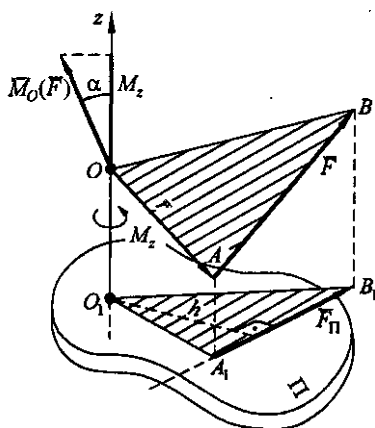


Рис. 8.21

Покажем, что моменты силы относительно оси, вычисленные по формулам (8.10) и (8.11), являются одинаковыми. Так как угол α между нормальными к плоскостям OAB и $O_1A_1B_1$ есть угол между этими плоскостями, то

$$2 \text{ пл. } \Delta O_1A_1B_1 = 2 \text{ пл. } \Delta OAB \cos \alpha.$$

Отсюда получаем

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cos \alpha.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось или сила и ось параллельны, т. е. находятся в одной плоскости.

Пример 8.4. На консольный брус длиной l и шириной a действуют силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ (рис. 8.22). Определить моменты этих сил относительно координатных осей Ox , Oy , Oz .

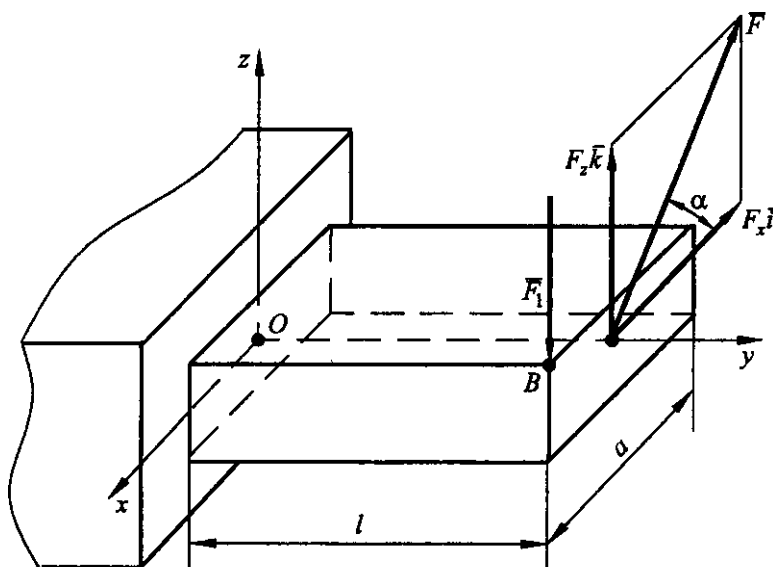


Рис. 8.22

Решение. Линия действия силы $\vec{F}$ пересекает ось Oy , поэтому $M_y(\vec{F}) = 0$.

Чтобы вычислить моменты силы $\vec{F}$ относительно осей Ox и Oz , спроецируем ее на плоскости, перпендикулярные этим осям, т. е. на плоскости Oyz и Oxy .

Сила $\bar{F}_1$ на плоскости Oxz и Oyz проецируется в натуральную величину.
С учетом правила определения момента силы относительно оси получаем

$$M_x(\bar{F}_1) + M_x(\bar{F}) = -F_1 l + F_2 l = (F \sin \alpha - F_1) l ;$$

$$M_y(\bar{F}_1) = F_1 a/2 ;$$

$$M_z(\bar{F}) = |F_x| l = Fl \cos \alpha .$$

Моменты силы относительно осей декартовой системы координат

Момент $\bar{M}_O(\bar{F})$ относительно начала координат (см. (8.7)) можно представить в виде

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = M_x(\bar{F})\bar{i} + M_y(\bar{F})\bar{j} + M_z(\bar{F})\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} .$$

Раскрывая определитель по элементам верхней строки, получаем в виде множителей при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ проекции момента $\bar{M}_O(\bar{F})$ на оси координат, равные моментам силы относительно осей:

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y ;$$

$$M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z ; \quad (8.12)$$

$$M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x .$$

Таким образом, чтобы вычислить моменты силы $\bar{F}$ относительно осей координат, надо знать координаты x, y, z точки приложения силы и проекции самой силы на эти оси F_x, F_y, F_z (рис. 8.23).

Пример 8.5. К торцу горизонтального Г-образного бруса в точке A приложена сила $\bar{F}$ (рис. 8.24). Определить моменты силы $\bar{F}$ относительно осей координат с началом в центре заделки.

Решение. Вычислим координаты точки приложения силы:

$$x = l_2 + b, \quad y = l_1 + b, \quad z = a .$$

Определим проекции силы $\bar{F}$ на оси координат

$$F_x = 0, \quad F_y = -F \cos \alpha, \quad F_z = -F \sin \alpha .$$

Согласно формулам (8.12), находим

$$M_x(\bar{F}) = -(l_1 + b)F \sin \alpha + aF \cos \alpha ,$$

$$M_y(\bar{F}) = (l_2 + b)F \sin \alpha,$$

$$M_z(\bar{F}) = -(l_2 + b)F \cos \alpha.$$

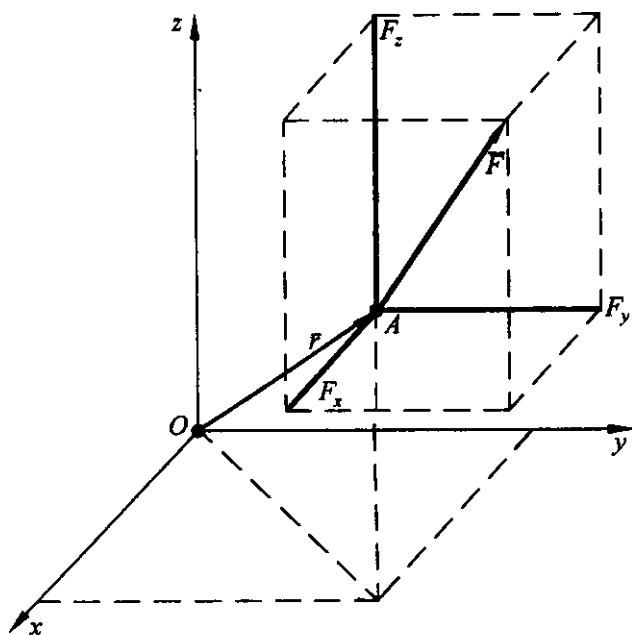


Рис. 8.23

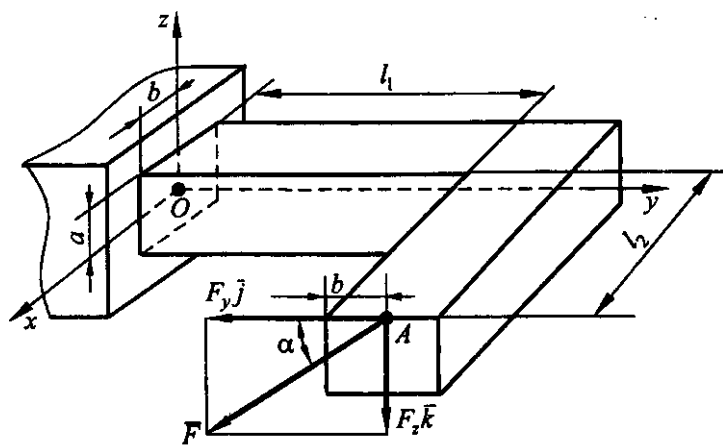


Рис. 8.24

8.5. Сложение параллельных сил. Пара сил

Параллельные силы, направленные в одну сторону

Пусть к твердому телу в точках A и B приложены две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 8.25). Приложим в этих точках на прямой AB равные по величине и противоположно направленные силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Заменяем силы $\vec{F}_1$, $\vec{T}_1$ и $\vec{F}_2$, $\vec{T}_2$ равнодействующими $\vec{R}_1^*$ и $\vec{R}_2^*$, которые перенесем в точку D пересечения их линий действия. Теперь разложим $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ на две составляющие по направлениям действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и прямой, параллельной AB . Получим составляющие силы, соответствующие силам, приложенным в точках A и B , т. е.

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1; \quad \vec{T}_1' = \vec{T}_1; \quad \vec{F}_2' = \vec{F}_2; \quad \vec{T}_2' = \vec{T}_2.$$

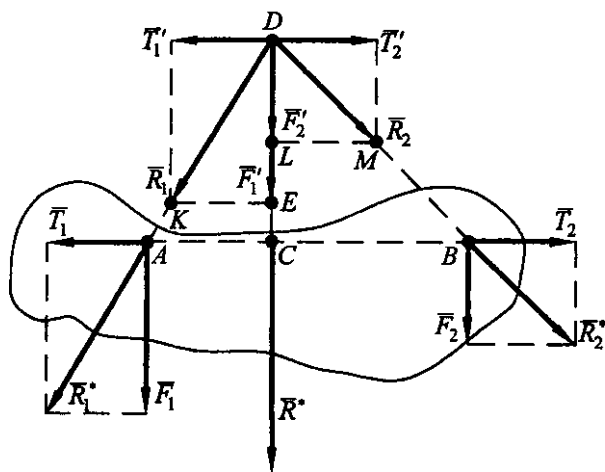


Рис. 8.25

Отбросив систему сил $(\vec{T}_1', \vec{T}_2')$, эквивалентную нулю, получим две силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$, действующие вдоль прямой DC параллельно направлению заданных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Равнодействующая таких сил

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Из подобия треугольников KED и DAC , а также MDL и BDC находим

$$\frac{AC}{DC} = \frac{T'_1}{F'_1}; \quad \frac{BC}{DC} = \frac{T'_2}{F'_2}.$$

Разделив левые и правые части этих соотношений друг на друга, получаем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{или} \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}. \quad (8.13)$$

Таким образом, две параллельные силы, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую силу, параллельную им, равную по модулю сумме их модулей и направленную в ту же сторону. Линия действия равнодействующей силы расположена между линиями действия заданных сил и делит отрезок прямой между линиями действия этих сил на части, обратно пропорциональные модулям сил, внутренним образом.

Если две параллельные силы, направленные в одну сторону, можно заменить одной силой, то и любую силу можно разложить на две параллельные силы, направленные в ту же сторону.

Неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны

Пусть сила $\bar{F}_1$ больше силы $\bar{F}_2$ (рис. 8.26). Разложим силу $\bar{F}_1$ на две параллельные силы $\bar{R}^*$ и $\bar{F}'_2$, направленные в одну сторону, причем силу $\bar{F}'_2$, равную по модулю силе $\bar{F}_2$, приложим к точке B . Тогда $\bar{F}_1 = \bar{R}^* + \bar{F}'_2$, откуда $\bar{R}^* = \bar{F}_1 - \bar{F}'_2$ и $R^* = F_1 - F_2$.

Точку C приложения силы $\bar{R}^*$ определим из соотношений (8.13), где за равнодействующую для сил $\bar{R}^*$ и $\bar{F}'_2$ следует принять силу $\bar{F}_1$. В результате получаем

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R^*} = \frac{BC}{F_1}.$$

Таким образом, две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны, имеют равнодействующую

щую силу, равную по модулю разности модулей сил, параллельную им и направленную в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей силы расположена за линией действия большей из них и делит отрезок прямой между линиями действия заданных сил на части, обратно пропорциональные модулям сил, внешним образом.

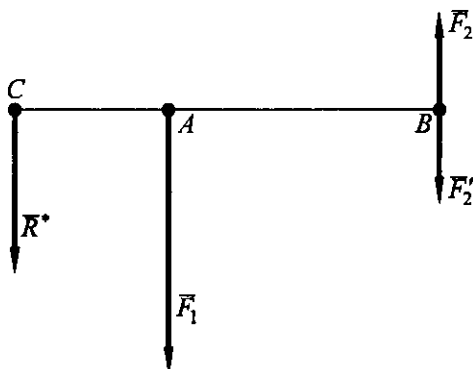


Рис. 8.26

Пара сил. Момент пары сил

Парой сил, приложенной к твердому телу, называется система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 8.27). Сумма сил пары равна нулю, но пара сил не уравновешена. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется *плечом пары сил*. Плоскость, в которой действуют силы пары, называется *плоскостью действия пары сил*. Совокупность нескольких пар сил, действующих на тело, называется *системой пар сил*.

Пара сил не приводится к равнодействующей. Докажем это от противного. Пусть пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, не параллельную силам пары (рис. 8.28). Тогда, прибавив к паре сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ силу $\vec{R}'$, противоположную равнодействующей $\vec{R}^*$, мы получим уравновешенную систему трех сил $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{R}')$. Но этого не может быть, так как линии действия сил $\vec{F}$,

$\vec{F}'$, $\vec{R}^*$ не проходят через одну точку и, следовательно, не выполняется необходимое условие равновесия. Можно показать, что пара сил не может иметь равнодействующей, параллельной силам пары, так как не выполняется условие для точки приложения равнодействующей.

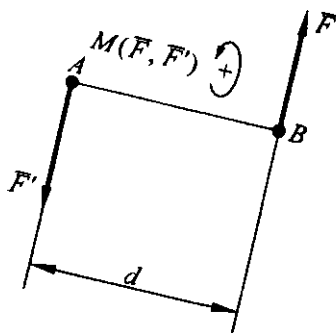


Рис. 8.27

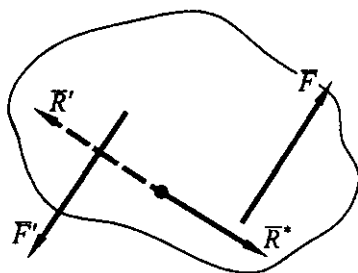


Рис. 8.28

Действие пары сил на тело характеризуется *моментом пары* $M(\vec{F}, \vec{F}')$, равным $\pm Fd$. (На рис. 8.27 $M(\vec{F}, \vec{F}') = Fd$.)

Теорема о переносе пары в плоскости ее действия. Не изменяя действия пары сил на тело, ее можно переносить куда угодно в плоскости действия, изменять силы и плечо, сохраняя неизменными модуль и направление момента пары сил.

Доказательство. Пусть на твердое тело действует пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ с моментом $M = -Fd$ ($F_1 = F_2 = F$) (рис. 8.29). Перенесем $\vec{F}_1$ в точку O_1 , а $\vec{F}_2$ в точку O_2 и проведем через точки O_1 и O_2 две параллельные прямые, пересекающие линии действия сил пары и лежащие, следовательно, в плоскости ее действия. Соединив прямой точки O_1 и O_2 , разложим $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по правилу параллелограмма, как показано на рис. 8.29. Так как $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ образуют пару сил, то $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и, следовательно,

$$\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'; \quad \vec{F}_1'' = -\vec{F}_2''.$$

Поскольку $(\vec{F}_1'', \vec{F}_2'') \sim 0$, то эту систему двух сил можно отбросить. Остается пара сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2')$. Покажем, что моменты

исходной пары $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ и образованной после переноса пары $(\bar{F}_1', \bar{F}_2')$ одинаковы. Направление вращения у них одно и то же. Имеем

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = -2 \text{ пл. } \Delta O_1 O_2 A,$$

$$M' = M(\bar{F}_1', \bar{F}_2') = -2 \text{ пл. } \Delta O_1 O_2 B.$$

Но площади $\Delta O_1 O_2 A$ и $\Delta O_1 O_2 B$ равны, так как эти треугольники имеют общее основание $O_1 O_2$ и равные высоты. Таким образом, теорема доказана.

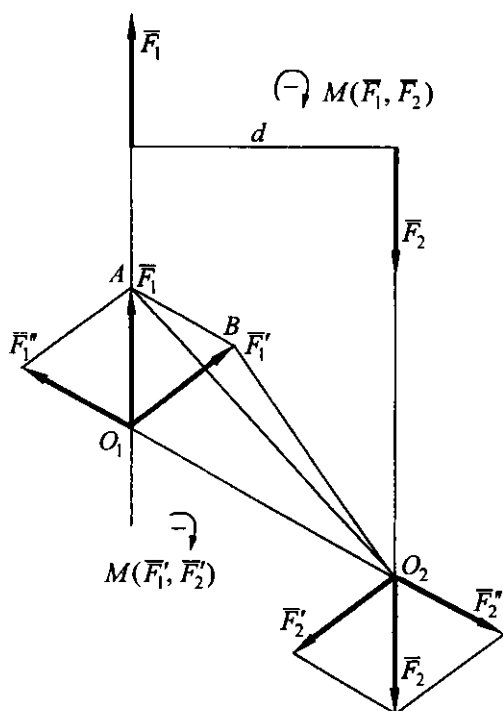


Рис. 8.29

Действие пары сил на тело характеризуется не только модулем, но и положением плоскости действия пары в пространстве и направлением, в котором она стремится вращать тело. Поэтому момент пары сил можно рассматривать как вектор.

Векторный момент пары сил есть вектор $\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}')$, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда видно, что пара сил стремится повернуть тело против направления вращения часовой стрелки, и численно равный произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.

Остается выяснить вопрос о точке приложения этого вектора.

Определим векторный момент пары сил относительно произвольной точки O (рис. 8.30)

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \vec{F}'.$$

Так как $\vec{F}' = -\vec{F}$ и $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{AB}$, то

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'). \quad (8.14)$$

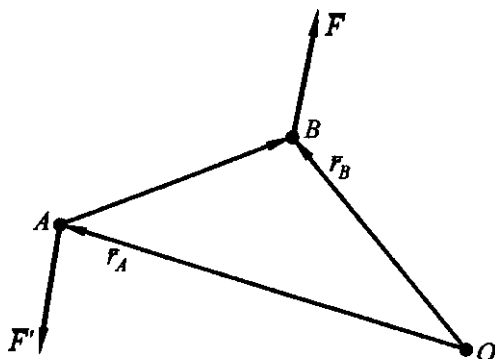


Рис. 8.30

Таким образом, векторный момент пары сил равен векторному моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы или сумме векторных моментов ее сил относительно произвольной точки O .

Так как выбор точки O произволен, то вектор $\vec{M}$ можно считать приложенным в любой точке тела, т. е. этот вектор свободный. Поэтому пару сил можно переносить куда угодно в плоскости и в параллельную плоскость, изменяя модуль силы и плечо пары, но сохраняя при этом неизменными модуль момента пары и направление, в котором она стремится вращать твердое тело.

Две пары сил, имеющие одинаковые векторные моменты, эквивалентны независимо от того, где каждая из них расположена (на одной плоскости или в параллельных плоскостях) и чему равны модули сил и плечи пар.

Если пары расположены в одной плоскости, то их векторные моменты будут направлены перпендикулярно этой плоскости в ту или иную сторону в зависимости от направления, в котором пара стремится вращать тело. Поэтому в данном случае моменты пар можно различать по модулю и знаку, т. е. можно рассматривать как алгебраические величины. Условимся, придерживаясь правой системы координат, считать момент пары сил положительным, если она стремится вращать тело против направления движения часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении вращения. Тогда для плоской системы пар сил

$$M_k = M_k(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = \pm F_k d_k$$

и

$$M = \sum_{k=1}^N M_k = \sum_{k=1}^N \pm F_k d_k.$$

Теорема о сложении пар сил. Вся совокупность пар сил, действующих на тело, эквивалентна одной паре сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов всех пар сил.

Доказательство. Если на тело действует несколько пар сил, расположенных произвольным образом, то для их сложения и приведения к одной паре сил можно применить выражение (8.14). В самом деле, если векторные моменты пар сил равны $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_k, \dots, \bar{M}_N$, то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно какой-либо точки O равна

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^N \overline{A_k B_k} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^N \bar{M}_k. \quad (8.15)$$

Формула (8.15) выражает теорему о сложении пар сил.

На основании формулы (8.15) можно сформулировать условие равновесия системы пар сил, действующих на твердое тело. При равновесии

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_k = 0. \quad (8.16)$$

Пример 8.6. На твердое тело, имеющее форму куба (рис. 8.31), по трем его граням действуют пары сил $\vec{F}_1, \vec{F}_1'$; $\vec{F}_2, \vec{F}_2'$ и $\vec{F}_3, \vec{F}_3'$. Модули моментов пар $M_1 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_2 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_3 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Найти результирующую пару сил.

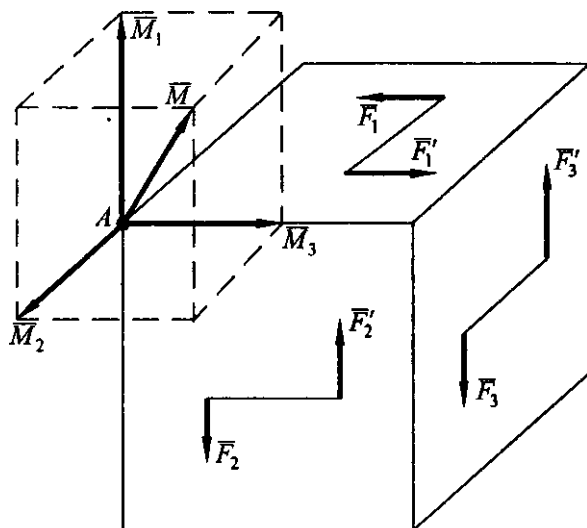


Рис. 8.31

Решение. В некоторой точке A построим векторы моментов пар сил $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$. Поскольку эти векторы взаимно перпендикулярны, то модуль результирующей пары сил

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{60^2 + 20^2 + 20^2} = 20\sqrt{11} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Направление вектора $\vec{M}$ определяется косинусами углов между векторами $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$ и $\vec{M}$:

$$\cos(\vec{M}_1, \vec{M}) = \frac{M_1}{M} = \frac{3}{\sqrt{11}};$$

$$\cos(\vec{M}_2, \vec{M}) = \frac{M_2}{M} = \frac{1}{\sqrt{11}};$$

$$\cos(\vec{M}_3, \vec{M}) = \frac{M_3}{M} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

8.6. Приведение системы сил к простейшей системе

Теорема о параллельном переносе силы

Теорема. Силу, приложенную к твердому телу, можно, не изменяя ее действия, перенести параллельно самой себе в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, в которую она переносится.

Доказательство. Пусть в точке A на тело действует сила $\vec{F}$ (рис. 8.32, а). Приложив в точке B , куда переносится сила $\vec{F}$ из точки A , эквивалентную нулю систему сил $\vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}$ (рис. 8.32, б), получаем силу $\vec{F}'$, приложенную в точке B , и пару сил $(\vec{F}, \vec{F}'')$, векторный момент которой $\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F})$, что и требовалось доказать. На основании этой теоремы можно любую систему сил, действующих на твердое тело, перенести в одну точку и заменить одной силой и парой сил (рис. 8.32, в).

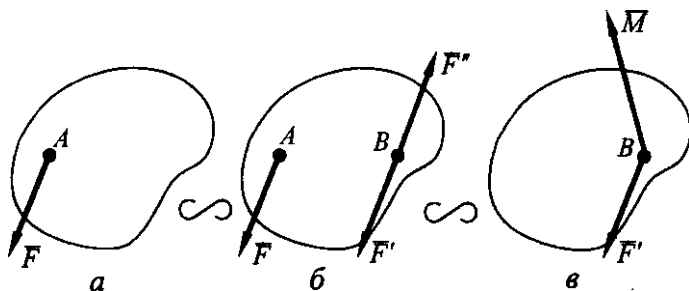


Рис. 8.32

Приведение системы сил к заданному центру

Точку, к которой приводят систему сил, называют *центром приведения* данной системы сил.

Теорема. Произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к какому-либо центру, заменив все действующие силы одной силой, равной главному вектору системы сил, приложенному в этом центре, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно того же центра.

Пусть на твердое тело (рис. 8.33, а) действует произвольная система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_N)$. Возьмем какую-либо точку O за центр приведения и, пользуясь теоремой о параллельном переносе силы, перенесем все силы в эту точку, присоединяя при этом соответствующие пары. На тело теперь действует система сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_k, \dots, \bar{F}'_N)$, приложенных в точке O , и система пар сил, векторные моменты которых $\bar{M}_O(\bar{F}_1), \bar{M}_O(\bar{F}_2), \dots, \bar{M}_O(\bar{F}_k), \dots, \bar{M}_O(\bar{F}_N)$. При этом $\bar{F}'_k = \bar{F}_k$, где $k = 1, 2, \dots, N$.

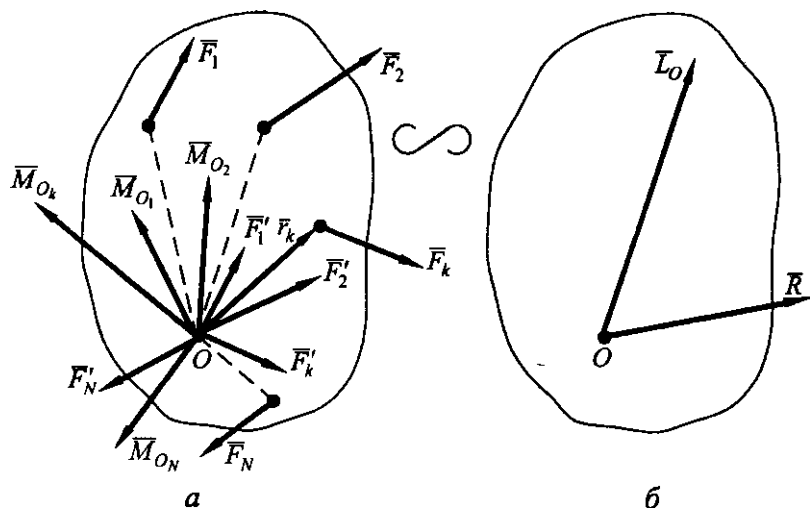


Рис. 8.33

Силы, приложенные в точке O , заменяются одной силой $\bar{R}^*$, которая равна **главному вектору системы сил**

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k. \quad (8.17)$$

Систему пар сил можно заменить одной парой, момент которой

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) = \bar{L}_O. \quad (8.18)$$

равен *главному моменту системы сил* относительно центра приведения (рис. 8.33, б), т. е. $\bar{M} = \bar{L}_O$.

Заметим, что главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения. Он вычисляется по такой же формуле, что и равнодействующая, но при этом не эквивалентен данной системе сил.

На основании доказанной теоремы можно сформулировать условие эквивалентности системы сил: *две системы сил, приложенных к твердому телу, эквивалентны, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.*

В противоположность главному вектору главный момент системы сил зависит от выбора центра приведения.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Теорема. *Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки O равен сумме моментов сил системы относительно той же точки.*

Доказательство. Пусть некоторая система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_N)$ имеет равнодействующую $\bar{R}^* = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k$, приложенную

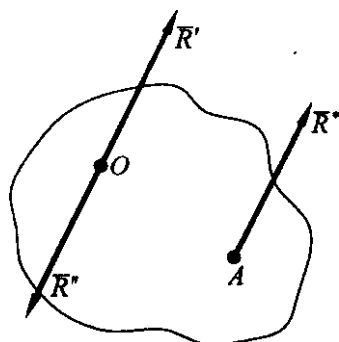


Рис. 8.34

в точке A (рис. 8.34). Перенесем $\bar{R}^*$ в произвольную точку O — центр приведения — параллельно себе. При этом добавится пара сил $(\bar{R}^*, \bar{R}^*)$ с моментом $\bar{M} = \bar{M}_O(\bar{R}^*)$. Кроме того, $\bar{M}$ есть главный момент системы сил относительно центра O , равный сумме моментов всех сил относительно этого центра, т. е.

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k).$$

* П. Вариньон (1654–1722) — выдающийся французский математик и механик.

Сравнивая между собой полученные выражения для $\bar{M}$, получаем математическую запись теоремы Вариньона

$$\bar{M}_O(\bar{R}^*) = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k).$$

Проецируя векторы, входящие в обе части этого равенства, на любую ось, проходящую через центр O , находим, что теорема Вариньона справедлива и для моментов относительно оси.

Реакция заделки

Связь, которая запрещает как линейные, так и угловые перемещения твердого тела, называется *заделкой*.

При приведении сил реакции заделки к точке A (рис. 8.35) на основании теоремы о приведении системы сил к заданному центру получим силу $\bar{R}_A$ и пару сил с моментом $\bar{M}_A$. Модуль силы и момент пары сил в заделке могут быть определены из условий равновесия твердого тела, к которому они приложены. Например, для балки, показанной на рис. 8.35 (плоская система сил), будем иметь

$$R_A = F, \quad M_A = Fl.$$

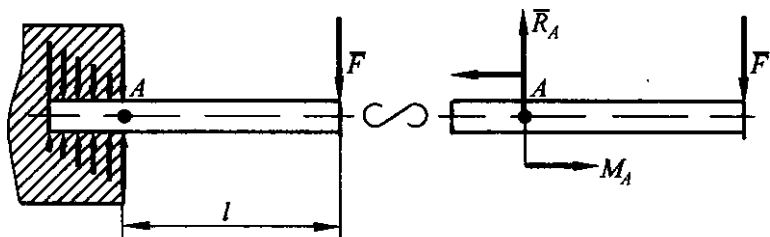


Рис. 8.35

Соотношение между главными моментами системы сил относительно двух центров приведения

Допустим, что при приведении системы сил к центру O получили главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{L}_O$. Найдем выражение главного момента $\bar{L}_{O_1}$ той же системы сил относительно нового центра O_1 (рис. 8.36)

$$\bar{L}_{O_1} = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_{O_1 k} \times \bar{F}_k); \quad \bar{L}_O = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_{Ok} \times \bar{F}_k).$$

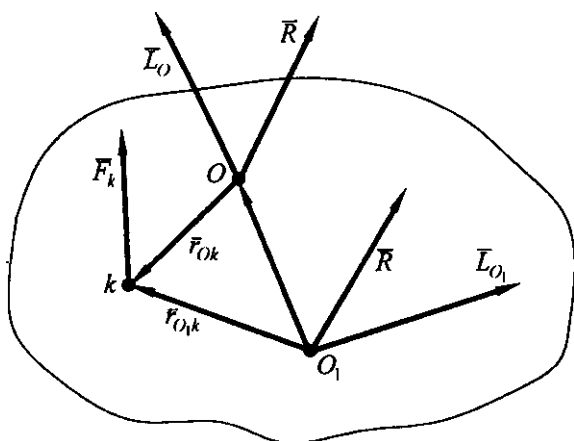


Рис. 8.36

Из векторного треугольника OkO_1 находим

$$\bar{r}_{O_1 k} = \overline{O_1 O} + \bar{r}_{Ok}.$$

Тогда

$$\bar{L}_{O_1} = \sum_{k=1}^N (\overline{O_1 O} + \bar{r}_{Ok}) \times \bar{F}_k = \overline{O_1 O} \times \sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N (\bar{r}_{Ok} \times \bar{F}_k).$$

Окончательно получаем

$$\bar{L}_{O_1} = \bar{L}_O + \overline{O_1 O} \times \bar{R}. \quad (8.19)$$

Таким образом, *главный момент системы сил относительно второго центра приведения O_1 равен сумме главного момента системы сил относительно первого центра приведения O и векторного момента главного вектора, приложенного в первом центре приведения, относительно второго.*

Инварианты системы сил

Инвариантами системы сил называются скалярные или векторные величины, не зависящие от выбора центра приведения.

Первый инвариант — главный вектор системы сил. Для любого центра приведения $\bar{R} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k$.

Второй инвариант — скалярное произведение главного вектора на главный момент системы сил. Для доказательства этого утверждения умножим равенство (8.19) скалярно на главный вектор $\bar{R}$:

$$\bar{L}_O \bar{R} = \bar{L}_O \bar{R} + (\overline{O_1 O} \times \bar{R}) \bar{R}.$$

Поскольку $(\overline{O_1 O} \times \bar{R}) \cdot \bar{R} = 0$, то $\bar{L}_O \bar{R} = \bar{L}_O \bar{R}$.

Частные случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду

Покажем, к какому простейшему виду можно привести пространственную систему сил, не находящихся в равновесии.

В общем случае любая система сил эквивалентна силе, равной главному вектору $\bar{R}$, и паре сил, момент $\bar{M}$ которой равен главному моменту $\bar{L}_O$ относительно центра приведения O :

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k; \quad \bar{M} = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_{Ok} \times \bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \bar{L}_O.$$

Частные случаи дальнейшего упрощения можно получить из анализа второго инварианта системы сил. Допустим, что второй инвариант системы сил $\bar{L}_O \bar{R} = 0$, тогда возможны следующие случаи.

1. Если для данной системы сил $\bar{L}_O = 0$, а $\bar{R} \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей $\bar{R}^*$, равной $\bar{R}$ и проходящей через точку O .

2. Если $\bar{R} = 0$, а $\bar{L}_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил с моментом $\bar{M} = \bar{L}_O$, который на основании (8.19) не зависит от выбора центра O .

3. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{L}_O \neq 0$, но $\bar{L}_O \perp \bar{R}$, то заданная система сил приводится к равнодействующей $\bar{R}^*$, равной $\bar{R}$, но проходящей не через точку O , а через точку O_1 , отстоящую от точки O на расстоянии

$$OO_1 = d = \frac{|\bar{L}_O|}{|\bar{R}|}. \quad (8.20)$$

Действительно, главный вектор $\bar{R}$ и пара сил с моментом $\bar{L}_O$ лежат в одной плоскости. Представим момент пары сил в виде произведения $L_O = R'd$ и расположим пару $(\bar{R}', \bar{R}^*)$ так, как показано на рис. 8.37, причем выберем $|\bar{R}'| = |\bar{R}^*| = |\bar{R}|$. В результате силы $\bar{R}$ и $\bar{R}'$ уравниваются, а система сил будет эквивалентна одной равнодействующей $\bar{R}^*$, проходящей через точку O_1 .

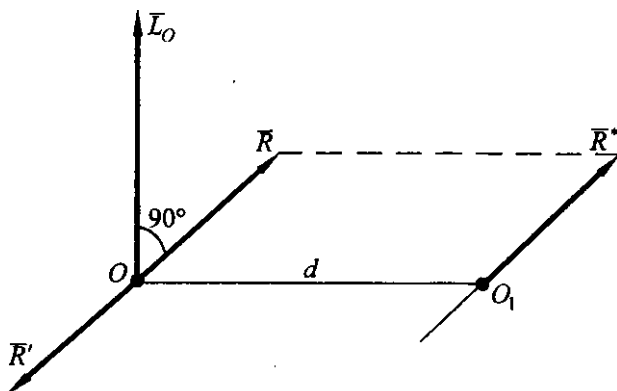


Рис. 8.37

Теперь рассмотрим систему сил, для которой второй инвариант $\bar{L}_O \bar{R} \neq 0$. В простейшем виде такую систему можно представить совокупностью векторов $\bar{L}_O$ и $\bar{R}$, расположенных на одной линии и называемых **динамическим винтом** (рис. 8.38). К одной силе (или одной паре сил) данную систему сил привести нельзя.

Докажем, что если $\bar{L}_O \bar{R} \neq 0$, причем в общем случае вектор $\bar{L}_O$ не параллелен вектору $\bar{R}$, то система сил приводится к динамическому винту. Разложим $\bar{L}_O$ на две составляющие: $\bar{L}_1$, на-

правленную вдоль $\bar{R}$, и $\bar{L}_2$, перпендикулярную $\bar{R}$ (рис. 8.39). Вектор $\bar{L}_2$ представим в виде пары сил $\bar{R}'$, $\bar{R}''$, равных по модулю силе $\bar{R}$, как это показано для вектора $\bar{L}_0$ на рис. 8.37, т. е. $L_2 = R'd$. Силы $\bar{R}$ и $\bar{R}''$ взаимно уравниваются, а вектор $\bar{L}_1$ как свободный перенесем в точку O_1 . В результате имеем динамический винт $\bar{R}', \bar{L}_1$, проходящий не через точку O , а через точку O_1 . Прямая, вдоль которой (через точку O_1) направлен вектор $\bar{R}'$, называется *осью динамического винта*.

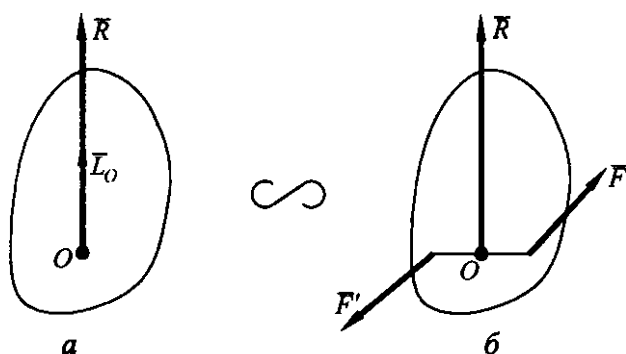


Рис. 8.38

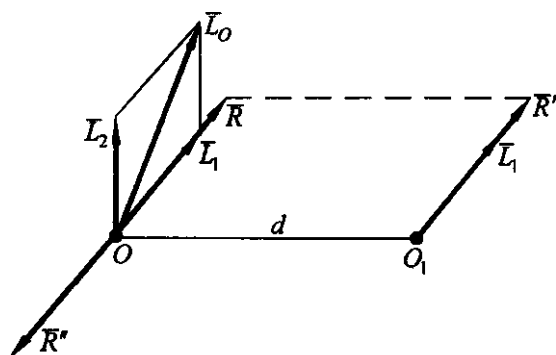


Рис. 8.39

Пример 8.7. На твердое тело, выполненное в виде куба с длиной ребра a (рис. 8.40), действует система, состоящая из девяти равных по модулю сил $\vec{F}_k$ ($k = 1, \dots, 9$). Привести систему сил к вершине куба — точке O и упростить ее.

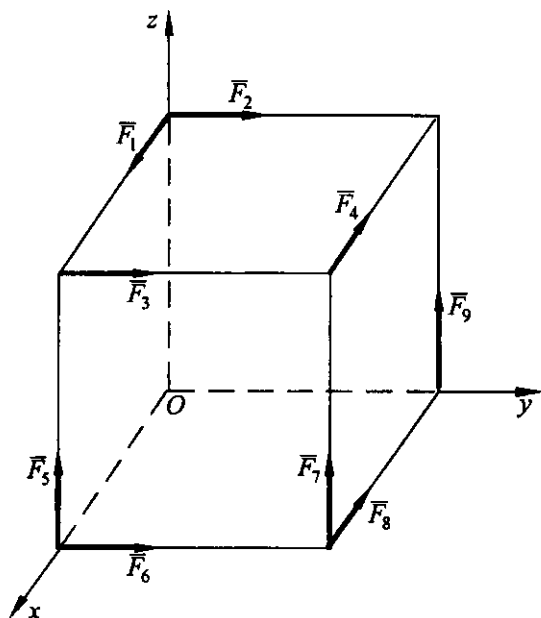


Рис. 8.40

Решение. Построим систему координат с началом в точке O и определим проекции на оси координат главного вектора $\vec{R}$ и главного момента $\vec{L}_O$:

$$R_x = \sum_{k=1}^{k=9} F_{kx} = -F; \quad R_y = \sum_{k=1}^{k=9} F_{ky} = 3F; \quad R_z = \sum_{k=1}^{k=9} F_{kz} = 3F;$$

$$L_x = \sum_{k=1}^{k=9} M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad L_y = \sum_{k=1}^{k=9} M_y(\vec{F}_k) = -2Fa; \quad L_z = \sum_{k=1}^{k=9} M_z(\vec{F}_k) = 4Fa.$$

Найдем модули главного вектора и главного момента

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = F\sqrt{19};$$

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = Fa\sqrt{20}.$$

Второй инвариант системы сил

$$\vec{L}_O \vec{R} = L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z = 6F^2 a.$$

Так как $\bar{L}_O \bar{R} \neq 0$, то система сил приводится к динамическому винту. Момент динамического винта L_1 определим исходя из того, что

$$\bar{L}_O \bar{R} = (\bar{L}_1 + \bar{L}_2) \bar{R} = \bar{L}_1 \bar{R},$$

где $\bar{L}_1$ направлен по $\bar{R}$, а $\bar{L}_2 \perp \bar{R}$.

Следовательно,

$$L_1 = \frac{\bar{L}_O \bar{R}}{\bar{R}} = Fa \frac{6}{\sqrt{19}}.$$

Параметры динамического винта

$$R = F\sqrt{19}; \quad L_1 = \frac{6}{\sqrt{19}} Fa.$$

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ

9.1. Условия равновесия системы сил

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна силе, равной главному вектору $\bar{R}$, и паре сил с моментом, равным главному моменту $\bar{L}_O$ относительно какого-либо центра O . Чтобы такая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно равенство нулю и главного вектора $\bar{R}$, и главного момента $\bar{L}_O$. Поэтому условия равновесия пространственной системы сил могут быть представлены в векторной форме

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k = 0; \quad \bar{L}_O = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (9.1)$$

Два векторных условия (9.1) эквивалентны следующим шести аналитическим условиям равновесия:

$$\begin{aligned} R_x = \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0; \\ L_x = \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad L_y = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) = 0; \\ L_z = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Условия равновесия (9.2) можно сформулировать так: для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому

телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси декартовой системы координат равнялись нулю и суммы моментов всех сил относительно этих осей также равнялись нулю.

Пример 9.1. На балку $ABCD$, заделанную одним концом, в сечениях (точках) B и D действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и пары сил с моментами $M_B = 2Fa$ и $M_D = Fa$ (рис. 9.1, а). Определить реакцию заделки, приняв $F_1 = F$, $F_2 = 2F$.

Решение. Действие заделки на балку заменим силой $\vec{R}_A$ и парой сил с моментом $\vec{M}_A$, направления которых неизвестны. Представим их в виде трех составляющих, направленных по координатным осям. На рис. 9.1, б изображена освобожденная от связи балка, моменты $\vec{M}_B$ и $\vec{M}_D$ показаны в виде векторов, сила $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, момент $\vec{M}_A$ в виде трех составляющих $\vec{M}_{Ax}$, $\vec{M}_{Ay}$, $\vec{M}_{Az}$. Балка находится в равновесии.

Составим условия равновесия в аналитической форме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A = 0; \quad \sum_{k=1}^N F_{ky} = -F + Y_A = 0; \quad \sum_{k=1}^N F_{kz} = -2F + Z_A = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_{kx} = M_B - 2Fa + M_{Ax} = 0; \quad \sum_{k=1}^N M_{ky} = 2Fa + M_D + M_{Ay} = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_{kz} = -2Fa + M_{Az} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M_B = 2Fa$ и $M_D = Fa$, находим

$$\begin{aligned} X_A = 0, \quad Y_A = F, \quad Z_A = 2F; \\ M_{Ax} = 0, \quad M_{Ay} = -3Fa, \quad M_{Az} = 2Fa. \end{aligned}$$

Из полученных данных следует, что действительное направление $\vec{M}_{Ay}$ противоположно изображенному на рис. 9.1, б.

Условия равновесия пространственной системы параллельных сил

Если силы, действующие на твердое тело, параллельны между собой, то можно выбрать такую систему координат, когда одна из ее осей, например Oz , параллельна направлению действия сил (рис. 9.2). Тогда из шести аналитических условий равновесия три выполняются тождественно, и система параллельных сил будет иметь только три условия равновесия:

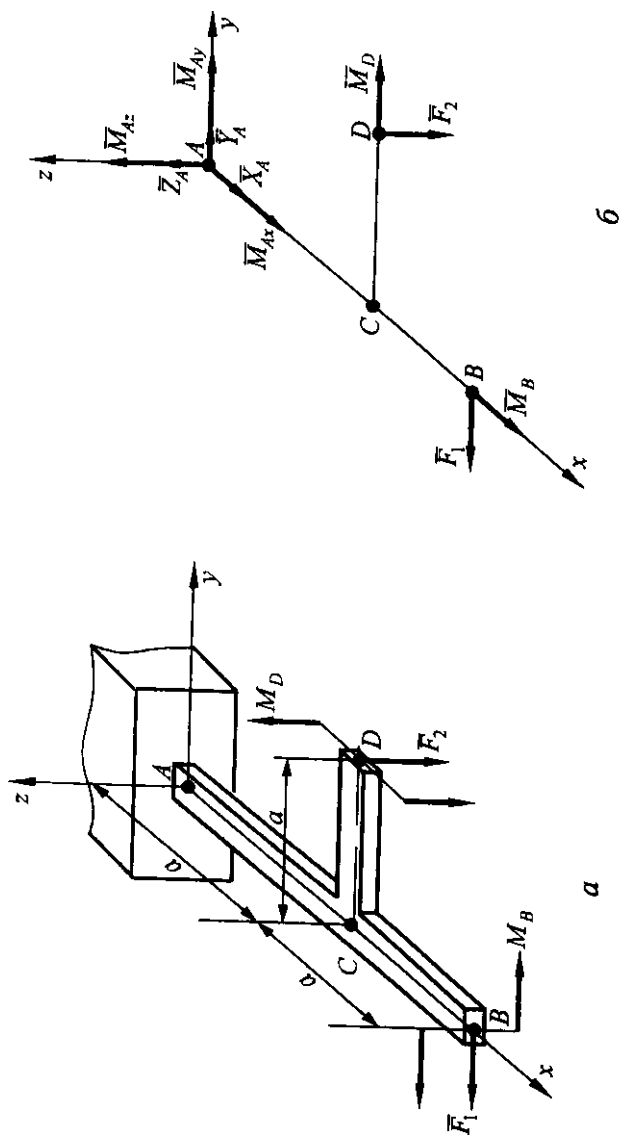


Рис. 9.1

$$R_z = \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0; \quad (9.3)$$

$$L_x = \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad L_y = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) = 0.$$

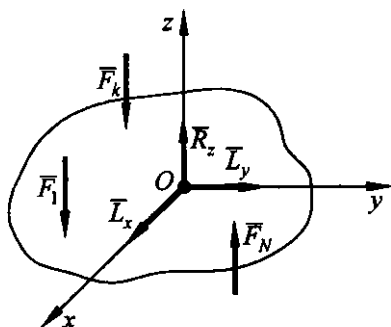


Рис. 9.2

Условия равновесия плоской системы сил

Для плоской системы сил условия равновесия будут частным случаем уравнений (9.2), определяющих условия равновесия пространственной системы сил. Например, если силы расположены в плоскости Oxy , то аналитические условия равновесия можно записать в виде

$$R_x = \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0; \quad L_O = \sum_{k=1}^N M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (9.4)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма алгебраических моментов этих сил относительно любого центра O были равны нулю.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют момент силы относительно оси, проходящей через данную точку перпендикулярно плоскости, в которой расположена сила и точка (см. (8.11)).

Вместо (9.2) иногда удобно применить условия равновесия в виде уравнений трех моментов: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы*

алгебраических моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B, C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^N M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^N M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^N M_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (9.5)$$

Необходимость утверждения следует из того, что третье условие (9.4) справедливо для любой точки. Достаточность докажем методом от противного, используя теорему о приведении произвольной системы сил к центру. Допустим, что плоская система сил не находится в равновесии. Тогда, приводя ее поочередно к точкам A, B, C , будем иметь в этих точках равнодействующую $\bar{R}^*$. Для выполнения равенств (9.5) равнодействующая должна пройти одновременно через все три точки, а это невозможно, так как точки не лежат на одной прямой. Следовательно, равнодействующая равна нулю и система сил, удовлетворяющая равенствам (9.5), находится в равновесии.

Пример 9.2. Составить условия равновесия для плоской системы сил, приложенных к балке (рис. 9.3).

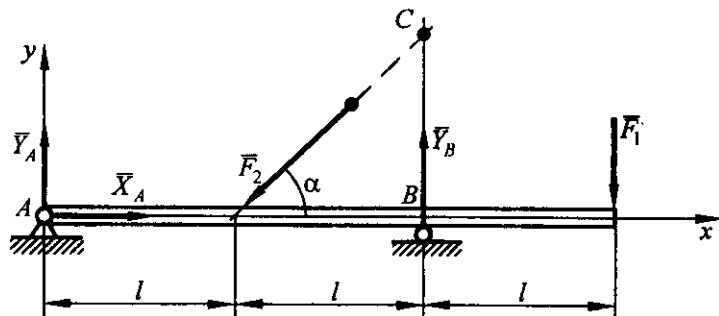


Рис. 9.3

Решение. На основании уравнений (9.4) имеем

$$R_x = \sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A - F_2 \cos \alpha = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A - F_2 \sin \alpha + Y_B - F_1 = 0;$$

$$L_A = \sum_{k=1}^N M_A(\bar{F}_k) = -F_2 l \sin \alpha + Y_B 2l - F_1 3l = 0,$$

или, согласно уравнениям (9.5),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N M_A(\vec{F}_k) &= -F_2 l \sin \alpha + Y_B 2l - F_1 3l = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_B(\vec{F}_k) &= -Y_A 2l + F_2 l \sin \alpha - F_1 l = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_C(\vec{F}_k) &= -F_1 l - Y_A 2l + X_A l \operatorname{tg} \alpha = 0.\end{aligned}$$

Пример 9.3. Однородная прямоугольная рама (рис. 9.4) весом $P_1 = 400$ Н, прикрепленная к стене с помощью сферического шарнира в точке A и петли в точке B , удерживается в горизонтальном положении тросом CK . К раме в точке E подвешен груз весом $P = 50$ Н. Определить натяжение троса CK , а также реакции сферического шарнира и петли, если $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $CE = DE$ и $BC = l$.

Решение. Условия равновесия рамы, согласно уравнениям (9.2), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}R_x &= \sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A - T_1 \cos \alpha \cos \beta = 0; \\ R_y &= \sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A + Y_B - T_1 \cos \alpha \sin \beta = 0; \\ R_z &= \sum_{k=1}^N F_{kz} = Z_A + Z_B - P_1 + T_1 \sin \alpha - T_2 = 0; \\ L_x &= \sum_{k=1}^N M_x(\vec{F}_k) = T_1 l \sin \alpha - P_1 \frac{1}{2} l - T_2 l = 0; \\ L_y &= \sum_{k=1}^N M_y(\vec{F}_k) = P_1 \frac{1}{2} l_1 + T_2 \frac{1}{2} l_1 - T_1 l_1 \sin \alpha - Z_B l_1 = 0; \\ L_z &= \sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k) = Y_B l_1 = 0,\end{aligned}$$

где $l_1 = AB$; $T_2 = P$.

Из уравнений находим

$$\begin{aligned}X_A &= 72,17 \text{ Н}; \quad Y_A = 125 \text{ Н}; \quad Z_A = 225 \text{ Н}; \\ Y_B &= 0; \quad Z_B = -25 \text{ Н}; \quad T_1 = 288,7 \text{ Н}.\end{aligned}$$

Пример 9.4. Ворот l (рис. 9.5, а), предназначенный для подъема груза 2 весом P , удерживается в равновесии вертикальной силой $\vec{F}$, приложенной в точке C к горизонтальному рычагу CD . Определить реакции связей, а также модуль силы $\vec{F}$, если $P = 2$ кН; вес барабана $P_1 = 0,08$ кН; $r = 0,1$ м; $l_1 = l_2 = l_3 = 0,3$ м; $l_4 = 0,8$ м. Угол α между наклонным участком троса и горизонтом равен 30° , а $\angle CDB = 90^\circ$.

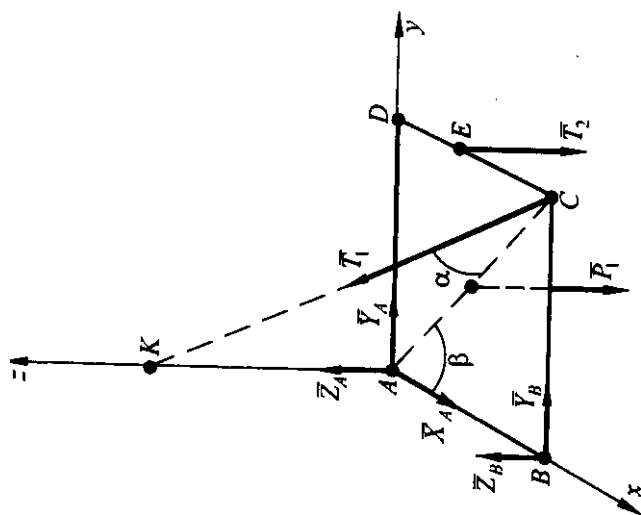
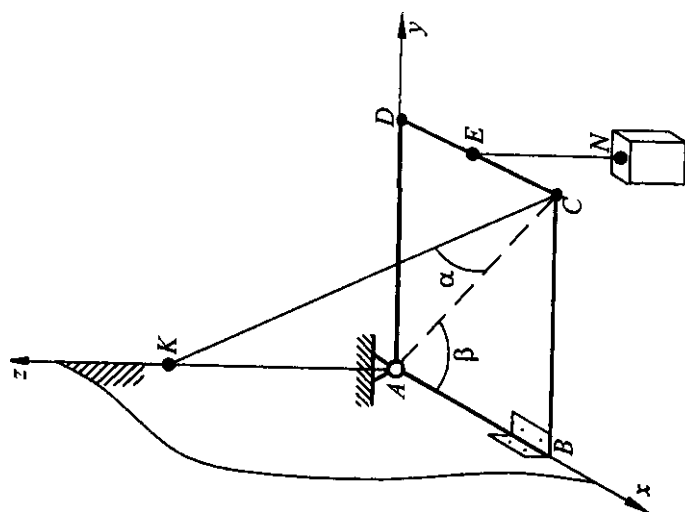


Рис. 9.4

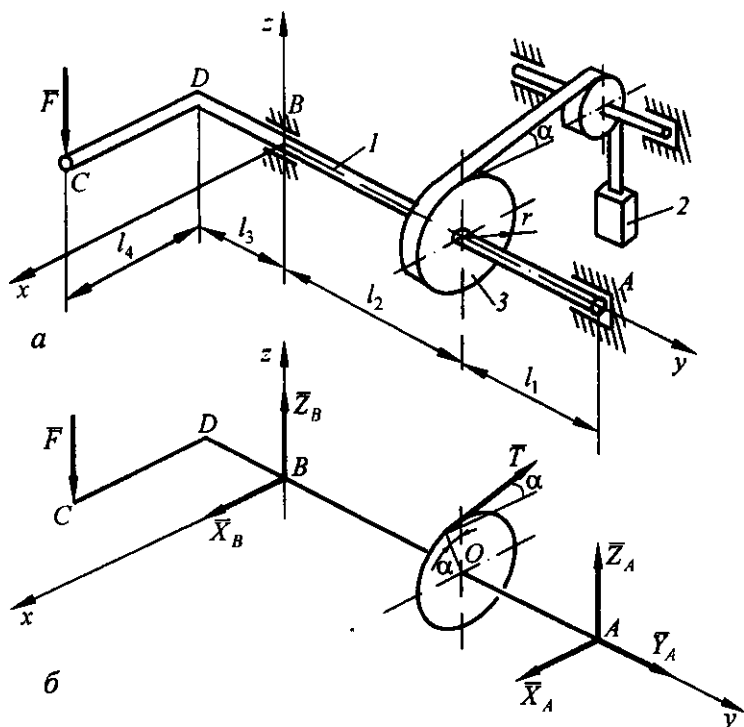


Рис. 9.5

Решение. Рассмотрим условия равновесия ворота. Освободив его от связей (подпятника A , подшипника B) и отсоединив трос с грузом 2 от барабана 3 в точке схода троса с барабана, получим расчетную схему (рис. 9.5, б). Запишем уравнения равновесия:

$$R_x = \sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A + X_B - T \cos \alpha = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A = 0;$$

$$R_z = \sum_{k=1}^N F_{kz} = Z_A + Z_B - P_1 - F + T \sin \alpha = 0;$$

$$L_x = \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) = Z_A(l_1 + l_2) - P_1 l_2 + T l_2 \sin \alpha + F l_3 = 0;$$

$$L_y = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) = F l_4 - T r = 0;$$

$$L_z = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k) = -X_A(l_1 + l_2) + T l_2 \cos \alpha = 0.$$

Сила T натяжения троса равна (по модулю) весу P груза 2. Из составленных уравнений находим проекции на оси декартовой системы координат реакций подшипников и модуль силы $\bar{F}$:

$$\begin{aligned} X_A &= 0,866 \text{ кН}; \quad Y_A = 0; \quad Z_A = -0,585 \text{ кН}; \\ X_B &= 0,866 \text{ кН}; \quad Z_B = -0,085 \text{ кН}; \quad F = 0,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

9.2. Равновесие системы тел

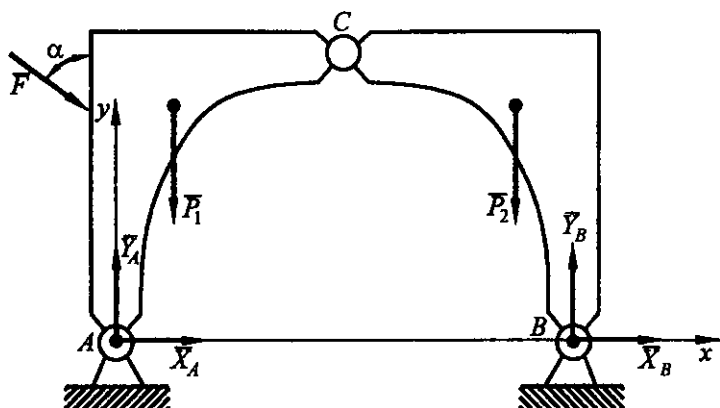
На практике во многих случаях приходится проводить статический расчет конструкций, состоящих из системы твердых тел, соединенных связями. Связи, соединяющие части данной системы тел, будем называть *внутренними* в отличие от *внешних* связей, скрепляющих конструкцию с телами, в нее не входящими.

Если внешние связи заменить силами, то условный равновесия (9.2) будет недостаточно для их определения. Существуют два метода решения.

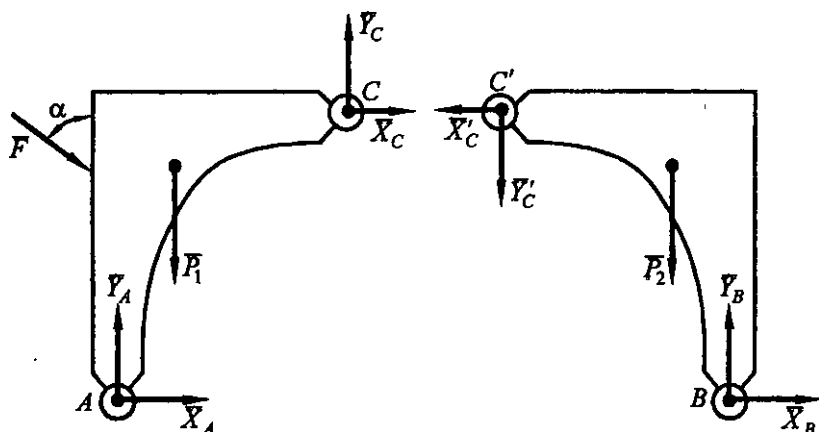
1. Составляют, пользуясь свойствами внутренних связей, дополнительные условия равновесия, из которых определяют неизвестные реакции. Например, для плоской трехшарнирной арки, показанной на рис. 9.6, а, четвертым уравнением будет равенство нулю суммы моментов относительно шарнира C всех сил, действующих на какую-либо одну половину арки. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} &= F_x + X_A + X_B = 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} &= F_y - P_1 - P_2 + Y_A + Y_B = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_B(\bar{F}_k) &= M_B(\bar{F}) + M_B(\bar{P}_1) + M_B(\bar{P}_2) + M_B(\bar{Y}_A) = 0; \\ \sum_{k=1}^N M_C(\bar{F}_k) &= M_C(\bar{F}) + M_C(\bar{P}_1) + M_C(\bar{X}_A) + M_C(\bar{Y}_A) = 0. \end{aligned}$$

Из этих четырех уравнений определяют неизвестные X_A , Y_A , X_B , Y_B .



a



б

Рис. 9.6

2. Мысленно расчлениают конструкцию на отдельные части, заменяя внутренние связи силами. Поскольку все части конструкции находятся в равновесии, то для любой из них можно составить условия равновесия и определить неизвестные реакции связей.

Такое расчленение трехшарнирной арки показано на рис. 9.6, б. На основании закона действия и противодействия реакции связей в шарнире С попарно равны по модулю и проти-

воположны по направлению, т. е. $\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$, $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$. Для каждой половины арки (плоская система сил) имеем три независимых условия равновесия (всего их шесть), из которых находим неизвестные $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$.

Метод, связанный с расчленением системы на части, применяют, когда нужно определить силы во внутренних связях.

Пример 9.5. Две горизонтальные балки AC и DE длинами $2l$ и l соответственно в точках A и E прикреплены к неподвижному основанию цилиндрическими шарнирами (рис. 9.7). Концы балок C и D с помощью цилиндрических шарниров соединены балкой CD , длина которой l . Все три балки находятся в одной плоскости, внешние силы приложены к серединам балок. Определить реакции опор.

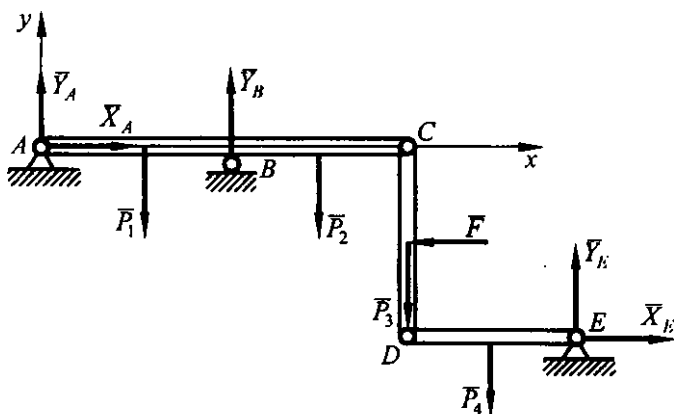


Рис. 9.7

Решение. Для трех тел можно написать девять независимых условий равновесия и найти все неизвестные. Поступим иначе, т. е. составим три условия равновесия для всей системы и два дополнительных условия: сумма моментов всех сил, действующих на балку DE , относительно точки D равна нулю и сумма моментов всех сил, действующих на систему, состоящую из двух балок CD и DE , относительно точки C также равна нулю. Получим пять уравнений для определения пяти неизвестных:

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A - F + X_E = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A - P_1 + Y_B - P_2 - P_3 - P_4 + Y_E = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_A(\bar{F}_k) = l(-0,5P_1 + Y_B - 1,5P_2 - 2P_3 - 2,5P_4 - 0,5F + 3Y_E + X_E) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_D(\bar{F}_k) = l(Y_E - 0,5P_4) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_C(\bar{F}_k) = l(-0,5F - 0,5P_4 + Y_E + X_E) = 0.$$

Приняв $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = F = P$, находим $X_A = 0,5P$; $Y_A = -1,5P$; $Y_B = 5P$; $X_E = 0,5P$; $Y_E = 0,5P$.

9.3. Определение внутренних сил

Внутренними называются силы, с которыми одна часть тела в каком-либо сечении действует на другую его часть. Внутренние силы приходится определять, например, при расчетах на прочность. На основании закона действия и противодействия внутренние силы всегда попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Если левая часть тела действует на его правую часть силой $\bar{F}$, то, в свою очередь, правая часть действует на левую силой $-\bar{F}$.

Метод определения внутренних сил в телах аналогичен методу определения неизвестных реакций связей. Рассмотрим его на примере балки (рис. 9.8, а). Балка AB заделана левым концом и нагружена силами $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и парой сил с моментом M_B . Все силы находятся в одной плоскости. Определить внутренние силы в поперечном сечении C балки, находящемся от заделки на расстоянии a_1 .

Определим реакции связи в сечении A :

$$X_A = 0; Y_A = F_1 - F_2; M_A = M_B + F_1 l_1 - F_2 l_2.$$

Мысленно разрежем балку на две части и действие одной части на другую заменим силами. Так как направления и модули сил в поперечном сечении C неизвестны, то их можно представить в виде произвольно направленных векторов $\bar{R}_C$ и $\bar{M}_C$. Для рассматриваемой плоской системы сил

$$\bar{R}_C = \bar{X}_C + \bar{Y}_C; \bar{M}_C = \bar{M}_{Cz}.$$

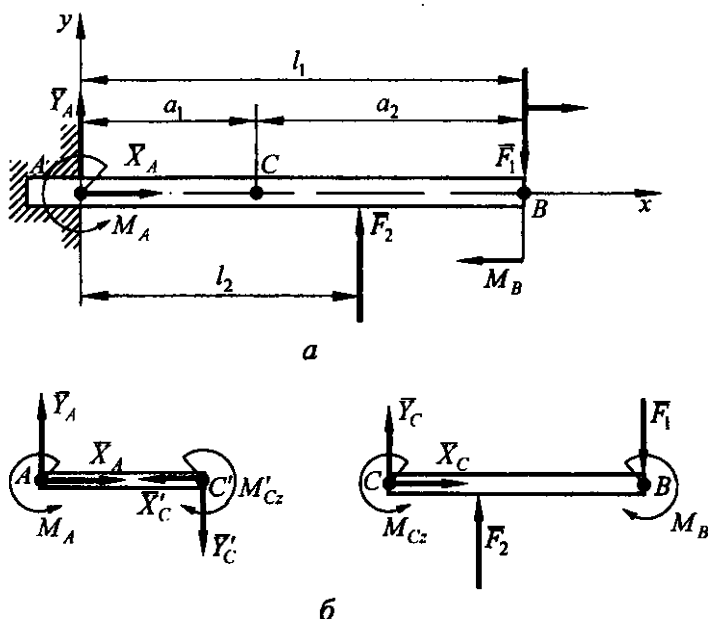


Рис. 9.8

На рис. 9.8, б изображены две части балки с действующими на них силами. Согласно закону действия и противодействия, силы, приложенные в сечении С к одной части балки, равны по модулю и противоположны по направлению силам, приложенным в том же сечении к другой части балки. Теперь для любой части балки можно написать уравнения равновесия и определить неизвестные внутренние силы X_C , Y_C и момент M_{Cz} в сечении С.

Например, из условий равновесия правой части балки получим

$$X_C = 0; Y_C = F_1 - F_2; M_{Cz} = M_B + F_1 a_2 - F_2 (l_2 - a_1).$$

Таким образом, в сечении С действует поперечная сила $\bar{Y}_C$ и изгибающий момент M_{Cz} . Аналогично можно найти X_C , Y_C , M_{Cz} , рассматривая левую часть балки.

В данном примере на правом конце балки нет неизвестных реакций. Поэтому внутренние силы в поперечном сечении С можно найти и без предварительного определения реакций связи в заделке.

9.4. Статически определимые и статически неопределимые системы

При решении задач статики реакции связей являются неизвестными и их определяют из уравнений равновесия. Если число неизвестных составляющих реакций связей равно числу независимых уравнений равновесия, то рассматриваемая система называется *статически определимой*. Системы, в которых число неизвестных составляющих реакций связей больше числа уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми*.

На рис. 9.9, *а, в* показаны статически определимые, а на рис. 9.9, *б, г* — статически неопределимые системы, поскольку в последних число неизвестных составляющих реакций больше числа уравнений равновесия. Связи, реакции которых не могут быть определены с помощью уравнений равновесия, условно называют лишними, хотя для прочности конструкции они необходимы. Например, если двух крайних тросов недостаточно, чтобы удержать груз, устанавливают третий трос, который обеспечивает надежную подвеску груза.

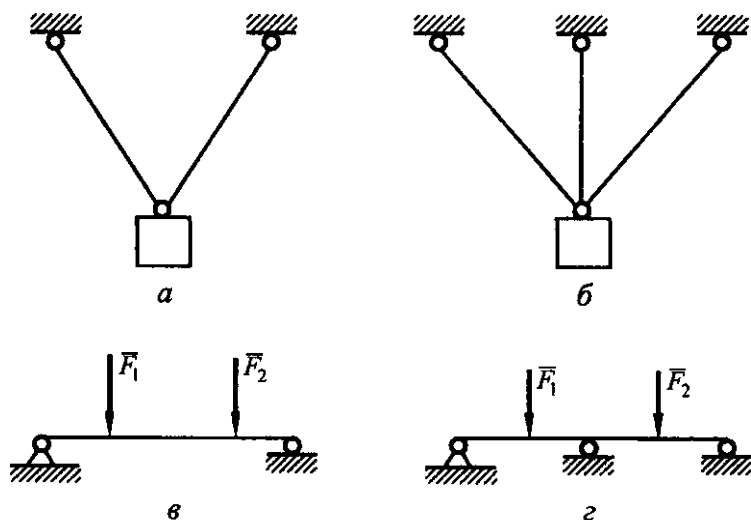


Рис. 9.9

В инженерной практике нередко приходится встречаться со статически неопределимыми системами. Определить реакции в них методами, изложенными в этом разделе для абсолютно твердого тела, невозможно. Для решения статически неопределимых задач необходимо считать тела деформируемыми и дополнительно составлять уравнения деформаций, известные из курса сопро- твления материалов.

9.5. Расчет плоских ферм

Фермой называется жесткая конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Места соединения концов стержней называют **узлами**. Все внешние силы, действующие на ферму, прикладываются только в узлах. Силами трения в узлах пренебрегают; веса стержней или не учитывают, если они малы по сравнению с действующими внешними силами, или их распределяют по узлам. Таким образом, внешние силы, приложенные в узлах фермы, будут вызывать сжатие или растяжение стержней. Как правило, фермы являются статически неопределимыми.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций связей и сил в ее стержнях. Метод решения основан на рассмотрении условий равновесия систем сил.

Разберем его на примере фермы, представленной на рис. 9.10, а. Из условий равновесия найдем реакции X_A , Y_A , Y_B опор. Далее воспользуемся методом вырезания узлов. Узлы будем вырезать в такой последовательности, чтобы в каждом из них было не более двух неизвестных сил, поскольку для системы сходящихся в узле сил можно составить только два аналитических условия равновесия. Для рассматриваемой фермы последовательность вырезания узлов может быть следующей: I, III, II, IV, V, VI, VII или VIII, VII, VI, IV, V, III, II. Узлы вырезают мысленно, разрезая стержни 1–13 и прикладывая силы от узла вдоль стержня (стержень считать растянутым). На рис. 9.10, б показаны системы сил в вырезанных узлах I, III, II. Так как X_A и Y_A уже найдены из условий равновесия фермы, то из условий равновесия узла I определяем силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$, узла III — $\bar{T}_3$ и T_6 , узла II — $\bar{T}_4$

и $\bar{T}_3$ и т. д. В результате решения получаем, что $\bar{T}_3 = 0$ и $\bar{T}_{11} = 0$, т. е. для рассматриваемой конструкции стержни 3 и 11 лишние, поскольку без них ферма также сохраняет свою жесткость.

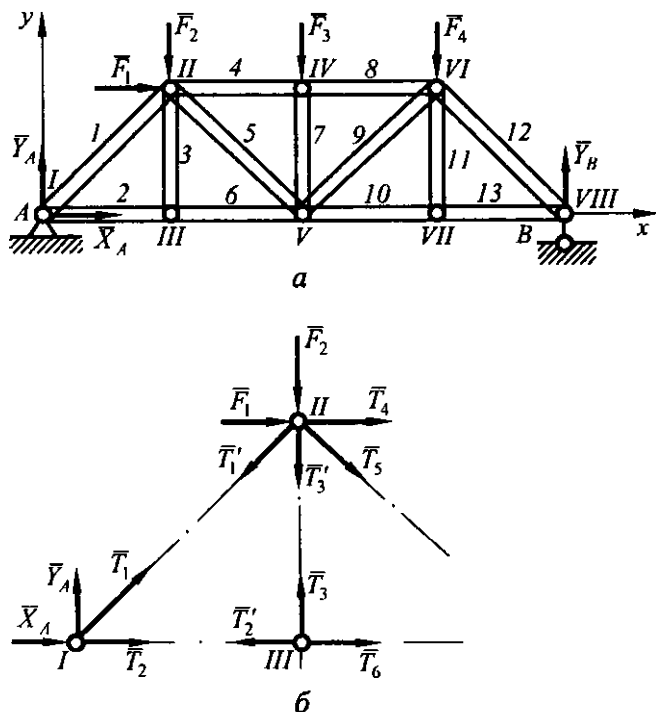


Рис. 9.10

9.6. Распределенные силы

В инженерных расчетах часто приходится встречаться с силами, распределенными по поверхности или объему тела. Наиболее распространенными из них являются силы тяжести, давление воды или газа на какую-либо поверхность, электромагнитные силы.

При рассмотрении равновесия тел распределенные на каком-либо участке силы заменяют их равнодействующей. Приведем некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае распределенные силы характери-

зуются интенсивностью q , т. е. силой, приходящейся на единицу длины. Единица измерения интенсивности силы — ньютон на метр (Н/м).

На рис. 9.11 изображены примеры распределенных на отрезке $OA = a$ параллельных сил. Для распределенных сил, изображенных на рис. 9.11, равнодействующая $\bar{R}^*$ будет соответственно равна

$$R_1^* = qa; \quad R_2^* = \frac{q_{\max} a}{2}; \quad R_3^* = \int_0^a q(x) dx.$$

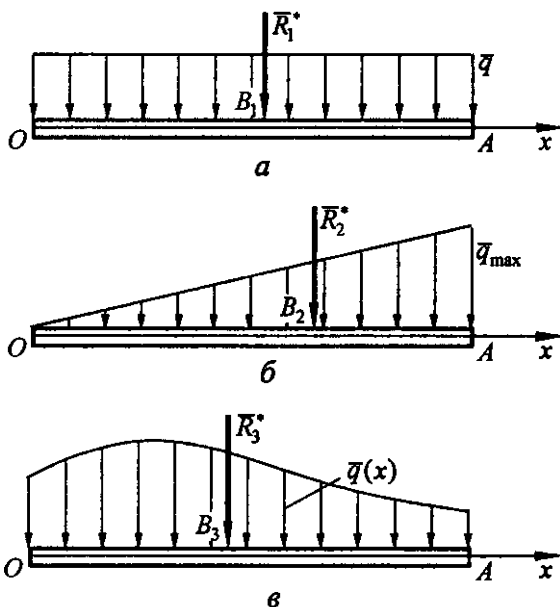


Рис. 9.11

Линию действия равнодействующей (точку B на этой линии) согласно теореме Вариньона находим из условия, что момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов распределенных сил относительно той же точки. Таким образом, получаем

$$OB_1 = \frac{a}{2}; \quad OB_2 = \frac{2a}{3}; \quad OB_3 = \frac{1}{R_3^*} \int_0^a q(x)x dx.$$

Рассмотрим систему сходящихся равномерно распределенных по дуге окружности сил (рис. 9.12). Такие силы возникают, например, от гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического бака.

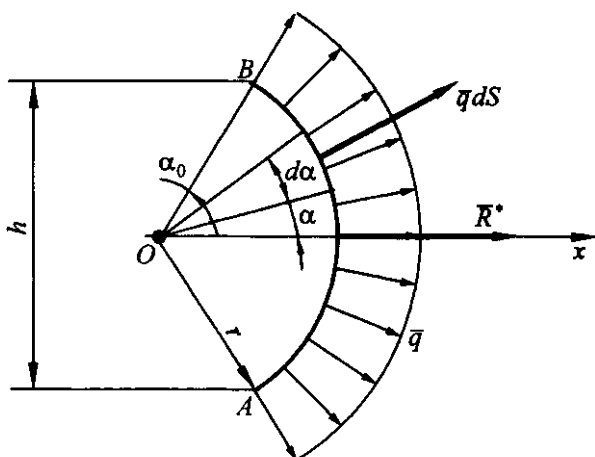


Рис. 9.12

Для этой системы равнодействующая сила $\bar{R}^*$ направлена по оси симметрии Ox , причем $R_x^* = R^*$.

Для определения R^* выделим на дуге элемент $dS = r d\alpha$, положение которого определяется углом α , отсчитываемым от оси симметрии Ox . Тогда $q dS = qr d\alpha$, а модуль равнодействующей будет равен сумме проекций всех элементарных сил $q dS$ только на ось Ox :

$$R^* = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} qr \cos \alpha d\alpha = 2qr \sin \alpha_0.$$

Так как $2r \sin \alpha_0 = h$, то $R^* = qh$.

Следовательно, равнодействующая системы сходящихся равномерно распределенных по дуге окружности сил равна произведению интенсивности сил на длину хорды, стягивающей дугу: линия действия равнодействующей перпендикулярна хорде и проходит через ее середину.

Пример 9.6. Балка AC (рис. 9.13, a) жестко заделана в основание и образует с горизонтом угол α . К ней в точке C шарнирно прикреплена горизонтальная балка CD , которая также с помощью шарнира соединена с вертикальной балкой BD . Определить реакцию заделки и силу в шарнире C , если $AC = BD = l$; $CD = 2l$; $BE = DE$; $AK = (2/3)l$; $l = 3$ м; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 40$ кН; $M = 6$ кН·м; $\vec{F}_1 \perp AC$.

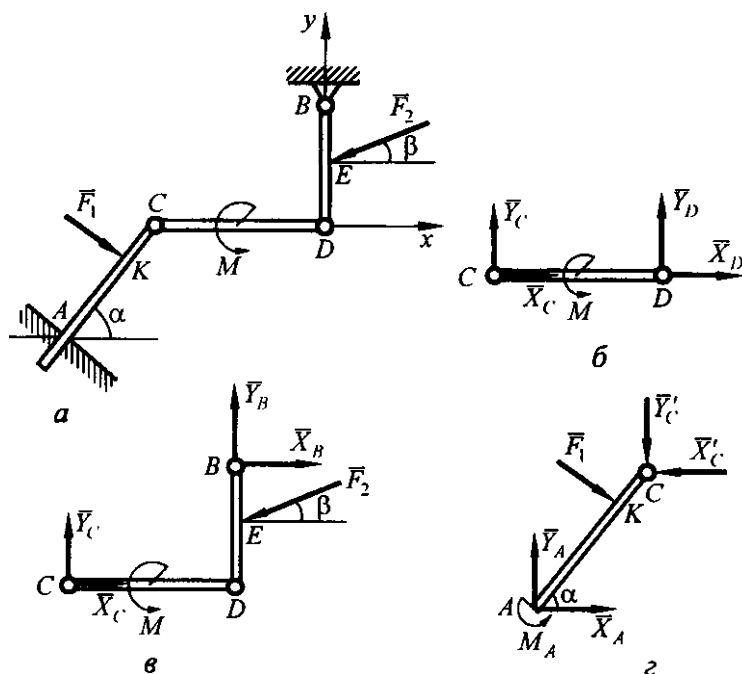


Рис.9.13

Решение. Система находится в равновесии, поэтому в равновесии находится каждая из балок. Для балки CD (рис. 9.13, б)

$$\sum_{k=1}^N M_D(\vec{F}_k) = M - Y_C \cdot 2l = 0,$$

откуда

$$Y_C = M/(2l); \quad Y_C = 1 \text{ кН}.$$

Из условий равновесия балки CD X_C найти нельзя. Поэтому рассмотрим равновесие части CDB системы (рис. 9.13, в). Для нее

$$\sum_{k=1}^N M_B(\vec{F}_k) = X_C \cdot l - Y_C \cdot 2l + M - F_2 \frac{1}{2} l \cos \beta = 0;$$

$$X_C = 14,14 \text{ кН}; R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2}; R_C = 14,18 \text{ кН}.$$

Теперь можно определить реакцию заделки. Для этого составим уравнения равновесия балки AC (рис. 9.13, з):

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A - X'_C + F_1 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A - Y'_C - F_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_A(\bar{F}_k) = M_A - \frac{2}{3} F_1 l + X'_C l \sin \alpha - Y'_C l \cos \alpha = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем $X_A = 5,48 \text{ кН}$; $Y_A = 6 \text{ кН}$; $M_A = -15,24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Пример 9.7. К кривошипу OA кулисного механизма (рис. 9.14, а) приложена пара сил с моментом M . Определить вертикальную силу $\bar{F}$, необходимую для уравнивания механизма при $\alpha = 30^\circ$, а также силу взаимодействия между ползуном и кулисой O_1B , если $OA = 2l$; $AB = l$; $l = 0,2 \text{ м}$; $M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Трением между ползуном и кулисой, а также в шарнирах пренебречь.

Решение. Поскольку трение между ползуном и кулисой не учитывается, то силы взаимодействия между ними перпендикулярны кулисе. Составим уравнение равновесия кривошипа OA с прикрепленным к нему ползуном (рис. 9.14, б)

$$\sum_{k=1}^N M_O(\bar{F}_k) = M - R_A \sin \alpha \cdot 2l = 0$$

и вычислим

$$R_A = \frac{M}{2l \sin \alpha}; R_A = 500 \text{ Н}.$$

Приравняв к нулю сумму моментов сил, приложенных к кулисе O_1B (рис. 9.14, в) относительно точки O_1 , получаем

$$\sum_{k=1}^N M_{O_1}(\bar{F}_k) = R_A 4l - F \cdot 5l \sin \alpha = 0,$$

откуда находим

$$F = \frac{4}{5} \frac{R_A}{\sin \alpha}; F = 800 \text{ Н}.$$

Пример 9.8. Трехшарнирная полукруглая арка (рис. 9.15, а) нагружена парой сил с моментом M и системой сходящихся распределенных на участке сил с постоянной интенсивностью q . Найти опорные реакции, если $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 4 \text{ кН/м}$; $r = 1 \text{ м}$.

Решение. Распределенные силы заменим их равнодействующей, модуль которой $R^* = qBC = qr\sqrt{2}$.

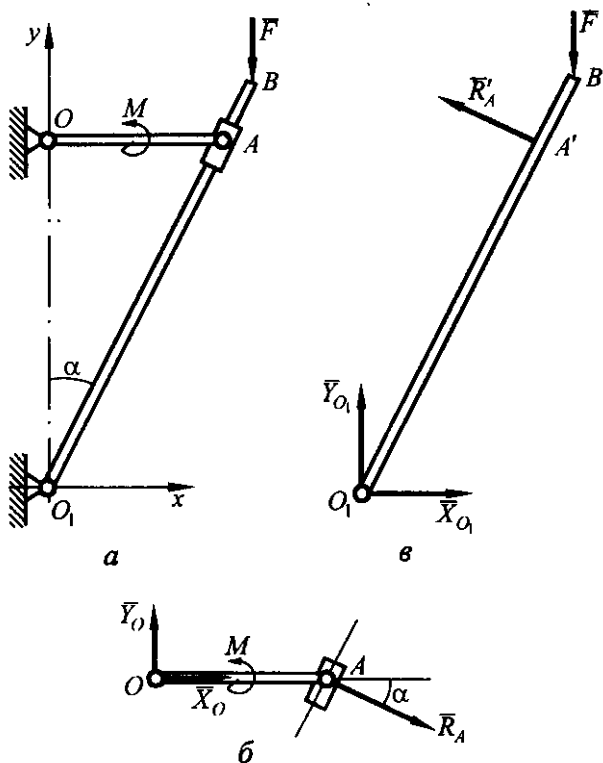


Рис. 9.14

Запишем два уравнения равновесия всей арки (рис. 9.15, б)

$$\sum_{k=1}^N M_B(\bar{F}_k) = -Y_A \cdot 2r + R^* r \sin 45^\circ - M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = Y_A + Y_B - R^* \sin 45^\circ = 0$$

и найдем

$$Y_A = \frac{1}{2} R^* \sin 45^\circ - \frac{1}{2} \frac{M}{r}; \quad Y_A = -8 \text{ кН},$$

$$Y_B = R^* \sin 45^\circ - Y_A; \quad Y_B = 12 \text{ кН}.$$

Так как из третьего уравнения равновесия всей арки $\left(\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0 \right)$ силы X_A и X_B вычислить нельзя, то запишем уравнение равновесия левой половины арки (рис. 9.15, в)

$$\sum_{k=1}^N M_C(\bar{F}_k) = X_A r - Y_A r - M = 0$$

и определим X_A :

$$X_A = Y_A + \frac{M}{r}; \quad X_A = 12 \text{ кН}.$$

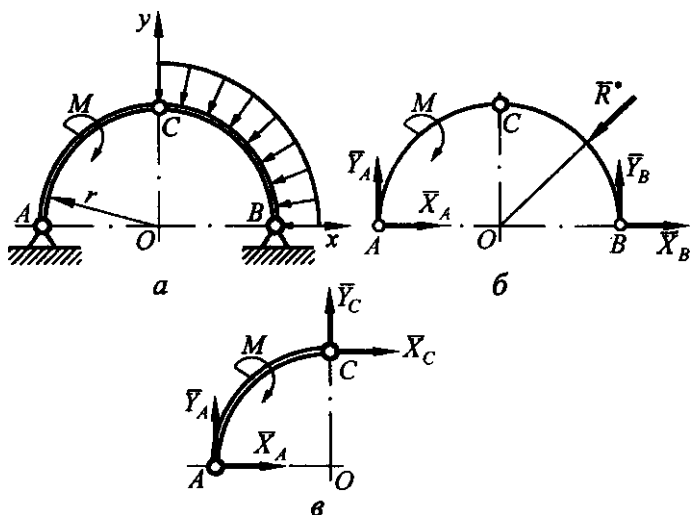


Рис. 9.15

После этого вернемся к расчетной схеме (см. рис. 9.15, б), для которой

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = X_A + X_B - R^* \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда

$$X_B = R^* \cos 45^\circ - X_A; \quad X_B = -8 \text{ кН}.$$

ТРЕНИЕ

10.1. Законы трения скольжения

Между движущимися телами в плоскости их соприкосновения возникает *сила трения скольжения*. Обусловлено это прежде всего шероховатостью соприкасающихся поверхностей и наличием сцепления у прижатых тел.

В инженерных расчетах обычно пользуются установленными опытным путем закономерностями, которые с некоторой степенью точности отражают действие силы трения. Эти закономерности называют *законами трения скольжения*. Их можно сформулировать следующим образом.

1. При стремлении сдвинуть одно тело относительно другого в плоскости их соприкосновения возникает сила трения $\bar{F}$, модуль которой может принимать любые значения от нуля до $F_{\max}$, т. е.

$$0 \leq F \leq F_{\max}.$$

Сила трения приложена к телу и направлена в сторону, противоположную возможному направлению скорости точки приложения силы.

2. Максимальная сила трения равна произведению *коэффициента трения* f на силу нормального давления N :

$$F_{\max} = fN. \quad (10.1)$$

Коэффициент трения f — безразмерная величина, зависящая от материалов и состояния поверхностей соприкасающихся тел (шероховатость, температура, влажность и т. п.). Определяют его опытным путем.

Различают коэффициенты трения покоя и трения скольжения, причем последний, как правило, зависит и от скорости

скольжения. Коэффициент трения покоя соответствует такой максимальной силе трения $F_{\max}$, при которой имеется предельное состояние равновесия. Малейшее увеличение внешних сил может вызвать движение. Коэффициент трения покоя, как правило, немного больше коэффициента трения скольжения. С увеличением скорости скольжения значение коэффициента трения скольжения сначала незначительно уменьшается, а затем остается практически неизменным. Значения коэффициентов трения для некоторых пар трения следующие: дерево по дереву 0,4–0,7; металл по металлу 0,15–0,25; сталь по льду 0,027.

3. Максимальная сила трения в довольно широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

Силу трения скольжения иногда называют *силой сухого трения*.

10.2. Реакция шероховатой поверхности. Угол трения

Реакция идеально гладкой поверхности, как уже говорилось выше, направлена по нормали к поверхности. На шероховатой поверхности могут возникать силы трения скольжения. Поэтому реакцию шероховатой поверхности представим в виде двух составляющих: нормальной реакции $\bar{N}$ (равна по модулю силе нормального давления) и перпендикулярной ей силы трения $\bar{F}$ (рис. 10.1). Полная реакция $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}$ всегда отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол α . На рис. 10.1 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = F/N.$$

Если тело лежит на горизонтальной шероховатой поверхности и на него не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяжести, то $F = 0$, а полная реакция $R = N$ и перпендикулярна опорной поверхности. Приложив к телу силу $\bar{F}_1$, мы стремимся вызвать его движение, но оно не происходит, так как возникает сила трения $\bar{F} = -\bar{F}_1$, причем $F \leq F_{\max}$. С увеличением силы

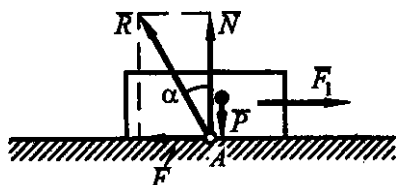


Рис. 10.1

$\bar{F}_1$ будет возрастать и сила $\bar{F}$. Наконец, при $F_1 = F_{\max}$ наступит предельное состояние равновесия, при котором полная реакция $\bar{R}$ отклонится от вертикали на угол $\alpha_{\max}$, называемый *углом трения*. Обозначив его через φ , получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = f. \quad (10.2)$$

Тангенс угла трения равняется коэффициенту трения. Полная реакция неидеальной связи при равновесии имеет направление в пределах угла трения.

10.3. Реакция связи при качении

Абсолютно твердых тел, как и абсолютно гладких поверхностей, в природе не существует. Поэтому круглое тело (цилиндр, колесо), деформируясь, вдавливается в опорную поверхность. При качении цилиндр вдавливается в опорную плоскость и контактирует с ней по некоторой поверхности, которая в плоскости рисунка образует дугу CD , сдвинутую относительно вертикального диаметра цилиндра в направлении качения (рис. 10.2, *а*). Полная реакция $\bar{R}$ опорной поверхности на цилиндр как сумма системы распределенных сил, вызванных деформацией поверхности, препятствует качению последнего. Это сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого, условно называют *трением качения*.

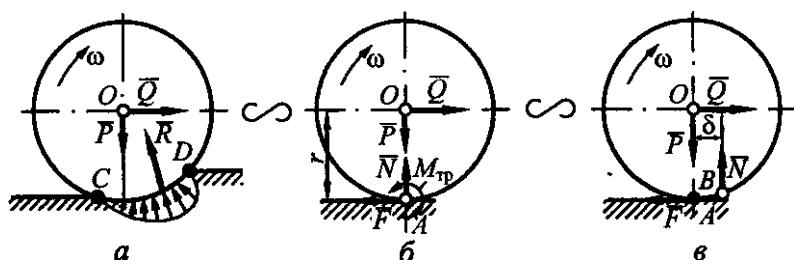


Рис. 10.2

Определение значений и направлений распределенных сил представляет сложную задачу механики деформируемого твердого тела. В инженерных расчетах нас интересует момент сопротивления качению (рис. 10.2, б). Схематизируя явление, будем рассматривать качение по недеформируемой поверхности, а полную реакцию $\bar{R}$ (см. рис. 10.2, а) представлять в виде двух составляющих, приложенных в точке В, смещенной от точки А в сторону возможного качения на некоторую величину δ (рис. 10.2, в). Сила $\bar{F}$ — сила трения скольжения, а сила $\bar{N}$ — нормальная реакция, равная по модулю силе нормального давления.

Из условия равновесия цилиндра (см. рис. 10.2, в) будем иметь

$$N = P, \quad F = Q, \quad Q_{\max} r = \delta N. \quad (10.3)$$

Произведение $\delta N = (M_{\text{тр}})_{\max}$ называется **моментом сопротивления качению**, или **моментом трения качения**. Если сила Q мала, то смещение силы $\bar{N}$ от вертикального диаметра цилиндра также незначительно; с увеличением Q это смещение возрастает. Наконец, при $Q_{\max}$ цилиндр достигнет предельного состояния равновесия и нормальная реакция $\bar{N}$ будет отстоять от вертикального диаметра на предельном расстоянии δ , которое называется **коэффициентом трения качения**. Выражают δ обычно в сантиметрах. Коэффициент δ зависит от свойств материалов и состояния поверхностей соприкасающихся тел, определяют его опытным путем. Например, при качении колеса по рельсу $\delta = 0,005$ см, закаленного шарика по закаленной канавке (шариковый подшипник) $\delta = 0,001$ см.

10.4. Равновесие тела при наличии трения. Конус трения

Равновесие тел с учетом сил трения скольжения рассматривают обычно для предельного состояния, когда сила трения достигает максимального значения. Реакция неидеальной связи представляется двумя составляющими: нормальной реакцией $\bar{N}$ и максимальной силой трения $\bar{F}_{\max}$. В зависимости от поставленной задачи результат решения может быть выражен в виде равенства или в виде неравенства.

Равновесие тела на наклонной шероховатой плоскости

Рассмотрим вначале предельный случай равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости, когда $\bar{F} = \bar{F}_{\max}$ (рис. 10.3). Проецируя все силы, которые действуют на тело, на ось Ox , получим

$$P \sin \alpha_{\max} = F_{\max} = f P \cos \alpha_{\max},$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = f.$$

Но тело может находиться в покое на наклонной плоскости и при меньших углах ее наклона. Поэтому условие равновесия тела на наклонной плоскости выразим в виде неравенства

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Равенство $f = \operatorname{tg} \alpha_{\max}$ можно использовать для опытного определения коэффициента трения скольжения.

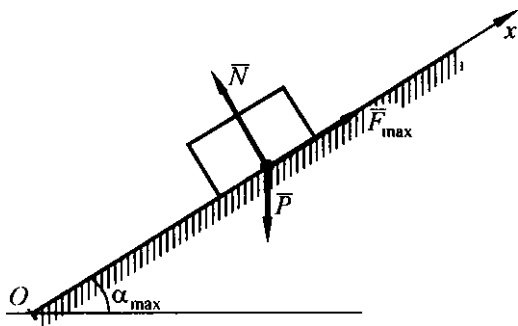


Рис. 10.3

Рассмотрим равновесие тела на наклонной шероховатой плоскости, когда кроме силы тяжести на тело действует внешняя сила F_1 (рис. 10.4). Здесь возможны две ситуации: 1) если $F_1 < P \sin \alpha$, то тело может начать скользить вниз, а сила трения $F_{\max}$ будет препятствовать этому скольжению (см. рис. 10.4); 2) если $F_1 > P \sin \alpha$, то тело будет стремиться перемещаться по наклонной плоскости вверх, сила трения $F_{\max}$ в этом случае будет направлена в противоположную сторону и будет это движе-

ние тормозить. Следовательно, чтобы тело не скользило вниз и не начало двигаться вверх, необходимо выполнить следующие условия:

$$F_1 > P \sin \alpha - f P \cos \alpha ;$$

$$F_1 < P \sin \alpha + f P \cos \alpha .$$

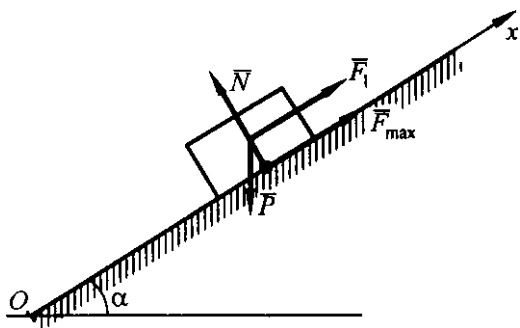


Рис. 10.4

Таким образом, условие равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости выражается двойным неравенством

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha) < F_1 < P(\sin \alpha + f \cos \alpha) .$$

Конус трения

Рассмотрим равновесие невесомого тела на горизонтальной шероховатой плоскости под действием наклонной силы $\vec{F}_1$, стремящейся его сдвинуть (рис. 10.5). Тело будет сдвинуто только тогда, когда

$$F_1 \sin \alpha > F_{\max} = F_1 \cos \alpha \cdot f .$$

Предельному случаю равновесия соответствует такой угол наклона α , при котором выполняется равенство $F_1 \sin \alpha = f F_1 \cos \alpha$, или $\operatorname{tg} \alpha = f$. Если $\operatorname{tg} \alpha \leq f$, то как бы не возрастала сила F_1 , тело сдвинуть с места невозможно. Возрастающей сдвигающей силе $F_1 \sin \alpha$ будет противостоять пропорционально ей увеличивающаяся сила трения $F_1 f \cos \alpha$.

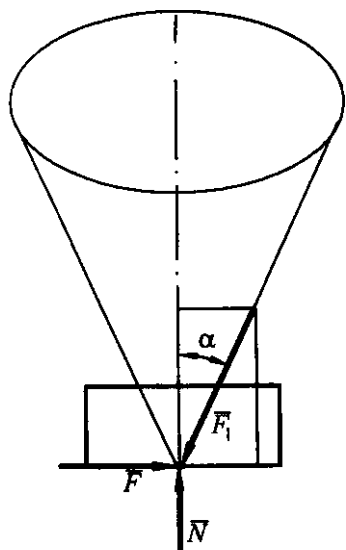


Рис. 10.5

Поворачивая вокруг вертикали вектор силы $\bar{F}_1$ и сохраняя при этом предельное равновесие, опишем конус, называемый **конусом трения**. Если свойства соприкасающихся поверхностей во всех направлениях одинаковы, то угол α будет постоянным, а конус трения круговым.

Конус трения обладает тем замечательным свойством, что если действующая на тело сила находится внутри него, то тело всегда будет находиться в равновесии. Этим объясняются известные явления заклинивания, или самоторможения тел.

Равновесие тела с учетом трения качения

Рассмотрим две схемы, широко встречающиеся на практике: ведомого и ведущего колес.

Схема нагружения ведомого колеса изображена на рис. 10.2. Если, согласно (10.3),

$$Q \leq \frac{\delta}{r} N, \quad (10.4)$$

то колесо не сможет катиться; если же

$$Q \leq F = f N,$$

то колесо не будет скользить (без качения) и будет находиться в равновесии. Как правило, $\delta/r \ll f$, поэтому определяющим является неравенство (10.4). Чтобы вызвать качение, требуется значительно меньшая сила $\bar{Q}$, чем для скольжения. Поэтому в технике, везде где возможно, скольжение стремятся заменить качением.

Ведущее колесо от ведомого отличается тем, что к нему прикладывается пара сил с моментом M (рис. 10.6). Сила $\bar{Q}$ характеризует сопротивление транспортного средства, напри-

мер автомобиля, которому ведущее колесо стремится сообщить движение вправо.

Из условия равновесия колеса получаем

$$F = Q; \quad N = P; \quad M = Qr + M_{\text{тр}}.$$

В предельном состоянии равновесия

$$Q_{\text{max}} = fP; \quad M_{\text{max}} = (fr + \delta)N.$$

Ведущее колесо может сообщать автомобилю силу Q_{max} только тогда, когда к колесу будет приложен момент M_{max} . В этом случае полностью используется максимальная сила трения скольжения $F_{\text{max}} = fN$. При $M < M_{\text{max}}$ сила $Q < Q_{\text{max}}$, при $M > M_{\text{max}}$ сила Q должна быть больше F_{max} , что невозможно (колесо начинает буксовать); ведущее колесо может сообщать автомобилю силу, не превышающую силу трения скольжения. Такую силу называют силой тяги по сцеплению.

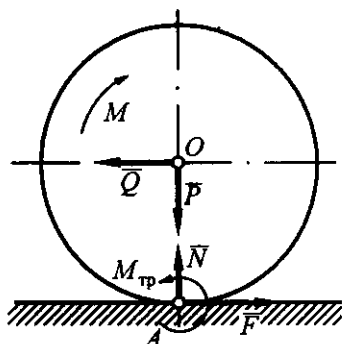


Рис. 10.6

Трение нити о цилиндрическую поверхность (задача Эйлера)

Пусть круглый вал обмотан нитью, к одному концу которой приложена сила $\bar{F}_1$ (рис. 10.7). Определим наименьшую силу $\bar{F}_2$, которую надо приложить к другому концу нити, чтобы удержать силу $\bar{F}_1$, если угол охвата нити γ , а коэффициент трения нити о вал f .

Рассмотрим равновесие элементарного участка нити DE длиной $ds = r d\beta$, где r — радиус вала. В точках D и E натяжение нити будет соответственно T и $(T + dT)$. На нить, кроме того, действует сила нормального давления вала dN и сила трения dF , приложенные в точке C . Сумма проекций всех сил на касательную к валу в точке C равна нулю. Тогда

$$dT = dF.$$

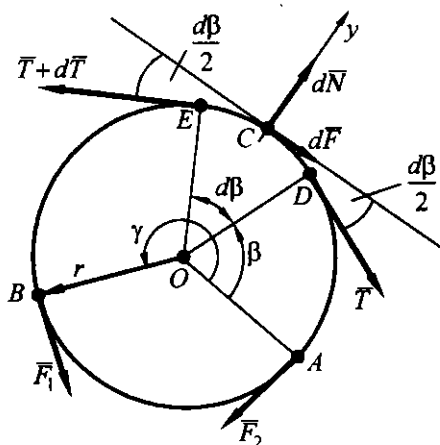


Рис. 10.7

Наименьшее значение силы F_2 будет соответствовать предельному случаю равновесия, поэтому $dF = fdN$.

Проецируя все силы на нормаль Cy , находим

$$dN = (T + T + dT) \sin(d\beta/2) = 2T(d\beta/2) = Td\beta.$$

Подставим это значение dN в выражение $dT = fdN$:

$$dT = fTd\beta.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение в пределах от F_2 до F_1 и от 0 до γ :

$$\int_{F_2}^{F_1} \frac{dT}{T} = f \int_0^\gamma d\beta.$$

Отсюда находим

$$\ln \frac{F_1}{F_2} = f\gamma,$$

или

$$F_2 = F_1 e^{-f\gamma}.$$

При $f = 0$, как и следовало ожидать, $F_2 = F_1$. Увеличивая угол охвата γ , можно значительно уменьшить силу F_2 . Например, при $f = 0,5$ и $\gamma = 4\pi$ $F_2 = 0,002F_1$.

Рассмотренная задача часто встречается в практике, например при расчете ленточных тормозов или швартовки кораблей к причалу.

Пример 10.1. Цилиндрический каток весом P , обмотанный двумя симметрично расположенными нитями, находится на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 10.8, а). Найти, при каких значениях угла α каток будет в равновесии, если коэффициент трения скольжения между катком и плоскостью равен f . Трением качения пренебречь.

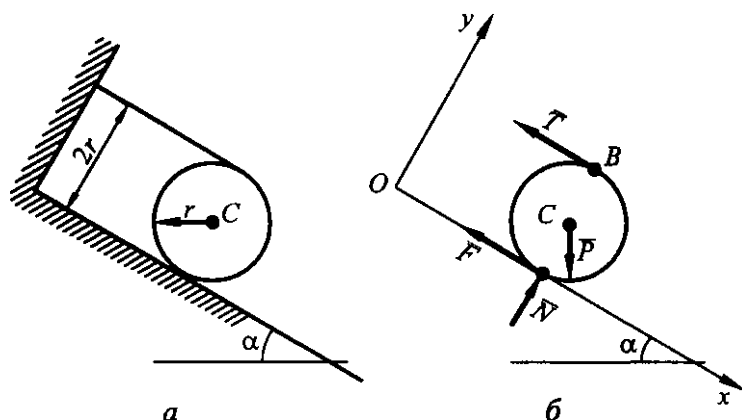


Рис. 10.8

Решение. Освободим каток от связей, заменив их реакциями (рис. 10.8, б). При равновесии катка на плоскости

$$\sum_{k=1}^N M_B(\vec{F}_k) = Pr \sin \alpha - F \cdot 2r = 0.$$

В предельном случае равновесия $F = F_{\max} = fN$, где $N = P \cos \alpha_{\text{пр}}$. Следовательно,

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = 2f \cos \alpha_{\text{пр}}.$$

Равновесие катка возможно, если

$$\alpha < \alpha_{\text{пр}},$$

где $\alpha_{\text{пр}} = \arctg 2f$.

Пример 10.2. Грузозахватный механизм (рис. 10.9, а) состоит из двух одинаковых рычагов 1 и 2, конуса 3 и стяжки 4. Определить значение коэффициентов трения скольжения между пластинами механизма и грузом 5, при которых

возможно равновесие системы в заданном положении. Весом механизма по сравнению с весом P груза, а также трением между конусом и рычагами пренебречь.

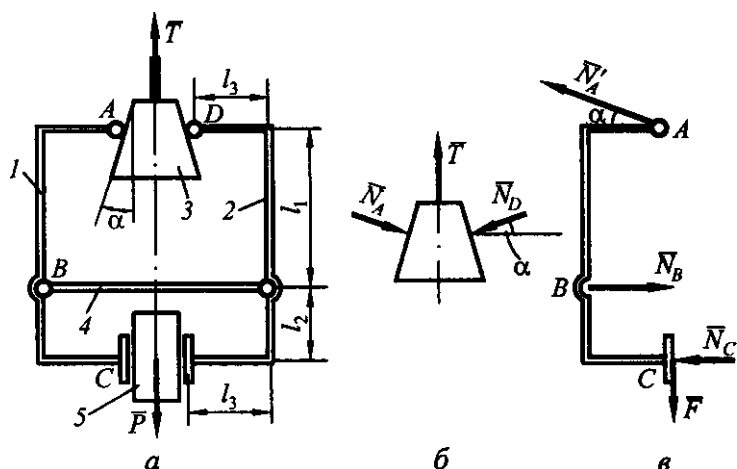


Рис.10.9

Решение. В предельном случае равновесия системы сила трения скольжения, приложенная к рычагу I в точке C ,

$$F = F_{\max} = f N_C,$$

где N_C — сила давления груза на рычаг.

Для определения N_C рассмотрим вначале условия равновесия конуса 3 (рис. 10.9, б). К конусу приложена система сходящихся сил. Следовательно, условие равновесия имеет вид

$$\bar{N}_A + \bar{N}_D + \bar{T} = 0,$$

где $\bar{T}$ — сила натяжения троса, равная по модулю весу P груза 5.

Находим

$$N_A = N_D = \frac{T}{2 \sin \alpha}.$$

Условия равновесия рычага I (рис. 10.9, в):

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = N'_A \sin \alpha - F = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_B(\bar{F}_k) = N'_A \cos \alpha \cdot l_1 + N'_A \sin \alpha \cdot l_3 - F l_3 - N_C l_2 = 0.$$

Так как $F = N_A \sin \alpha$, то

$$N_C = N'_A \cos \alpha \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} T \operatorname{ctg} \alpha .$$

Из условия равновесия груза 5 в проекции на ось Oy имеем

$$2F = 2F_{\max} = P ,$$

откуда

$$\frac{l_1}{l_2} f T \operatorname{ctg} \alpha = P .$$

Следовательно,

$$f = f_{\min} = \frac{l_2}{l_1} \frac{P}{T} \operatorname{tg} \alpha$$

и равновесие системы в заданном положении возможно, если

$$f > f_{\min} = (l_2/l_1) \operatorname{tg} \alpha .$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

11.1. Центр системы параллельных сил

Рассмотрим две направленные в одну сторону параллельные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, приложенные к телу в точках A_1 и A_2 (рис. 11.1). Равнодействующая этих сил

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

приложена в точке C , лежащей на прямой A_1A_2 . Положение точки C найдем на основании теоремы Вариньона. Согласно этой теореме,

$$M_C(\vec{P}) = M_C(\vec{P}_1) + M_C(\vec{P}_2).$$

Так как $M_C(\vec{P}) = 0$, то

$$P_1 CA_1 = P_2 CA_2. \quad (11.1)$$

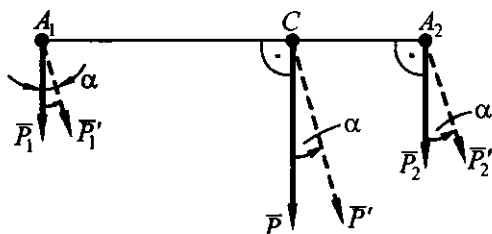


Рис. 11.1

Повернув силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ в одну сторону на один и тот же произвольный угол α вокруг точек A_1 , A_2 , приходим к выводу, что и

равнодействующая повернется в ту же сторону на угол α и будет приложена в той же точке C . Такая точка называется *центром системы этих параллельных сил*.

Приложим к телу в конкретных точках систему параллельных сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k, \dots, \bar{P}_N$. Пусть она имеет равнодействующую

$$\bar{P} = \sum_{k=1}^N \bar{P}_k. \quad (11.2)$$

Последовательным сложением всех сил найдем точку C приложения равнодействующей $\bar{P}$. При повороте сил $\bar{P}_k$ в одну сторону на один и тот же угол равнодействующая повернется на тот же угол, оставаясь приложенной в точке C и параллельной силам $\bar{P}_k$. Точка C приложения равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол называется центром системы параллельных сил.

Найдем координаты центра системы параллельных сил, (рис. 11.2). На основании теоремы Вариньона

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{P}_k).$$

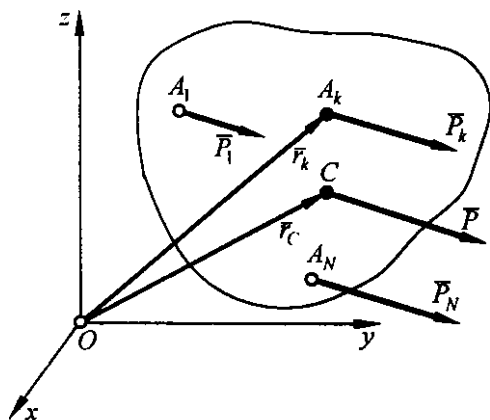


Рис. 11.2

Запишем моменты сил в виде векторных произведений

$$\vec{r}_C \times \vec{P} = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times \vec{P}_k),$$

где $\vec{r}_C$ — радиус-вектор центра системы параллельных сил.

По направлению действия сил $\vec{P}_k$ введем единичный вектор $\vec{e}$ и приведем полученное векторное равенство к виду

$$\vec{r}_C \times \vec{e} P = \sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k \times \vec{e},$$

или

$$\left(\vec{r}_C \sum_{k=1}^N P_k - \sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k \right) \times \vec{e} = 0.$$

В этом векторном произведении перемножаемые векторы не параллельны, поэтому

$$\vec{r}_C \sum_{k=1}^N P_k - \sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k = 0.$$

В результате получаем формулу для определения положения центра системы параллельных сил в векторной форме

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k}. \quad (11.3)$$

Записав векторное равенство (11.3) в проекциях на оси координат, находим координаты точки C

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k. \quad (11.4)$$

В формуле (11.3) выражение $\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k$ носит название *статического момента системы параллельных сил относительно центра O* . Этот статический момент равен произведению радиус-вектора $\vec{r}_C$ центра параллельных сил на сумму всех сил, т. е.

$$\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k = \vec{r}_C \sum_{k=1}^N P_k = \vec{r}_C P.$$

Точно так же входящее в первое равенство (11.4) выражение $\sum_{k=1}^N P_k x_k$ называется *статическим моментом системы параллельных сил относительно плоскости Оуз* и т. д.

11.2. Центр тяжести твердого тела

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная вертикально вниз сила, которая называется *силой тяжести*. Силы тяжести каждой частицы тела, строго говоря, направлены по радиусам к центру Земли и не являются параллельными. Но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, непараллельность настолько незначительна, что в расчетах с большой точностью силы тяжести их частиц можно считать параллельными, сохраняющими свои значения, точки приложения и параллельность при любых поворотах тела. Поэтому, обозначив силу тяжести частицы через P_k , можно, согласно формулам (11.3) и (11.4), найти точку C , которая неизменно связана с телом и называется *центром системы параллельных сил тяжести*.

Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела*. Точка C — это геометрическая точка, она может и не принадлежать телу, но она всегда с ним связана, например центр тяжести баскетбольного мяча, кольца и др.

Выразим силу тяжести (вес) частицы тела через ее объем V . Тогда величина

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$$

называется *удельным весом*, а величина

$$\rho = \gamma/g$$

— *плотностью* тела в данной точке. Единицами измерения γ и ρ в СИ будут Н/м^3 и $\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$ соответственно.

Для частнцы тела будем иметь $P_k = V_k \gamma_k = V_k \rho_k g$. Подставив эти соотношения в выражения (11.3) и (11.4), получим формулы для $\bar{r}_C$ и координат центра тяжести:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g};$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g x_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g y_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g z_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k g}.$$

После сокращения на g эти выражения представляют собой соответственно *радиус-вектор* и *координаты центра масс (центра инерции) тела*.

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k};$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k x_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k y_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k z_k}{\sum_{k=1}^N V_k \rho_k}.$$

Для тела, находящегося в однородном поле тяготения ($g = \text{const}$), положения центра тяжести и центра масс совпадают. Однако понятие о центре масс является более общим, чем понятие о центре тяжести, так как оно имеет смысл не только для одного твердого тела, но и для любой механической системы; кроме того, это понятие не связано с тем, находится тело в поле тяготения или нет.

Если плотность тела во всех его точках одинакова, то в приведенных соотношениях можно сократить ρ_k . Тогда, заменяя суммирование интегрированием по всему объему тела V , получаем

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(V)} \bar{r} dV}{V}; \quad x_C = \frac{\int_{(V)} x dV}{V}; \quad y_C = \frac{\int_{(V)} y dV}{V}; \quad z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{V}.$$

Эти формулы определяют $\bar{r}_C$ и координаты центра тяжести объема тела.

Иногда тело выполнено в виде тонкой пластинки, имеющей постоянную толщину и удельный вес, причем толщина пластинки несоизмеримо мала по сравнению с двумя другими ее размерами. В этом случае интеграл по объему заменяется интегралом по площади S :

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dS}{S}; \quad x_C = \frac{\int x dS}{S}; \quad y_C = \frac{\int y dS}{S}.$$

Эти формулы определяют радиус-вектор и координаты центра тяжести пластинки в плоскости.

11.3. Методы определения координат центра тяжести тела

1. Метод симметрии. Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

а. Пусть тело симметрично относительно плоскости Oxy (рис. 11.3). Тогда вследствие симметрии каждому элементу K тела объемом $\Delta V_k(x_k, y_k, z_k)$ будет соответствовать элемент K' того же объема с координатами $(x_k, y_k, -z_k)$. Поэтому статический момент объема $\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k = 0$ и координата $z_C = \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k / V = 0$.

Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии Oxy .

б. Пусть тело симметрично относительно оси Oz (рис. 11.4). Тогда всякому элементу K тела объемом ΔV_k с координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать такой же по объему элемент K' , расположенный симметрично относительно оси Oz и имеющий координаты $(-x_k, -y_k, z_k)$. Поэтому статические моменты

$$\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k \neq 0$$

и, следовательно, координаты

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k}{V} = 0, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k}{V} \neq 0.$$

Таким образом, центр тяжести будет находиться на оси симметрии.

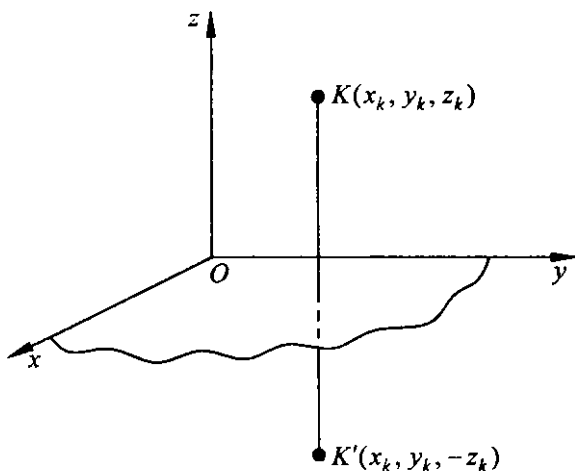


Рис. 11.3

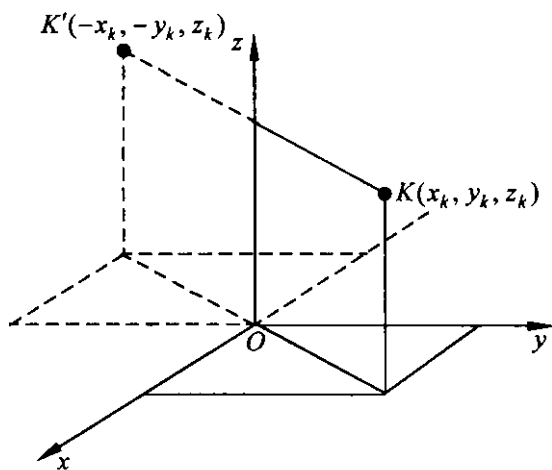


Рис. 11.4

в. Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат. Тогда всякой частице тела объемом ΔV_k , определяемой радиус-вектором $\vec{r}_k$, будет соответствовать частица такого же объема с радиус-вектором $-\vec{r}_k$, симметричная ей относительно центра O . Поэтому $\vec{r}_O = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \Delta V_k = 0$. Следовательно,

центр тяжести будет находиться в центре симметрии. Например, центры тяжести однородных куба, сферы, кольца, прямоугольной или круглой пластины лежат в геометрическом центре этих тел.

2. Метод разбиения. Этот метод основан на применении формул (11.3) и (11.4). Его используют, когда тело можно разбить на ряд частей, центры тяжести которых известны из условий симметрии. Метод разбиения можно наглядно проиллюстрировать с помощью рис. 11.5. Расположив тело в системе координат, разделив его мысленно на отдельные части, веса которых P_1, P_2, P_3, P_4 , а центры тяжести известны, вычислим вес тела и, согласно формулам (11.4), координаты центра тяжести C всего тела.

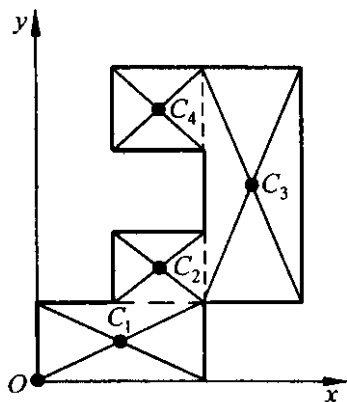


Рис. 11.5

Если тело имеет вырез, причем известны центр тяжести тела без выреза и центр тяжести вырезанного тела, то для определения координат центра тяжести используют *метод отрицательных масс* (частный случай метода разбиения).

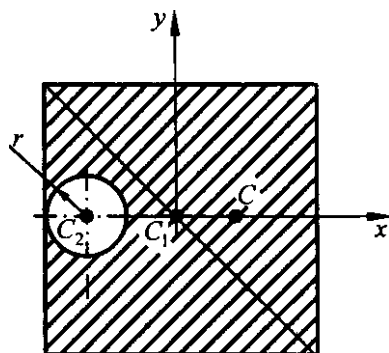


Рис. 11.6

На рис. 11.6 изображена квадратная пластина, сторона которой a . В пластине выполнено

круглое отверстие с радиусом $r = 0,2a$ и координатами центра $x_2 = -0,3a$; $y_2 = 0$.

Координаты центра тяжести C_1 пластины без отверстия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Рассмотрим два тела: пластину без отверстия и диск, соответствующий вырезанному отверстию. При использовании формул (11.4) вес диска будем считать отрицательным. Тогда

$$P = p(a^2 - \pi r^2);$$

$$x_c = \frac{1}{P}(P_1 x_1 - P_2 x_2) = \frac{p}{P}[a^2 \cdot 0 - \pi r^2(-0,3a)] = \frac{0,3\pi a r^2}{a^2 - \pi r^2};$$

$$y_c = 0,$$

где p — вес единицы площади пластины.

3. Метод интегрирования. Когда тело нельзя разбить на составные части, центры тяжести которых известны, используют метод интегрирования, являющийся универсальным.

11.4. Определение центра тяжести простейших однородных тел

1. Центр тяжести дуги окружности (рис. 11.7). Рассмотрим дугу окружности радиусом R с центральным углом $2\alpha_0$. Центр тяжести дуги лежит на оси симметрии Ox . Для определения координаты x_c выделим элемент дуги длиной ds и запишем

$$x_c \cdot S = \int_H^D x \, ds = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R \cos \alpha \cdot R \, d\alpha,$$

где $S = R \cdot 2\alpha_0$.

Выполнив интегрирование, найдем

$$x_c = \frac{1}{\alpha_0} R \sin \alpha_0.$$

2. Центр тяжести площади треугольника. Разобьем площадь треугольника ABD (рис. 11.8) на узкие полоски, параллельные стороне AD . Центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE . Следовательно, центр тяжести площади всего треугольника также лежит на этой медиане. Проводя аналогичные

разбиения параллельно сторонам AB и BD , найдем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке C пересечения его медиан, поэтому

$$BC = (2/3)BE.$$

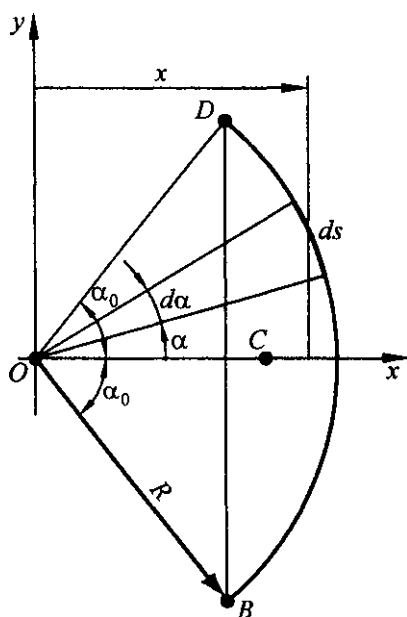


Рис. 11.7

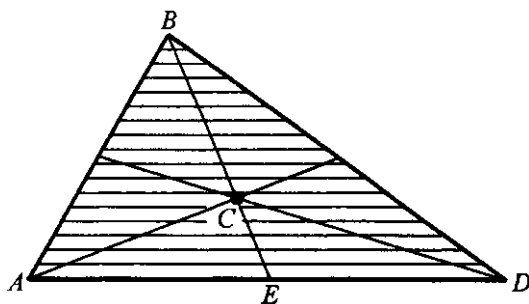


Рис. 11.8

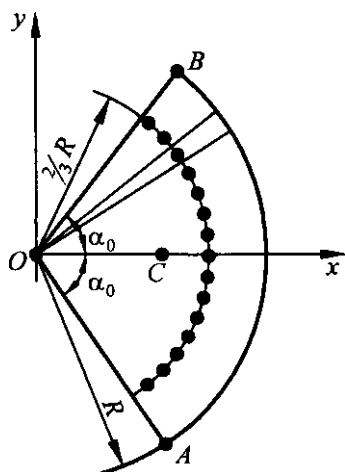


Рис. 11.9

3. Центр тяжести площади кругового сектора. Круговой сектор радиусом R с центральным углом $2\alpha_0$ показан на рис. 11.9. Центр тяжести лежит на оси симметрии Ox . Разобьем сектор на мелкие сектора и отождествив каждый из них с треугольником, найдем дугу окружности радиусом $(2/3)R$, на которой расположены центры тяжести площадей мелких секторов. Теперь задача свелась к уже известной — нахождению центра тяжести дуги окружности, для которой

$$x_C = \frac{(2/3)R \sin \alpha_0}{\alpha_0}.$$

4. Центр тяжести прямого кругового однородного конуса.

Пусть R — радиус основания конуса, а h — его высота (рис. 11.10). Элемент объема

$$dV = \pi r^2 dy = \pi \left(\frac{y}{h} R \right)^2 dy.$$

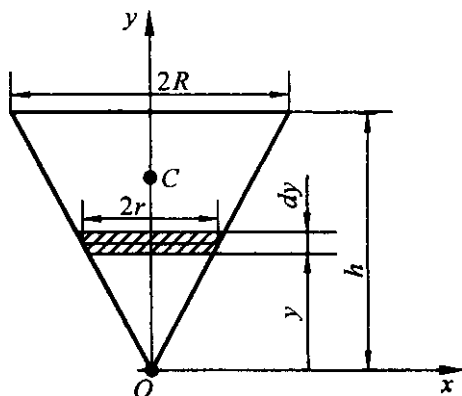


Рис. 11.10

Объем конуса

$$V = \int_{(V)} dV = \int_0^h \pi \left(\frac{y}{h} R \right)^2 dy = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Положение центра тяжести

$$y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV = \frac{1}{V} \int_0^h y \pi \left(\frac{yR}{h} \right)^2 dy = \frac{1}{V} \frac{\pi R^2 h^2}{4} = \frac{3}{4} h.$$

Полученный результат справедлив для любой многоугольной пирамиды.

РАВНОВЕСИЕ ГИБКОЙ И НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ

12.1. Дифференциальные уравнения равновесия нити

Гибкую нерастяжимую нить будем рассматривать как систему материальных точек, равномерно расположенных по кривой. Нить не оказывает сопротивление изгибу и может быть только растянута. По смыслу понятие нити наиболее близко к такому физическому объекту, как цепь, общая длина которой значительно больше длины отдельного звена.

Пусть нить AB находится в равновесии под действием внешних сил, которые действуют на все ее точки (рис. 12.1, a). Обозначим силу, действующую на единицу длины нити, через $\vec{F}$; эта сила есть функция координат точки, на которую она действует. Возьмем произвольную точку C , отстоящую от начальной точки A на расстоянии S , причем положительное направление отсчета S примем от A к B .

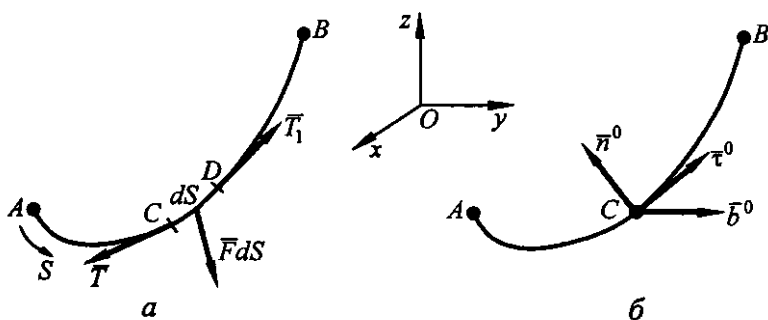


Рис. 12.1

Рассмотрим равновесие элемента нити $CD = dS$. Обозначим натяжение нити в точке C через $\bar{T}$, а в точке D через $\bar{T}_1$. Натяжение $\bar{T}$ считается положительным, если оно совпадает по направлению с положительным направлением S . На элемент CD действуют три силы: натяжение $\bar{T}$ в точке C , натяжение $\bar{T}_1$ в точке D и внешняя сила $\bar{F} dS$.

Условие равновесия этого элемента будет:

$$\bar{F} dS + \bar{T} + \bar{T}_1 = 0.$$

Так как $\bar{T}_1 = (-\bar{T}) + d\bar{T}$, то можно записать

$$\bar{F} dS + d\bar{T} = 0,$$

или

$$\bar{F} + \frac{d\bar{T}}{dS} = 0. \quad (12.1)$$

Равенство (12.1) выражает уравнение равновесия нити в векторной форме. Представим это уравнение в проекциях на оси прямоугольной системы координат $Oxyz$. Так как косинусы углов, которые касательная к кривой в точке $C(x, y, z)$ образует с осями

координат, равны $\frac{dx}{dS}$, $\frac{dy}{dS}$, $\frac{dz}{dS}$, то

$$T_x = T \frac{dx}{dS}, \quad T_y = T \frac{dy}{dS}, \quad T_z = T \frac{dz}{dS}.$$

Тогда для равенства (12.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \left(T \frac{dx}{dS} \right) + F_x &= 0; \quad \frac{d}{dS} \left(T \frac{dy}{dS} \right) + F_y = 0; \\ \frac{d}{dS} \left(T \frac{dz}{dS} \right) + F_z &= 0, \end{aligned} \quad (12.2)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dS} \frac{dx}{dS} + T \frac{d^2 x}{dS^2} + F_x &= 0; \quad \frac{dT}{dS} \frac{dy}{dS} + T \frac{d^2 y}{dS^2} + F_y = 0; \\ \frac{dT}{dS} \frac{dz}{dS} + T \frac{d^2 z}{dS^2} + F_z &= 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Этими уравнениями обычно пользуются при решении конкретных задач.

Найдем теперь уравнения равновесия нити в проекциях на оси естественного трехгранника (τ, n, b) , построенного в точке C (рис. 12.1, б). Обозначим орты касательной, нормали и бинормали соответственно через $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$. Тогда $\bar{T} = T \bar{\tau}$ и

$$\frac{d\bar{T}}{dS} = \frac{d}{dS}(T \bar{\tau}) = \frac{dT}{dS} \bar{\tau} + T \frac{d\bar{\tau}}{dS}.$$

Но

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{d\varphi}{dS} \bar{n} = \frac{\bar{n}}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны кривой в точке C и, следовательно,

$$\frac{d\bar{T}}{dS} = \frac{dT}{dS} \bar{\tau} + T \frac{\bar{n}}{\rho}.$$

Векторное уравнение равновесия (12.1) принимает теперь вид

$$\frac{dT}{dS} \bar{\tau} + \frac{T}{\rho} \bar{n} + \bar{F} = 0. \quad (12.4)$$

Для нахождения уравнений равновесия в проекциях на оси естественного трехгранника разложим внешнюю силу $\bar{F}$ по его осям:

$$\bar{F} = F_{\tau} \bar{\tau} + F_n \bar{n} + F_b \bar{b}.$$

Представим уравнение (12.4) в виде

$$\frac{dT}{dS} \bar{\tau} + \frac{T}{\rho} \bar{n} = -F_{\tau} \bar{\tau} - F_n \bar{n} - F_b \bar{b}.$$

Таким образом, уравнения равновесия нити в проекциях на оси естественного трехгранника будут следующими:

$$\frac{dT}{dS} = -F_{\tau}, \quad \frac{T}{\rho} = -F_n, \quad F_b = 0. \quad (12.5)$$

Видно, что в уравнениях (12.5) производная от натяжения нити по ее длине равна взятой с обратным знаком проекции внешней силы на касательную ось, а произведение натяжения нити в данной точке на кривизну кривой, по которой нить располагается в равновесии, равняется взятой с обратным знаком

проекция внешней силы на главную нормаль. Поскольку $F_b = 0$, то при равновесии нити внешняя сила лежит в соприкасающейся плоскости.

Рассмотрим возможные варианты граничных условий.

1. Пусть к концам нити приложены внешние силы $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$. Так как натяжение нити $\bar{T}$ направлено всегда по касательной, то на концах нити должно быть

$$T_A \bar{\tau}_A = -\bar{F}_A, \quad T_B \bar{\tau}_B = -\bar{F}_B.$$

2. Предположим, что один из концов нити, например A , находится на гладкой поверхности. Тогда реакция $\bar{R}_A$ поверхности направлена по нормали к ней, т. е. $\bar{R}_A = R_A \bar{n}_A$, и на этом конце граничное условие будет следующим:

$$\bar{F}_A + T_A \bar{\tau}_A + R_A \bar{n}_A = 0.$$

В частности, если к концу нити не приложена внешняя сила ($\bar{F}_A = 0$), то либо $T_A = R_A = 0$ (конец нити лежит на гладкой поверхности), либо $T_A = -R_A$ (конец нити перпендикулярен поверхности).

12.2. Частные случаи внешних сил

1. Пусть внешние силы, действующие на нить, *параллельны*, т. е. $\bar{F} = F \bar{F}_0$, где $\bar{F}_0 = \text{const}$ — единичный вектор. Умножив слабые дифференциального уравнения равновесия (12.1) векторно на $\bar{F}_0$, получим

$$\frac{d\bar{T}}{dS} \times \bar{F}_0 + \bar{F} \times \bar{F}_0 = 0.$$

Второй член полученного уравнения равен нулю, так как векторы коллинеарны, следовательно,

$$\frac{d\bar{T}}{dS} \times \bar{F}_0 = 0.$$

Поскольку $\bar{F}_0 = \text{const}$, то

$$\frac{d}{dS} (\bar{T} \times \bar{F}_0) = 0,$$

откуда

$$\overline{T} \times \overline{F}_0 = \overline{\text{const.}}$$

Это означает, что под действием параллельных сил нить располагается в плоскости, параллельной силам.

2. Найдем форму нити, которую она будет иметь в состоянии равновесия под действием *центральных* внешних сил, проходящих через точку O (рис. 12.2).

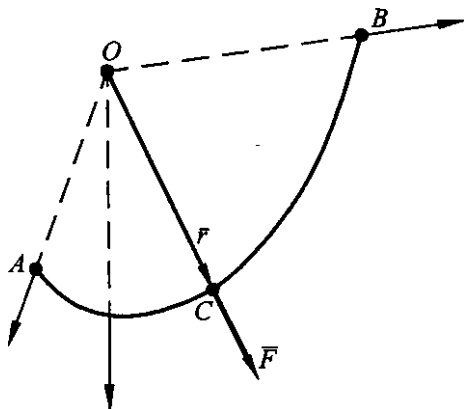


Рис. 12.2

Умножив слагаемые в уравнении равновесия (12.1) векторно справа на радиус-вектор $\vec{r}$, получим:

$$\frac{d\bar{T}}{dS} \times \bar{r} + \bar{F} \times \bar{r} = 0.$$

Векторы $\bar{F}$ и $\bar{r}$ коллинеарны, поэтому $\bar{F} \times \bar{r} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\bar{T}}{dS} \times \bar{r} = 0. \quad (12.6)$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{d\bar{T}}{dS} \times \bar{r} = \frac{d}{dS} (\bar{T} \times \bar{r}) - \bar{T} \times \frac{d\bar{r}}{dS}.$$

Так как $|d\vec{r}| = dS$, то $d\vec{r}/dS = \vec{\tau}$. Учитывая, что векторы $\vec{T}$ и $\vec{\tau}$ коллинеарны, получим

$$\bar{T} \times \frac{d\bar{r}}{dS} = 0.$$

Следовательно, уравнение (12.6) принимает вид

$$\frac{d}{dS}(\bar{T} \times \bar{r}) = 0$$

или после интегрирования

$$\bar{T} \times \bar{r} = \overline{\text{const}}.$$

Таким образом, под действием центральных сил нить расположится в плоскости, проходящей через центр сил.

12.3. Цепная линия

Найдем форму, которую будет иметь однородная нить в однородном поле силы тяжести (рис. 12.3, а). Обозначим вес единицы длины нити через $\gamma = \text{const}$. Вследствие того, что силы тяжести частиц нити параллельны, нить при равновесии расположена в вертикальной плоскости. Совместим с этой плоскостью координатную плоскость Oxy , причем ось Oy направим вертикально вверх. Поскольку в данном случае $F_x = 0$, $F_y = -\gamma$, уравнения (12.2) равновесия нити примут вид

$$\frac{d}{dS} \left(T \frac{dx}{dS} \right) = 0; \quad \frac{d}{dS} \left(T \frac{dy}{dS} \right) = \gamma. \quad (12.7)$$

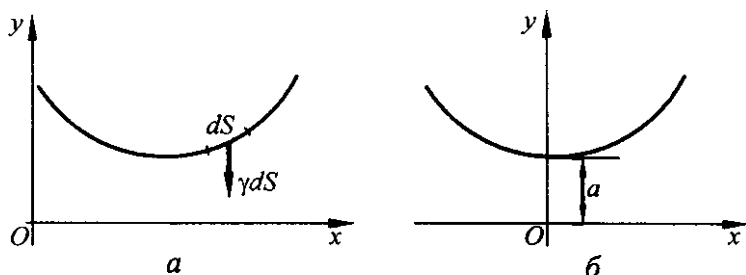


Рис. 12.3

Из первого уравнения (12.7) следует, что

$$T \frac{dx}{dS} = T_0 = \text{const}, \quad (12.8)$$

т. е. проекция силы натяжения нити на ось Ox есть величина постоянная. Из (12.8) имеем

$$T = T_0 \frac{dS}{dx}.$$

Подставив это выражение во второе уравнение (12.7), получим

$$\frac{d}{dS} \left(T_0 \frac{dS}{dx} \frac{dy}{dS} \right) = \gamma,$$

или

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) = \gamma dS.$$

Элементарная длина дуги

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Следовательно,

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \quad (12.9)$$

Для более компактной записи обозначим $dy/dx = p$. Тогда уравнение (12.9) примет вид

$$T_0 dp = \gamma \sqrt{1 + p^2} dx.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\gamma}{T_0} dx,$$

или, полагая $T_0/\gamma = a$,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

После интегрирования имеем

$$\ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) = x/a + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Проведем ось Oy через ту точку нити, где касательная к ней параллельна оси Ox . В этом случае при $y = a$, $x = 0$, $p = dy/dx = 0$ и $C_1 = 0$. Тогда

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x/a}. \quad (12.10)$$

Для определения p возьмем обратные величины:

$$\frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}} = e^{-x/a}.$$

Умножив числитель и знаменатель левой части этого уравнения на сопряженное знаменателю число, получим

$$-p + \sqrt{1 + p^2} = e^{-x/a}. \quad (12.11)$$

Вычтя из равенства (12.10) уравнение (12.11), будем иметь

$$p = 0,5(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \text{sh}(x/a).$$

Так как $p = dy/dx = \text{sh}(x/a)$, то

$$dy = \text{sh}\left(\frac{x}{a}\right) dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$y = a \text{ch}(x/a) + C_2,$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

При $x = 0$, $y = a$, так как $\text{ch } 0 = 1$, получаем $C_2 = 0$ и

$$y = a \text{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad (12.12)$$

Выражение (12.12) является уравнением формы однородной нити, находящейся в равновесии в однородном поле силы тяжести (рис. 12.3, б). Это уравнение называют уравнением *цепной линии*.

Пример 12.1. Найти форму троса, удерживающего висячий мост, полагая, что вес погонного метра моста постоянен ($\gamma = \text{const}$), мост подвешен к тросу так, что вертикальная нагрузка равномерно распределена по длине проекции троса на горизонтальную ось, а трос нерастяжим (рис. 12.4, а).

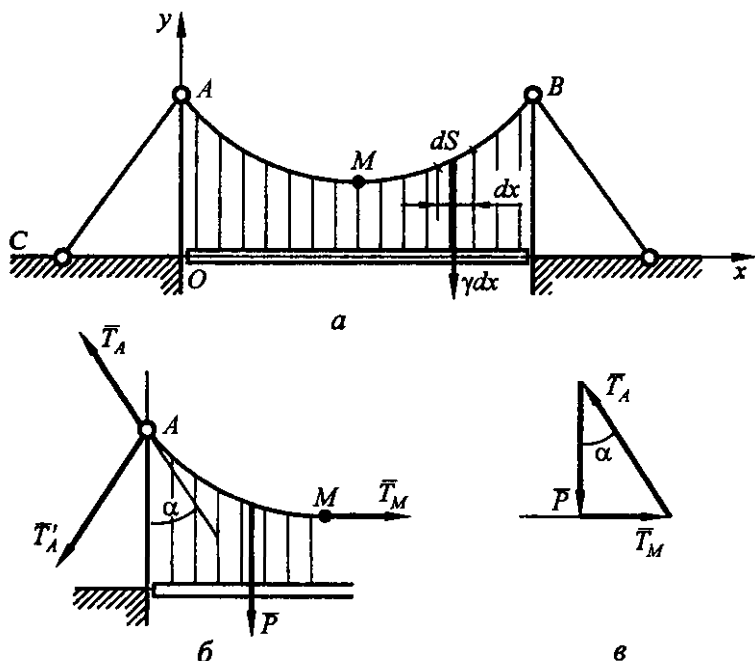


Рис. 12.4

Решение. Внешние силы в вертикальной плоскости, в которой расположен трос, параллельны. Направим ось Ox горизонтально, а ось Oy вертикально вверх. Воспользуемся уравнениями равновесия (12.2). На элемент троса dS действует сила γdx , поэтому внешняя сила, действующая на единицу длины троса, будет $F = \gamma dx/dS$. Уравнения равновесия (12.2) примут вид

$$d\left(T \frac{dx}{dS}\right) = 0; \quad d\left(T \frac{dy}{dS}\right) - \gamma dx = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$T \frac{dx}{dS} = T_0 = \text{const},$$

откуда

$$T = T_0 \frac{dS}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение для T во второе уравнение равновесия, находим

$$d\left(T_0 \frac{dS}{dx} \frac{dy}{dS}\right) = \gamma dx,$$

или

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma.$$

Полагая $T_0/\gamma = a$, имеем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

откуда после интегрирования получаем

$$y = \frac{x^2}{2a} + C_1 x + C_2.$$

Из этого уравнения следует, что трос расположится по параболе, ось которой вертикальна. Если ось Oy провести через вершину параболы, а Ox на расстоянии b ниже этой вершины, то граничные условия для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 будут следующими:

$$\begin{aligned}x = 0, \quad dy/dx &= 0; \\ \dot{x} = 0, \quad y &= b.\end{aligned}$$

Тогда $C_1 = 0$, $C_2 = b$ и уравнение параболы, по которой расположится трос, будет

$$y = \frac{x^2}{2a} + b.$$

Пример 12.2. В условиях предыдущей задачи определить натяжение троса в точках A и M (рис. 12.4, б).

Решение. С учетом симметрии конструкции (см. рис. 12.4, а), рассмотрим равновесие половины длины троса (рис. 12.4, б). Система внешних параллельных вертикальных сил, действующих на половину троса AM , эквивалентна равнодействующей $P = \gamma AB/2$, где $AB = l$ — расстояние между опорами. Натяжение троса в точках A и M обозначим соответственно через T_A и T_M .

Силы $\bar{T}_A$, $\bar{T}_M$, $\bar{P}$, действующие на трос, составляют равновесную систему, т. е.

$$\bar{T}_A + \bar{T}_M + \bar{P} = 0.$$

Откуда следует (рис. 12.4, в)

$$T_A = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{\gamma l}{2 \cos \alpha}; \quad T_M = P \operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma l}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Чем больше угол α , т. е. чем меньше стрела провисания троса по сравнению с расстоянием между опорами, тем больше его натяжение как в точке A , так и в точке M . Если в точке A трос опирается на блок, в оси которого нет трения, то его натяжение на участке AC равно $T'_A = T_A$.

Раздел III

ДИНАМИКА

В динамике изучается механическое движение материальных объектов с учетом их взаимодействия с окружающими материальными телами и средой, т. е. с учетом сил, действующих на эти объекты. Из статики в динамику переносят аксиому освобождения от связей точек системы, теорию сложения сил и приведения систем сил к простейшему виду, из кинематики — методы и приемы описания движения и запись уравнений связей. В динамике в отличие от статики как активные силы, так и реакции связей — в основном переменные величины. Активные (заданные) силы могут зависеть от времени, положения и скоростей точек в системе, а реакции связей еще и от их ускорений.

В динамике ставятся следующие задачи: по заданному движению определить силы, вызвавшие его, и по заданным силам установить движение системы. Встречаются также смешанные задачи, в которых необходимо решать оба типа задач. Кроме того, в динамике определяют силы взаимодействия точек (тел) системы.

Свойства материальных объектов в динамике схематизируют, из всей совокупности свойств во внимание принимают только те, которые являются существенными для механического движения. В зависимости от того, какую часть свойств учитывают при решении задач механики, получают различные модели материальных объектов.

Простейшая модель материального тела в механике — *материальная точка* — представляет собой тело, которое независимо от его формы и размеров можно принять за геометрическую точку, обладающую определенной массой. Материальная точка — это не обязательно тело малых размеров. Колесо, которое катится по шероховатой поверхности, нельзя рассматривать как материальную точку при любых его размерах. В зависимости от постановки задачи одно и то же тело может либо выступать, либо не выступать как материальная точка: все зависит от того, меняются силы, действующие на тело при изменении его ориентации по отношению к

окружающим телам и среде, или нет. Например, спускаемый космический аппарат вне пределов атмосферы движется под действием сил тяготения, которые от ориентации аппарата практически не зависят, и, следовательно, аппарат можно рассматривать как материальную точку. При движении того же аппарата в атмосфере появляются силы, зависящие от его ориентации, и считать аппарат материальной точкой уже нельзя.

Движение материальных объектов представляет собой изменение их положения в пространстве и во времени по отношению к другим телам. В рамках *классической механики* пространство принимается трехмерным *евклидовым*. Кроме того, пространство и время считаются *абсолютными*, т. е. не зависящими друг от друга, а также от материи и движения. Принимается также, что масса точки не зависит от скорости ее движения.

Глава 13

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

13.1. Аксиомы динамики

Основу классической механики составляют принятые как аксиомы законы *Ньютона*, опубликованные им в 1686 г. в сочинении «Математические начала натуральной философии». В современной форме аксиомы формулируются применительно к простейшей модели материального тела — материальной точке.

1. *Существуют системы отсчета, называемые инерциальными, по отношению к которым материальная точка, не испытывающая действия или находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.* Таким образом, первая аксиома постулирует возможность существования тел и связанных с ними систем отсчета, движущихся без ускорения, т. е. поступательно, равномерно и прямолинейно, причем любая из таких систем отсчета может быть принята за неподвижную при решении задач динамики.

Никакое тело во Вселенной не является полностью изолированным от воздействий, поэтому инерциальные системы отсчета

являются воображаемыми и могут быть введены с той или иной степенью приближения. В частности, близкой к идеальной является *гелиоцентрическая* система отсчета, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены на удаленные звезды.

2. Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и совпадает с ней по направлению. Если $\vec{F}$ — приложенная к точке сила, $\vec{a}$ — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета, то

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Положительный коэффициент пропорциональности m характеризует инертные свойства точки и называется *массой*. Масса материальных тел определяется методом сравнения с эталонами. В случае $\vec{F} = 0$ $\vec{a} = 0$, т. е. точка оказывается в состоянии движения по инерции. Таким образом, вторая аксиома устанавливает причину нарушения инерциального состояния точки (действие на точку других материальных тел), а также соотношение между ускорением (мерой отклонения точки от инерциального состояния) и силой (мерой механического воздействия).

3. Силы взаимодействия двух материальных точек направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны и равны по модулю, т. е.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Следовательно, третья аксиома определяет условие взаимодействия между двумя материальными точками. Ее называют еще законом о равенстве сил действия и противодействия, хотя здесь имеет место только равенство модулей сил, сами же силы противоположны по направлению.

4. Ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил, т. е. если $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_N)$ — система сил, приложенных к точке, то

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{a}_k,$$

где $\vec{a}_k = \vec{F}_k / m$.

Таким образом, четвертая аксиома постулирует принцип суперпозиции сил, или принцип независимого действия. В качестве четвертой аксиомы динамики может быть принята аксиома статики о векторном сложении сил. Тогда принцип независимости действия сил превращается в следствие: для системы сходящихся сил справедливо выражение

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N) \sim \bar{F}, \text{ где } \bar{F} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k.$$

Разделив на массу, получаем

$$\bar{a} = \bar{F}/m = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k/m = \sum_{k=1}^N \bar{a}_k.$$

13.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Из второй и четвертой аксиом следует уравнение движения точки в инерциальной системе отсчета

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (13.1)$$

где $\bar{F} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

Так как ускорение точки связано с ее радиус-вектором соотношением $\bar{a} = d^2\bar{r}/dt^2$, а сила в рамках классической механики может быть функцией времени, положения и скорости точки, из (13.1) получаем **векторное дифференциальное уравнение движения точки**

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}). \quad (13.2)$$

В проекциях на декартовы оси (базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (13.3)$$

В частных случаях дифференциальных уравнений движения точки может быть меньше. Так, при движении точки в плоскости Oxy уравнений движения будет два:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}); \quad m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

В случае движения точки по прямой будем иметь одно дифференциальное уравнение, например:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}).$$

В проекциях на естественные оси (базис $\bar{e}, \bar{n}, \bar{b}$) уравнения движения точки имеют вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad F_b = 0, \quad (13.4)$$

где $v = |\dot{s}|$, $v_\tau = ds/dt$, ρ — радиус кривизны траектории. Первое уравнение (13.4) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно дуговой (естественной) координаты s , второе уравнение имеет первый порядок, а третье является условием равновесия для проекций сил на бинормаль. Проекции силы могут быть функциями переменных $t, s, ds/dt$.

В проекциях на оси криволинейной системы координат, например цилиндрической, уравнения движения будут такими:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r; \quad m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = F_\phi; \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (13.5)$$

13.3. Две основные задачи динамики материальной точки

На основе дифференциальных уравнений движения материальной точки решают две задачи динамики точки.

Первая задача состоит в том, чтобы по заданному закону движения точки массой m определить силу, под действием которой происходит это движение. Часто первую задачу рассматривают как задачу управления движением, в рамках которой требуется установить характеристики воздействия, обеспечивающие заданный закон движения материальной точки. В зависимости от способа задания движения при решении этой задачи используют соответствующие скалярные уравнения (13.3–13.5).

Пример 13.1. Материальная точка, имеющая массу m , движется в вертикальной плоскости по баллистической траектории

$$y = \left(\frac{g\tau}{v_0} + \sin \alpha \right) \frac{x}{\cos \alpha} + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0\tau \cos \alpha} \right)$$

в соответствии с уравнениями

$$x = v_0\tau \cos \alpha [1 - \exp(-t/\tau)] ;$$

$$y = -g\tau t + \tau(g\tau + v_0 \sin \alpha)[1 - \exp(-t/\tau)] ,$$

где g , v_0 , τ — положительные константы, единицы измерения которых м/с^2 , м/с и с соответственно.

Найти силы, под действием которых происходит движение точки.

Решение. Из приведенных уравнений следует, что точка начинает движение из начала координат ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к оси Ox .

Вычисляя производные координат, находим проекции равнодействующей силы

$$F_x = m\ddot{x} = -(m/\tau)v_0 \cos \alpha \cdot \exp(-t/\tau) ;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -(m/\tau)(g\tau + v_0 \sin \alpha)\exp(-t/\tau) .$$

Учитывая выражения для проекций скорости точки

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha \cdot \exp(-t/\tau); \quad v_y = \dot{y} = -g\tau + (g\tau + v_0 \sin \alpha)\exp(-t/\tau) ,$$

получаем

$$F_x = -\mu v_x; \quad F_y = -mg - \mu v_y ,$$

где $\mu = m/\tau$ — константа, $\text{Н} \cdot \text{с/м}$. Откуда находим

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = -mg \vec{j} - \mu(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) = -m\vec{g} - \mu\vec{v} .$$

Таким образом, исходные уравнения описывают движение точки под действием силы тяжести и силы сопротивления, пропорциональной скорости точки.

Вторая задача состоит в определении движения точки по заданным силам и начальным условиям движения, при этом силы должны быть выражены как функции переменных, используемых для задания движения. Решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка, в процессе которого в решениях появляются произвольные постоянные, подлежащие определению. Так, в задаче о движении точки в трехмерном пространстве, решаемой на основе дифференциальных уравнений (13.3), общие решения будут содержать шесть произвольных постоянных:

$$x = x(t, C_1, \dots, C_6); \quad y = y(t, C_1, \dots, C_6); \quad z = z(t, C_1, \dots, C_6),$$

для определения которых потребуется постановка дополнительных условий. Из математики известно, что если эти условия поставлены для начальных (при $t = 0$) значений функций и их первых производных, т. е. в виде $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$, то задача (задача Коши) при некоторых ограничениях, налагаемых на правые части дифференциальных уравнений, имеет решение и причем единственное. Таким образом, приложенные к точке силы определяют только ее ускорение, движение же точки помимо сил зависит от начальных условий — положения точки в рассматриваемой инерциальной системе отсчета и ее скорости.

Замечание. *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений (13.3) называется функция $\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, зависящая от координат, скоростей и времени, сохраняющая постоянное значение для любого конкретного решения системы. Выражение

$$\left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \dot{z} + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} F_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} F_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} F_z \right)$$

называется *производной по времени функции* $\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, вычисленной в силу дифференциальных уравнений (13.3). Аналогичные определения можно дать для любой произвольной системы дифференциальных уравнений.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что функция Φ будет первым интегралом системы дифференциальных уравнений тогда и только тогда, когда ее производная, вычисленная в силу этих уравнений, будет тождественно равняться нулю.

Для того чтобы полностью найти закон движения материальной точки, достаточно найти шесть функционально независимых первых интегралов. Действительно, пусть

$$\Phi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_1;$$

...

$$\Phi_6(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_6$$

— шесть независимых первых интегралов системы (13.3). Так как по условию $\Phi_1, \dots, \Phi_6$ — функционально независимы, то, определяя $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ как

функции t и шести констант $C_1, \dots, C_6$, получаем общее решение системы (13.3) в виде

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, \dots, C_6); \quad y = y(t, C_1, \dots, C_6); \quad z = z(t, C_1, \dots, C_6); \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6); \quad \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6); \quad \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6).\end{aligned}$$

Отметим, что знание одного первого интеграла системы позволяет понизить ее порядок на единицу.

Возможность получить аналитическое решение задачи для произвольных начальных условий существует не всегда и зависит от того, насколько сложна система дифференциальных уравнений. Даже при одномерном движении точки в соответствии с уравнением

$$m\ddot{x} = F_x$$

в случае, когда $F_x = F_x(t, x, \dot{x})$ является произвольной функцией всех своих переменных, аналитическое решение выполнить не удастся. В таких ситуациях приходится обращаться к приближенным и численным методам интегрирования.

Пример 13.2. Материальная точка M , имеющая массу $m = 4,9$ кг, брошена с поверхности Земли с начальной скоростью, направленной вертикально и равной $v_0 = 98,0$ м/с. Сила сопротивления воздуха $\bar{R} = -\mu v \cdot \bar{v}$ ($R = \mu v^2$), где $\mu = 0,02$ Н·с²/м². Определить, на какую высоту H над поверхностью Земли и за какое время t_1 поднимется точка, а также какова будет скорость v_k ее приземления.

Решение. Систему отсчета, связанную с Землей, при исследовании кратковременных движений можно считать достаточно близкой к инерциальной. Направим ось Oz системы отсчета вертикально, совместив ее начало с начальным положением точки (рис. 13.1). Сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$.

Векторное дифференциальное уравнение движения точки

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{g} + \bar{R}$$

в проекции на ось Oz имеет вид

$$m\ddot{z} = -mg - \mu \dot{z}^2$$

— при подъеме ($v_z = \dot{z} > 0$) и

$$m\ddot{z} = -mg + \mu \dot{z}^2$$

— при падении ($v_z < 0$, $|v_z| = -v_z$).

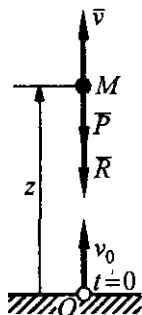


Рис. 13.1

Полученные дифференциальные уравнения являются нелинейными, поэтому решать их будем методом понижения порядка и разделения переменных. Разделим в уравнениях все члены на коэффициент μ и введем обозначения: $\lambda = m/\mu = 245,0$ м — характерная постоянная расстояния; $u^2 = g\lambda = mg/\mu = 2401$ м²/с² — квадрат предельной скорости падения точки ($u = 49$ м/с) под действием силы тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости (при такой скорости силы уравновешиваются $R = mg$).

Дифференциальное уравнение движения точки на этапе подъема примет вид

$$\lambda \frac{dv_z}{dt} = -g\lambda - v_z^2 = -(u^2 + v_z^2).$$

Разделив переменные, представим уравнение в виде

$$\frac{d(v_z/u)}{1 + (v_z/u)^2} = -dt/\tau,$$

где $\tau = \lambda/u = 5,0$ с — характерная постоянная времени.

Интегрируя, находим

$$\text{arctg}(v_z/u) = C_1 - t/\tau.$$

В соответствии с начальными условиями движения (при $t = 0$ $v_z = v_0$) постоянная интегрирования $C_1 = \text{arctg}(v_0/u)$. Время подъема t_1 точки до крайнего верхнего положения, в котором $v_z = 0$,

$$t_1 = \tau C_1 = \tau \text{arctg}(v_0/u) = 5 \text{arctg} 2 = 5,54 \text{ с}.$$

Для определения высоты подъема выполним замену независимой переменной $dv_z/dt = (dv_z/dt)(dz/dz) = (dz/dt)(dv_z/dz) = v_z(dv_z/dz)$ и представим дифференциальное уравнение движения в виде

$$\lambda \frac{v_z dv_z}{u^2 + v_z^2} = -dz.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$(\lambda/2) \ln(u^2 + v_z^2) = C_2 - z.$$

В соответствии с начальным условием $v_z = v_0$ при $z = 0$ постоянная интегрирования $C_2 = (\lambda/2) \ln(u^2 + v_0^2)$. В высшей точке подъема $v_z = 0$, и высота

$$H = (\lambda/2) \ln(1 + v_0^2/u^2) = 122,5 \ln 5 \approx 197 \text{ м}.$$

Для определения скорости приземления в дифференциальном уравнении, описывающем движение точки на этапе падения, произведем замену независимой переменной и разделим переменные:

$$\lambda \frac{v_z dv_z}{u^2 - v_z^2} = -dz.$$

В общем решении $\ln(u^2 - v_z^2) = C_3 + 2z/\lambda$

в соответствии с начальными для этапа падения условиями ($v_z = 0$ при $z = H$) постоянная интегрирования

$$C_3 = \ln(u^2) - 2H/\lambda.$$

Таким образом, зависимость проекции скорости точки от координаты имеет вид

$$v_z = -u \sqrt{1 - \exp[-2(H - z)/\lambda]},$$

откуда скорость приземления точки

$$v_k = |v_z(0)| = u \sqrt{1 - \exp(-2H/\lambda)} = u \sqrt{1 - \exp(-1,6)} = 0,894u = 43,8 \text{ м/с}.$$

Пример 13.3. Материальная точка массой m , находящаяся на некоторой высоте над поверхностью Земли, движется в условиях ветра, дующего равномерно со скоростью u . Сила сопротивления, действующая на точку со стороны воздуха, $\bar{R} = -\mu \bar{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\bar{v}$ — скорость точки относительно воздуха. Точка начинает движение с начальной абсолютной скоростью $\bar{v}_0$, направленной горизонтально под прямым углом к скорости ветра.

Решение. Совместим начало системы отсчета с исходным положением точки, а связанные с Землей оси направим как показано на рис. 13.2. Векторное уравнение движения точки

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{R} = m\bar{g} - \mu(\bar{v} - \bar{u})$$

в проекциях на координатные оси имеет вид

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = \mu u; \quad m\ddot{y} + \mu\dot{y} = 0; \quad m\ddot{z} + \mu\dot{z} = mg.$$

Разделив эти уравнения на μ и обозначив $\tau = m/\mu$, где τ — постоянная времени, получим

$$\tau\ddot{x} + \dot{x} = u; \quad \tau\ddot{y} + \dot{y} = 0; \quad \tau\ddot{z} + \dot{z} = g\tau.$$

Как видно, движение точки описывается системой несвязанных линейных дифференциальных уравнений, общее решение которой

$$\begin{aligned} x &= ut + C_1 + C_2 \exp(-t/\tau); \\ y &= C_3 + C_4 \exp(-t/\tau); \\ z &= g\tau t + C_5 + C_6 \exp(-t/\tau). \end{aligned}$$

Определив с помощью начальных условий:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

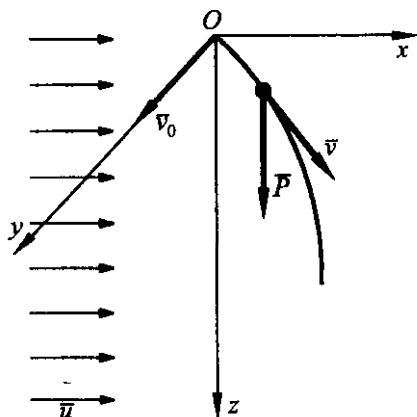


Рис. 13.2

произвольные постоянные интегрирования, приведем кинематические уравнения движения точки к виду

$$\begin{aligned}x &= ut - u\tau[1 - \exp(-t/\tau)]; \\y &= v_0\tau[1 - \exp(-t/\tau)]; \\z &= g\tau t - g\tau^2[1 - \exp(-t/\tau)].\end{aligned}$$

Проекции скорости точки изменяются по закону

$$\begin{aligned}v_x &= u[1 - \exp(-t/\tau)]; \\v_y &= v_0 \exp(-t/\tau); \\v_z &= g\tau[1 - \exp(-t/\tau)].\end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что при $t \rightarrow \infty$ $v_x \rightarrow u$, $v_y \rightarrow 0$, $v_z \rightarrow g\tau$, т. е. со временем точка будет двигаться практически в вертикальной плоскости с установившейся скоростью

$$\bar{v} = u\bar{i} + g\tau\bar{k}.$$

13.4. Движение несвободной материальной точки

В рассмотренных выше задачах движение материальной точки определялось начальными условиями и взаимодействием ее с силовыми полями и окружающей средой. Все силы, приложенные к точке, выступали как заданные, т. е. как известные функции t , $\bar{r}$ и $\bar{v}$. Взаимодействие с другими телами путем прямого контакта и связанные с этим взаимодействием какие-либо ограничения на движение в пространстве отсутствовали.

Если на движение материальной точки в пространстве не налагаются ограничения, то она называется *свободной*. Однако чаще движение материальной точки сопровождается непосредственным взаимодействием ее с другими материальными телами. Аналогично схематизации свойств материальных тел это взаимодействие также схематизируется в виде кинематических ограничений, налагаемых на движение. В такой ситуации точку называют *несвободной*, а условия, стесняющие свободу ее движения, — *связями*.

Связь, выраженная уравнением

$$f(x, y, z) = 0, \quad (13.6)$$

является геометрической и означает, что точка движется по некоторой неизменной (время t в уравнение связи явно не входит) по-

верхности и не может ее покинуть ни в какую сторону. Геометрическая связь такого типа называется *стационарной* и *неосвобождающей*. *Освобождающие* связи выражаются неравенствами. В случае движения по поверхности число степеней свободы материальной точки, определяемое числом независимых координат, необходимых для однозначного задания положения, меньше, чем у свободной точки, и равняется двум. Еще меньшим будет число степеней свободы, если на точку наложены две связи. Это означает, что при движении точка должна все время оставаться на линии пересечения поверхностей обеих связей.

Так как в соответствии с аксиомой о связях последние могут быть отброшены, а их действие заменено соответствующими силами, уравнение динамики несвободной материальной точки примет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (13.7)$$

Здесь к активным силам, равнодействующая которых $\vec{F}$, добавляется *динамическая реакция связи* $\vec{R}$. Реакция $\vec{R}$ является *пассивной* силой, так как зависит от приложенных к точке активных сил, физических свойств связи и движения точки. Последнее определяет ее отличие от реакции связи в статике, что подчеркивается ее названием.

Реакцию связи $\vec{R}$ можно всегда разложить по двум направлениям на составляющие, одну из которых $\vec{N}$ направить по нормали к поверхности связи, определяемой (13.6), а другую — в плоскости, перпендикулярной к нормали. Если второй составляющей пренебречь, то поверхность можно считать абсолютно гладкой, а связь — *идеальной*. В этом случае реакцию связи представляют в виде $\vec{N} = \lambda \text{grad}(f)$, где $\lambda = N/\text{grad}(f)$ — скалярный коэффициент, называемый *множителем связи*. Векторное уравнение движения несвободной точки с идеальной связью принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \lambda \text{grad}(f).$$

В проекциях на оси декартовой системы координат получаем уравнения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda(\partial f / \partial x); \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda(\partial f / \partial y); \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda(\partial f / \partial z), \end{aligned} \quad (13.8)$$

известные как уравнения Лагранжа первого рода.

В случае движения по негладкой поверхности необходимо учитывать действие связи на материальную точку в плоскости, перпендикулярной нормали. Если оно обусловлено шероховатостью поверхности связи, то в векторном уравнении движения добавляется сила сухого трения, предельное значение которой при $v \neq 0$ определяется выражением

$$\bar{F}_{\text{тр}} = -\mu \lambda \text{grad}(f) \frac{\bar{v}}{v},$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

Три дифференциальных уравнения (13.8) и уравнение связи (13.6) содержат четыре неизвестные функции, следовательно, решение возможно. Однако в декартовых координатах при произвольном выборе системы отсчета аналитическое решение задачи удастся получить лишь для простейших связей первого порядка. Более эффективными в ряде случаев являются уравнения движения точки в криволинейных координатах. Особенно удобно при этом пользоваться такой системой координат, в которой поверхность связи, определяемая уравнением (13.6), выступает в качестве одной из координатных поверхностей.

Пусть, например, точка движется по внутренней гладкой поверхности цилиндрической трубы (рис. 13.3), уравнение которой в декартовых координатах будет

$$f(x, y, z) = r_{\text{тр}}^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

В цилиндрических координатах уравнение примет вид

$$f(r, \varphi, z) = r_{\text{тр}} - r = 0,$$

а сама поверхность трубы будет координатной поверхностью. Вектор-градиент ее направлен по радиусу, и, следовательно, проекции нормальной реакции на две другие координатные оси равны нулю. Сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$. Уравнения движения точки принимают вид

$$mr_{\text{тр}} \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi; \quad m\ddot{z} = 0; \quad mr_{\text{тр}} \dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi + N. \quad (13.9)$$

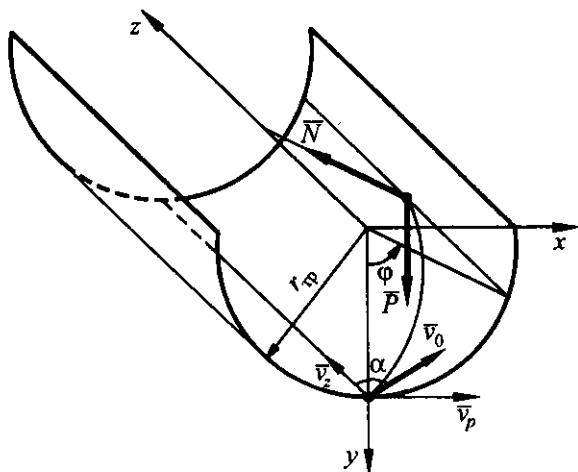


Рис. 13.3

С решением этой системы уравнений связана смешанная задача динамики точки: сначала на основе первого и второго уравнений по активным силам и начальным условиям определяется движение точки (вторая задача динамики точки), а затем из третьего уравнения определяется динамическая реакция N (первая задача динамики точки).

Пример 13.4. Материальная точка массой m начинает движение по гладкой внутренней поверхности трубы радиусом $r_{\text{тр}}$ из крайнего нижнего положения с начальной скоростью $\bar{v}_0$, вектор которой расположен в касательной плоскости под углом α к образующей поверхности трубы (см. рис. 13.3). Определить, при каких условиях точка будет двигаться, не покидая стенок трубы.

Решение. Неудерживающая связь, налагаемая на точку стенкой трубы, выражается в цилиндрических координатах неравенством $r_{\text{тр}} - r \geq 0$ и находится в напряжении (действует), если $N \geq 0$. Как видно из третьего уравнения системы (13.9), N является функцией координаты φ и ее производной. Выполнив в первом уравнении (13.9) замену независимой переменной $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}(d\dot{\varphi}/d\varphi)$, разделим переменные и найдем первый интеграл

$$\dot{\varphi}^2/2 = C + (g/r_{\text{тр}})\cos\varphi.$$

В соответствии с начальными условиями движения (при $\varphi = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = v_0 \sin \alpha / r_{\text{тр}}$) произвольная постоянная интегрирования

$$C = \dot{\varphi}_0^2/2 - g/r_{\text{тр}}.$$

Подстановка полученного выражения в третье уравнение (13.9) даст зависимость

$$N = mr_{\text{тр}} \dot{\phi}_0^2 - mg(2 - 3 \cos \varphi).$$

Точка при движении будет оставаться на внутренней поверхности трубы, если в любом ее положении, в том числе и в крайнем верхнем, при $\varphi = \pi$ ($\cos \varphi = -1$), $N \geq 0$. Отсюда получаем

$$r_{\text{тр}} \dot{\phi}_0^2 = (v_0 \sin \alpha)^2 / r_{\text{тр}} \geq 5g, \text{ или } v_p(0) \geq \sqrt{5gr_{\text{тр}}},$$

где $v_p(0) = v_0 \sin \alpha$ — начальное значение трансверсальной проекции скорости точки.

Расчеты показывают, что, если условие $v_p(0) \geq \sqrt{5gr_{\text{тр}}}$ выполнено, точка никогда не отделится от стенок трубы и движение ее будет длиться вечно. Такой результат, несогласующийся с опытом, объясняется несовершенством принятой расчетной схемы, а именно идеализацией свойств связи. Если же принять во внимание шероховатость поверхности трубы, то в первом и втором уравнениях (13.9) нужно учесть проекции силы сухого трения

$$\bar{F}_{\text{тр}} = -\mu N \frac{\bar{v}}{v}.$$

Тогда эти уравнения примут вид

$$mr_{\text{тр}} \ddot{\phi} = -mg \sin \varphi - \mu N \frac{r_{\text{тр}} \dot{\phi}}{\sqrt{(\dot{z})^2 + (r_{\text{тр}} \dot{\phi})^2}}; \quad m\ddot{z} = -\mu N \frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{z})^2 + (r_{\text{тр}} \dot{\phi})^2}},$$

а N будет определяться третьим уравнением системы (13.9).

Нелинейные уравнения этой системы являются связанными, так как все три функции — две координаты (z, φ) и сила N — присутствуют в каждом из уравнений. Система уравнений может быть проинтегрирована только численно при конкретных значениях параметров, при этом обе задачи динамики точки здесь не разделяются, а решаются параллельно.

Если движение точки стеснено двумя связями вида (13.6), векторное уравнение движения с неопределенными множителями принимает вид

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \lambda_1 \overline{\text{grad}(f_1)} + \lambda_2 \overline{\text{grad}(f_2)}.$$

Интегрирование системы скалярных уравнений, включающей три дифференциальных уравнения и два уравнения связи, принципиально возможно, но практически весьма затруднительно. Решение таких задач целесообразно проводить на основе дифференциальных уравнений движения точки, записанных в проекциях на естественные оси.

В случае движения точки по абсолютно гладкой линии, т. е. при идеальной связи, в уравнениях движения (13.4), которые примут следующий вид:

$$m\ddot{s} = F_{\tau}, \quad m v^2 / \rho = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b,$$

проекции реакции связи $\bar{N}$ будут присутствовать только во втором и третьем уравнениях. Опять имеет место смешанная задача динамики точки, причем задачи разделяются — сначала из первого уравнения по заданным активным силам и начальным условиям определяют движение точки, а затем из второго и третьего уравнений находят реакцию связи.

В случае неидеальной связи появится третья составляющая реакции, проекция которой будет зависеть от физических условий взаимодействия точки со связью и войдет в первое уравнение. Задачи динамики могут не разделиться, так как уравнения окажутся связанными.

Пример 13.5. Материальная точка M начинает движение из положения, близкого к крайней верхней точке A сферического купола, радиус которого r , $\bar{P} = m\bar{g}$ (рис. 13.4). Пренебрегая трением, определить, на какой высоте от плоскости основания нарушится контакт точки с поверхностью купола.

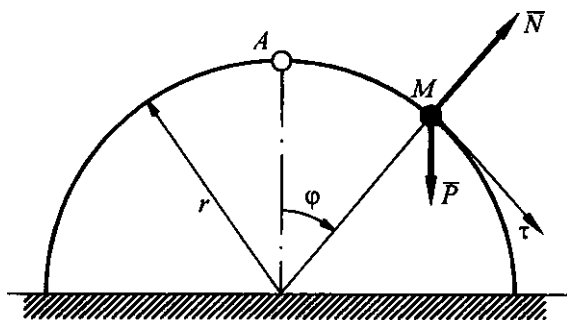


Рис. 13.4

Решение. В проекциях на естественные оси уравнения движения точки имеют вид

$$m \frac{dv_{\tau}}{dt} = mg \sin \varphi; \quad m \frac{v^2}{r} = mg \cos \varphi - N.$$

Выполнив замену независимой переменной $dv_t/dt = v_t dv_t/(r d\varphi)$, приведем первое уравнение к виду

$$v_t dv_t = gr \sin \varphi d\varphi$$

и после интегрирования при начальных условиях $v = 0$ при $\varphi = \varphi_0$ получим

$$v^2 = 2gr(\cos \varphi_0 - \cos \varphi),$$

где $\cos \varphi_0 \approx 1$.

Данное выражение определяет зависимость скорости точки от угловой координаты только на участке ее движения в контакте с поверхностью купола. Из второго уравнения находим

$$N = mg \cos \varphi - mv^2/r = mg(3 \cos \varphi - 2).$$

Контакт нарушится в положении, где $N = 0$, т. е. при $\cos \varphi^* = 2/3$. Высота точки над основанием в этом положении $h = r \cos \varphi^* = 2r/3$.

Пример 13.6. Разгонный участок лыжного трамплина выполнен в виде дуги окружности радиусом $r = 50$ м. Лыжник, масса которого $m = 80$ кг, начинает

разгон без начальной скорости из точки старта A , расположенной на высоте $h = r/2$ над точкой отрыва B (рис. 13.5).

На лыжника действует сила сопротивления воздуха $\bar{R} = -\mu \bar{v} \cdot v$ ($R = \mu v^2$), где $\mu = 0,16 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$ — аэродинамический коэффициент, сила трения о снег, коэффициент трения скольжения $f = 0,1$ и сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$. Рассматривая лыжника как материальную точку, найти его скорость в конце участка разгона.

Решение. Определим положение лыжника на участке разгона естественной координатой $s = \overset{\frown}{AM} = r\varphi$ (см. рис. 13.5). Векторное дифференциальное уравнение движения

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{R}$$

спроецируем соответственно на касательную и нормаль естественного трехгранника:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_t}{dt} &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} - \mu v^2; \\ m \frac{v^2}{r} &= -mg \cos \alpha + N, \end{aligned} \quad (13.10)$$

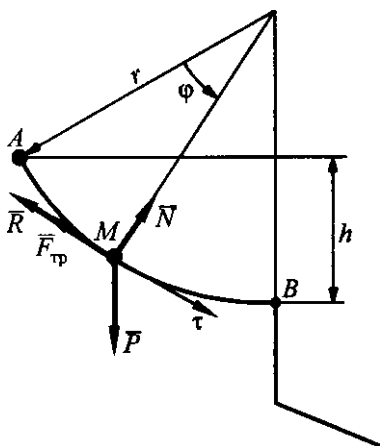


Рис. 13.5

где $\alpha = \pi/3 - \varphi$.

Найдем из второго уравнения N и подставим выражение

$$F_{\text{тр}} = fN = f(mg \cos \alpha + m v^2/r)$$

в первое уравнение (13.10). Получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$m \frac{dv_r}{dt} = -(\mu + f m/r) v_r^2 + mg(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (13.11)$$

Выполним замену независимой переменной $dv_r/dt = v_r dv_r/(r d\varphi)$, введем новую переменную $z = v_r^2 = v^2$ и представим уравнение (13.11) в виде

$$\frac{dz}{d\varphi} + 2kz = u^2 [\sin(\pi/3 - \varphi) - f \cos(\pi/3 - \varphi)],$$

где $k = (r\mu/m) + f = 0,2$ — приведенный коэффициент трения; $u^2 = 2gr = 980 \text{ м}^2/\text{с}^2$.

В частном решении

$$z^* = A \sin(\pi/3 - \varphi) + B \cos(\pi/3 - \varphi)$$

этого линейного уравнения константы A и B , определенные методом неопределенных коэффициентов, равны

$$A = \frac{2k + f}{1 + 4k^2} u^2, \quad B = \frac{1 - 2kf}{1 + 4k^2} u^2.$$

Постоянная интегрирования C общего решения

$$z = C \exp(-2k\varphi) + A \sin(\pi/3 - \varphi) + B \cos(\pi/3 - \varphi)$$

в соответствии с начальным условием ($z = 0$ при $\varphi = 0$) равна

$$C = -A \sin(\pi/3) - B \cos(\pi/3) = -0,787 u^2.$$

Тогда в конечной точке B участка разгона при $\varphi = \pi/3$ скорость лыжника будет

$$v_B = \sqrt{B + C \exp(-2k\pi/3)} = u \sqrt{24/29 - 0,787 \exp(-0,4189)} = 0,5567u = 17,4 \text{ м/с}.$$

Движение лыжника без учета сопротивления воздуха описывается более простым дифференциальным уравнением, которое можно получить из (13.11), положив в нем $\mu = 0$ и $f = 0$. Решение

$$z = u^2 [\cos(\pi/3 - \varphi) - \cos(\pi/3)]$$

этого уравнения при тех же начальных условиях позволяет найти другое значение скорости в конце участка разгона:

$$v_B = \sqrt{2gr[1 - \cos(\pi/3)]} = \sqrt{2gh} = 22,1 \text{ м/с},$$

которое показывает, что сопротивление воздуха заметно снижает скорость лыжника.

13.5. Динамика относительного движения

Неинерциальной является система отсчета, которая с ускорением движется относительно другой, инерциальной системы отсчета. Движение точки рассматривается одновременно по отношению к двум системам отсчета, т. е. является сложным (рис. 13.6). При этом предполагается:

1) движение неинерциальной системы отсчета $O'XYZ$ относительно инерциальной $Oxyz$, или переносное для точки движение, задано и от движения материальной точки не зависит;

2) приложенные к точке силы в соответствии с уравнением динамики (13.1) определяют *абсолютное* ускорение точки — ускорение относительно инерциальной системы отсчета;

3) предметом изучения является движение точки относительно неинерциальной системы $O'XYZ$, т. е. *относительное* движение.

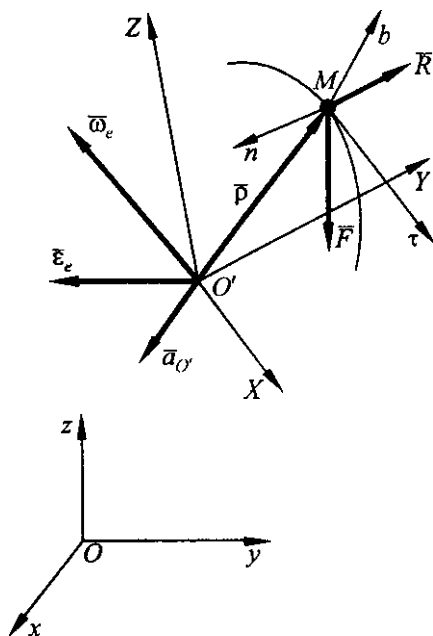


Рис. 13.6

Представим абсолютное ускорение точки в виде трех составляющих

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k,$$

где $\bar{a}_r, \bar{a}_e, \bar{a}_k$ — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения, и подставим в уравнение (13.1). Разрешая полученное выражение относительно $\bar{a}_r$, находим

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k).$$

Произведения, содержащиеся в скобках, имеют единицу измерения силы, хотя силами в истинном смысле этого термина, т. е. характеристиками взаимодействия с другими материальными телами, они не являются, а выступают в качестве некоторых поправок на неинерциальность системы отсчета. Их называют соответственно *переносной силой инерции* $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ и *кориолисовой силой инерции* $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$. Поскольку переносное движение предполагается заданным, то силы инерции являются известными функциями времени, относительных координат и скорости точки. Формулы для ускорений в общем случае переносного движения известны из кинематики:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_{(r)} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}); \quad \bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Таким образом, векторное уравнение движения точки в неинерциальной системе отсчета, или основной закон динамики относительного движения, имеет следующий вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (13.12)$$

Если учесть кинематические соотношения $\bar{a}_r = \tilde{d}\bar{v}_r/dt = \tilde{d}^2\bar{\rho}/dt^2$, уравнение (13.12) можно представить в форме дифференциального уравнения относительного движения точки, причем, если точка является несвободной, то к активным силам добавится реакция связи

$$m\tilde{d}^2\bar{\rho}/dt^2 = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (13.13)$$

Записывая векторное уравнение (13.13) в проекциях на те или иные оси неинерциальной системы отсчета, получают соответствующие скалярные дифференциальные уравнения, которые отличаются от скалярных уравнений движения точки в инерциальной

системе отсчета (13.3) – (13.5) лишь тем, что в их правых частях к проекциям приложенных сил добавляются проекции сил инерции.

Приведем частные случаи относительного движения точки в динамике.

1. При поступательном движении неинерциальной системы отсчета $O'XYZ$ в силу того, что переносные угловые скорость и ускорение отсутствуют ($\omega_e = 0$, $\varepsilon_e = 0$), кориолисово ускорение $a_K = 0$, и относительное движение точки определяется уравнением

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e,$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, $\bar{a}_e = \bar{a}_{O'}$.

2. При поступательном, равномерном и прямолинейном движении системы отсчета $O'XYZ$ $\Phi_e = \Phi_K = 0$, $m\bar{a}_r = \bar{F}$, т. е. эта система превращается в одну из инерциальных. Уравнения движения точки как по отношению к основной инерциальной, так и по отношению к любой другой инерциальной системам отсчета оказываются одинаковыми. Невозможность путем наблюдения за механическим движением тел отличить одну инерциальную систему отсчета от другой составляет содержание *принципа относительности Галилея*.

3. Равномерный и прямолинейный характер относительного движения материальной точки ($a_r = 0$) имеет место при условии равновесия системы приложенных к точке сил и ее сил инерции:

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_K = 0.$$

4. Условием покоя точки по отношению к неинерциальной системе отсчета является равенство $\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0$.

Пример 13.7. При аварийном покидании самолета кресло с пилотом общей массой $m = 250$ кг с помощью катапультирующего устройства отделяется от самолета с начальной скоростью $v_0 = 20,0$ м/с. В момент катапультирования самолет пикирует под углом α к горизонту со скоростью $u_0 = 20,0$ м/с и ускорением $a = (g/2)\sin\alpha$ (в м/с²) (рис. 13.7). Сила, действующая на кресло со стороны неподвижного (предполагаем отсутствие ветра) воздуха, $\vec{R} = -\mu\vec{v}_a$, где μ — аэродинамический коэффициент, $\mu = 50$ Н·с/м; $\vec{v}_a$ — абсолютная

(относительно воздуха) скорость кресла. Полагая кресло с пилотом материальной точкой, найти координаты точек пересечения траекторий кресла и самолета при пикировании с $\alpha = 0 \dots 30^\circ$.

Решение. Опасной при катапультировании является ситуация встречи кресла при его падении с самолетом. Поэтому движение кресла будем рассматривать в связанной с самолетом системе координат. Эта система отсчета движется поступательно и прямолинейно, но ускоренно, и поэтому является неинерциальной. Векторное уравнение движения кресла

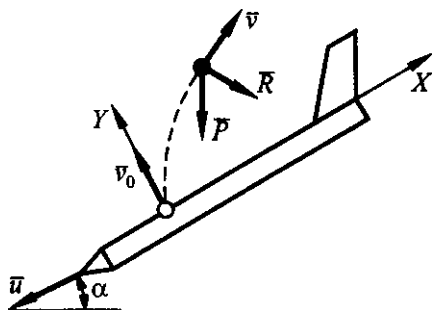


Рис. 13.7

$$m \frac{d\tilde{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e,$$

где $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{R} = -\mu\bar{v}_a = -\mu(\bar{u} + \bar{v})$, $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}$, спроецируем на оси координат:

$$m\ddot{X} = -\mu(\dot{X} - u) - mg\sin\alpha + ma; \quad m\ddot{Y} = -mg\cos\alpha - \mu\dot{Y},$$

или

$$\tau\ddot{X} + \dot{X} = u_0 + at - (g\sin\alpha - a)\tau; \quad \tau\ddot{Y} + \dot{Y} = -g\tau\cos\alpha,$$

где $\tau = m/\mu = 5,0$ с — постоянная времени.

Частное решение первого уравнения $\tilde{X} = At + Bt^2/2$; методом неопределенных коэффициентов находим константы $B = a$, $A = u_0 - g\tau\sin\alpha$. Частное решение второго уравнения $\tilde{Y} = -g\tau\cos\alpha \cdot t$.

В общем решении уравнений

$$X = C_1 + C_2 \exp(-t/\tau) + (u_0 - g\tau\sin\alpha)t + at^2/2;$$

$$Y = C_3 + C_4 \exp(-t/\tau) - g\tau\cos\alpha \cdot t$$

постоянные интегрирования определяем в соответствии с начальными условиями $X(0) = Y(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = v_0$:

$$-C_1 = C_2 = (u_0 - g\tau\sin\alpha)\tau, \quad C_3 = -C_4 = (v_0 + g\tau\cos\alpha)\tau.$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} X &= (u_0 - g\tau\sin\alpha)\tau[1 - \exp(-t/\tau)] + at^2/2; \\ Y &= (v_0 + g\tau\cos\alpha)\tau[1 - \exp(-t/\tau)] - g\tau\cos\alpha \cdot t. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Из условия $Y = 0$ находим моменты времени, соответствующие точке пересечения траекторий кресла и самолета при различных углах α . Решив численно трансцендентное уравнение

$$Y(t^*) = (v_0 + g\tau\cos\alpha)\tau[1 - \exp(-t^*/\tau)] - g\tau\cos\alpha \cdot t^* = 0,$$

из первого уравнения (13.14) определяем координату

$$X(t^*) = (u_0 - g\tau \sin \alpha) \tau [t^*/\tau - 1 + \exp(-t^*/\tau)] + a(t^*)^2/2.$$

Ниже приведены рассчитанные значения t^* и X^* при различных углах α :

$\alpha, ^\circ$	0	10	20	30
$t^*, \text{с}$	3,65	3,70	3,85	4,15
$X^*, \text{м}$	21,1	18,3	16,2	15,1

Таким образом, при падении кресла опасности его встречи с самолетом при $\alpha = 0 \dots 30^\circ$ нет при условии, что расстояние от кабины до хвоста самолета менее 15 м.

Пример 13.8. Материальная частица M массой m движется в горизонтальной плоскости под действием лопатки вентилятора, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 13.8). Лопатка выполнена в виде дуги окружности, радиус которой равен радиусу r вала; центр C окружности лежит на поверхности ва-

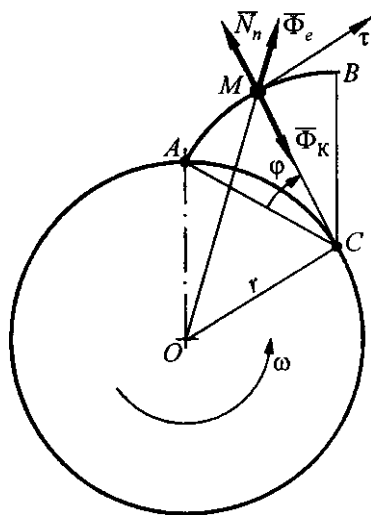


Рис. 13.8

ла, а длины дуг $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{AB}$ равны между собой и соответствуют углу $\pi/3$. Движение частицы начинается от корня (положение A) лопатки с начальной относительной скоростью, полученной вследствие столкновения с лопаткой и равной $v_0 = \omega r/2$.

Пренебрегая трением о поверхность лопатки, определить относительную скорость, с которой частица отделится от лопатки, и нормальное давление ее на лопатку в этом положении.

Решение. Материальная частица (точка) совершает сложное движение. Переносным для нее является известное движение ротора. Требуется найти относительное движение точки вдоль лопатки. Система отсчета, связанная с вращающимся ротором, является не-

инерциальной, поэтому движение точки определяется векторным уравнением

$$m \frac{d\vec{v}_r}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k.$$

В проекциях на естественные оси

$$\begin{aligned} m dv_r^r/dt &= \Phi_e \cos(\pi/6 + \varphi/2); \\ m v_r^2/r &= \Phi_k + N_n; \end{aligned} \quad (13.15)$$

$$0 = mg + N_b.$$

где $v_r^i = ds/dt$, $s = \tilde{AM} = r\varphi$; $\Phi_e = m\omega^2 OM$, $OM = 2r \sin(\pi/6 + \varphi/2)$; $\Phi_K = 2m\omega v_r$.

Первое уравнение системы (13.15), определяющее движение точки, можно привести к виду

$$dv_r^i/dt = \omega^2 r \sin(\pi/3 + \varphi).$$

Полученное уравнение является нелинейным, однако, выполнив замену независимой переменной $dv_r^i/dt = (dv_r^i/dt)ds/(rd\varphi) = v_r^i dv_r^i/(rd\varphi)$ и разделение переменных, можно найти его первый интеграл

$$v_r^2 = C - 2\omega^2 r^2 \cos(\pi/3 + \varphi).$$

В соответствии с начальными условиями (при $\varphi = 0$ и $s = 0$ $v_r = \omega r/2$) постоянная интегрирования

$$C = (\omega r/2)^2 + 2\omega^2 r^2 \cos(\pi/3) = 5\omega^2 r^2/4.$$

Таким образом, зависимость относительной скорости частицы от координаты имеет вид

$$v_r^2 = \omega^2 r^2 [5/4 - 2 \cos(\pi/3 + \varphi)].$$

В момент отделения от лопатки при $\varphi = \pi/3$ относительная скорость частицы $v' = v_r(\pi/3) = 3\omega r/2$ и давление ее на лопатку

$$Q = -N_n = 2m\omega v' - m(v')^2/r = m\omega^2 r(3 - 9/4) = 0,75m\omega^2 r.$$

13.6. Равновесие и движение материальной точки относительно Земли

Все мы живем на Земле, поэтому задачи динамики движения материальных тел относительно Земли имеют исключительное значение. Так как к точности решения этих задач могут предъявляться самые различные требования, возникает необходимость установить, насколько существенным является отличие системы отсчета, связанной с Землей, от инерциальной.

Движение Земли относительно инерциальной гелиоцентрической системы отсчета является довольно сложным. Без учета эффектов, обусловленных влиянием Луны и планет Солнечной системы, Земля участвует в следующих движениях:

обращается вокруг Солнца по близкой к круговой орбите радиусом около 150 млн км;

вращается вокруг собственной оси с практически постоянной угловой скоростью, совершая один оборот в сутки.

Переносная сила инерции точки в системе отсчета, связанной с Землей, определяется формулой

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e = -m(\overline{a}_0 + \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^r).$$

Ускорение a_0 от орбитального движения Земли вокруг Солнца составляет $5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$. Влияние сил инерции от такого ускорения может оказаться заметным лишь для весьма долговременных движений точки. Если этим ускорением можно пренебречь, инерциальной становится геоцентрическая система отсчета. По отношению к такой системе отсчета переносная сила инерции определяется только нормальным ускорением $\overline{a}_e^n$ во вращательном движении Земли вокруг собственной оси:

$$\Phi_e^n = m\omega^2 r_3 \cos \varphi = m\omega v_e,$$

где $\omega = 2\pi/24 \cdot 60 \cdot 60 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$; $r_3 \approx 6370 \text{ км}$ — соответственно угловая скорость вращения Земли и ее радиус; φ — географическая широта места; v_e — переносная скорость точки. Максимальное переносное нормальное ускорение имеют точки на экваторе $(a_e^n)_{\max} = \omega^2 r_3 = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$.

Свободная материальная точка может находиться в состоянии покоя относительно Земли при условии, что

$$\overline{P} + \overline{\Phi}_e^n = 0,$$

т. е. если сила тяготения Земли и переносная сила инерции уравновешиваются. Такое возможно только для точки, которая находится в экваториальной плоскости Земли на расстоянии h от ее поверхности, при котором равны модули сил тяготения и инерции. На поверхности Земли сила тяготения точки массой m

$$P|_{r=r_3} = \frac{k}{r_3^2} = mg,$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяготения на экваторе. Тогда на высоте h

$$mg \frac{r_3^2}{(r_3 + h)^2} = m\omega^2 (r_3 + h),$$

и высота стационарной орбиты

$$h = r_3 \left[\sqrt[3]{g/(\omega^2 r_3)} - 1 \right] = r_3 \left[\sqrt[3]{g/(\alpha_e'')_{\max}} - 1 \right] \approx 36000 \text{ км}.$$

Условие равновесия несвободной материальной точки на поверхности Земли (рис. 13.9) помимо силы тяготения и переносной силы инерции включает реакцию связи:

$$m\bar{g} + \bar{\Phi}_e'' + \bar{N} = 0.$$

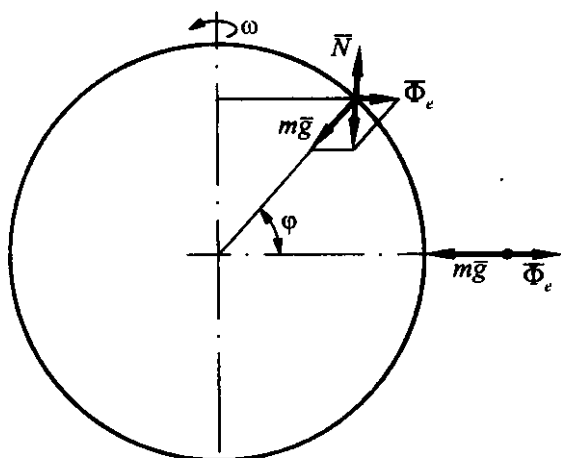


Рис. 13.9

Равнодействующая двух первых сил есть вес тела. Она может быть представлена в виде $m\bar{g}' = m(\bar{g} - \bar{a}_e'')$, где $\bar{g}'$ — ускорение тяготения с учетом неинерциальности (вращения) системы отсчета. Величина $\bar{g}'$ зависит от широты местности: максимально оно на полюсах, минимально — на экваторе. Линия действия равнодействующей определяет местную вертикаль (т. е. линию отвеса в данной точке поверхности Земли). Только на полюсах и экваторе местная вертикаль проходит через центр Земли.

Уравнение относительного движения материальной точки в системе отсчета, связанной с Землей, помимо веса и других приложенных сил включает также кориолисову силу инерции

$$\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v}_r),$$

модуль которой зависит от ориентации вектора $\bar{v}_r$ относительно оси вращения Земли. Значение кориолисовой силы инерции $\Phi_K = 2m\omega v_r$ максимально при движении точки в плоскости, перпендикулярной оси вращения Земли, и не зависит от географического положения точки. На первый взгляд может показаться, что поскольку Φ_K линейно зависит от ω (величины высокого порядка малости), кориолисова сила инерции велика по сравнению с Φ_e'' . В действительности отношение модулей этих сил определяется зависящим от географического положения точки отношением относительной и переносной скоростей: $\Phi_K/\Phi_e'' = 2v_r/v_e$.

При движении точки по параллели кориолисова сила инерции направлена по той же линии, что переносная сила инерции $\bar{\Phi}_e''$ (рис. 13.10). В случае движения на восток обе силы оказываются направленными в одну сторону и модули их складываются. При движении на запад силы противоположны, модули вычитаются, а при скорости относительного движения $v_r = v_e/2 = 230 \cos \varphi$ кориолисова сила инерции полностью компенсирует переносную. Таким образом, при движении точки по параллели изменяется лишь ее вес.

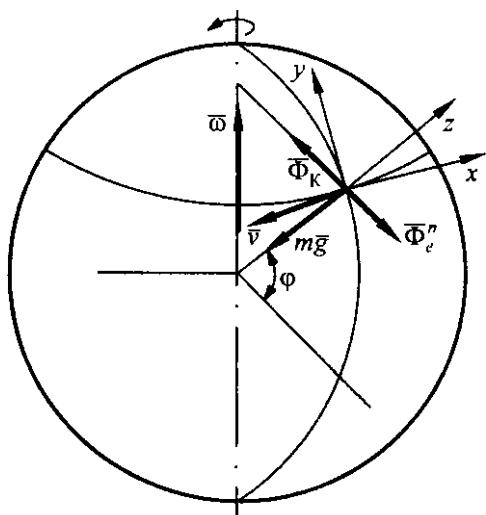


Рис. 13.10

При движении в меридиональной плоскости Земли кориолисова сила инерции перпендикулярна этой плоскости и в северном полушарии направлена вправо по отношению к направлению движения точки. Так как значения переносного и кориолисова ускорений малы по сравнению с ускорением силы тяготения (отличие составляет несколько порядков), влияние соответствующих им сил становится заметным только в длительных движениях с небольшими относительными ускорениями, например в атмосферных процессах, в течении рек, орбитальных движениях спутников и тому подобных явлениях. В задачах динамики машин, для которых характерны значительные относительные ускорения, влияние этих сил несущественно, поэтому систему отсчета, связанную с Землей, обычно считают инерциальной.

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

14.1. Центр масс механической системы

При движении системы материальных точек большую роль играют величины, характеризующие распределение масс точек. Называют эти величины моментами и определяют как суммы произведений масс m_k ($k = 1, 2, \dots, N$) точек системы на однородную функцию их координат: $\sum_{k=1}^N m_k x_k^\alpha y_k^\beta z_k^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma = l$ — степень момента. Моменты вычисляют относительно точки, оси или плоскости.

Момент первой степени $\bar{S}_O = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k$ называют *статическим моментом масс точек относительно какого-либо центра* O , а момент второй степени $J_O = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2$ — *моментом инерции системы относительно центра* O .

Систему материальных точек называют также механической системой. *Механическая система* — совокупность материальных точек, положение или движение каждой из которых определяется положением или движением других точек этой совокупности.

Рассмотрим систему, состоящую из конечного числа N материальных точек с массами m_k и определим положение материальных точек относительно точки O с помощью радиус-векторов $\bar{r}_k$ (рис. 14.1). Для механической системы важное значение имеет центр масс, характеризующий распределение масс материальных точек в системе. Центр масс системы — это

геометрическая точка C , положение которой определяется радиус-вектором $\bar{r}_C$, проведенным из точки O (см. рис. 14.1).

Статический момент массы механической системы относительно какой-либо точки O равен произведению массы системы $M = \sum_{k=1}^N m_k$ на радиус-вектор центра масс $\bar{r}_C$:

$$\bar{S}_O = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C,$$

откуда

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k}{M}. \quad (14.1)$$

Проецированием (14.1) на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем выражения для вычисления координат центра масс механической системы:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k z_k}{M}. \quad (14.2)$$

Выражения $\sum_{k=1}^N m_k x_k = S_{Oyz}$, $\sum_{k=1}^N m_k y_k = S_{Oxz}$, $\sum_{k=1}^N m_k z_k = S_{Oxy}$

называют *статическими моментами массы системы относительно координатных плоскостей Oyz , Oxz , Oxy* . Из (14.2) имеем

$$S_{Oyz} = Mx_C; \quad S_{Oxz} = My_C; \quad S_{Oxy} = Mz_C.$$

Для сплошных однородных тел $\bar{S}_O$ можно записать в виде интеграла по массе тела:

$$\bar{S}_O = \lim_{\Delta m_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \Delta m_k = \int_{(M)} \bar{r} dm.$$

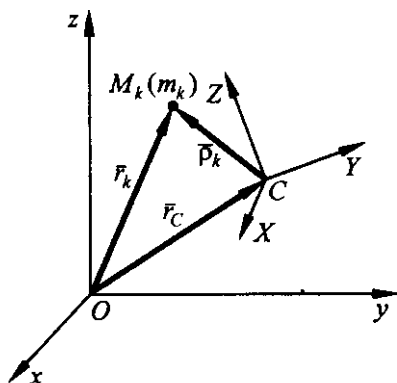


Рис. 14.1

Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dm}{M} \quad (14.3)$$

и

$$x_C = \frac{\int x dm}{M}; \quad y_C = \frac{\int y dm}{M}; \quad z_C = \frac{\int z dm}{M}.$$

Если тело имеет постоянную плотность ρ , то $dm = \rho dV$ и масса тела $M = \rho V$, где dV , V — элементарный объем частицы и объем тела соответственно. Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dV}{V}$$

и

$$x_C = \frac{\int x dV}{V}; \quad y_C = \frac{\int y dV}{V}; \quad z_C = \frac{\int z dV}{V}.$$

Для материальной поверхности будем иметь $dm = \rho_1 dS$, $M = \rho_1 S$, где ρ_1 — поверхностная плотность; dS — площадь поверхности элементарной частицы; S — площадь рассматриваемой материальной поверхности. Формула для радиус-вектора в этом случае примет вид

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dS}{S}.$$

Для материальной линии $dm = \rho_2 dl$, $M = \rho_2 l$, где ρ_2 — линейная плотность; dl — длина элемента линии; l — длина материальной линии, а радиус-вектор

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dl}{l}.$$

Если в качестве точки, относительно которой нужно вычислить статический момент системы, выбрать центр масс C , то

$$\bar{S}_C = \sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k = M \bar{\rho}_C = 0,$$

так как радиус-вектор центра масс относительно этой же точки равен нулю, т. е. $\bar{\rho}_C = 0$.

14.2. Моменты инерции

При рассмотрении вращательных движений твердых тел вводят понятия моментов инерции, которые характеризуют распределение массы тела по отношению к точке (полюсу), оси или плоскости.

Моментом инерции материальной точки M относительно точки O называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния r до точки O :

$$j_O = mr^2.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек с массами m_k ($k=1, 2, \dots, N$). Момент инерции механической системы, состоящей из N материальных точек M_k , относительно точки (полюса) O равен сумме моментов инерции этих точек (рис. 14.2):

$$J_O = \sum_{k=1}^N j_O^{(k)} = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2.$$

Момент инерции относительно точки называют *полярным моментом инерции*.

Моментом инерции механической системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до оси Ol (см. рис. 14.2):

$$J_l = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2.$$

Для тела, имеющего непрерывное распределение массы, имеем соответственно интегралы по массе M :

$$J_O = \int_{(M)} r^2 dm; \quad J_l = \int_{(M)} h^2 dm.$$

Величина

$$\rho_l = \sqrt{\frac{J_l}{M}} \quad (14.4)$$

называется *радиусом инерции* тела относительно оси Ol . Тогда момент инерции можно представить как

$$J_l = M\rho_l^2.$$

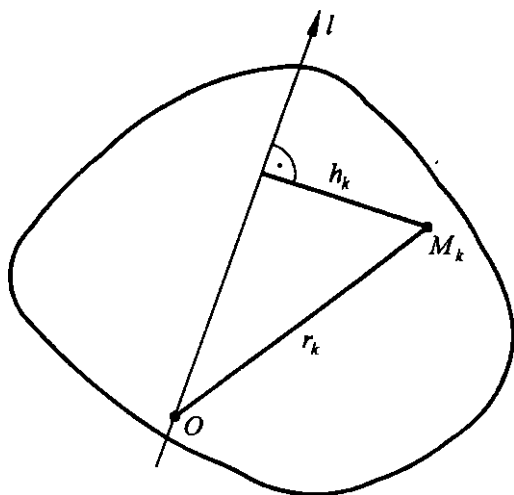


Рис. 14.2

Значения ρ_l для различных тел приведены в справочниках. Для тел произвольной формы ρ_l можно вычислить по формуле (14.4), при этом M и J_l определяют экспериментально.

Единица измерения момента инерции — килограмм на квадратный метр ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Моменты инерции относительно декартовых осей Ox , Oy , Oz и полюса O определяют по формулам (рис. 14.3)

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ J_y &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2); \end{aligned} \quad (14.5)$$

$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (14.6)$$

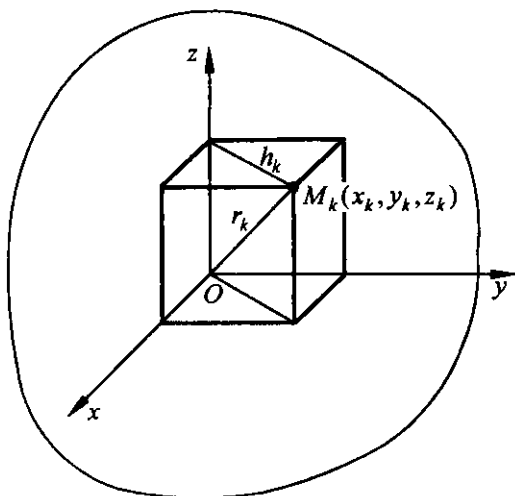


Рис. 14.3

Сложив левые и правые части уравнений системы (14.5), получим

$$2J_O = J_x + J_y + J_z. \quad (14.7)$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей Oxy , Oyz , Oxz соответственно равны:

$$J_{Oxy} = \sum_{k=1}^N m_k z_k^2; \quad J_{Oyz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k^2; \quad J_{Oxz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k^2. \quad (14.8)$$

Из (14.6) и (14.8) следует зависимость

$$J_O = J_{Oxy} + J_{Oyz} + J_{Oxz}.$$

Для тела, имеющего непрерывное распределение массы, осевые моменты инерции относительно осей координат определяются интегралами по массе M :

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

14.3. Зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса—Штейнера)

Найдем зависимость между моментами инерции механической системы относительно параллельных осей Oz и CZ (рис. 14.4).

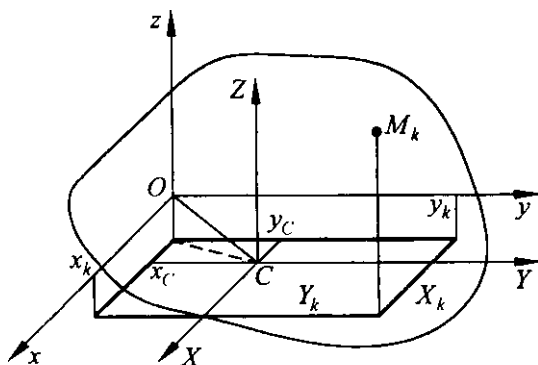


Рис. 14.4

Выберем две системы прямоугольных декартовых координат $Oxyz$ и $CXYZ$, оси которых параллельны, а точка C — центр масс системы. Моменты инерции относительно осей Oz и CZ будут соответственно равны

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad J_{CZ} = \sum_{k=1}^N m_k (X_k^2 + Y_k^2).$$

Координаты точки M_k в рассматриваемых системах связаны уравнениями

$$x_k = X_k + x_c; \quad y_k = Y_k + y_c.$$

Подставив в выражение для J_{Oz} эти соотношения, получим

$$\begin{aligned} J_{Oz} &= \sum_{k=1}^N m_k [(X_k + x_c)^2 + (Y_k + y_c)^2] = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (X_k^2 + Y_k^2) + 2x_c \sum_{k=1}^N m_k X_k + \\ &\quad + 2y_c \sum_{k=1}^N m_k Y_k + (x_c^2 + y_c^2) \sum_{k=1}^N m_k. \end{aligned}$$

Здесь $\sum_{k=1}^N m_k = M$ — масса системы; $\sum_{k=1}^N m_k X_k = MX_C = 0$,

$\sum_{k=1}^N m_k Y_k = MY_C = 0$, так как $X_C = Y_C = 0$; $x_C^2 + y_C^2 = d^2$, d — расстояние между осями Oz и CZ .

Окончательно имеем

$$J_{Oz} = J_{CZ} + Md^2.$$

Полученное выражение представляет собой математическую запись теоремы Гюйгенса—Штейнера, которую можно сформулировать так: *момент инерции системы относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс системы, и произведения массы системы на квадрат расстояния между параллельными осями.*

14.4. Моменты инерции однородных тел

Стержень постоянного сечения

Момент инерции однородного стержня массой M и длиной l (рис. 14.5) относительно оси Oz будет $J_z = \int y^2 dm$. Так как

плотность материала стержня $\rho_2 = \frac{M}{l}$, а $dm = \rho_2 dl = \frac{M}{l} dy$, то получаем

$$J_z = \frac{M}{l} \int_0^l y^2 dy = \frac{Ml^2}{3}.$$

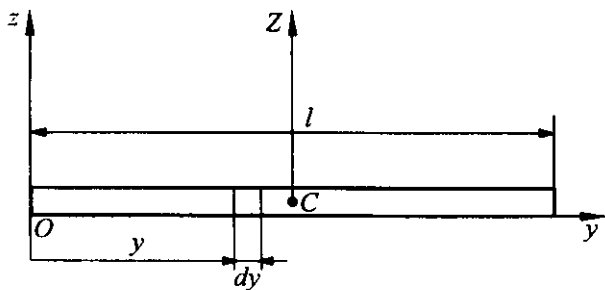


Рис. 14.5

Момент инерции относительно оси CZ

$$J_{CZ} = J_z - M \frac{l^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Круглый диск

Момент инерции однородного круглого диска массой M и радиусом R (рис. 14.6) относительно оси Cz равен $J_z = \int r^2 dm$.
(M)

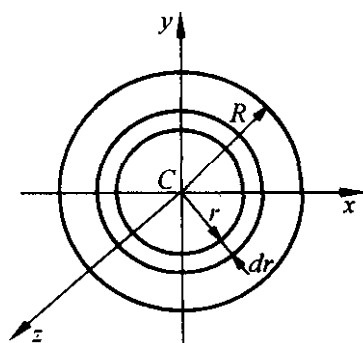


Рис. 14.6

Плотность материала диска $\rho_1 = M/(\pi R^2)$, масса элементарного кольца радиусом r и шириной dr $dm = 2\pi r dr \frac{M}{\pi R^2} = \frac{2Mr}{R^2} dr$. Окончательно имеем

$$J_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Моменты инерции относительно точки C и оси Oz равны между собой:

$$J_z = J_{C'}.$$

Из (14.7) следует, что

$$2J_{C'} = J_x + J_y + J_z,$$

откуда

$$J_z = J_x + J_y.$$

В силу симметрии

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{MR^2}{4}.$$

Для тонкого кольца или колеса радиусом R , масса которого распределена по его ободу, имеем

$$J_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2.$$

(M) (M)

Прямоугольная пластина

Момент инерции однородной прямоугольной пластины массой M относительно оси Oz (рис. 14.7) равен $J_z = \int_{(M)} y^2 dm$.

Плотность материала пластины $\rho_1 = M/(ab)$, $dm = \rho_1 a dy = \frac{M}{b} dy$ (см. полоска 1 на рис. 14.7), следовательно,

$$J_z = \frac{M}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{Mb^2}{3}.$$

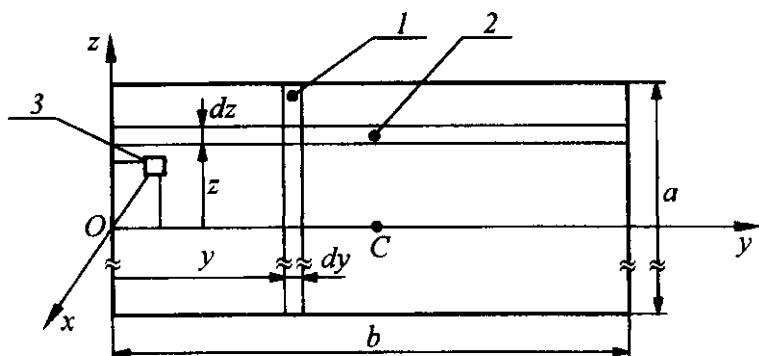


Рис. 14.7

Момент инерции пластины относительно оси Oy равен $J_y = \int_{(M)} z^2 dm$. Здесь $dm = \rho_1 b dz = \frac{M}{a} dz$ (см. полоска 2 на рис. 14.7). Тогда

$$J_y = \frac{M}{a} \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz = \frac{Ma^2}{12}.$$

Момент инерции пластины относительно оси Ox равен $J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm$, где $dm = \frac{M}{ab} dydz$ (см. прямоугольник 3 на рис. 14.7). Таким образом,

$$J_x = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b (y^2 + z^2) dy dz = M \left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right).$$

Учитывая, что $J_O = J_x$, тот же результат можно получить из формулы $2J_O = 2J_x = J_x + J_y + J_z$, или $J_x = J_y + J_z$.

Прямой круговой цилиндр

Момент инерции однородного прямого кругового цилиндра массой M и радиусом R (см. рис. 14.8) относительно продольной оси симметрии Cz будет равен $J_z = \int_{(M)} r^2 dm$. Плотность материала

цилиндра $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$, $dm = \rho dV = \rho H 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$. После подстановки имеем

$$J_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}. \quad (14.9)$$

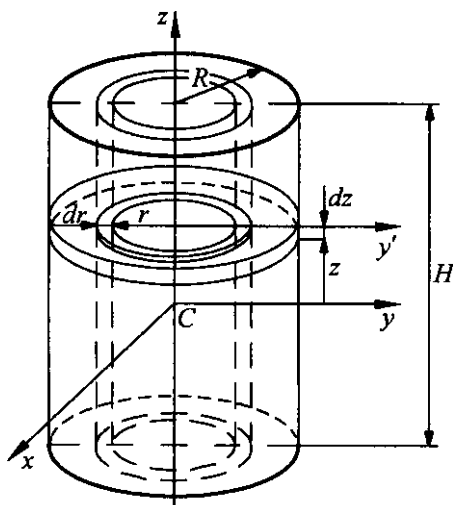


Рис. 14.8

Момент инерции цилиндра относительно оси Cy определим согласно теореме Гюйгенса–Штейнера: $J_y = \int_{(M)} z^2 dm + J_{y'}$, где

$$dm = \rho \pi R^2 dz = \frac{M}{H} dz; \quad J_{y'} = \int_{(M)} dm \frac{R^2}{4}.$$

Откуда

$$J_y = \frac{M}{H} \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz + \frac{M}{4H} R^2 \int_{-H/2}^{H/2} dz = M \left(\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right).$$

Момент инерции для полого цилиндра с внешним R и внутренним R_0 радиусами относительно оси Cz представим как разность моментов инерции сплошных цилиндров радиусами R и R_0 . С учетом формулы (14.9) будем иметь

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z(R)} - J_{z(R_0)} = M(R) \frac{R^2}{2} - M(R_0) \frac{R_0^2}{2} = \\ &= \frac{\pi \rho H}{2} (R^4 - R_0^4) = \frac{1}{2} \rho \pi H (R^2 - R_0^2) (R^2 + R_0^2) = \frac{1}{2} M (R^2 + R_0^2), \end{aligned}$$

где $\rho \pi H (R^2 - R_0^2) = M$ — масса полого цилиндра; ρ — плотность его материала.

Шар

Момент инерции однородного шара, масса которого M и радиус R (рис. 14.9), относительно любой оси одинаков в силу его симметрии, т. е.

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_O.$$

Полярный момент инерции

$$J_O = \int_{(M)} r^2 dm,$$

где dm — элементарная масса полой сферы с радиусами r и $r + dr$, $dm = \rho 4\pi r^2 dr$; $\rho = M/V = 3M/(4\pi R^3)$.

Итак, $dm = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$, откуда

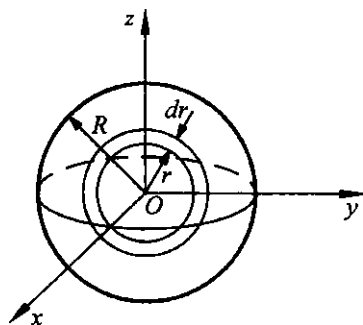


Рис. 14.9

$$J_O = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} MR^2.$$

Следовательно,

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Для полого шара с внешним R и внутренним R_0 радиусами имеем

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z(R)} - J_{z(R_0)} = \frac{2}{5} \rho (V_{(R)} R^2 - V_{(R_0)} R_0^2) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho (R^5 - R_0^5) = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - R_0^5}{R^3 - R_0^3}, \end{aligned}$$

где $M = \frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - R_0^3)$ — масса полого шара.

Для тонкой сферической оболочки предельным переходом получаем

$$J_0 = MR^2, \quad J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} MR^2.$$

14.5. Моменты инерции однородных тел вращения

Воспользуемся цилиндрической системой координат (рис. 14.10). Сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения Oz , ограничено кривой L , уравнение которой на участках $AA'A_1$ и $AA''A_1$ соответственно

$$r_1 = f_1(z), \quad r_2 = f_2(z).$$

Момент инерции тела массой M относительно оси вращения Oz

$$J_z = \int_{(M)} r^2 dm = \rho \int_{(V)} r^2 dV.$$

Подставив выражение для элементарного объема тела вращения в виде $dV = r dr d\varphi dz$, получим

$$J_z = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \rho \frac{\pi}{2} \int_{z_1}^{z_2} [f_2^4(z) - f_1^4(z)] dz.$$

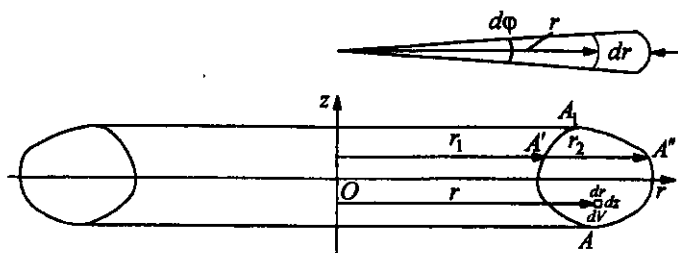


Рис. 14.10

Объем тела вращения

$$V = \int_{(V)} dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1}^{r_2} r dr = \pi \int_{z_1}^{z_2} [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz.$$

Окончательно находим

$$J_z = \frac{M}{2} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f_2^4(z) - f_1^4(z)] dz}{\int_{z_1}^{z_2} [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz}. \quad (14.10)$$

Из условия симметрии $\int_{(M)} x^2 dm = \int_{(M)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} J_z$, следовательно,

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm = \\ &= \int_{(M)} z^2 dm + \frac{1}{2} J_z, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где

$$\int_{(M)} z^2 dm = \frac{\pi M}{V} \int_{z_1}^{z_2} z^2 [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz. \quad (14.12)$$

Для определения момента инерции однородного прямого кругового конуса массой M относительно оси Oz (рис. 14.11) запишем уравнения прямых, ограничивающих тело вращения

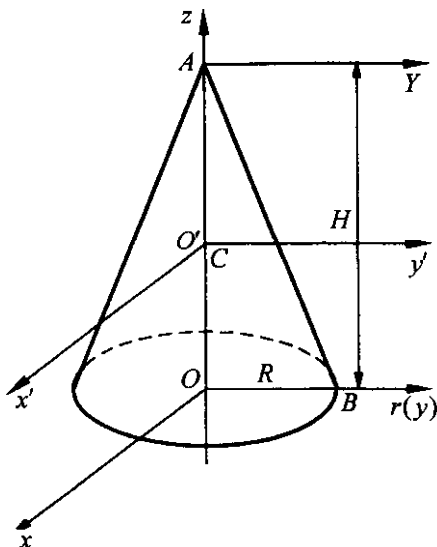


Рис. 14.11

(треугольник OAB): $r_1 = 0$,

$$r_2 = f_2(z) = R\left(1 - \frac{z}{H}\right), \quad z_1 = 0,$$

$z_2 = H$. Для формулы (14.10)

имеем: интеграл в числителе

$$\int_0^H R^4 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^4 dz = \frac{R^4 H}{5}, \quad \text{в зна-$$

менателе — $\int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz =$

$$= R^2 \frac{H}{3} = \frac{V}{\pi} \quad (\text{объем конуса}$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}). \quad \text{Окончательно}$$

получаем

$$J_z = 0,3MR^2.$$

Замечание. Момент инерции конуса относительно оси Oz можно вычислить и другим способом. Согласно (рис. 14.12), $J_z = \int r^2 dm$. Элементарная масса dm (М)

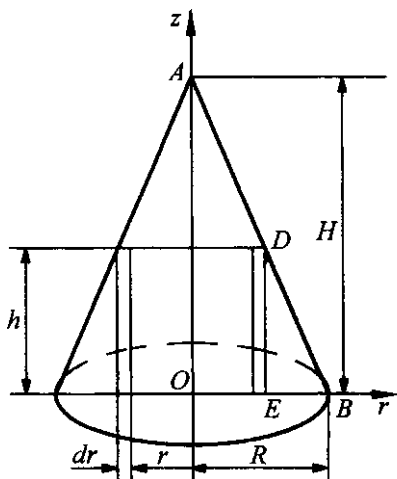


Рис. 14.12

пусть будет равна массе полого цилиндра

высотой h , т. е. $dm = 2\pi r h \rho dr$. Из подобия

треугольников EDB и OAB имеем

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}. \quad \text{Тогда } dm = 2\pi \rho \frac{H}{R} (R-r) r dr, \text{ а}$$

$$J_z = 2\pi \rho H \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 dr =$$

$$= 2\pi \rho H \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5} \right) = 0,1\pi \rho H R^4,$$

или

$$J_z = 0,3MR^2,$$

где $M = \pi R^2 H / 3$ — масса конуса.

Чтобы определить J_x и J_y , необходимо вычислить интеграл вида (14.12):

$$\int_0^H R^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz = \frac{R^2 H^3}{30}.$$

Согласно (14.11),

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} + \frac{\pi \rho R^2 H^3}{30} = M(0,15R^2 + 0,1H^2).$$

Пример 14.1. Определить моменты инерции конуса относительно осей Cy' и Ay (см. рис. 14.11).

Решение. Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера,

$$J_{Cy'} = J_y - M(OC)^2,$$

где $OC = H/4$, тогда

$$J_{Cy'} = M(0,15R^2 + 0,1H^2) - \frac{MH^2}{16} = 0,15M(R^2 + 0,25H^2).$$

Аналогично

$$J_{Ay} = J_{Cy'} + M(AC)^2,$$

где $AC = 3/4 H$. Откуда

$$J_{Ay} = 0,6M(H^2 + 0,25R^2).$$

Пример 14.2. Определить момент инерции треугольника относительно оси Ox (рис. 14.13).

Решение Момент инерции

$$J_x = \int_{(M)} y^2 dm,$$

где $dm = \rho_l l_y dy$; $\rho_l = M/S$; $l_y =$

$= \frac{a}{h}(h-y)$ (ρ_l , S — плотность и

площадь треугольника соответственно). После подстановки имеем

$$dm = \frac{M}{S} \frac{a}{h} (h-y) dy; \quad J_x = \frac{M}{S} \frac{a}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{M}{S} \frac{ah^3}{12}; \quad S = \frac{ah}{2}.$$

Откуда находим

$$J_x = \frac{Mh^2}{6}.$$

Пример 14.3. Определить моменты инерции прямоугольного параллелепипеда относительно координатных осей (рис. 14.14).

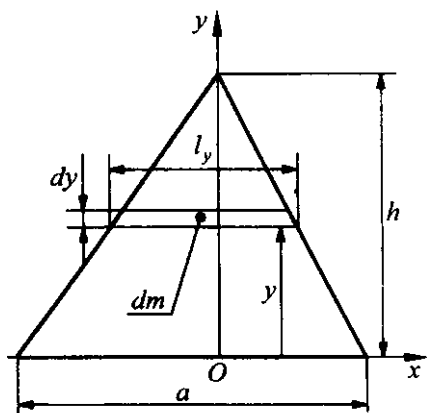


Рис. 14.13

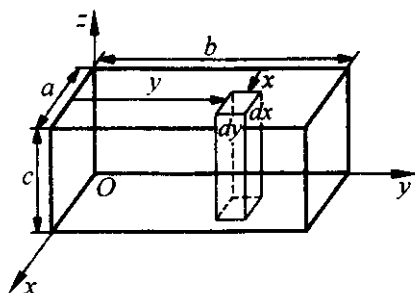


Рис. 14.14

Решение. Момент инерции относительно оси Oz

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm,$$

где $dm = \rho c dx dy$, $\rho = M/(abc)$.

После подстановки получим

$$J_z = \frac{M}{ab} \int_0^b dy \int_0^a (x^2 + y^2) dx = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

Аналогично находим

$$J_x = \frac{M}{3} (b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{M}{3} (a^2 + c^2).$$

Пример 14.4. Определить момент инерции тора относительно оси симметрии Cz (рис. 14.15).

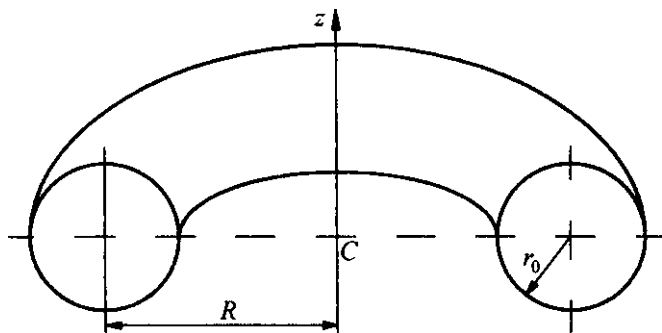


Рис. 14.15

Решение. Воспользуемся формулой (14.10), в которой $f_1(z) = R - \sqrt{r_0^2 - z^2}$, $f_2(z) = R + \sqrt{r_0^2 - z^2}$. Вычислим интегралы в числителе и знаменателе, используя подстановку $z = r_0 \cos \varphi$:

$$I_1 = \int_{-r_0}^{r_0} 8R(R^2 + r_0^2 - z^2) \sqrt{r_0^2 - z^2} dz = 8Rr_0^2 \int_0^\pi (R^2 + r_0^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \\ = \pi R r_0^2 (4R^2 + 3r_0^2);$$

$$I_2 = 4R \int_{-r_0}^{r_0} \sqrt{r_0^2 - z^2} dz = 4R \int_0^\pi r_0^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2\pi R r_0^2.$$

Окончательно имеем

$$J_z = \frac{M}{2} \frac{\pi R r_0^2 (4R^2 + 3r_0^2)}{2\pi R r_0^2} = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r_0^2 \right).$$

Пример 14.5. Для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определить моменты инерции (рис. 14.16).

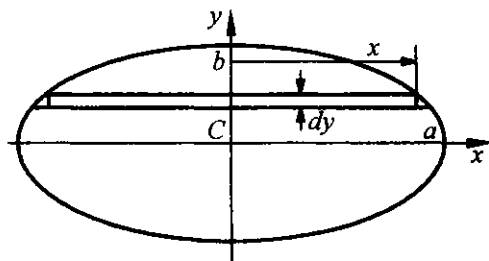


Рис. 14.16

Решение.

$$J_x = \int_{(M)} y^2 dm,$$

где $dm = 2\rho_1 x dy$; $\rho_1 = M/(\pi ab)$; $x = a\sqrt{1 - y^2/b^2}$.

После подстановки получаем

$$J_x = 4\rho_1 a \int_0^b y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy = 4\rho_1 ab^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{Mb^2}{4}$$

(при вычислении интеграла использована подстановка $y = b \cos \varphi$).

Аналогично находим

$$J_y = Ma^2/4,$$

и так как $J_C = J_x + J_y$, то

$$J_C = \frac{M}{4} (a^2 + b^2).$$

14.6. Момент инерции относительно оси, проходящей через заданную точку

Пусть ось Ol проходит через данную точку O . Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O , с осями которой ось Ol образует углы α , β , γ (рис. 14.17). Момент инерции механической системы относительно оси Ol :

$$J_l = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2.$$

Из прямоугольного треугольника $OM_k A_k$ имеем $h_k = r_k \sin \delta$.

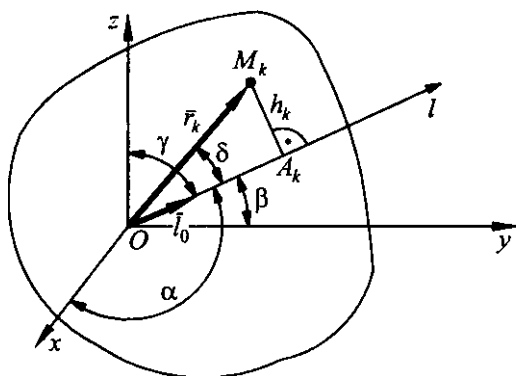


Рис. 14.17

Запишем векторное произведение

$$\begin{aligned} \bar{l}_0 \times \bar{r}_k &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(z_k \cos \beta - y_k \cos \gamma) + \bar{j}(x_k \cos \gamma - z_k \cos \alpha) + \\ &+ \bar{k}(y_k \cos \alpha - x_k \cos \beta). \end{aligned}$$

Представим $|\bar{l}_0 \times \bar{r}_k|$ в виде

$$\begin{aligned} |\bar{l}_0 \times \bar{r}_k|^2 &= (l \cdot r_k \sin \delta)^2 = h_k^2 = \\ &= (z_k \cos \beta - y_k \cos \gamma)^2 + (x_k \cos \gamma - z_k \cos \alpha)^2 + \\ &+ (y_k \cos \alpha - x_k \cos \beta)^2 \end{aligned}$$

и преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} h_k^2 &= (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma + (x_k^2 + z_k^2) \cos^2 \beta + (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha - \\ &- 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Для J_I получаем

$$J_I = \cos^2 \alpha \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2) + \\ + \cos^2 \gamma \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k - \\ - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k ,$$

или

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma . \quad (14.13)$$

В этой формуле

$$J_x = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

— моменты инерции системы относительно осей координат, а

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k, \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k$$

— *центробежные моменты инерции* относительно тех же осей.

Как следует из (14.13), для определения момента инерции относительно произвольной оси необходимо знать углы ориентации этой оси α, β, γ и моменты инерции относительно осей координат с началом в рассматриваемой точке O : $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$. Эти моменты инерции записывают в виде матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \quad (14.14)$$

где $J_{xy} = J_{yx}; J_{xz} = J_{zx}; J_{yz} = J_{zy}$.

Матрица (14.14), составленная из осевых и центробежных моментов инерции относительно прямоугольных декартовых осей координат, называется **тензором инерции**. Эта матрица — симметричная и с действительными элементами.

14.7. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции

Эллипсоид инерции — поверхность второго порядка, построенная в любой точке тела — характеризует спектр моментов инерции тела относительно осей, проходящих через эту точку. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol , проходящей через точку O , откладывают от этой точки отрезок

$$OK = 1/\sqrt{J_l}.$$

Геометрическое место концов отрезков OK (точек K) и является эллипсоидом инерции.

Получим уравнение эллипсоида инерции в системе координат $Oxyz$ (рис. 14.18). Подставив выражения $\cos \alpha = x/OK = \sqrt{J_x} x$, $\cos \beta = y/OK = \sqrt{J_y} y$, $\cos \gamma = z/OK = \sqrt{J_z} z$ в формулу (14.13), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1. \quad (14.15)$$

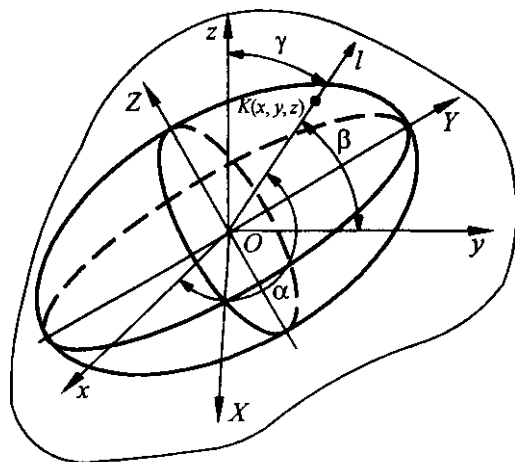


Рис. 14.18

Выражение (14.15) — это уравнение центральной поверхности, не имеющей бесконечно удаленных точек, так как для всех осей отрезок OK имеет конечную длину. Такая поверхность и есть эллипсоид инерции. Для бесконечно тонкого тела в виде

прямолинейного отрезка эллипсоид инерции вырождается в цилиндр, если точка O принадлежит отрезку или прямой, содержащей этот отрезок.

Для каждой точки тела существует свой эллипсоид инерции. Если оси координат направить по взаимно перпендикулярным главным осям эллипсоида инерции (OX , OY , OZ на рис. 14.18), то его уравнение будет иметь следующий вид:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = 1. \quad (14.16)$$

Главные оси (оси симметрии) эллипсоида инерции, построенного в точке твердого тела, называются **главными осями инерции** для данной точки тела. Следовательно, в каждой точке тела имеются три главные оси инерции, которые являются главными осями эллипсоида инерции, построенного в данной точке.

Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется **центральный эллипсоидом инерции**, а его главные оси — **главными центральными осями инерции** тела. Моменты инерции тела относительно главных осей инерции в точке называются **главными моментами инерции** для этой точки тела. В формуле (14.16) это J_X , J_Y , J_Z . Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции называют **главными центральными моментами инерции** тела и обозначают J_{CX} , J_{CY} , J_{CZ} .

Сравнив уравнение (14.16) с уравнением эллипсоида инерции, записанным в канонической форме:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad (14.17)$$

получим

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_X}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_Y}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_Z}},$$

т. е. большей оси эллипсоида инерции соответствует меньший главный момент инерции тела для данной точки.

Эллипсоид инерции называется **трехосным**, если все главные моменты инерции для точки тела различны, и **эллипсоидом вращения**, если два главных момента инерции для точки тела равны. Все прямые, расположенные в плоскости, перпендику-

лярной оси вращения, являются главными осями инерции тела в точке. Эллипсоид инерции становится сферой, если все главные моменты инерции тела в точке равны. Все оси инерции, проходящие через центр сферы, являются главными.

Уравнения эллипсоида инерции (14.16), (14.17) не содержат центробежных моментов инерции, т. е. центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю:

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0. \quad (14.18)$$

Справедливо и обратное утверждение: чтобы оси прямоугольной системы координат были главными осями инерции, необходимо и достаточно выполнить условия (14.18).

Запишем формулу (14.13), когда оси OX , OY , OZ являются главными осями инерции в точке O . В этом случае все центробежные моменты инерции равны нулю и

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (14.19)$$

С помощью этой формулы при известных главных моментах инерции в точке O определяют момент инерции относительно оси Ol .

Моменты инерции относительно произвольной оси Ol (рис. 14.19), согласно выражению (14.19) и теореме Гюйгенса-Штейнера, вычисляют по формуле

$$J_l = J_c + Md^2 = J_{cx} \cos^2 \alpha + J_{cy} \cos^2 \beta + J_{cz} \cos^2 \gamma + Md^2,$$

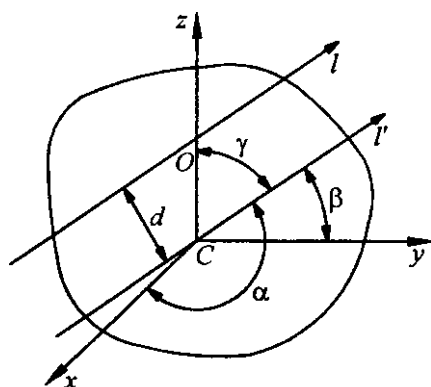


Рис. 14.19

где $J_{Cx}, J_{Cy}, J_{Cz}, M, d$ — главные центральные моменты инерции тела, его масса и расстояние между осью OI и параллельной ей осью CI' , проходящей через центр масс тела.

14.8. Свойства главных осей инерции тела

Теорема 14.1. Если одна из осей координат, проведенных в точке, является главной осью инерции тела для этой точки, то два центробежных момента инерции, которые содержат индекс главной оси инерции, равны нулю (рис. 14.20).

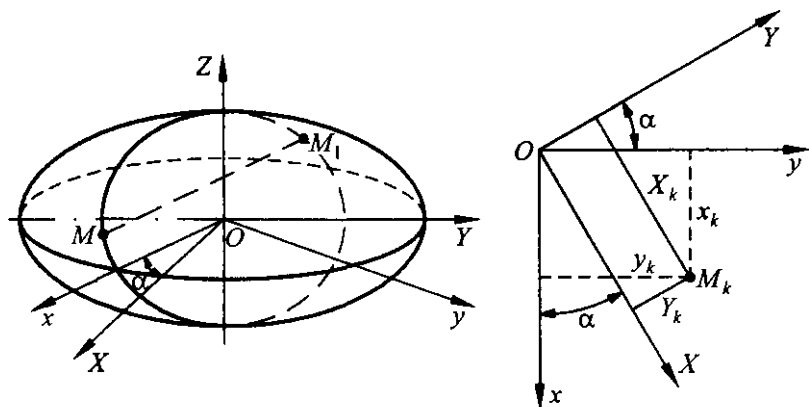


Рис. 14.20

Доказательство. Пусть ось OZ является главной осью инерции для точки O , т. е. одной из осей симметрии эллипсоида инерции, построенного для этой точки тела. Проведем в точке O две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные оси OZ оси Ox и Oy . Уравнение эллипсоида инерции в этих осях имеет вид

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z Z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xZ - 2J_{yz}yZ = 1.$$

Так как OZ — ось симметрии эллипсоида инерции, то найдутся в плоскости OxZ точки $M(x, 0, Z)$ и $M_1(-x, 0, Z)$, лежащие на поверхности эллипсоида. Координаты этих точек удовлетворяют равенствам

$$J_x x^2 + J_z Z^2 - 2J_{xz}xZ = 1;$$

$$J_x x^2 + J_z Z^2 + 2J_{xz} xZ = 1.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$4J_{xz} xZ = 0.$$

Так как x и Z не равны нулю, то $J_{xz} = 0$. Аналогично рассуждая для двух точек, расположенных в плоскости OyZ , можно показать, что и $J_{yz} = 0$.

Замечание 1. Уравнение эллипсоида инерции в осях Ox , Oy , OZ принимает вид

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z Z^2 - 2J_{xy} xy = 1. \quad (14.20)$$

Замечание 2. Среди осей, перпендикулярных между собой и оси OZ , находятся главные оси инерции OX и OY для точки O .

Определим положение этих осей из условия $J_{xy} = 0$. Координаты X_k , Y_k и x_k , y_k материальной точки M_k массой m_k (см. рис. 14.20) связаны между собой следующим образом: $X_k = x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha$, $Y_k = -x_k \sin \alpha + y_k \cos \alpha$. Координата Z_k при повороте осей Ox , Oy не изменяется.

Вычислим центробежный момент инерции J_{xy} :

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum_{k=1}^N m_k X_k Y_k = \sum_{k=1}^N m_k (x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha)(-x_k \sin \alpha + y_k \cos \alpha) = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \sum_{k=1}^N m_k (-x_k^2 + y_k^2) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \end{aligned}$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^N m_k (-x_k^2 + y_k^2) = -\sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2) + \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) = -J_x + J_y.$$

Проведя преобразование и приравняв нулю J_{xy} , получаем выражение

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} (J_x - J_y) + J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

из которого находим при $J_x = J_y$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ рад, а при $J_x \neq J_y$ $\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$.

Замечание 3. Справедливо обратное утверждение: при $J_x = J_y = 0$ ось OZ является главной осью инерции.

Действительно, при $J_x = J_y = 0$ уравнение эллипсоида инерции имеет вид (14.20), а следовательно, ось OZ — главная ось эллипсоида инерции, т. е. главная ось инерции тела для точки O .

Теорема 14.2. Главная центральная ось инерции твердого тела является главной осью инерции для всех своих точек.

Доказательство. Пусть ось CZ есть главная центральная ось инерции тела. Проведем через центр масс тела C две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные оси CZ оси Cx и Cy (рис. 14.21). Тогда

$$J_{xz} = J_{yz} = 0; \quad x_C = y_C = 0. \quad (14.21)$$

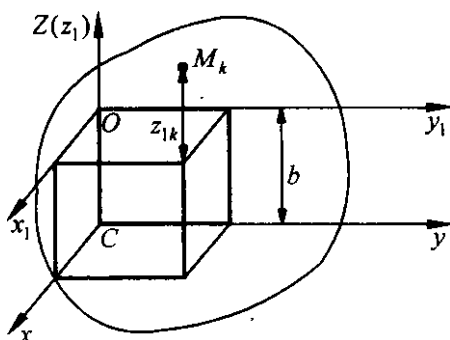


Рис. 14.21

Выберем на оси CZ произвольную точку O и покажем, что ось CZ является главной и для точки O . Проведем в точке O оси Ox_1 и Oy_1 , параллельные осям Cx и Cy ; $OC = b$. Координаты произвольной точки M_k массой m_k следующие: $x_{1k} = x_k$, $y_{1k} = y_k$, $z_{1k} = Z_k - b$. Необходимо доказать, что центробежные моменты инерции относительно осей Ox_1 , $OZ(z_1)$ и Oy_1 , $OZ(z_1)$ равны нулю. Это будет означать, что ось CZ есть главная для точки O .

Имеем

$$\begin{aligned} J_{x_1 z_1} &= J_{x_1 Z} = \sum_{k=1}^N m_k x_{1k} z_{1k} = \sum_{k=1}^N m_k x_k (Z_k - b) = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k x_k Z_k - b \sum_{k=1}^N m_k x_k = J_{xz} - b M x_C; \\ J_{y_1 z_1} &= J_{y_1 Z} = \sum_{k=1}^N m_k y_{1k} z_{1k} = \sum_{k=1}^N m_k y_k (Z_k - b) = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k y_k Z_k - b \sum_{k=1}^N m_k y_k = J_{yz} - b M y_C. \end{aligned} \quad (14.22)$$

С учетом (14.21) из (14.22) следует $J_{x_1z} = J_{y_1z} = 0$, что и доказывает теорему.

Замечание. Главная ось инерции, не проходящая через центр масс тела, является главной осью инерции только для одной точки (рис. 14.22). Пусть теперь ось OZ – главная ось инерции для точки O , т. е. $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а центр масс тела не лежит на этой оси ($x_C \neq 0, y_C \neq 0$), тогда, согласно (14.22), $J_{x_1z} = -bMx_C$, $J_{y_1z} = -bMy_C$. Эти центробежные моменты не равны нулю, т. е. ось OZ не является главной для точки O_1 .

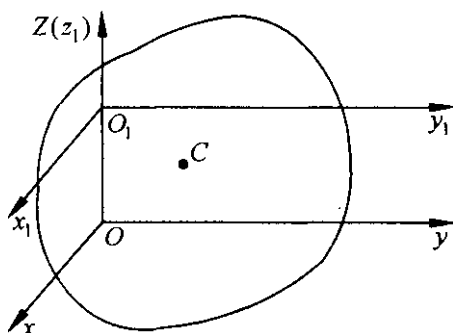


Рис. 14.22

Теорема 14.3. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции этого тела.

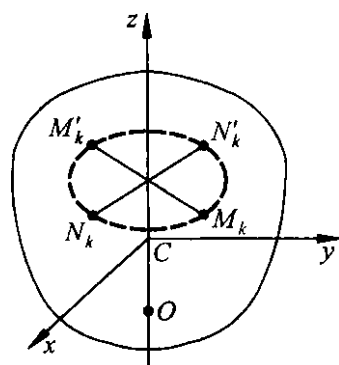


Рис. 14.23

Доказательство. Пусть ось Oz является осью материальной симметрии тела, тогда центр масс C лежит на этой оси (рис. 14.23). Проведем через центр масс C две перпендикулярные между собой и перпендикулярные оси Cz оси Cx и Cy . Докажем теперь, что центробежные моменты J_{xz} и J_{yz} равны нулю. Всегда можно найти материальные точки тела M_k и M'_k с равными массами m_k , m'_k , симметрично расположенные относительно

оси Cz . Координаты этих точек соответственно x_k, y_k, z_k и $-x_k, -y_k, z_k$. Для N_k и N'_k с равными массами m_k и m'_k соответственно имеем $x_k, -y_k, z_k$ и $-x_k, y_k, z_k$. Тогда

$$J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k = \sum_{(I)} m_k x_k z_k + \sum_{(II)} m'_k (-x_k) z_k + \\ + \sum_{(III)} m_k x_k z_k + \sum_{(IV)} m'_k (-x_k) z_k + \dots = 0,$$

где I, II, III и IV — соответственные части тела. (Аналогично записываются суммы для точек, лежащих ниже плоскости Cxy .) Так же можно доказать, что $J_{yz} = 0$.

Итак, ось Cz является главной центральной осью инерции тела.

Теорема 14.4. Если тело имеет плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции тела в точке пересечения прямой с плоскостью симметрии.

Доказательство. Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии P (рис. 14.24). Проведем ось Oz перпендикулярно этой плоскости P ; точка O — точка пересечения оси Oz и плоскости P .

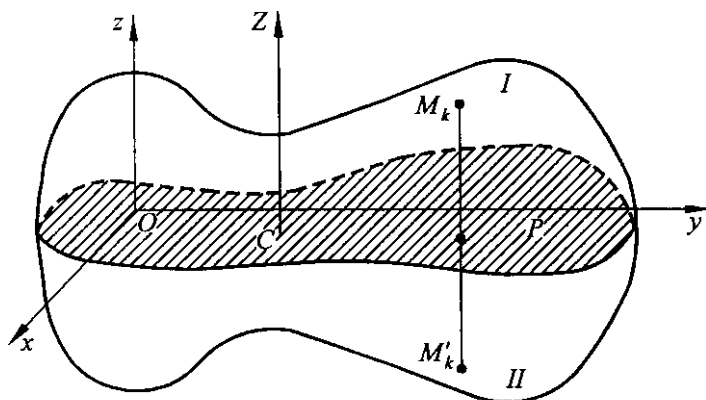


Рис. 14.24

Проведем взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy , лежащие в плоскости P . Докажем, что центробежные моменты инерции J_{xz} и

J_{xz} равны нулю. Так как плоскость P есть плоскость материальной симметрии тела, то для каждой материальной точки M_k тела с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k найдется точка M'_k равной массы с координатами $x_k, y_k, -z_k$. Тогда

$$J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k = \sum_{(I)} m_k x_k z_k + \sum_{(II)} m_k x_k (-z_k) = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $J_{yz} = 0$. Следовательно, ось Oz является главной осью инерции тела в точке O .

Замечание 1. Центр масс тела C лежит в плоскости материальной симметрии, ось Cz является главной центральной осью инерции тела.

Замечание 2. Если тело однородно, то плоскость или ось материальной симметрии являются просто плоскостью или осью геометрической симметрии.

14.9. Определение направления главных осей инерции

Пусть в точке O тела проведена произвольная система координат $Oxyz$. Уравнение эллипсоида инерции в точке O имеет вид

$$\begin{aligned} 2F(x, y, z) = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - \\ - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz - 1 = 0, \end{aligned} \quad (14.23)$$

т. е. тензор инерции для этой точки будет J .

Определим направления главных осей инерции и главных моментов инерции для этой точки O (рис. 14.25).

Выберем в качестве осей координат в точке O оси OX, OY, OZ , направленные по главным осям эллипсоида инерции в точке O . Тогда радиус-вектор $\vec{r}$ точки M , лежащей на главной оси инерции и поверхности эллипсоида инерции, совпадет по направлению с вектором нормали к эллипсоиду.

Направления осей определим из уравнения

$$\overline{\text{grad} F} = \lambda \vec{r}$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda z. \quad (14.24)$$

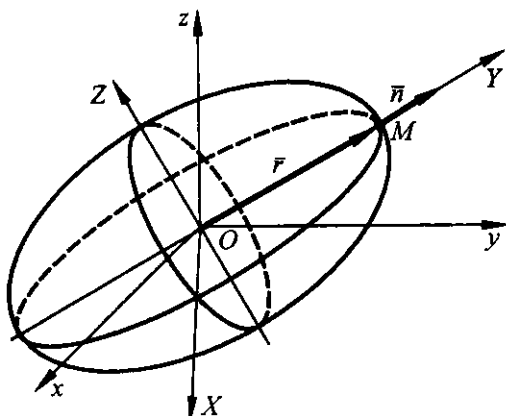


Рис. 14.25

С учетом (14.23) уравнения (14.24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}(J_x - \lambda)x - J_{xy}y - J_{xz}z &= 0; \\ -J_{yx}x + (J_y - \lambda)y - J_{yz}z &= 0; \\ -J_{zx}x - J_{zy}y + (J_z - \lambda)z &= 0.\end{aligned}\quad (14.25)$$

Система уравнений (14.25) определяет координаты точки $M(x, y, z)$ главной оси инерции (см. рис. 14.25). Ненулевое решение эта система имеет при условии, что

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.\quad (14.26)$$

Уравнение (14.26) имеет три действительных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в случае симметричности тензора инерции и действительности его компонент. Допустим, что все корни различные. Подставив их значения в (14.25), получим три системы уравнений, из которых найдем три точки пересечения главных осей инерции для точки O с эллипсоидом инерции. Из системы уравнений (14.25) при известных $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ определим отношения x/z и y/z . Из первых двух уравнений (14.25) получим решение в форме

$$\frac{x}{\Delta_1(\lambda_i)} = \frac{y}{\Delta_2(\lambda_i)} = \frac{z}{\Delta_3(\lambda_i)},\quad (14.27)$$

где $\Delta_j(\lambda_j), (j=1, 2, 3)$ — алгебраические дополнения элементов последней строки определителя (14.26).

Выражения (14.27) представляют собой уравнения прямых, проходящих через точки $O(0, 0, 0)$ и $M(x, y, z)$, и являются уравнениями главных осей инерции.

Если в системе (14.25) одно уравнение независимое, то любое из уравнений этой системы является уравнением плоскости, в которой лежат главные оси инерции для точки O .

Докажем, что двум различным корням λ_i и λ_k соответствуют два ортогональных направления главных осей инерции. Для λ_i и λ_k координаты точек M_i и M_k будут соответственно x_i, y_i, z_i и x_k, y_k, z_k .

Из уравнений (14.24) имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i x_k + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i y_k + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_i z_k = \lambda_i (x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k);$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k x_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k y_i + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_k z_i = \lambda_k (x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k).$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(\lambda_i - \lambda_k)(x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k) = 0. \quad (14.28)$$

Если $\lambda_i \neq \lambda_k$, то должен быть равен нулю второй множитель в уравнении (14.28). Этот множитель представляет собой скалярное произведение радиус-векторов главных направлений и

$$\vec{r}_i \vec{r}_k = 0.$$

Следовательно, их направления ортогональны.

Выберем теперь в качестве осей координат главные оси инерции в точке O . Для оси OX имеем $Y=Z=0$ и из первого уравнения (14.25) получаем $(J_X - \lambda_1)X = 0$. Здесь $X \neq 0$, поэтому $\lambda_1 = J_X$. Аналогично можно показать, что $\lambda_2 = J_Y, \lambda_3 = J_Z$.

Таким образом, корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения (14.26) равны соответственно главным моментам инерции J_X, J_Y, J_Z тела для точки O .

Пример 14.6. Для однородной квадратной пластины $OABD$, масса которой M , а сторона a , определить тензор инерции для осей системы координат $Oxyz$ (рис. 14.26).

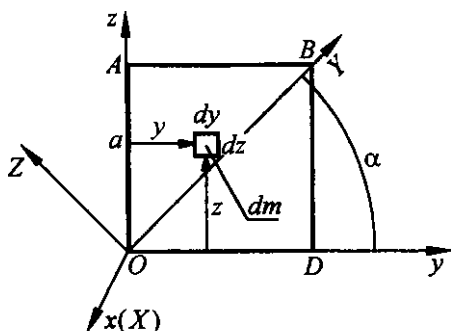


Рис. 14.26

Решение. Моменты инерции относительно осей декартовой системы координат равны

$$J_y = \frac{Ma^2}{3}; J_z = \frac{Ma^2}{3}; J_x = \frac{M}{3}(a^2 + a^2) = \frac{2Ma^2}{3}.$$

В точке O Ox — главная ось инерции, так как она перпендикулярна плоскости симметрии пластины, поэтому $J_{xy} = J_{xz} = 0$.

Определим центробежный момент инерции $J_{yz} = \int_{(M)} yz dm$. Пусть $dm = \rho_1 dydz$, где $\rho_1 = M/a^2$; $dm = \frac{M}{a^2} dydz$. Тогда

$$J_{yz} = \frac{M}{a^2} \int_{(M)} yz dydz = \frac{M}{a^2} \int_0^a z dz \int_0^a y dy = \frac{Ma^2}{4}; J_{yz} = J_{zy}.$$

Тензор инерции имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ 0 & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}.$$

Пример 14.7. Для условий предыдущего примера определить главные оси инерции пластины для точки O и главные моменты инерции относительно этих осей.

Решение. Для нахождения главных моментов инерции составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ 0 & -J_{yz} & J_z - \lambda \end{vmatrix},$$

который должен быть равен нулю для нетривиального решения характеристического уравнения

$$(J_x - \lambda)(J_y - \lambda)(J_z - \lambda) - J_{yz}^2 = 0.$$

Из уравнений

$$J_x - \lambda = 0; (J_y - \lambda)(J_z - \lambda) - J_{yz}^2 = 0$$

находим

$$\lambda_1 = J_x = \frac{2Ma^2}{3}; \quad \lambda_{2,3} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y + J_z)^2}{4} + J_{yz}^2 - J_y J_z};$$

$$\lambda_2 = \frac{Ma^2}{12}; \quad \lambda_3 = \frac{7Ma^2}{12}.$$

Главные моменты инерции равны

$$J_X = J_x = \frac{2Ma^2}{3}; \quad J_Y = \frac{Ma^2}{12}; \quad J_Z = \frac{7Ma^2}{12}.$$

Определим теперь уравнения главных осей инерции для точки O . Запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} (J_x - \lambda_i)x &= 0; \\ (J_y - \lambda_i)y - J_{yz}z &= 0; \\ -J_{yz}y + (J_z - \lambda_i)z &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя λ_i (где $i = 1, 2, 3$), получаем три решения:

$$\begin{aligned} x \neq 0, \quad y = z &= 0; \\ y - z &= 0, \quad x = 0; \\ y + z &= 0, \quad x = 0. \end{aligned}$$

Из первого решения следует, что главная ось OX совпадает с осью Ox , второе и третье решения дают уравнения осей OY и OZ . Угол $\alpha = \pi/4$.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

15.1. Механическая система. Внешние и внутренние силы

Реальные задачи динамики системы требуют изучения движения материальных точек и тел с учетом взаимного влияния их движений.

Твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек. Возможна модель механической системы, когда ряд тел в ней представляется материальными точками, а для других тел при движении необходимо учитывать именно свойства твердых тел.

Движение механической системы всегда рассматривают по отношению к каким-либо системам отсчета (как инерциальным, так и неинерциальным). В декартовой системе координат положение системы, состоящей из N материальных точек, определяется совокупностью $3N$ координат x_k, y_k, z_k , где $k=1, 2, \dots, N$. Для точки можно использовать, например, криволинейные координаты, а положение твердого тела определять с помощью углов Эйлера и координат некоторой точки тела (полюса). Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то ее положение задается координатами некоторых точек тел (полюсов) и значений углов Эйлера для этих тел.

Следует различать свободные и несвободные механические системы. На движение несвободных систем наложены связи. Для однозначного определения положения механической системы в любой момент времени необходимо иметь такие координаты, которые не связаны между собой какими-либо уравнениями. Если уравнений связей m , то для системы материальных точек будет $3N - m = n$ независимых координат.

Независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение системы в любой момент времени при движении, называют *обобщенными координатами для механической системы*. В качестве обобщенных координат могут быть выбраны отрезки (в том числе и криволинейные) и углы.

Внешними силами механической системы называются силы, с которыми точки системы взаимодействуют с телами и точками, не входящими в данную систему.

Внутренними силами механической системы называются силы взаимодействия между собой точек данной системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Равнодействующую внутренних сил, действующих на k -ю точку, обозначим $\bar{F}_k^{(i)}$, внешних сил — $\bar{F}_k^{(e)}$. Внутренние и внешние силы могут включать в себя активные силы и реакции связей.

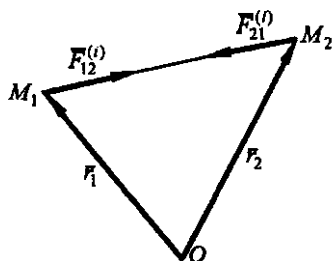


Рис. 15.1

Теорема. Главный вектор и главный момент относительно произвольного центра внутренних сил механической системы равны нулю при любом состоянии механической системы, т. е. в состоянии покоя или движения.

Доказательство. Точки системы M_1 и M_2 взаимодействуют с силами $\bar{F}_{12}^{(i)}$, $\bar{F}_{21}^{(i)}$ (рис. 15.1), причем, согласно третьей аксиоме динамики (см. § 13.1),

$$\bar{F}_{12}^{(i)} = -\bar{F}_{21}^{(i)}, \text{ или } \bar{F}_{12}^{(i)} + \bar{F}_{21}^{(i)} = 0. \quad (15.1)$$

С учетом всех взаимодействий точек системы имеем

$$\bar{F}_{12}^{(i)} + \bar{F}_{21}^{(i)} = 0, \dots, \bar{F}_{N-1, N}^{(i)} + \bar{F}_{N, N-1}^{(i)} = 0. \quad (15.2)$$

Суммируя уравнения (15.2), получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (15.3)$$

Здесь сумма внутренних сил, действующих на k -ю точку, приведена к равнодействующей $\bar{F}_k^{(i)}$.

Таким образом, главный вектор внутренних сил механической системы

$$\bar{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (15.4)$$

Рассмотрим сумму моментов сил $\bar{F}_{12}^{(i)}$, $\bar{F}_{21}^{(i)}$ относительно точки O . Используя выражение (15.1) и векторное равенство $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 + \overline{M_2 M_1}$, запишем

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{F}_{12}^{(i)}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{21}^{(i)}) &= \bar{r}_1 \times \bar{F}_{12}^{(i)} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{21}^{(i)} = \\ &= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}_{12}^{(i)} = \overline{M_2 M_1} \times \bar{F}_{12}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (15.5)$$

(здесь векторное произведение равно нулю, так как векторы $\overline{M_2 M_1}$ и $\bar{F}_{12}^{(i)}$ коллинеарны).

Обобщая уравнение (15.5) для всех точек системы, имеем

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{F}_{12}^{(i)}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{21}^{(i)}) &= 0, \dots, \\ \bar{M}_O(\bar{F}_{N-1, N}^{(i)}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{N, N-1}^{(i)}) &= 0. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Суммируя уравнения (15.6) и применяя теорему Вариньона для равнодействующей силы $\bar{F}_k^{(i)}$, получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = 0. \quad (15.7)$$

Таким образом, главный момент внутренних сил механической системы относительно точки O равен нулю:

$$\bar{L}_O^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (15.8)$$

В проекциях на оси координат, согласно (8.6) и (8.10), имеем

$$R_x^{(i)} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(i)} = 0; \quad R_y^{(i)} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(i)} = 0; \quad R_z^{(i)} = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(i)} = 0; \quad (15.9)$$

$$L_x^{(i)} = \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \quad L_y^{(i)} = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \quad (15.10)$$

$$L_z^{(i)} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

15.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из N точек. На точку M_k массой m_k системы действуют равнодействующая внутренних сил $\bar{F}_k^{(i)}$ и равнодействующая внешних сил $\bar{F}_k^{(e)}$ (рис. 15.2).

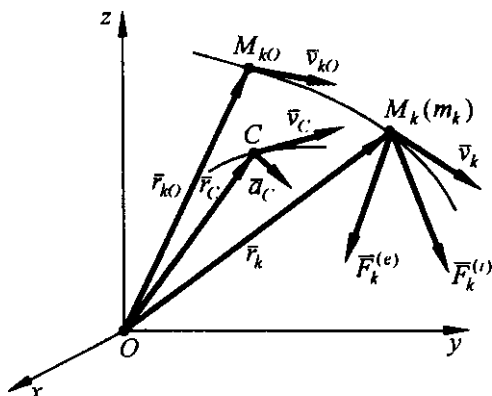


Рис. 15.2

Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек в векторной форме имеют вид

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}, \quad (15.11)$$

или

$$m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \quad (k=1, 2, \dots, N),$$

где $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость k -й точки.

Систему N дифференциальных уравнений называют дифференциальными уравнениями движения механической системы в векторной форме.

В проекциях на оси инерциальной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ получаем $3N$ дифференциальных уравнений движения механической системы:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^{(e)} + F_{kx}^{(i)}; & m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^{(e)} + F_{ky}^{(i)}; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^{(e)} + F_{kz}^{(i)}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Начальные условия имеют следующий вид:

при $t = t_0$

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k0}, & y_k &= y_{k0}, & z_k &= z_{k0}; \\ \dot{x}_k &= \dot{x}_{k0}, & \dot{y}_k &= \dot{y}_{k0}, & \dot{z}_k &= \dot{z}_{k0}. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Проинтегрировать систему уравнений (15.12) аналитически и даже численно очень трудно. Процесс интегрирования еще более усложняет то обстоятельство, что силы реакций связей, наложенных на систему, часто необходимо определять в процессе решения задачи о движении механической системы.

Ряд задач небесной механики требует подробного знания движения точек во времени. Это задачи о движении двух, трех и более точек (тел) под действием сил тяготения. Здесь применимы уравнения (15.12).

Для решения некоторых других задач необходимо систему уравнений (15.11) преобразовать так, чтобы в них содержались зависимости некоторых обобщенных мер движения (количества движения, главного момента количеств движения, кинетической энергии) от характеристик приложенных сил (главного вектора и главного момента относительно центра). Из таких уравнений часто удастся исключить внутренние силы и найти необходимые решения, описывающие движение механической системы.

Получают эти уравнения из закономерностей, описываемых общими теоремами динамики для механической системы: о движении центра масс, об изменении количества движения, об изменении главного момента количеств движения, об изменении кинетической энергии.

Теоремы формулируют для инерциальных систем отсчета; если система неинерциальна, то это специально оговаривают.

15.3. Теорема о движении центра масс механической системы

Запишем уравнения движения механической системы в виде

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (15.14)$$

где $\bar{a}_k$ — ускорение k -й точки; $\bar{F}_k^{(e)}$, $\bar{F}_k^{(i)}$ — равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на k -ю точку.

Просуммируем уравнения (15.14) по всем точкам механической системы:

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)}. \quad (15.15)$$

Здесь главный вектор внутренних сил $\bar{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0$.

Продифференцировав дважды по времени выражение (14.1) для определения радиус-вектора центра масс системы, получим

$$M \bar{v}_C = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k; \quad (15.16)$$

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^N m_k \bar{a}_k, \quad (15.17)$$

где $\bar{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс системы.

С учетом (15.17) уравнение (15.15) примет вид

$$M \bar{a}_C = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)}, \quad (15.18)$$

где $\bar{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему.

Теорема о движении центра масс механической системы формулируется так: *центр масс механической системы движется как материальная точка, как бы обладающая массой системы, под действием системы всех внешних сил, действующих на точки системы.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат уравнения (15.18) имеют вид

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(e)}, \quad (15.19)$$

где $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ — проекции ускорения $\bar{a}_C$ центра масс механической системы.

Из теоремы о движении центра масс вытекают два следствия.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е. $\bar{R}^{(e)} = 0$, то из (15.18) следует, что $\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0$, откуда после интегрирования получаем

$$\bar{v}_C = \frac{d\bar{r}_C}{dt} = \bar{C}_1. \quad (15.20)$$

Интегрируя (15.20), находим

$$\bar{r}_C = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2. \quad (15.21)$$

Постоянные $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ определяем из начальных условий: при $t = 0$ $\bar{r}_C = \bar{r}_{C0}$, $\bar{v}_C = \bar{v}_{C0}$. Для текущего момента времени при $\bar{R}^{(e)} = 0$ окончательно имеем

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C0}; \quad \bar{r}_C = \bar{r}_{C0} + \bar{v}_{C0} t.$$

Таким образом, если главный вектор внешних сил, действующих на точки механической системы, равен нулю, то центр масс механической системы движется прямолинейно и равномерно.

Если $\bar{v}_{C0} = 0$, т. е. центр масс в начальный момент времени находится в покое, то

$$\bar{v}_C = 0, \quad \bar{r}_C = \bar{r}_{C0}, \quad (15.22)$$

т. е. центр масс покоится в течение всего времени движения системы при условии, что $\bar{R}^{(e)} = 0$.

Замечание. Воспользуемся условием (15.22) и запишем для текущего и начального положений механической системы $M \bar{r}_C = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k$ и $M \bar{r}_{C0} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_{k0}$ (см. рис. 15.2). Вычитая из первого выражения второе, получаем

$$\sum_{k=1}^N m_k (\bar{r}_k - \bar{r}_{k0}) = \sum_{k=1}^N m_k \Delta \bar{r}_k = 0.$$

Следовательно, отдельные точки системы могут перемещаться при $\bar{R}^{(e)} = 0$ и покоящемся центре масс.

2. Пусть теперь проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на одну из осей (например, ось Ox)

равна нулю $R_x^{(e)} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0$, тогда из первого уравнения (15.19)

следует $a_{Cx} = \ddot{x}_C = 0$, а значит $v_{Cx} = \dot{x}_C = C_1$, $x_C = C_1 t + C_2$.

Постоянные определяем из начальных условий: при $t = 0$ $x_C = x_{C0}$, $v_{Cx} = \dot{x}_C = \dot{x}_{C0}$. Для любого момента времени при $R_x^{(e)} = 0$ окончательно имеем

$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0}, \quad x_C = \dot{x}_{C0} t + x_{C0}.$$

Если $\dot{x}_{C0} = 0$, т. е. проекция скорости центра масс на ось Ox в начальный момент времени равна нулю, то

$$\dot{x}_C = 0, \quad x_C = x_{C0} \quad (15.23)$$

в любой момент времени.

Замечание. Воспользуемся условием (15.23) и, согласно (14.2), запишем для текущего и начального моментов времени $M x_C = \sum_{k=1}^N m_k x_k$, $M x_{C0} = \sum_{k=1}^N m_k x_{k0}$.

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\sum_{k=1}^N m_k (x_k - x_{k0}) = \sum_{k=1}^N m_k \Delta x_k = 0. \quad (15.24)$$

Из уравнения следует, что перемещение k -й точки $\Delta x_k = x_k - x_{k0}$ вдоль оси Ox существует при $R_x^{(e)} = 0$ и отсутствии перемещения вдоль этой оси центра масс.

Пример 15.1. Тело 1 массой m_1 имеет паз, в котором движется материальная точка 2 массой m_2 , $\angle O'AB = \alpha$, $O'A = l$ (рис. 15.3, а).

Определить силу, с которой тело 1 действует на плоскость, и скорость тела 1 в момент, когда точка 2 достигнет конца паза (точки A), если в начальный момент система покоилась, а точка 2 находилась в верхней точке паза. Трением пренебречь.

Решение. Внешними для рассматриваемой системы являются силы тяжести $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Воспользуемся теоремой о движении центра масс системы и запишем уравнение

$$M \vec{a}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)}.$$

В проекции на ось Oy имеем

$$M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)},$$

где $\sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} = N_y + (m_1 \bar{g})_y + (m_2 \bar{g})_y = N - (m_1 + m_2)g$.

С учетом второго уравнения (15.19) и $M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{y}_k$ получаем

$$\sum_{k=1}^N m_k \ddot{y}_k = N - (m_1 + m_2)g,$$

где $\ddot{y}_k = a_{ky}$ — проекции абсолютных ускорений тела и точки на ось Oy .

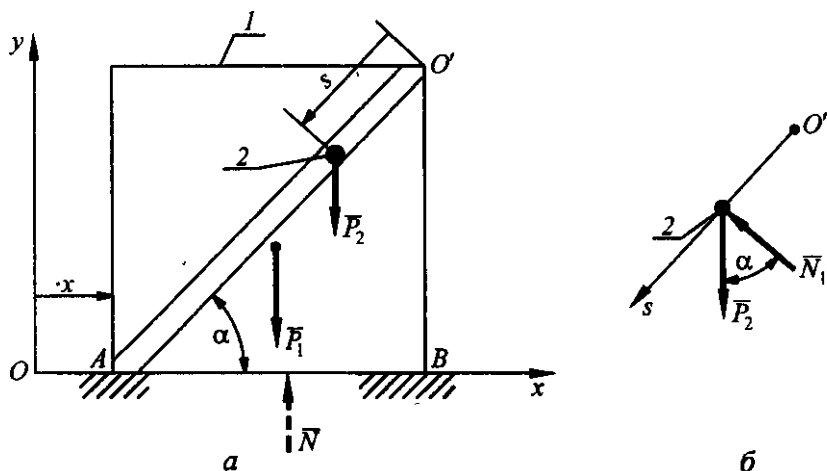


Рис. 15.3

Пусть абсолютное ускорение тела 1 равно $\bar{a}$. Точка 2 совершает сложное движение — относительное по пазу с относительным ускорением $\bar{a}_r$ и переносное вместе с телом 1 ($\bar{a}_e = \bar{a}$). Абсолютное ускорение точки 2 $\bar{a}_2 = \bar{a}_e + \bar{a}_r = \bar{a}_e + \bar{a}$. Уравнение для определения нормальной реакции N будет иметь вид

$$\begin{aligned} N &= m_1 a_y + m_2 (a_{ry} + a_y) + (m_1 + m_2)g = m_2 a_{ry} + (m_1 + m_2)g = \\ &= (m_1 + m_2)g - m_2 \ddot{s} \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $a_y = 0$; $a_{ry} = -a_{rx} \sin \alpha = -\ddot{s} \sin \alpha$.

Составим уравнение движения центра масс в проекции на ось Ox , а также уравнение движения точки 2 в проекции на ось $O's$ (рис. 15.3, б):

$$M \ddot{x}_C = m_1 a_x + m_2 (a_{rx} + a_x) = 0, \text{ или } (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 \ddot{s} \cos \alpha = 0;$$

$$m_2 (a_{rx} + a_x) = m_2 g \sin \alpha, \quad \ddot{s} - \ddot{x} \cos \alpha = g \sin \alpha,$$

где $a_x = \ddot{x}$; $a_{rx} = -\ddot{s} \cos \alpha$; $a_s = -a_x \cos \alpha = -\ddot{x} \cos \alpha$.

Определив

$$\ddot{s} = g \sin \alpha \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} = A = \text{const},$$

получаем выражение для вычисления нормальной реакции $\bar{N}$:

$$\begin{aligned} N &= (m_1 + m_2)g - m_2 \ddot{s} \sin \alpha = (m_1 + m_2)g - m_2 g \sin^2 \alpha \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{(m_1 + m_2)m_1 g}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Сила, с которой тело l действует на плоскость, равна по модулю $\bar{N}$ и противоположна ей по направлению.

Для нахождения скорости тела l в момент, когда точка 2 достигнет конца паза, запишем уравнение

$$\ddot{x} = \frac{m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \ddot{s}.$$

После интегрирования получаем

$$\dot{x} = \frac{m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \dot{s} + C_1.$$

Из начальных условий задачи (при $t = 0$ $x = s = 0$, $\dot{x} = \dot{s} = 0$) находим $C_1 = 0$.

После интегрирования уравнения

$$\ddot{s} = \frac{\dot{s} ds}{ds} = A$$

имеем

$$\dot{s}^2/2 = As + C_2,$$

где $C_2 = 0$.

При $s = l$ получаем следующие выражения для проекции скорости тела l на ось Ox :

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \frac{m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \sqrt{2Al} = m_2 \cos \alpha \sqrt{\frac{2gl \sin \alpha}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)}}; \\ v_y &= 0. \end{aligned}$$

Пример 15.2. На гладкой плоскости находится плита l массой m_1 , на которой закреплен механизм, состоящий из трех стержней (рис. 15.4). Стержни 2, 3, имеющие одинаковую массу m и длину l отклонены от вертикали на угол α . Масса стержня 4 равна m_4 .

Определить перемещение плиты l , когда стержни 2 и 3 займут нижнее вертикальное положение, если в начальный момент система тел покоилась.

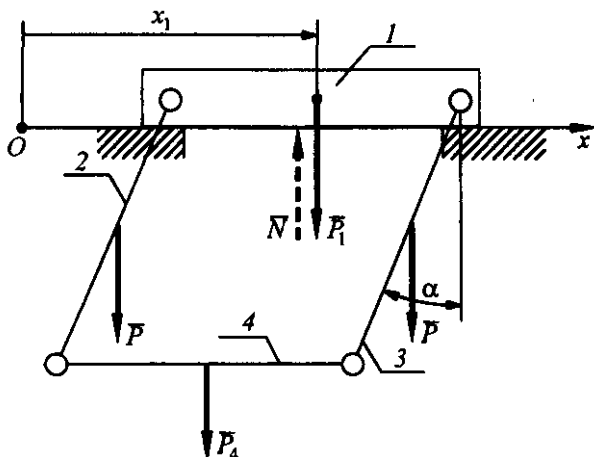


Рис. 15.4

Решение. Внешние для данной системы тел силы тяжести плиты $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$ и стержней $\bar{P} = m \bar{g}$, $\bar{P}_4 = m_4 \bar{g}$ и реакция гладкой плоскости $\bar{N}$ перпендикулярны оси Ox и $\sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0$. Поэтому, согласно теореме о движении центра масс (см. первое уравнение (15.19)), имеем $M \ddot{x}_C = 0$, где M — масса всей механической системы. Так как проекция начальной скорости центра масс системы v_{Cx} равна нулю, то справедливо выражение (15.24), в котором в данном случае Δx_k — перемещения центров масс плиты и стержней вдоль оси Ox ($k = 1, \dots, 4$).

Уравнение (15.24) будет иметь вид

$$m_1 \Delta x_1 + m \Delta x_2 + m \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 = 0.$$

Здесь Δx_1 — перемещение плиты, $\Delta x_2 - \Delta x_4$ перемещения вдоль оси Ox центров масс стержней, равные соответственно

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha = \Delta x_3; \quad \Delta x_4 = \Delta x_1 + l \sin \alpha.$$

Подставив эти выражения в основное уравнение и разрешив его относительно Δx_1 , получим

$$\Delta x_1 = - \frac{(m + m_4) l \sin \alpha}{m_1 + 2m + m_4}.$$

Знак минус означает, что плита 1 переместится влево.

15.4. Теорема об изменении количества движения

Количество движения точки и механической системы

Количество движения механической системы — одна из мер движения системы.

Количеством движения материальной точки M называют вектор, равный произведению массы m точки на ее скорость $\bar{v}$ (рис. 15.5):

$$\bar{q} = m\bar{v}.$$

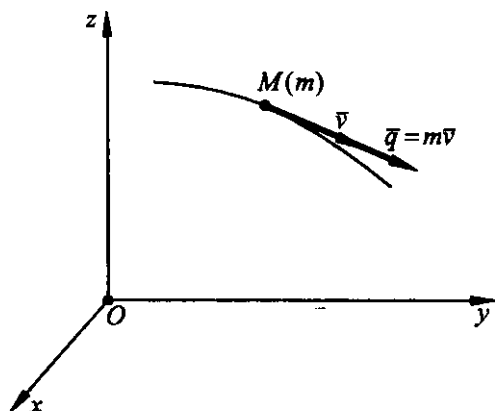


Рис. 15.5

Проекции количества движения точки на оси прямоугольной декартовой системы координат будут соответственно

$$q_x = mv_x = m\dot{x}; \quad q_y = mv_y = m\dot{y}; \quad q_z = mv_z = m\dot{z}.$$

Количеством движения механической системы называют вектор $\bar{Q}$, равный геометрической сумме количеств движения точек системы:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^N \bar{q}_k = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k. \quad (15.25)$$

Вектор $\bar{Q}$ называют также *главным вектором количеств движения точек материальной системы*. Вообще говоря, $\bar{Q}$ не имеет точки приложения и является свободным вектором.

Проекции вектора количества движения $\bar{Q}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат равны

$$Q_x = \sum_{k=1}^N m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^N m_k \dot{x}_k; \quad Q_y = \sum_{k=1}^N m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^N m_k \dot{y}_k;$$

$$Q_z = \sum_{k=1}^N m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^N m_k \dot{z}_k.$$

Единица измерения количества движения в СИ — килограмм·метр в секунду ($\text{кг} \cdot \text{м/с}$)*.

С учетом (15.16) выражение (15.25) принимает вид

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C$$

(рис. 15.6).

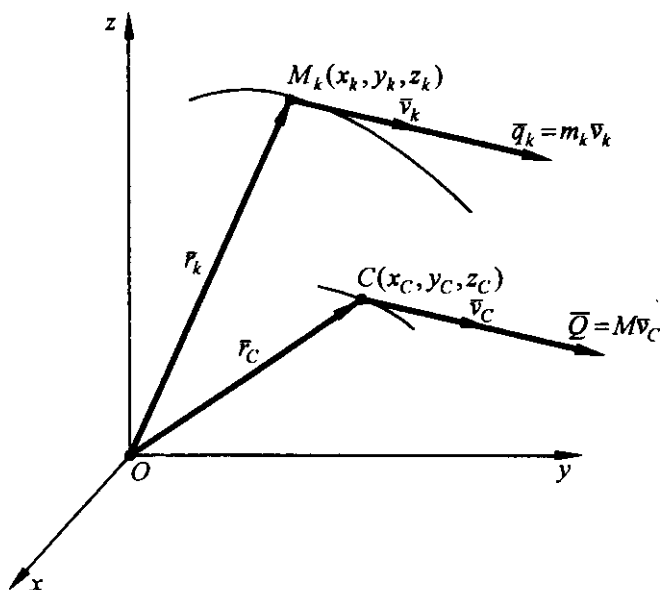


Рис. 15.6

Проекции вектора количества движения системы на оси прямоугольной декартовой системы координат будут соответственно равны

* $1 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}.$

$$Q_x = M v_{Cx} = M \dot{x}_C; \quad Q_y = M v_{Cy} = M \dot{y}_C;$$

$$Q_z = M v_{Cz} = M \dot{z}_C.$$

Если механическая система состоит из твердых тел, то

$$\bar{Q} = \sum_i \bar{Q}_i = \sum_i M_i \bar{v}_{Ci},$$

где M_i , $\bar{v}_{Ci}$ — масса и скорость центра масс i -го тела.

Векторы количеств движения $\bar{Q}_i$ тел можно приложить в центрах масс этих тел.

Элементарный и полный импульсы силы

Элементарным импульсом силы $\bar{F}$, действующей в течение времени dt , называют вектор

$$d\bar{S}(\bar{F}) = \bar{F} dt.$$

Проекции элементарного импульса $d\bar{S}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат равны

$$dS_x = F_x dt; \quad dS_y = F_y dt; \quad dS_z = F_z dt.$$

Полным импульсом силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку в течение времени t , называют вектор

$$\bar{S}(\bar{F}) = \int_0^t \bar{F} dt.$$

Проекции полного импульса силы $\bar{F}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат выражаются формулами

$$S_x(\bar{F}) = \int_0^t F_x dt; \quad S_y(\bar{F}) = \int_0^t F_y dt; \quad S_z(\bar{F}) = \int_0^t F_z dt.$$

Единица измерения импульса силы — ньютон-секунда (Н · с).

Теорема об изменении количества движения материальной точки

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки M в виде

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

или, так как масса точки постоянна,

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F}. \quad (15.26)$$

Уравнение (15.26) выражает теорему об изменении количества движения для точки в дифференциальной форме: *первая производная по времени от вектора количества движения точки равна равнодействующей активных сил и реакций связей, действующих на материальную точку.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем

$$\frac{dq_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dq_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dq_z}{dt} = F_z.$$

Согласно уравнению (15.26),

$$d(m\bar{v}) = d\bar{q} = \bar{F}dt. \quad (15.27)$$

Таким образом, *дифференциал количества движения точки равен элементарному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку.*

В проекциях на оси координат получаем

$$dq_x = F_x dt; \quad dq_y = F_y dt; \quad dq_z = F_z dt.$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (15.27) в пределах от 0 до t :

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F} dt.$$

Тогда

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}(\bar{F}), \quad (15.28)$$

где $\bar{v}$, $\bar{v}_0$ — абсолютная скорость точки в текущий и начальный моменты времени соответственно (рис. 15.7); $\bar{S}(\bar{F})$ — полный импульс равнодействующей силы за время t .

Уравнение (15.28) выражает теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме: *изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно пол-*

ному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку, за тот же промежуток времени.

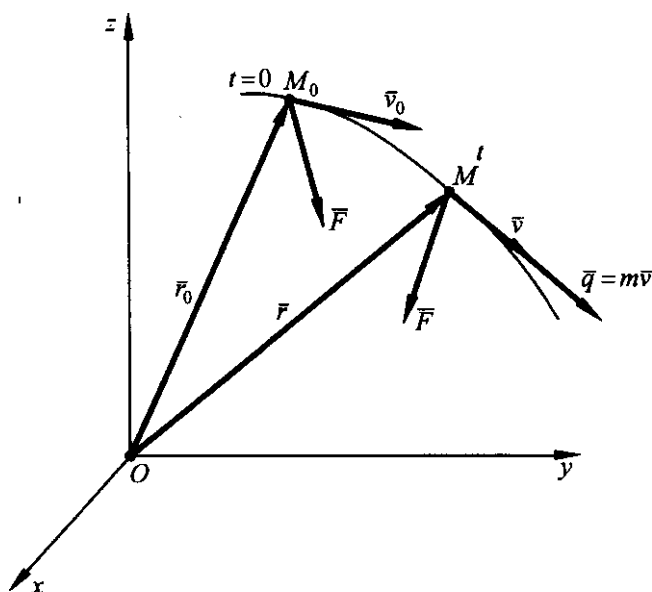


Рис. 15.7

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$m(v_x - v_{0x}) = S_x; \quad m(v_y - v_{0y}) = S_y; \quad m(v_z - v_{0z}) = S_z.$$

Теорема об изменении количества движения механической системы

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в виде

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{R}^{(e)},$$

откуда получим

$$\frac{d(M\bar{v}_C)}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^{(e)}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)}. \quad (15.29)$$

Уравнение (15.29) выражает теорему об изменении количества движения механической системы: *первая производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на материальные точки этой системы.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат уравнение (15.29) имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(e)}, \quad (15.30)$$

т. е. первые производные по времени от проекций количества движения механической системы на оси координат равны сумме проекций внешних сил, действующих на точки системы, на эти же оси координат.

Из уравнения (15.29) получим еще одну дифференциальную форму теоремы

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^N d\bar{S}(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (15.31)$$

Таким образом, *дифференциал количества движения механической системы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на материальные точки системы.*

В проекциях на оси координат имеем

$$dQ_x = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} dt, \quad dQ_y = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} dt, \quad dQ_z = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(e)} dt.$$

Проинтегрируем (15.31) по времени в пределах от 0 до t и поменяем местами операции интегрирования и суммирования:

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}} d\bar{Q} = \int_0^t \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^N \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)},$$

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)}. \quad (15.32)$$

Здесь $\bar{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k$, $\bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_{k0}$ — соответственно количества движения механической системы в произвольный и начальный моменты времени; $\bar{S}_k^{(e)}$ — полный импульс внешней силы, действующей на k -ю материальную точку.

Выражение (15.32) представляет собой математическую запись теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за время t равно векторной сумме полных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за то же время.*

В проекциях на оси координат имеем

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^N S_{kx}^{(e)}, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^N S_{ky}^{(e)}, \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^N S_{kz}^{(e)}.$$

Законы сохранения количества движения механической системы

Законы сохранения количества движения следуют из теоремы об изменении количества движения механической системы, как частные случаи описания ее движения. Напомним, что внутренние силы не влияют на изменение количества движения механической системы. Математически законы сохранения определяют первые интегралы системы дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки и механической системы.

Первыми интегралами для дифференциальных уравнений движения механической системы называют соотношения вида

$$\Phi_j(t, x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, C_j) = 0$$

или

$$\Phi_j(t, x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = C_j,$$

которые справедливы при любых начальных условиях. Первые интегралы связывают время, координаты и проекции скоростей точек и произвольные постоянные C_j . При решении задач о движении системы часто требуется определить лишь некоторые

характеристики ее движения, поэтому можно найти лишь некоторые первые интегралы.

Возможны следующие частные случаи.

1. Пусть главный вектор всех внешних сил, приложенных к точкам системы, равен нулю: $\bar{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = 0$. Тогда из уравнения (15.29) следует, что

$$\bar{Q} = \bar{C}. \quad (15.33)$$

Этот результат (закон сохранения $\bar{Q}$) формулируется так: *если главный вектор внешних сил, приложенных к точкам механической системы, равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен при движении системы.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$Q_x = C_1; \quad Q_y = C_2; \quad Q_z = C_3. \quad (15.34)$$

В (15.34) входят производные от координат точек не выше первого порядка (проекции скоростей точек), т. е. эти выражения являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений (15.30).

2. Пусть проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось координат равна нулю: $R_x^{(e)} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0$. Тогда из первого уравнения (15.30) следует, что

$$Q_x = \text{const}.$$

Формулируется это так: *если проекция главного вектора внешних сил, действующих на точки механической системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на ту же ось постоянна при движении системы.*

Пример 15.3. Плита 1 имеет массу m_1 и может перемещаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 15.8). Материальная точка 2, масса которой m_2 , начинает движение в гладкой трубке 3 радиусом R из положения A_0 согласно закону $s = R\varphi$, где $\varphi = bt$, $b = \text{const} > 0$.

Определить закон движения плиты 1 и ее ускорение, а также силу, с которой она давит на плоскость, если в начальный момент плита покоилась.

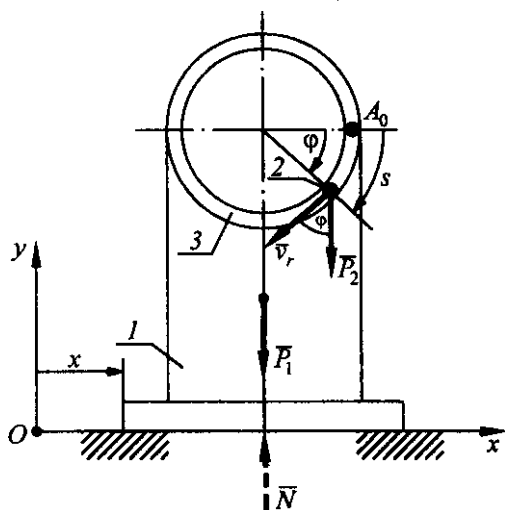


Рис. 15.8

Решение. Согласно теореме об изменении количества движения системы в проекции на ось Ox ,

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}.$$

Количество движения системы

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2,$$

где $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ — абсолютные скорости плиты, совершающей поступательное движение, и материальной точки соответственно.

Точка 2 совершает сложное движение: относительное по окружности радиусом R со скоростью $\bar{v}_r$ и переносное вместе с плитой со скоростью $\bar{v}_e = \bar{v}_1$. Таким образом, $\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_1$. Окончательно имеем

$$\bar{Q} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 (\bar{v}_r + \bar{v}_1) = (m_1 + m_2) \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_r.$$

При этом

$$Q_x = (m_1 + m_2) v_{1x} + m_2 v_{rx} = (m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 R \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

где $v_{1x} = \dot{x}$, $v_{rx} = -R \dot{\varphi} \sin \varphi$.

Внешние силы системы — силы тяжести $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$, $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$ и реакция плоскости $\bar{N}$ — перпендикулярны оси Ox , поэтому

$$\sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0; \quad \frac{dQ_x}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 R \dot{\varphi} \sin \varphi] = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$(m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 R \dot{\varphi} \sin \varphi = C_1.$$

Из начальных условий задачи при $t = 0$ $x = 0$, $\varphi = 0$ ($s = 0$), $\dot{x} = 0$, $\dot{\varphi} = b > 0$, определяем $C_1 = 0$, т. е.

$$(m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 R \dot{\varphi} \sin \varphi = 0,$$

или

$$(m_1 + m_2)dx - m_2 R \sin \varphi d\varphi = 0.$$

После второго интегрирования находим

$$(m_1 + m_2)x + m_2 R \cos \varphi = C_2.$$

Из начальных условий определяем $C_2 = m_2 R$, а следовательно,

$$x = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (1 - \cos \varphi) = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} (1 - \cos bt).$$

Ускорение плиты найдем из уравнения $\frac{dQ_x}{dt} = 0$:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 R(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0,$$

где $\ddot{x} = \frac{m_2 R b^2 \cos bt}{m_1 + m_2}$; $\ddot{\varphi} = 0$; $\dot{\varphi} = b$.

Реакцию опоры N определим из теоремы об изменении количества движения в проекции на ось Oy :

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)},$$

где $Q_y = -m_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi$; $\sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} = N - (m_1 + m_2)g$.

После подстановки имеем

$$-m_2 R(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = N - (m_1 + m_2)g,$$

откуда

$$N = (m_1 + m_2)g + m_2 R b^2 \sin bt.$$

Сила, с которой плита давит на плоскость, по модулю равна реакции N , но противоположна ей по направлению.

Теорема об изменении количества движения механической системы в подвижной системе координат

В уравнении (15.29) производная вычислена относительно неподвижной (инерциальной) системы координат. Согласно формуле Бура, можно записать (рис. 15.9)

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{\widetilde{d\bar{Q}}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q},$$

где $\frac{\widetilde{d\bar{Q}}}{dt}$ — первая производная по времени от вектора количества движения $\bar{Q}$ в подвижной системе $O'XYZ$; $\bar{\omega}$ — мгновенная угловая скорость подвижной системы координат.

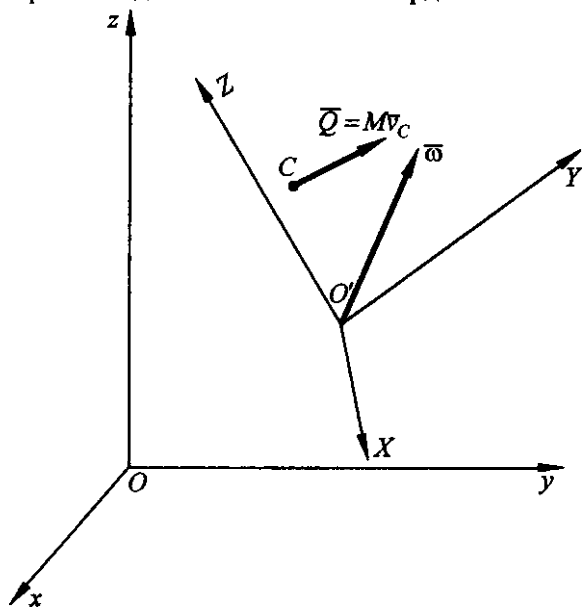


Рис. 15.9

Уравнение

$$\frac{\widetilde{d\bar{Q}}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} \quad (15.35)$$

выражает теорему об изменении количества движения механической системы в подвижной системе координат.

15.5. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Теорема об изменении главного момента количеств движения механической системы

Момент количества движения материальной точки

Для характеристики движения материальной точки используют еще одну векторную меру движения — **момент количества движения**, или **кинетический момент** относительно центра (точки).

Моментом количества движения материальной точки массой m относительно центра O называют векторную величину, равную векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения точки:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (15.36)$$

Вектор момента количества движения материальной точки строят в точке O по правилу векторного произведения (рис. 15.10).

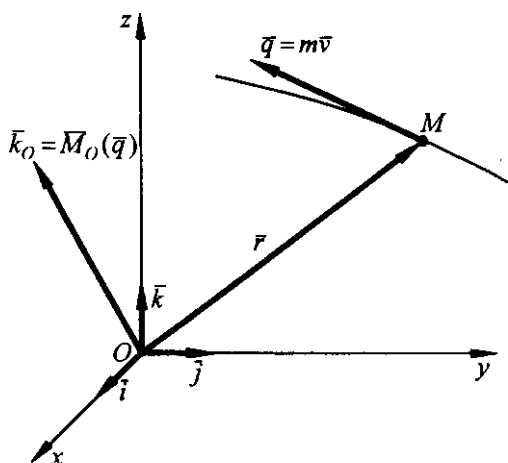


Рис. 15.10

Проекции вектора момента количества движения материальной точки относительно центра O на оси координат равны мо-

ментам количества движения относительно соответствующих осей координат, т. е. $(\bar{k}_O)_x = k_x$, $(\bar{k}_O)_y = k_y$, $(\bar{k}_O)_z = k_z$.

Так как

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times m\bar{v} = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

то моменты количества движения материальной точки относительно осей координат имеют вид

$$\begin{aligned} k_x &= M_x(m\bar{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \\ k_y &= M_y(m\bar{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \\ k_z &= M_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (15.37)$$

Единица измерения момента количества движения в СИ — килограмм-метр в квадрате на секунду ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$)*.

Главный момент количества движения механической системы

Главным моментом количества движения, или кинетическим моментом механической системы, относительно центра O называют геометрическую сумму векторов моментов количеств движения материальных точек системы относительно того же центра O :

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{q}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (15.38)$$

Вектор главного момента количеств движения $\bar{K}_O$ механической системы относительно центра O строят в точке O (рис. 15.11).

Проекции главного момента количеств движения $\bar{K}_O$ системы на оси координат равны главным моментам количеств движения системы относительно соответствующих осей координат: $(\bar{K}_O)_x = K_x$, $(\bar{K}_O)_y = K_y$, $(\bar{K}_O)_z = K_z$.

* $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$

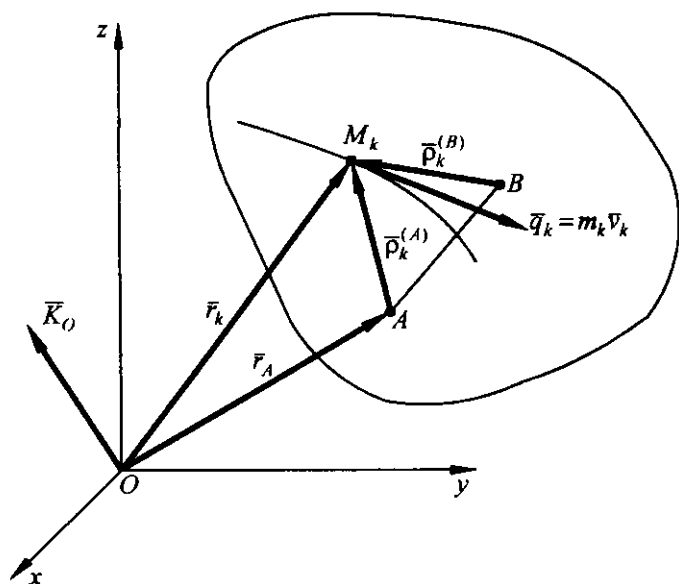


Рис. 15.11

С учетом (15.38) запишем главные моменты количеств движения механической системы относительно осей координат:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^N M_x(m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^N m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k); \\ K_y &= \sum_{k=1}^N M_y(m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^N m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k); \\ K_z &= \sum_{k=1}^N M_z(m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^N m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \end{aligned} \quad (15.39)$$

Замечание. Главный момент количеств движения материальных точек можно вычислить и относительно произвольной точки A :

$$\bar{K}_A = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times m_k \bar{v}_k. \quad (15.40)$$

Найдем связь главных моментов количеств движения данной механической системы относительно двух различных центров O и A . Согласно рис. 15.11,

$$\bar{r}_k = \bar{r}_A + \bar{\rho}_k^{(A)}. \quad (15.41)$$

Из (15.38) и (15.41) имеем

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N (\bar{r}_A + \bar{\rho}_k^{(A)}) \times m_k \bar{v}_k = \bar{r}_A \times \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times m_k \bar{v}_k = \bar{r}_A \times \bar{Q} + \bar{K}_A.$$

где $\sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_C = \bar{Q}$ — количество движения механической системы.

Окончательно получаем

$$\bar{K}_O = \bar{r}_A \times \bar{Q} + \bar{K}_A = \bar{M}_O(\bar{Q}) + \bar{K}_A. \quad (15.42)$$

Точки O и A произвольно выбраны, $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость точки в инерциальной системе отсчета (см. рис. 15.11).

Спроецировав (15.42) на оси Oz и параллельную ей AZ , получаем

$$K_{Oz} = (\bar{r}_A \times \bar{Q})_{Oz} + K_{Az} = M_{Oz}(\bar{Q}) + K_{Az}.$$

Пусть теперь обе точки A и B — произвольные (подвижные) (см. рис. 15.11). Запишем

$$\bar{K}_B = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(B)} \times m_k \bar{v}_k, \quad \bar{\rho}_k^{(B)} = \bar{\rho}_k^{(A)} + \bar{BA}.$$

Выполнив преобразования:

$$\bar{K}_B = \sum_{k=1}^N (\bar{\rho}_k^{(A)} + \bar{BA}) \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times m_k \bar{v}_k + \bar{BA} \times \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k.$$

получаем

$$\bar{K}_B = \bar{K}_A + \bar{BA} \times \bar{Q} = \bar{K}_A + \bar{M}_B(\bar{Q}),$$

где $\bar{K}_A = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times m_k \bar{v}_k$; $\bar{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k$.

Главный момент количества движения относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (рис. 15.12). Определим главный момент количества движения этого тела относительно оси Oz . Согласно определению,

$$K_z = \sum_{k=1}^N M_z(m_k \bar{v}_k). \quad (15.43)$$

Проекция скорости точки A_k тела на касательную к траектории ее движения

$$v_{k_t} = \omega_z h_k,$$

а момент количества движения относительно оси Oz

$$M_z(m_k \bar{v}_k) = m_k v_{kz} h_k = \omega_z m_k h_k^2,$$

где $\omega_z \neq 0$ ($\omega_x = \omega_y = 0$). Подставив $M_z(m_k \bar{v}_k)$ в выражение (15.43), получим

$$K_z = \omega_z \sum_{k=1}^N m_k h_k^2 = \omega_z J_z,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения Oz . Окончательно имеем

$$K_z = J_z \omega_z. \quad (15.44)$$

Знак K_z — главного момента количества движения твердого тела относительно оси вращения — определяется знаком проекции угловой скорости ω_z .

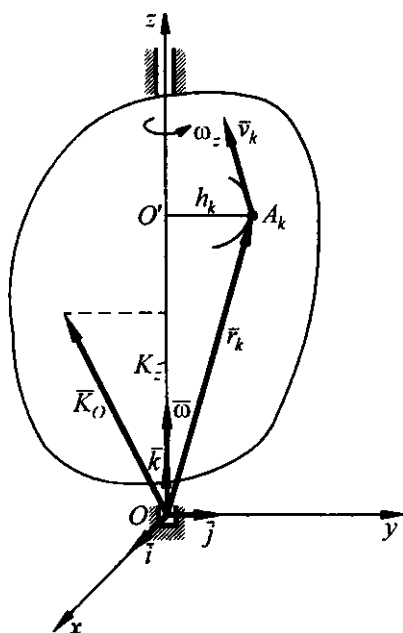


Рис. 15.12

Таким образом, *главный момент количеств движения вращающегося тела относительно неподвижной оси вращения* равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на проекцию угловой скорости вращения тела на ось вращения.

Замечание. Главный момент количеств движения вращающегося тела относительно точки O

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}.$$

Здесь

$$K_x = -J_{xz}\omega_z; K_y = -J_{yz}\omega_z; K_z = J_z\omega_z, \quad (15.45)$$

где J_{xz} , J_{yz} — центробежные моменты инерции.

Формулы для вычисления K_x , K_y приведены без вывода. Они могут быть получены из общих формул для случая движения тела с одной неподвижной точкой. Если ось вращения Oz тела является главной для точки O , то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и, следовательно, $K_x = K_y = 0$, а $\bar{K}_O = K_z \bar{k}$. В общем случае $\bar{K}_O$ не направлен по оси вращения тела.

Главный момент количеств движения твердого тела при сферическом движении

Твердое тело с закрепленной точкой при движении в любой момент времени имеет угловую скорость $\bar{\omega}$. Главный момент количеств движения тела относительно неподвижной точки

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k,$$

где $\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$.

Тело разбито на N элементов с массой m_k и абсолютной скоростью $\bar{v}_k$ (рис. 15.13).

Проекции $\bar{K}_O$ на оси $Oxyz$, а следовательно, и главные моменты количеств движения тела относительно осей координат, и проекции скорости точки $\bar{v}_k$ на оси координат определяются формулами (15.39) и (4.7). С учетом (15.39) и (4.7) для оси Ox получаем

$$\begin{aligned}
K_x &= \sum_{k=1}^N m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = \\
&= \sum_{k=1}^N m_k [\omega_x y_k - \omega_y x_k - z_k (\omega_z x_k - \omega_x z_k)] = \\
&= \omega_x \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k - \omega_z \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k .
\end{aligned}$$

Проекции угловой скорости здесь являются кинематическими инвариантами и вынесены за знаки сумм, а суммы есть осевой J_x и центробежные J_{xy} , J_{xz} моменты инерции. Аналогично можно получить зависимости для K_y , K_z .

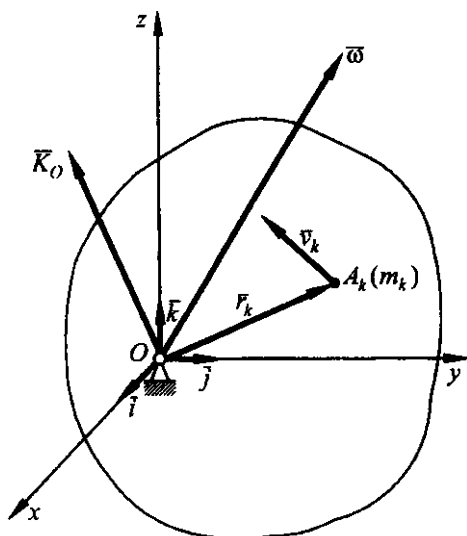


Рис. 15.13

Окончательно формулы для главных моментов количеств движения тела относительно осей координат с началом в неподвижной точке примут вид

$$\begin{aligned}
K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z ; \\
K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z ; \\
K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z .
\end{aligned} \tag{15.46}$$

Уравнения (15.46) имеют одинаковый вид как для неподвижных, так и для подвижных, например, жестко связанных с телом, осей.

Осевые и центробежные моменты инерции относительно неподвижных осей при движении тела являются функциями времени, так как положение тела относительно неподвижных осей изменяется. Моменты инерции относительно подвижных осей, связанных с телом, постоянны, так как со временем положение тела относительно этих осей не изменяется.

Главный момент количества движения твердого тела относительно точки O определяется по формуле

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}$$

независимо от того, какие оси координат выбраны.

Используя выражение для тензора инерции (14.14) и правило умножения тензора на вектор-столбец проекций мгновенной угловой скорости тела, получим

$$\bar{K}_O = \mathbf{J} \bar{\omega},$$

$$\text{где } \bar{K}_O = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}; \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Выражения (15.46) упрощаются, если для тела выбранные оси являются главными осями инерции в точке O (т. е. $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$). Тогда

$$K_x = J_x \omega_x; \quad K_y = J_y \omega_y; \quad K_z = J_z \omega_z. \quad (15.47)$$

Главный момент количества движения при сложном движении механической системы

Введем подвижную систему координат $CXYZ$, которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$ и начало которой связано с центром масс C системы. Подвижную систему $CXYZ$ называют *кениговой системой координат* (рис. 15.14).

Для краткости движение механической системы по отношению к $CXYZ$ будем называть движением системы относительно ее

центра масс. Запишем выражение $\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$, справедливое в любой момент времени движения механической системы, и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_k}{dt}. \quad (15.48)$$

Тогда

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)}. \quad (15.49)$$

Здесь $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость точки M_k , а $\bar{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс механической системы. Докажем, что $\bar{v}_k^{(r)}$ — относительная скорость точки M_k по отношению к системе координат $CXYZ$.

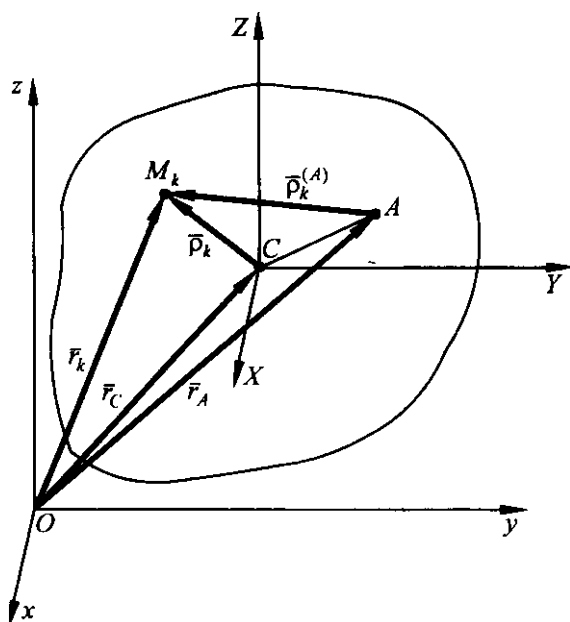


Рис. 15.14

Согласно формуле Бура,

$$\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\rho}_k}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k,$$

где $\frac{\tilde{d} \bar{\rho}_k}{dt}$ — локальная производная в подвижной системе координат. Но при поступательном движении системы $CXYZ$

$$\frac{\tilde{d} \bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_k^{(r)} = \frac{d \bar{\rho}_k}{dt}.$$

Главный момент количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O для абсолютного движения системы относительно неподвижной (инерциальной) системы координат $Oxyz$ равен (см. рис. 15.11)

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (15.50)$$

Подставляя в (15.50) выражения для $\bar{r}_k$ и $\bar{v}_k$, после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \bar{K}_O &= \sum_{k=1}^N (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)}) = \\ &= \bar{r}_C \times \bar{v}_C \sum_{k=1}^N m_k + \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^{(r)} + \sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \times \bar{v}_C + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)}. \end{aligned} \quad (15.51)$$

Здесь $\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k = M \bar{\rho}_C = 0$, так как радиус-вектор центра масс относительно центра масс $\bar{\rho}_C = 0$, а следовательно,

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^{(r)} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \right) = 0,$$

т. е. количество движения системы в ее движении относительно центра масс равно нулю.

Таким образом, уравнение (15.51) принимает вид

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)} = \bar{M}_O(\bar{Q}) + \bar{K}_C^{(r)}, \quad (15.52)$$

где $\bar{K}_C^{(r)} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)}$ — главный момент количеств движений механической системы относительно центра масс для относн-

тельного движения системы по отношению к центру масс (по отношению к системе координат $CXYZ$, движущейся поступательно вместе с центром масс).

Таким образом, *главный момент количества движения механической системы относительно неподвижного центра O для абсолютного движения системы равен векторной сумме момента вектора количества абсолютного движения системы (приложенного в центре масс) относительно того же центра, и главного момента количества движения системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к центру масс.*

В проекции на ось Oz (CZ) формула (15.52) принимает вид

$$K_z = M_z(\bar{Q}) + K_{CZ}^{(r)}, \quad (15.53)$$

где $K_{CZ}^{(r)}$ — главный момент количества движения системы относительно оси CZ , проходящей через центр масс системы параллельно оси Oz .

При плоскопараллельном движении твердого тела, если ось CZ перпендикулярна плоскости движения тела, $K_{CZ}^{(r)} = J_{CZ} \omega_z$, где J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси CZ (относительным движением тела является его вращение вокруг оси CZ).

Замечания: 1. Из (15.51) следует, что главный момент количества движения механической системы относительно центра масс для абсолютного движения системы:

$$\bar{K}_C = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \times \bar{v}_C + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = 0 + \bar{K}_C^{(r)} = \bar{K}_C^{(r)}.$$

2. Главный момент количества движения системы относительно подвижной точки A для относительного движения системы по отношению к центру масс равен

$$\bar{K}_A^{(r)} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times m_k \bar{v}_k^{(r)},$$

где $\bar{\rho}_k^{(A)} = \bar{\rho}_k + \overline{AC}$. Тогда

$$\bar{K}_A^{(r)} = \sum_{k=1}^N (\bar{\rho}_k + \overline{AC}) \times m_k \bar{v}_k^{(r)} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)} + \overline{AC} \times \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{K}_C^{(r)},$$

так как $\sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^{(r)} = 0$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Запишем уравнение движения материальной точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

и умножим его векторно слева на радиус-вектор $\vec{r}$ (рис. 15.15)

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

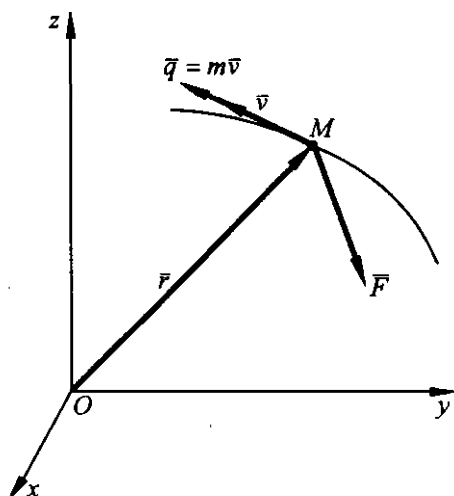


Рис. 15.15

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}.$$

Но $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов.

Далее получаем

$$\frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F}),$$

или

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}). \quad (15.54)$$

Формула (15.54) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки: *первая производная по времени от момента количества движения точки относительно центра O равна моменту равнодействующей силы относительно того же центра O .*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (15.55)$$

Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы

Рассмотрим механическую систему M_k ($k=1, 2, \dots, N$), состоящую из N материальных точек, к каждой из которых приложены равнодействующие внешних $\bar{F}_k^{(e)}$ и внутренних $\bar{F}_k^{(i)}$ сил. Для каждой точки M_k запишем теорему об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра O (рис. 15.16):

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}. \quad (15.56)$$

Просуммировав (15.56) по всем точкам

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}$$

и преобразовав левую часть уравнения, получим

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k \right) = \frac{d\bar{K}_O}{dt}.$$

Здесь $\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ — главный момент количеств движения механической системы относительно центра O .

Главный момент внутренних сил

$$\bar{L}_O^{(i)} = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0, \quad (15.57)$$

а главный момент внешних сил

$$\bar{L}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (15.58)$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{L}_O^{(e)}. \quad (15.59)$$

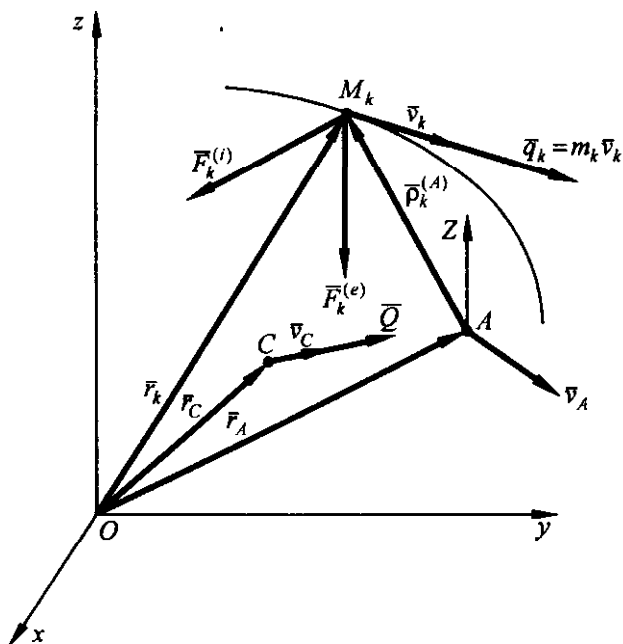


Рис. 15.16

Формула (15.59) выражает теорему об изменении главного момента количества движения механической системы: *первая производная по времени от главного момента количества движения механической системы относительно неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем соотношения, выражающие теоремы об изменении главного момента количества движения системы относительно осей координат:

$$\begin{aligned}\frac{dK_x}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k^{(e)}) = L_x^{(e)}; \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k^{(e)}) = L_y^{(e)}; \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = L_z^{(e)}.\end{aligned}\quad (15.60)$$

Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы относительно подвижного центра

Используя полученные ранее выражения (15.40) – (15.42) и (15.59), запишем

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{K}_O}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{r}_A \times \bar{Q} + \bar{K}_A) = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \times \bar{Q} + \bar{r}_A \times \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{d\bar{K}_A}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^N (\bar{r}_A + \bar{\rho}_k^{(A)}) \times \bar{F}_k^{(e)}.\end{aligned}$$

Преобразуем это выражение с учетом, что $-\frac{d\bar{Q}}{dt} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = 0$:

$$\bar{v}_A \times \bar{Q} + \frac{d\bar{K}_A}{dt} = \bar{r}_A \times \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} - \frac{d\bar{Q}}{dt} \right) + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times \bar{F}_k^{(e)},$$

или

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times \bar{F}_k^{(e)} - \bar{v}_A \times \bar{Q}, \quad (15.61)$$

где $\sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k^{(A)} \times \bar{F}_k^{(e)} = \bar{L}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки A .

В проекции на какую-либо ось, например AZ (см. рис. 15.16), получаем

$$\frac{dK_{AZ}}{dt} = L_{AZ}^{(e)} - (\bar{v}_A \times \bar{Q})_{AZ}. \quad (15.62)$$

Уравнение (15.62) выражает теорему об изменении главного момента количества движения системы относительно подвижной

оси. Подчеркнем, что уравнения (15.61) и (15.62) записаны для абсолютного движения механической системы.

Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы для ее относительного движения по отношению к центру масс

Пусть подвижная система координат $CXYZ$ связана с центром масс и движется поступательно относительно неподвижной системы $Oxyz$ (рис. 15.17). Согласно теореме об изменении главного момента количества движения системы относительно центра O для абсолютного движения механической системы,

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

а также с учетом (15.52) и $\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$ запишем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\bar{r}_C \times \bar{Q} + \bar{K}_C^{(r)}] &= \frac{d\bar{r}_C}{dt} \times \bar{Q} + \bar{r}_C \times \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^N (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^{(e)}. \end{aligned}$$

Но $\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times \bar{Q} = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов. Используя теорему об изменении количества движения механической системы $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$, получаем

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{r}_C \times \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} - \frac{d\bar{Q}}{dt} \right) + \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \bar{L}_C^{(e)}, \quad (15.63)$$

где $\sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \bar{L}_C^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно центра масс C .

Сформулируем теорему: *первая производная по времени от главного момента количества движения системы, вычисленного*

относительно центра масс для относительного движения механической системы по отношению к центру масс (по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс), равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно центра масс.

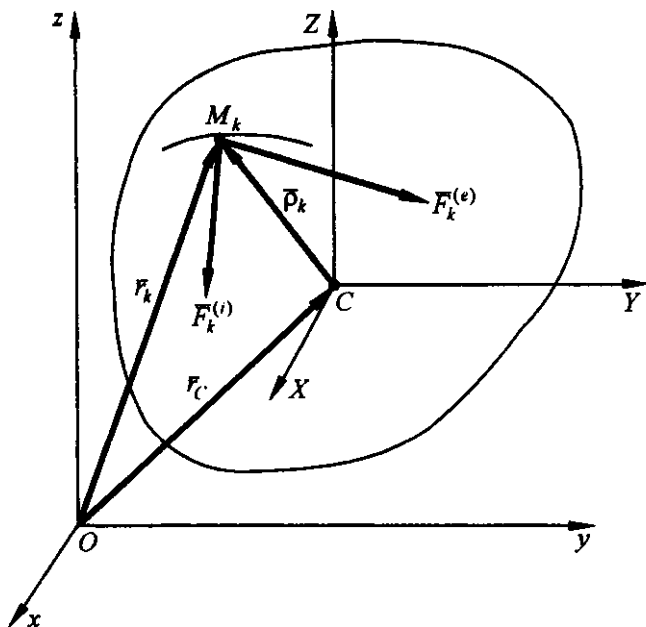


Рис. 15.17

В проекциях на оси подвижной системы координат $CXYZ$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{dK_{CX}^{(r)}}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{CX} (\bar{F}_k^{(e)}) = L_{CX}^{(e)}; \\ \frac{dK_{CY}^{(r)}}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{CY} (\bar{F}_k^{(e)}) = L_{CY}^{(e)}; \\ \frac{dK_{CZ}^{(r)}}{dt} &= \sum_{k=1}^N M_{CZ} (\bar{F}_k^{(e)}) = L_{CZ}^{(e)}.\end{aligned}\quad (15.64)$$

Уравнения (15.64) выражают теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы относитель-

но осей, проходящих через центр масс, при относительном движении механической системы по отношению к центру масс.

Законы сохранения главных моментов количества движения системы

Законы сохранения моментов количества движения и главных моментов количеств движения при движении материальной точки и механической системы записываются одинаково, так как материальная точка есть механическая система, состоящая из одной точки. Рассмотрим частные случаи теоремы об изменении главного момента количеств движения механической системы.

1. Пусть главный момент внешних сил системы относительно центра O равен нулю, т. е. $\bar{L}_O^{(e)} = 0$. Тогда, согласно (15.59),

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0. \quad (15.65)$$

Интегрируя (15.65), получаем

$$\bar{K}_O = \overline{\text{const}},$$

т. е. главный момент количеств движения механической системы относительно центра O постоянен по модулю и направлению. Это уравнение выражает закон сохранения главного момента количеств движения механической системы относительно центра O в векторной форме: *если главный момент внешних сил относительно неподвижного центра O равен нулю, то главный момент количеств движения механической системы относительно этого центра постоянен по модулю и направлению.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем уравнения

$$K_x = C_1; \quad K_y = C_2; \quad K_z = C_3,$$

которые выражают законы сохранения главных моментов количеств движения системы относительно осей координат (частные случаи теоремы об изменении главного момента количеств движения системы относительно осей координат) и представляют собой первые интегралы дифференциальных уравнений для механической системы.

2. Пусть сумма моментов внешних сил, действующих на механическую систему, относительно оси Ox равна нулю, т.е. $L_x^{(e)} = 0$. Тогда, согласно (15.60),

$$\frac{dK_x}{dt} = 0; K_x = \text{const}.$$

Следовательно, если главный момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно какой-либо оси равен нулю, то главный момент количества движения механической системы относительно этой оси постоянен.

Если рассматривается тело или система тел, вращающихся вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_z и $L_z^{(e)} = 0$, то $K_z = J_z \omega_z = \text{const}$. Если в начальном состоянии угловая скорость и момент инерции системы относительно оси Oz будут соответственно ω_{z0} и J_{z0} , то

$$J_{z0} \omega_{z0} = \text{const} \text{ и } J_z \omega_z = J_{z0} \omega_{z0}. \quad (15.66)$$

Скамья Жуковского позволяет продемонстрировать закон сохранения главного момента количества движения системы относительно оси. Человек с грузами в руках встает на скамью (платформу), которая приводится во вращение вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_{z0} , при этом руки человека с грузами опущены, момент инерции равен J_{z0} . Так как силы тяжести $\bar{P}$ и $\bar{P}_1$ человека и платформы параллельны оси вращения, а реакции $\bar{R}_A$, $\bar{R}_O$ ее пересекают (рис. 15.18), то $L_z^{(e)} = 0$ и выполняется закон сохранения (15.66).

Если человек разведет руки с грузами, т.е. его момент инерции относительно оси Oz станет больше ($J_z > J_{z0}$), то угловая скорость ω_z всей системы (человек, грузы, скамья) уменьшится

$$\left(\omega_z = \frac{J_{z0}}{J_z} \omega_{z0} \right).$$

Если главный момент внешних сил относительно оси CZ , проходящей через центр масс, $L_{CZ}^{(e)} = 0$, то после интегрирования уравнения (15.64) получаем

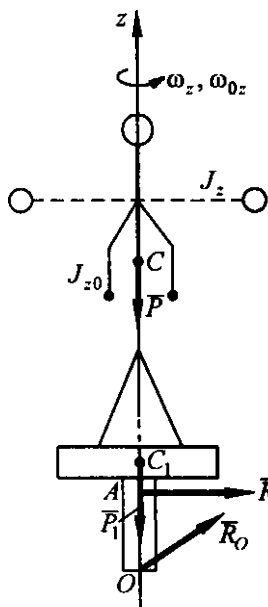


Рис.15.18

$$K_{CZ}^{(r)} = \text{const}.$$

Закон сохранения главного момента количеств движения относительно центра масс используют акробаты, прыгуны, танцоры для создания вращения. Применяется он и в космической технике.

Пример 15.4. Однородная пластина массой m_1 имеет наклонный паз, внутри которого может двигаться материальная точка M массой m . Пластина приводится во вращение вокруг неподвижной оси Az с начальной угловой скоростью ω_0 , материальная точка при этом находится в положении M_0 (рис. 15.19, а). Определить угловую скорость пластины в момент, когда точка M вылетает из паза. Трением и массой материала паза пренебречь. Принять $m_1 = 10m$, $\omega_0 = 5,2$ рад/с.

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения системы относительно оси Az .

Механическая система состоит из пластины и материальной точки. Внешними для системы явля-

ются силы тяжести $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ и реакции опор A и B . Моменты сил тяжести и реакций опор A и B относительно оси Az равны нулю, так как силы тяжести параллельны, а реакции опор пересекают ось Az , т. е. $\sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k^{(e)}) = 0$. Согласно

$$(15.60), \frac{dK_z}{dt} = 0 \text{ и } K_z = \text{const}.$$

Определим теперь главный момент количеств движения системы относительно оси Az в произвольный момент времени:

$$K_z = K_{z_{пл}} + K_{zT}.$$

Главный момент количеств движения пластины

$$K_{z_{пл}} = J_z \omega_z,$$

момент количества движения материальной точки M

$$K_{zT} = M_z(\vec{q}),$$

где J_z — момент инерции пластины, $J_z = m_1 a^2 / 3$.

Так как $\vec{q} = m\vec{v} = m(\vec{v}_e + \vec{v}_r) = m\vec{v}_e + m\vec{v}_r$, то

$$K_{zT} = M_z(m\vec{v}_e) + M_z(m\vec{v}_r).$$

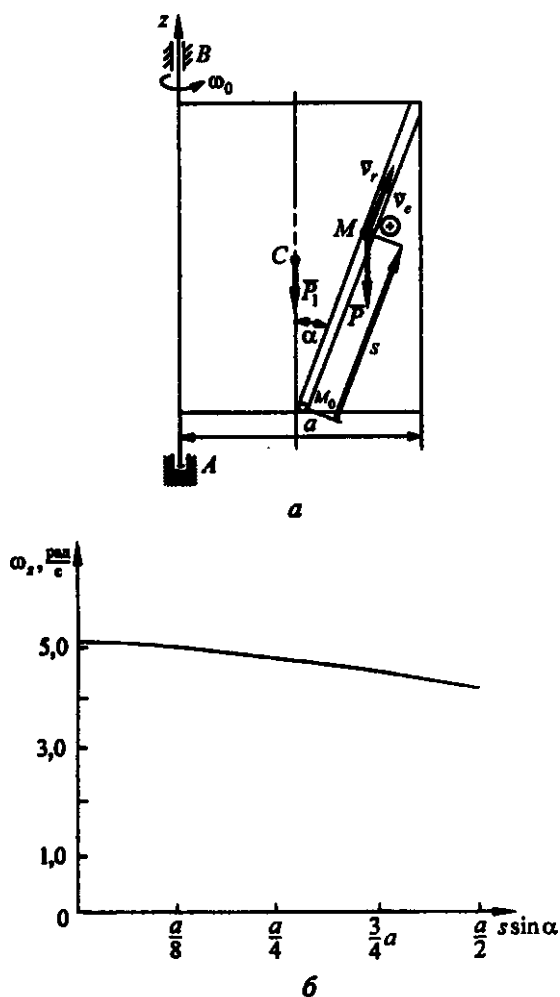


Рис. 15.19

Вектор $m\vec{v}$, во все время движения точки M пересекает ось Az , поэтому $M_z(m\vec{v}) = 0$. Окончательно получаем

$$K_{z\dot{r}} = M_z(m\vec{v}_e) = mv_e \left(\frac{a}{2} + s \sin \alpha \right) = m \left(\frac{a}{2} + s \sin \alpha \right)^2 \omega_z,$$

$$K_z = \left[J_z + m \left(\frac{a}{2} + s \sin \alpha \right)^2 \right] \omega_z = C_1.$$

Постоянную C_1 определим из начальных условий (при $t=0$ $s=0$, $\omega_z = \omega_0$):

$$\left(J_z + \frac{ma^2}{4} \right) \omega_0 = C_1.$$

Тогда

$$\left[J_z + m \left(\frac{a}{2} + s \sin \alpha \right)^2 \right] \omega_z = \left(J_z + \frac{ma^2}{4} \right) \omega_0;$$

$$\omega_z = \frac{a^2(4m_1 + 3m)}{4m_1 a^2 + 12m \left(\frac{a}{2} + s \sin \alpha \right)^2} \omega_0 \text{ при } 0 \leq s \sin \alpha \leq \frac{a}{2}.$$

При вылете точки M из паза $s \sin \alpha = a/2$, следовательно,

$$\omega_z = \frac{m_1 a^2/3 + m a^2/4}{m_1 a^2/3 + m a^2} \omega_0 = \frac{4m_1 + 3m}{4(m_1 + 3m)} \omega_0,$$

или

$$\omega_z = \frac{43}{52} \omega_0 = \frac{43}{52} \cdot 5,2 = 4,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

На рис. 15.19, 6 изображена зависимость $\omega_z = \omega_z(s)$.

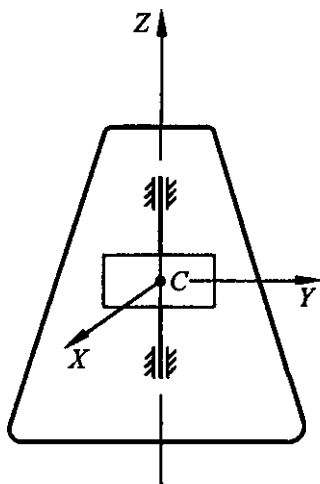


Рис. 15.20

Пример 15.5. Орбитальная космическая станция совершает вращение вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω . Вокруг оси CZ раскручивается до относительной угловой скорости $\omega_z^{(r)}$ по отношению к станции маховик. Отношение моментов инерции станции и маховика $J_c/J_m = 200$ (рис. 15.20). Определить $\omega_z^{(r)}$, если требуется погасить угловую скорость станции в 10 раз.

Решение. Пусть силы притяжения, действующие на космический аппарат, приводятся к равнодействующей, проходящей через его центр масс C . Тогда $\vec{L}_C^{(e)} = 0$.

Главный момент количеств движения системы относительно поступательно перемещающейся оси CZ постоянен: $K_{CZ} = \text{const}$.

До раскручивания маховика

$$K_{CZ}^{(0)} = (J_c + J_m) \omega,$$

после раскручивания

$$K_{CZ} = J_c \frac{\omega}{10} + J_m \left(\frac{\omega}{10} + \omega_z^{(r)} \right),$$

но $K_{CZ} = K_{CZ}^{(0)}$.

Откуда

$$\omega_z^{(r)} = \frac{J_c + J_m}{J_m} \cdot 0,9\omega = 180,9\omega.$$

**Теорема об изменении главного момента
количеств движения механической системы
для подвижной системы координат**

В полученном ранее уравнении (15.59), выражающем теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O , производные взяты относительно инерциальной (неподвижной) системы координат. В подвижной системе координат уравнение (15.59) приобретает вид

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O^{(e)}. \quad (15.67)$$

Здесь $\bar{\omega}$ — мгновенная угловая скорость подвижной системы координат; $\frac{d\bar{K}_O}{dt}$ — локальная производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно центра O .

В проекциях на оси подвижной системы координат получаем

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{K}_O)_x &= L_x^{(e)}; \\ \frac{dK_y}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{K}_O)_y &= L_y^{(e)}; \\ \frac{dK_z}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{K}_O)_z &= L_z^{(e)}. \end{aligned}$$

В подвижной системе координат выражение (15.61) для подвижной точки примет вид

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_A + \vec{v}_A \times \vec{Q} = \vec{L}_A^{(e)}.$$

Движение точки под действием центральной силы

Секторная скорость. Рассмотрим положения материальной точки M в моменты времени t и $t + \Delta t$ при ее движении по траектории, которые характеризуются радиус-векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t)$.

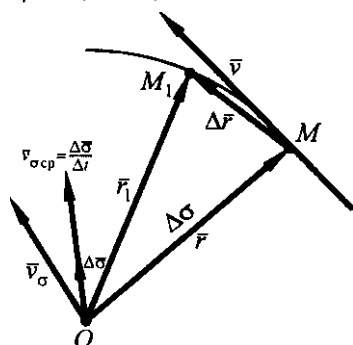


Рис. 15.21

Площадь $\Delta\bar{\sigma}$ части конической поверхности, ометаемая радиус-вектором $\vec{r}$ за время Δt , приближенно равна площади треугольника OMM_1 (рис. 15.21). Наряду с вектором $\vec{v}$, используемым в кинематике точки, введем понятие секторной скорости $\vec{v}_\sigma$ точки.

Средняя за время Δt секторная скорость

$$\vec{v}_{\sigma \text{ ср}} = \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t},$$

а секторная скорость точки M в момент времени t

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\sigma}}{dt}. \quad (15.68)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ вектор $\Delta\bar{\sigma}$ приближенно равен по модулю площади треугольника OMM_1 и направлен перпендикулярно плоскости OMM_1 в сторону, откуда движение радиус-вектора $\vec{r}$ представляется происходящим против направления движения часовой стрелки. Для $\Delta\bar{\sigma}$ можно записать

$$\Delta\bar{\sigma} \approx \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r}),$$

тогда

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{M}_O(\vec{v}), \quad (15.69)$$

где $\bar{M}_O(\bar{v})$ — момент скорости точки M относительно центра O .

Вектор $\bar{v}_\sigma$ приложен в центре O и его направление определяется направлением векторного произведения (15.69). Модуль вектора секторной скорости вычисляют по формуле

$$v_\sigma = \frac{1}{2} r v \sin(\hat{\bar{r}}, \hat{\bar{v}}).$$

Если точка M движется в плоскости и центр O находится в этой плоскости, то вектор $\bar{v}_\sigma$ перпендикулярен этой плоскости.

Из кинематики точки в полярной системе координат (рис. 15.22) известно, что $v \sin(\hat{\bar{r}}, \hat{\bar{v}}) = v_\rho$, но $v_\rho = r\dot{\phi}$, поэтому

$$v_\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}. \quad (15.70)$$

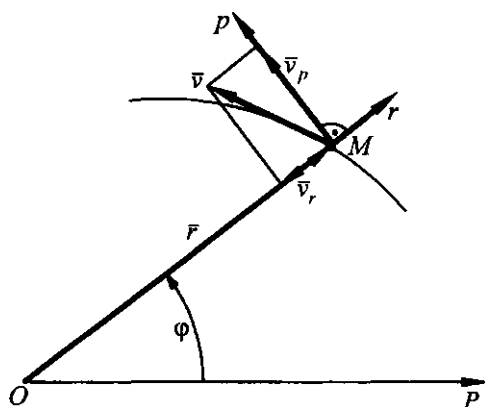


Рис. 15.22

Формула (15.70) выражает секторную скорость v_σ в полярной системе координат.

Теорема площадей. Запишем выражение для момента количества движения материальной точки (15.36), используя формулу (15.69) для секторной скорости:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(\bar{q}) = \bar{r} \times m\bar{v} = 2m\bar{v}_\sigma. \quad (15.71)$$

Преобразуем уравнение (15.54), выражающее теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра O , с учетом (15.71):

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = 2m \frac{d\bar{v}_O}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (15.72)$$

или

$$2m \frac{d\bar{v}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}). \quad (15.73)$$

Записанную в виде (15.73) теорему об изменении момента количества движения материальной точки называют **теоремой площадей**.

Движение точки под действием центральной силы. Рассмотрим движение точки M массой m под действием силы $\bar{F}$, линия действия которой проходит через центр O во все время движения точки M (рис. 15.23). Такую силу называют *центральной*. Центральными являются силы взаимодействия Солнца с планетами Солнечной системы, в частности с Землей.

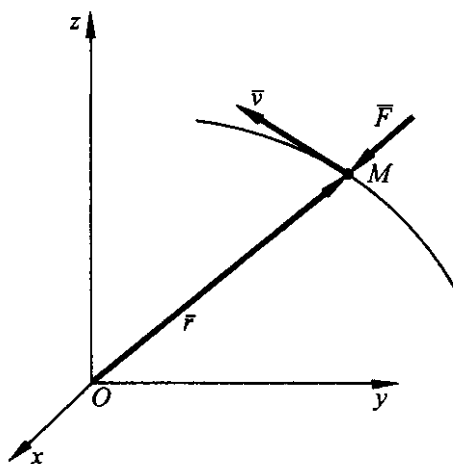


Рис. 15.23

Согласно определению центральной силы, момент силы $\bar{F}$ относительно точки O

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = 0,$$

и из (15.72) следует, что

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = 0, \text{ или } \bar{k}_O = \overline{\text{const}}. \quad (15.74)$$

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат, согласно (15.37), имеем

$$\begin{aligned} k_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1; \quad k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2; \\ k_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3. \end{aligned} \quad (15.75)$$

C_1, C_2, C_3 — постоянные.

Умножая первое уравнение (15.75) на x , второе — на y , третье — на z и складывая полученные выражения, получаем

$$xk_x + yk_y + zk_z = C_1x + C_2y + C_3z = 0,$$

т. е. координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начала координат.

Итак, *траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.*

Закон площадей. Согласно выражениям (15.71) и (15.74),

$$\bar{k}_O = 2m\bar{v}_\sigma = \overline{\text{const}}.$$

Отсюда

$$\bar{v}_\sigma = \frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \overline{\text{const}},$$

а следовательно,

$$v_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = C, \quad (15.76)$$

или

$$v_\sigma = \frac{1}{2} M_O(\bar{v}) = C. \quad (15.77)$$

Интегрируя (15.76), получаем (при $t=0$ $\sigma = \sigma_0$)

$$\sigma = \sigma_0 + Ct.$$

Уравнение (15.76) выражает закон, или интеграл площадей: *при движении материальной точки под действием центральной силы секторная скорость точки постоянна, а значит, площадь, ометаемая радиус-вектором точки, пропорциональна времени движения точки.*

В полярной системе координат закон площадей имеет вид

$$r^2 \dot{\phi} = \text{const}.$$

Пример 15.6. Рассматривая планету Солнечной системы как материальную точку, движущуюся по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце, определить отношение наибольшей и наименьшей скоростей планеты (рис. 15.24).

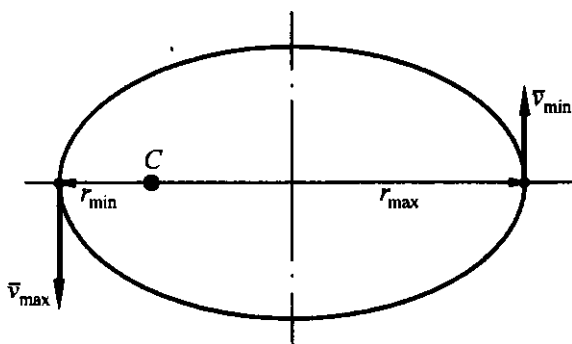


Рис. 15.24

Решение. Согласно формуле (15.77), $M_O(\bar{v}) = \text{const}$, или $r_{\min} v_{\max} = r_{\max} v_{\min}$. Отсюда $v_{\max}/v_{\min} = r_{\max}/r_{\min}$, т. е. отношение наибольшей и наименьшей скоростей движения планеты равно отношению наибольшего и наименьшего расстояний планеты от Солнца.

Теорема Резаля

Теореме об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно неподвижного центра O , определяемой выражением (15.59), можно дать кинематическое толкование. Запишем формулу для вычисления скорости движущейся точки M (рис. 15.25, а):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Здесь скорость $\bar{v}$ точки является также и скоростью конца радиус-вектора $\bar{r}$, проведенного в точку M , при движении по годографу этого вектора, а траектория точки M и есть годограф радиус-вектора $\bar{r}$.

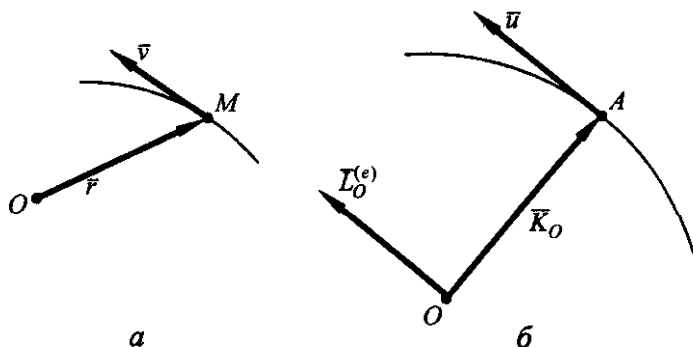


Рис. 15.25

Выражения для $\bar{r}$ и $\bar{K}_O$ позволяют трактовать производную по времени от вектора главного момента количеств движения системы как скорость движения конца этого вектора по годографу главного момента количеств движения системы (рис. 15.25, б), т. е.

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{u}.$$

Возвращаясь к уравнению (15.59), получаем

$$\bar{u} = \bar{L}_O^{(e)}.$$

Это и есть математическая запись **теоремы Резаля**: при движении механической системы скорость конца вектора главного момента количеств движения системы относительно некоторого центра при движении по годографу этого вектора геометрически равна главному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

В виде теоремы Резаля можно также записать теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы для ее относительного движения (см. (15.63)):

$$\bar{u}_B = \bar{L}_C^{(e)}$$

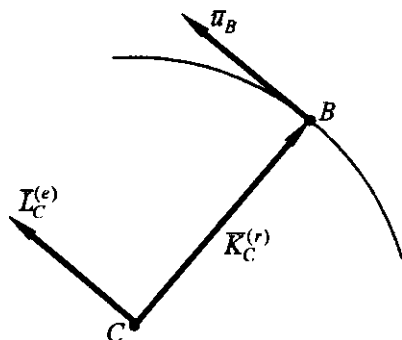


Рис. 15.26

(рис. 15.26).

15.6. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки и системы. Кинетическую энергию материальной точки массой m , движущейся с абсолютной скоростью $\bar{v}$, определяют по формуле

$$T = mv^2/2,$$

где $v^2 = \bar{v}^2$.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (15.78)$$

Кинетическая энергия — положительная скалярная величина. Единицей измерения кинетической энергии в СИ является джоуль.

Теорема Кенига. Рассмотрим движение механической системы в неподвижной системе отсчета $Oxyz$ (рис. 15.27). В качестве подвижной выберем систему $CXYZ$ с началом в центре масс — точке C , движущуюся поступательно вместе с центром масс. Абсолютное движение механической системы при этом можно рассматривать как совокупность переносного (вместе с центром масс) и относительного (по отношению к центру масс) движений системы.

Для любого момента времени положение произвольной точки M_k системы по отношению к неподвижному центру O определяет радиус-вектор

$$\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k,$$

где $\bar{\rho}_k$ — радиус-вектор точки M_k по отношению к центру масс C (см. рис. 15.27). Продифференцировав это равенство по времени, найдем абсолютную скорость произвольной точки системы

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^{(r)},$$

* 1 Дж = 1 Н·м

где $\bar{v}_k^{(r)} = d\bar{\rho}_k/dt$ — относительная скорость точки (в данном случае полная производная по времени от $\bar{\rho}_k$ равна локальной, так как система $CXYZ$ движется поступательно, т. е. $\bar{\omega}_e = 0$).

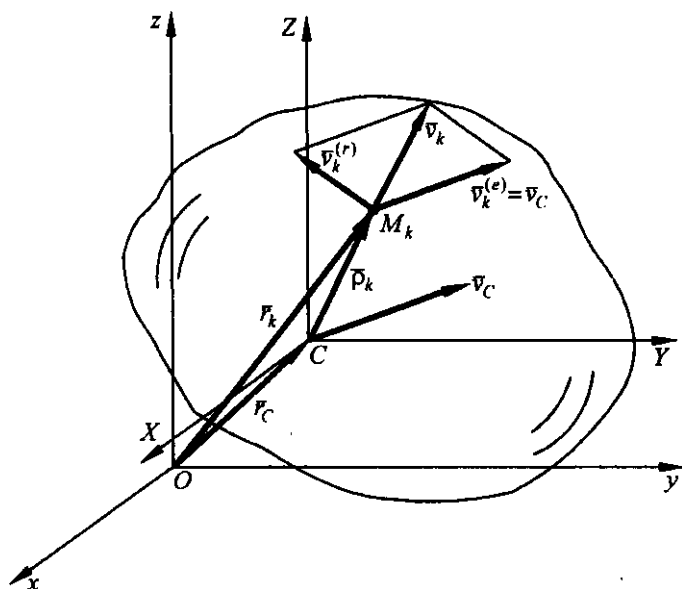


Рис. 15.27

Учитывая, что квадрат вектора равен квадрату его модуля, преобразуем выражение (15.78) к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C^2 + \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C \bar{v}_k^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\bar{v}_k^{(r)})^2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_C \bar{v}_k^{(r)} &= \bar{v}_C \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^{(r)} = \bar{v}_C \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \\ &= \bar{v}_C \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k \right) = 0, \end{aligned}$$

поскольку сумма статических моментов масс точек относительно центра масс $\sum_{k=1}^N m_k \bar{\rho}_k = 0$.

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (v_k^{(r)})^2, \quad (15.79)$$

где $M = \sum_{k=1}^N m_k$ — масса механической системы.

Формула (15.79) выражает теорему Кенига: *кинетическая энергия механической системы в ее абсолютном движении равна сумме кинетической энергии центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Кинетическая энергия твердого тела. При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс, поэтому

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k = \frac{1}{2} M v_C^2,$$

где M — масса твердого тела.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость его произвольной точки

$$v_k = \omega h_k,$$

где h_k — кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения.

Тогда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^N m_k h_k^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения Oz .

При плоском движении твердого тела, которое можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси CZ , движущейся поступательно вместе с центром масс, относи-

тельная скорость произвольной точки тела $v_k^{(r)} = \omega h_k$, и, следовательно, согласно формуле Кенига,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CZ} \omega^2,$$

где J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси CZ .

При сферическом движении твердого тела скорость произвольной точки определяется формулой Эйлера

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k. \quad (15.80)$$

Преобразуем формулу (15.78) с учетом выражения (15.80)

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_O. \end{aligned} \quad (15.81)$$

Здесь $\bar{K}_O = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ — главный момент количеств движения системы относительно неподвижной точки O .

С учетом (15.46) кинетическую энергию твердого тела при сферическом движении (15.81) можно представить в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\omega_x (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) + \omega_y (-J_{xy} \omega_x + \right. \\ &\quad \left. + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) + \omega_z (-J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z) \right], \end{aligned} \quad (15.82)$$

где $J_x, J_y, \dots, J_{yz}$ — осевые и центробежные моменты инерции твердого тела в системе координат $Oxyz$ (см. гл. 14).

Если оси системы координат $Oxyz$ направить по главным осям инерции тела для точки O , то, согласно формулам (15.47), выражение (15.82) примет вид

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2). \quad (15.83)$$

В общем случае движения свободного твердого тела в пространстве, которое можно рассматривать как совокупность поступательного переносного движения вместе с центром масс и сферического движения по отношению к этому центру (рис. 15.28), относительная скорость произвольной

точки тела $\vec{v}_k^{(r)} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k$ и, следовательно, согласно (15.79) и (15.81), кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_C^{(r)}. \quad (15.84)$$

Здесь $\vec{K}_C^{(r)}$ — главный момент количеств относительного движения относительно центра масс. Отметим, что для кинетической энергии относительного (сферического вокруг центра масс) движения тела несложно получить формулы типа (15.82), (15.83).

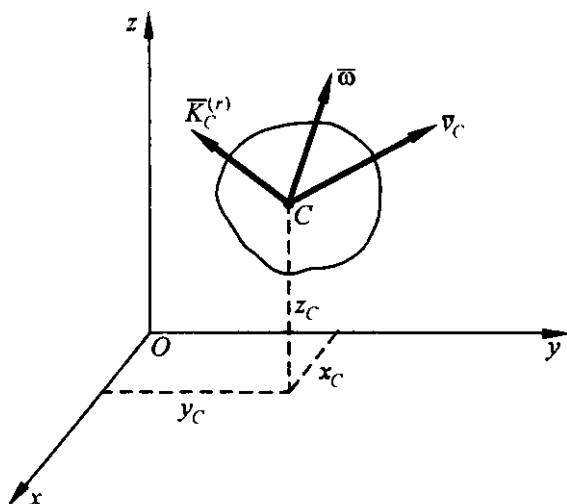


Рис. 15.28

Таким образом, в данном случае кинетическая энергия твердого тела определяется как сумма кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии тела в сферическом движении относительно центра масс.

Работа силы, мощность

Изменение кинетической энергии механической системы связано с работой сил, приложенных к этой системе.

Элементарная работа силы. Пусть точка приложения силы $\vec{F}$ перемещается по криволинейной траектории из положения

M_0 в положение M_1 (рис. 15.29). Разобьем перемещение точки M по дуге M_0M_1 на элементарные (бесконечно малые) перемещения ds и определим работу силы на каждом таком перемещении

$$d'A(\vec{F}) = F ds \cdot \cos \alpha, \quad (15.85)$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$ в точке M .

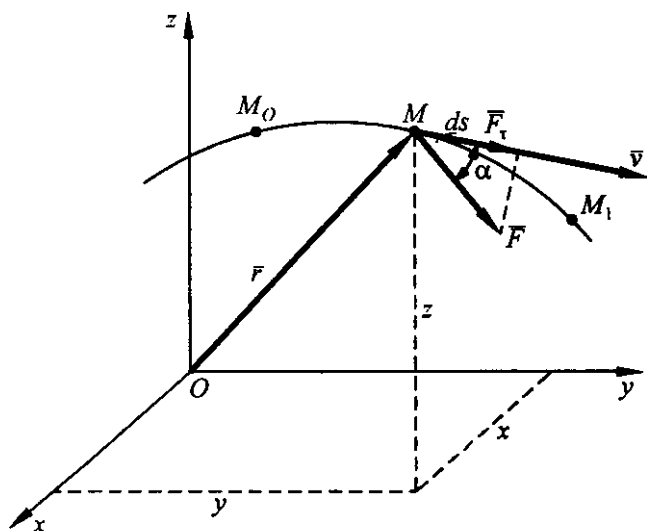


Рис. 15.29

Формула (15.85) определяет элементарную работу силы, обозначение d' используется для того, чтобы подчеркнуть, что выражение для элементарной работы не всегда является полным дифференциалом. Величина $d'A$ скалярная, ее знак определяется знаком функции $\cos \alpha$. Если $\alpha = \pi/2$, то $d'A = 0$, если проекция силы направлена в сторону, противоположную перемещению, то $d'A < 0$. Так как $F \cos \alpha = F_r$, то формулу (15.85) можно представить в виде

$$d'A = F_r ds. \quad (15.86)$$

Таким образом, *элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.*

Поскольку $ds = |d\vec{r}|$, то, согласно (15.85),

$$d'A = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha ,$$

или

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} . \quad (15.87)$$

Следовательно, *элементарная работа силы равна скалярному произведению векторов силы и дифференциала радиус-вектора точки ее приложения.*

Так как $d\vec{r} = \vec{v}dt$, представим выражение (15.87) в виде

$$d'A = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = (\vec{F}dt) \cdot \vec{v} . \quad (15.88)$$

Таким образом, *элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки ее приложения.*

Если скалярное произведение записать в аналитическом виде, то формулу (15.87) можно представить в следующем виде:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Полная работа силы. Полную работу силы $\vec{F}$ на перемещении точки из положения M_0 в положение M определяют как предел суммы ее элементарных работ, т. е.

$$A(\vec{F}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N d'A_k , \quad (15.89)$$

где $d'A_k$ — работа силы $\vec{F}$ на k -м элементарном перемещении, на которые разбита криволинейная дуга M_0M .

Так как сумма (15.89) является интегральной суммой определения криволинейного интеграла, то

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^M d'A .$$

Используя различные формулы для определения элементарной работы, получаем

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^M F_\tau ds ,$$

или

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^M \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Если же сила является функцией времени, то, согласно (15.88), работа силы $\vec{F}$ на промежутке времени от 0 до t , соответствующем точкам M_0 и M , определяется выражением

$$A(\vec{F}) = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (15.90)$$

Работа силы зависит от характера движения точки приложения силы. Так, $A = 0$, если сила приложена к неподвижной точке или к точке, скорость которой во время движения равна нулю (например, в МЦС).

Работа равнодействующей силы. Рассмотрим систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$, приложенную к рассматриваемой точке. Эта система имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, причем

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N.$$

Тогда работа силы $\vec{R}^*$ на перемещении точки из положения M_0 в текущее положение M равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$A = \int_{M_0}^M d'A = \int_{M_0}^M \vec{R}^* d\vec{r} = \int_{M_0}^M \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_0}^M \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_0}^M \vec{F}_N d\vec{r} = \sum_{k=1}^N A_k.$$

Единицей измерения работы в СИ является джоуль*.

Мощность. Отношение элементарной работы силы к промежутку времени, за которое оно произошло, называется *мощностью*:

$$W = \frac{d'A}{dt}.$$

Так как $d'A = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$, то

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Таким образом, *мощность силы равна скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения.*

* 1 Дж = 1 Н·м.

Единицей измерения мощности в СИ является ватт*.

Работа внутренних сил твердого тела. Рассмотрим две произвольные точки тела A и B (рис. 15.30), силы взаимодействия которых, согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_2^{(i)} = -\vec{F}_1^{(i)}.$$

На основании формулы (15.90) имеем

$$A(\vec{F}_1^{(i)}) + A(\vec{F}_2^{(i)}) = \int_0^t (\vec{F}_1^{(i)} \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2^{(i)} \cdot \vec{v}_B) dt.$$

Раскрывая скалярные произведения двух векторов, получаем

$$\begin{aligned} A(\vec{F}_1^{(i)}) + A(\vec{F}_2^{(i)}) &= \int_0^t (F_1^{(i)} v_A \cos \alpha + F_2^{(i)} v_B \cos \beta) dt = \\ &= \int_0^t (F_1^{(i)} v_A \cos \alpha - F_1^{(i)} v_B \cos \beta') dt = 0, \end{aligned}$$

поскольку, согласно теореме о проекциях векторов скоростей точек твердого тела на прямую, их соединяющую, в любой момент времени

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta'.$$

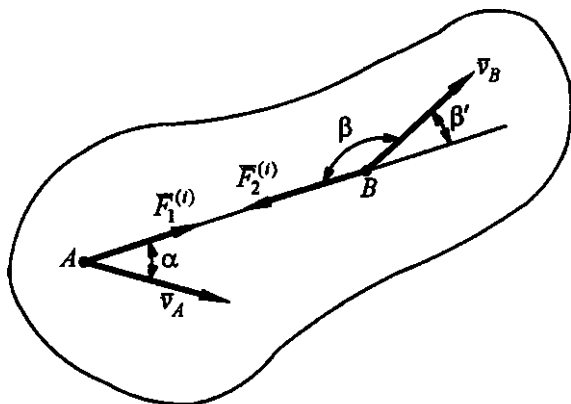


Рис. 15.30

* 1 Вт = 1 Н · м/с.

Твердое тело можно рассматривать как систему взаимодействующих пар материальных точек (при неизменной геометрии тела). Для каждой из пар сумма работ внутренних сил твердого тела будет равна нулю. Если геометрия тела меняется (например, в случае деформируемого тела), то $\sum_{k=1}^N A_k^{(i)} \neq 0$.

Работа внутренних сил трения сочлененных тел. В ряде механических систем, конструктивные элементы которых могут двигаться один относительно другого, между движущимися телами возникают силы трения скольжения (рис. 15.31). Эти силы приложены к разным телам ($\vec{F}_1^{(i)}$ к телу A , $\vec{F}_2^{(i)}$ к телу B), поэтому при рассмотрении движения каждого тела отдельно они будут внешними, а при рассмотрении совместного движения тел — внутренними.

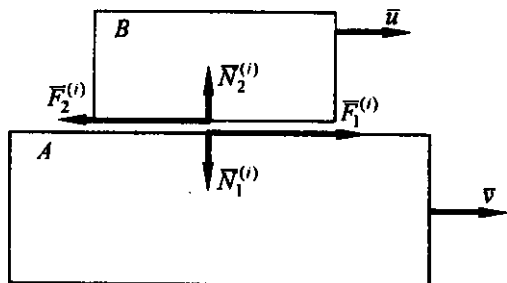


Рис. 15.31

Вычислим работу внутренних сил трения в этом случае. Пусть тело A движется со скоростью $\vec{v}$, а тело B скользит по нему в том же направлении с относительной скоростью $\vec{u}$. Между телами возникают силы трения скольжения $\vec{F}_1^{(i)}$ и $\vec{F}_2^{(i)}$, причем, согласно третьему закону Ньютона, $\vec{F}_1^{(i)} = -\vec{F}_2^{(i)}$. Применив формулу (15.90), получим

$$\begin{aligned} A_{1,2}^{(i)} &= \int_0^t [\vec{F}_1^{(i)} \cdot \vec{v} + \vec{F}_2^{(i)} \cdot (\vec{v} + \vec{u})] dt = \int_0^t \vec{F}_1^{(i)} \cdot [\vec{v} - (\vec{v} + \vec{u})] dt = \\ &= - \int_0^t \vec{F}_1^{(i)} \cdot \vec{u} dt. \end{aligned}$$

Поскольку $u dt = ds$, где s — перемещение тела B относительно тела A , то

$$A_{1,2}^{(i)} = - \int_{M_1}^{M_2} F_1^{(i)} ds.$$

При постоянной силе трения $A_{1,2}^{(i)} = -F_1^{(i)} s$.

Работа силы при поступательном движении твердого тела.

При поступательном движении твердого тела векторы скоростей, а также элементарные перемещения всех точек тела одинаковы. Тогда элементарная работа силы

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \bar{v}_k dt = \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Полная работа силы на каком-либо перемещении будет

$$A(\bar{F}) = \int_{M_0}^M \bar{F} d\bar{r}.$$

Работа силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Разложим силу $\bar{F}$, приложенную в произвольной точке M тела, по осям τ , n , b естественного трехгранника (рис. 15.32):

$$\bar{F} = \bar{F}_\tau + \bar{F}_n + \bar{F}_b.$$

Работы составляющих силы по нормали и бинормали равны нулю, ибо они направлены всегда перпендикулярно к вектору скорости точки M приложения силы. Следовательно, элементарная работа силы $\bar{F}$ совершается только ее составляющей $\bar{F}_\tau$ по касательной к траектории, т. е.

$$d'A(\bar{F}) = F_\tau ds.$$

Поскольку $ds = h d\phi$, то

$$d'A(\bar{F}) = F_\tau h d\phi,$$

где h — кратчайшее расстояние от точки приложения силы до оси вращения.

Учитывая, что $F_\tau h = M_z(\bar{F})$ — момент силы относительно оси Oz , получаем

$$d'A(\bar{F}) = M_z(\bar{F}) d\phi.$$

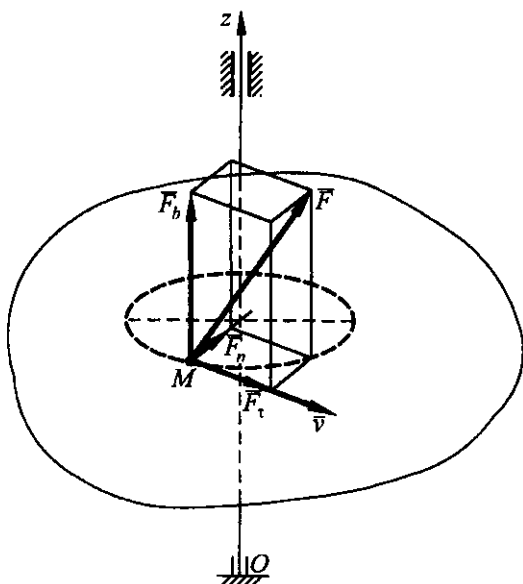


Рис. 15.32

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.

Полная работа

$$A(\bar{F}) = \int_0^{\varphi} M_z(\bar{F}) d\varphi.$$

В случае, когда момент силы относительно оси вращения тела постоянен, полная работа $A = M_z \varphi$.

Мощность силы в рассматриваемом случае

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{M_z(\bar{F}) d\varphi}{dt} = M_z(\bar{F}) \omega_z,$$

где $\omega_z = d\varphi/dt$ — проекция на ось Oz угловой скорости тела.

Работа силы в общем случае движения свободного твердого тела. Скорость точки M приложения силы $\bar{F}$ (рис. 15.33) в рассматриваемом случае равна

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{v}_A$ — скорость полюса A ; $\bar{r} = \overline{AM}$. Тогда

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \bar{F} \cdot \bar{v}_A dt + \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$

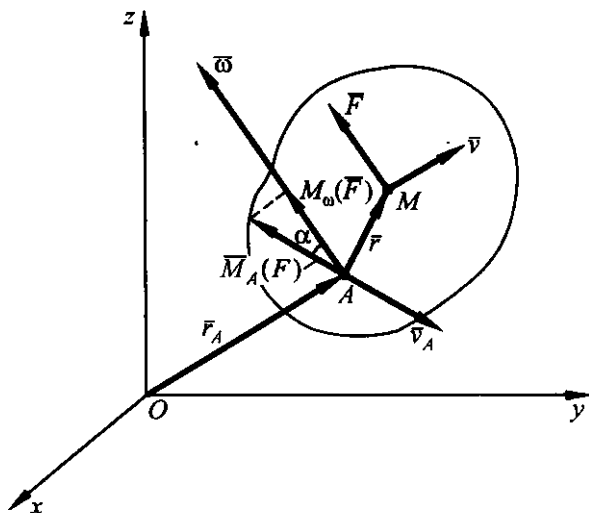


Рис. 15.33

Так как

$$\bar{v}_A dt = d\bar{r}_A, \quad \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_A(\bar{F}),$$

то

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_A(\bar{F}) dt,$$

или

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + M_\omega(\bar{F}) d\phi,$$

где $M_\omega(\bar{F})$ — проекция $\bar{M}_A(\bar{F})$ на вектор $\bar{\omega}$; $d\phi$ — элементарный угол поворота тела вокруг мгновенной оси относительного вращения.

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае его движения равна сумме элементарных работ на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и элементарном вращательном перемещении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Работа системы сил, приложенных к твердому телу.
 Пусть к твердому телу приложена система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N)$.
 Вычислим сумму элементарных работ сил, составляющих систему:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k) &= \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_A(\bar{F}_k) dt) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \right) \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \left[\sum_{k=1}^N \bar{M}_A(\bar{F}_k) \right] dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k) = \bar{R} \cdot d\bar{r}_A + \bar{\omega} \cdot \bar{L}_A dt, \quad (15.91)$$

где $\bar{R} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k$, $\bar{L}_A = \sum_{k=1}^N \bar{M}_A(\bar{F}_k)$ — главный вектор и главный момент системы сил относительно полюса A .

Таким образом, *элементарная работа системы сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных работ главного вектора на элементарном поступательном перемещении вместе с полюсом и главного момента (относительно того же полюса) на элементарном вращательном перемещении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.*

Так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, то из формулы (15.91) следует, что сумма работ (как элементарных, так и полных) всех внутренних сил, приложенных к твердому телу, равна нулю.

Теоремы об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение точки массой m под действием силы $\bar{F}$ определяется уравнением

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F},$$

которое можно также записать в виде

$$m d\bar{v} = \bar{F} dt. \quad (15.92)$$

Умножив обе части уравнения (15.92) скалярно на $\bar{v}$, после преобразований

$$m\bar{v}d\bar{v} = d\left(\frac{m}{2}\bar{v}^2\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad \bar{F} \cdot \bar{v}dt = \bar{F} \cdot d\bar{r} = d'A(\bar{F}),$$

получим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A(\bar{F}). \quad (15.93)$$

Формула (15.93) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Разделив обе части уравнения (15.93) на dt , получим еще одну запись теоремы об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{dT}{dt} = W.$$

Интегрируя обе части уравнения (15.93) по криволинейной траектории от положения M_0 до M (см. рис. 15.29), имеем

$$T - T_0 = A(\bar{F}), \quad (15.94)$$

где T , T_0 — кинетическая энергия точки в положении M и M_0 соответственно.

Формула (15.94) выражает теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки на любом перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.*

Теорема об изменении кинетической энергии для механической системы. Для механической системы, на которую действуют как внешние, так и внутренние силы, уравнение (15.93) можно представить в виде

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = d'A(\bar{F}_k^{(e)}) + d'A(\bar{F}_k^{(i)}), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (15.95)$$

Суммируя левые и правые части этих уравнений по всем точкам системы и вынося знак дифференциала за знак суммы, получаем

$$d\left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k^{(i)}),$$

или

$$dT = \sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N d'A(\bar{F}_k^{(i)}). \quad (15.96)$$

Формула (15.96) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Разделим обе части уравнения (15.96) на dt . Тогда

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N W(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N W(\bar{F}_k^{(i)}).$$

Таким образом, *первая производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.*

Проинтегрируем каждое уравнение (15.95) по соответствующей ему криволинейной траектории от положения M_{k0} до положения M_k . Просуммировав полученные выражения по всем точкам системы, имеем

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}), \quad (15.97)$$

где T_0 , T — кинетическая энергия системы в начальном и текущем

положениях соответственно; $A(\bar{F}_k^{(e)}) = \int_{M_{k0}}^{M_k} \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k$, $A(\bar{F}_k^{(i)}) =$

$= \int_{M_{k0}}^{M_k} \bar{F}_k^{(i)} \cdot d\bar{r}_k$ — соответственно работа внешней и внутренней

силы, действующей на k -ю точку системы при ее перемещении по соответствующей криволинейной траектории из начального положения M_{k0} в положение M_k .

Формула (15.97) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме: *изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил.*

Пример 15.7. К кривошипу OA эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости (рис. 15.34, *a*), приложен постоянный вращающий момент L . Масса кривошипа m_1 , масса подвижной шестерни m_2 . К подвижной шестерне приложен постоянный момент сопротивления M_c . Считая кривошип тонким однородным стержнем, а подвижную шестерню однородным круглым диском с радиусом r_2 , определить угловую скорость кривошипа в зависимости от угла его поворота. Радиус неподвижной шестерни r_1 . В начальный момент система находилась в покое.

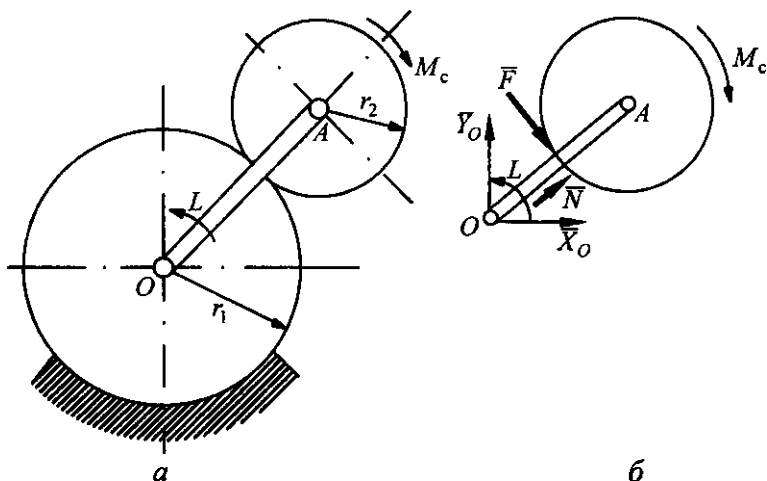


Рис. 15.34

Решение. Запишем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме (15.97) для рассматриваемого механизма:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N A_k^{(i)} \quad (15.98)$$

($T_0 = 0$, так как движение начинается из состояния покоя).

Кинетические энергии кривошипа и подвижной шестерни соответственно равны

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega_{OA}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_{AZ} \omega_2^2,$$

где $J_{Oz} = (1/3) m_1 (r_1 + r_2)^2$; $J_{AZ} = (1/2) m_2 r_2^2$.

При обкатывании подвижной шестерни по неподвижной точка их контакта является МЦС подвижной шестерни. Следовательно,

$$v_A = \omega_{OA} (r_1 + r_2) = \omega_2 r_2. \quad (15.99)$$

Таким образом, кинетическая энергия механизма при вращении кривошипа

$$T = T_{OA} + T_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_1 (r_1 + r_2)^2 \omega_{OA}^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_1 + r_2)^2 \omega_{OA}^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2^2} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} + \frac{3}{2} m_2 \right) (r_1 + r_2)^2 \omega_{OA}^2.$$

Сумма работ внутренних сил каждого из твердых тел (кривошипа и подвижной шестерни) равна нулю. Также равна нулю сумма работ сил взаимодействия между кривошипом и подвижной шестерней (точки приложения этих сил имеют одинаковые скорости, а по третьему закону Ньютона силы равны по модулю и противоположны по направлению). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(i)} = 0.$$

При движении механизма сила тяжести кривошипа и сила тяжести подвижной шестерни работы не совершают, так как механизм расположен в горизонтальной плоскости и эти силы перпендикулярны перемещению точек их приложения. Реакции $\bar{N}$ и $\bar{F}$ от неподвижной шестерни (см. рис. 15.34, б) приложены к МЦС, и работа их равна нулю. Работы реакций X_O , Y_O равны нулю, так как они приложены к неподвижной точке. Таким образом, из внешних сил, приложенных к рассматриваемому механизму, работу совершают момент привода L и постоянный момент сопротивления M_c , т. е.

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = L \varphi_{OA} - M_c \varphi_2,$$

где φ_{OA} — угол поворота кривошипа OA ; φ_2 — угол поворота подвижной шестерни.

Из кинематического соотношения (15.99) находим

$$\varphi_{OA} (r_1 + r_2) = \varphi_2 r_2.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = \left(L - M_c \frac{r_1 + r_2}{r_2} \right) \varphi_{OA}.$$

Подставив найденные соотношения в уравнение (15.98), получаем

$$\frac{1}{2} J_{np} \omega_{OA}^2 = L_{np} \varphi_{OA},$$

где J_{np} — приведенный момент инерции, $J_{np} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{3}{2} m_2 \right) (r_1 + r_2)^2$; L_{np} —

приведенный момент внешних сил, $L_{np} = L - M_c \frac{r_1 + r_2}{r_2}$.

Таким образом,

$$\omega_{OA} = \sqrt{\frac{2 L_{np}}{J_{np}}} \varphi_{OA}.$$

15.7. Потенциальное силовое поле

Силовое поле. Силовая функция

Силовым полем называется часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t).$$

Если сила явно не зависит от времени, то силовое поле называется **стационарным**.

Стационарное силовое поле называется **потенциальным**, если проекции силы $\vec{F}$ на оси Ox , Oy , Oz можно выразить через скалярную функцию $U(x, y, z)$ по формулам

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (15.100)$$

т. е.

$$\vec{F} = \overline{\text{grad}} U,$$

$$\text{где } \overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Функция $U(x, y, z)$ называется **силовой функцией**. Из формул (15.100) следует, что силовая функция U определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Свойства стационарного потенциального поля

1. Элементарная работа силы стационарного потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции:

$$\begin{aligned} d'A &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \end{aligned} \quad (15.101)$$

2. Полная работа силы стационарного потенциального поля не зависит от траектории, по которой перемещается точка, и определяется лишь начальным и конечным положением точки:

$$A = \int_{M_0}^M d'A = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \quad (15.102)$$

3. Работа силы $\vec{F}$ стационарного потенциального поля по любому замкнутому перемещению равна нулю (см. (15.102)), так как значение силовой функции в начальной и конечной точках одинаковы (если внутри замкнутого контура нет особых точек силовой функции), т. е.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

4. Для того чтобы стационарное силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы поле было безвихревым, т. е. сила $\vec{F}$ удовлетворяла условиям:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (15.103)$$

Если использовать вектор вихря

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

то условия (15.103) можно записать короче:

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Необходимость условий (15.103) доказывается просто. Действительно, пусть поле потенциально, тогда существует силовая функция $U(x, y, z)$, и, согласно (15.100), имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Для дважды дифференцируемой функции $U(x, y, z)$ порядок вычисления вторых смешанных производных не имеет значения, поэтому

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Достаточность условий (15.103) доказывается в курсе математического анализа.

Потенциальная энергия

Для потенциального силового поля наряду с силовой функцией U используют другую функцию, характеризующую запас энергии в данной точке поля, — потенциальную энергию Π в этой точке.

Потенциальной энергией материальной точки в данной точке потенциального силового поля называют работу, производимую силой, действующей на точку в потенциальном силовом поле, при ее перемещении из рассматриваемой точки поля M в начальную M_0 , условно принимаемую за нулевую:

$$\Pi = A_{MM_0} = \int_M^{M_0} dU = U(M_0) - U(M).$$

Поскольку $U(M_0) = C_0$, то

$$\Pi = C_0 - U, \quad (15.104)$$

т. е. потенциальная энергия в какой-либо точке поля с точностью до произвольной постоянной C_0 равна силовой функции в той же точке, взятой со знаком минус. На основании формул (15.100), (15.101), (15.104) имеем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$d'A = dU = -d\Pi, \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

где U_0 , Π_0 — произвольные постоянные, равные значениям силовой функции и потенциальной энергии в начальной точке.

Поверхности уровня потенциального силового поля

Поверхность

$$U(x, y, z) = C, \quad (15.105)$$

на которой силовая функция U имеет постоянное значение, называется **эквипотенциальной поверхностью**, или **поверхностью уровня**. Для конкретного поля эти поверхности образуют семейство поверхностей с параметром C ; задавая C разные значения, можно получать разные поверхности уровня, которые в случае, когда функция U однозначна, не пересекаются и разделяют потенциальное поле на слои.

Свойства поверхностей уровня

1. Если начальная и конечная точки расположены на одной и той же поверхности уровня, то работа силы стационарного потенциального поля по перемещению материальной точки из начального положения в конечное равна нулю. Действительно, из формулы (15.102) и определения поверхности уровня (15.105) следует

$$A = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

так как $U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) = C_0$ (начальная и конечная точки расположены на одной и той же поверхности уровня).

2. Сила $\vec{F}$ потенциального поля направлена по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции U . Этот результат вытекает из соотношения $\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU$ (см. (15.101)). Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r} = d\vec{\tau}$, направленное по касательной $\vec{\tau}$ к поверхности уровня в некоторой ее точке M . Так как на поверхности уровня $U(x, y, z) = C$ $dU = 0$, то $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{\tau} = dU = 0$. Таким образом, сила $\vec{F} = \overline{\text{grad}} U$ направлена перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в точке M к поверхности уровня, т. е. по нормали к этой поверхности. Если рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r} = d\vec{n}$, направленное в сторону действия силы, то на этом перемещении $\vec{F} \cdot d\vec{n} > 0$. Следовательно, и $dU > 0$ (так как $dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{n}$), т. е. в направлении действия силы $\vec{F} = \overline{\text{grad}} U$ силовая функция U возрастает.

Если построить семейство поверхностей уровня $U_N(x, y, z) = 0$ (где $U_N(x, y, z) \equiv U(x, y, z) - \lambda N$; $\lambda = \text{const}$; N — натуральное число), то при переходе с любой из этих поверхностей на соседнюю поверхность уровня работа силы потенциального поля будет одна и та же и равна λ при переходе от поверхности U_N к U_{N+1} или $-\lambda$ при переходе от поверхности U_{N+1} к U_N . Отсюда следует, что сила будет больше в тех областях поля, где расстояния между соседними поверхностями уровня меньше, т. е. где поверхности уровня расположены гуще.

Силовой линией называют кривую, касательная $\vec{\tau}$ к которой в каждой точке параллельна силе $\vec{F}$ стационарного силового поля в данной точке. Несложно записать дифференциальное уравнение для силовой линии. Действительно,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|},$$

поэтому

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \quad (15.106)$$

Уравнения (15.106) представляют собой дифференциальные уравнения для силовой линии стационарного силового поля. В случае потенциального поля уравнения (15.106) примут вид

$$\left(\frac{dx}{\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}} \right) = \left(\frac{dy}{\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}} \right) = \left(\frac{dz}{\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}} \right).$$

Отмеченные свойства поверхностей уровня и силовые линии позволяют наглядно представить картину распределения сил в потенциальном силовом поле.

Определение силовой функции, потенциальной энергии, поверхностей уровня и работы сил

Рассмотрим примеры нахождения силовой функции, потенциальной энергии и поверхностей уровня для однородного поля силы тяжести, поля линейной силы упругости и ньютоновского гравитационного поля. Для вычисления работы этих сил вначале покажем, что элементарная работа является полным дифференциалом, т. е. $d'A = dU$, а затем проинтегрируем dU .

Однородное поле силы тяжести. Рассмотрим материальную точку массой m , находящуюся в однородном поле силы тяжести. Направим ось Oz вертикально вверх, а оси Ox и Oy произвольно в горизонтальной плоскости (рис. 15.35).

Проекция силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ на оси координат будут равны

$$P_x = 0; P_y = 0; P_z = -mg.$$

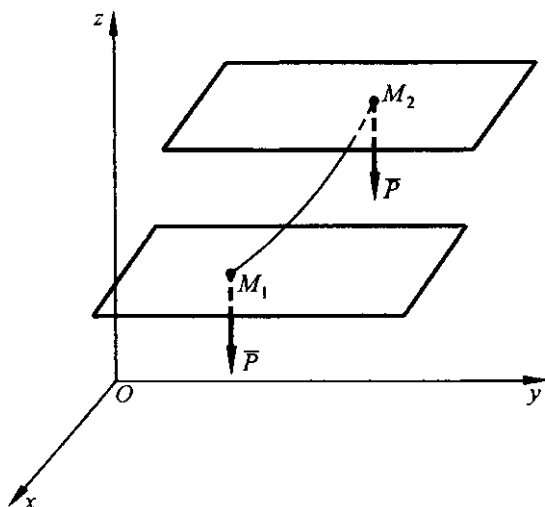


Рис. 15.35

Элементарная работа силы тяжести

$$d'A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = d(-mgz). \quad (15.107)$$

Так как элементарная работа силы тяжести является полным дифференциалом и $d'A = dU = -d\Pi$, то, интегрируя (15.107), находим

$$U = -mgz + C_1;$$

$$\Pi = mgz + C_2; \quad (15.108)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg(z_2 - z_1),$$

где A — работа силы тяжести материальной точки массой m на перемещении $M_1 M_2$.

Уравнение (15.108) можно представить в виде

$$A = -mgH,$$

где $H = z_2 - z_1$ — высота подъема точки.

Если точка M_1 расположена выше точки M_2 , т. е. при движении точка опускается, то работа силы тяжести положительная, в противном случае — отрицательная. Таким образом,

$$A = \pm mgh, \quad (15.109)$$

где знак «+» соответствует перемещению точки вниз, а знак «-» — перемещению вверх ($h = |H| = |z_2 - z_1|$).

Как следует из формулы (15.109), работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой перемещается точка приложения силы. Работа силы тяжести равна нулю, если точки M_1 и M_2 совпадают (траектория — замкнутый контур) или расположены в одной и той же горизонтальной плоскости.

Поверхностями уровня $U(x, y, z) = C$ однородного поля силы тяжести будут плоскости, перпендикулярные оси Oz , а силовыми линиями — прямые, параллельные оси Oz , так как из

$$U = -mgz = C$$

следует $z = \text{const}$.

Поле линейной силы упругости. Линейная сила упругости (рис. 15.36) подчиняется закону Гука: $\vec{F} = -c\vec{r}$, где c — коэффициент упругости; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M , отсчитываемый от точки равновесия, где сила равна нулю. Элементарная работа этой силы

$$d'A = \vec{F}d\vec{r} = -c\vec{r}d\vec{r} = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right), \quad (15.110)$$

так как $\vec{r}d\vec{r} = d\frac{1}{2}(\vec{r}^2) = d\frac{1}{2}r^2 = rdr$. Интегрируя (15.110), находим

$$\begin{aligned} U &= -\frac{cr^2}{2} + C_1; \\ \Pi &= \frac{cr^2}{2} + C_2; \end{aligned} \quad (15.111)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (-crdr) = -c \int_{r_1}^{r_2} rdr = -\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2),$$

т. е.

$$U = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C_1,$$

$$\Pi = \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C_2.$$

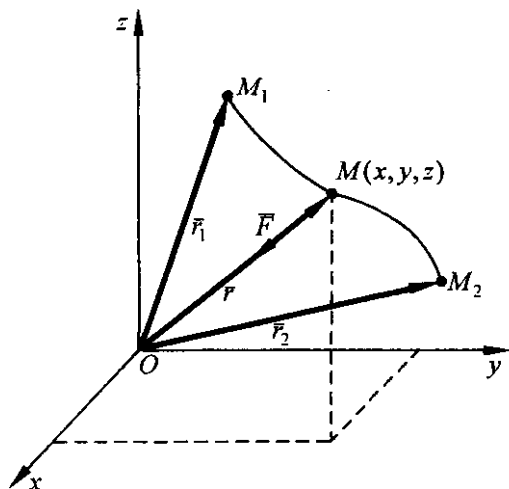


Рис. 15.36

Таким образом, *силовая функция и потенциальная энергия линейной силы упругости является квадратичной формой координат точки M , отсчитываемых от положения равновесия.*

Как следует из формулы (15.111), работа силы упругости не зависит от формы траектории, по которой перемещается точка. При перемещении же точки из положения равновесия работа силы упругости будет отрицательной:

$$A = -\frac{c}{2} r^2.$$

Поверхностями уровня $U(x, y, z) = C$ линейной силы упругости будут концентрические сферы с центром в начале координат, а силовыми линиями — прямые, проходящие через начало координат, так как из

$$U = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = C$$

следует

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}.$$

Ньютоновское гравитационное поле. На материальную точку M массой m действует сила тяготения, направленная к центру Земли и равная $F = k/r^2$, где $r = OM$ (рис. 15.37). Для Земли

$k = mgr_3^2$, где r_3 — радиус Земли, g — ускорение силы тяготения на ее поверхности, поэтому сила гравитационного поля Земли, действующая на точку M , обратно пропорциональна квадрату расстояния от материальной точки до центра Земли (для случая $r \geq r_3$, а также в предположении, что Земля — однородный шар либо шар с концентрическим распределением масс), т. е. $F = mgr_3^2/r^2$.

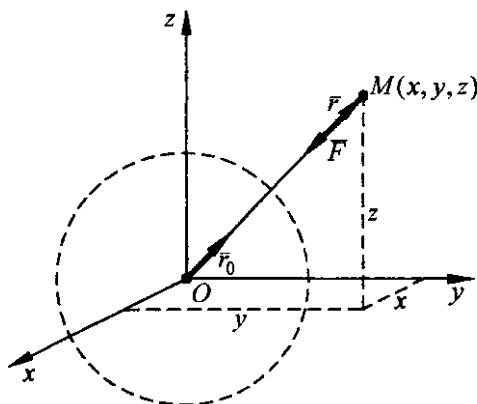


Рис. 15.37

Введем единичный вектор $\bar{r}_0$. Тогда $\bar{F} = -\frac{k}{r^2} \bar{r}_0$ и так как $\bar{r} = r\bar{r}_0$, то $\bar{F} = -k\bar{r}/r^3$. Элементарная работа силы тяготения

$$d'A = \bar{F} d\bar{r} = -\frac{k}{r^3} \bar{r} d\bar{r} = -\frac{k}{r^2} dr = d\left(\frac{k}{r}\right).$$

Отсюда силовая функция

$$U = \frac{k}{r} + C_1,$$

а потенциальная энергия

$$\Pi = -\frac{k}{r} + C_2.$$

Поверхностями уровня $U(x, y, z) = C$ ньютоновского гравитационного поля будут концентрические сферы с центром в на-

чале координат, а силовыми линиями — прямые, проходящие через начало координат, так как из

$$U = k/r = C$$

следует $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$, или $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$.

Отметим, что изложенное в § 15.7 применимо как для одной материальной точки, так и для механической системы, так как выполняется закон суперпозиции силовых полей.

Закон сохранения механической энергии

Пусть все силы (как внешние, так и внутренние), действующие на механическую систему, потенциальны, т. е. существует функция $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$, такая, что

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \quad (15.112)$$

где $F_{kx}\bar{i} + F_{ky}\bar{j} + F_{kz}\bar{k} = \bar{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к k -й точке.

Теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме представим в виде

$$dT = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k, \quad (15.113)$$

где $\bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k = (\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)})d\bar{r}_k$.

Так как, согласно (15.112),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k &= \sum_{k=1}^N (F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k) = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right) = dU, \end{aligned}$$

то уравнение (15.113) примет вид

$$dT = dU,$$

или

$$dT + d\Pi = 0,$$

где $\Pi = -U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) + \text{const}$ — потенциальная энергия системы.

Следовательно,

$$d(T + \Pi) = 0,$$

отсюда получаем

$$T + \Pi = \text{const}$$

и

$$E = T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}. \quad (15.114)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии называется **полной энергией** E механической системы. Системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются **консервативными**.

Формула (15.114) выражает закон сохранения механической энергии для механической системы: *если все силы, действующие на систему, потенциальны, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна*.

Следует отметить, что закон сохранения механической энергии справедлив и в том случае, когда кроме потенциальных имеются и непотенциальные силы, но которые при движении системы не совершают работы.

Пример 15.8. Груз 1 массой m_1 с помощью нерастяжимой нити, переброшенной через блок 2 массой m_2 , приводит в движение ступенчатый каток 3 массой m_3 (рис. 15.38). Нить намотана на меньшую ступень катка, радиус которой r , и по блоку 2 не скользит. Каток, большая ступень которого имеет радиус R , катится без скольжения по горизонтальной плоскости; его радиус инерции относительно центра масс ρ , а коэффициент трения качения δ .

Определить скорость груза в зависимости от высоты его опускания h , если в начальный момент система покоилась. Трением в оси блока, а также массой нити пренебречь. Принять, что масса блока равномерно распределена по ободу.

Решение. К движению механической системы, состоящей из груза, нити, блока и катка, применим теорему об изменении кинетической энергии в форме (15.97):

$$T = \sum_{k=1}^N A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N A_k^{(i)}, \quad (15.115)$$

в которой $T_0 = 0$, так как в начальный момент времени система покоилась. Обозначим через T_1 , T_2 и T_3 кинетическую энергию соответственно груза, блока и катка после опускания груза на высоту h . Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} J_B \omega_2^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CZ} \omega_3^2,$$

где $J_B = m_2 r_2^2$; r_2 — радиус блока 2; $J_{CZ} = m_3 \rho^2$.

Так как нить нерастяжима и относительно блока и катка не скользит, то

$$v_A = \omega_2 r_2 = v_D.$$

При качении катка без проскальзывания его МЦС находится в точке соприкосновения с неподвижной плоскостью, тогда (см. рис. 15.38)

$$v_D = \omega_3 (R + r); \quad v_C = \omega_3 R.$$

Таким образом,

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2}; \quad \omega_3 = \frac{v_A}{R + r}; \quad v_C = \frac{R}{R + r} v_A,$$

и, следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \frac{v_A^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} m_3 \frac{R^2}{(R + r)^2} v_A^2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{\rho^2}{(R + r)^2} v_A^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + m_3 \frac{R^2 + \rho^2}{(R + r)^2} \right) v_A^2.$$

Работа внутренних сил каждого из твердых тел, а также работа сил натяжения нити равны нулю, тогда для всей рассматриваемой системы

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(i)} = 0.$$

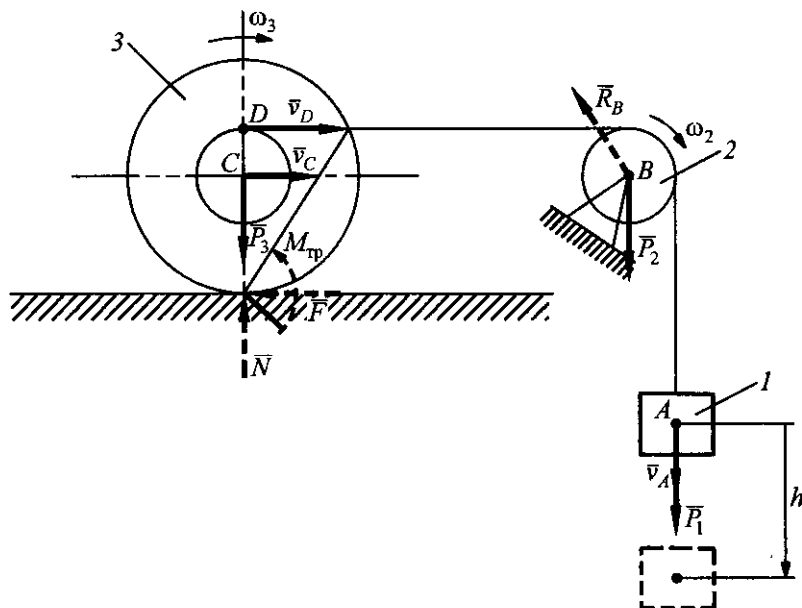


Рис. 15.38

Работа силы тяжести $\bar{P}_2$ блока и работа реакции $\bar{R}_B$ его оси равны нулю, так как эти силы приложены к неподвижной точке B . Сила тяжести катка $\bar{P}_3 = m_3 \vec{g}$ перпендикулярна перемещению, а силы реакции поверхности $\bar{N}$ и $\bar{F}$ (см. рис. 15.38) приложены к МЦС, поэтому их работа также равна нулю. Таким образом, из внешних сил, действующих на систему, работу совершают сила тяжести груза $\bar{P}_1 = m_1 \vec{g}$ и момент трения качения $M_{тр}$, препятствующий качению катка по плоскости, т. е.

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = m_1 gh - M_{тр} \varphi,$$

где φ — угол поворота катка при опускании груза l на высоту h .

Поскольку $M_{тр} = \delta P_3 = \delta m_3 g$, а $\varphi = \frac{h}{R+r}$, то

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = m_1 gh - \delta m_3 g \frac{h}{R+r}.$$

Подставив найденные соотношения в уравнение (15.115), получим

$$\frac{1}{2} m_{1пр} v_A^2 = m_{2пр} gh,$$

где $m_{1пр}$, $m_{2пр}$ — приведенные массы системы,

$$m_{1пр} = m_1 + m_2 + m_3 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2}, \quad m_{2пр} = m_1 - m_3 \frac{\delta}{R+r}.$$

Отсюда скорость груза

$$v_A = \sqrt{2gh \frac{m_{2пр}}{m_{1пр}}}.$$

15.8. Примеры использования общих теорем динамики

Общие теоремы динамики применяют для составления динамических дифференциальных уравнений движения механической системы при заданных внешних силах для выбранных обобщенных координат. Решение получают интегрированием уравнений движения в виде зависимостей этих координат от времени, определив произвольные постоянные из начальных условий задачи. После этого находят скорости и ускорения тел, а следовательно, и силы, действующие в системе.

В ряде практических задач движение по одной или нескольким обобщенным координатам бывает задано кинематиче-

ски. В этом случае определяют движение по остальным координатам, а также силы, вызвавшие движение, заданное кинематическим уравнением. Как и выше, находят все кинематические параметры системы и внутренние силы. В этих задачах некоторые начальные условия определены заданными кинематическими уравнениями.

В ряде случаев из дифференциальных уравнений движения механической системы получают первые интегралы, т. е. решения в виде функций (равных произвольным постоянным), в которые не входят ускорения.

Анализ сил, действующих на механическую систему, дает ответ, какую теорему динамики лучше использовать при решении задачи. Так, если равен нулю главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему, то по теореме об изменении количества движения системы устанавливают закон сохранения вектора количества движения системы, из которого получают три первых интеграла. Произвольные постоянные определяют из начальных условий движения механической системы — ее начального положения и начальных скоростей точек системы. Проекция количества движения системы содержат координаты и проекции скоростей точек, т. е. первые производные от координат, и не содержат проекций ускорений, т. е. вторых производных от координат.

Если проекции действующих на систему внешних сил на одну или две оси координат равны нулю, то получают один или два первых интеграла, описывающих движение системы. Если в механической системе есть тела, движение которых содержит вращательное или сферическое движение, то необходимо применять теорему об изменении главного момента количества движения системы. Если главный момент внешних сил относительно какого-либо центра равен нулю во все время движения системы, то по теореме об изменении главного момента количества движения системы относительно этого центра устанавливают закон сохранения вектора главного момента количества движения системы относительно этого центра, из которого получают три первых интеграла системы (равенства произвольным постоянным трех главных моментов количества движения системы относительно осей координат). При этом, если один или два главных момента

внешних сил относительно соответствующих осей координат равны нулю, может быть один или два первых интеграла.

Теорема об изменении кинетической энергии является более универсальной, так как в ней учитываются все движения тел в системе, а кроме того, рассматривается работа как внешних, так и внутренних сил.

Использование закона сохранения механической энергии также позволяет получить первый интеграл уравнений движения. Его называют интегралом энергии, или интегралом «живых» сил. Закон сохранения механической энергии выполняется при действии на систему потенциальных сил (внешних и внутренних), поэтому работа этих сил может быть вычислена до исследования движения системы.

Пример 15.9. Механизм состоит из зубчатой рейки 1 массой m , к которой приложена сила $\bar{F}$, и шестерен 2 и 3, находящихся в зацеплении (рис. 15.39, а). Моменты инерции шестерен относительно осей O_2z и O_3z равны соответственно J_2 и J_3 . К рейке прикреплена пружина, имеющая коэффициент жесткости c . В начальный момент пружина не напряжена. К шестерне 2 приложен момент сил сопротивления $M_{z_2} = -\alpha_2 \omega_{z_2}$, к шестерне 3 — момент сил сопротивления $M_{z_3} = -\alpha_3 \omega_{z_3}$, $\alpha_2, \alpha_3 = \text{const} > 0$. Механизм расположен в горизонтальной плоскости и в начальный момент находится в покое.

Определить уравнение движения рейки и реакцию оси шестерни 3 в начальный момент (при $t = 0$).

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме,

$$dT = \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(i)}).$$

Кинетическую энергию системы определим как сумму кинетических энергий отдельных ее тел:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{z_2}^2}{2} + \frac{J_3 \omega_{z_3}^2}{2},$$

где v — скорость рейки; ω_{z_2} , ω_{z_3} — проекции угловых скоростей шестерен 2 и 3 на оси O_2z , O_3z соответственно.

Запишем уравнения, связывающие кинематические параметры:

$$v_x = r_2 \omega_{z_2}, \quad \omega_{z_2} R_2 = -\omega_{z_3} r_3,$$

откуда

$$\omega_{z1} = -\omega_{z2} \frac{R_2}{r_3} = -\dot{x} \frac{R_2}{r_2 r_3},$$

где v_x — проекция скорости рейки на ось Ox ($v_x = \dot{x}$, $v^2 = v_x^2$); x — координата, фиксирующая положение рейки.

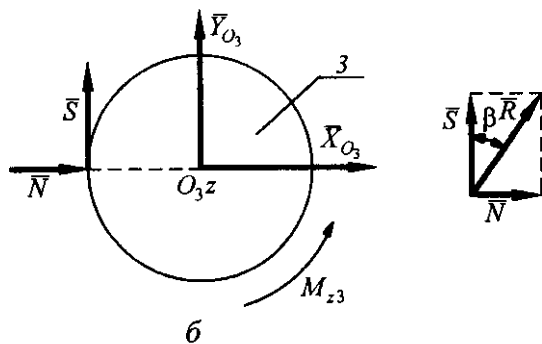
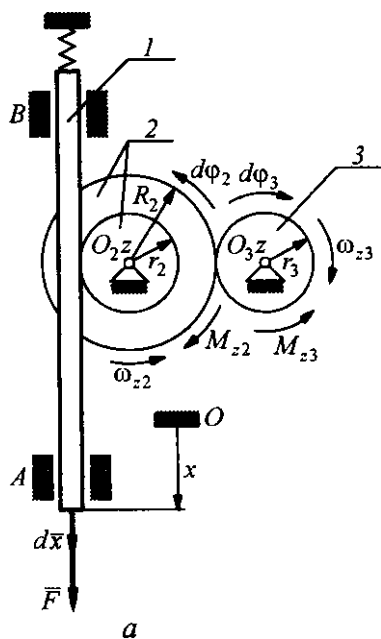


Рис. 15.39

Подставив эти выражения в формулу для кинетической энергии, получим

$$T = \left(m + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3 R_2^2}{r_3^2 r_2^2} \right) \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{B \dot{x}^2}{2},$$

где $B = m + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3 R_2^2}{r_3^2 r_2^2}$.

Дифференциал кинетической энергии

$$dT = \left(m + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3 R_2^2}{r_3^2 r_2^2} \right) x dx = B \dot{x} dx.$$

Определим сумму элементарных работ сил, если рейке сообщено элементарное перемещение dx . Так как $dx = r_2 d\varphi_2$, а $R_2 d\varphi_2 = -r_3 d\varphi_3$, то

$$d\varphi_3 = -\frac{R_2}{r_3} d\varphi_2 = -\frac{R_2}{r_3 r_2} dx.$$

Сумма элементарных работ внутренних сил равна

$$\sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Внешними для рассматриваемой механической системы являются: сила $\bar{F}$, сила упругости пружины, силы тяжести и реакции опор A , B , O_2 , O_3 , а также пары сил сопротивления с моментами M_{z_2} , M_{z_1} . Сумма элементарных работ сил тяжести и реакций опор равна нулю, так как они либо перпендикулярны $d\vec{x}$, либо приложены в неподвижных точках:

$$\sum_{k=1}^N dA(\bar{F}_k^{(e)}) = F dx - cx dx - \alpha_2 \omega_{z_2} d\varphi_2 - \alpha_3 \omega_{z_1} d\varphi_3 = \left(F - cx - \frac{\alpha_2}{r_2^2} \dot{x} - \frac{\alpha_3 R_2^2}{r_3^2 r_2^2} \dot{x} \right) dx.$$

Подставим полученные выражения в формулу для теоремы об изменении кинетической энергии:

$$B \dot{x} dx = (F - cx - D \dot{x}) dx,$$

где $D = \frac{\alpha_2}{r_2^2} + \frac{\alpha_3 R_2^2}{r_3^2 r_2^2}$.

Преобразовав это уравнение с учетом, что $\dot{x} dx / dx = \ddot{x}$, получим

$$B \ddot{x} + D \dot{x} + cx = F \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2n \dot{x} + K^2 x = A,$$

где $2n = D/B$, $K^2 = c/B$, $A = F/B$.

Решение линейного дифференциального неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$. Пусть $K > n$, тогда $x_1 = A_1 e^{-m} \sin(K_1 t + \gamma)$, $x_2 = A/K^2 = F/c$ и

$$x = A_1 e^{-m} \sin(K_1 t + \gamma) + \frac{F}{c},$$

где $K_1 = \sqrt{K^2 - n^2}$.

Константы интегрирования определим из начальных условий (при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$):

$$A_1 = -\frac{F}{c} \sqrt{1 + \frac{n^2}{K_1^2}} = -\frac{F}{c} \cdot \frac{K}{K_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{K_1}{n}.$$

Теперь, когда известно движение рейки, определено и движение шестерен.

По теореме об изменении главного момента колнчеств движения шестерни 3 относительно оси O_3 : (рис. 15.39, б)

$$J_3 \varepsilon_{z3} = -S r_3 - \alpha_3 \omega_{z1},$$

откуда

$$S = -\frac{J_3 \varepsilon_{z1} + \alpha_3 \omega_{z1}}{r_3},$$

$$\text{где } \varepsilon_{z1} = -\ddot{x} \frac{R_2}{r_3 r_2}; \quad \omega_{z3} = -\dot{x} \frac{R_2}{r_3 r_2}.$$

При $t = 0$, $\dot{x} = 0$, поэтому $\omega_{z3} = 0$, а из уравнения движения следует, что при этом $\ddot{x} = A$. Тогда

$$\varepsilon_{z1} = -A \frac{R_2}{r_3 r_2}; \quad S = \frac{J_3 A R_2}{r_3^2 r_2}.$$

Для определения реакции опоры O_3 запишем теорему о движении центра масс шестерни 3:

$$m_3 \bar{a}_{O_1} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}, \quad \bar{a}_{O_1} = 0.$$

Откуда следует $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = 0$, а значит $\sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0$; $\sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} = 0$, или

$$X_{O_1} + N = X_{O_1} + S \operatorname{tg} \beta = 0; \quad Y_{O_1} + S = 0.$$

Угол β здесь задан (см. рис. 15.39, б).

Для начального момента времени

$$X_{O_1} = -S \operatorname{tg} \beta = -\frac{J_3 A R_2}{r_3^2 r_2} \operatorname{tg} \beta; \quad Y_{O_1} = -\frac{J_3 A R_2}{r_3^2 r_2},$$

откуда

$$R_{O_1} = \sqrt{X_{O_1}^2 + Y_{O_1}^2} = \frac{J_3 A R_2}{r_3^2 r_2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{J_3 A R_2}{r_3^2 r_2 \cos \beta}.$$

Пример 15.10. Эллиптический маятник состоит из тела A массой m и шарнирно скрепленного с ним математического маятника AB . Длина маятника $AB = l$, масса точки B равна m_1 (рис. 15.40). В начальный момент система покоилась, маятник находился в левом горизонтальном положении ($\varphi = 0$).

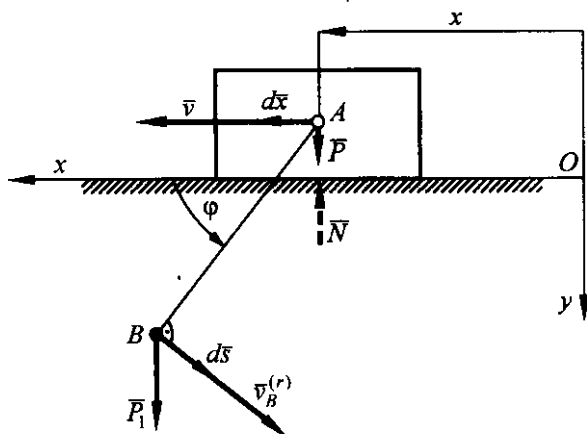


Рис. 15.40

Определить при $\varphi = \frac{\pi}{6}$ рад, $m = 3m_1$: 1) угловую скорость стержня AB и координату x тела A ; 2) ускорение тела A и угловое ускорение маятника; 3) силу, с которой система действует на плоскость. Трением пренебречь.

Решение. 1. Для определения положения системы (эллиптического маятника) введем обобщенные координаты x и φ .

Внешними для рассматриваемой механической системы являются силы тяжести тела $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{P}_1 = m_1\bar{g}$ и нормальная реакция гладкой поверхности $\bar{N}$. Эти силы перпендикулярны оси Ox , поэтому сумма их проекций на ось Ox равна нулю: $\sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0$. По теореме об изменении количества движения в проекции на ось Ox

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}, \text{ или } \frac{dQ_x}{dt} = 0. \quad (15.116)$$

После интегрирования имеем $Q_x = C_1$. Таким образом, согласно закону сохранения проекции количества движения на ось Ox , первый интеграл дифференциального уравнения для рассматриваемой системы определен.

Количество движения для эллиптического маятника $\bar{Q} = m\bar{v} + m_1\bar{v}_B$, где $\bar{v}$, $\bar{v}_B$ — соответственно абсолютные скорости тела A и точки B . Тело A совершает поступательное движение. Движение точки B представим как сложное: относительное по окружности радиусом AB с относительной скоростью $\bar{v}_B^{(r)}$ и переносное с переносной скоростью $\bar{v}_B^{(e)}$, равной скорости $\bar{v}$ груза A . Имеем

$$v_B^{(r)} = l\dot{\varphi}, \quad \bar{v}_B^{(e)} = \bar{v}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_B^{(e)} + \bar{v}_B^{(r)}, \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = 0.$$

Уравнение (15.116) принимает вид

$$m\dot{x} + m_1(\dot{x} - l\dot{\phi}\sin\varphi) = C_1, \text{ или } (m + m_1)\dot{x} - m_1 l\dot{\phi}\sin\varphi = C_1. \quad (15.117)$$

Для определения угловой скорости стержня AB требуется еще одно уравнение, которое получим с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}).$$

Кинетическая энергия эллиптического маятника

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{m_1 v_B^2}{2},$$

$$\text{где } v_B^2 = (\bar{v}_B^{(i)} + \bar{v})^2 = l^2 \dot{\phi}^2 - 2l\dot{\phi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{x}^2.$$

Окончательно имеем

$$T = \frac{(m + m_1)\dot{x}^2}{2} - m_1 l\dot{\phi}\dot{x}\sin\varphi + \frac{m_1 l^2 \dot{\phi}^2}{2}. \quad (15.118)$$

Здесь сумма работ внутренних сил $\sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}) = 0$; сумма работ внешних сил

определяется выражением $\sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) = A(m_1 \bar{g}) + A(m \bar{g}) + A(\bar{N})$, в котором работы

силы тяжести тела A и нормальной реакции $\bar{N}$ равны нулю, так как перемещение тела A перпендикулярно этим силам во все время движения.

Работа силы тяжести точки B

$$A(m_1 \bar{g}) = \int_{(l)} m_1 \bar{g} (d\bar{x} + d\bar{s}) = \int_{(s)} m_1 \bar{g} d\bar{s} \quad (ds = l d\varphi),$$

так как $\int_{(x)} m_1 \bar{g} d\bar{x} = 0$ ввиду того, что вектор $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$ перпендикулярен $d\bar{x}$.

Для решения задачи необходимо сформулировать начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad \varphi=0, \quad \dot{x}=0, \quad \dot{\phi}=0. \quad (15.119)$$

Тогда с учетом начальных условий (15.119) в уравнениях (15.117) $C_1 = 0$, а из (15.118) следует, что начальное значение кинетической энергии системы равно нулю, т. е. $T_0 = 0$, и

$$A(m_1 \bar{g}) = \int_{(s)} m_1 \bar{g} d\bar{s} = m_1 g l \int_0^\varphi \cos\varphi d\varphi = m_1 g l \sin\varphi.$$

Получаем систему уравнений

$$(m + m_1)\dot{x} - m_1 l\dot{\phi}\sin\varphi = 0; \quad (15.120)$$

$$\frac{(m + m_1)\dot{x}^2}{2} - m_1 \dot{x} l\dot{\phi}\sin\varphi + \frac{m_1 l^2 \dot{\phi}^2}{2} = m_1 g l \sin\varphi, \quad (15.121)$$

из которой при $\varphi = \pi/6$ рад находим $\dot{\varphi} = \omega_z = 4\sqrt{\frac{g}{15l}}$.

Уравнение (15.121) есть интеграл энергии. Уравнение (15.120) можно записать в виде

$$(m + m_1)dx - m_1 l \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (15.122)$$

Интегрируя (15.122) с учетом начальных условий, находим

$$x = \frac{m_1 l (1 - \cos \varphi)}{m + m_1},$$

откуда при $\varphi = \pi/6$ рад получаем $x = 0,0335l$.

2. Для определения ускорения тела A и углового ускорения маятника AB применим дифференциальную формулу записи теорем об изменении количества движения в проекции на ось Ox $\left(\frac{dQ_x}{dt} = 0\right)$ и кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N W_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N W_k^{(i)};$$

$$(m + m_1)\ddot{x} - m_1 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0;$$

$$\dot{x} [(m + m_1)\ddot{x} - m_1 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)] + \dot{\varphi} m_1 l (l\ddot{\varphi} - \ddot{x} \sin \varphi) = \dot{\varphi} m_1 g l \cos \varphi.$$

Упростив второе уравнение с помощью первого, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} (m + m_1)\ddot{x} - m_1 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= 0; \\ \ddot{x} \sin \varphi - l\ddot{\varphi} &= -g \cos \varphi, \end{aligned} \quad (15.123)$$

из которой при $\varphi = \pi/6$ рад находим $\ddot{x} = 0,362g = 3,56 \text{ м/с}^2$, $l\ddot{\varphi} = 1,047g = 10,27 \text{ м/с}^2$.

Ускорение тела A $\bar{a} = \bar{a}_x$, $\bar{a}_y = 0$, $a_x = \ddot{x}$, угловое ускорение маятника $\ddot{\varphi} = \varepsilon_z$.

3. Сила, с которой тело A действует на плоскость, равна по модулю реакции N . Запишем выражение для теоремы об изменении количества движения в проекции на ось Oy :

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)},$$

где в рассматриваемом случае $Q_y = m_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi$, $\sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)} = -N + mg + m_1 g$.

Отсюда

$$N = (m + m_1)g - \frac{dQ_y}{dt} = (m + m_1)g - m_1 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 3,63 m_1 g.$$

Замечание. Уравнение (15.123) можно получить, используя теорему об изменении главного момента количеств движения системы относительно подвиж-

ной оси Az , проходящей через подвижную точку A перпендикулярно плоскости рис. 15.40:

$$\frac{dK_{Az}}{dt} + (\vec{v} \times \vec{Q})_z = \sum_{k=1}^N M_{Az}(\vec{F}_k^{(e)}). \quad (15.124)$$

Запишем

$$(\vec{v} \times \vec{Q})_z = \{\vec{v} \times [m\vec{v} + m_1(\vec{v}_B^{(r)} + \vec{v})]\}_z = m_1(\vec{v} \times \vec{v}_B^{(r)})_z = m_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

(векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю),

$$K_{Az} = M_{Az}(m_1 \vec{v}_B) = M_{Az}(m_1 \vec{v}_B^{(r)}) + M_{Az}(m_1 \vec{v}) = m_1 l^2 \dot{\varphi} - m_1 \dot{x} l \sin \varphi.$$

Сумма моментов внешних сил относительно оси Az

$$\sum_{k=1}^N M_{Az}(\vec{F}_k^{(e)}) = M_{Az}(\vec{N}) + M_{Az}(m\vec{g}) + M_{Az}(m_1 \vec{g}) = m_1 g l \cos \varphi.$$

Подставим эти выражения в (15.124):

$$\frac{d}{dt} [m_1 l (\dot{\varphi} - \dot{x} \sin \varphi)] + m_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi = m_1 g l \cos \varphi.$$

После несложных преобразований можно легко получить уравнение (15.123).

Пример 15.11. На плите массой m , установленной на гладкой плоскости, находится лебедка, с помощью которой по плите катится ступенчатый каток (рис. 15.41, а). Массы блока лебедки и катка и их моменты инерции относительно осей O_1z и Cz , перпендикулярных плоскости рис. 15.41, а, равны соответственно m_1 , m_2 и J , J_C . Каток по плите катится без скольжения. Вращение блока лебедки подчиняется закону $\varphi = \epsilon t^2/2$, где $\epsilon = \text{const} > 0$.

Определить: 1) движение плиты, если в начальный момент она покоилась; 2) мощность двигателя, сообщаящего блоку лебедки вращение; 3) силу натяжения каната.

Решение. 1. Применим для решения задачи теорему об изменении количества движения системы и введем обобщенные координаты x и φ для рассматриваемой системы.

Закон $\varphi = \varphi(t)$ задан, поэтому движение определяем по координате x . Внешние силы системы — силы тяжести $\vec{P}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и реакция $\vec{N}$ гладкой плоскости — перпендикулярны оси Ox , поэтому

$$\sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)} = 0, \quad \frac{dQ_x}{dt} = 0, \quad \text{откуда } Q_x = C_1.$$

Количество движения системы

$$\vec{Q} = m\vec{v} + m_1\vec{v}_{O_1} + m_2\vec{v}_C,$$

где $\vec{v}$, $\vec{v}_{O_1}$, $\vec{v}_C$ — абсолютные скорости соответственно плиты и центров масс O_1 лебедки и C катка. В данном случае $\vec{v}_{O_1} = \vec{v}$, $\vec{v}_C = \vec{v}_C^{(e)} + \vec{v}_C^{(r)}$.

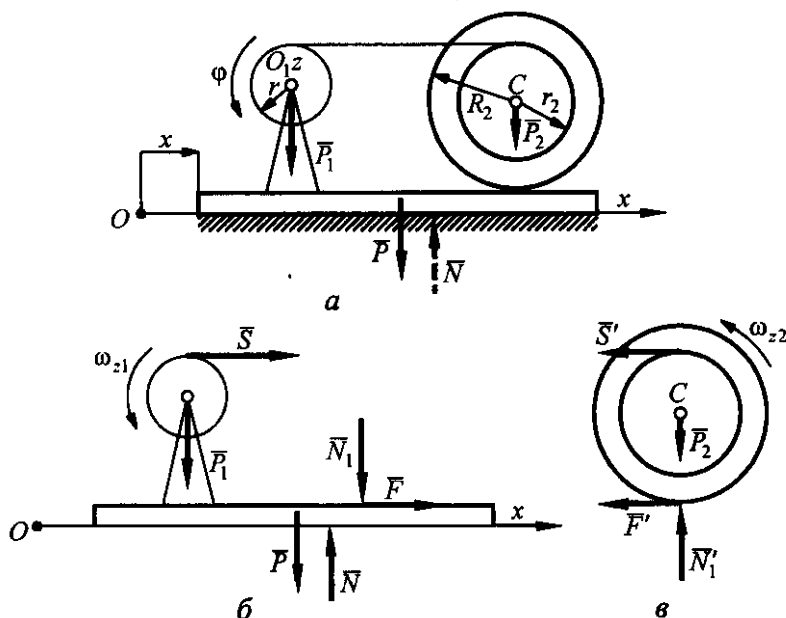


Рис. 15.41

Переносная скорость центра масс катка $\vec{v}_C^{(e)} = \vec{v}$, относительная $\vec{v}_C^{(r)}$. Проекции на ось Ox этих скоростей равны

$$v_x = \dot{x}; \quad v_{Cx}^{(r)} = -\frac{r\varphi R_2}{r_2 + R_2} = -\frac{rR_2}{r_2 + R_2}\varepsilon t; \quad v_{Cx} = \dot{x} - \frac{rR_2}{r_2 + R_2}\varepsilon t.$$

Закон сохранения проекции количества движения системы на ось Ox имеет вид

$$m\dot{x} + m_1\dot{x} + m_2\left(\dot{x} - \frac{rR_2}{r_2 + R_2}\varepsilon t\right) = C_1.$$

Из начальных условий для плиты: при $t=0$ $x=0$, $\dot{x}=0$, определяем $C_1=0$. Тогда

$$\dot{x} = \frac{m_2 \frac{rR_2}{r_2 + R_2} \varepsilon t}{m + m_1 + m_2} = At,$$

$$\text{где } A = \frac{m_2 \frac{rR_2}{r_2 + R_2} \varepsilon}{m + m_1 + m_2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$x = \frac{At^2}{2} + C_2.$$

Из начальных условий определяем $C_2 = 0$. Таким образом, уравнение движения плиты имеет вид

$$x = \frac{m_2 r R_2 \epsilon t^2}{2(r_2 + R_2)(m + m_1 + m_2)}.$$

2. Определим мощность двигателя лебедки, обеспечивающего заданный закон $\varphi(t)$. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы в форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N W_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N W_k^{(i)}.$$

Для данной задачи правая часть уравнения равна мощности двигателя лебедки W . Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{J\omega_{z_1}^2}{2} + \frac{m_2 v_c^2}{2} + \frac{J_C \omega_{z_2}^2}{2},$$

где ω_{z_1} , ω_{z_2} — проекции угловых скоростей блока лебедки и катка соответственно,

$\omega_{z_1} = \dot{\varphi} = \epsilon t$, $\omega_{z_2} = \frac{r\epsilon t}{r_2 + R_2}$, причем угловые ускорения блока лебедки

$\epsilon_{z_1} = \epsilon$ и катка $\epsilon_{z_2} = \dot{\omega}_{z_2} = \frac{r\epsilon}{r_2 + R_2}$, а ускорение плиты $a = a_x = \ddot{x} = A$.

Мощность двигателя найдем из уравнения $W = \frac{dT}{dt}$, т. е.

$$W = (m + m_1)\dot{x}\ddot{x} + J\omega_{z_1}\epsilon + m_2\left(\dot{x} - \frac{rR_2}{r_2 + R_2}\epsilon t\right)\left(\ddot{x} - \frac{rR_2\epsilon}{r_2 + R_2}\right) + J_C\omega_{z_2}\epsilon_{z_2}.$$

После преобразований получим

$$W = \epsilon^2 \left[\frac{m_2(m + m_1)}{m + m_1 + m_2} \frac{r^2 R_2^2}{(R_2 + r_2)^2} + J + J_C \frac{r^2}{(R_2 + r_2)^2} \right] t.$$

3. Для определения силы натяжения каната воспользуемся теоремами о движении центра масс системы в проекции на ось Ox (рис. 15.41, б) и об изменении главного момента количеств движения относительно центра масс для катка (рис. 15.41, в) и запишем

$$(m + m_1)\ddot{x} = S + F;$$

$$J_C \epsilon_{z_2} = S'r_2 - F'R_2, \quad (S = S', F = F').$$

Отсюда

$$S = \frac{(m + m_1)\ddot{x}R_2 + J_C\epsilon_{z_2}}{r_2 + R_2} = \frac{r\epsilon}{(r_2 + R_2)^2} \left[J_C + \frac{(m + m_1)m_2 R_2^2}{m + m_1 + m_2} \right].$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**16.1. Поступательное движение твердого тела.****Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.****Плоское движение твердого тела**

Задачи динамики твердого тела могут быть решены на основе системы дифференциальных уравнений движения, выведенных, например, из общих теорем динамики для общего случая движения твердого тела: теоремы о движении центра масс (или теоремы об изменении количества движения) и теоремы об изменении главного момента количеств движения механической системы (в данном случае твердого тела) в относительном движении по отношению к центру масс. Эта система должна быть дополнена геометрическими и кинематическими соотношениями для используемых координат в соответствии с видом наложенных связей и числом степеней свободы твердого тела, а также начальными условиями, которые определяют положение тела, его угловую скорость и скорость центра масс в момент времени t_0 (как правило $t_0 = 0$) в выбранной системе отсчета. Однако для решения многих задач можно использовать не полную систему дифференциальных уравнений движения тела, полученную для общего случая его движения, а только дифференциальные уравнения, выведенные для описания конкретного вида движения, полагая при этом, что вид движения определяется связями, наложенными на тело, и системой приложенных к нему активных сил.

Поступательное движение твердого тела

При поступательном движении тела его угловая скорость, а следовательно, и главный момент количеств движения относи-

тельно центра масс тождественно равны нулю. На основании теоремы о движении центра масс механической системы, уравнение (15.18) применительно к рассматриваемому случаю имеет вид

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}, \quad (16.1)$$

где m — масса тела; $\bar{a}$ — ускорение центра масс тела, равное ускорению любой его точки при поступательном движении.

Уравнение (16.1) можно также записать в виде *векторного дифференциального уравнения поступательного движения твердого тела*:

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}. \quad (16.2)$$

В общем случае поступательного движения тело имеет три степени свободы и его движение можно задать, определив движение центра масс тела в декартовой системе координат. В проекциях на оси декартовой системы координат для (16.2) получаем

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(e)}.$$

Начальные условия в данном случае имеют вид: при $t = t_0$
 $x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$

В проекциях на оси естественной системы координат (при естественном способе задания движения центра масс в данном случае тело имеет одну степень свободы) уравнения (16.2) записывают так:

$$m\ddot{s} = \sum_{k=1}^N F_{k\tau}^{(e)}; \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_{k=1}^N F_{kn}^{(e)}; \quad 0 = \sum_{k=1}^N F_{kb}^{(e)},$$

где $s = s(t)$ — закон движения центра масс тела по траектории. Начальные условия в этом случае принимают следующий вид: при $t = t_0$ $s = s_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0.$

Аналогичным образом можно записать дифференциальные уравнения движения твердого тела в проекциях на оси любой другой инерциальной системы координат и сформулировать начальные условия. Видно, что эти уравнения подобны дифферен-

циальным уравнениям движения материальной точки в соответствующей системе координат (см. гл. 13).

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

В случае вращения вокруг неподвижной оси тело имеет одну степень свободы. Для получения дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси вращения Oz , записав (15.60) в виде

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}),$$

где для твердого тела $K_z = J_z \omega_z = J_z \dot{\phi}$. Тогда

$$J_z \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (16.3)$$

Выражение (16.3) называется *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Его можно также записать в виде

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}) \text{ или } J_z \varepsilon_z = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Начальные условия для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси следующие: при $t = t_0$ $\phi = \phi_0$, $\dot{\phi} = \omega_z = \dot{\phi}_0$.

Пример 16.1. Тело 1 с валом 2, вращающееся свободно с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси Oz (рис. 16.1, а), начинает тормозить под действием момента сил аэродинамического сопротивления относительно оси вращения, пропорционального угловой скорости тела: $|M_{xc}| = \alpha \omega$. После того как угловая скорость тела уменьшилась вдвое, дополнительно включается механическая тормозная система, и к валу 2 тела 1, имеющего радиус R , пружиной прижимается тормозная колодка 3 (см. рис. 16.1, а). Сила сжатия пружины постоянна и равна Q ; коэффициент трения скольжения колодки о вал f . Определить: 1) число оборотов, совершенных телом с начала торможения до момента включения механической тормозной системы; 2) закон изменения угловой скорости тела от времени с момента включения тормозной системы; 3) время от момента включения тормозной системы до полной остановки тела. Принять, что момент инерции тела с валом относительно оси вращения равен J , трением в опорах вала пренебречь.

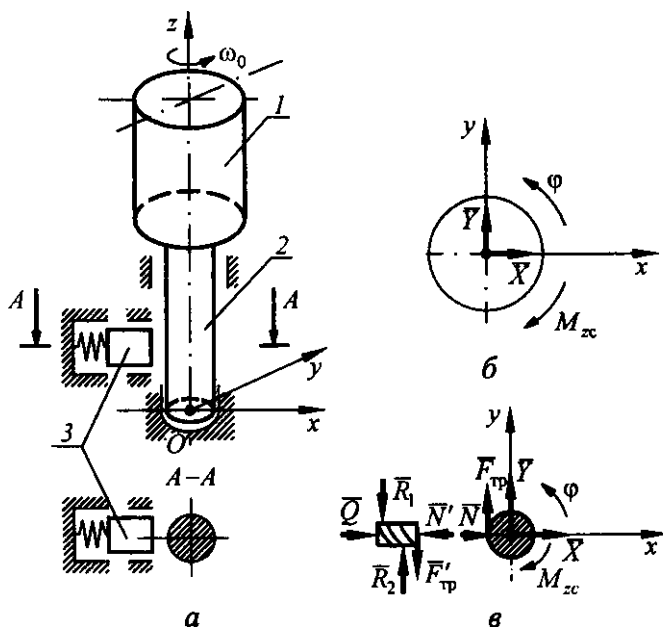


Рис. 16.1

Решение. 1. В соответствии с расчетной схемой, приведенной на рис. 16.1, б, для первого этапа движения тела дифференциальное уравнение (16.3) его вращения вокруг вертикальной оси Oz имеет вид

$$J_z \ddot{\varphi} = M_{zc},$$

где $J_z = J$; $M_{zc} = -\alpha \omega_z$.

Понизим порядок производной в левой части этого уравнения и перейдем от производной по времени к производной по углу:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_z}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega_z \frac{d\omega_z}{d\varphi}.$$

Тогда

$$J \omega_z \frac{d\omega_z}{d\varphi} = -\alpha \omega_z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно получаем

$$\frac{J}{\alpha} d\omega_z = -d\varphi; \quad \frac{J}{\alpha} \omega_z = -\varphi + C_1.$$

Для определения константы интегрирования C_1 используем начальные условия: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\omega_z = \omega_0$. Отсюда $C_1 = (J/\alpha) \omega_0$, так что

$$\varphi = (J/\alpha)(\omega_0 - \omega_z).$$

Число оборотов, совершенное телом до момента уменьшения его угловой скорости в два раза,

$$n = \frac{\varphi|_{\omega_z=0,5\omega_0}}{2\pi} = \frac{(J/\alpha)(\omega_0 - 0,5\omega_0)}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi\alpha}.$$

2. Дифференциальное уравнение (16.3) вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz на втором этапе движения (с момента включения механической тормозной системы), согласно расчетной схеме, приведенной на рис. 16.1, a , имеет вид

$$J_z \ddot{\varphi} = M_{\text{ж}} + M_{\text{тр}}.$$

Здесь момент сил сухого трения относительно оси Oz будет равен $M_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}R$, где $F_{\text{тр}} = fQ$ — модуль силы трения скольжения. После всех подстановок имеем

$$J \frac{d\omega_z}{dt} = -\alpha\omega_z - fQR.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно получаем

$$\frac{d\omega_z}{\omega_z + fQR/\alpha} = -(\alpha/J)dt; \quad \ln(\omega_z + fQR/\alpha) = -(\alpha/J)t + C_2.$$

Константу интегрирования C_2 найдем из начального условия, по которому угловая скорость в начале второго этапа движения равна угловой скорости в конце первого, т. е. при $t = 0$ $\omega_z = 0,5\omega_0$. В таком случае

$$C_2 = \ln(0,5\omega_0 + fQR/\alpha),$$

и, следовательно,

$$\omega_z = (0,5\omega_0 + fQR/\alpha) \exp(-\alpha t/J) - fQR/\alpha.$$

3. Время t_k с момента включения тормозной системы до полной остановки тела I , когда его угловая скорость станет равной нулю, найдем из последнего выражения, полагая, что при $t = t_k$ $\omega_z = 0$:

$$t_k = \frac{J}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha\omega_0}{2fQR} \right).$$

Плоское движение твердого тела

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела получим на основании теорем о движении центра масс и об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс.

Введем неподвижную систему координат, например $Oxyz$, в которой, согласно (15.18), для центра масс тела будем иметь

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)}, \quad (16.4)$$

а также подвижную систему координат $CXYZ$, имеющую начало в центре масс тела и перемещающуюся относительно системы $Oxyz$ поступательно, причем плоскости CXY и Oxy указанных систем координат будем считать совпадающими с плоскостью, в которой движется центр масс тела (рис. 16.2). Теорема об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс для твердого тела в проекции на ось CZ подвижной системы координат выражается уравнением (15.64)

$$\frac{dK_{CZ}^{(r)}}{dt} = \sum_{k=1}^N M_{CZ}(\vec{F}_k^{(e)}),$$

в котором главный момент количеств движения тела в его относительном вращении вокруг оси CZ подвижной системы координат

$$K_{CZ}^{(r)} = J_{CZ} \omega_z.$$

Здесь J_{CZ} — момент инерции тела относительно оси CZ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела.

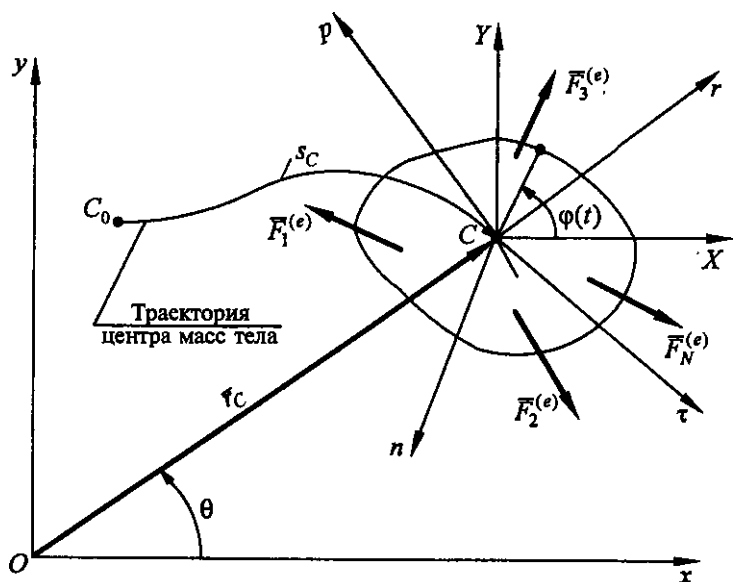


Рис. 16.2

Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее вращение твердого тела относительно оси CZ , имеет вид

$$J_{CZ} \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^N M_{CZ} (\bar{F}_k^{(e)}). \quad (16.5)$$

Дифференциальные уравнения (16.4) и (16.5) полностью описывают плоское движение твердого тела.

Векторное уравнение (16.4) можно записать в проекциях на оси любой инерциальной системы координат. Так, в проекциях на оси Ox и Oy декартовой системы координат получаем

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}. \quad (16.6)$$

В проекциях на оси полярной системы координат имеем

$$m(\ddot{r}_C - r_C \dot{\theta}^2) = \sum_{k=1}^N F_{kr}^{(e)}; \quad m(r_C \ddot{\theta} + 2\dot{r}_C \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^N F_{k\theta}^{(e)}, \quad (16.7)$$

где r_C и θ — полярные координаты центра масс тела в неподвижной системе отсчета (на рис. 16.2 полярная ось совмещена с осью Ox , а полярная координата $r_C = OC = |\bar{r}_C|$).

Наконец, в проекциях на касательную и нормальную оси естественной системы координат уравнение (16.4) принимает следующий вид:

$$m\ddot{s}_C = \sum_{k=1}^N F_{kt}^{(e)}; \quad m \frac{\dot{s}_C^2}{\rho} = \sum_{k=1}^N F_{kn}^{(e)}. \quad (16.8)$$

Здесь $s_C = s_C(t)$ — закон движения центра масс по траектории (на рис. 16.2 начало отсчета s_C принято в точке C_0); ρ — радиус кривизны траектории центра масс тела.

Системы уравнений (16.5) и (16.6), (16.5) и (16.7), (16.5) и (16.8) называются *дифференциальными уравнениями плоского движения твердого тела* в соответствующей системе координат.

Начальные условия в общем случае можно задать, например, так: при $t = t_0$

$$x_C = x_0, \quad y_C = y_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_0, \quad \dot{y}_C = \dot{y}_0, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0,$$

или

$$r_C = r_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \dot{r}_C = \dot{r}_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0,$$

или

$$s_C = s_0, \varphi = \varphi_0, \dot{s}_C = \dot{s}_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

В зависимости от числа степеней свободы тела для описания его плоского движения можно использовать от одной до трех обобщенных координат, при необходимости выражая через них координаты, используемые в приведенных выше уравнениях и начальных условиях.

Пример 16.2. Однородный цилиндр массой m с горизонтальной осью и радиусом r начинает катиться из состояния покоя по шероховатой поверхности, имеющей на первом участке цилиндрическую форму с радиусом R , а на втором участке плавно переходящей в наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α_0 (рис. 16.3). В начальный момент времени центр масс цилиндра находился в точке C_0 и линия C_0O_1 составляла угол β с вертикалью. Определить: 1) минимально возможный коэффициент трения скольжения цилиндра о поверхность, чтобы его качение происходило без проскальзывания; 2) закон движения центра масс цилиндра по наклонной плоскости, принимая на всем участке движения цилиндра коэффициент трения скольжения $f > f_{\min}$. Трением качения пренебречь.

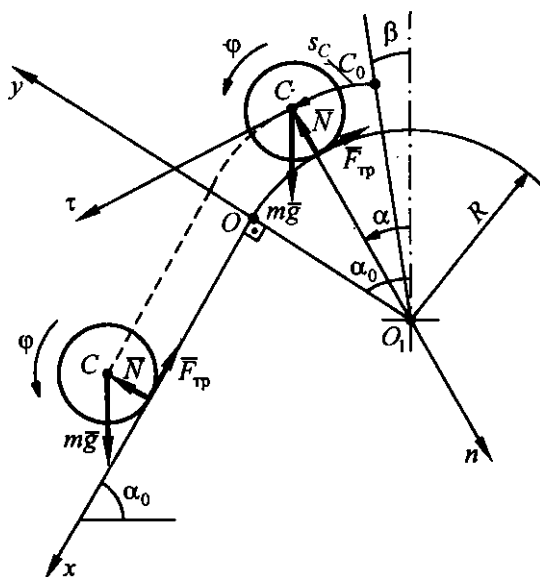


Рис. 16.3

Решение. 1. На основании расчетной схемы, соответствующей движению тела на первом участке по цилиндрической поверхности (см. рис. 16.3), система дифференциальных уравнений плоского движения (16.5), (16.8) будет иметь вид

$$\begin{cases} m\ddot{s}_C = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}; \\ m\dot{s}_C^2 / \rho = mg \cos \alpha - N; \\ J_{CZ} \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} r, \end{cases}$$

где s_C — дуговая координата с началом в точке C_0 , определяющая положение центра масс; α — угол, отсчитываемый от вертикали, $\alpha = \beta + s_C / (R + r)$; $\rho = (R + r)$ — радиус кривизны траектории центра масс тела; $J_{CZ} = 0,5mr^2$; φ — угол поворота цилиндра; $\dot{s}_C = v_\tau$ — проекция скорости центра масс на ось $C\tau$.

При отсутствии проскальзывания должно выполняться неравенство

$$|\overline{F}_{\text{тр}}| \leq fN.$$

В этом случае $\dot{\varphi} = \dot{s}_C / r$, $\ddot{\varphi} = \ddot{s}_C / r$. С учетом приведенных кинематических соотношений из системы дифференциальных уравнений находим

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin \alpha; \quad N = mg \cos \alpha - mv_\tau^2 / (R + r); \quad \ddot{s}_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Перейдем в левой части последнего выражения от производной по времени к производной по координате:

$$\ddot{s}_C = \frac{dv_\tau}{dt} \frac{ds_C}{ds_C} = v_\tau \frac{dv_\tau}{ds_C}.$$

После разделения переменных и интегрирования имеем

$$v_\tau^2 = -\frac{4}{3} g(R + r) \cos \alpha + C_1.$$

Начальные условия запишем в виде: при $t = 0$ $s_C = 0$, $\dot{s}_C = v_{\tau 0} = 0$. Тогда

$$C_1 = \frac{4}{3} g(R + r) \cos \beta;$$

$$v_\tau^2 = \frac{4}{3} g(R + r)(\cos \beta - \cos \alpha);$$

$$N = \frac{1}{3} mg[7 \cos \alpha - 4 \cos \beta].$$

Подставив найденные выражения для силы трения и нормальной реакции в приведенное выше неравенство, находим

$$\frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq f \frac{1}{3} mg(7 \cos \alpha - 4 \cos \beta).$$

Считая, что последнее соотношение выполняется для всех значений $\alpha \leq \alpha_0$, и при этом $N > 0$, получаем выражение для минимального значения коэффициента трения скольжения:

$$f_{\min} = \frac{\sin \alpha_0}{7 \cos \alpha_0 - 4 \cos \beta}.$$

2. Систему дифференциальных уравнений плоского движения (16.5), (16.6) на втором участке движения цилиндра по наклонной плоскости (см. рис. 16.3) можно записать так:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha_0 - F_{\text{тр}}; \\ m\ddot{y}_C = -mg \cos \alpha_0 + N; \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}r, \end{cases}$$

где $\ddot{y}_C = 0$, так как $y_C = r = \text{const}$.

В соответствии с условиями задачи проскальзывание отсутствует, поэтому $\dot{\varphi} = \dot{x}_C/r$ и $\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C/r$. В итоге из приведенной системы дифференциальных уравнений находим

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha_0; \quad \ddot{x}_C = a_{Cx} = \frac{2}{3}g \sin \alpha_0 = \text{const}.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = a_{Cx}t + C_2.$$

Повторное интегрирование даст

$$x_C = \frac{1}{2}a_{Cx}t^2 + C_2t + C_3.$$

Начальное значение скорости центра масс цилиндра на втором участке движения равно его значению в конце первого участка, так что начальные условия имеют вид: при $t = 0$ $x_C = 0$, $\dot{x}_C = v_C(\alpha_0)$.

Из начальных условий следует, что константы интегрирования

$$C_2 = \sqrt{\frac{4}{3}g(R+r)(\cos \beta - \cos \alpha_0)}; \quad C_3 = 0,$$

поэтому окончательно имеем

$$x_C = \left(\frac{2}{3}g \sin \alpha_0 \right) \frac{t^2}{2} + \left(\sqrt{\frac{4}{3}g(R+r)(\cos \beta - \cos \alpha_0)} \right) t.$$

Пример 16.3. В механизме, изображенном на рис. 16.4, а, рычаг 1 массой m , связанный с маховиком 2 цилиндрическим шарниром А, движется в горизонтальной плоскости O_1x_1 , свободно перемещаясь в поворотной муфте 3. Определить:

1) составляющие реакций шарнира А и муфты 3, лежащие в горизонтальной плоскости; 2) момент сил от привода, задающих движение маховику 2, относительно оси вращения O_1z , при которых движение рычага 1 в диапазоне изменения угла $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ происходит с постоянной угловой скоростью ω . Принять, что оси поворота муфты и маховика вертикальные, $OO_1 = O_1A = AC = L$ (точка С — центр масс рычага). Массой, размерами муфты 3 и силами трения пренебречь.

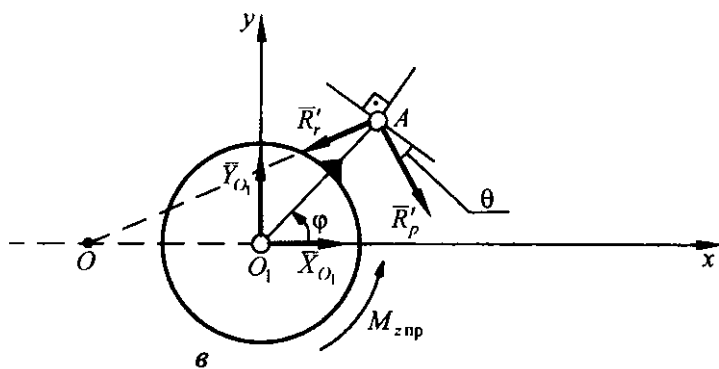
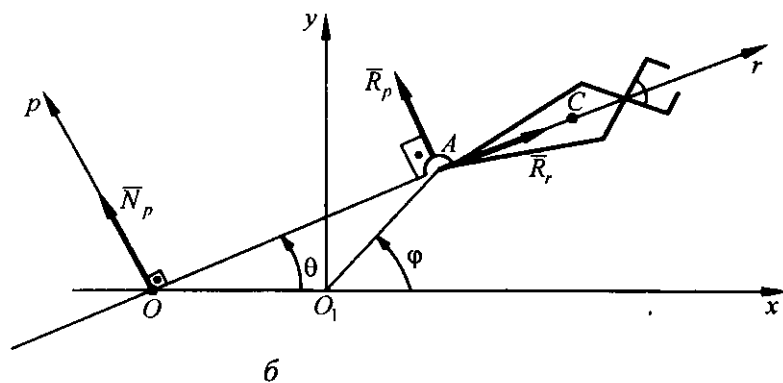
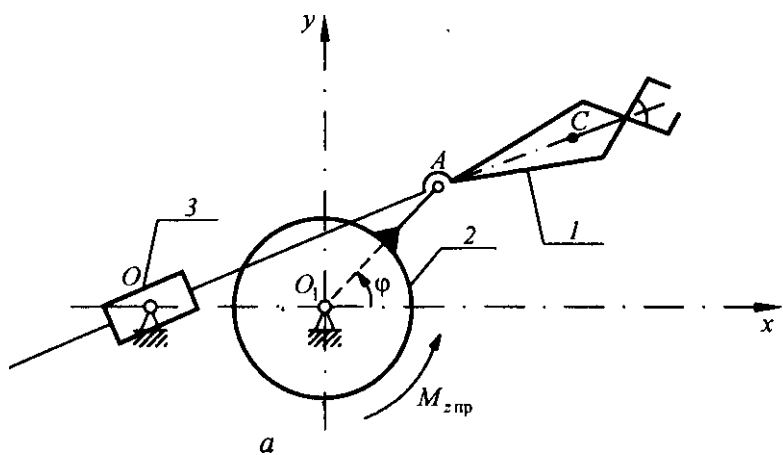


Рис. 16.4

Решение. 1. В рассматриваемом механизме маховик 2 совершает вращательное движение вокруг оси O_1z , а рычаг 1 — плоское. В расчетной схеме, приведенной на рис. 16.4, б, выбрана полярная система координат с центром в точке O и горизонтальной полярной осью, а в системе сил, приложенных к телу 1, показаны лишь силы, лежащие в плоскости движения рычага. При этом реакция цилиндрического шарнира A представлена в виде двух составляющих $\bar{R}_r$ и $\bar{R}_p$, направленных по соответствующим осям полярной системы координат, а реакция муфты 3 — трансверсальной составляющей $\bar{N}_p$. Дифференциальные уравнения плоского движения рычага 1 (16.5) и (16.7), так как здесь полярный угол θ является и углом поворота тела 1, запишутся так:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}_C - r_C \dot{\theta}^2) &= R_r; \\ m(r_C \ddot{\theta} + 2\dot{r}_C \dot{\theta}) &= R_p + N_p; \\ J_{CZ} \ddot{\theta} &= -R_p L - N_p r_C, \end{aligned}$$

где J_{CZ} — момент инерции рычага 1 относительно оси CZ .

На рисунке видно, что полярная координата центра масс C рычага 1 $r_C = OC = 2L \cos \theta + L$, а полярный угол $\theta = \varphi/2$. По условию задачи $\dot{\theta} = \omega = \text{const}$ и, следовательно, $\ddot{\theta} = 0$, а $\theta = \omega t$. При этом можно записать $\dot{r}_C = -2L\omega \sin \theta$, $\ddot{r}_C = -2L\omega^2 \cos \theta$.

С учетом полученных соотношений из системы уравнений найдем зависимости для проекций реакций шарнира A и муфты 3 на оси полярной системы координат:

$$\begin{aligned} R_r &= m(\ddot{r}_C - r_C \dot{\theta}^2) = -mL\omega^2(4 \cos \theta + 1); \\ R_p &= \frac{2m\dot{r}_C \dot{\theta}}{1 - L/r_C} = -2mL\omega^2(2 \cos \theta + 1) \operatorname{tg} \theta; \\ N_p &= -R_p \frac{L}{r_C} = 2mL\omega^2 \operatorname{tg} \theta. \end{aligned}$$

2. В соответствии с расчетной схемой, приведенной на рис. 16.4, в, дифференциальное уравнение (16.3) вращательного движения маховика 2 вокруг оси O_1z имеет вид

$$J_{O_1z} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = M_{\text{зп}} + R_r L \sin \theta - R_p L \cos \theta,$$

где J_{O_1z} — момент инерции маховика 2 относительно оси его вращения O_1z ; $\varphi = 2\theta = 2\omega t$, $\ddot{\varphi} = 0$. Отсюда

$$M_{\text{зп}} = -R_r L \sin \theta + R_p L \cos \theta.$$

Полученные выражения для проекций реакций шарнира A , муфты 3 и момента сил от привода зависят от угловой скорости ω и угла θ поворота рычага 1 и являются неявными функциями времени. Несложно получить те же зависимости как функции угла φ поворота маховика 2 . В явной форме зависимости этих параметров от времени слишком громоздки и здесь не приводятся (читатель может вывести их самостоятельно).

16.2. Сферическое движение твердого тела

Задачи динамики сферического движения твердого тела имеют более высокий уровень сложности в сравнении с рассмотренными выше. Дифференциальные уравнения динамики сферического движения твердого тела являются нелинейными, и для них, как правило, не удастся найти общего аналитического решения в элементарных функциях. Поэтому теперь такие задачи решают в основном численными методами, а известные аналитические решения используют для выработки качественных представлений о возможном характере движения твердого тела в близких физических условиях.

Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела

Влияние внешних сил на кинематические характеристики сферического движения твердого тела вокруг точки O , неподвижной в инерциальной системе отсчета, изучим с помощью теорем об изменении главного момента количества движения и кинетической энергии для системы материальных точек (см. § 15.5, 15.6):

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{L}_O, \quad \dot{T} = W^{(e, i)},$$

поскольку они позволяют исключить из уравнений динамики силы, сходящиеся в точке O .

Помимо инерциальной системы отсчета S_0 с осями Ox , Oy , Oz и ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ введем жестко связанную с твердым телом вспомогательную систему координат S с началом в точке O , осями OX , OY , OZ и ортами $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$. Угловая скорость системы S относительно системы S_0 тождественно равна угловой скорости самого тела $\vec{\omega}$. Система S удобна тем, что в ней постоянны три

осевых J_X, J_Y, J_Z и три центробежных J_{XY}, J_{XZ}, J_{YZ} момента инерции тела.

Направим оси системы S не произвольно, а так, чтобы они совпадали с главными осями инерции твердого тела в точке O . В таких осях для твердого тела упрощается расчет проекций его главного момента количества движения относительно точки O и его кинетической энергии:

$$K_X = A\omega_X; K_Y = B\omega_Y; K_Z = C\omega_Z, \quad (16.9)$$

$$T = 0,5K_O\omega \cos \alpha = 0,5(\omega_X K_X + \omega_Y K_Y + \omega_Z K_Z). \quad (16.10)$$

Здесь и далее буквами A, B, C обозначены соответствующие осевые моменты инерции тела относительно трех ортогональных главных осей инерции. При $A = B$ эллипсоид инерции тела в точке O имеет форму поверхности вращения вокруг оси OZ , которую в этом случае называют *осью динамической симметрии* твердого тела, а само тело — динамически симметричным. На практике для выполнения равенства $A = B$ телу из однородного материала придают форму тела вращения.

Согласно (16.9), (16.10), вектор $\bar{K}_O$ образует острый угол α с вектором $\bar{\omega}$. При этом $\bar{K}_O$ параллелен главной оси инерции тела, если $\bar{\omega}$ направлен по этой оси инерции тела, и $\bar{K}_O$ перпендикулярен главной оси инерции тела, если ей перпендикулярен $\bar{\omega}$.

В соответствии с формулой Бура, запись вектора $\bar{K}_O$ твердого тела в проекциях на оси системы S (см. (16.9)) влечет за собой необходимость применения теоремы о его изменении в специальном виде

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O,$$

предполагающем последующее проецирование именно на оси системы S :

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_X + (C - B)\omega_Y\omega_Z &= L_X; \\ B\dot{\omega}_Y + (A - C)\omega_Z\omega_X &= L_Y; \\ C\dot{\omega}_Z + (B - A)\omega_X\omega_Y &= L_Z. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Систему уравнений (16.11) называют *динамическими уравнениями Эйлера*. Они устанавливают связь между моментами

внешних сил и проекциями угловой скорости $\bar{\omega}$ тела. Каждое уравнение системы (16.11) содержит произведение проекций вектора $\bar{\omega}$, поэтому динамические уравнения Эйлера являются нелинейными дифференциальными уравнениями относительно этих проекций.

Но поскольку расчет проекций вектора $\bar{\omega}$ на подвижные оси системы S не является конечной целью анализа, ибо остается нерешенной задача о пространственной ориентации этих осей, то динамические уравнения Эйлера дополняют *кинематическими уравнениями Эйлера* (4.8), устанавливающими связь между проекциями вектора $\bar{\omega}$ и скоростями изменения углов Эйлера. Относительно углов Эйлера система (4.8) также является системой нелинейных дифференциальных уравнений, поскольку содержит тригонометрические функции углов.

Для простоты далее полагаем, что вектор $\bar{L}_O$ явно зависит только от времени t и параметров кинематики.

К настоящему времени известны только три случая совместной интегрируемости этих систем в аналитическом виде для тела с произвольным или специальным соотношением главных моментов инерции при произвольных начальных условиях для углов Эйлера и их первых производных по времени, когда вектор $\bar{L}_O$ представляет собой момент единственной силы — силы тяжести тела в однородном поле.

1. *Случай Эйлера*: форма эллипсоида инерции в точке O — любая, $\bar{L}_O \equiv 0$.

2. *Случай Лагранжа*: форма эллипсоида инерции в точке O — поверхность вращения, центр масс тела расположен на оси динамической симметрии.

3. *Случай Ковалевской**: форма эллипсоида инерции в точке O — поверхность вращения с осью динамической симметрии OZ , причем $A = B = 2C$, центр масс расположен в плоскости OXY .

* Общие аналитические решения системы динамических и кинематических дифференциальных уравнений с произвольными начальными условиями предложены Л. Эйлером в 1756 г., Ж. Лагранжем в 1784 г. и С. Ковалевской в 1889 г. Решение С. Ковалевской получило наивысшую оценку в конкурсе, объявленном академией наук Франции.

В связи с тем, что теорема об изменении вектора $\bar{K}_O$ имеет инвариантную запись для случаев движения механической системы относительно инерциальной системы отсчета S_0 (точка O неподвижна в S_0) и относительно осей Кенига (точка O является центром масс механической системы), система дифференциальных уравнений сферического движения (16.11) применима и для изучения сферического движения твердого тела относительно осей Кенига. Поскольку запись теоремы об изменении кинетической энергии также инвариантна для указанных вариантов систем отсчета движения, то последующее изложение данной темы следует считать справедливым для двух физически различных случаев: когда точка O твердого тела неподвижна в инерциальной системе отсчета и когда она неподвижна в осях Кенига, т. е. является центром масс тела.

Случай Эйлера. Движение по инерции

Рассмотрим простейший случай системы (16.11), когда на некотором интервале времени $\bar{L}_O(t) \equiv 0$, а следовательно, $L_x \equiv L_y \equiv L_z \equiv 0$ и

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= 0; \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= 0; \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Сферическое движение твердого тела, подчиненное уравнениям (16.12), называют *случаем Эйлера*. Согласно (16.12), кинематические параметры движения тела не зависят от внешних сил, поэтому случай Эйлера иногда называют также *сферическим движением тела по инерции*.

Система (16.12) принципиально может быть решена относительно трех неизвестных функций времени t для проекций вектора $\bar{\omega}$. Однако, если среди моментов инерции A, B, C нет одинаковых, то ее общее аналитическое решение (т. е. пригодное для любых начальных условий) представимо через специальные функции Якоби. При этом движение тела может быть как периодическим, так и непериодическим.

Первые интегралы в случае Эйлера. Несмотря на то что система уравнений (16.12) не имеет общего решения в элементарных функциях, путем несложных преобразований (16.12) можно вывести два независимых, достаточно простых алгебраических соотношения в элементарных функциях от проекций вектора $\vec{\omega}$. Такие соотношения называют первыми интегралами уравнений (16.12), поскольку, являясь прямым следствием (16.12), они уже не содержат производных от неизвестных проекций вектора $\vec{\omega}$. Ниже они используются для анализа кинематических параметров движения твердого тела.

Первые интегралы системы (16.12) легко вывести косвенным образом, опираясь на общую запись теорем об изменении главного момента количеств движения относительно точки O ($\dot{\vec{K}}_O = \vec{L}_O$) и об изменении кинетической энергии ($\dot{T} = W^{(e,i)}$). Применим эти теоремы для исследуемого твердого тела в системе отсчета S_0 . Мощность внутренних сил твердого тела равна нулю, а мощность внешних сил можно рассчитать через мощность эквивалентной системы сил, т. е. с помощью главного вектора и главного момента внешних сил: $W^{(e,i)} = W^{(e)} = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{L}_O \cdot \vec{\omega}$. В случае Эйлера $\vec{v}_O \equiv 0$, $\vec{L}_O \equiv 0$, поэтому $W^{(e,i)} \equiv 0$. Тогда теоремы имеют очевидные интегралы

$$\overline{\vec{K}}_O \equiv \text{const}, \quad 2T \equiv \text{const}. \quad (16.13)$$

Физический смысл этих интегралов состоит в том, что пока $\vec{L}_O \equiv 0$, вектор главного момента количеств движения относительно точки O и кинетическая энергия тела остаются постоянными, т. е. нетривиальное движение тела в случае Эйлера безостановочно. Однако, сохраняя модуль и направление в инерциальном пространстве, вектор $\vec{K}_O$ может изменять направление по отношению к движущемуся телу.

Выразим (16.13) через проекции векторов $\vec{K}_O$ и $\vec{\omega}$ на главные оси инерции тела. Для этого первое уравнение (16.13) умножим скалярно само на себя:

$$\vec{K}_O \cdot \vec{K}_O = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 \equiv \text{const}, \quad (16.14)$$

а во втором уравнении применим формулу (16.10):

$$2T = K_O \omega \cos \alpha = \omega_X K_X + \omega_Y K_Y + \omega_Z K_Z \equiv \text{const}. \quad (16.15)$$

Для главных осей инерции тела эти интегралы имеют вид

$$K_O^2 = (A\omega_X)^2 + (B\omega_Y)^2 + (C\omega_Z)^2 \equiv \text{const}; \quad (16.16)$$

$$2T = A\omega_X^2 + B\omega_Y^2 + C\omega_Z^2 \equiv \text{const} \quad (16.17)$$

и представляют собой ограничения для проекций угловой скорости тела на оси системы S , закон движения которых пока неизвестен.

Соотношения (16.16), (16.17) можно вывести непосредственно из (16.12). Например, умножив каждое уравнение (16.12) на соответствующую проекцию угловой скорости $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$, а затем, сложив все три полученные уравнения и проинтегрировав, находим (16.17). Если же каждое уравнение системы (16.12) умножить соответственно на $A\omega_X, B\omega_Y, C\omega_Z$, а затем сложить и проинтегрировать, то получим (16.16).

Регулярная прецессия и стационарное вращение при $A = B$. Покажем, что в случае Эйлера для динамически симметричного тела система дифференциальных уравнений сферического движения имеет общее решение в элементарных функциях, справедливое при произвольных начальных условиях.

При $A = B$ тип формы эллипсоида вращения может быть задан параметром $e = (C - A)/A$, $-1 \leq e \leq 1$. Значение $e = 0$ соответствует шаровому эллипсоиду инерции, $-1 \leq e < 0$ — эллипсоиду,

* К настоящему времени большая часть известных решений задач динамики сферического движения получена лишь для динамически симметричного тела. Анализ движения тела при условии $A = B$ посвящена теория гироскопа. Впервые термин "гироскоп" применил французский физик Ж. Фуко в 1852 г., назвав им сферический маятник, регистрирующий в закрытом помещении вращение Земли относительно инерциального пространства. В переводе с греческого гироскоп означает указатель вращения (*гиро*с — вращение, *скопео* — вижу).

Теперь гироскопом традиционно называют динамически симметричное твердое тело, совершающее сферическое движение вокруг неподвижной точки, расположенной на оси динамической симметрии. Теорию гироскопа используют для анализа динамики тяжелого волчка, летящего снаряда, планет Солнечной системы, ротора в упругих опорах, гироскопических приборов и др. Гироскопические приборы позволяют регистрировать движение корпуса прибора относительно инерциального пространства.

вытянутому вдоль оси OZ , а $0 < e \leq 1$ — эллипсоиду, сплюснутому вдоль оси OZ . Значения $e = -1$ и $e = 1$ соответствуют центральным эллипсоидам инерции тонкого прямого стержня и тонкой однородной пластины с двумя осями симметрии в ее плоскости (например, круглый диск, кольцо, квадрат и т. п.).

Свойство динамической симметрии тела позволяет проанализировать динамику его сферического движения в случае Эйлера и в случае Лагранжа с применением геометрического образа подвижной координатной плоскости OY_2Z_2 (плоскости Π) системы координат $S_2 (OX_2Y_2Z_2)$, используемой в системе углов Эйлера для отсчета угла φ (рис. 16.5):

$$S_0 \xrightarrow{\psi} S_1 \xrightarrow{\theta} S_2 \xrightarrow{\varphi} S.$$

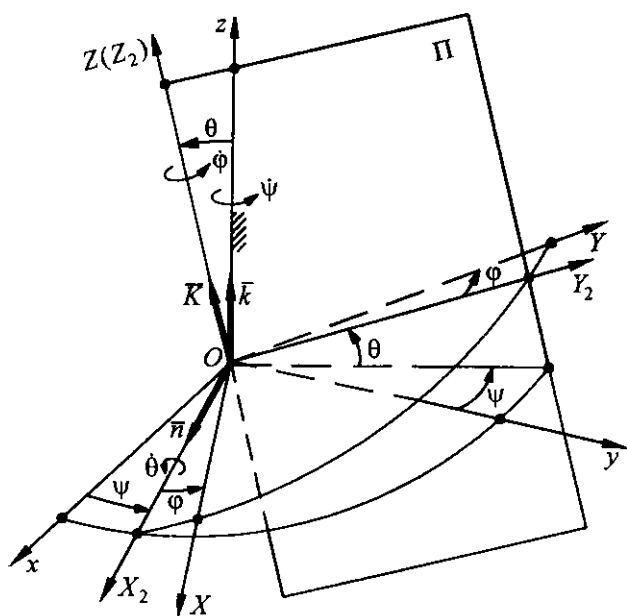


Рис. 16.5

Плоскость Π проходит через неподвижную ось Oz и перпендикулярна линии узлов — оси OX_2 , единичный орт которой

обозначают символом $\bar{n}$. Система S_2 вращается относительно системы S_0 с угловой скоростью $\bar{\Omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\theta}\bar{n}$, а твердое тело и система S вращаются относительно системы S_2 с угловой скоростью $\dot{\phi}\bar{K}$. Для динамически симметричного тела оси системы S_2 также являются его главными осями инерции.

Ниже в случае Эйлера доказывается, а в случае Лагранжа предполагается, что при движении тела угол нутации не изменяется:

$$\theta \equiv \text{const} = \theta_0; \quad \dot{\theta} \equiv 0. \quad (16.18)$$

При постоянном θ

$$\bar{\Omega} = \dot{\psi}\bar{k}; \quad \bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\phi}\bar{K}; \quad (16.19)$$

$$\omega_{x2} \equiv 0; \quad \omega_{y2} = \dot{\psi} \sin \theta_0; \quad \omega_{z2} = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta_0. \quad (16.20)$$

Поэтому оба вектора $\bar{\omega}$ и $\bar{K}_O$ расположены в плоскости Π , движение которой относительно системы S_0 есть вращение вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью прецессии $\bar{\Omega}$. Ниже будет доказано, что в рассматриваемых физических условиях векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{K}_O$ не только расположены в плоскости Π , но и неподвижны в ней. Поэтому скорости изменения удовлетворяют формуле Эйлера для расчета производной вектора постоянного модуля:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\Omega} \times \bar{\omega}; \quad (16.21)$$

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{\Omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O. \quad (16.22)$$

В (16.22) вектор $\bar{L}_O$ включен на основании теоремы об изменении главного момента количеств движений системы материальных точек. Формула (16.22) отражает влияние внешних сил на угловую скорость движения оси динамической симметрии твердого тела, когда вектор $\bar{K}_O$ неподвижен в плоскости Π .

Для динамически симметричного тела в случае Эйлера дифференциальные уравнения сферического движения и их первые интегралы примут вид

$$\dot{\omega}_x = -e\omega_y\omega_z; \quad \dot{\omega}_y = e\omega_z\omega_x; \quad \dot{\omega}_z = 0; \quad (16.23)$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 (C/A)^2 \equiv \text{const}; \quad (16.24)$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 C/A \equiv \text{const}. \quad (16.25)$$

Из последнего уравнения (16.23) следует

$$\omega_z \equiv \text{const} = \omega_c. \quad (16.26)$$

На основании (16.25), (16.26) получаем

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 \equiv \text{const} = \omega_A^2. \quad (16.27)$$

Решения (16.26) и (16.27) означают, что при движении тела модуль его угловой скорости вращения остается постоянным, т. е.

$$\omega^2 \equiv \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \equiv \text{const}.$$

Тогда, согласно (16.15) и (16.17), вектор $\bar{\omega}$ образует с неподвижным вектором $\bar{K}_O$ постоянный угол α . Следовательно, при $\alpha \neq 0$ постоянный по модулю вектор $\bar{\omega}$ может лишь вращаться вокруг вектора $\bar{K}_O$, а при $\alpha = 0$ он совпадает с неподвижным вектором $\bar{K}_O$, т. е. в обоих случаях поведение вектора $\bar{\omega}$ соответствует уравнению (16.21), в котором $\bar{\Omega}$ — пока неизвестная угловая скорость вектора $\bar{\omega}$.

Направим ось Oz системы S_0 по вектору $\bar{K}_O$, а оси OY_2 и OZ_2 системы S_2 так, чтобы проекции $K_{Y_2} = A\omega_{Y_2}$ и $K_{Z_2} = K_Z = C\omega_c = \text{const}$ были неотрицательны (рис. 16.6). Тогда будут неотрицательны угол нутации θ , проекции $\omega_{Y_2} = \omega_A$ и $\omega_z = \omega_c$.

Из формулы $K_Z = K_O \cos \theta$, связывающей модуль вектора с его проекцией на ось OZ , следует, что при постоянных K_Z и K_O угол нутации в процессе движения тела не изменяется:

$$\theta \equiv \text{const} = \theta_0 \geq 0; \quad \dot{\theta} \equiv 0.$$

При угловой скорости нутации $\dot{\theta} \equiv 0$ вектор $\bar{\omega} = \psi \bar{k} + \phi \bar{K}$ расположен в плоскости Π , образуя с вектором $\bar{K}_O$ постоянный угол α . Это означает, что вектор $\bar{\omega}$ неподвижен в плоскости Π :

$$\begin{aligned} \omega_{X_2} &\equiv 0; \quad \omega_{Y_2} = \omega \sin(\theta_0 - \alpha) = \psi \sin \theta_0 \equiv \text{const} = \omega_A \geq 0; \\ \omega_{Z_2} &= \omega \cos(\theta_0 - \alpha) = \phi + \psi \cos \theta_0 \equiv \text{const} = \omega_c \geq 0, \end{aligned} \quad (16.28)$$

и поэтому

$$\Omega_z = \dot{\psi} \equiv \text{const} = \dot{\psi}_0 \geq 0; \quad \dot{\phi} \equiv \text{const} = \dot{\phi}_0. \quad (16.29)$$

Соотношение (16.31) указывает на то, что угловая скорость собственного вращения $\dot{\phi}\bar{K}$ в зависимости от формы эллипсоида инерции тела либо совпадает по направлению с осью OZ при $C < A$ — *прямая регулярная прецессия*, либо противоположна ей при $C > A$ — *обратная регулярная прецессия*.

Итак, на основании формул (16.28) – (16.31) параметры регулярной прецессии удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \theta_0 &= (e + 1) \omega_C / \omega_A; \quad \Omega_z = \dot{\psi}_0 = \omega_A / \sin \theta_0; \quad \dot{\phi}_0 = -e \omega_C; \\ \psi &= \omega_A t / \sin \theta_0 + \psi_0; \quad \phi = -e \omega_C t + \phi_0. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Из двух первых формул (16.32) следует, что если $\omega_A \rightarrow 0$, то угол $\theta_0 \rightarrow 0$, а угловая скорость прецессии

$$\Omega_z = \dot{\psi}_0 \rightarrow (1 + e) \omega_C. \quad (16.33)$$

Наглядное представление о регулярной прецессии можно получить, рассматривая, например, твердое тело в виде однородного кругового конуса, которое равномерно перекатывается без скольжения по внешней поверхности неподвижного кругового конуса при условии, что вершины конусов совпадают в точке O (рис. 16.7). Ось симметрии подвижного конуса является его осью динамической симметрии OZ . В каждый момент времени вектор $\bar{\omega}$ направлен по линии контакта конусов. При регулярной прецессии вектор главного момента количества движения тела относительно вершины O неподвижен, т. е. его направление не зависит от текущего положения тела. Следовательно, в этом случае по соображениям симметрии он должен быть направлен по оси Oz неподвижного конуса. Подвижная плоскость Π проходит через оси OZ и Oz конусов. Постоянный угол между этими осями является углом нутации θ . Равномерное вращение осн OZ вокруг оси Oz соответствует изменению угла прецессии ψ , а вращение тела вокруг оси OZ относительно плоскости Π — изменению угла собственного вращения ϕ . Если неподвижный конус расположен по отношению к подвижному внешним образом (см. рис. 16.7, а), то его движение соответствует прямой регулярной прецессии, а если внутренним образом (случай полого подвижного конуса) — то обратной регулярной прецессии (см. рис. 16.7, б).

Пусть при этом $\omega_A = \omega_C = 1$ рад/с, $A = B = 1$ кг·м², $C = 2$ кг·м² (рис. 16.8). Тогда $\omega = \sqrt{2}$ рад/с, $\gamma = \operatorname{arctg}(\omega_A / \omega_C) = 45^\circ$, $e = (C - A) / A = 1$, $K_{r2} = A \omega_A = 1$ Н·м·с, $K_{z2} = C \omega_C = 2$ Н·м·с, $K_O = \sqrt{5}$ Н·м·с, $\operatorname{tg} \theta_0 = K_{r2} / K_{z2} = 0,5$, $\theta_0 = 26,5^\circ$, $\dot{\psi}_0 = \omega_A / \sin \theta_0 = \sqrt{5}$ рад/с, $\dot{\phi}_0 = -e \omega_C = -1$ рад/с, $\alpha = \theta_0 - \gamma = -18,5^\circ$. Можно доказать, что всегда $|\alpha| < 19,28^\circ$.

Этот пример является лишь наглядной иллюстрацией регулярной прецессии. Не следует думать, что для реальных конусов с произвольными углами при вершинах вектор $\vec{K}_O$ подвижного тела будет направлен по оси неподвижного конуса, поскольку угол α не может быть произвольным.

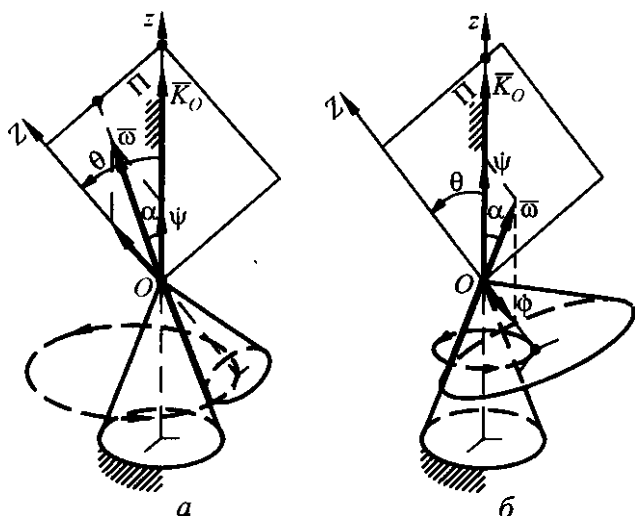


Рис. 16.7

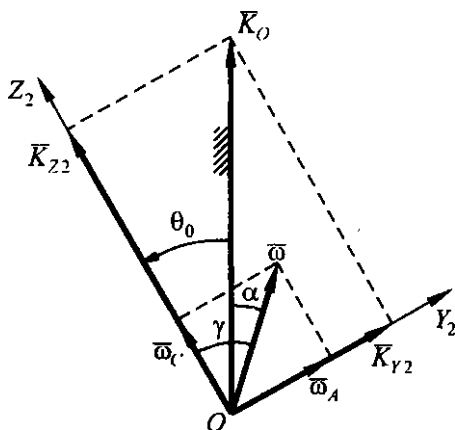


Рис. 16.8

Соотношения (16.32) существенно упрощаются при $e\omega_A\omega_C = 0$. Покажем, что в этом случае регулярная прецессия вырождается в стационарное вращение тела вокруг неподвижной оси Oz , совпадающей по направлению с вектором $\bar{K}_O$, причем с этой осью будет совпадать и одна из осей системы S .

Убедимся, что при $\alpha \equiv \text{const}$ вектор $\bar{\omega}$ имеет постоянное направление. В начальный момент, когда вектор $\bar{\omega}$ направлен по какой-либо главной оси инерции тела ($\omega_A\omega_C = 0$), векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{K}_O$ параллельны, поэтому $\alpha = 0$ и в дальнейшем $\alpha \equiv 0$, т. е. вектор $\bar{\omega}$ неподвижен. Следовательно, движение тела представляет собой равномерное вращение вокруг неподвижной главной оси инерции*.

Исследуем влияние начальных условий на поведение углов Эйлера при стационарном вращении. Рассмотрим два возможных случая, когда ось динамической симметрии OZ совпадает с осью Oz (рис. 16.9, а) и перпендикулярна ей (рис. 16.9, б). Вариант тела с шаровым эллипсоидом инерции ($e = 0$) отнесем к первому случаю.

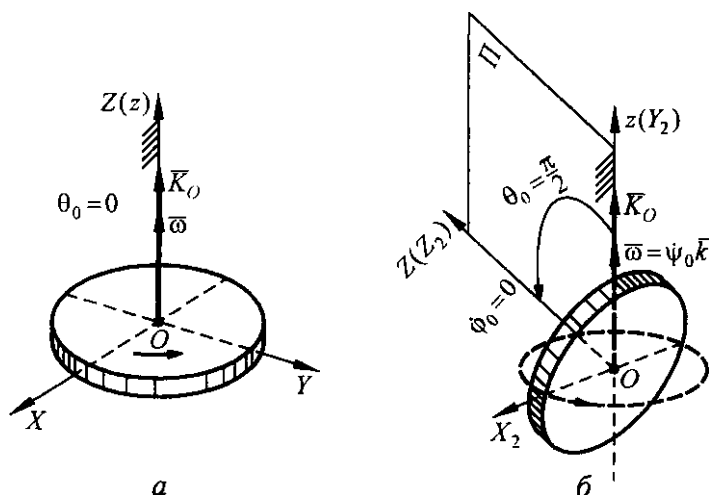


Рис. 16.9

* Примечательно, что такое движение может иметь тело с любой формой эллипсоида инерции в точке O . При этом вращение тела вокруг главной оси инерции со средним значением осевого момента инерции неустойчиво.

При $\theta_0 \equiv 0$ (см. рис. 16.9, а) $\omega_A = 0$ и $\omega_C = \omega$. Поэтому, согласно (16.32) и (16.33),

$$\dot{\psi}_0 = (1 + e)\omega; \quad \dot{\phi}_0 = -e\omega.$$

Отметим, что при $\sin \theta_0 \equiv 0$ кинематические уравнения Эйлера имеют вырожденный вид независимо от того, для каких осей (системы S_O или S) они записаны, и без учета соотношения (16.33) не имеют однозначного решения.

При $\theta_0 \equiv \pi/2$ (см. рис. 16.9, б) $\omega_A = \omega$ и $\omega_C = 0$. Поэтому, согласно (16.32),

$$\dot{\psi}_0 = \omega, \quad \dot{\phi}_0 = 0.$$

Рассмотренные случаи стационарного вращения нашли применение в гироскопических приборах для решения задач навигации благодаря естественной способности динамически симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой O при условии $\bar{L}_O \equiv 0$ сохранять в инерциальном пространстве направление главной центральной оси инерции без приложения каких-либо управляющих сил, если сообщить телу вращение только вокруг нее. Наглядным примером может служить многовековая стабильность направлений осей суточного вращения у планет Солнечной системы по отношению к эклиптике. Этим объясняется периодическая смена времен года на континентах Земли.

Заметим, однако, что при $\bar{L}_O \equiv 0$ таким же свойством обладают любые оси любого твердого тела, если это тело до начального момента времени не имело вращения относительно инерциального пространства. Преимущество первого технического решения перед вторым состоит в том, что при нестрогом соблюдении условия $\bar{L}_O \equiv 0$ направление оси вращения будет тем более стабильным, чем больше первоначально заданная угловая скорость. Указанное свойство центральной оси динамической симметрии вращающегося одиночного тела при $\bar{L}_O \neq 0$ пояснено ниже.

Случай Лагранжа. Тяжелый волчок

К случаю Лагранжа относят движение твердого тела с одной неподвижной точкой O в однородном поле силы тяжести при

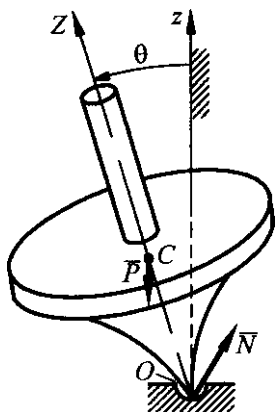


Рис. 16.10

условии, что центр тяжести тела (точка C) лежит на оси его динамической симметрии OZ . Наглядным примером может служить движение быстровращающегося симметричного тяжелого волчка ($A = B$), опирающегося острым носиком на неподвижную точку O (рис. 16.10). Название «тяжелый волчок» подчеркивает необходимость учета момента его силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ относительно точки O ($OC = l$).

Используем (16.11) для вывода дифференциальных уравнений движения волчка. Считаем, что для волчка главный момент внешних сил относительно точки O равен моменту постоянной силы тяжести $\bar{P}$: $\bar{L}_O = \bar{M}_O(\bar{P}) = \overline{OC} \times \bar{P}$. Направим ось Oz вертикально вверх, а ось OZ так, чтобы в системе S $Z_C = +l$. Моменты силы $\bar{P}$ относительно осей OZ и Oz постоянно равны нулю: $M_Z(\bar{P}) = M_z(\bar{P}) = 0$.

Получим выражения для моментов силы $\bar{P}$ относительно осей OX, OY :

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \overline{OC} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ 0 & 0 & l \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = -lP_y\bar{I} + lP_x\bar{J}.$$

Проекции силы $\bar{P}$ на оси системы S равны

$$P_x = -P \sin \theta \sin \varphi; \quad P_y = -P \sin \theta \cos \varphi; \quad P_z = -P \cos \theta. \quad (16.34)$$

Поэтому моменты силы $\bar{P}$ относительно осей OX, OY зависят от θ и φ :

$$M_x = Pl \sin \theta \cos \varphi; \quad M_y = -Pl \sin \theta \sin \varphi,$$

а динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z &= Pl \sin \theta \cos \varphi; \\ A\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= -Pl \sin \theta \sin \varphi; \\ C\dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \quad (16.35)$$

т. е. в данном случае уравнения (4.8) и (16.35) необходимо решать совместно. Прямые методы интегрирования этой системы, состоящей из шести дифференциальных уравнений, при произвольных начальных условиях приводят к эллиптическим интегралам. Интегрирование данной системы является принципиально выполненным, если для нее найдены в явном виде четыре независимых первых интеграла. Тогда дальнейшие расчеты сводятся к решению алгебраической системы относительно четырех независимых неизвестных, в роли которых могут выступать проекции угловой скорости тела и какая-либо комбинация тригонометрических функций от углов Эйлера.

К числу трех независимых первых интегралов системы (16.35) относят:

1) интеграл сохранения полной механической энергии

$$E = T + \Pi \equiv \text{const} = E_0,$$

где $\Pi = Pz_c = Pl \cos \theta$ — потенциальная энергия тела;

2) интеграл сохранения главного момента количеств движения тела относительно вертикальной оси Oz

$$K_z = \bar{K}_O \bar{k} = K_x k_x + K_y k_y + K_z k_z = \text{const} = K_z^0;$$

3) интеграл сохранения проекции вектора $\bar{\omega}$ на ось динамической симметрии

$$\omega_z \equiv \text{const} = \omega_c. \quad (16.36)$$

Второй из указанных интегралов следует из теоремы об изменении вектора $\bar{K}_O$, записанной в проекции на неподвижную ось Oz , поскольку $M_z(\bar{P}) \equiv 0$, а третий — из последнего уравнения системы (16.35).

Для кинематических уравнений Эйлера первым интегралом служит соотношение $\bar{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\frac{d\bar{k}}{dt} = -\bar{\omega} \times \bar{k}$, полученному для неподвижного орта $\bar{k}$ на основании формулы Бура для двух систем S_0 и S , и отражающее постоянство модуля орта $\bar{k}$.

Наличие четырех интегралов указывает на существование при произвольных начальных условиях общего аналитического

решения для углов Эйлера. Однако это решение может быть записано лишь через эллиптические функции.

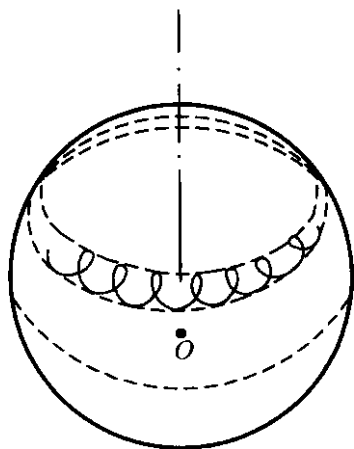


Рис. 16.11

Представление о характере движения центральной оси динамической симметрии волчка при достаточно большой угловой скорости собственного вращения можно получить с помощью рис. 16.11, где показан след одной из ее точек, оставляемый на неподвижной сфере. Поскольку направление этой оси определяется углами прецессии ψ и нутации θ , данный след отражает только их изменение. След не имеет точек возврата и петель самопересечения, пока сохраняется знак $\dot{\psi}$.

Отметим, что к данному случаю также относится пространственное

движение маятника, подвешенного на одной неподвижной точке. Его движение может быть неравномерным вращением — ротацией вокруг неподвижной горизонтальной оси — или периодическими колебаниями — осцилляцией в окрестности нижнего положения равновесия. Последний вариант движения имеет маятник, отпущенный из состояния покоя, при котором ось динамической симметрии отклонена от вертикали. Еще один несложный вариант движения тела в случае Лагранжа — равномерное вращение вокруг вертикальной оси динамической симметрии, когда центр масс расположен ниже точки подвеса. Если центр масс расположен выше точки опоры, то вертикальное направление оси динамической симметрии устойчиво лишь при достаточно быстром вращении («спящий волчок»).

Предыдущая схема анализа движения тела в случае Лагранжа относилась к произвольным начальным условиям. Существует простое решение данной задачи, но для специальных начальных условий. При этом движение волчка внешне выглядит как регулярная прецессия, в связи с чем оно названо *псевдорегулярной прецессией*.

Сначала покажем, что угловая скорость $\vec{\omega}$ тела постоянна по модулю. При условии (16.18) в неподвижной системе S_O аппликата центра масс $z_C = l \cos \theta_0 = \text{const}$, и, следовательно, постоянна не только потенциальная Π , но, согласно интегралу сохранения полной механической энергии, и кинетическая энергия T волчка. А так как в случае Лагранжа $\omega_z = \text{const}$ (см. (16.36)), то на основании выражения (16.25) приходим к выводу, что $\omega_x^2 + \omega_y^2 \equiv \text{const}$ и $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \equiv \text{const}$, т. е. угловая скорость волчка постоянна по модулю.

При $|\vec{\omega}| = \text{const}$ $\omega_{x2} = 0$, $\omega_{z2} = \omega_z = \text{const} = \omega_c$, третья проекция также постоянна: $\omega_{r2} = \text{const} = \omega_A$. Поэтому вектор $\vec{\omega}$, а следовательно, и вектор $\vec{K}_O$ неподвижны в плоскости Π системы S_2 и удовлетворяют соответствующим уравнениям (16.21), (16.22) при вертикальном направлении вектора угловой скорости прецессии $\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{k}$. Заметим, что, согласно уравнению (16.22), регулярная прецессия ($\vec{L}_O = 0$) является частным случаем псевдoreгулярной прецессии ($\vec{L}_O \neq 0$).

Очевидно, что помимо уже перечисленных констант при псевдoreгулярной прецессии $\alpha = \text{const}$; $\dot{\psi} = \text{const} = \dot{\psi}_0$; $\dot{\phi} = \text{const} = \dot{\phi}_0$, т. е. законы изменения углов Эйлера аналогичны случаю регулярной прецессии.

Рассмотрим теперь влияние силы тяжести и начальных значений проекций ω_c , ω_A на постоянные θ_0 , $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\phi}_0$. Раскроем $\vec{L}_O$ в выражении (16.22):

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{\Omega} \times \vec{K}_O = \vec{OC} \times \vec{P}. \quad (16.37)$$

Векторы $\vec{OC}$ и $\vec{P}$ лежат в плоскости Π , поэтому вектор $\vec{M}_O(\vec{P})$ параллелен горизонтальной оси OX_2 , т. е. направлен по линии узлов. В проекции на эту ось выражение (16.37) имеет вид

$$\Omega_{r2} K_{z2} - \Omega_{z2} K_{r2} = Pl \sin \theta_0, \quad (16.38)$$

или

$$[C(\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) - A\dot{\psi}_0 \cos \theta_0] \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 = Pl \sin \theta_0.$$

После сокращения на $\sin \theta_0 \neq 0$ (при $\sin \theta_0 = 0$ имеем случай Эйлера $\vec{L}_O = 0$) получаем

$$[C(\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) - A\dot{\psi}_0 \cos \theta_0] \dot{\psi}_0 = Pl. \quad (16.39)$$

Это уравнение является квадратным относительно $\Omega = \dot{\psi}_0$:

$$(C - A)\Omega^2 \cos \theta_0 + C\dot{\phi}_0 \Omega - Pl = 0. \quad (16.40)$$

При $\cos \theta_0 = 0$ оно имеет один корень $\Omega = Pl/C\dot{\phi}_0$, а при $\cos \theta_0 \neq 0$ — два:

$$\Omega_{1,2} = C \dot{\phi}_0 / [2(C - A) \cos \theta_0] \times \\ \times [-1 \pm \sqrt{1 + 4Pl(C - A) \cos \theta_0 / (C \dot{\phi}_0)^2}].$$

Уравнение (16.40) имеет действительные корни при $\cos \theta_0 \neq 0$, если

$$(C \dot{\phi}_0)^2 + 4Pl(C - A) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (16.41)$$

Соотношение (16.41) является необходимым условием существования псевдорегулярной прецессии. Данный вид движения возможен лишь при достаточно большой угловой скорости $\dot{\phi}_0$ *:

$$\dot{\phi}_0^2 \geq \omega_{\min}^2 = 4Pl \cos \theta_0 (A - C) / C^2. \quad (16.42)$$

Допустим условие (16.42) выполнено, а угловая скорость $\dot{\phi}_0$ настолько высока, что

$$\mu = (\omega_{\min} / \dot{\phi}_0)^2 = 4Pl[(A - C) \cos \theta_0] / (C \dot{\phi}_0)^2 \ll 1. \quad (16.43)$$

Используем малость μ для нахождения корней уравнения (16.40):

$$\Omega_{1,2} = C \dot{\phi}_0 / [2(C - A) \cos \theta_0] [-1 \pm \sqrt{1 + \mu}].$$

Приближенно вычислив дискриминант $\sqrt{1 + \mu} \approx 1 + 0,5\mu$, получаем

$$-1 + (1 + 0,5\mu) \approx 0,5\mu; \quad -1 - (1 + 0,5\mu) \approx -2 - 0,5\mu.$$

Таким образом, корни уравнения (16.39)

$$\Omega_1 \approx -C \dot{\phi}_0 / (C - A) \cos \theta_0 - Pl / (C \dot{\phi}_0); \quad (16.44)$$

$$\Omega_2 \approx Pl / (C \dot{\phi}_0). \quad (16.45)$$

Первое слагаемое в (16.44) не зависит от силы тяжести волчка и соответствует «быстрой» скорости регулярной прецессии (16.31) в случае Эйлера, прямо пропорциональной скорости собственного вращения $\dot{\phi}_0$. Этот вид движения волчка возможен при малом моменте Pl и быстром собственном вращении.

* Установлено, что требование $\dot{\phi}_0^2 \geq 4Pl(A - C) / C^2$ является необходимым и достаточным условием устойчивости «спящего волчка» ($z_c > 0, \theta_0 = 0$). При этом волчок, эллипсоид инерции которого вытянут вдоль оси OZ ($A > C$), должен иметь более высокую скорость собственного вращения, чем волчок с эллипсоидом инерции, сплюснутым вдоль оси OZ ($C > A$).

Второй корень (16.45) соответствует «медленной» прецессии оси динамической симметрии также при малом моменте Pl . Скорость медленной прецессии обратно пропорциональна скорости собственного вращения $\dot{\phi}_0$. Поскольку скорость прецессии в этом случае зависит от силы тяжести, этот вид движения также называют *вынужденной прецессией*.

Дадим математическое объяснение полученным результатам. При условиях (16.18), (16.36) уравнения (16.35) вырождаются в систему линейных дифференциальных уравнений относительно проекций ω_x , ω_y . Ее решение можно представить в виде суммы функций, одна из которых является общим решением однородной, а другая — частным решением неоднородной системы. Общее решение описывает собственное движение, а частное — вынужденное движение.

Формулы (16.44), (16.45) этому полностью соответствуют. На практике при наблюдении за движением быстровращающегося волчка глаза фиксируют именно вынужденную прецессию в виде достаточно медленного движения оси волчка, описывающей конус вокруг вертикали. Собственная (быстрая) регулярная прецессия почти мгновенно затухает из-за естественных потерь на трение.

Таким образом, псевдoreгулярная прецессия обобщает случай регулярной прецессии; она возможна при любом угле нутации, но лишь при специальных начальных условиях.

Приближенная теория гироскопа

Для быстрой оценки параметров движения гироскопа в заданных физических условиях используют приближенные аналитические методы, называемые *приближенной*, или *прецессионной, теорией гироскопа*. При условии быстрого вращения тела она применима для тел с произвольной формой эллипсоида инерции в точке O . В ее основу положены свойства вынужденной регулярной прецессии. Благодаря некоторым допущениям данная теория сводит анализ сферического движения твердого тела к изучению лишь прецессионного движения оси собственного вращения без учета изменений угловой скорости собственного вращения и угла нутации. Приближенная теория гироскопа построена на теореме об изменении вектора $\bar{K}_O$ в форме, аналогичной (16.22):

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{\Omega}_K \times \bar{K}_O = \bar{L}_O. \quad (16.46)$$

Здесь приближенно считают, что неподвижный относительно твердого тела постоянный по модулю вектор $\bar{K}_O$ вращается относительно системы S_0 с угловой скоростью $\bar{\Omega}_K$.

Рассмотрим допущения, которые позволяют обосновать уравнение (16.46).

1. Модуль проекции вектора $\bar{\omega}$ на главную ось инерции OZ тела много больше модулей остальных проекций:

$$\omega_z^2 \gg \omega_x^2 + \omega_y^2. \quad (16.47)$$

Из кинематических уравнений Эйлера в этом случае следует

$$\dot{\varphi}^2 \gg \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2. \quad (16.48)$$

Поэтому в приближенной теории наиболее быстрым считается собственное вращение. Это допущение совпадает с аналогичным требованием в условии существования вынужденной прецессии (16.45). В современных гироскопических приборах угловые скорости собственного вращения роторов достигают 10000 рад/с. Отметим, что неравенству (16.47) могут удовлетворять и сравнительно малые угловые скорости, например для Земли угловая скорость собственного вращения составляет всего $7,26 \cdot 10^{-5}$ рад/с.

Условия (16.47), (16.48) не следует дословно понимать как стремление полностью пренебрегать значениями угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$. Их малость используют только на стадии приближенной оценки модуля и направления вектора $\bar{K}_O$, чтобы затем с помощью вектора $\bar{K}_O$ получить информацию о поведении углов ψ и θ .

2. Проекция вектора $\bar{\omega}$ на главную ось инерции OZ тела постоянна по модулю:

$$\omega_z = \text{const} = \omega_c > 0. \quad (16.49)$$

3. Модуль проекции вектора $\bar{K}_O$ на OZ много больше остальных проекций (рис. 16.13):

$$K_z^2 \gg K_x^2 + K_y^2, \quad (16.50)$$

или

$$(C\omega_z)^2 \gg (A\omega_x)^2 + (B\omega_y)^2.$$

Для тел с соотношением главных моментов инерции $C > A$, $C > B$ условие (16.50) является следствием (16.47).

Из рассмотренных трех вытекают еще два допущения приближенной теории гироскопа.

4. Вектор $\bar{K}_O$ имеет постоянный модуль, равный его проекции на ось собственного вращения OZ :

$$\begin{aligned} K_O &= \sqrt{(A\omega_x)^2 + (B\omega_y)^2 + (C\omega_z)^2} \approx \\ &\approx C\omega_z = C\omega_c = K_z = \text{const.} \end{aligned} \quad (16.51)$$

5. Вектор $\bar{K}_O$ направлен по оси OZ тела:

$$\bar{K}_O = A\omega_x \bar{i} + B\omega_y \bar{j} + C\omega_z \bar{k} \approx C\omega_z \bar{k} = C\omega_c \bar{k}. \quad (16.52)$$

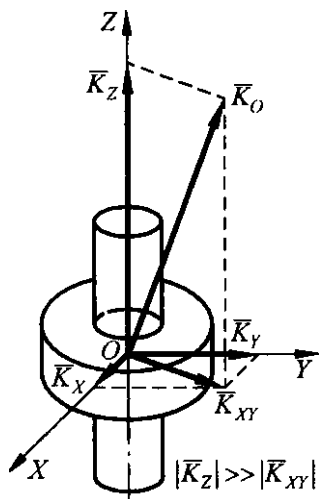


Рис. 16.13

Соотношения (16.51), (16.52) оправдывают возможность применения теоремы об изменении вектора $\bar{K}_O$ в форме (16.46), позволяющей по поведению вектора $\bar{K}_O$ судить о движении оси OZ , так как теперь угловая скорость вращения оси OZ является и угловой скоростью вращения вектора $\bar{K}_O$.

Наконец, еще одно допущение постулирует направление вектора главного момента внешних сил $\bar{L}_O$.

6. Вектор главного момента внешних сил $\bar{L}_O$ перпендикулярен к вектору $\bar{K}_O$. Неперпендикулярность $\bar{L}_O$ и $\bar{K}_O$ приводит к изменению модуля $\bar{K}_O$, что противоречит четвертому допущению.

В приближенной теории гироскопа многие выводы строятся на основании геометрической интерпретации теоремы об изменении главного момента количеств движений, предложенной французским ученым Резалем (см. § 15.5). Так как в рамках этой теории вектор $\bar{K}_O$ постоянен по модулю, его изменение может быть вы-

звано лишь поворотом, т. е. скорость движения конца вектора $\bar{K}_O$, по его годографу может быть вычислена по формуле Эйлера

$$\bar{u} = \bar{\Omega} \times \bar{K}_O, \quad (16.53)$$

указывающей на то, что ненулевой вектор $\bar{u}$ обязательно перпендикулярен вектору $\bar{K}_O$ (рис. 16.14). Здесь $\bar{u} = \dot{\bar{K}}_O$, а, согласно теореме об изменении главного момента количеств движений,

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{L}_O. \quad (16.54)$$

С учетом (16.53), (16.54) в приближенной теории гироскопа

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{u} = \bar{\Omega} \times \bar{K}_O = \bar{L}_O. \quad (16.55)$$

С помощью (16.55) несложно рассчитать скорость прецессии оси OZ гироскопа по известному моменту внешних сил $\bar{L}_O$ и дополнительные силовые воздействия вращающегося ротора на пару опорных подшипников при известной скорости поворота собственной оси вращения OZ ротора. При этом следует иметь в виду, что по формуле (16.55) вектор $\bar{\Omega}$ можно рассчитывать лишь с точностью до $\lambda \omega_z \bar{K}$, где λ — произвольное число. В самом деле, так как векторы $\omega_z \bar{K}$ и $\bar{K}_O$ коллинеарны, то

$$(\bar{\Omega} + \lambda \omega_z \bar{K}) \times \bar{K}_O = \bar{\Omega} \times \bar{K}_O.$$

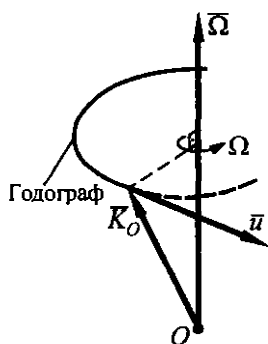


Рис. 16.14

Формула (16.55) позволяет объяснить ряд важных свойств прецессионного движения оси OZ .

1. Если на некотором интервале времени $\bar{L}_O \equiv 0$, то $\bar{u} \equiv 0$. Следовательно, на этом интервале времени ось OZ не имеет вынужденной прецессии ($\Omega \equiv 0$) и сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета. Данное свойство используется в технике при построении навигационных систем.

2. Вынужденное прецессионное движение оси OZ не обладает инерционным свойством. Пока $\bar{L}_O \neq 0$, то $\bar{u} \neq 0$, $\bar{\Omega} \neq 0$ и ось OZ прецессирует. Но как только $\bar{L}_O \equiv 0$, то сразу $\bar{u} \equiv 0$, $\bar{\Omega} \equiv 0$ и

ось OZ становится неподвижной, в отличие от невращающегося тела с одной неподвижной точкой, которое после, например, удара начинает двигаться.

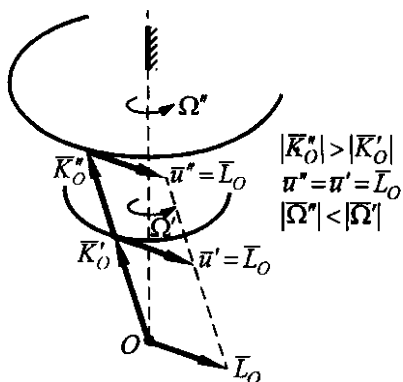


Рис. 16.15

3. Чем больше модуль скорости $\dot{\phi}$ собственного вращения тела ($\omega_c \approx |\dot{\phi}|$), тем больше главный момент количеств движений $\bar{K}_O$ и меньше скорость прецессии $\bar{\Omega}$ при одном и том же главном моменте внешних сил $\bar{L}_O$ (рис. 16.15).

4. Если на точку D , расположенную на оси OZ вращающегося гироскопа, подействовать силой $\bar{F}$ перпендикулярно оси OZ (рис. 16.16), то точка D начнет двигаться не в направлении силы $\bar{F}$, а перпендикулярно ей — в направлении вектора момента $\bar{L}_O$ силы $\bar{F}$ относительно неподвижной точки O .

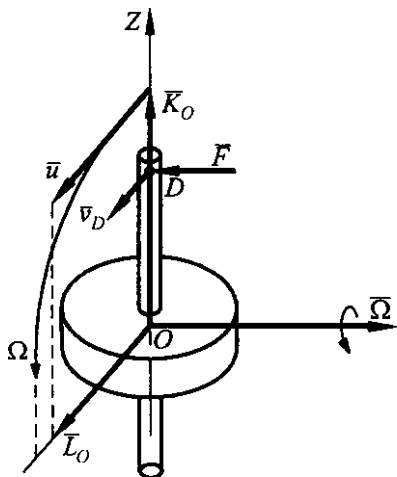


Рис. 16.16

5. Вектор $\bar{\Omega}$ вынужденной прецессии оси OZ перпендикулярен вектору $\bar{L}_O$. Для быстрого нахождения направления вектора $\bar{\Omega}$ по известным направлениям векторов $\bar{K}_O$ и $\bar{L}_O$ можно использовать правило Н. Е. Жуковского, согласно которому направление круговой стрелки скорости

прецессии $\bar{\Omega}$ совпадает с направлением кратчайшего поворота вектора $\bar{K}_O$ к вектору $\bar{L}_O$ (рис. 16.17).

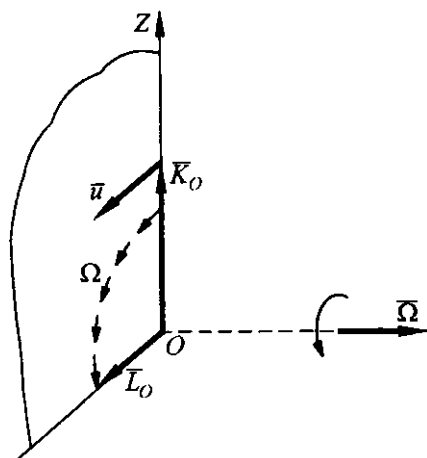


Рис. 16.17

Приведем примеры анализа динамики гироскопа с использованием формулы (16.55).

Пример 16.4. Рассчитать угловую скорость вынужденной прецессии волчка (рис. 16.18) в случае Лагранжа, если ось OZ динамической симметрии тяжелого быстро вращающегося волчка составляет с вертикальной осью Oz инерциальной системы произвольный угол θ ($\sin \theta \neq 0$) и скорость вращения волчка вокруг оси OZ $\omega_z = \text{const} = \omega_c > 0$.

Решение. В выражении (16.55) нам известен горизонтальный вектор $\bar{L}_O = \overline{OC} \times \bar{P}$, модуль которого зависит от угла θ наклона оси. Рассчитаем кинематику движения оси волчка, т. е. законы изменения углов нутации и прецессии, полагая, что вектор $\bar{K}_O$ направлен по оси OZ волчка.

Из условия $\bar{u} = \bar{L}_O$ следует, что вектор $\bar{u}$ горизонтален, поэтому годограф вектора $\bar{K}_O$ является горизон-

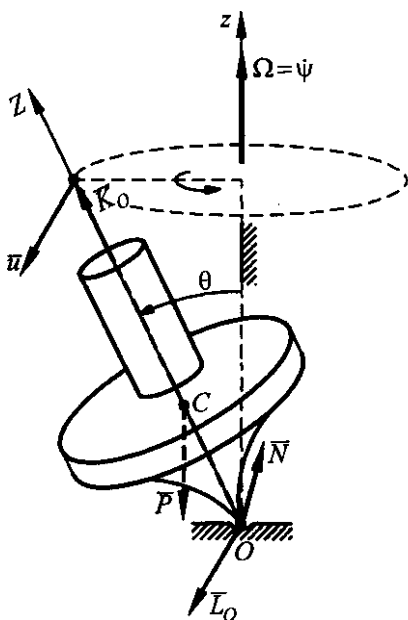


Рис. 16.18

тальной кривой. Поскольку модуль вектора $\vec{K}_O$ остается постоянным, то этой кривой может быть только окружность с центром на вертикальной оси Oz . Угол нутации при этом будет постоянным и равным своему начальному значению: $\theta \equiv \text{const} = \theta_0$.

Таким образом, движение оси OZ волчка сопровождается изменением лишь угла прецессии ψ . Скорость $\vec{\Omega}$ вынужденного вращения (вынужденной прецессии) оси волчка направлена по вертикали.

Найдем модуль скорости прецессии $\vec{\Omega}$ оси волчка OZ вокруг оси Oz с помощью основной формулы приближенной теории гироскопа (16.55). Сравним модули векторов $\vec{u}$ и $\vec{L}_O$:

$$|\vec{u}| = |\Omega K_O \sin \theta_0| = |\vec{L}_O| = |Pl \sin \theta_0|.$$

После сокращения на $\sin \theta_0 \neq 0$ имеем

$$|\Omega| = |Pl/K_O| = |Pl/K_Z| = |Pl/(C\omega_c)| = \text{const}.$$

При указанном на рис. 16.18 направлении вектора $\vec{u}$, если смотреть на волчок сверху, равномерное вращение вектора $\vec{K}_O$ вокруг вертикали с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ будет происходить в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, т. е. векторы $\vec{\Omega}$, $\vec{K}_O$, $\vec{L}_O$ образуют правую тройку: $\vec{\Omega} \times \vec{K}_O = \vec{L}_O$.

Полученный результат для Ω совпадает с выражением (16.45) для вынужденной прецессии волчка, т. е. скорость прецессии постоянна, не зависит от угла наклона оси волчка, прямо пропорциональна максимально возможному моменту силы тяжести вокруг точки O и обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения.

Пример 16.5. Пусть уравновешенный ротор быстро вращается относительно корпуса, например, статора мотора с постоянной угловой скоростью ω_1 , а корпус принудительно поворачивают в инерциальной системе с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через центр масс ротора. Рассчитать гироскопическую реакцию ротора на пару опорных подшипников (рис. 16.19).

Решение. Оценим дополнительную реакцию оси ротора на две ее опоры — подшипники A_0 и B_0 . Для простоты предположим, что ускорение центра масс ротора в инерциальной системе отсчета незначительно. Тогда при отсутствии вращения корпуса реакция уравновешенного ротора на две опоры определится лишь положением линии действия силы тяжести ротора между подшипниками.

Ротор будем считать гироскопом с неподвижным центром масс, расположенным в точке O . При расчете динамических реакций силу тяжести гироскопа учитывать не будем. В этом случае, согласно теореме о движении центра масс, динамическая реакция опор на ротор может быть лишь парой сил: $\vec{N}_A = -\vec{N}_B$.

Для ротора $\omega_2 = \omega_1 \gg \omega_2$. Постоянный модуль и направление вектора $\bar{K}_O$ известны: $K_O = C\omega_1$, вектор $\bar{K}_O$ направлен по оси OZ ротора. Скорость вынужденной прецессии оси OZ гироскопа равна угловой скорости корпуса: $\Omega = \omega_2$. При постоянном угле $\theta = \theta_0$ между осями Oz и OZ годограф вектора $\bar{K}_O$ от вынужденного вращения с угловой скоростью $\Omega = \omega_2$ будет дугой окружности с центром, расположенном на оси вынужденной прецессии Oz . Скорость движения конца вектора $\bar{K}_O$ по его годографу $\bar{u} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O$.

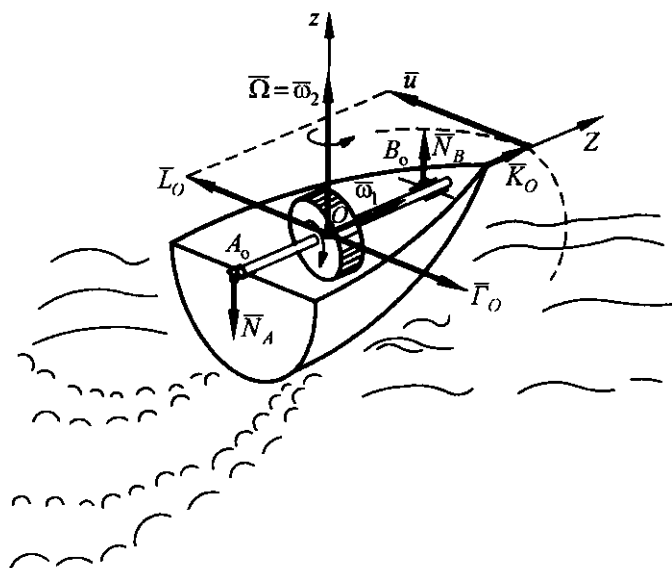


Рис. 16.19

Согласно формуле (16.55), для обеспечения вынужденной прецессии на ротор должны действовать такие внешние силы, главный момент которых вокруг точки O

$$\bar{L}_O = \bar{u} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O. \quad (16.56)$$

В рассматриваемом случае ими могут быть лишь реакции опор. Нас же интересует реакция ротора на опоры, т. е.

$$\bar{\Gamma}_O = -\bar{L}_O, \quad (16.57)$$

где $\bar{\Gamma}_O$ — главный момент сил, приложенных к опорам со стороны ротора.

С учетом (16.56) выражение (16.57) примет вид

$$\vec{\Gamma}_O = -\vec{u} = \vec{K}_O \times \vec{\omega}_2 = C\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2,$$

откуда

$$\Gamma_O = C\omega_1\omega_2 \sin \theta.$$

Так как силы реакции ротора на опорные подшипники образуют пару сил ($N_A = N_B = N$) независимо от расположения центра масс относительно опор, то $\Gamma_O = N A_0 B_0$ и $N = \Gamma_O / A_0 B_0 = C\omega_1\omega_2 \sin \theta / A_0 B_0$.

Поскольку $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ обусловлены динамическими свойствами гироскопа, эта пара сил называется *гироскопической реакцией*, а сами силы — *гироскопическими давлениями*. Для отыскания направления сил $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, приложенных к опорам со стороны ротора, можно использовать правило Н. Е. Жуковского (рис. 16.20), согласно которому гироскопические давления направлены так, будто они стремятся повернуть вектор $\vec{K}_O$ или $\vec{\omega}_1$ вокруг точки O кратчайшим образом до совмещения с вектором угловой скорости вынужденной прецессии $\vec{\omega}_2$. Здесь слово «будто» означает, что на самом деле гироскопические давления приложены не к ротору, а к опорам.

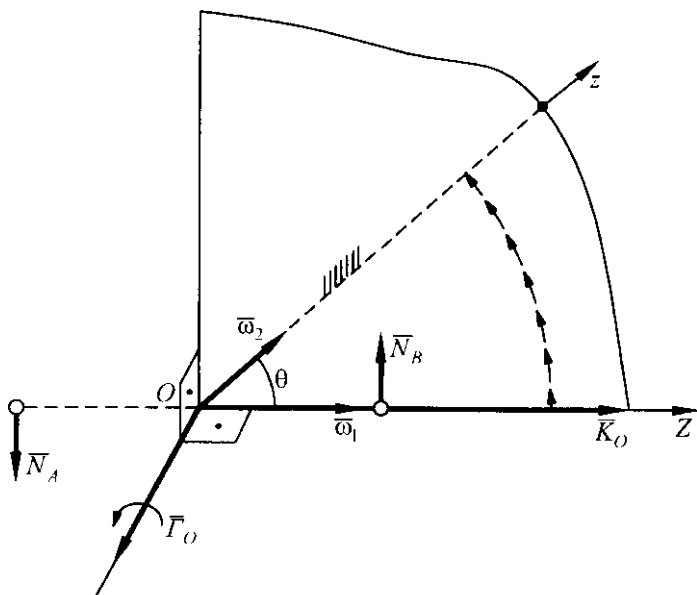


Рис. 16.20

16.3. Общий случай движения твердого тела

В общем случае движения твердое тело имеет шесть степеней свободы. Поэтому для исследования его движения необходимо располагать шестью независимыми дифференциальными уравнениями динамики для шести обобщенных координат, задающих положение тела в инерциальной системе отсчета. Окончательный вид уравнений зависит от выбора обобщенных координат и теоретических основ, используемых для вывода.

Введем инерциальную систему координат S_0 с осями Ox , Oy , Oz , а также жестко связанную с твердым телом систему S с ортогональными главными осями инерции CX , CY , CZ в его центре масс (рис. 16.21). Обобщенными координатами могут служить три декартовы координаты x_C , y_C , z_C центра масс твердого тела в системе S_0 и три угла Эйлера ψ , θ , φ , задающих положение системы S относительно осей Кенига, параллельных осям системы S_0 .

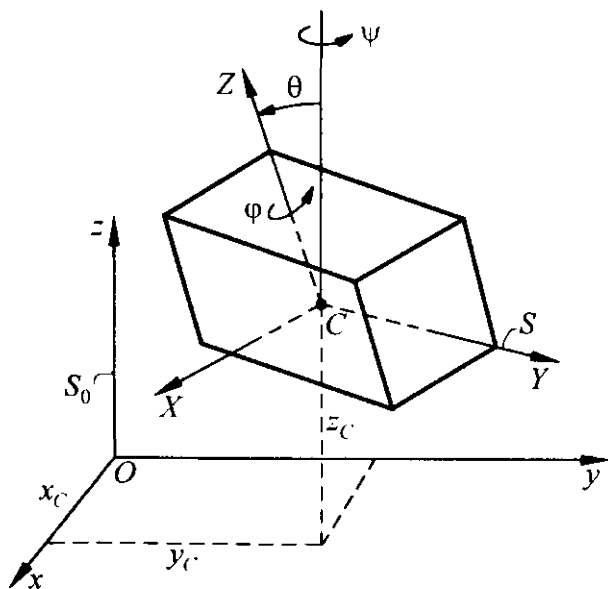


Рис. 16.21

Первые три уравнения динамики составим на основе теоремы об изменении количества движения. Спроецируем векторное выражение этой теоремы на оси системы S_0 :

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx}^{(e)}; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}^{(e)}; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^N F_{kz}^{(e)}. \quad (16.58)$$

Вторые три уравнения динамики составим на основе теоремы об изменении главного момента количеств движений относительно осей Кенига. В проекции на подвижные оси системы S динамические уравнения Эйлера имеют вид (16.11).

Уравнения (16.11), (16.58) легко разрешимы относительно первых производных от проекций вектора скорости центра масс на оси системы S_0 и проекций вектора угловой скорости тела на оси системы S . Такую форму записи дифференциальных уравнений несложно преобразовать к форме Коши, традиционно используемой в алгоритмах численного интегрирования уравнений.

Дополним уравнения (16.11) системой кинематических уравнений Эйлера (4.8), позволяющих выразить проекции угловой скорости вращения тела на оси системы S через углы Эйлера и их первые производные по времени. Рациональность выбора указанных обобщенных координат состоит в том, что они позволяют представить общий случай движения в виде составного и в связи с этим разделить дифференциальные уравнения на две подгруппы (16.58) и (4.8), (16.11), не связанные между собой по вторым производным от обобщенных координат. Тем не менее такая система уравнений в общем случае является связанной, поскольку главный вектор $\bar{R}^{(e)}$ и главный момент $\bar{L}_C^{(e)}$ внешних сил относительно центра масс могут зависеть не только от времени, но и от полного набора обобщенных координат и их первых производных по времени:

$$\bar{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)} = \bar{\Phi}_1(t, x_C, y_C, z_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C, \psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi});$$

$$\bar{L}_C^{(e)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{\Phi}_2(t, x_C, y_C, z_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C, \psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}).$$

Например, при движении тела, подвешенного к неподвижному основанию на пружинах, силы натяжения пружин зависят

от положения центра масс и пространственной ориентации тела, а моменты этих сил относительно главных центральных осей инерции — от пространственной ориентации тела. Для каждого локального участка поверхности тела распределенные силы сопротивления воздуха зависят от скорости движения этого участка, которая, в свою очередь, определяется скоростями изменения всех обобщенных координат.

Поиск аналитического решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.8), (16.11) и (16.58) двенадцатого порядка представляет собой сложную, в большинстве случаев неразрешимую математическую проблему. Поэтому на практике решение задач динамики общего случая движения твердого тела выполняют численными методами.

Систему дифференциальных уравнений (4.8), (16.11), (16.58) можно применять для любых частных случаев движения с меньшим числом степеней свободы. При этом в число неизвестных функций помимо обобщенных координат будут входить характеристики реакций со стороны соседних твердых тел. Например, при вращении тела вокруг неподвижной оси неизвестными будут законы изменений угла поворота тела и реакций подшипников.

Вначале рассмотрим случай, когда соседнее твердое тело неподвижно. Если связь с ним принадлежит к числу идеальных (без учета сил трения), то дифференциальные уравнения движения следует дополнить уравнениями ограничивающей поверхности (в частных случаях линии или точки), записанными в обобщенных координатах. Если при этом необходимо также учитывать силы сухого трения и моменты трения качения и верчения, то дополнительно следует использовать уравнения математических моделей фрикционных сил и моментов.

В тех случаях, когда соседнее тело подвижно в S_0 , возможны два варианта: 1) движение соседнего тела заранее известно и задано в обобщенных координатах; 2) движение соседнего тела неизвестно и подлежит расчету. Второй вариант обобщает исходную задачу на случай движения кинематически связанной системы твердых тел.

В каждом из этих вариантов дополнительные уравнения геометрической связи и моделей фрикционных сил следует выразить

через обобщенные координаты и их производные по времени обоих тел. Для первого варианта система, состоящая из (4.8), (16.11), (16.58) и дополнительных уравнений связи, должна быть полной относительно неизвестных обобщенных координат и силовых характеристик реакций между рассматриваемыми телами. Во втором варианте система, содержащая те же уравнения, записанные для каждого из подвижных тел, и дополнительные уравнения связи и моделей фрикционных сил, должна быть полной относительно всех двенадцати обобщенных координат и силовых характеристик реакций между подвижными телами. Указанную стратегию формирования полной системы уравнений движения можно применять и для большего числа тел.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

17.1. Принцип Даламбера. Сила инерции

Принцип Даламбера сформулирован в 1743 г. и первоначально, в отличие от законов Ньютона, был предназначен для изучения движения несвободных механических систем. В настоящее время этот принцип и вытекающий из него метод кинестатики рассматривают как удобный прием для определения реакций связей и сил взаимодействия, а также для составления дифференциальных уравнений движения механических систем.

В соответствии с аксиомами динамики основное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (17.1)$$

где $\bar{F}$ — равнодействующая активных сил; $\bar{R}$ — равнодействующая реакций связей; $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ — абсолютное ускорение точки.

Уравнение (17.1) можно также записать в виде

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0.$$

Слагаемое $(-m\bar{a})$ обозначают $\bar{\Phi}$ и называют *даламберовой силой инерции* (или просто силой инерции). Основное уравнение динамики материальной точки при использовании силы инерции принимает следующий вид:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (17.2)$$

Так как указанные выше силы образуют систему сходящихся сил, то уравнение (17.2) можно рассматривать как условие равновесия системы сил $(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi})$. В этом и состоит принцип Далам-

бера для материальной точки. Формулируется он так: *при движении материальной точки в любой момент времени приложенные к ней активные силы и реакции связей вместе с силой инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю (уравновешенную систему сил)*, т. е.

$$(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}) \sim 0. \quad (17.3)$$

Отметим, что в формулировке принципа Даламбера речь идет об уравновешенности определенной системы сил, а не о равновесии (покое) материальной точки.

Таким образом, дополняя систему активных сил и реакций связей, приложенных к точке, силой инерции, получаем уравновешенную систему сходящихся сил, для которой должно выполняться условие равновесия (17.2). В проекциях на оси декартовой системы координат имеем

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; F_y + R_y + \Phi_y = 0; F_z + R_z + \Phi_z = 0,$$

где $\Phi_x = -m\ddot{x}$; $\Phi_y = -m\ddot{y}$; $\Phi_z = -m\ddot{z}$; в проекциях на оси естественной системы координат получаем

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0; F_n + R_n + \Phi_n = 0; F_b + R_b = 0,$$

где $\Phi_\tau = -ma_\tau = -m \frac{dv_\tau}{dt}$; $\Phi_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho}$.

Представление основного уравнения динамики материальной точки в виде (17.2) следует рассматривать как прием, удобный для решения некоторых задач, например для определения сил взаимодействия и реакций связей.

Пример 17.1. Определить силу, с которой груз 2 давит на упор 1 тележки (рис. 17.1), если масса груза m , а ускорение тележки $\bar{a}$. Трением между грузом и тележкой пренебречь.

Решение. К грузу приложены сила тяжести $\bar{P}_2$, нормальная реакция $\bar{N}$ и реакция $\bar{R}$ упора. Добавляя в соответствии с принципом Даламбера силу инерции $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ груза, получаем уравновешенную систему сил $(\bar{P}_2, \bar{N}, \bar{R}, \bar{\Phi})$.

Проецируя силы на ось Ox , находим

$$R = ma.$$

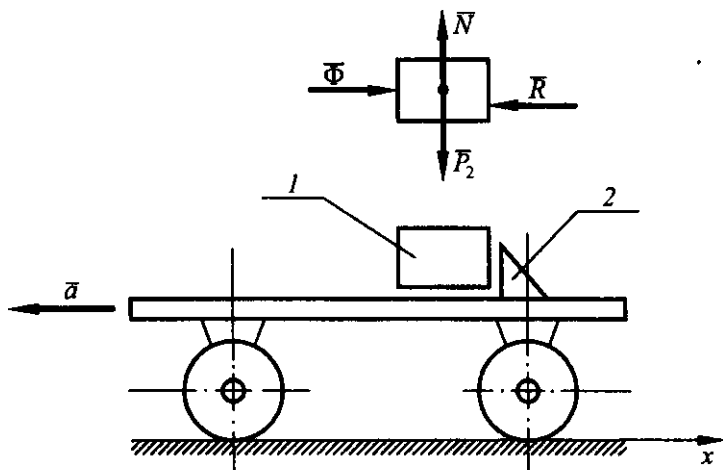


Рис.17.1

17.2. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получаем

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (17.4)$$

где $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$; $\bar{F}_k$ и $\bar{R}_k$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k -й точке. Условие (17.4) можно представить в виде

$$(\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k) \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, для системы материальных точек принцип Даламбера формулируется так: *при движении механической системы в любой момент времени приложенные к каждой точке системы активные силы и реакции связей вместе с силами инерции образуют систему сил, эквивалентную нулю.*

Суммируя левые части уравнений (17.4) по всем точкам системы, получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0. \quad (17.5)$$

Умножив каждое уравнение в (17.4) векторно слева на радиус-вектор $\bar{r}_k$ k -й точки и просуммировав их, имеем

$$\sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (17.6)$$

Из (17.5) и (17.6) следует, что равны нулю главный вектор и главный момент относительно произвольного центра приведения O активных сил, реакций связей, приложенных ко всем точкам механической системы, и сил инерции. В проекциях на оси декартовой системы координат, начало которых совпадает с центром O , эти условия принимают вид известных уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_{kx} + \sum_{k=1}^N R_{kx} + \sum_{k=1}^N \Phi_{kx} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} + \sum_{k=1}^N R_{ky} + \sum_{k=1}^N \Phi_{ky} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} + \sum_{k=1}^N R_{kz} + \sum_{k=1}^N \Phi_{kz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_x(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_x(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_x(\bar{\Phi}_k) &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_y(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_y(\bar{\Phi}_k) &= 0; \\ \sum_{k=1}^N M_z(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N M_z(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Если силы, приложенные к k -й точке системы, разложить не на активные и реакции связей, а на внешнюю $\bar{F}_k^e$ и внутреннюю $\bar{F}_k^i$, то уравнение (17.4) примет вид

$$\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} + \bar{\Phi}_k = 0.$$

Так как главный вектор и главный момент относительно произвольного центра приведения внутренних сил системы равен нулю, то для (17.5) и (17.6) имеем соответственно

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(v)} + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0; \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(v)}) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (17.8)$$

Проецируя (17.8) на оси декартовой системы координат, получаем шесть уравнений равновесия системы сил, аналогичных уравнениям (17.7). Особенность этих уравнений состоит в том, что в них не входят внутренние силы.

Понятие о силе инерции и принцип Даламбера составляют основу метода *кинетостатики*, который ставит своей целью применение методов статики, в частности, к задачам динамики машин и механизмов.

17.3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Применяя принцип Даламбера для изучения движения механических систем, состоящих из многих или множества (например, твердое тело) точек, силы инерции целесообразно привести к какому-либо центру, например центру масс. Получим общие формулы для главного вектора и главного момента сил инерции относительно произвольно выбранного центра приведения.

Главный вектор сил инерции

В соответствии с определением главного вектора

$$\bar{R}_{ин} = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^N m_k \bar{a}_k.$$

Так как ускорение точки $\bar{a}_k = \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}$, а ее масса m_k постоянна, то

$$\bar{R}_{ин} = - \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k \right) = -M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k}{M} \right) = -M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}.$$

Таким образом, при любом движении механической системы главный вектор сил инерции равен взятому со знаком «минус» произведению массы системы на ускорение центра масс:

$$\bar{R}_{ин} = -M \bar{a}_C. \quad (17.9)$$

Главный момент сил инерции относительно произвольно выбранного центра приведения

Определим главный момент сил инерции относительно некоторого неподвижного центра O :

$$\bar{L}_O^{ин} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}.$$

Так как $\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k)$, то

$$\bar{L}_O^{ин} = - \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k \right) = - \frac{d\bar{K}_O}{dt}.$$

Следовательно, главный момент сил инерции относительно неподвижного центра приведения O равен взятой со знаком «минус» производной по времени от главного момента количеств движения механической системы относительно того же центра.

Если движение точек механической системы рассматривать как сложное, т. е. $\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$, то

$$\bar{K}_O = \bar{K}_C^{(r)} + \bar{r}_C \times M \bar{v}_C,$$

где $\bar{K}_C^{(r)} = \sum_{k=1}^N \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^{(r)}$ — главный момент количеств движения системы в ее относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. В этом случае главный момент сил инерции относительно неподвижного центра приведения O

$$\bar{L}_O^{ин} = - \frac{d\bar{K}_O}{dt} = - \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} - M \bar{r}_C \times \bar{a}_C. \quad (17.10)$$

Силы инерции точек механической системы можно привести к центру масс, который может быть подвижной точкой. В этом случае главный момент сил инерции относительно центра масс C

$$\bar{L}_C^{nn} = -\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} \quad (17.11)$$

(производная в (17.11) полная, поскольку угловая скорость подвижной системы координат равна нулю).

Формулы (17.9) и (17.10) дают возможность определить главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела при разных видах его движения. При поступательном движении тела силы инерции его точек эквивалентны равнодействующей, геометрически равной главному вектору $\bar{R}_{nn} = -M\bar{a}_C$ и приложенной в центре масс тела. Главный момент сил инерции относительно центра масс тела равен нулю, так как равна нулю скорость каждой точки тела относительно его центра масс ($\bar{v}_k^{(r)} = 0$).

При приведении сил инерции точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, к произвольному центру O , расположенному на этой оси, в центре O в общем случае должны быть приложены главный вектор $\bar{R}_{nn} = -M\bar{a}_C$ и главный момент

$\bar{L}_O^{nn} = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}$ сил инерции. Если ось Oz вращения тела является его центральной и главной осью инерции, то $\bar{R}_{nn} = 0$, а $\bar{L}_O^{nn} = L_z^{nn}\bar{k}$, где $L_z^{nn} = -J_z\epsilon_z$.

Если твердое тело имеет плоскость Oxy материальной симметрии и совершает плоскопараллельное движение, то, приведя силы инерции к центру масс тела, получим главный вектор $\bar{R}_{nn} = -M\bar{a}_C$ и главный момент $\bar{L}_C^{nn}$ относительно центра масс сил инерции. При принятом допущении о наличии плоскости симметрии ось Cz будет главной центральной осью инерции тела и поэтому $\bar{L}_C^{nn} = -J_{Cz}\bar{\epsilon}$.

17.4. Динамические реакции опор

Одной из задач динамики твердого тела, для решения которой эффективно применение метода кинестатики, является задача определения реакций опор и уравнивания тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Вывод уравнений для определения реакций опор

Рассмотрим твердое тело, закрепленное при помощи подшипника в точке B и подпятника в точке A (рис. 17.2), вращающееся вокруг неподвижной оси AZ под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, и определим реакции опор. Масса тела M , его угловая скорость и угловое ускорение в некоторый момент времени соответственно равны $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$, трением в опорах пренебрегаем.

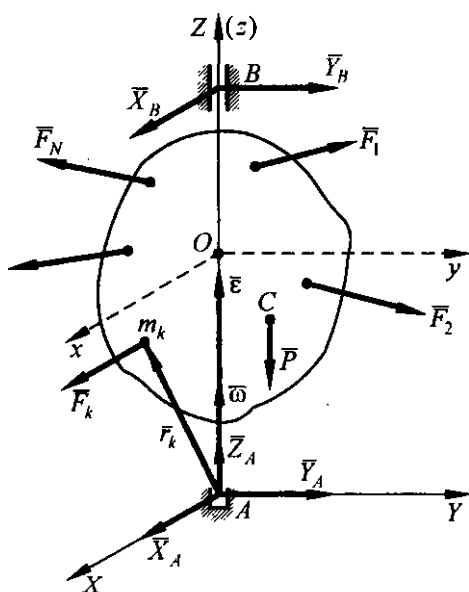


Рис. 17.2

Уравнения для определения реакций опор можно составить в проекциях на оси как неподвижной, так и подвижной системы координат, жестко связанной с вращающимся телом. В первом случае при вращении тела будет изменяться распределение массы, а значит, и моменты инерции тела относительно осей координат. Во втором случае моменты инерции тела относительно осей связанной с ним системы координат и координаты центра масс

будут некоторыми постоянными величинами. Поэтому будем полагать, что система координат $AXYZ$ жестко соединена с твердым телом.

За центр приведения сил инерции точек твердого тела примем точку A . Определим проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно точки A сил инерции тела.

Главный вектор сил инерции

$$\bar{R}_{ин} = -M \bar{a}_C = -M \bar{a}_C^{(n)} - M \bar{a}_C^{(r)}.$$

Касательное $\bar{a}_C^{(r)}$ и нормальное $\bar{a}_C^{(n)}$ ускорения центра масс тела соответственно равны

$$\bar{a}_C^{(r)} = \bar{\epsilon} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \epsilon_z \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix}; \quad \bar{a}_C^{(n)} = \bar{\omega} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix}. \quad (17.12)$$

Раскрывая определители (17.12) по элементам первой строки и принимая во внимание, что $\bar{r}_C = \bar{\omega} \times \bar{r}_C$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{a}_C^{(r)} &= -\epsilon_z Y_C \bar{i} + \epsilon_z X_C \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}; \\ \bar{a}_C^{(n)} &= -\omega_z^2 X_C \bar{i} - \omega_z^2 Y_C \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, для проекций главного вектора сил инерции тела на оси подвижной системы координат $AXYZ$ имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} R_X^{ин} &= M \epsilon_z Y_C + M \omega_z^2 X_C; \\ R_Y^{ин} &= -M \epsilon_z X_C + M \omega_z^2 Y_C; \\ R_Z^{ин} &= 0. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Так как для определения реакций опор используется связанная с вращающимся телом система координат, то главный момент сил инерции относительно точки A можно представить в соответствии с формулой Бура в виде

$$\bar{L}_A^{ин} = -\frac{d\bar{K}_A}{dt} = -\left(\frac{d\bar{K}_A}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_A \right). \quad (17.14)$$

Известно, что главный момент количеств движения твердого тела относительно точки A определяется по формуле (15.45). Так как при вращении тела вокруг неподвижной оси Oz $\omega_x = \omega_y = 0$, то

$$\bar{K}_A = -J_{xz} \omega_z \bar{i} - J_{yz} \omega_z \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}, \quad (17.15)$$

где $J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k X_k Z_k$, $J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k Y_k Z_k$ — центробежные моменты инерции тела; $J_z = \sum_{k=1}^N m_k (X_k^2 + Y_k^2)$ — момент инерции тела относительно оси OZ .

Принимая во внимание (17.15) и учитывая, что

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_A = J_{yz} \omega_z^2 \bar{i} - J_{xz} \omega_z^2 \bar{j},$$

из (17.14) получим следующие выражения для проекций главного момента сил инерции тела относительно точки A на оси системы координат $AXYZ$:

$$\begin{aligned} L_x^{ин} &= J_{xz} \varepsilon_z - J_{yz} \omega_z^2; \\ L_y^{ин} &= J_{yz} \varepsilon_z + J_{xz} \omega_z^2; \\ L_z^{ин} &= -J_z \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (17.16)$$

В соответствии с методом кинетостатики приравняем к нулю проекции на оси координат главного вектора и главного момента относительно точки A активных сил ($\bar{F}_k$), реакций связей ($\bar{R}_A, \bar{R}_B$) и сил инерции точек тела. Учитывая полученные выше выражения (17.13) и (17.16), запишем

$$X_A + X_B + \sum_{k=1}^N F_{kx} + M \varepsilon_z Y_C + M \omega_z^2 X_C = 0; \quad (17.17)$$

$$Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^N F_{ky} - M \varepsilon_z X_C + M \omega_z^2 Y_C = 0; \quad (17.18)$$

$$Z_A + \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0; \quad (17.19)$$

$$-Y_B AB + \sum_{k=1}^N M_X(\bar{F}_k) + J_{xz} \varepsilon_z - J_{yz} \omega_z^2 = 0; \quad (17.20)$$

$$X_B AB + \sum_{k=1}^N M_Y(\bar{F}_k) + J_{YZ} \varepsilon_Z + J_{XZ} \omega_Z^2 = 0; \quad (17.21)$$

$$\sum_{k=1}^N M_Z(\bar{F}_k) - J_Z \varepsilon_Z = 0. \quad (17.22)$$

Уравнение (17.22) не содержит реакций опор. При известном моменте инерции J_Z и заданных внешних силах оно позволяет определить угловое ускорение $\varepsilon_Z(t)$ и угловую скорость $\omega_Z = \int \varepsilon_Z(t) dt + C_1$ твердого тела.

Уравнения (17.17) – (17.21) дают возможность вычислить проекции на оси координат реакций подшипника (X_B, Y_B) и подпятника (X_A, Y_A, Z_A). В них входят слагаемые, зависящие как от заданных сил $\bar{F}_k$, так и от сил инерции, обусловленных вращением тела с угловой скоростью ω_Z и угловым ускорением ε_Z . Так как эти уравнения линейны, то каждую из реакций опор можно разделить на две составляющие, называемые условно статической и динамической.

Статические реакции опор вызываются только внешними силами; силы инерции при определении статических реакций полагают равными нулю. В этом случае

$$\begin{aligned} X_B^{\text{ст}} &= -\frac{1}{AB} \sum_{k=1}^N M_Y(\bar{F}_k); \\ Y_B^{\text{ст}} &= \frac{1}{AB} \sum_{k=1}^N M_X(\bar{F}_k); \\ X_A^{\text{ст}} &= \frac{1}{AB} \sum_{k=1}^N M_Y(\bar{F}_k) - \sum_{k=1}^N F_{kX}; \\ Y_A^{\text{ст}} &= -\frac{1}{AB} \sum_{k=1}^N M_X(\bar{F}_k) - \sum_{k=1}^N F_{kY}; \\ Z_A^{\text{ст}} &= -\sum_{k=1}^N F_{kZ}. \end{aligned}$$

Динамические реакции опор зависят только от сил инерции. Уравнения для определения проекций динамических реакций подшипника и подпятника имеют вид

$$X_A^n + X_B^n + M\varepsilon_Z Y_C + M\omega_Z^2 X_C = 0; \quad (17.23)$$

$$Y_A^n + Y_B^n - M\varepsilon_Z X_C + M\omega_Z^2 Y_C = 0; \quad (17.24)$$

$$-Y_B^n AB + J_{xz}\varepsilon_Z - J_{yz}\omega_Z^2 = 0; \quad (17.25)$$

$$X_B^n AB + J_{yz}\varepsilon_Z + J_{xz}\omega_Z^2 = 0. \quad (17.26)$$

Определив из уравнений (17.26) и (17.25)

$$X_B^n = -\frac{1}{AB}(J_{yz}\varepsilon_Z + J_{xz}\omega_Z^2),$$

$$Y_B^n = \frac{1}{AB}(J_{xz}\varepsilon_Z - J_{yz}\omega_Z^2),$$

получаем

$$R_B^n = \frac{1}{AB}\sqrt{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}. \quad (17.27)$$

Аналогично находим

$$R_A^n = \frac{1}{AB}\{(\varepsilon_Z^2 + \omega_Z^4) \times [(J_{xz}^2 + J_{yz}^2) + M^2(X_C^2 + Y_C^2)AB^2 - \\ - 2M(J_{xz}X_C + J_{yz}Y_C)AB]\}^{1/2}. \quad (17.28)$$

Как видно, динамические реакции подшипника и подпятника зависят от угловой скорости и углового ускорения тела, а также от распределения массы тела относительно оси его вращения.

Реакция опоры твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Применим метод кинестатики для определения реакции опоры твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (рис. 17.3). Если трением в опоре пренебречь, то реакция опоры — сила, приложенная к твердому телу в точке O . Сила $\bar{R}_O$ не создает момент относительно точки O и осей координат, проходящих через эту точку. Поэтому для определения реакции опоры достаточно найти проекции на оси декартовой системы координат главного вектора системы сил, в которую входят активные силы $\bar{F}_k$, реакция опоры $\bar{R}_O$ и силы инерции $\bar{\Phi}_k$ точек тела.

Главный вектор сил инерции тела

$$\bar{R}_{ин} = -M\bar{a}_C = -M(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C + \bar{\omega} \times \bar{v}_C). \quad (17.29)$$

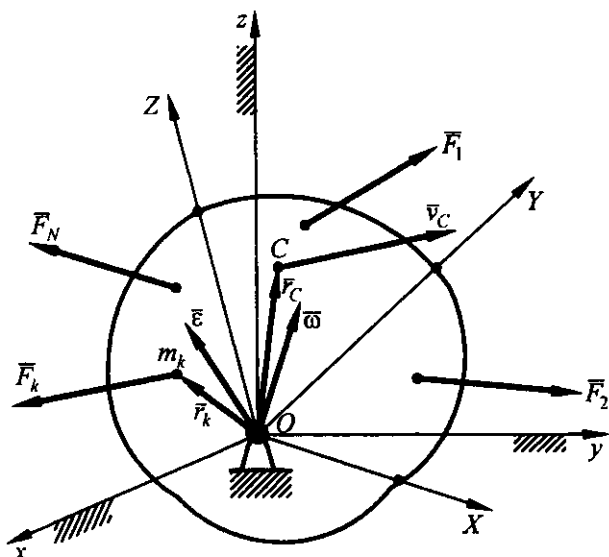


Рис. 17.3

Для определения проекций вектора $\bar{R}_{ин}$ на оси декартовой системы координат представим входящие в (17.29) векторные произведения в виде определителей

$$\bar{\epsilon} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \epsilon_X & \epsilon_Y & \epsilon_Z \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix}; \quad \bar{\omega} \times \bar{v}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ v_{CX} & v_{CY} & v_{CZ} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая эти определители по элементам первой строки и принимая во внимание, что

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \bar{r}_C = \bar{i}(\omega_Y Z_C - \omega_Z Y_C) + \bar{j}(\omega_Z X_C - \omega_X Z_C) + \bar{k}(\omega_X Y_C - \omega_Y X_C),$$

находим

$$\begin{aligned} R_X^{ин} &= M[(\omega_Y^2 + \omega_Z^2)X_C + (\epsilon_Z - \omega_X \omega_Y)Y_C - (\epsilon_Z - \omega_X \omega_Z)Z_C]; \\ R_Y^{ин} &= M[(\omega_X^2 + \omega_Z^2)Y_C + (\epsilon_X - \omega_Y \omega_Z)Z_C - (\epsilon_Z + \omega_Y \omega_X)X_C]; \\ R_Z^{ин} &= M[(\omega_X^2 + \omega_Y^2)Z_C + (\epsilon_Y - \omega_Z \omega_X)X_C - (\epsilon_X + \omega_Z \omega_Y)Y_C]. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Выражения (17.30) справедливы для проекции главного вектора сил инерции тела на оси как неподвижной $Oxyz$, так и свя-

занной $OXYZ$ с телом систем координат. Проецирование вектора $\bar{R}_{ин}$ на связанные с телом оси координат предпочтительнее, так как распределение массы тела относительно таких осей фиксировано, и, следовательно, координаты центра масс — некоторые постоянные величины.

В соответствии с принципом Даламбера система сил, включающая активные силы, реакцию опоры и силы инерции точек тела, уравновешена. Поэтому равны нулю проекции на оси координат главного вектора этой системы сил, т. е.

$$X_O + \sum_{k=1}^N F_{kx} + M[(\omega_Y^2 + \omega_Z^2)X_C + (\epsilon_Z - \omega_X \omega_Y)Y_C - (\epsilon_Z - \omega_X \omega_Z)Z_C] = 0; \quad (17.31)$$

$$Y_O + \sum_{k=1}^N F_{ky} + M[(\omega_X^2 + \omega_Z^2)Y_C + (\epsilon_X - \omega_Y \omega_Z)Z_C - (\epsilon_Z + \omega_Y \omega_X)X_C] = 0; \quad (17.32)$$

$$Z_O + \sum_{k=1}^N F_{kz} + M[(\omega_X^2 + \omega_Y^2)Z_C + (\epsilon_Y - \omega_Z \omega_X)X_C - (\epsilon_X + \omega_Z \omega_Y)Y_C] = 0. \quad (17.33)$$

Уравнения (17.31)–(17.33) позволяют вычислить реакцию опоры (сферического шарнира), если известны угловая скорость и угловое ускорение тела. Динамическая реакция опоры определяется силами инерции и может быть найдена с помощью уравнений (17.31)–(17.33) при условии, что все $\bar{F}_k = 0$.

17.5. Статическая и динамическая уравновешенность твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Статическая уравновешенность

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют *статически уравновешенным*, если ось вращения проходит через его центр масс. В этом случае главный вектор сил инерции равен нулю, и из уравнений (17.23) и (17.24) получаем $X_B^a = -X_A^a$, $Y_B^a = -Y_A^a$. Это значит, что $\bar{R}_B^a = -\bar{R}_A^a$, т. е. динамиче-

ские реакции подшипника и подпятника образуют пару. Модули сил этой пары в соответствии с (17.27) и (17.28) определяются выражением

$$R_A^A = R_B^A = \frac{1}{AB} \sqrt{(\epsilon_z^2 + \omega_z^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}.$$

Полученный результат не зависит от выбора центра приведения системы сил. Действительно, если в качестве центра приведения выбрать произвольную точку O на оси вращения тела (см. рис. 17.2), то уравнение (17.26) будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^N M_y(\bar{F}_k) = -X_A^A OA + X_B^A OB + J_{yz}\epsilon_z + J_{xz}\omega_z^2 = 0.$$

Так как ось вращения тела — центральная, то $X_A^A = -X_B^A$ и тогда

$$X_B^A = -\frac{1}{AB}(J_{xz}\omega_z^2 + J_{yz}\epsilon_z),$$

что аналогично выражению для X_B^A в случае, когда за центр приведения системы сил была принята точка A . Такой же результат получается для Y_A^A и Y_B^A . Не меняются при изменении центра приведения и центробежные моменты инерции тела, т. е. $J_{xz} = J_{xz}$ и $J_{yz} = J_{yz}$. Например:

$$J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k = \sum_{k=1}^N m_k X_k (Z_k - OA) = \sum_{k=1}^N m_k X_k Z_k - OA \sum_{k=1}^N m_k X_k.$$

Так как $\sum_{k=1}^N m_k X_k = MX_C = 0$, то

$$J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k X_k Z_k = J_{xz}.$$

Таким образом, в случае статической уравновешенности тела динамические реакции опор приводятся к паре сил и могут быть не равны нулю. Пара сил инерции может быть уравновешена только парой — динамическими реакциями опор. Модули реакций зависят от угловой скорости ω_z и углового ускорения ϵ_z твердого тела, распределения массы по его объему (что характеризуется центробежными моментами инерции J_{xz} и J_{yz}), а также от расстояния между опорами.

Пример 17.2. Однородный стержень CD (рис. 17.4) массой m и длиной $2l$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz . Определить динамические реакции подпятника A и подшипника B , если расстояние между ними h , причем $OA = OB$.

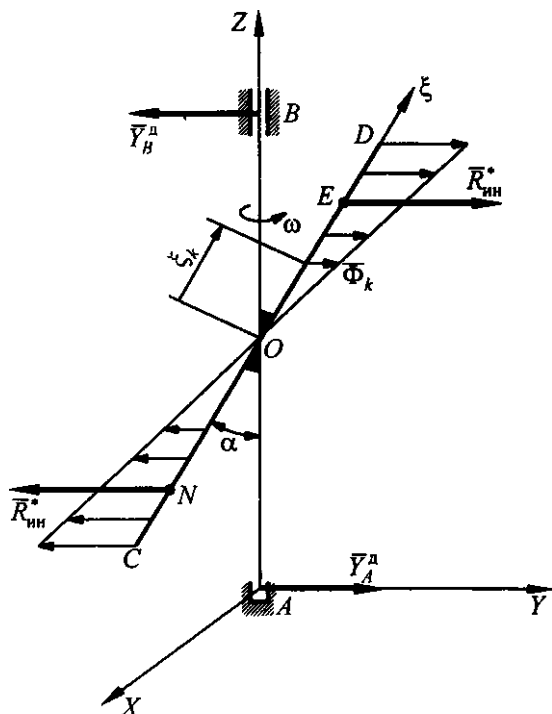


Рис. 17.4

Решение. При равномерном вращении сила инерции элемента стержня, масса которого m_k , по модулю равна $\Phi_k = m_k \omega^2 \sin \alpha \cdot \xi_k$. Следовательно, интенсивность сил инерции изменяется вдоль стержня по линейному закону. Распределенные силы инерции на каждом из участков стержня OC и OD можно заменить равнодействующими $\bar{R}_{ин}^*$, равными по модулю $\frac{1}{4} m l \omega^2 \cdot \sin \alpha$ и приложенными в точках E и N , отстоящих от точки O на $\frac{2}{3} l$. Равнодействующие $\bar{R}_{ин}^*$ сил инерции для участков стержня образуют пару, модуль момента которой равен $\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 \sin 2\alpha$. Эта пара сил уравнивается парой, образованной ди-

намическими реакциями подшипника и подпятника. Так как расстояние между опорами h , то $|\bar{Y}_A^a| = |\bar{Y}_B^a| = \frac{1}{6h} ml^2 \omega^2 \sin 2\alpha$.

Такой же результат может быть получен при использовании уравнений (17.23) – (17.26). По условию данной задачи $\varepsilon = 0$. Ось AX является главной осью инерции стержня CD в точке A , так как она перпендикулярна плоскости симметрии стержня. Поэтому из (17.23) и (17.26) следует, что $X_B^a = X_A^a = 0$. Из

уравнения (17.25) получаем $Y_B^a = -\frac{1}{h} J_{12} \omega^2$.

Центробежный момент инерции стержня

$$J_{12} = \sum_{k=1}^N m_k Y_k Z_k = \sum_{k=1}^N m_k \xi_k \sin \alpha (OA + \xi_k \cos \alpha) = \frac{1}{6} ml^2 \sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$Y_B^a = -\frac{1}{6h} ml^2 \omega^2 \sin 2\alpha,$$

$$\text{а } |\bar{Y}_A^a| = |\bar{Y}_B^a|.$$

Динамическая уравновешенность

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют **динамически уравновешенным**, если равны нулю динамические реакции подшипника и подпятника. Из уравнения (17.27) следует, что динамическая реакция $\bar{R}_B^a$ подшипника будет равна нулю, если $J_{xz} = J_{yz} = 0$, т. е. если ось AZ вращения тела будет его главной осью инерции в точке A . Чтобы при этом была равна нулю и динамическая реакция подпятника, необходимо, как это следует из (17.28), чтобы равнялись нулю не только центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} , но и координаты X_C и Y_C центра масс тела. Второе условие может быть выполнено, если ось AZ будет проходить через центр масс тела, т. е. будет центральной осью. Таким образом, вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело будет динамически уравновешено, если ось вращения является его главной центральной осью инерции.

В случае, когда ось OZ вращения тела является его главной осью инерции в какой-либо точке O (см. рис. 17.2), но не прохо-

дит через центр масс, центробежные моменты инерции $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$ и уравнения для определения динамических реакций подпятника A и подшипника B принимают вид

$$X_A^n + X_B^n + M\epsilon_z Y_C + M\omega_z^2 X_C = 0; \quad (17.34)$$

$$Y_A^n + Y_B^n - M\epsilon_z X_C + M\omega_z^2 Y_C = 0; \quad (17.35)$$

$$Y_A^n OA - Y_B^n OB = 0; \quad (17.36)$$

$$-X_A^n OA + X_B^n OB = 0. \quad (17.37)$$

Отсюда находим

$$R_A^n = M \frac{OB}{AB} \sqrt{(\epsilon_z^2 + \omega_z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}; \quad (17.38)$$

$$R_B^n = M \frac{OA}{AB} \sqrt{(\epsilon_z^2 + \omega_z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}. \quad (17.39)$$

В этом случае главный момент сил инерции тела относительно точки O равен нулю, и система сил инерции приводится к равнодействующей, приложенной в точке O и равной по модулю $M\sqrt{(\epsilon_z^2 + \omega_z^4)(X_C^2 + Y_C^2)}$. Поэтому динамическими реакциями опор будут параллельные силы $\bar{R}_A^n$ и $\bar{R}_B^n$, которые направлены противоположно равнодействующей сил инерции тела, а их модули (17.38), (17.39) обратно пропорциональны расстояниям от центра приведения O до соответствующей опоры.

Пример 17.3. Однородный диск массой M равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью ω (рис. 17.5). Расстояние от оси OZ до центра масс диска (точки C) равно h . Найти динамические реакции опор.

Решение. Поместим начало связанной с диском системы координат в точку O пересечения оси OZ с горизонтальной плоскостью симметрии диска. Ось OY направим так, чтобы она проходила через центр масс диска. В этом случае ось OZ будет главной осью инерции диска в точке O , и, следовательно, $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$ и $X_C = 0$. Это значит, что система сил инерции диска приводится к равнодействующей, которая приложена в точке O и расположена вдоль оси OY . При принятых условиях из уравнений (17.34) и (17.37) находим $X_A^n = X_B^n = 0$, а из уравнений (17.35) и (17.36) получаем

$$Y_A^n = -\frac{OB}{AB} M\omega^2 h; \quad Y_B^n = -\frac{OA}{AB} M\omega^2 h.$$

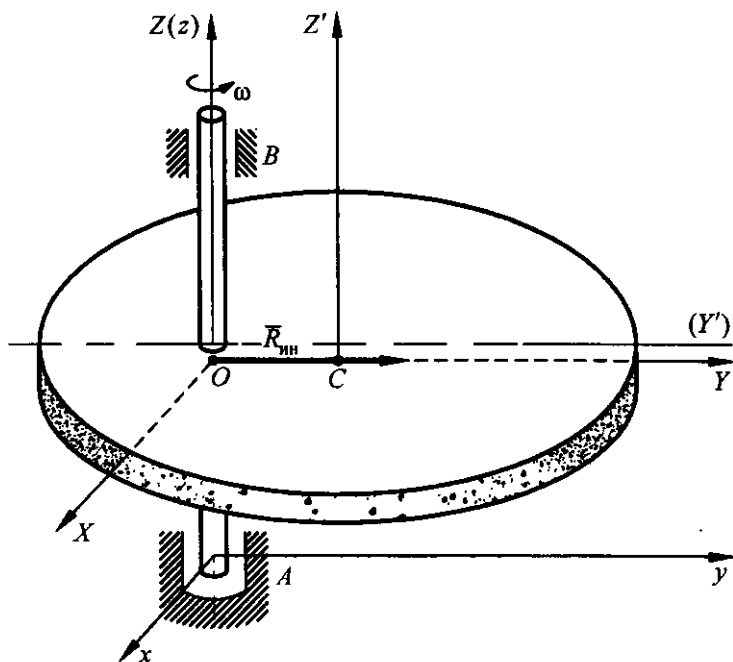


Рис. 17.5

На основании вышеизложенного, можно сделать следующие выводы:

1. Динамические реакции могут существовать даже тогда, когда ось вращения тела проходит через его центр масс. Динамические реакции опор образуют пару сил, модули которых зависят от центробежных моментов инерции тела, угловой скорости и углового ускорения.

2. Если ось вращения тела является его главной и центральной осью инерции, то динамические реакции подшипника и подпятника равны нулю, а статические реакции зависят только от внешних сил.

17.6. Балансировка роторов

Детали машин, как правило, изготавливают с некоторыми погрешностями, да и их материал может быть неоднородным по плотности. Поэтому трудно предположить, что ось вращения

такой детали, например ротора, будет ее главной центральной осью инерции. Следовательно, при вращении ротора будут возникать нежелательные динамические реакции опор. Эти реакции тем больше, чем больше масса, размеры, моменты инерции и угловая скорость ротора. Для уменьшения динамических реакций в инженерной практике применяют балансировку роторов после их изготовления. Задача балансировки заключается в том, чтобы по возможности сделать ось вращения ротора его главной центральной осью инерции. Наиболее актуальна балансировка для быстровращающихся роторов (например, турбины), поскольку динамические реакции пропорциональны квадрату угловой скорости ротора. Различают статическую и динамическую балансировку роторов.

Задачей *статической балансировки* является совмещение центра масс ротора с осью его вращения. Такую балансировку называют статической потому, что ее можно провести не приводя ротор во вращение.

На рис. 17.6 показан диск, центр масс которого (точка C) смещен от оси вращения на расстояние d . Вследствие этого дебаланс диска равен Md , где M — масса диска с валом. Если установить диск в призмах с малым трением так, чтобы его ось была горизонтальной, и предоставить самому себе, то после некоторого вращения диск займет положение, при котором точка C окажется на вертикальном диаметре ниже оси вращения.

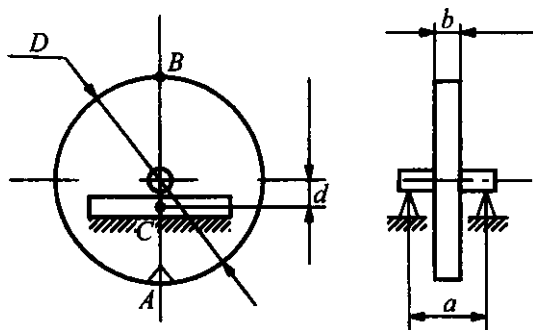


Рис. 17.6

Совместить центр масс диска с осью вращения можно двумя способами. Во-первых, можно в точке A , расположенной на том же диаметре, что и точка C , убрать часть материала, масса m которого определяется из соотношения $\frac{1}{2}mD = Md$. Дебаланс Md

диска при этом должен быть известен. Во-вторых, можно в точке B , лежащей на том же вертикальном диаметре диска, добавить материал, масса которого также должна быть m . Нетрудно показать, что после такой доработки центр масс будет находиться на оси вращения и диск после вращения будет останавливаться в любом произвольном положении. В действительности при статической балансировке для определения дебаланса и радиуса, на котором находится центр масс, используют вращение диска с постоянной угловой скоростью. Если дебаланс диска равен Md , то сила инерции, равная $Md\omega^2$, может быть определена в виде динамических реакций опор. При расположении диска посередине между опорами их динамические реакции будут равны $R^A = 0,5Md\omega^2$. Следовательно, дебаланс $Md = 2R^A/\omega^2$. Будет известен и радиус, на котором находится центр масс диска, поскольку этот радиус расположен на линии, параллельной динамическим реакциям опор.

Таким образом, при вращении диска измеряют динамическую реакцию $R^A = 0,5Md\omega^2$ опоры и в подвижной системе координат, связанной с диском, находят радиус, на котором располагается центр масс. После устранения дебаланса путем удаления части материала на линии OA или добавления его на линии OB центр масс диска будет на оси вращения. При контрольном вращении диска динамические реакции опор должны отсутствовать.

Статическая балансировка дает приближенный результат, поскольку при этом не принимаются в расчет центробежные моменты инерции диска. Погрешность будет тем меньше, чем тоньше диск. При небольшой толщине малым будет момент пары сил инерции, который выражается через центробежные моменты инерции диска, а значит, незначительными будут и соответствующие составляющие динамических реакций опор.

Следовательно, статическая балансировка дает удовлетворительный результат для роторов, выполненных в виде тонких дисков.

Динамическую балансировку проводят для ротора, длина которого соизмерима с его диаметром или превосходит его. Если полагать, что такой ротор статически отбалансирован, то задача динамической балансировки состоит в том, чтобы уравновесить пару сил инерции, которая обусловлена несимметричностью распределения массы ротора относительно оси его вращения. Силу инерции каждой точки ротора можно разложить на две параллельные составляющие, расположенные в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вращения ротора. Эти плоскости называют плоскостями коррекции и выбирают так, чтобы при балансировке в этих плоскостях на роторе можно было установить балансировочные грузы или убрать часть материала ротора. При равномерном вращении ротора силы инерции в каждой из плоскостей коррекции образуют систему сходящихся сил, которая приводится к равнодействующей $\bar{R}_{инi}$ ($i = 1, 2$). Равнодействующая сил инерции может быть уравновешена силой инерции балансировочного груза, установленного в той же плоскости коррекции. Очевидно, что $R_{инi} = m_{6i} r_i \omega^2$, где m_{6i}, r_i — соответственно масса балансировочного груза и расстояние от оси вращения ротора до точки размещения груза.

При динамической балансировке ротор устанавливают на специальном стенде (балансировочном станке), приводят во вращение и при этом фиксируют воздействие ротора на опоры стенда. Балансировочные стенды подразделяются на две группы: стенды с неподвижной осью вращения ротора и стенды, в которых ось вращения ротора подвижна. У стендов первой группы (рис. 17.7, а) действие сил инерции проявляется в виде сил давления цапф ротора на подшипники. Эти силы регистрируются при помощи датчиков, и определяются линии действия этих сил в связанной с ротором системе координат. После этого балансировка сводится к установке в выбранных плоскостях коррекции на радиусах, параллельных линиям действия сил $\bar{R}_A^A$ и $\bar{R}_B^A$ в свя-

занной с ротором системе координат, балансировочных грузов 1 и 2. Если ротор предварительно статически отбалансирован, то момент пары сил инерции грузов должен быть равен моменту пары сил $\bar{R}_A^a$, $\bar{R}_B^a$. Вместо установки балансировочных грузов можно удалить часть материала ротора в точках 3 и 4, расположенных симметрично точкам 1 и 2 относительно оси вращения ротора (см. рис. 17.7, а).

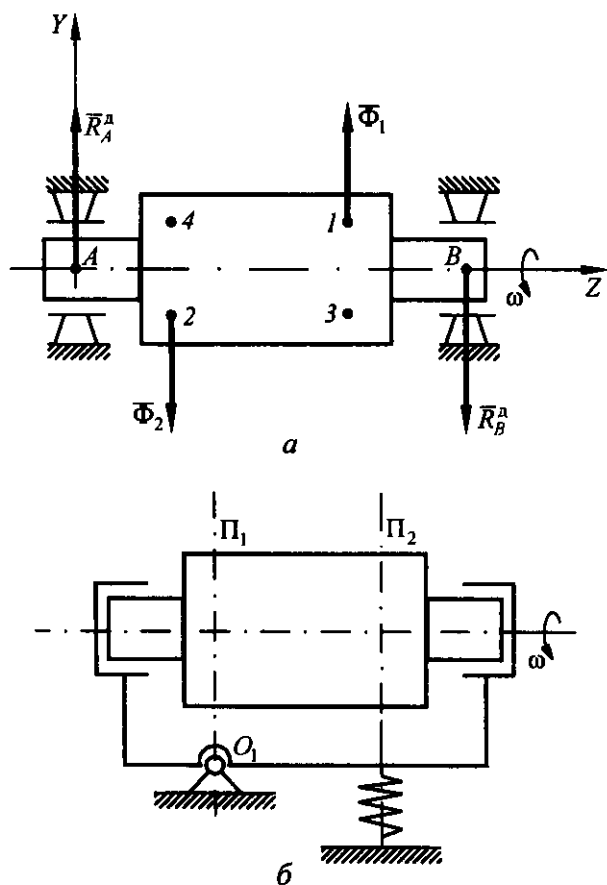


Рис. 17.7

При использовании стендов второй группы (рис. 17.7, б) дебаланс устраняют поочередно в каждой из плоскостей коррекции. Для этого ось O_1 качания рамы совмещают с одной из плоскостей коррекции, а упругую опору, допускающую движение оси ротора только в одной плоскости, — с другой. Действие сил инерции проявляется в виде деформации упругой опоры. При известном коэффициенте жесткости опоры эта деформация пропорциональна квадрату угловой скорости ротора и дебалансу. Установка в плоскости коррекции Π_2 балансировочного груза с таким же дебалансом позволяет уравновесить силы инерции ротора и груза в этой плоскости. После перестановки ротора (или перестановки опор) проводят балансировку в другой плоскости коррекции (Π_1).

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

18.1. Основные понятия

Аналитическая механика — это раздел теоретической механики, в котором изучение равновесия и движения механических систем основано на дифференциальных и интегральных принципах механики. В отличие от векторной механики Ньютона в аналитической механике используются энергетические характеристики движения. Подчинение этих характеристик принципам механики позволяет получить наиболее общие формы как условий равновесия, так и дифференциальных уравнений движения механических систем.

Связи и их классификация

Механическая система, точки которой могут занимать любое положение в пространстве и иметь любые скорости, называется **свободной**. Например, свободной системой является космический аппарат, движущийся по орбите вокруг Земли. Его движение не ограничено другими телами и поэтому, прикладывая к аппарату соответствующие силы, можно изменять траекторию его центра масс и поворачивать аппарат вокруг центра масс. Если на координаты и скорости точек системы наложены ограничения, то система называется **несвободной**, а ограничения называются **связями**. Механические связи реализуются в виде различных устройств или тел (стержни, нити, шарниры и т. п.). Аналитически связь описывается уравнением вида

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Ограничивая движение механической системы, связи действуют на ее точки посредством сил, которые называются **реакциями связей**. При изучении равновесия и движения механических систем методами аналитической механики применяется **принцип освобождения** (аксиома о связях). Этот принцип состоит в том, что любую систему можно рассматривать как свободную, приложив к ее точкам реакции, соответствующие отброшенным связям.

Связи называются **голономными**, если они описываются уравнениями вида

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad j=1, \dots, m. \quad (18.1)$$

Такие связи накладывают ограничения на координаты точек, а значит, на положение системы в пространстве. Это так называемые **геометрические** связи. Вместе с тем голономные связи накладывают ограничения и на скорости точек системы. Соответствующие условия получаются в результате дифференцирования уравнений (18.1) по времени:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \dot{y}_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \dot{z}_k \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0.$$

Голономные связи могут описываться и дифференциальными уравнениями, однако последние обязательно должны быть интегрируемыми.

Пример 18.1. Получить уравнения связей для диска радиусом r , который катится без скольжения по плоскости (рис. 18.1).

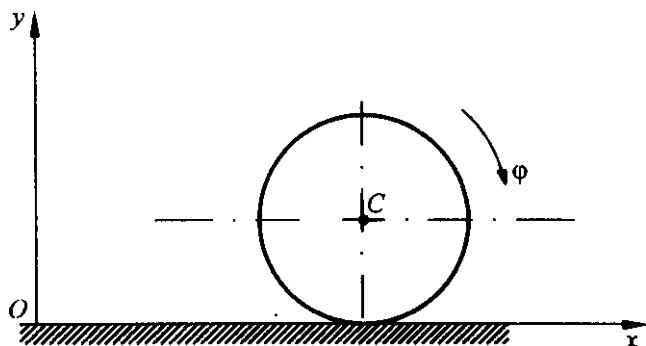


Рис. 18.1

Решение. Уравнения связей имеют вид

$$y_C = r = \text{const}; \quad \dot{x}_C = r\dot{\varphi},$$

где φ — угол поворота диска ($\varphi = 0$ при $x_C = 0$).

Из первого уравнения связи следует, что

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = 0.$$

Интегрируя второе уравнение, находим связь между координатой x_C и углом поворота диска

$$x_C = r\varphi + C_1.$$

Неголономными называются связи, которые описываются уравнениями вида

$$f_j(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (18.2)$$

Уравнения (18.2), в отличие от уравнений голономных связей, не могут быть проинтегрированы независимо от дифференциальных уравнений движения системы. Неголономные связи накладывают ограничения (18.2) на скорости точек, поэтому их называют **кинематическими**.

Пример 18.2. Получить уравнения связей для шара радиусом r , который катится без скольжения по плоскости (рис. 18.2).

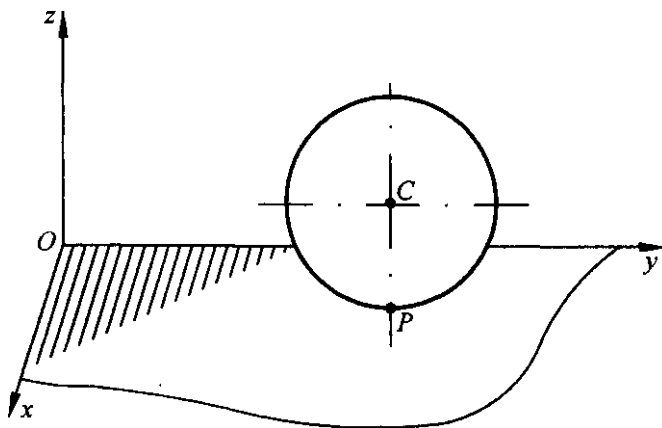


Рис. 18.2.

Решение: Положение шара определяется координатами x_C, y_C, z_C центра масс и тремя углами его поворота вокруг центра масс. Этими углами могут быть

углы Эйлера. При любом положении шара расстояние от точки C до плоскости Ox равно его радиусу. Поэтому одно из уравнений связи имеет вид $z_C = r$. Другие уравнения связи определим из условия качения без скольжения:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0; \quad \vec{r} = \overrightarrow{CP},$$

где P — точка соприкосновения шара с плоскостью.

Проецируя это векторное уравнение на оси неподвижной системы координат, получаем

$$\dot{x}_C - r\omega_1 = 0; \quad \dot{y}_C + r\omega_2 = 0; \quad \dot{z}_C = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения дает полученное выше геометрическое условие $z_C = r$.

Кинематические уравнения в проекциях на оси неподвижной системы координат имеют вид

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi;$$

$$\omega_y = -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi.$$

Таким образом, уравнениями связей для шара являются

$$\dot{x}_C + r(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) = 0;$$

$$\dot{y}_C + r(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) = 0;$$

$$z_C = r.$$

Первые два из них не интегрируются, т. е. являются уравнениями неголономных связей.

Связи подразделяются на **стационарные** и **нестационарные** в зависимости от того, входит в явном виде время в уравнение связи или нет. Связь, уравнение которой имеет вид $f_j(x_k, y_k, z_k) = 0$, является голономной и стационарной. Для голономной нестационарной связи уравнение будет таким: $f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0$.

Например, жесткий стержень длиной l , прикрепленный к неподвижной опоре, является стационарной связью для материальной точки, находящейся на его свободном конце. Уравнение связи в декартовой системе координат, начало которой совпадает с точкой закрепления стержня, имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. (При вращении стержня вокруг опоры точка находится на сфере радиусом l .) Если длина стержня изменяется по заданному закону, то связь является нестационарной и ее уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$.

Связь называется *удерживающей* (двухсторонней), если она описывается уравнением (равенством). Голономную стационарную удерживающую связь, наложенную на материальную точку, можно представить в виде двух бесконечно близких одинаковых поверхностей, между которыми только и может находиться точка. *Неудерживающая* (односторонняя) связь описывается неравенством. Например, если математический маятник представляет собой тонкий стержень длиной l , вращающийся вокруг неподвижной оси и к свободному концу которого прикреплен груз (материальная точка), то связь для груза будет удерживающая. Если же груз прикреплен к свободному концу нерастяжимой нити длиной l , то связь будет неудерживающая, поскольку груз может находиться как на поверхности сферы радиусом l , так и внутри нее.

Обобщенные координаты

Пусть механическая система состоит из N материальных точек. Положение такой системы в пространстве определяется $3N$ декартовыми координатами. Если на систему наложено m голономных удерживающих связей, то независимыми между собой будут не $3N$, а $n = 3N - m$ координат. Выбрав n декартовых координат системы в качестве независимых, остальные m координат можно найти при помощи уравнений связи. Выбор декартовых координат в качестве независимых для ряда задач механики оказывается нерациональным, так как приводит к громоздким выкладкам. Поэтому целесообразно использовать и другие независимые координаты. Независимые между собой координаты, которые однозначно определяют положение механической системы в пространстве, в любой момент времени называются *обобщенными координатами*. Их обозначают $q_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. В качестве обобщенных координат можно использовать отрезки прямых, дуги, углы, а также любые другие параметры, удовлетворяющие определению обобщенных координат. Отметим, что для одной и той же механической системы может быть несколько вариантов выбора обобщенных координат. Так, для системы, показанной на рис. 18.3, в качестве обобщенных координат могут

быть выбраны: 1) координаты x_C центра масс катка 1 и s_B центра масс цилиндра 3; 2) координата x_C центра масс катка и угол φ_3 поворота цилиндра 3; 3) координаты x_C и s_B^r центра масс цилиндра 3 относительно фиксированной точки D нити. Конкретный выбор обобщенных координат определяется поставленной задачей.

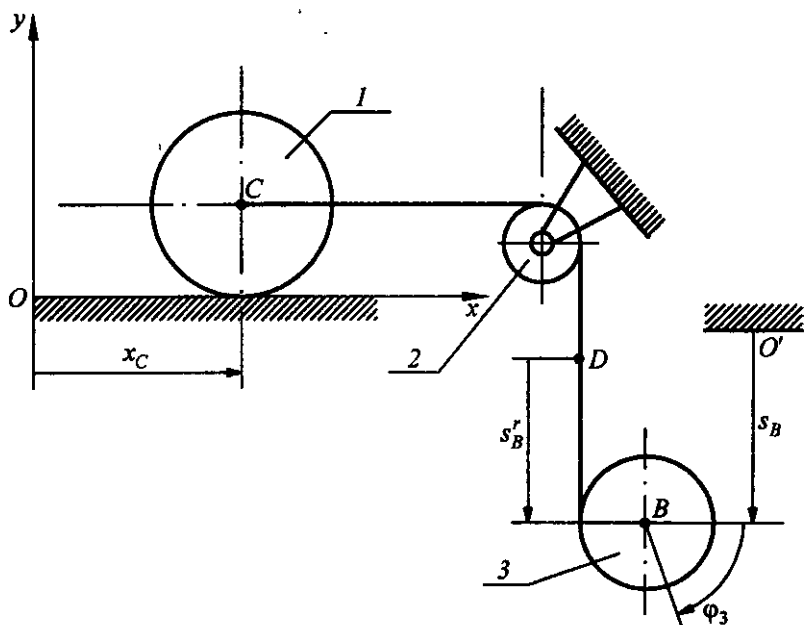


Рис. 18.3

Для системы, состоящей из N точек, на которые наложено m голономных удерживающих связей, через обобщенные могут быть выражены $n = 3N - m$ независимых декартовых координат. Остальные декартовы координаты выражаются через те же обобщенные координаты с помощью m уравнений связей. Следовательно, и радиус-векторы всех точек системы выражаются через обобщенные координаты:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Например, положение кривошипно-ползунного механизма, показанного на рис. 18.4, определяется двумя его точками A и B . Из четырех декартовых координат (x_A, y_A, x_B, y_B) независимой будет только одна, так как число m голономных удерживающих связей равно трем:

$$OA = l_1 = \text{const}, \quad AB = l_2 = \text{const}, \quad y_B = 0.$$

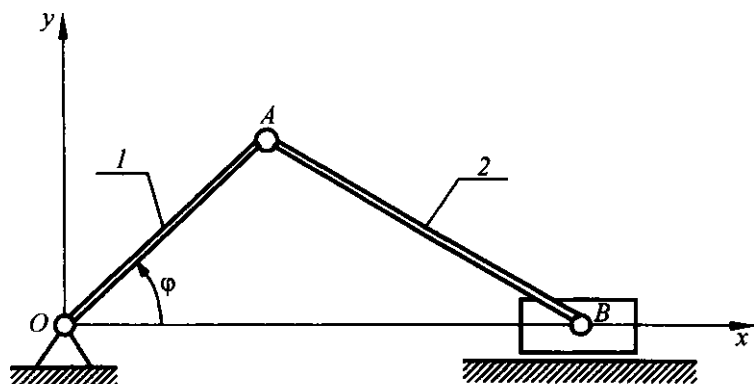


Рис. 18.4

Если за независимую декартову координату принять x_A , а за обобщенную — угол φ поворота кривошипа l_1 , то $x_A = l_1 \cos \varphi$. Другие декартовы координаты точек системы определим при помощи уравнений связей. Из уравнения $x_A^2 + y_A^2 - l_1^2 = 0$ находим $y_A = l_1 \sin \varphi$. Ордината $y_B = 0$. Из условия $(x_B - x_A)^2 + y_A^2 - l_2^2 = 0$ получаем $x_B^2 = 2l_1 x_B \cos \varphi + l_2^2 - l_1^2$. Если $l_2 = l_1$, то $x_B = 2l_1 \cos \varphi$.

Таким образом, все декартовы координаты точек системы выражены через угол φ .

Возможные перемещения. Число степеней свободы механической системы

Перемещение материальной точки зависит от ее массы, приложенных к точке сил, связей и начальных условий. Определение

действительного перемещения сводится к решению задачи динамики точки. В аналитической механике в качестве одного из основных используется понятие о возможном перемещении точки.

Возможным называется любое допускаемое связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени. Возможные перемещения не связаны ни с движением точки, ни с изменением наложенных на нее связей. Они представляют собой воображаемые перемещения, которые можно представить совокупностью бесконечно малых векторов $\delta \vec{r}$, зависящих только от структуры связей, зафиксированных в рассматриваемый момент времени. Вектор $\delta \vec{r}$ называют *вариацией радиус-вектора* точки, а проекции $\delta \vec{r}$ на оси декартовой системы координат — *вариациями координат*. Их обозначают $\delta x, \delta y, \delta z$. Возможные перемещения точки должны удовлетворять дифференциальным соотношениям, вытекающим из уравнений связей при условии, что время является фиксированным. Получим эти соотношения и установим различие между бесконечно малым действительным $d\vec{r}$ и возможными $\delta \vec{r}$ перемещениями точки.

Пусть на материальную точку наложена голономная удерживающая связь, уравнение которой

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (18.3)$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точки в момент времени t . Через бесконечно малый промежуток времени dt координаты $(x + dx), (y + dy), (z + dz)$ точки также должны удовлетворять уравнению связи, т. е.

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0. \quad (18.4)$$

Раскладывая функцию (18.4) в ряд Тейлора с точностью до слагаемых выше первого порядка малости и учитывая, что связь имеет вид (18.3), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (18.5)$$

Выражение (18.5) представляет собой условие, которому должны удовлетворять проекции вектора $d\vec{r}$ элементарного действительного перемещения точки.

Представим теперь, что перемещение точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, допускаемое связями, происходит в результате изменения координат точки при фиксированном времени. Координаты точки с учетом их вариации должны удовлетворять уравнению связи

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0.$$

Раскладывая эту функцию в ряд Тейлора с точностью до слагаемых выше первого порядка малости и учитывая, что связь имеет вид (18.3), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (18.6)$$

Таким образом, при наличии связи вида (18.3) вариации координат точки должны удовлетворять условию (18.6). При выводе условия (18.6) время полагалось фиксированным, поэтому данное условие должно выполняться как при стационарных, так и при нестационарных связях, наложенных на точку.

Используя понятие вектор-градиент, выражение (18.6) можно рассматривать как скалярное произведение векторов:

$$\overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$$

и

$$\delta \vec{r} = \delta x \bar{i} + \delta y \bar{j} + \delta z \bar{k}.$$

Вектор-градиент расположен вдоль главной нормали к поверхности $f(x, y, z, t) = 0$. Поэтому условие (18.6) означает, что вектор $\delta \vec{r}$ ортогонален главной нормали и, следовательно, расположен вдоль касательной. Таким образом, если на точку наложена голономная удерживающая связь, то возможными перемещениями точки из положения, занимаемого ею в какой-либо момент времени, являются бесконечно малые векторы $\delta \vec{r}$, расположенные в касательной плоскости к поверхности $f(x, y, z, t) = 0$, зафиксированной в этот момент времени.

Установим связь между элементарными действительными и возможными перемещениями точки. Если наложенная на точку связь стационарная, то $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ и условие (18.5) аналогично условию (18.6). Следовательно, если связь стационарная, то элементарное действительное перемещение точки совпадает с одним из возможных. При нестационарной связи проекции вектора $d\vec{r}$ удовлетворяют условию, не совпадающему с условием для проекций вектора $\delta\vec{r}$. В этом случае элементарное действительное перемещение точки не принадлежит к числу возможных.

Этим выводам можно дать геометрическую интерпретацию. Если связь голономная и стационарная, то ее можно рассматривать как поверхность, на которой должна находиться материальная точка. Условие (18.6) означает, что векторы $\delta\vec{r}$ возможных перемещений точки располагаются в касательной плоскости, проведенной в той точке поверхности, в которой в данный момент времени находится материальная точка. В той же плоскости, согласно условию (18.5), должен расположиться и вектор $d\vec{r}$ элементарного действительного перемещения точки. Если же связь голономная, но не стационарная, то действительное перемещение точки можно рассматривать как результат двух движений: переносного — вместе с изменяющейся поверхностью (связью) — и относительного — движения точки относительно фиксированной («замороженной») в данный момент времени поверхности. Возможное перемещение, согласно его определению, соответствует только относительному движению точки. Поэтому в случае нестационарной связи действительное перемещение точки не совпадает ни с одним из возможных ее перемещений.

Возможным перемещением системы называется любая совокупность возможных перемещений всех ее точек. Для системы, состоящей из N точек, возможны $3N$ вариаций декартовых координат. Если на систему наложено m голономных удерживающих связей, то вариации координат точек системы должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Для системы с голономными связями число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат. В каждый момент времени положение системы может быть определено как в декартовых, так и в обобщенных координатах. Поэтому действительное и возможные перемещения любой точки системы выражаются через ее обобщенные координаты. Для системы с n степенями свободы радиус-вектор каждой точки является функцией обобщенных координат и времени $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Следовательно, возможное перемещение можно вычислить как полный дифференциал функции $\vec{r}_k(q_i, t)$ при фиксированном времени:

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n.$$

Таким образом,

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

где $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \vec{k}$.

Элементарное действительное перемещение точки определяется как полный дифференциал функции $\vec{r}_k(q_i, t)$, но время при этом не фиксируется:

$$d\vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt.$$

Пример 18.3. Выразить возможные перемещения точек A и B стержня (рис. 18.5) через его обобщенную координату.

Решение. Положение стержня в плоскости Oxy определяется четырьмя декартовыми координатами точек A и B . Уравнения голономных стационарных связей, наложенных на стержень, имеют вид

$$x_B = 0; \quad y_A = 0; \quad x_A^2 + y_B^2 - l^2 = 0,$$

где $l = AB$.

Число степеней свободы $n = 1$, и в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол φ , который стержень образует с осью Ox .

Радиус-вектор точки A равен $\vec{r}_A = x_A \vec{i}$. Так как $x_A = l \cos \varphi$, то

$$\delta \vec{r}_A = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \varphi} \delta \varphi = -l \sin \varphi \cdot \delta \varphi \vec{i}.$$

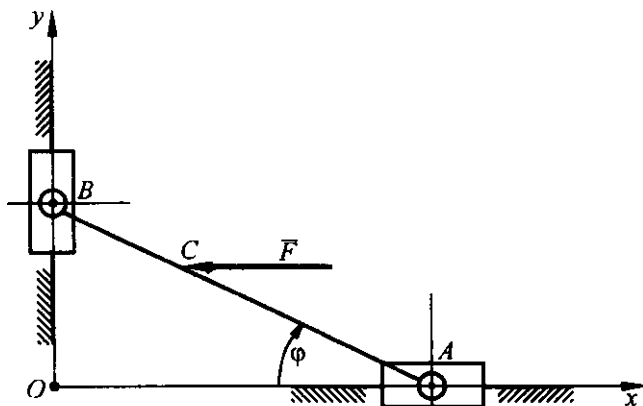


Рис. 18.5

Аналогично радиус-вектор точки B $\vec{r}_B = l \sin \varphi \cdot \vec{j}$ и

$$\delta \vec{r}_B = l \cos \varphi \cdot \delta \varphi \vec{j}.$$

Если на систему, состоящую из N материальных точек, наложено m голономных и s неголономных связей, то число обобщенных координат $n = 3N - m$. Обобщенные координаты и их производные по времени должны удовлетворять s уравнениям неголономных связей. Если неголономные связи линейны относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то для вариаций обобщенных координат могут быть получены s уравнений вида

$$a_{j1}(q_i, t) \delta q_1 + a_{j2}(q_i, t) \delta q_2 + \dots + a_{jn}(q_i, t) \delta q_n = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, s.$$

Число независимых вариаций обобщенных координат, а значит, и число степеней свободы неголономных систем $n_1 = 3N - m - s$. Таким образом, число обобщенных координат больше числа степеней свободы, и обобщенные координаты неголономных систем не являются независимыми.

18.2. Возможная работа силы. Идеальные связи

Возможной работой силы называется работа силы на любом возможном перемещении точки ее приложения:

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}.$$

Для вычисления возможной работы можно применять известные формулы для элементарной работы силы, подставляя вместо элементарного действительного $d\vec{F}$ возможное $\delta\vec{F}$ перемещение точки. При использовании декартовых координат

$$\delta A(\vec{F}) = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Например, возможная работа горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к стержню в точке C (см. рис. 18.5), равна $\delta A(\vec{F}) = F_x \delta x_C$. Так как $F_x = -F$, $x_C = BC \cos \varphi$ и $\delta x_C = -BC \sin \varphi \cdot \delta \varphi$, то

$$\delta A(\vec{F}) = FBC \sin \varphi \cdot \delta \varphi.$$

Если к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси Oz приложена сила $\vec{F}$, момент которой относительно оси равен M_z , то

$$\delta A(\vec{F}) = M_z \delta \varphi,$$

где $\delta \varphi$ — возможный угол поворота тела вокруг оси Oz .

Установив понятие возможной работы силы, можно расширить классификацию связей, разделяя их на *идеальные* и *неидеальные*.

Связи называются *идеальными*, если равна нулю сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении системы (из занимаемого в данный момент времени положения).

Для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^N (R_{kx} \delta x_k + R_{ky} \delta y_k + R_{kz} \delta z_k) = 0.$$

Полагая связи идеальными, можно решить задачу динамики несвободной системы. Эта задача состоит в том, что для данной системы с заданными активными силами и начальными условиями нужно найти уравнения движения и реакции связей. Например, если материальная точка движется по гладкой поверхности, уравнение которой $f(x, y, z) = 0$, то нормальная реакция $\vec{N} = \lambda \overline{\text{grad}} f$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Уравнение связи совместно с дифференциальными уравнениями движения точки образует замкнутую систему уравнений. Эта система уравнений позволяет определить как уравнения движения точки, так и множитель Лагранжа, а значит, и нормальную реакцию связи

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Приведем примеры идеальных связей.

1. Гладкая поверхность (плоскость) для материальной точки (рис. 18.6). В этом случае

$$\delta A(\bar{R}) = \bar{R} \cdot \delta \bar{r} = |\bar{R}| \cdot |\delta \bar{r}| \cos(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0,$$

так как вектор $\bar{R}$ расположен вдоль нормали к поверхности и, следовательно, ортогонален вектору $\delta \bar{r}$ возможного перемещения точки.

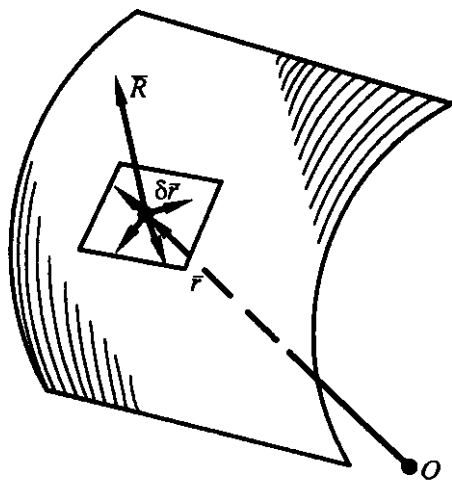


Рис. 18.6

2. Нерастяжимая нить. Реакция нити — сила ее натяжения — ортогональна возможному перемещению точки ее приложения. Поэтому

$$\bar{R} \cdot \delta \bar{r} = 0.$$

3. Цилиндрические и сферические шарниры, если поверхности соприкасающихся тел считаются идеально гладкими. Если твердое тело при помощи шарнира прикреплено к неподвижной опоре (рис. 18.7, а), то реакция приложена к неподвижной точке. Возможное перемещение такой точки равно нулю и

$$\delta A(\bar{R}) = \bar{R} \delta \bar{r}_0 = 0.$$

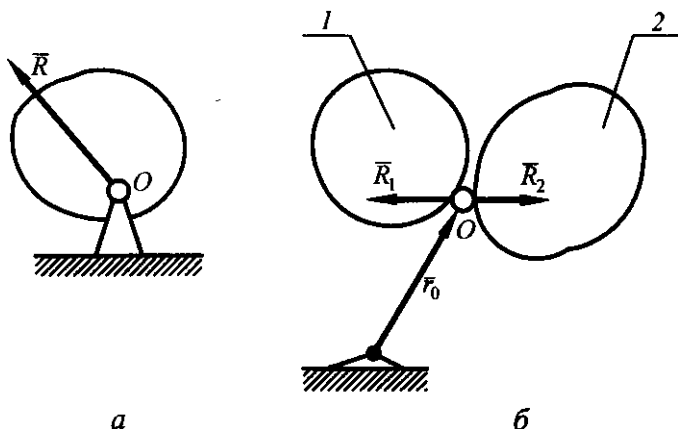


Рис. 18.7

Если два твердых тела при помощи шарнира с идеально гладкими поверхностями соединены между собой, то

$$\delta A(\bar{R}_1) + \delta A(\bar{R}_2) = \bar{R}_1 \cdot \delta \bar{r}_0 + \bar{R}_2 \cdot \delta \bar{r}_0 = (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \cdot \delta \bar{r}_0 = 0,$$

поскольку $\bar{R}_2 = -\bar{R}_1$ (силы действия и противодействия).

4. Твердая шероховатая поверхность для цилиндрического катка при качении без скольжения. Контакт катка с поверхностью происходит по линии. Поэтому реакцией связи является система сил, распределенных вдоль линии контакта. Возможная работа сил реакции равна нулю, так как они приложены к неподвижным в каждый момент времени точкам — МЦС сечений катка.

18.3. Обобщенные силы

В аналитической механике наряду с понятием о силе как векторной величине, характеризующей воздействие на данное тело со стороны других материальных тел, используют поня-

тие об обобщенной силе. Для определения обобщенной силы рассмотрим возможную работу сил, приложенных к точкам системы,

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Если механическая система при наложенных на нее голономных удерживающих связях имеет n степеней свободы, то положение этой системы определяется $q_1, q_2, \dots, q_n$ обобщенными координатами и $r_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Возможное перемещение k -й точки

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Подставляя $\delta \bar{r}_k$ в формулу для возможной работы сил, получаем

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Скалярную величину $\left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = Q_i$ называют обобщен-

ной силой, соответствующей i -й обобщенной координате.

Таким образом, *обобщенной силой, соответствующей i -й обобщенной координате, называется величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему.*

В общем случае обобщенная сила является функцией обобщенных координат, скоростей точек системы и времени. Из определения следует, что обобщенная сила — скалярная величина, которая зависит от выбранных для данной механической системы обобщенных координат. Это значит, что при изменении набора обобщенных координат, определяющих положение данной системы, изменятся и обобщенные силы. Так, для диска радиусом r и массой m , который катится без скольжения по наклонной плоскости (рис. 18.8), за обобщенные координаты можно принять либо s — координата центра масс диска, либо φ — угол поворота диска. Если пренебречь сопротивлением качению, то в пер-

вом случае обобщенной силой будет $Q_s = mg \sin \alpha$, а во втором — $Q_\varphi = mgr \sin \alpha$. Обобщенная координата определяет и единицу измерения соответствующей обобщенной силы. Из выражения $\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$ следует, что единица измерения обобщенной силы равна единице измерения работы, деленной на единицу измерения обобщенной координаты. Если в качестве обобщенной координаты q_i принять координату какой-либо точки, то единица измерения обобщенной силы Q_i будет ньютон, если же в качестве q_i будет принят угол поворота тела, то единицей измерения будет ньютон на метр.

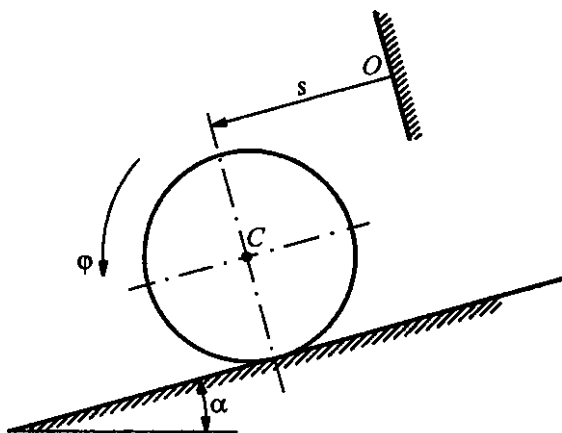


Рис. 18.8

Существуют различные способы вычисления обобщенных сил.

1. Согласно определению, обобщенная сила

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Принимая во внимание, что $\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k}$, получаем

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \quad (18.5)$$

Этот способ определения обобщенных сил называют **аналитическим**.

Пример 18.4. Найти обобщенную силу Q_φ , если в кривошипно-ползунном механизме (рис. 18.9) $OA = AB = l$, $\bar{F}_1$ — вертикальная, а $\bar{F}_2$ — горизонтальная силы.

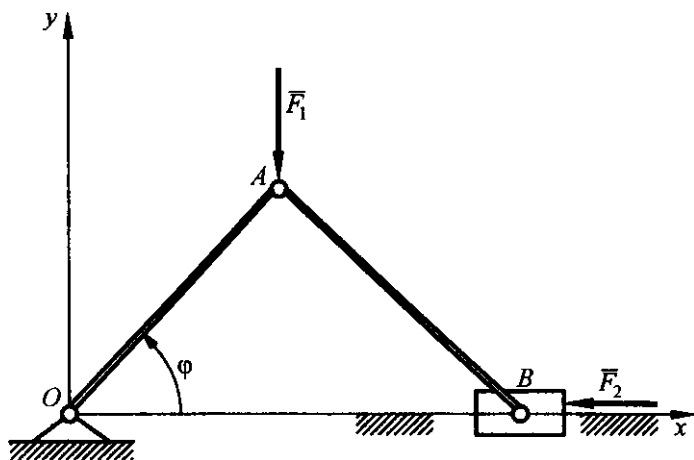


Рис. 18.9

Решение. Так как $F_{1x} = 0$ и $F_{2y} = 0$, то обобщенная сила

$$Q_\varphi = F_{1y} \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} + F_{2x} \frac{\partial x_B}{\partial \varphi}.$$

Проекции сил и координаты точек их приложения равны

$$F_{1y} = -F_1; \quad F_{2x} = -F_2; \quad y_A = l \sin \varphi; \quad x_B = 2l \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = -F_1 l \cos \varphi + 2F_2 l \sin \varphi.$$

2. Обобщенные силы для механических систем с $n > 1$ целесообразно вычислять последовательно, учитывая, что обобщенные координаты, а значит, и их вариации независимы между собой. Системе всегда можно сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не варьируются. В этом случае

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_{q_i} = Q_i \delta q_i,$$

откуда

$$Q_i = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_{q_i}}{\delta q_i}. \quad (18.6)$$

Индекс q_i в (18.6) означает, что возможная работа сил, действующих на систему, определяется на перемещениях точек приложения этих сил, соответствующих вариации только одной i -й обобщенной координаты.

Пример 18.5. Найти обобщенные силы Q_s и Q_φ для системы, показанной на рис. 18.10. Масса груза 1 равна M , масса цилиндра 2 равна m , а его радиус r . Нить по блоку 3 и цилиндру 2 не скользит. Центр масс цилиндра движется вдоль вертикали.

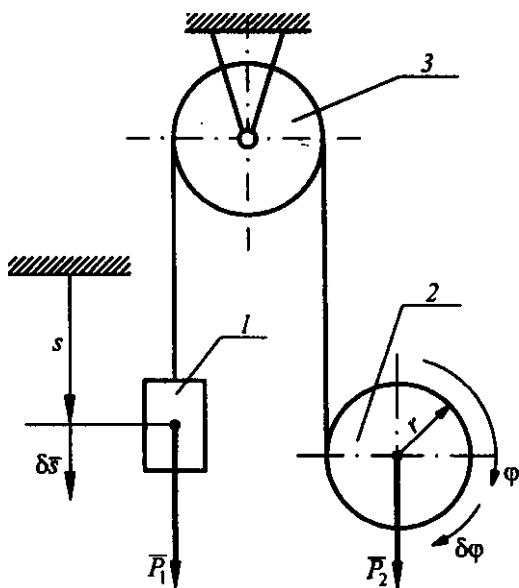


Рис. 18.10

Решение. Для определения обобщенной силы Q_s зададим приращение δs координате груза 1, а для угла φ поворота цилиндра 2 будем считать $\delta \varphi = 0$.

При этом цилиндр будет иметь перемещение, равное перемещению груза. Следовательно,

$$\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right] = (P_1 - P_2) \delta s; \quad Q_s = \frac{\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_s}{\delta s} = (M - m)g,$$

где $P_1 = Mg$; $P_2 = mg$.

Определяя Q_φ , будем полагать, что $\delta s = 0$, а $\delta \varphi \neq 0$. Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) \right]_\varphi = \delta A(\bar{P}_2) = mgr \delta \varphi; \quad Q_\varphi = mgr.$$

3. Если силы, действующие на механическую систему, потенциальные, то для определения обобщенных сил можно использовать силовую функцию U или потенциальную энергию Π системы. Потенциальная сила

$$\bar{F}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \bar{k}.$$

Подставляя проекции силы $\bar{F}_k$ в (18.5), получаем

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Так как $U = -\Pi + \text{const}$, то

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Пример 18.6. В системе, показанной на рис. 18.11, массы груза 1 и цилиндра 2 равны M и m соответственно, радиус цилиндра r , а коэффициент жесткости пружины c .

Полагая, что трение между грузом 1 и наклонной плоскостью отсутствует, а траектория точки A — вертикаль, найти обобщенные силы Q_s и Q_φ , если при $s = 0$ пружина не деформирована.

Решение. Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} cs^2 + Mg \sin \alpha \cdot s - mg(s + r\varphi).$$

Тогда

$$Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -cs - (M \sin \alpha - m)g; \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr.$$

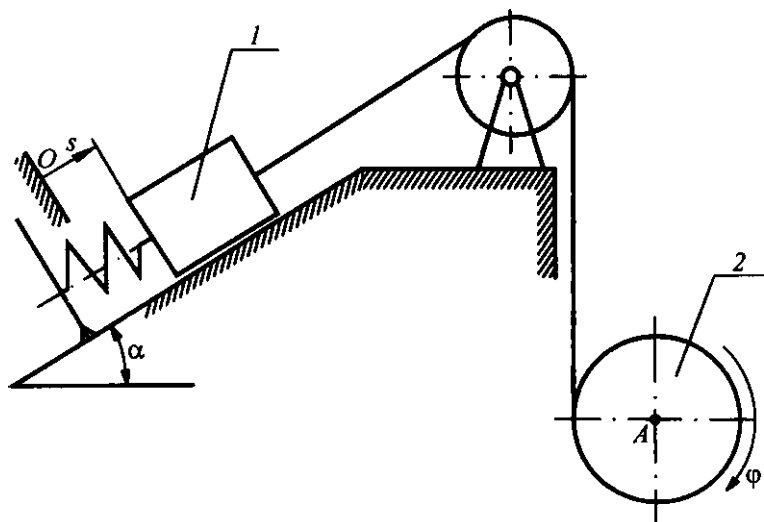


Рис. 18.11

18.4. Дифференциальные принципы аналитической механики

Принципы механики являются основой эффективных методов изучения равновесия и движения механических систем. Их принято разделять на вариационные и невариационные. *Невариационные принципы* устанавливают общие для всех движений систем свойства, которые имеют место как в определенные моменты, так и на конечных интервалах времени. К ним относятся аксиомы механики, принцип независимости действия сил, принцип Даламбера и т. п. *Вариационные принципы* устанавливают критерии, позволяющие отличить истинное состояние системы от возможного. Вариационные принципы разделяют на дифференциальные и интегральные. *Дифференциальные принципы* устанавливают критерии истинного состояния системы для фиксированного момента времени, а *интегральные* — на конечном интервале времени.

Принцип возможных перемещений

Аналитические условия равновесия механических систем были сформулированы Ж. Лагранжем в его фундаментальной работе «Аналитическая механика» (1788 г.) как «принцип воз-

можных скоростей». В настоящее время принцип, определяющий в общей форме условия равновесия системы, называется *принципом возможных перемещений, или принципом Лагранжа*: чтобы данное положение механической системы со стационарными идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы из этого положения была равна нулю.

Данной формулировке соответствует условие равновесия системы

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \quad (18.7)$$

или в декартовых координатах

$$\sum_{k=1}^N (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0.$$

Положением равновесия называется такое положение механической системы, в котором она может находиться сколь угодно долго, если в начальный момент времени система была приведена в это положение с нулевыми скоростями ($\bar{v}_k = 0$).

Необходимость условия (18.7) для равновесия системы можно доказать следующим образом. Пусть механическая система, состоящая из N материальных точек, находится в равновесии. Тогда приложенные к каждой точке активные силы и реакции связей уравновешены, т. е.

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (18.8)$$

Умножив каждое равенство (18.8) на возможное перемещение $\delta \bar{r}_k$ соответствующей k -й точки и просуммировав скалярные произведения, получим

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Если наложенные на систему связи идеальные, то $\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$

и условие $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ является необходимым условием равновесия системы.

Доказательство достаточности принципа Лагранжа проведем методом от противного. Предположим, что условие (18.7) выполнено, а система не находится в равновесии. Значит под действием активных сил и реакций связей система за малый промежуток времени совершит некоторое действительное перемещение. При стационарных связях это действительное перемещение совпадает с одним из возможных, поэтому

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k \neq 0.$$

Так как связи идеальные, то $\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и тогда $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \neq 0$, что противоречит принятому выше предположению. Таким образом, достаточность принципа возможных перемещений доказана.

Принцип возможных перемещений дает возможность определить положение равновесия несвободной системы, не рассматривая реакции идеальных связей, так как они не входят в формулировку этого принципа.

Пример 18.7. Найти вертикальную силу $\bar{F}$, приложенную в точке A к линейке 2 эллипсографа (рис. 18.12), которая обеспечит равновесие системы при заданном угле φ ($0 < \varphi < \pi/2$). Сила $\bar{F}_1$ и момент M пары сил известны. Трением в шарнирах и направляющих, а также массой элементов системы пренебречь.

Решение. Условие равновесия эллипсографа имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \delta A(M) + \delta A(\bar{F}_1) + \delta A(\bar{F}) = 0. \quad (18.9)$$

Дадим системе возможное перемещение, повернув кривошип 1 на угол $\delta\varphi$. Возможная работа пары сил с моментом M равна $M\delta\varphi$. Вычислим возможную работу сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}$:

$$\delta A(\bar{F}_1) = F_{1x} \delta x_B, \quad \delta A(\bar{F}) = F_y \delta y_A.$$

Так как

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -F_1, \quad x_B = 2l \cos \varphi, \quad \delta x_B = -2l \sin \varphi \delta \varphi; \\ F_y &= -F, \quad y_A = l \sin \varphi, \quad \delta y_A = l \cos \varphi \delta \varphi, \end{aligned}$$

то

$$\delta A(\bar{F}_1) = 2F_1 l \sin \varphi \cdot \delta \varphi; \quad \delta A(\bar{F}) = -F l \cos \varphi \cdot \delta \varphi.$$

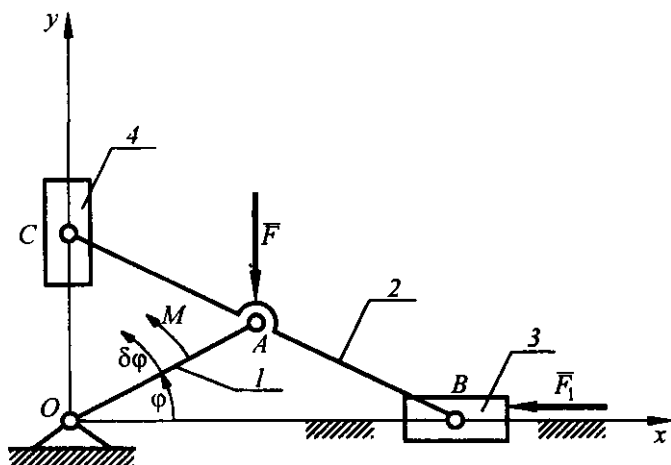


Рис. 18.12

Подставляя выражения для возможных работ сил в (18.9), получаем

$$M\delta\varphi + 2F_1 l \sin\varphi \cdot \delta\varphi - Fl \cos\varphi \cdot \delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$F = 2F_1 \operatorname{tg}\varphi + \frac{M}{l \cos\varphi}.$$

Однако принцип возможных перемещений позволяет находить и реакции идеальных связей. Для этого, в соответствии с принципом освобождаемости, связь отбрасывают, заменяя ее соответствующей реакцией. Эту реакцию включают в число активных сил. При отбрасывании связи увеличивается число степеней свободы системы. Поэтому точке приложения реакции отброшенной связи можно задать возможное перемещение. К системам с неидеальными связями принцип возможных перемещений неприменим. Однако в некоторых случаях, например при движении точки по шероховатой поверхности, связь рассматривают как идеальную, дополняя ее силой трения скольжения.

Пример 18.8. Г-образная рама состоит из двух стержней AC и CB , соединенных в точке C при помощи цилиндрического шарнира (рис. 18.13). Найти момент M_A заделки, если $AC = l_1$, $CD = l_2$, $DE = l_3$, момент M пары сил и сила $\bar{F}$ — заданы.

Решение. Заменим заделку шарнирно-неподвижной опорой, приложив при этом к стержню AC пару сил с моментом M_A . Дадим системе возможное перемещение, повернув стержень AC на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через точку A . При этом стержень CB повернется вокруг мгновенной осн, проходящей через точку D на угол $\delta\alpha = l_1/l_2 \delta\varphi$.

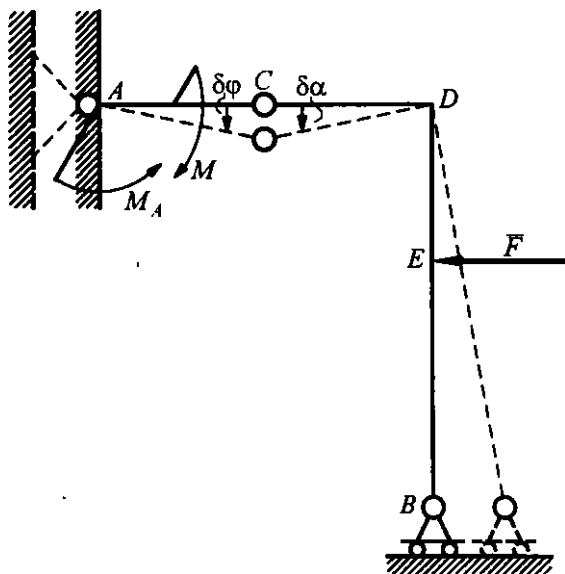


Рис. 18.13

Сумма возможных работ приложенных к раме сил, включая момент заделки, равна

$$\sum_{k=1}^N \delta A(\bar{F}_k) = \delta A(M_A) + \delta A(M) + \delta A(\bar{F}),$$

где $\delta A(M_A) = -M_A \delta\varphi$; $\delta A(M) = M \delta\varphi$; $\delta A(\bar{F}) = -F \delta s_E$; $\delta s_E = DE \delta\alpha = \frac{l_1 l_3}{l_2} \delta\varphi$.

Приравняв сумму возможных работ к нулю, получим

$$-M_A \delta\varphi + M \delta\varphi - F \frac{l_1 l_3}{l_2} \delta\varphi = 0,$$

откуда

$$M_A = M - F \frac{l_1 l_3}{l_2}.$$

Условия равновесия механической системы в обобщенных силах

Положим, что механическая система, состоящая из N точек, в силу наложенных на нее голономных удерживающих связей имеет n степеней свободы. Положение такой системы в пространстве определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, и радиус-вектор k -й точки есть функция обобщенных координат:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Возможное перемещение каждой точки системы

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Подставляя выражение для $\delta \bar{r}_k$ в условие (18.7) равновесия системы, получаем:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0.$$

После изменения порядка суммирования это условие принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0. \quad (18.10)$$

Так как обобщенные координаты независимы, то их вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ тоже независимы между собой. Поэтому условие (18.10) будет выполнено, если равны нулю обобщенные силы, соответствующие всем обобщенным координатам системы:

$$Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, условия равновесия механической системы можно сформулировать так: *для равновесия системы, подчиненной голономным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, соответствующие всем обобщенным координатам системы, были равны нулю.*

Если силы, приложенные к точкам механической системы, потенциальные, то

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

В этом случае условия равновесия имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.11)$$

Выражения (18.11) являются необходимыми условиями существования экстремумов функций U и Π . Таким образом, при равновесии системы, находящейся под действием потенциальных сил, все частные производные от силовой функции и потенциальной энергии по обобщенным координатам равны нулю.

Принцип Даламбера–Лагранжа. Общее уравнение динамики

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. В соответствии с принципом Даламбера, приложенные к каждой точке активные силы, реакции связей и силы инерции в любой момент времени образуют уравновешенную систему сходящихся сил. Эта система сил удовлетворяет условию равновесия

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad (18.12)$$

где $\bar{F}_k$ и $\bar{R}_k$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k -й точке; $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$.

Умножим обе части уравнения (18.12) скалярно на возможное перемещение $\delta \bar{r}_k$ k -й точки и просуммируем полученные для всех точек системы произведения. В результате имеем

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (18.13)$$

Это уравнение называется ***общим уравнением динамики***. Выражение (18.13) является условием, которое должно выполняться для любого совместного со связями движения системы под действием заданных активных сил. Общему уравнению динамики соответствует ***принцип Даламбера–Лагранжа***: *при движении механической системы в любой момент времени сумма работ активных сил, сил реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении из занимаемого положения равна нулю*. Принцип Даламбера–Лагранжа является вариационным и дифференциальным, потому что в нем рассматривается возможная работа активных сил, сил реакции и сил инерции в произвольный, но фиксированный момент времени. Отметим, что усло-

вие (18.13) выполняется только для истинного движения системы. Общее уравнение динамики можно записать и в других формах. Раскрывая скалярные произведения, получаем

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} + R_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + R_{ky} + \Phi_{ky})\delta y_k + (F_{kz} + R_{kz} + \Phi_{kz})\delta z_k] = 0.$$

Так как $\Phi_{kx} = -m_k \ddot{x}_k$, $\Phi_{ky} = -m_k \ddot{y}_k$, $\Phi_{kz} = -m_k \ddot{z}_k$, то

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} + R_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} + R_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} + R_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \quad (18.14)$$

Выражение (18.14) определяет аналитическую форму записи общего уравнения динамики.

Если связи, наложенные на систему, идеальные, то

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0 \text{ и общее уравнение динамики принимает вид}$$

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (18.15)$$

Таким образом, при движении системы с идеальными связями в любой момент времени должна быть равна нулю сумма возможных работ активных сил и сил инерции.

Если для изучения движения системы применяют обобщенные координаты, то $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ и $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$.

Подставив выражение для возможного перемещения $\delta \bar{r}_k$ в (18.13) и изменив порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (18.16)$$

Так как $\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i$ — обобщенная сила, соответ-

ствующая i -й обобщенной координате, то $\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i^{\text{ин}}$ — обобщенная сила инерции, соответствующая той же координате.

Если вариации обобщенных координат независимы между собой, условие (18.16) принимает вид

$$Q_i + Q_i^{nn} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.17)$$

Выражение (18.17) называется *общим уравнением динамики в обобщенных силах*.

При изучении движения твердого тела с помощью принципа Даламбера–Лагранжа силы инерции точек тела нужно привести к какому-либо центру, например центру масс тела. Тогда сумму возможных работ сил инерции можно вычислить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \bar{R}_{ин} \cdot \delta \bar{r}_C + L_{\omega}^{nn} \cdot \delta \varphi,$$

где $\bar{R}_{ин}$, L_{ω}^{nn} — главный вектор и главный момент сил инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; $\delta \bar{r}_C$ — возможное перемещение центра масс; $\delta \varphi$ — возможный угол поворота тела вокруг мгновенной оси вращения.

Пример 18.9. Определить ускорение центра масс диска радиусом r , который без скольжения скатывается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 18.14). Коэффициент трения качения равен f_k .

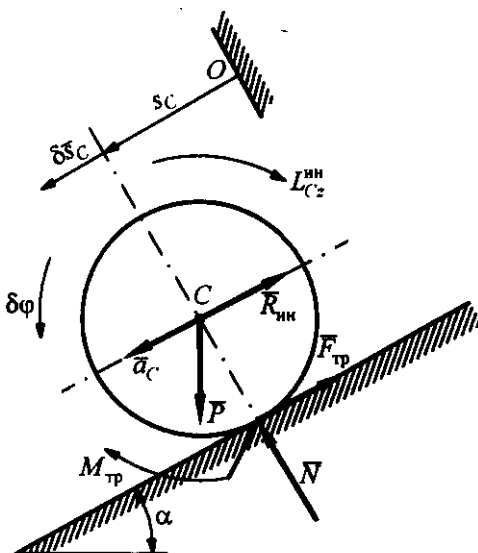


Рис. 18.14

Решение. Общее уравнение динамики для диска имеет вид

$$\sum_{k=1}^N A_k = \delta A(\bar{P}) + \delta A(M_{\text{тр}}) + \delta A(\bar{R}_{\text{ин}}) + \delta A(L_{Cz}^{\text{ин}}) = 0.$$

Возможные работы сил нормальной реакции $\bar{N}$ и трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ равны нулям, так как они приложены к неподвижной в каждый момент времени точке — МЦС диска. Зададим диску возможное перемещение, при котором точка C получит перемещение δs_C . Тогда

$$\delta A(\bar{P}) = P \sin \alpha \cdot \delta s_C.$$

Момент трения качения

$$M_{\text{тр}} = (M_{\text{тр}})_{\text{max}} = f_k N = P f_k \cos \alpha$$

и

$$\delta A(M_{\text{тр}}) = -M_{\text{тр}} \delta \varphi = -\frac{P f_k}{r} \cos \alpha \cdot \delta s_C.$$

Главный вектор и главный момент сил инерции точек диска относительно оси Cz соответственно равны

$$\bar{R}_{\text{ин}} = -\frac{P}{g} \bar{a}_C; \quad L_{Cz}^{\text{ин}} = -\frac{P r^2}{2g} \varepsilon_z,$$

где $\varepsilon_z = \frac{a_C}{r}$.

Возможные работы

$$\delta A(\bar{R}_{\text{ин}}) = -\frac{P}{g} a_C \delta s_C,$$

$$\delta A(L_{Cz}^{\text{ин}}) = -\frac{P r^2}{2g} \frac{a_C}{r} \frac{\delta s_C}{r}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^4 \delta A_k = P \sin \alpha \cdot \delta s_C - P \frac{f_k}{r} \cos \alpha \cdot \delta s_C - \frac{P}{g} a_C \cdot \delta s_C - \frac{P r^2}{2g} \frac{a_C}{r} \frac{\delta s_C}{r} = 0.$$

Отсюда находим

$$a_C = \frac{2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right).$$

Пример 18.10. В механизме, показанном на рис. 18.15, кривошип 1 массой m_1 и длиной l , вращаясь вокруг неподвижной горизонтальной оси Oz , при помощи шатуна 2 такой же длины приводит в движение ползун 3 массой m_3 . Ползун 3 соединен пружиной 5 с ползуном 4 массой m_4 . К кривошипу приложена пара сил с постоянным моментом M_1 . Коэффициент жесткости пружины c .

Пренебрегая трением в шарнирах и направляющих, а также массой шатуна и принимая кривошип за однородный стержень, составить дифференциальные уравнения движения механизма.

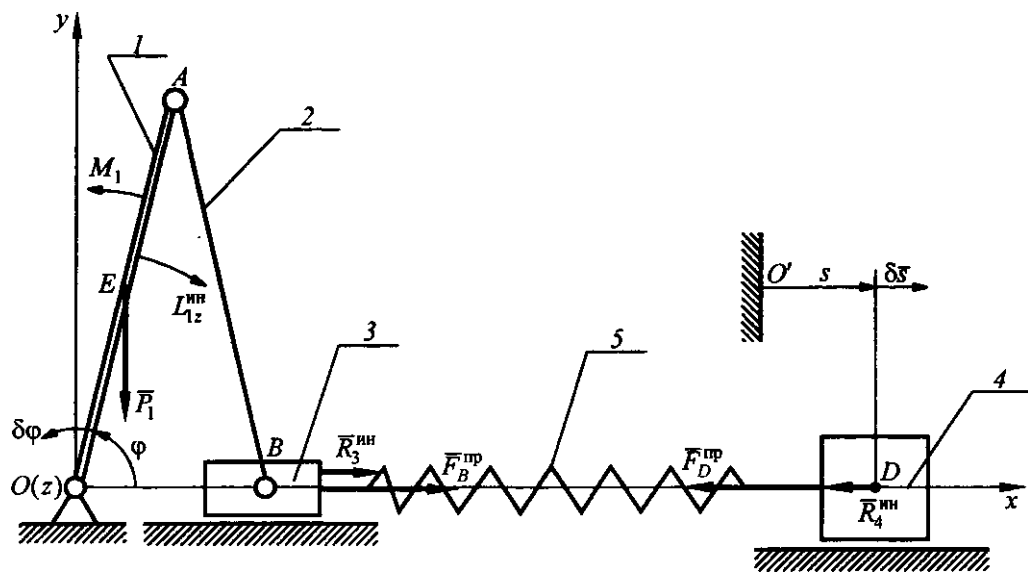


Рис. 18.15

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем угол φ поворота кривошипа 1 и координату s ползуна 4. При $\varphi = 0$ и $s = 0$ пружина 5 не деформирована. Задавая системе возможные перемещения, при которых $\delta\varphi \neq 0, \delta s = 0$ и $\delta\varphi = 0, \delta s \neq 0$, с помощью принципа Даламбера–Лагранжа получим два уравнения

$$M_1\delta\varphi + L_{1z}^{nn}\delta\varphi + P_{1y}\delta y_E + R_{3x}^{nn}\delta x_B + F_{Bx}^{np}\delta x_B = 0; \quad (18.18)$$

$$F_{Dx}^{np}\delta s + R_{4x}^{nn}\delta s = 0. \quad (18.19)$$

Главный момент сил инерции кривошипа 1 относительно оси Oz и главные векторы сил инерции ползунов 3 и 4 соответственно равны

$$L_{1z}^{nn} = -J_{Oz}\ddot{\varphi} = -\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}; \quad \bar{R}_3^{nn} = -m_3\bar{a}_3; \quad \bar{R}_4^{nn} = -m_4\bar{a}_D,$$

где $\bar{a}_3 = \ddot{x}_B\bar{i}$; $\ddot{x}_B = -2l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$; $\bar{a}_D = \ddot{s}\bar{i}$.

Кроме того,

$$P_{1y} = -m_1g; \quad \delta y_E = \frac{1}{2}l\cos\varphi\delta\varphi;$$

$$R_{3x}^{nn} = 2m_3l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi); \quad \delta x_B = -2l\sin\varphi\delta\varphi;$$

$$F_{Bx}^{np} = c[s + 2l(1 - \cos\varphi)], \quad F_{Dx}^{np} = -c[s + 2l(1 - \cos\varphi)].$$

Подставляя выражения для проекций сил и возможных перемещений в (18.18), (18.19) и сокращая на $\delta\varphi$ и δs , получаем

$$\begin{aligned} M_1 - \frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi} - 4m_3l^2\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - 2m_3l^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi - \frac{1}{2}m_1gl\cos\varphi - \\ - 4cl^2(1 - \cos\varphi)\sin\varphi - 2cls\sin\varphi = 0; \\ m_4\ddot{s} + cs + 2cl(1 - \cos\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Принцип Гаусса (принцип наименьшего принуждения)

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Пусть положение k -й точки в момент времени t определяется радиус-вектором $\bar{r}_k(t)$. Тогда в момент времени $t + dt$ при движении по истинной траектории радиус-вектор этой точки будет $\bar{r}_k(t + dt)$, причем

$$\bar{r}_k(t + dt) = \bar{r}_k(t) + \bar{v}_k(t)dt + \frac{1}{2}\bar{a}_k(t)dt^2 + \dots \quad (18.20)$$

Рассмотрим движение k -й точки по кинематически возможной траектории. Кинематически возможной является траектория,

координаты точек которой удовлетворяют голономным связям, наложенным на систему. В момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\bar{r}_k^*(t)$, а в момент времени $t + dt$ — радиус-вектором

$$\bar{r}_k^*(t + dt) = \bar{r}_k^*(t) + \bar{v}_k^*(t)dt + \frac{1}{2}\bar{a}_k^*(t)dt^2 + \dots, \quad (18.21)$$

где $\bar{v}_k^*(t)$, $\bar{a}_k^*(t)$ — кинематически возможные скорость и ускорение k -й точки системы в момент времени t .

Положим, что $\bar{r}_k(t) = \bar{r}_k^*(t)$. Тогда, вычитая (18.20) из (18.21), получим следующее выражение для возможного перемещения точки:

$$\begin{aligned} \delta\bar{r}_k &= \bar{r}_k^*(t + dt) - \bar{r}_k(t + dt) = [\bar{v}_k^*(t) - \bar{v}_k(t)]dt + \\ &+ \frac{1}{2}[\bar{a}_k^*(t) - \bar{a}_k(t)]dt^2 + \dots \end{aligned} \quad (18.22)$$

Если $\bar{v}_k(t) = \bar{v}_k^*(t)$, то, пренебрегая в правой части (18.22) слагаемыми, содержащими dt в третьей и более высоких степенях, находим:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{1}{2}\delta\bar{a}_k dt^2. \quad (18.23)$$

Подставив (18.23) в общее уравнение динамики (18.15) и разделив обе части выражения на $\frac{1}{2}dt^2$, получаем

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta\bar{a}_k = 0. \quad (18.24)$$

Массы точек и приложенные к системе активные силы заданы и не изменяются, поэтому

$$\delta\bar{a}_k = -\delta\left(\frac{\bar{F}_k}{m_k} - \bar{a}_k\right).$$

Подставляя вариацию ускорения $\delta\bar{a}_k$ в (18.24), находим

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta\left(\frac{\bar{F}_k}{m_k} - \bar{a}_k\right) = \delta\left[\sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2}\left(\frac{\bar{F}_k}{m_k} - \bar{a}_k\right)^2\right] = 0.$$

Выражение $\sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \left(\frac{\bar{F}_k}{m_k} - \bar{a}_k \right)^2 = Z$ введено Гауссом и назы-

вается **принуждением**. Принуждение является мерой отклонения действительного движения от того движения, которое совершала бы данная система, если начиная с некоторого момента времени она двигалась под действием только активных сил, а связи были бы отброшены. Условие (18.24) можно записать так:

$$\delta Z = 0.$$

Принцип Гаусса формулируется так: *при действительном движении механической системы с идеальными связями принуждение Z принимает значение, наименьшее из всех возможных значений при движениях, совместимых с наложенными связями.*

Принцип Гаусса можно рассматривать как модификацию принципа Даламбера–Лагранжа, в которой используется понятие экстремальности некоторого выражения, называемого принуждением.

Пример 18.11. Определить ускорение материальной точки, которая движется под действием силы тяжести по гладкой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 18.16). Начальная скорость точки равна нулю.

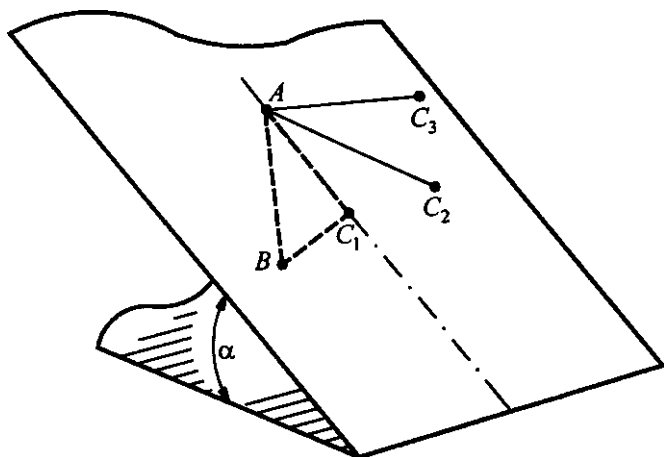


Рис. 18.16

Решение. Возможные траектории точки располагаются в наклонной плоскости, и возможные перемещения $\overline{AC}_i = \frac{1}{2} \overline{a}_i \delta t^2$. При свободном движении под действием силы тяжести перемещение точки за такой же промежуток времени равно $\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{g} \delta t^2$. Наименьшим из отрезков AC_i будет отрезок AC_1 , расположенный вдоль линии наименьшего ската. Так как

$$AC_1 = \frac{1}{2} a_1 \delta t^2 \text{ и } AC_1 = AB \sin \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \delta t^2,$$

то

$$a_1 = g \sin \alpha.$$

Такой же результат можно получить при использовании принуждения. Для данной задачи оно пропорционально квадрату длины отрезка BC_1 :

$$BC_1^2 = \frac{\delta t^4}{2} (g^2 + a_1^2 - 2a_1 g \sin \alpha).$$

Производная

$$\frac{\partial (BC_1^2)}{\partial a_1} = 0,$$

если

$$a_1 = g \sin \alpha.$$

18.5. Уравнения Лагранжа второго рода

Вывод уравнений

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщенных координатах. Рассмотрим движение системы, состоящей из N материальных точек, относительно инерциальной системы отсчета. Наложённые на систему связи — голономные, удерживающие, идеальные. Если некоторые связи не идеальные, то соответствующие им реакции следует добавить к действующим на систему активным силам.

Общее уравнение динамики для такой системы имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (\overline{F}_k - m_k \ddot{\overline{r}}_k) \cdot \delta \overline{r}_k = 0. \quad (18.25)$$

Пусть система имеет n степеней свободы и ее положение определяется $q_1, q_2, \dots, q_n$ обобщенными координатами $r_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Возможное перемещение k -й точки

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (18.26)$$

Подставляя (18.26) в (18.25) и изменяя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^N m_k \frac{d \dot{\bar{r}}_k}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (18.27)$$

В этом выражении $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i$ — обобщенная сила, соответствующая i -й обобщенной координате. Преобразуем выражение $\frac{d \dot{\bar{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right)$:

$$\frac{d \dot{\bar{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right). \quad (18.28)$$

Так как $\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$, то

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (18.29)$$

Равенство (18.29) называется *первым тождеством Лагранжа*. Заменяя на основании этого тождества производную $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ на $\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}$ в первом слагаемом выражения (18.28), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (18.30)$$

где T — кинетическая энергия механической системы.

Преобразуем теперь производную $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right)$. Так как

$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, то $\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right)$ — функция обобщенных координат и времени. Поэтому, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial \dot{q}_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial \dot{q}_i} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial \dot{q}_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial \dot{q}_i}. \quad (18.31)$$

С другой стороны,

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial \dot{q}_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial \dot{q}_i} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial \dot{q}_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (18.32)$$

Сопоставляя (18.31) и (18.32), заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

Это **второе тождество Лагранжа**. С учетом данного тождества получаем

$$\sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (18.33)$$

Подставляя в общее уравнение динамики (18.27) выражение для обобщенной силы Q_i , а также результаты преобразований (18.30) и (18.33), находим

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (18.34)$$

Вариации обобщенных координат независимы между собой, поэтому условие (18.34) будет выполнено, если равны нулям множители при всех δq_i , т. е. если

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.35)$$

Уравнения (18.35) называются **уравнениями Лагранжа второго рода**. Число этих уравнений равно числу степеней свободы. В уравнения Лагранжа не входят заранее неизвестные реакции идеальных связей.

Если силы, действующие на систему, потенциальные, то

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В таком случае уравнения Лагранжа второго рода принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функция, равная разности кинетической и потенциальной энергий механической системы, называется **функцией Лагранжа**:

$$L = T - \Pi.$$

Так как потенциальная энергия системы является функцией только обобщенных координат, то $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. При использовании функции Лагранжа уравнения (18.35) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (18.36)$$

Обобщенная координата, которая явно не входит в выражение функции Лагранжа, называется **циклической координатой**.

Если q_j — циклическая координата, то $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ и из (18.36) на-

ходим первый интеграл $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j$. Таким образом, если в качест-

ве обобщенных удастся выбрать циклические координаты, то вместо системы дифференциальных уравнений второго порядка получаем уравнения первого порядка.

Структура уравнений

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из N материальных точек, определяется по формуле $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k^2$. Если данная система с голономными нестационарными связями имеет n степеней свободы, то $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ и скорость k -й точки

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}.$$

Принимая во внимание выражение для $\dot{\bar{r}}_k$, кинетическую энергию системы можно записать так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \quad (18.37)$$

где

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}; \quad B_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}; \quad C = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Если наложенные на систему связи стационарные, то $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = 0$ и тогда $B_i = 0$, $C = 0$. В этом случае кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (18.38)$$

Производные от кинетической энергии (18.38), соответствующие левой части уравнений Лагранжа, равны

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j.$$

Так как

$$\frac{dA_{ij}}{dt} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s} \dot{q}_j \dot{q}_s, \\ \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_s. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа, получаем

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s} \dot{q}_j \dot{q}_s - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_s = Q_i, \quad (18.39)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Обобщенные силы являются функциями обобщенных координат, времени и, возможно, обобщенных скоростей, поэтому каждое из уравнений Лагранжа имеет второй порядок. Порядок уравнений не изменится и при нестационарных связях, так как в этом случае в выражения (18.39) войдут слагаемые, зависящие только от обобщенных координат, скоростей и времени.

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода для механической системы с голономными связями представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ относительно обобщенных координат.

Последовательность действий при использовании уравнений Лагранжа второго рода для решения задач аналитической динамики следующая:

- 1) определить число степеней свободы системы и выбрать наиболее удобные обобщенные координаты;
- 2) вычислить кинетическую энергию системы в ее абсолютном движении и выразить эту энергию через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$;
- 3) вычислить производные от кинетической энергии, входящие в левую часть уравнений Лагранжа;
- 4) определить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам;
- 5) подставить все вычисленные величины в уравнения Лагранжа.

Пример 18.12. Механическая система, показанная на рис. 18.17, состоит из однородного круглого цилиндра 1 массой m_1 и радиусом r , однородного стержня 2 длиной l и массой m_2 , к которому в точках A и B шарнирно прикреплены ползуны 5 и 6 массами m_5 и m_6 , а также пружин 3 и 4, коэффициенты жесткости которых c_3 и c_4 соответственно. Цилиндр без скольжения катается по горизонтальной плоскости. К нему приложена пара сил с моментом $M_1(t)$.

Пренебрегая сопротивлением качению цилиндра, трением в шарнирах и направляющих, а также массой пружин, составить дифференциальные уравнения движения системы.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем перемещение s центра масс цилиндра 1 и угол φ поворота стержня 2. Полагаем, что при $s = 0$ и $\varphi = 0$ пружины 3 и 4 не деформированы.

Уравнения Лагранжа второго рода для данной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (18.40)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий цилиндра 1, стержня 2 и ползунов 5 и 6:

$$T = T_1 + T_2 + T_5 + T_6.$$

Движение цилиндра плоское, поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} J_{Oz} \omega_1^2.$$

Так как $v_0 = \dot{s}$, $J_{Oz} = \frac{m_1 r^2}{2}$ и $\omega_1 = \frac{\dot{s}}{r}$, то

$$T_1 = \frac{3}{4} m_1 \dot{s}^2.$$

Кинетическая энергия стержня 2 определяется по формуле

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_D^2 + \frac{1}{2} J_{Dz} \omega_2^2.$$

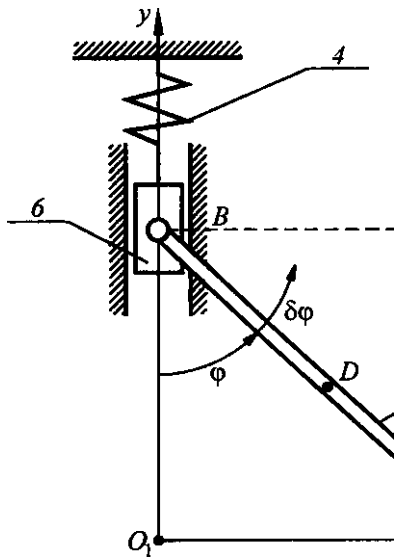
Скорость центра масс стержня $v_D = \omega_2 DP_2$, где P_2 — МЦС стержня. Принимая во внимание, что $DP_2 = l/2$, $J_{Dz} = m_2 l^2 / 12$, $\omega_2 = |\dot{\varphi}|$, получаем

$$T_2 = \frac{1}{6} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Ползуны движутся поступательно и, следовательно,

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_A^2 = \frac{1}{2} m_5 \dot{x}_A^2 = \frac{1}{2} m_5 l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2;$$

$$T_6 = \frac{1}{2} m_6 v_B^2 = \frac{1}{2} m_6 \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} m_6 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$



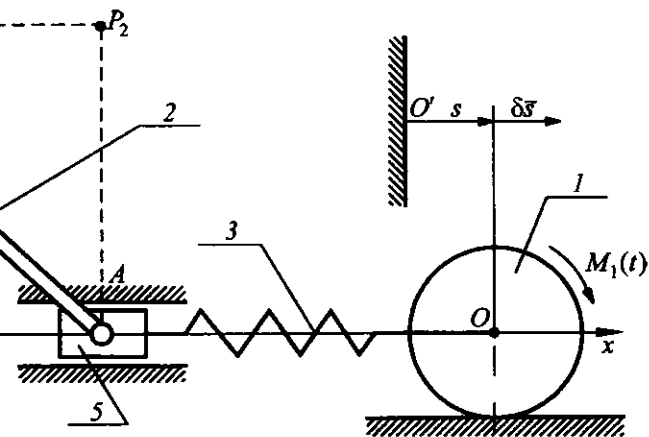


Рис. 18.17

Таким образом, кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и обобщенные скорости, равна

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 \dot{s}^2 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_3 l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + m_6 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right).$$

Вычислим производные от кинетической энергии системы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3}{2} m_1 \dot{s}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{s}; \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi} + l^2 (m_3 \cos^2 \varphi + m_6 \sin^2 \varphi) \cdot \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi} + l^2 (m_3 \cos^2 \varphi + m_6 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + l^2 \sin 2\varphi (m_6 - m_3) \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = l^2 \sin 2\varphi (m_6 - m_3) \dot{\varphi}^2.$$

Для нахождения обобщенных сил Q_s и Q_φ разделим приложенные к системе силы на потенциальные и непотенциальные (потенциальными для данной системы являются силы тяжести и упругости пружин, а непотенциальными — силы пары с моментом $M_1(t)$, а затем каждую обобщенную силу определим как сумму:

$$Q_i = Q_i^n + Q_i^{nn},$$

$$\text{где } Q_i^n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \quad Q_i^{nn} = \frac{\left[\sum_{k=1}^6 \delta A(\bar{F}_k) \right]_i}{\delta q_i}.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_3 (s - l \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_4 l^2 (1 - \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_2 g (1 - \cos \varphi) l - m_6 g (1 - \cos \varphi) l.$$

Тогда

$$Q_s^n = -c_3 (s - l \sin \varphi);$$

$$Q_\varphi^n = -c_4 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi + c_3 l (s - l \sin \varphi) \cos \varphi + g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi;$$

$$Q_s^{nn} = \frac{M_1 \delta \varphi_1}{\delta s} = \frac{M_1}{r}; \quad Q_\varphi^{nn} = 0.$$

Таким образом,

$$Q_s = -c_3 (s - l \sin \varphi) + M_1 / r;$$

$$Q_\varphi = -c_4 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi + c_3 l (s - l \sin \varphi) \cos \varphi + g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi.$$

Подставляя значения производных от кинетической энергии и выражения для обобщенных сил Q_i и Q_0 в уравнения (18.40), получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} m_1 \ddot{s} + c_3 s - c_3 l \sin \varphi &= M_1 / r : \\ \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi} + l^2 (m_5 \cos^2 \varphi + m_6 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} - c_3 l (s - l \sin \varphi) \cos \varphi + \\ + c_3 l^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi - g l \left(\frac{1}{2} m_2 + m_6 \right) \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

18.6 Интегральные вариационные принципы механики

Интегральные вариационные принципы механики характеризуют свойство движений механических систем на конечных промежутках времени. Системе дифференциальных уравнений, определяющих движение механической системы с n степенями свободы, на временном отрезке $[t_0, t_1]$ соответствует определенный интеграл (действие) вида

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(q, \dot{q}, t) dt,$$

где $\Phi(q, \dot{q}, t)$ — заданная функция n обобщенных координат $q_i(t)$, n обобщенных скоростей $\dot{q}_i(t)$ и времени t , с помощью которой описывается движение механической системы.

Для определения $S[q(t)]$ строят однопараметрическое семейство траекторий, содержащих заданную траекторию (прямой путь) и траектории сравнения (окольные пути), и делают вывод о вариационных свойствах движения по заданной траектории, где действие имеет минимальное значение.

Вариационные принципы отличаются по виду действия, экстремум которого реализуется, и по выбору класса допустимых траекторий, на которых рассматривается экстремум действия. Вариационный принцип объединяет положения механики и, будучи принятым за аксиому, позволяет вывести все законы механики; при этом вариационная форма закона не зависит от конкретного выбора обобщенных координат.

Изменение функции. Вариации функции

Пусть механическая система имеет одну степень свободы. Примем, что ее положение определяется координатой q . Тогда дифференциальное уравнение движения в разрешенной относительно ускорения форме имеет вид

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t).$$

Решение данного дифференциального уравнения при начальных условиях $[q_0, \dot{q}_0]$ в заданный момент времени t_0 определяет движение механической системы в виде

$$q = q(q_0, \dot{q}_0, t, t_0)$$

и образует двухпараметрическое семейство линий. Если зафиксировать точку q_0 , через которую будут проходить линии семейства, и изменять лишь направление касательной, то полученное семейство линий будет однопараметрическим. Представим уравнение данного семейства, обозначив $\dot{q}_0 = a$, в виде

$$q = q(\dot{q}_0, t) = q(a, t). \quad (18.41)$$

Тогда изменения функции, связанные с изменением аргументов t и a , будут соответственно (рис. 18.18, а)

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{a=\text{const}} dt;$$

$$\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right)_{t=\text{const}} da.$$

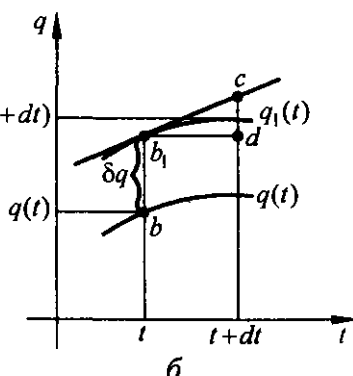
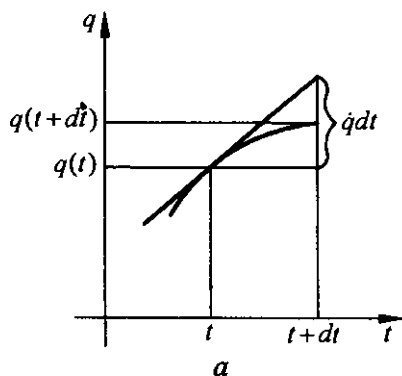


Рис. 18.18

Следовательно, полное изменение функции (18.41) имеет вид

$$\Delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right) da. \quad (18.42)$$

Подсчитаем полное изменение функции $q(a + da, t + dt) - q(a, t)$ геометрически. На (рис. 18.18, б) видно, что данное изменение примерно равно сумме отрезков bb_1 и cd . Отрезок bb_1 равен разности ординат траектории $q(t)$, определяемой параметром a , и другой, бесконечно близкой к ней траектории $q_1(t)$, определяемой параметром $a + da$, следовательно $bb_1 = (\partial q / \partial a) da$. Соответственно отрезок $cd = (\partial q / \partial t) dt$ и, следовательно, линейная часть разности двух функций в окрестности точки (a, t) определяет полное изменение функции $q = q(a, t)$ как

$$\Delta q = q(a + da, t + dt) - q(a, t) = \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right) da + \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) dt.$$

В механике Δq называют полной вариацией функции $q = q(a, t)$, а $\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right) da$ — изохронной вариацией функции $q = q(a, t)$; представим соотношение (18.42) в виде

$$\Delta q = \dot{q} dt + \delta q.$$

Пусть a имеет фиксированное значение a_1 . Подставим в (18.41) вместо a значение $a + a_1$. Тогда уравнение (18.41) в пространстве $\{[q, t]\}$ будет определять траекторию, заданную параметром $a_1 = 0$.

Покажем, что для изохронной вариации операции варьирования и дифференцирования, а также варьирования и интегрирования коммутативны. Действительно, в силу определения

$$\delta q = q_1(a + da, t) - q(a, t). \quad (18.43)$$

Дифференцируя по времени обе части данного равенства, находим

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{dq_1(a + da, t)}{dt} - \frac{dq(a, t)}{dt}.$$

Правая часть полученного уравнения представляет собой разность между производными однопараметрического семейства, подсчитанными в фиксированный момент времени. Следовательно,

$$\frac{dq_1(a+da, t)}{dt} - \frac{dq(a, t)}{dt} = \delta \frac{dq}{dt},$$

или

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{\delta(dq)}{dt}. \quad (18.44)$$

Проинтегрировав (18.43) по времени на отрезке $[t_0, t_1]$, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta q dt = \int_{t_0}^{t_1} q_1(a+da, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} q(a, t) dt.$$

Так как правая часть найденного уравнения представляет собой разность между интегралами от линий соответствующего однопараметрического семейства, то

$$\int_{t_0}^{t_1} q_1(a+da, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} q(a, t) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} q(a, t) dt$$

и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta q dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} q(a, t) dt. \quad (18.45)$$

Вычислим полную вариацию интеграла с переменными верхним и нижним пределами. Пусть интеграл S определен на однопараметрическом семействе линий $Q = Q(a, t)$, т. е.

$$S(a) = \int_{t_0(a)}^{t_1(a)} f[t, Q(a, t), \dot{Q}(a, t)] dt.$$

Дифференцируя $S(a)$ по параметру a , получаем

$$S'(a) = \left[f(a, t_1) \frac{\partial t_1}{\partial a} \right] - \left[f(a, t_0) \frac{\partial t_0}{\partial a} \right] + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial a} \right) dt.$$

Преобразуем второе подынтегральное слагаемое найденного уравнения, используя коммутативность операций дифференцирования (d/dt) и $(\partial/\partial a)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial a} \right) dt = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial Q}{\partial a} \right) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \right) \frac{\partial Q}{\partial a} \right] dt.$$

Окончательно имеем

$$S'(a) = \left(f \frac{dt}{da} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial Q}{\partial a} \right) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial f}{\partial Q} \right] \frac{\partial Q}{\partial a} dt. \quad (18.46)$$

Отметим, что для механической системы с n степенями свободы траектории $q_{li}(a, t)$ могут быть заданы параметрическими уравнениями

$$q_{li}(a, t) = q_i(t) + \delta q_i(a, t); \quad q_{li}(a, t) = q_i(t) + \Delta q_i(a, t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Принцип наименьшего действия Гамильтона

Рассмотрим механическую систему с идеальными связями в потенциальном поле сил. Пусть γ_k — траектория k -й точки системы, по которой происходит перемещение точки из положения A_k , занимаемого точкой в момент времени t_0 , в положение B_k , соответствующее моменту времени t_1 . Таким образом, время движения всех точек системы из исходного положения в конечное одинаково и равно $t_1 - t_0$.

Наряду с истинной будем рассматривать кинематически возможную траекторию (допускаемую наложенными связями), по которой рассматриваемая точка может перемещаться из положения A_k в B_k за тот же промежуток времени. Если в некоторый момент времени t ($t_0 < t < t_1$) k -я точка системы занимает в истинном движении положение M_k , а в возможном M'_k , то вектор $\delta \vec{r}_k = \overline{M_k M'_k}$ определит изохронную вариацию радиус-вектора данной точки. Так как все возможные траектории начинаются в A_k и заканчиваются в B_k , то

$$\delta \vec{r}_k(t_0) = \delta \vec{r}_k(t_1) = 0. \quad (18.47)$$

Представим общее уравнение механики в виде

$$\sum_{k=1}^N \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (18.48)$$

Интегрируя (18.48) на отрезке $[t_0, t_1]$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^N \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) \delta \bar{r}_k dt = 0. \quad (18.49)$$

Преобразуем первое слагаемое равенства (18.49), принимая во внимание, что действующие на механическую систему активные силы потенциальны. Так как $\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = -\delta \Pi$, где Π — потенциальная энергия системы, на основании свойства (18.45) изохронной вариации можно записать

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} -\delta \Pi dt = -\delta \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt. \quad (18.50)$$

Каждое из слагаемых, входящих во вторую сумму уравнения (18.49), преобразуем, применяя правило интегрирования по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) \delta \bar{r}_k dt = m_k \int_{t_0}^{t_1} \delta \bar{r}_k d\bar{v}_k = m_k (\bar{v}_k \delta \bar{r}_k) \Big|_{t_0}^{t_1} - m_k \int_{t_0}^{t_1} \bar{v}_k d(\delta \bar{r}_k).$$

Безынтегральное слагаемое в последнем уравнении равно нулю, поскольку вариации координат на границе, согласно свойству (18.47), равны нулю. На основании свойства изохронной вариации (18.44), меняя порядок варьирования и дифференцирования, находим

$$d(\delta \bar{r}_k) = \left(\frac{d \delta \bar{r}_k}{dt} \right) dt = \left(\delta \frac{d \bar{r}_k}{dt} \right) dt = \delta \bar{v}_k dt;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) \delta \bar{r}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} m_k \bar{v}_k \delta \bar{v}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) dt.$$

Суммируя в соответствии с уравнением (18.49) полученные соотношения, окончательно имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^N \left(m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right) \delta \bar{r}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \sum_{k=1}^N \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt, \quad (18.51)$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2$ — кинетическая энергия системы.

Принимая во внимание соотношения (18.50), (18.51), преобразуем уравнение (18.49) к виду

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (18.52)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Выражение

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (18.53)$$

называется *действием по Гамильтону*, и соотношение (18.52) примет вид

$$\delta S = 0. \quad (18.54)$$

Равенство (18.54) выражает *принцип наименьшего действия Гамильтона*: среди кинематически возможных движений системы, совершаемых за один и тот же промежуток времени, истинным будет то движение, для которого действие по Гамильтону S имеет стационарное значение.

Пользуясь принципом Гамильтона, можно вывести уравнения Лагранжа второго рода.

Выразим функцию Лагранжа L в зависимости от обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$:

$$L = L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

и применим принцип Гамильтона. Вычислим вариацию действия

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt,$$

используя правило интегрирования по частям слагаемых, содержащих производные, меняя порядок варьирования и дифференцирования:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt.$$

Безынтегральная сумма обращается в ноль, так как согласно условию (18.47), $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. На основании уравнения (18.54),

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0.$$

Вследствие независимости и произвольности δq_i выражения в скобках равны нулю, что и приводит к уравнениям Лагранжа второго рода

$$E_i(L) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n), \quad (18.55)$$

записанным с использованием оператора Эйлера

$$E_i(\quad) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\quad)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(\quad)}{\partial q_i}.$$

Пример 18.11. Составить уравнение Лагранжа, если движение материальной точки происходит в поле действия силы тяготения.

Решение. В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты $q_1 = x$, $q_2 = y$. Кинетическая T и потенциальная Π энергии соответственно равны

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ в уравнения (18.55) и найдем дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \quad m\ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Если в качестве обобщенных координат теперь выбрать полярные координаты $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, то кинетическая и потенциальная энергии будут определяться соответственно выражениями

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2 \varphi^2); \quad \Pi = -\frac{k}{r},$$

а дифференциальные уравнения движения точки (18.55) примут вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{k}{r^2}; \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Тот факт, что координата φ не входит в выражение для функции Лагранжа, дает возможность получить из уравнений движения первый интеграл, выражающий закон сохранения момента количества движения, в виде $mr^2\dot{\varphi} = C_1$. Таким образом, вид уравнений Лагранжа сохраняется независимо от выбора обобщенных координат, однако удачный их выбор (полярные) существенно упрощает структуру уравнений движения, а следовательно, и анализ движения.

Принцип наименьшего действия был установлен ирландским математиком У. Гамильтоном в работах 1833–1835 гг. для случая стационарных голономных связей и был обобщен М. В. Остроградским в 1848 г. на случай нестационарных связей. В работах Л. Больцмана (1866), Р. Клаузиуса (1871), Г. Гельмгольца (1895) показано, что принцип наименьшего действия Гамильтона дает общую основу методики исследования разных физических процессов в механике, оптике, электрогидродинамике.

Принцип наименьшего действия Мюпертью–Лагранжа

Рассмотрим движение механической системы в поле действия потенциальных сил. За класс допустимых линий выберем траектории, переводящие систему из начальной конфигурации A , соответствующей моменту времени t_0 , в конечную B , соответствующую моменту времени t_1 . При этом считаем, что на всех траекториях сравнения система обладает одной и той же механической энергией.

Поскольку силы потенциальны, выполняется закон сохранения механической энергии $T + \Pi = h$, где h — постоянная величина. Следовательно, скорости точек зависят от положения системы в данный момент времени, и потому время, в течение которого система переходит из точки A в B , зависит от траектории движения, и система, совершая перемещения по различным кинематически допустимым траекториям, будет приходить в точку B в разные моменты времени t_1 . Индекс «1» указывает на то, что переменная величина t_1 определяет момент прихода системы в точку B .

Рассмотрим действие по Гамильтону (18.53) и подсчитаем полную вариацию S в соответствии с формулой (18.46), учитывая переменность верхнего предела t_1 :

$$\begin{aligned}\Delta S &= L\delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = L\delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \left[L\delta t_1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_1) \delta q_i(t_1) \right] - \left[L\delta t_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_0) \delta q_i(t_0) \right] + (18.56) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt.\end{aligned}$$

Преобразуем безынтегральную часть полной вариации ΔS . Из соотношения (18.43) следует

$$\Delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_0) + \dot{q}_i \delta t_0; \quad \Delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_1) + \dot{q}_i \delta t_1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Выразив из данных уравнений $\delta q_i(t_0)$, $\delta q_i(t_1)$ и подставив их в безынтегральные слагаемые уравнения (18.56), получим

$$\begin{aligned}&\left[L\delta t_1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_1) \delta q_i(t_1) \right] - \left[L\delta t_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_0) \delta q_i(t_0) \right] = \\ &= \left[L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t_1) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_1) \right] \delta t_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_1) \Delta q_i(t_1) - \\ &- \left[L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t_0) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_0) \right] \delta t_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t_0) \Delta q_i(t_0).\end{aligned}$$

Время t_0 фиксировано, поэтому $\delta t_0 = 0$. Так как начальная A и конечная B точки движения механической системы известны: $q_i(t_0) = \text{const}$, $q_i(t_1) = \text{const}$, то $\Delta q_i(t_0) = 0$, $\Delta q_i(t_1) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Потенциальная энергия Π зависит от обобщенных координат $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \right)$ и, следовательно, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. Кинетическая энергия представляет однородную квадратичную относительно скоростей форму, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Таким образом, безынтегральная часть уравнения (18.56) будет равна

$$\left[L - \sum_{i=1}^n q_i(t_1) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t_1)} \right] \delta t_1 = [(T - \Pi) - 2T] \delta t_1 = -(T + \Pi) \delta t_1 = -h \delta t_1.$$

а полная вариация действия S примет вид

$$\Delta S = -h \delta t_1 - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n E_i(L) \delta q_i dt,$$

или

$$\Delta(S + ht_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n E_i(L) \delta q_i dt.$$

Поскольку траектории движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа (18.55), из последнего уравнения следует

$$\Delta(S + ht_1) = 0. \quad (18.57)$$

Принимая во внимание закон сохранения механической энергии $T + \Pi = h$, из соотношения (18.53) находим

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - h(t_1 - t_0),$$

или

$$S + ht_1 = - \int_{t_0}^{t_1} 2T dt + ht_0. \quad (18.58)$$

Определенный интеграл

$$W = S + ht_1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt \quad (18.59)$$

называется *действием по Лагранжу*.

Вычислим полную вариацию от обеих частей уравнения (18.58) и, учитывая, что вариация постоянной равна нулю ($\Delta(ht_0) = 0$), представим соотношение (18.57) в виде

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta(2T) dt = 0.$$

Таким образом, при действительном движении $\Delta W = 0$ и принцип Мюпертюи – Лагранжа формулируется следующим образом: *действительное движение голономной консервативной*

системы между двумя заданными конфигурациями A и B отличается от кинематически возможных движений, совершаемых между теми же конфигурациями и с той же полной механической энергией, тем, что для действительного движения, действие по Лагранжу имеет стационарное значение.

Из принципа наименьшего действия в форме Лагранжа можно получить уравнения движения голономной консервативной системы. Вычислив в соответствии с (18.59) полную вариацию функции W , находим соотношение

$$\Delta(S + ht_1) = - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} E_i(L) \delta q_i dt = 0,$$

откуда вследствие произвольности и независимости вариаций δq , приходим к уравнениям Лагранжа (18.55).

Рассмотрим применение принципов Гамильтона и Лагранжа к исследованию движения материальной точки массой m по гладкой поверхности при отсутствии активных сил.

Согласно закону сохранения энергии, $\frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$ и, следовательно $v = \text{const}$.

В соответствие с принципом Гамильтона, действие S имеет минимальное значение для действительного движения по сравнению с кинематически возможными движениями, совершаемыми за один и тот же промежуток времени. Для рассматриваемого случая

$$S = \int_0^t (T - \Pi) dt = \int_0^t \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) dt = \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) t,$$

а значит,

$$\min S = \min \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) t = t \min \left(\frac{1}{2}mv^2 \right).$$

Отсюда следует, что $v = v_{\min}$. Из всех кинематически возможных движений, совершаемых между точками A и B за один и тот же промежуток времени t , но с различными постоянными скоростями, действительным будет то, для которого $v = v_{\min}$. Но так как $dS/dt = v_{\min}$, то $S = v_{\min}t$ и движение по поверхности происходит в кратчайшее время и по кратчайшему пути, т. е. по геодезической линии.

В соответствии с принципом Лагранжа, действие W имеет минимальное значение для действительного движения по сравнению с кинематически возможными движениями, совершаемыми между точками A и B с одной и той же энергией. Для рассматриваемого случая

$$W = 2 \int_0^t T dt = \int_0^t (mv^2) dt = (mv^2)t,$$

а значит,

$$\min W = \min(mv^2)t = (mv^2) \min(t).$$

Отсюда следует, что $t = t_{\min}$, поскольку на основании закона сохранения энергии mv^2 для кинематически реализуемых движений имеет одно и то же значение.

Таким образом, из всех кинематически возможных движений, совершаемых между точками A и B с одной и той же энергией, но за различное время, действительным будет то, для которого $t = t_{\min}$. Но $dS/dt = v = \sqrt{2h/m} = \text{const}$. Следовательно, $S = vt_{\min}$ и движение точки по поверхности происходит в кратчайшее время и по кратчайшему пути, т. е. по геодезической линии.

Принцип стационарного действия Якоби

Принцип Мюпертюи – Лагранжа позволяет выяснить характер движения механической системы в пространстве обобщенных координат q_i . Принимая во внимание формулы перехода к обобщенным координатам:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_n),$$

представим соответствующий дифференциал $d\bar{r}_k$ в виде

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i \quad \text{и} \quad d\bar{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} dq_j.$$

Тогда квадрат длины дуги ds_k^2 определится как

$$ds_k^2 = d\bar{r}_k d\bar{r}_k = \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} dq_i dq_j.$$

Введем в n -мерном координатном пространстве риманову метрику, определив элементарное расстояние между двумя соседними точками q и $q + dq$ формулой

$$ds^2 = \sum_k^n m_k ds_k^2 = \sum_k^n \sum_i^n \sum_j^n m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} dq_i dq_j = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} dq_i dq_j.$$

Сопоставляя данную формулу с выражением (18.38) для кинетической энергии, находим

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (18.60)$$

т. е. кинетическая энергия системы совпадает с кинетической энергией изображающей точки в n -мерном пространстве обобщенных координат, если массу точки m принять равной единице.

В соответствии с законом сохранения энергии $2T = 2(h - \Pi)$, тогда из формулы (18.60) находим

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(h - \Pi)}}.$$

Подставив полученные выражения для T и dt в формулу (18.59), определяющую действие по Лагранжу, получим

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - \Pi)} ds. \quad (18.61)$$

Интеграл W , представленный в форме (18.61), называется **действием по Якоби**. Принцип стационарного действия в этом случае принимает вид

$$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - \Pi)} ds = 0.$$

В такой форме принцип стационарного действия, открытый в 1837 г. К. Якоби, формулируется следующим образом: *действительное движение голономной консервативной системы между двумя заданными конфигурациями A и B отличается от кинематически возможных движений, совершаемых между теми же конфигурациями и с той же полной механической энергией, тем, что для действительного движения действие по Якоби имеет стационарное значение.*

Пусть на механическую систему не действуют активные силы. Тогда на основании формулы (18.61) действие W с точностью до произвольной постоянной будет

$$W = \int_{t_0}^{t_1} ds$$

и принцип стационарного действия имеет вид

$$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} ds = 0.$$

Следовательно, движение голономной системы по инерции в пространстве обобщенных координат эквивалентно движению изображающей точки по геодезической линии этого пространства. Длина дуги геодезической линии меньше длины дуги любой другой линии, соединяющей заданные точки.

При движении механической системы под действием потенциальных сил в пространстве обобщенных координат вводят метрику

$$ds^2 = 2(h - \Pi) \sum_{ij}^n a_{ij} dq_i dq_j = \sum_{ij}^n b_{ij} dq_i dq_j, \quad (18.62)$$

где $b_{ij} = 2(h - \Pi)a_{ij}$, поэтому

$$W = \int_{t_0}^{t_1} ds.$$

Таким образом, движение голономной системы под действием потенциальных сил эквивалентно движению изображающей точки по инерции в пространстве Римана, метрика которого определяется выражением (18.62). Согласно принципу наименьшего действия, в форме Якоби движение происходит по геодезической линии пространства Римана.

При доказательстве справедливости интегральных принципов показано, что соответствующие действия (Гамильтона, Мюпертьюи-Лагранжа, Якоби) имеют стационарные значения. Установление типа экстремума связано с рассмотрением второй вариации, минимум которого реализуется при $\delta^2 S > 0$.

Канонические уравнения Гамильтона

Рассмотрим $(2n+1)$ -мерное расширенное фазовое пространство, в котором координатами точки являются q_i , p_i и t . Величины p_i называются *обобщенными импульсами* и определяются равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (18.63)$$

Введем также функцию фазовых переменных $H(q, p, t)$, связанную с функцией Лагранжа $L(\dot{q}, p, t)$ равенством

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i. \quad (18.64)$$

Для вывода уравнений движения в пространстве фазовых координат воспользуемся принципом наименьшего действия (18.54):

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0.$$

Обратим внимание на математическую особенность решаемой задачи: время t и позиционные координаты q_i фиксированы в конечных точках, переменные p_i свободны. Следовательно, в пространстве фазовых переменных q, p, t мы имеем задачу со свободными конечными условиями. Но эти условия не вносят особенностей в решение, поскольку подынтегральная функция не зависит от $\dot{p}$.

В новых переменных вариация действия имеет вид

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0.$$

Принимая во внимание краевые условия $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, преобразуем первый член подынтегрального выражения:

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Выражение для δS примет вид

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0.$$

Равенство нулю вариации действия δS при произвольных и независимых вариациях $\delta q_i, \delta p_i$ будет при условии равенства нулю соответствующих сомножителей при $\delta q_i, \delta p_i$.

Таким образом, получаем дифференциальные уравнения движения механической системы в фазовом пространстве, называемые *каноническими уравнениями Гамильтона*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (18.65)$$

С учетом уравнений Лагранжа и определения обобщенного импульса (18.63), находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n).$$

Сравнивая эти уравнения со второй системой уравнений Гамильтона, приходим к выводу, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

и уравнения (18.63), а также первая система уравнений (18.65) могут быть получены из соотношения (18.64) формальной операцией частного дифференцирования в предположении независимости переменных q_i, p_i, t .

Для голономных стационарных систем

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

и функция Гамильтона

$$H = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi$$

определяет полную механическую энергию системы.

Канонические уравнения Гамильтона представляют собой нормальную (разрешенную относительно первых производных фазовых переменных p_i, q_i) систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, что упрощает как аналитическое, так и численное исследование движения механических систем.

При составлении канонических уравнений Гамильтона для голономных систем следует придерживаться следующего порядка проведения операций:

1) выделить механическую систему, определить число степеней свободы, ввести обобщенные координаты;

2) вычислить кинетическую и потенциальную энергии системы как функции обобщенных координат и скоростей;

3) ввести обобщенные импульсы системы $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ и в выражении полной механической энергии выразить $\dot{q}_i$ через p_i . Полученная функция и будет Гамильтонианом H данной механической системы;

4) составить канонические уравнения (18.65).

Пример 18.12. Составить канонические уравнения для линейного осциллятора, полагая, что масса движущейся точки равна m , а коэффициент жесткости пружины c .

Решение. Осциллятор имеет одну степень свободы, поэтому в качестве обобщенной координаты выберем q . Кинетическая энергия точки $T = mv^2/2 = m\dot{q}^2/2$, потенциальная $\Pi = cq^2/2$. Вводим импульс $p = \partial T / \partial \dot{q} = m\dot{q}$ и выражаем $\dot{q} = p/m$. Следовательно, функция Гамильтона $H = T + \Pi$ имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

В соответствии с (18.65) получаем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -cq.$$

Отметим, что первое уравнение определяет количество движения точки $p = m\dot{q}$, что и обуславливает название переменных p_i как импульсов. Выражая импульс из первого уравнения и подставляя во второе, находим уравнение движения в форме Ньютона $m\ddot{q} = -cq$.

Пример 18.13. Составить канонические уравнения движения материальной точки под действием силы тяготения.

Решение. Точка на плоскости имеет две степени свободы, поэтому в качестве обобщенных выбираем полярные координаты $q_1 = r, q_2 = \varphi$. Кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2); \quad \Pi = -\frac{k}{r}.$$

Вводим импульсы

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \dot{r} = \frac{p_1}{m}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_2}{mr^2}.$$

Следовательно, функция Гамильтона $H = T + \Pi$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}.$$

Заметим, что импульс $p_2 = mr^2\dot{\varphi}$ определяет момент количества движения точки относительно неподвижного центра.

В соответствии с уравнениями (18.65)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}; \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{p_2^2}{mr^3}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2}; \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Координата φ циклическая, поскольку не входит в функцию Лагранжа L . В функцию Гамильтона H φ также не входит, что указывает на то, что свойство цикличности обобщенной координаты не зависит от того, в какой механике — Лагранжа или Гамильтона изучается данное движение.

Глава 19

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Колебаниями называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин.

Физическая природа колебательных процессов различна. Колебания могут быть механические, акустические, электромагнитные, в электрических контурах и т. д. В теоретической механике рассматривают колебания в механических системах — механические колебания.

Изучение свойств колебательных движений необходимо для понимания многих физических явлений, с которыми приходится сталкиваться в инженерной практике. Движение машин и механизмов практически всегда сопровождается возникновением колебаний или, как еще говорят, *вибраций*. Инженеру необходимо, с одной стороны, уметь бороться с колебаниями там, где они вредны, а с другой стороны, уметь использовать их как полезный процесс в таких устройствах, как вибротранспортеры, виброуплотнители, сита и т. д.

Ниже рассматриваются малые колебания в системах с одной, двумя и конечным числом степеней свободы, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, относительно положения устойчивого равновесия.

19.1. Устойчивость положения равновесия механической системы

Рассмотрим механическую систему с голономными, стационарными и неосвобождающими связями с n степенями свободы, движение которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$.

В соответствии с принципом возможных перемещений в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0.$$

Для консервативной системы эти условия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (19.1)$$

где Π — потенциальная энергия системы.

Поскольку Π есть $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$, (19.1) можно рассматривать как систему уравнений относительно обобщенных координат, представляющих собой условия экстремума потенциальной энергии. Решая их можно найти положения, в которых система будет находиться в равновесии.

Однако положение равновесия может быть *устойчивым*, *неустойчивым* и *безразличным*.

Если существует такое достаточно малое отклонение системы от положения равновесия, при котором она стремится вернуться назад, то такое положение равновесия будет *устойчивым*. В случае, когда при любом начальном отклонении система удаляется от положения равновесия, положение равновесия будет *неустойчивым*. Если же при начальном отклонении система остается в отклоненном положении, то положение равновесия будет *безразличным*.

На рис. 19.1 представлены устойчивое (см. рис. 19.1, а) и неустойчивое (см. рис. 19.1, б) положения равновесия математического маятника. Безразличное положение равновесия имеет система, приведенная на рис. 19.1, в.

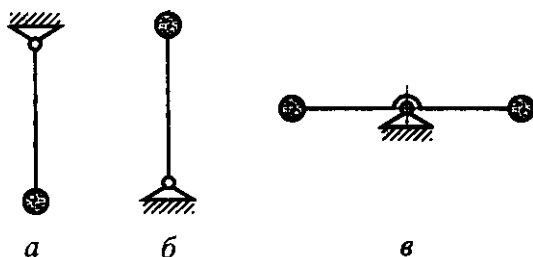


Рис. 19.1

При устойчивом положении равновесия система после достаточно малого начального возмущения совершает колебания около положения равновесия или возвращается в это положение без колебаний. При неустойчивом положении равновесия система после любого начального возмущения при дальнейшем движении все более удаляется от положения равновесия.

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX в. А. М. Ляпуновым. Условимся отсчитывать обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ от положения равновесия, т. е. считать их в положении равновесия равными нулю. Выведем систему из положения равновесия, сообщив обобщенным координатам в начальный момент времени возмущения (отклонения $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ и скорости $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{n0}$). Обозначим обобщенные координаты и их скорости при дальнейшем движении через $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ и $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)$ соответственно.

По Ляпунову, равновесие системы называется устойчивым, если для любых сколь угодно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n; \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ можно выбрать $2n$ других таких положительных чисел $\eta_1, \dots, \eta_n; \eta'_1, \dots, \eta'_n$, что при начальных возмущениях системы, удовлетворяющих условиям

$$|q_{10}| < \eta_1, \dots, |q_{n0}| < \eta_n; \quad |\dot{q}_{10}| < \eta'_1, \dots, |\dot{q}_{n0}| < \eta'_n,$$

при дальнейшем движении системы будут выполняться неравенства

$$|q_1(t)| < \varepsilon_1, \dots, |q_n(t)| < \varepsilon_n; \quad |\dot{q}_1(t)| < \varepsilon'_1, \dots, |\dot{q}_n(t)| < \varepsilon'_n.$$

В противном случае равновесие будет неустойчивым. Безразличное положение равновесия в соответствии с данным определением относится к неустойчивым, поскольку при наличии начальной скорости система будет удаляться от начального положения.

Если при устойчивом положении равновесия все обобщенные координаты и скорости с течением времени стремятся к нулю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*.

Достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной системы определяется теоремой Лагранжа: *достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие в нем локального (изолированного) минимума потенциальной энергии*.

Однако в реальной механической системе всегда существуют силы сопротивления движению, возникающие благодаря трению или вязкости среды. Такие силы Кельвином названы *диссипативными*.

При наличии в системе диссипативных сил для оценки устойчивости положения равновесия можно дополнительно воспользоваться тремя теоремами Кельвина.

1. *Если положение равновесия консервативной системы устойчиво при одних только потенциальных силах, то оно будет оставаться устойчивым и при добавлении диссипативных сил.*

2. *Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией*.*

3. *Изолированное и неустойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами.*

Доказательства этих теорем могут быть получены как следствие теоремы Ляпунова об устойчивости движения, выходящей за рамки данного курса.

Первые две теоремы Кельвина указывают на то, что диссипативные силы не могут нарушить устойчивость положения равновесия, а третья — что диссипативные силы не в состоянии трансформировать неустойчивое положение равновесия консервативной системы в устойчивое. Следовательно, для оценки устойчивости положения равновесия реальную колебательную систему с диссипативными силами можно заменить ее консервативной моделью.

* Понятие полной диссипации существенно для систем с числом степеней свободы $n > 1$ и будет определено в § 19.7.

19.2. Дифференциальные уравнения малых колебаний линейной системы с одной степенью свободы

Отметим, что наличие в механической системе хотя бы одного упругого (деформируемого) тела автоматически превращает ее в систему с бесконечным числом степеней свободы, поскольку у таких тел каждая материальная частица имеет возможность двигаться относительно других материальных частиц и, следовательно, ее движение должно описываться своими обобщенными координатами, а таких частиц бесконечное множество.

В теоретической механике используется модель абсолютно твердого тела, для описания движения которого требуется конечное число координат, а все упругие элементы — пружины принимаются безынерционными, т. е. масса их считается пренебрежимо малой по сравнению с массами твердых тел, входящих в систему. Только в этом случае можно говорить о системе с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 19.1. Тело массой m , подвешенное к пружине AB (рис. 19.2, *а*), движется поступательно в вертикальном направлении под действием силы $\bar{F}(t)$, преодолевая вязкое сопротивление среды. Составить уравнение малых колебаний.

Решение. На рис. 19.2, *б* представлена зависимость реакции F' цилиндрической пружины растяжения — сжатия от деформации λ . Предположив, что деформации пружины относительно малы, т. е. мала амплитуда колебаний тела, характеристику пружины можно аппроксимировать наклонной прямой, тангенс угла α наклона которой называется **коэффициентом жесткости**, или просто **жесткостью с пружины**.

При сделанном допущении о малых деформациях пружины **линейная восстанавливающая сила** будет противоположна по направлению деформации пружины:

$$F' = c\lambda, \quad (19.2)$$

На рис. 19.2, *в* представлена зависимость силы вязкого сопротивления среды F'' от скорости движения в ней тела v . Только при достаточно малых скоростях движения тела можно аппроксимировать характеристику наклонной прямой, тангенс угла наклона γ которой называется **коэффициентом линейного вязкого сопротивления** h и имеет единицу измерения ньютон-секунда на метр ($\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}$). При сделанном допущении о малых скоростях движения тела **сила вязкого сопротивления**

$$F'' = hv,$$

всегда линейна и направлена противоположно скорости движения тела.

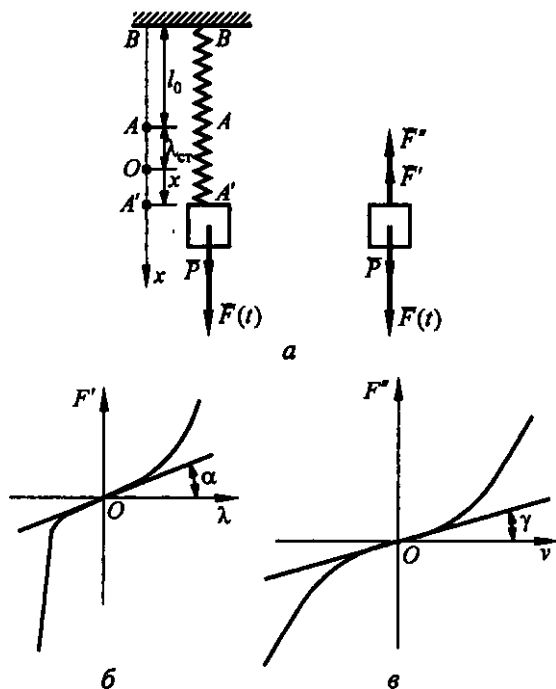


Рис. 19.2

Если $AB=l_0$ (см. рис. 19.2, а) длина нерастянутой пружины, то AO представляет собой статическое удлинение пружины $\lambda_{\text{ст}}$ под действием силы тяжести тела, равное

$$\lambda_{\text{ст}} = mg/c. \quad (19.3)$$

Будем отсчитывать координату x от положения статического равновесия O , тогда дифференциальное уравнение поступательного движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = F(t) + mg - c(\lambda_{\text{ст}} + x) - h\dot{x}. \quad (19.4)$$

В силу (19.3) mg и $c\lambda_{\text{ст}}$ взаимно уничтожаются, и уравнение (19.4) принимает вид

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = F(t).$$

Если $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$, то

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + cx = F_0 \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (19.5)$$

где $2\epsilon = h/m$, $\omega^2 = c/m$, $f_0 = F_0/m$.

Пример 19.2. Однородный диск A , момент инерции которого J , через упругий безынерционный стержень скреплен с телом B , вращающимся по закону $\psi(t) = \psi_0 \sin(pt + \beta)$ (рис. 19.3). Составить уравнение малых колебаний диска.

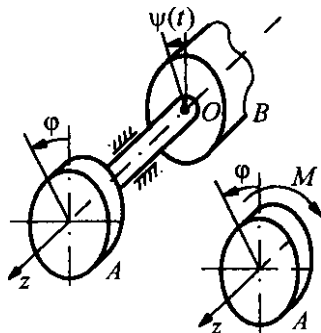


Рис. 19.3

уравнение малых колебаний диска.

Решение. Выберем в качестве координаты угол поворота φ и составим дифференциальное уравнение вращательного движения диска (ось Oz при этом остается прямолинейной). Полагая, что $\varphi > \psi$, а сами углы φ и ψ малы, запишем выражение для момента M (см. рис. 19.3) в виде

$$M = c[\varphi - \psi_0 \sin(pt + \beta)],$$

где c — жесткость стержня на кручение.

При вращении однородного диска вязкое сопротивление среды мало и его можно не учитывать. Тогда дифференциальное уравнение вращательного движения диска будет иметь вид

$$J\ddot{\varphi} = -M = -c[\varphi - \psi_0 \sin(pt + \beta)],$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (19.6)$$

где $\omega^2 = c/J$; $f_0 = c\psi_0/J$.

Пример 19.3. Материальная точка (бусинка) массой m закреплена на струне, имеющей предварительное значительное натяжение T (рис. 19.4). Учитывая вязкое сопротивление среды, составить уравнение малых колебаний. Изменением натяжения струны при движении бусинки, массой струны и влиянием силы тяжести бусинки пренебречь.

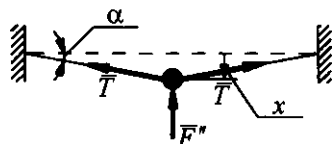


Рис. 19.4

Решение. Полагая, что колебания бусинки малы ($x \ll l$), можно записать $\sin \alpha \approx x/l$.

Принимая вязкое сопротивление среды линейным: $F'' = h\dot{x}$, получим дифференциальное уравнение движения бусинки

$$m\ddot{x} = -2T \sin \alpha - F'' = -2T \frac{x}{l} - h\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + 2\epsilon \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (19.7)$$

где $2\epsilon = h/m$, $\omega^2 = 2T/ml$.

Приведенные примеры показывают, что при сделанном допущении о малости колебаний, колебательные системы описываются одинаковыми по структуре линейными дифференциаль-

ными уравнениями (19.5) – (19.7). Они могут быть полными (см. 19.5), в них может отсутствовать обобщенная скорость (при пренебрежении силами вязкого сопротивления (см. 19.6)) или правая часть (в случае отсутствия вынуждающей силы (см. 19.7)). Однако условие малости колебаний еще не гарантирует линейность дифференциальных уравнений. Так, при учете сил сухого трения дифференциальное уравнение остается нелинейным даже при сделанном допущении о малости колебаний.

Получим теперь дифференциальное уравнение малых колебаний в общем случае. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и имеющую одну степень свободы, на которую наложены голономные, стационарные и неосвобождающие связи. Предположим, что система имеет устойчивое положение равновесия, от которого будем отсчитывать обобщенную координату q .

В соответствии с предположением о малости колебаний обобщенную координату, ее скорость и ускорение полагаем величинами первого порядка малости. В дифференциальных уравнениях движения будем учитывать величины первого порядка малости, а в выражениях для кинетической энергии T , потенциальной энергии Π и вводимой ниже диссипативной функции Рэлея Φ — величины до второго порядка малости, поскольку использование уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

приводит вследствие дифференцирования к понижению порядка малости на единицу.

В общем случае сила, действующая на k -ю точку системы, может быть функцией от положения точки $\bar{r}_k$, ее скорости $\bar{v}_k$ и времени t :

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k(\bar{r}_k, \bar{v}_k, t).$$

С учетом малости колебаний представим $\bar{F}_k$ в виде

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k'(\bar{r}_k) + \bar{F}_k''(\bar{v}_k) + \bar{P}_k(t), \quad (19.8)$$

где все силы $\bar{F}_k'(\bar{r}_k)$ — потенциальные, и будем полагать, что силы $\bar{F}_k''(\bar{v}_k)$ являются диссипативными, т. е. уменьшающими

полную механическую энергию, и линейно зависящими от скорости:

$$\bar{F}_k'' = -h_k \bar{v}_k. \quad (19.9)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2.$$

В силу стационарности наложенных на систему связей радиус-векторы точек зависят только от обобщенной координаты: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q)$. Тогда

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q} \quad (19.10)$$

и, следовательно, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2. \quad (19.11)$$

Здесь $A(q)$, как и $\bar{r}_k$, является в общем случае функцией обобщенной координаты q .

Разложим $A(q)$ в окрестности положения равновесия ($q = 0$) в степенной ряд:

$$A(q) = A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (19.12)$$

Индексом «0» здесь и далее отмечены величины, вычисленные в положении равновесия.

В силу малости колебаний в выражении (19.11) для кинетической энергии будем учитывать величины не выше второго порядка малости. Но в этом уравнении уже содержится квадрат обобщенной скорости $\dot{q}^2$ — величины второго порядка малости, поэтому в разложении (19.12) удерживаем только первый член, который обозначаем

$$A(0) = a.$$

Коэффициент a называется **обобщенным инерционным коэффициентом**. Его единица измерения определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q в м, то a в кг, если q в рад, то a в кг · м².

Окончательно получаем

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (19.13)$$

Таким образом, в предположении о малости колебаний, кинетическая энергия системы является функцией только обобщенной скорости. Тогда в уравнении Лагранжа второго рода составляющая $\frac{\partial T}{\partial q}$ тождественно равна нулю. Поскольку кинетическая

энергия — величина положительная, обобщенный инерционный коэффициент может быть только положительным ($a > 0$).

Согласно (19.8), представим обобщенную силу Q в виде

$$Q = Q_{\text{п}} + Q_{\text{д}} + Q(t), \quad (19.14)$$

где $Q_{\text{п}}$ — составляющая обобщенной силы от потенциальных сил; $Q_{\text{д}}$ — составляющая обобщенной силы от диссипативных сил; $Q(t)$ — составляющая обобщенной силы от сил, зависящих от времени и действующих извне.

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил равна

$$Q_{\text{п}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

где $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, отсчитываемая от положения равновесия. Так как обобщенная координата также отсчитывается от положения равновесия, то

$$\Pi(0) = 0. \quad (19.15)$$

Разложим потенциальную энергию в степенной ряд в окрестности положения равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3} \right)_0 q^3 + \dots$$

Первый член в разложении $\Pi(q)$ равен нулю согласно (19.15); второй также равен нулю, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум; четвертый и последующие члены отбрасываем, так как в силу предположения о малости колебаний потенциальная энергия должна содержать члены не выше второго порядка малости. Тогда

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 q^2.$$

Обозначим $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0$ через c и назовем его *квазиупругим коэффициентом*. Единица измерения c определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q в м, то c в Н/м, если q в рад, то c в Н·м.

Окончательно имеем

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2. \quad (19.16)$$

Достаточным условием устойчивости положения равновесия, в соответствии с изложенными выше теоремами Лагранжа и Кельвина, является наличие в положении равновесия локального минимума потенциальной энергии. Для минимума функции необходимо равенство нулю первой производной и положительность второй. Тогда условие

$$c > 0 \quad (19.17)$$

является *достаточным* условием устойчивости положения равновесия колебательной системы с одной степенью свободы.

Составляющая обобщенной силы от диссипативных сил (19.9) равна

$$Q_{\text{д}} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{\text{д}} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}.$$

Учитывая тождество Лагранжа, вытекающее из (19.10):

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}},$$

получаем

$$Q_{\text{д}} = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k \bar{v}_k^2}{2} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k v_k^2}{2}.$$

Введем функцию, называемую *диссипативной функцией Рэлея*

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k v_k^2, \quad (19.18)$$

тогда

$$Q_d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (19.19)$$

Подставим в диссипативную функцию Рэля (19.18) выражение для скорости (19.10):

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2.$$

С коэффициентом $B(q)$ поступим так же, как с коэффициентом $A(q)$ в выражении кинетической энергии, т. е. разложим его в степенной ряд в окрестности положения равновесия ($q = 0$), а затем учтем только первый член, поскольку диссипативная функция Рэля уже содержит в себе величину второго порядка малости $\dot{q}^2$.

Обозначим $B(0)$ через b . Коэффициент b называют **обобщенным диссипативным коэффициентом**. Единица измерения b , как и коэффициентов a и c , определяется единицей измерения обобщенной координаты: если q в м, то b в Н·с/м, если q в рад, то b в Н·с·м.

Окончательно получаем

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2. \quad (19.20)$$

Диссипативная функция Рэля по своему определению (см. (19.18)) не может быть отрицательной, однако в частном случае консервативной системы она может равняться нулю при ненулевой скорости обобщенной координаты. Поэтому обобщенный диссипативный коэффициент может быть большим или равным нулю ($b \geq 0$).

Для выяснения механического смысла диссипативной функции Рэля рассмотрим теорему об изменении кинетической энергии для колебательной системы, на которую воздействуют только потенциальные и диссипативные силы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dA_{\text{пк}}}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{dA_{\text{дк}}}{dt}. \quad (19.21)$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_{\Pi k}}{dt} = Q_{\Pi} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}; \quad (19.22)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_{\text{Дк}}}{dt} = Q_{\text{Д}} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} = -B(q) \dot{q} \dot{q} = -2\Phi. \quad (19.23)$$

Подставив (19.22) и (19.23) в (19.21), получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi,$$

или

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = \frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

где E — полная механическая энергия.

Таким образом, удвоенное значение диссипативной функции Рэля есть скорость уменьшения полной механической энергии системы.

Составляющую обобщенной силы от сил $\bar{P}_k(t)$, зависящих от времени и действующих на систему извне, можно получить стандартным способом, полагая, что вариация обобщенной координаты δq не равна нулю, вычисляя сумму элементарных работ от сил $\bar{P}_k(t)$ на перемещениях, определяемых δq , и относя полученное значение к δq :

$$Q(t) = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A_k}{\delta q}. \quad (19.24)$$

Учитывая (19.13), (19.14), (19.16), (19.19), (19.20) и (19.24), запишем уравнение Лагранжа второго рода в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q(t),$$

или

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (19.25)$$

где $a > 0; b \geq 0; c > 0$.

Уравнение (19.25) представляет собой дифференциальное уравнение малых колебаний любой линейной колебательной системы с одной степенью свободы. Разделив каждый член этого

уравнения на обобщенный инерционный коэффициент a , получим по аналогии с рассмотренными выше примерами

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a}Q(t), \quad (19.26)$$

где $2\varepsilon = b/a$; $\omega^2 = c/a$.

19.3. Свободные движения линейной системы с одной степенью свободы

Свободные движения в колебательной системе возникают при отсутствии внешнего воздействия ($Q(t) = 0$) после начального возмущения. В соответствии с (19.25) дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0.$$

Свободные колебания линейной консервативной системы

В случае консервативной системы $b = 0$, поэтому дифференциальное уравнение движения принимает форму

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (19.27)$$

где $\omega^2 = c/a$.

Запишем решение уравнения (19.27) в виде

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (19.28)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0. \quad (19.29)$$

Отсюда

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 / \omega.$$

Введем новые произвольные постоянные

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} \quad (19.30)$$

и представим решение (19.28) в так называемой амплитудной форме:

$$q = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (19.31)$$

Произвольные постоянные A и α в соответствии с (19.30) выражаются через начальные условия следующим образом:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \omega}{\dot{q}_0}.$$

При определении α следует учитывать, что если $\dot{q}_0 > 0$, то α находится в I или IV квадранте, а если $\dot{q}_0 < 0$ — то во II или III, и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить π . При $\dot{q}_0 = 0$ $\alpha = \pi/2$, если $q_0 > 0$, и $\alpha = -\pi/2$, если $q_0 < 0$.

Зависимость $q(t)$ представлена на рис. 19.5.

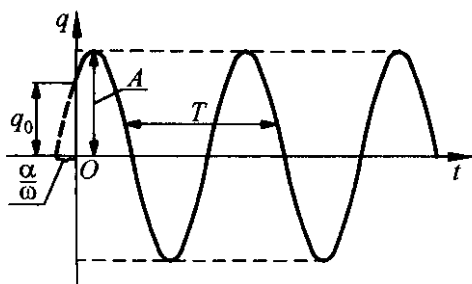


Рис. 19.5

Гармоническими называют такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Как следует из (19.28) и (19.31), свободные колебания линейной консервативной системы с одной степенью свободы являются **гармоническими**. Их характеристиками являются:

ω — **круговая**, или **циклическая частота**, измеряемая в секундах в минус первой степени (с^{-1});

$\omega t + \alpha$ — **фаза колебаний**;

α — **начальная фаза колебаний**;

A — **амплитуда колебаний**;

T — **период колебаний** — время в секундах, за которое фаза колебаний изменится на 2π

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{a/c}.$$

В инженерной практике используют величину, обратную периоду колебаний, называемую *частотой колебаний*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

и измеряемую в герцах (Гц).

Отметим, что круговая частота ω , период колебаний T и частота ν не зависят от начальных условий, поэтому их называют собственными характеристиками колебательной системы (например, собственная частота колебаний). Свойство независимости частоты и периода колебаний от начальных условий — свойство *изохронности* колебаний — связано с линейностью дифференциального уравнения и, следовательно, с допущением о малости колебаний.

Пример 19.4. В кривошипно-ползунном механизме, расположенном в вертикальной плоскости, кривошип OA , представляющий собой однородный стержень длиной $l = 0,49$ м и массой $m_1 = 3$ кг, через шатун AB , также однородный стержень массой $m_2 = 6$ кг, связан с ползуном B массой $m_3 = 3$ кг (рис. 19.6). С ползуном скреплена пружина, жесткость которой c_1 . При вертикальном положении кривошипа OA пружина не деформирована. Трение в шарнирах и опорах ползуна, а также вязкое сопротивление среды не учитывать. Найти, при какой жесткости $c_{1кр}$ пружины вертикальное положение кривошипа будет устойчивым. Для значения $c_1 = 5c_{1кр}$ получить уравнение движения кривошипа, если в начальный момент времени его повернул на угол, равный 3° против направления вращения часовой стрелки, и отпустили без начальной скорости.

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты угол отклонения φ кривошипа, считая его малым.

Кинетическая энергия кривошипа

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{OA} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Шатун AB в положении, соответствующем $\varphi = 0$, совершает мгновенно-поступательное движение, т.е. его угловая скорость равна нулю. При отклонении кривошипа от вертикали можно записать (см. рис. 19.6)

$$AD = OA \cos \varphi = AB \sin \alpha$$

или, дифференцируя по времени,

$$-OA \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = AB \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}.$$

Отсюда

$$\dot{\alpha} = -\frac{OA \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}{AB \cos \alpha}.$$

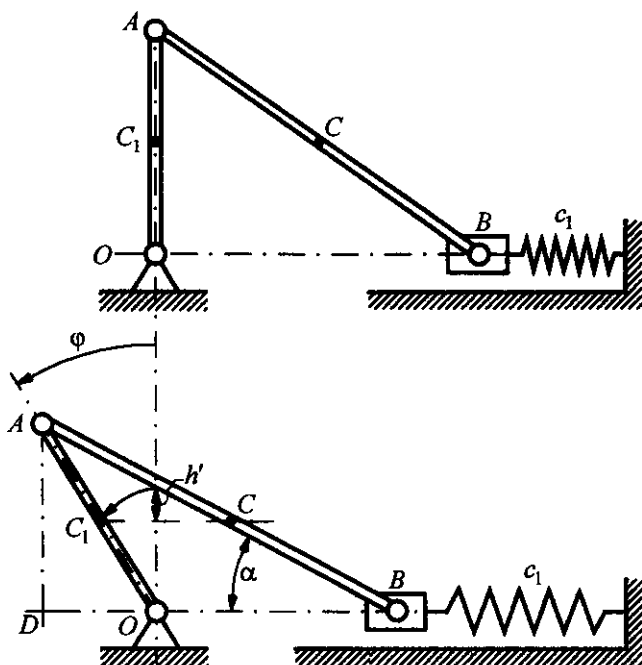


Рис. 19.6

Так как φ и $\dot{\varphi}$ малы, угловая скорость $\dot{\alpha}$ будет иметь второй порядок малости и, следовательно, при вычислении кинетической энергии шатуна его движение можно считать поступательным, т. е.

$$v_B = v_C = v_A = l\dot{\varphi}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Сопоставив это уравнение со стандартным выражением (19.13) для кинетической энергии в системе с одной степенью свободы, получаем обобщенный инерционный коэффициент

$$a = (m_1/3 + m_2 + m_3) l^2.$$

При вычислении потенциальной энергии учтем деформацию пружины и опускание центров тяжести кривошипа и шатуна. С учетом малости φ деформация пружины $\lambda = l\varphi$. Поскольку центры тяжести кривошипа C_1 и шатуна C при движении механизма находятся на одной горизонтали (см. рис. 19.6), их опускание

$$h' = \frac{1}{2}l(1 - \cos\varphi).$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[c_1 l^2 \varphi^2 - (m_1 + m_2) g l (1 - \cos\varphi) \right].$$

Учитывая в разложении $\cos\varphi$ величины до второго порядка малости:

$$\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2,$$

получаем

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l \right] \varphi^2,$$

откуда, согласно (19.16), квазиупругий коэффициент

$$c = c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l.$$

Отметим интересное обстоятельство. Если при определении кинетической энергии движение шатуна можно считать поступательным, то при вычислении потенциальной энергии необходимо учитывать его поворот, поскольку изменение потенциальной энергии шатуна, так же как и изменение потенциальных энергий кривошипа и пружины, имеет второй порядок малости.

Для устойчивости положения равновесия необходимо выполнение условия (19.17). Приравнявая c к нулю, находим критическое значение $c_{\text{кр}}$ жесткости пружины:

$$c_{\text{кр}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{g}{l} = 90 \text{ Н/м}.$$

По условию $c_1 = 5c_{\text{кр}} = 450 \text{ Н/м}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения системы получилось в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c_1 l^2 - 1/2 (m_1 + m_2) g l}{(1/3 m_1 + m_2 + m_3) l^2}}; \quad \omega = 6 \text{ рад/с}.$$

В соответствии с (19.28) получаем общее решение в виде

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

В начальный момент кривошип отклонили от вертикали на угол $\varphi = 3^\circ$ и отпустили без начальной скорости, т. е. начальные условия (19.29) будут такими:

$$\text{при } t = 0, \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 3 = 0,052 \text{ рад}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Определив $C_1 = 0,052 \text{ рад}$; $C_2 = 0$, находим

$$\varphi = 0,052 \cos 6t \text{ рад}.$$

Свободные движения линейной неконсервативной системы

В самом общем случае дифференциальное уравнение свободного движения такой системы в соответствии с (19.26) имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (19.32)$$

где $\varepsilon = b/2a$ — коэффициент затухания, единица измерения которого (рад/с) совпадает с единицей измерения ω .

Представив решение уравнения (19.32) в виде $q = e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}. \quad (19.33)$$

Характер движения системы будет существенно зависеть от соотношения между величинами ε и ω . Возможны следующие три случая:

при $\varepsilon < \omega$ — случай малого сопротивления — уравнение (19.33) имеет комплексно-сопряженные корни;

при $\varepsilon = \omega$ — случай критического сопротивления — уравнение (19.33) имеет кратные корни;

при $\varepsilon > \omega$ — случай большого сопротивления — уравнение (19.33) имеет два вещественных отрицательных корня.

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Случай малого сопротивления: $\varepsilon < \omega$; $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1$,

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$.

Общее решение дифференциального уравнения (19.32) будет иметь вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t),$$

или

$$q = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (19.34)$$

При начальных условиях (19.29)

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1}, \quad (19.35)$$

откуда, согласно (19.30), находим

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1} \right)^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}.$$

При определении α следует учитывать, что при $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 > 0$ α находится в I или IV квадранте, а при $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 < 0$ — во II или III и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить π . При $\dot{q}_0 + \varepsilon q_0 = 0$ $\alpha = \pi/2$, если $q_0 > 0$, и $\alpha = -\pi/2$, если $q_0 < 0$.

Графически решение (19.34) приведено на рис. 19.7. Оно представляет собой синусоидальную кривую, расположенную между экспоненциальными ограничивающими кривыми $Ae^{-\varepsilon t}$ и $-Ae^{-\varepsilon t}$. Колебания такого вида называются *затухающими*.

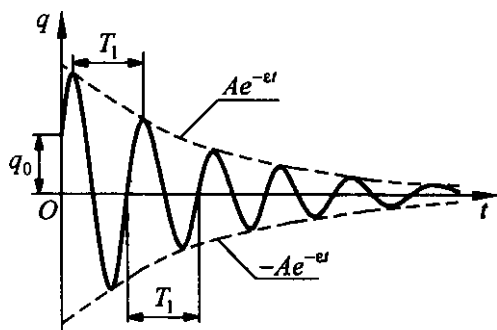


Рис. 19.7

Затухающие колебания не являются периодическим движением, однако сохраняют его некоторые свойства. Действительно, решение (19.34) представляет собой произведение двух функций — экспоненты, которая не обращается в нуль, и синусоиды с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Это обстоятельство приводит к чередованию через равный промежуток времени T_1 нулей и максимумов $q(t)$ (см. рис. 19.7), что позволяет считать затухающие колебания условно-периодическими.

Величину $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ называют *условным периодом* затухающих колебаний. Условный период затухающих

колебаний больше периода свободных колебаний консервативной системы T .

Величину ω_1 называют *условной частотой* затухающих колебаний. Отметим, что при малых значениях коэффициента затухания ($\varepsilon \ll \omega$) условная частота затухающих колебаний $\omega_1 \approx \omega$; аналогично $T_1 \approx T$.

Наконец, величину $Ae^{-\varepsilon t}$ можно назвать *условной амплитудой* затухающих колебаний.

Решение (19.34) показывает, что затухающие колебания должны продолжаться сколь угодно долго, поскольку $q(t)$ обращается в нуль только при $t \rightarrow \infty$. Однако это не соответствует опыту наблюдения колебаний в реальных системах, которые всегда заканчиваются за конечный промежуток времени. Данное противоречие есть результат того, что в расчетной схеме не учитывались другие виды сопротивлений, кроме линейно-вязкого. Ниже будет показано, что учет сил сухого трения приводит к прекращению колебаний через конечный промежуток времени.

Величина $\tau_0 = 1/\varepsilon$ называется *постоянной времени* затухающих колебаний и измеряется в секундах. Рассмотрим последовательность условных амплитуд колебаний в моменты времени, отличающиеся один от другого на постоянную времени τ_0 :

$$A_1 = Ae^{-\varepsilon t_1}; \quad A_2 = Ae^{-\varepsilon(t_1 + \tau_0)} = A_1 e^{-1}; \quad A_3 = A_1 e^{-2} \dots$$

За каждый промежуток времени τ_0 условная амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз. Через $3\tau_0$ условная амплитуда уменьшится в e^3 , т. е. примерно в 20 раз. Обычно полагают, что по истечении времени, равного $3\tau_0$, затухающие колебания можно условно считать прекратившимися.

Декрементом колебаний Δ называют отношение двух последовательных (взятых через условный период T_1) максимальных значений обобщенной координаты. Пусть

$$A_i = Ae^{-\varepsilon t_i} \sin(\omega_1 t_i + \alpha);$$

$$A_{i+1} = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_1)} \sin[\omega_1(t_i + T_1) + \alpha] = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_1)} \sin(\omega_1 t_i + \alpha),$$

где t_i — время, соответствующее i -му максимуму координаты.

Тогда

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\epsilon T_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний δ называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = \epsilon T_1.$$

Логарифмический декремент колебаний удобен для характеристики медленно затухающих колебаний, когда $\epsilon \ll \omega$. Тогда изменение максимальных значений за условный период мало:

$$\Delta A_i = A_i - A_{i+1} \ll A_i, \quad (19.36)$$

и

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_i}{A_i - \Delta A_i} = -\ln \left(1 - \frac{\Delta A_i}{A_i} \right) \approx \frac{\Delta A_i}{A_i}.$$

Логарифмический декремент колебаний в этом случае характеризует относительное изменение максимальных значений за условный период. Кроме того, он имеет определенный энергетический смысл.

Вычислим изменение полной механической энергии за условный период колебаний. В положениях максимальных отклонений ($\dot{q}(t_i) = 0$) полная механическая энергия определяется потенциальной энергией

$$E_i = \Pi_i = \frac{c A_i^2}{2}; \quad E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c (A_i - \Delta A_i)^2}{2}.$$

С учетом (19.36) для медленно затухающих колебаний

$$E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c (A_i^2 - 2 A_i \Delta A_i)}{2}.$$

Тогда относительное изменение полной механической энергии системы за условный период колебаний будет равно

$$\frac{E_i - E_{i+1}}{E_i} = \frac{2 \Delta A_i A_i}{A_i^2} = 2 \frac{\Delta A_i}{A_i} = 2 \delta = \psi,$$

где ψ — коэффициент поглощения энергии за один период (цикл) колебаний.

2. Случай критического сопротивления: $\varepsilon = \omega$; $\lambda_{1,2} = -\varepsilon$.

При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (19.32) имеет вид

$$q = C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 t e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t). \quad (19.37)$$

Произвольные постоянные определим из начальных условий (19.29):

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 + \varepsilon q_0. \quad (19.38)$$

Решение (19.37) представляет собой произведение экспоненты в отрицательной степени и линейной функции времени. Из математики известно, что экспонента в отрицательной степени убывает быстрее, чем возрастает любая степенная функция. Поэтому решение (19.37) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Решение может обратиться в нуль только единожды, если константы C_1 и C_2 имеют разные знаки. Для этого, согласно (19.38), начальное отклонение и начальная скорость должны иметь разные знаки, и при этом необходимо выполнение условия $|\dot{q}_0| > \varepsilon |q_0|$.

На рис. 19.8 представлено решение (19.37) при различных начальных условиях. Видно, что движение не имеет колебательного характера и отсутствуют какие-либо признаки периодичности. Такое движение называют *апериодическим*, а с учетом рассмотрения критического сопротивления — *предельно апериодическим*.

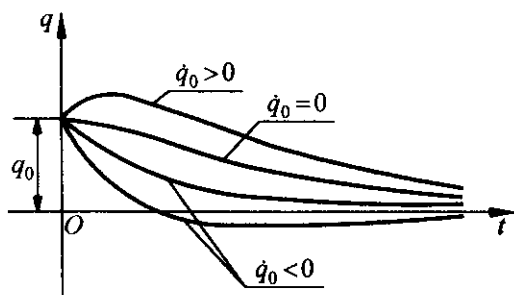


Рис. 19.8

3. Случай большого сопротивления: $\varepsilon > \omega$; $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm k$,

где $k = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$. Поскольку $k < \varepsilon$, оба корня характеристического уравнения будут отрицательными.

Общее решение дифференциального уравнения (19.32) в этом случае имеет вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{k t} + C_2 e^{-k t}).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий (19.29)

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(q_0 + \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right); \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(q_0 - \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right).$$

Движение в случае сопротивления, большего критического, также имеет *апериодический* характер, аналогичный представленному на рис. 19.8, однако с увеличением ε графики растягиваются вдоль оси абсцисс, поскольку с возрастанием вязкого сопротивления при прочих равных условиях скорость движения убывает.

Пример 19.5. Груз массой $m = 0,5$ кг, скрепленный с пружиной, помещен в сосуд с жидкостью, создающей при движении груза силу сопротивления, пропорциональную его скорости v (рис. 19.9, а). Определить закон движения груза, если статическая деформация пружины $\lambda_{\text{ст}} = 5$ см, коэффициент вязкого сопротивления жидкости $h = 1$ Н·с/м, а в начальный момент времени груз был подвешен к концу недеформированной пружины и отпущен без начальной скорости.

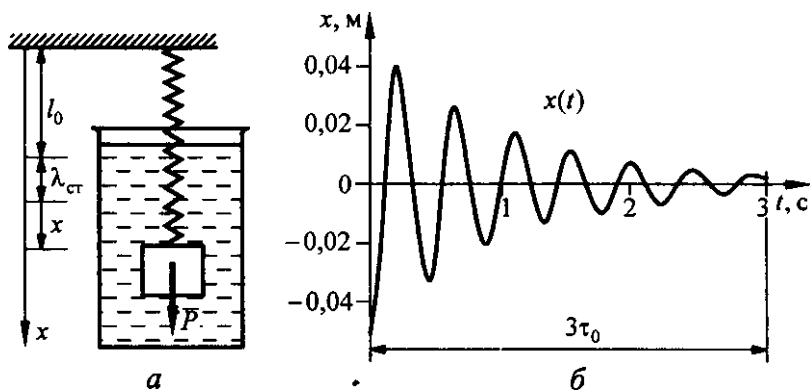


Рис. 19.9

Решение. Дифференциальное уравнение движения груза, скрепленного с пружиной и преодолевающего вязкое сопротивление среды, было получено в примере 19.1. Положив внешнюю силу равной нулю, запишем

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x — координата груза, отсчитываемая от положения статического равновесия вниз; $\epsilon = h/2m = 1$ рад/с; $\omega = \sqrt{c/m}$.

Поскольку статическая деформация пружины $\lambda_{ст}$ связана с жесткостью c пружины и весом груза P соотношением (19.3) (где $P = mg$), то

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}, \quad \omega = 14 \text{ рад/с.}$$

Начальные условия в данном случае имеют вид при $t=0$; $x = -\lambda_{ст}$; $\dot{x} = 0$.

Так как $\epsilon < \omega$, имеют место затухающие колебания. Условная частота затухающих колебаний $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} = 13,96$ рад/с.

Согласно (19.34),

$$x = Ae^{-\epsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\epsilon x_0}{\omega_1}\right)^2}$, $A = 0,0501$ м.

Главное значение $\alpha' = \arctg \frac{\omega_1}{\epsilon} = 1,5$ рад. Учитывая, что $\dot{x}_0 + \epsilon x_0 < 0$ и, следовательно, α лежит в III квадранте, добавим к главному значению α' величину π . Тогда решение будет иметь вид

$$x = 0,0501 e^{-t} \sin(13,96t + 4,641), \text{ где } x \text{ в м.}$$

Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 19.9, б. Выше было отмечено, что затухающие колебания рассматривают на промежутке времени $3\tau_0 = 3/\epsilon = 3$ с. За это время условная амплитуда колебаний уменьшится примерно в 20 раз.

Влияние на свободные колебания сил сухого трения

Дифференциальное уравнение движения тела, скрепленного с пружиной и находящегося на горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 19.10), имеет вид

$$m\ddot{x} + cx \pm F_{тр}^{max} = 0, \quad (19.39)$$

где $F_{тр}^{max}$ — сила сухого трения скольжения, равная максимальной силе трения покоя (зависимость силы трения скольжения от значения скорости скольжения не учитывается), знак «+» соответствует движению слева направо, «—» — наоборот.

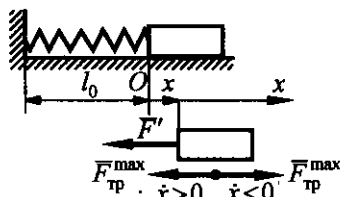


Рис. 19.10

Уравнение (19.39) является нелинейным даже с учетом малости колебаний, однако при определенных начальных условиях:

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0, \quad \dot{x}=0 \quad (19.40)$$

можно легко найти его решение, рассматривая последовательно интервалы движения, где знак скорости постоянен и, следовательно, уравнение (19.39) является линейным и может быть представлено в виде

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0,$$

где $x_1 = x \pm a$; $a = F_{\text{тр}}^{\text{max}} / c$ представляет собой отклонение тела от положения равновесия под действием силы, равной максимально возможной силе трения покоя.

При начальных условиях (19.40) на первом интервале тело движется влево, а его уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a.$$

При начальном отклонении тела от положения равновесия на величину $x_0 \leq a$ движение не начнется, поскольку упругая сила пружины окажется недостаточной для преодоления силы трения. Полосу $-a \leq x \leq a$ называют **зоной застоя** (рис. 19.11).

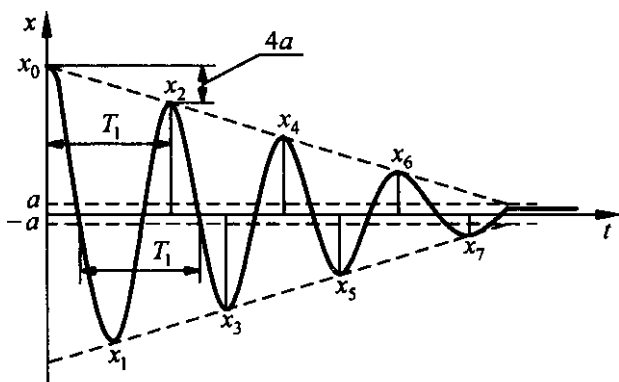


Рис. 19.11

При $x_0 > a$ решение с учетом (19.40) будет иметь следующий вид:

$$x = a + (x_0 - a) \cos \omega t,$$

т. е. на первом интервале решение — косинусоида с амплитудой $x_0 - a$, смещенная вверх на величину a (см. рис. 19.11). Полученное решение справедливо, пока $\dot{x} < 0$. Так как

$$\dot{x} = -\omega(x_0 - a) \sin \omega t,$$

то скорость остается отрицательной до $t^* = \pi/\omega$. В этот момент времени тело остановится и его смещение от положения равновесия будет равно

$$x_1 = a + (x_0 - a) \cos \pi = -(x_0 - 2a),$$

т. е. по абсолютной величине уменьшится на $2a$ по сравнению с начальным.

Если $|x_1| > a$, то движение начнется в обратную сторону и его уравнение примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 a.$$

Отсчитывая время от начала движения в обратную сторону, получаем начальные условия для второго интервала движения:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_1, \quad \dot{x} = 0.$$

Решение на этом интервале имеет вид

$$x = (x_1 + a) \cos \omega t - a$$

и представляет собой косинусоиду с амплитудой $|x_1 + a| = x_0 - 3a$, смещенную вниз на величину a (см. рис. 19.11). Через $t^* = \pi/\omega$ тело остановится в крайнем правом положении, имея смещение от положения равновесия, равное $x_2 = -x_1 - 2a = x_0 - 4a$ (см. рис. 19.11) и т. д.

Движение тела будет продолжаться до тех пор, пока при очередной остановке его в крайнем положении смещение от положения равновесия не окажется по абсолютной величине меньше a . Хотя рассмотренное движение и не является периодическим, можно, как и в случае затухающих колебаний при наличии линейно-вязкого сопротивления, ввести условный период колебаний $T_1 = 2\pi/\omega$ (см. рис. 19.11), характеризующий чередование нулей и максимумов. Период T_1 совпадает с периодом колебаний консервативной системы и не зависит от наличия сухого трения. За каждый период T_1 амплитуда колебаний уменьшается на величину $4a$, т. е. убывает во времени по линейному закону.

19.4. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид (19.25).

В случае, когда обобщенная сила $Q(t)$, характеризующая внешнее воздействие на колебательную систему, изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$Q(t) = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

где Q_0 , p , β — соответственно амплитуда, частота и начальная фаза обобщенной силы, имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

Способы возбуждения вынужденных колебаний. Определение обобщенной силы $Q(t)$

Способы возбуждения колебаний можно условно разделить на группы. На рис. 19.12 приведены три наиболее характерных способа возбуждения вынужденных колебаний простейшей колебательной системы. Система представляет собой тело массой m , имеющее возможность двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. С телом скреплена пружина, жесткость которой c . Обобщенная координата x отсчитывается от положения равновесия системы (при отсутствии внешнего воздействия), когда пружина не напряжена.

1. Силовое возбуждение (см. рис. 19.12, а). Система находится под воздействием силы $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$, приложенной извне и не зависящей от параметров системы.

В этом случае для получения $Q(t)$ необходимо задать вариацию обобщенной координаты δx и, вычислив возможную работу только от действия силы $F(t)$, разделить ее на δx :

$$Q(t) = \frac{F(t)\delta x}{\delta x} = F_0 \sin(pt + \beta).$$

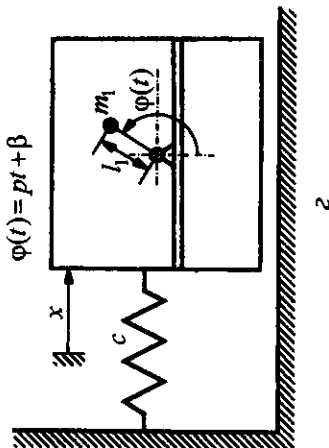
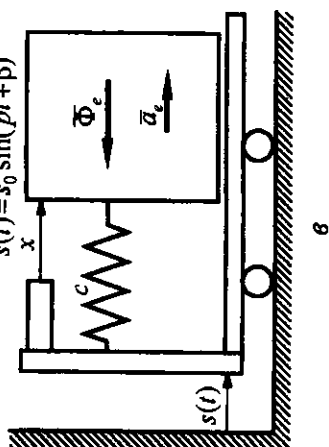
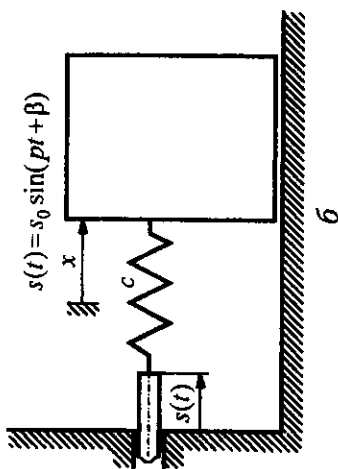
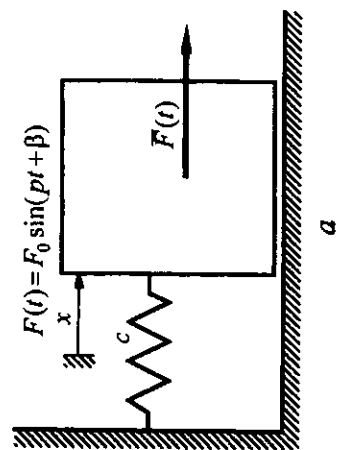


Рис. 19.12

2. Кинематическое возбуждение (см. рис. 19.12, б). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины $s(t) = s_0 \sin(pt + \beta)$, не зависящего от параметров системы.

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном перемещении ее концов равно

$$\Pi' = 1/2 c \lambda^2 = 1/2 c [x - s(t)]^2.$$

Тогда

$$Q_{\Pi'} = -\frac{\partial \Pi'}{\partial x} = -cx + cs(t) = Q_{\Pi} + Q(t),$$

где $Q_{\Pi} = -cx$; $Q(t) = cs_0 \sin(pt + \beta)$.

3. Инерционное возбуждение. Возможны два случая.

А. Вынужденные относительные колебания (см. рис. 19.12, в). Механическая система находится на подвижном основании, перемещение которого, независящее от параметров системы, задается извне, причем необходимо исследовать относительные (по отношению к подвижному основанию) колебания.

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется вместе с ним поступательно, прямолинейно, но неравномерно. Поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, направление которой противоположно направлению переносного ускорения. Переносное ускорение $a_e = \ddot{s}(t)$ при этом считается сонаправленным с $s(t)$. Обобщенная сила $Q(t)$ будет определяться $\bar{\Phi}_e$, т. е.

$$Q(t) = \frac{-m\ddot{s}(t)\delta x}{\delta x} = -m\ddot{s}(t) = mp^2 s_0 \sin(pt + \beta).$$

В. Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком (см. рис. 19.12, г). Тело скреплено с эксцентриком, имеющим массу $m_1 \ll m$, эксцентриситет l_1 и вращающимся с постоянной угловой скоростью. Обозначив через $\varphi = pt + \beta$ угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим $Q(t)$ через проекцию на горизонталь центробежной силы $m_1 p^2 l_1$:

$$Q(t) = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta) \delta x}{\delta x} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta).$$

Отметим, что при инерционном возбуждении колебаний, в отличие от силового и кинематического возбуждений, амплитуда Q_0 обобщенной силы пропорциональна p^2 .

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все способы возбуждения вынужденных колебаний, например возбуждение колебаний вследствие перемещения точки прикрепления демпфера. Возможно и комбинированное возбуждение колебаний, объединяющее несколько способов.

Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении, согласно (19.25), дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (19.41)$$

где $f_0 = Q_0/a$.

Силовое и кинематическое возбуждения колебаний

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения (19.41) можно представить в виде суммы общего решения q_{00} однородного уравнения $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ и частного решения q_{ch} неоднородного уравнения:

$$q = q_{00} + q_{ch}. \quad (19.42)$$

Общее решение однородного уравнения

$$q_{00} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (19.43)$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется в зависимости от соотношения частот свободных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса $p \neq \omega$ и резонанс $p = \omega$.

1. **Отсутствие резонанса.** В этом случае ($p \neq \omega$) частное решение следует искать в виде

$$q_{\text{чн}} = G \sin(pt + \beta),$$

где G — искомая постоянная величина.

Подстановка $q_{\text{чн}}$ в (19.41) приводит к соотношению

$$G(\omega^2 - p^2) = f_0,$$

откуда

$$G = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2}.$$

В соответствии с (19.42) общее решение уравнения (19.41) будет иметь вид

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta), \quad (19.44)$$

или

$$q = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (19.45)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 определим из начальных условий (19.29), используя полное решение (19.44):

$$C_1 = q_0 - \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin \beta; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega} - \frac{f_0 p}{\omega(\omega^2 - p^2)} \cos \beta.$$

При необходимости произвольные постоянные A и α можно вычислить через C_1 и C_2 по формулам (19.30).

Как следует из (19.44) и (19.45), движение состоит из двух гармонических колебаний с частотами ω и p соответственно. Первые (с частотой ω) можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать *свободными колебаниями*, а вторые (с частотой p) — *вынужденными колебаниями системы*.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий ($q_0, \dot{q}_0$), но и от параметров возмущающей силы (f_0, p, β), и, следовательно, первые колебания в

решении фактически также являются вынужденными колебаниями. Однако данное название получило широкое распространение лишь потому, что вторые колебания имеют частоту p возмущающей силы, в то время как первые — частоту ω свободных колебаний (собственную частоту).

Отметим, что в реальных системах, где всегда присутствуют силы вязкого сопротивления, колебания с частотой ω со временем затухают и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой p , т. е.

$$q = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \beta).$$

Если $p < \omega$, то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же $p > \omega$, то вынужденные колебания будут находиться в *противофазе* (сдвинуты по фазе на π) по отношению к возмущающей силе.

Введем *амплитуду* D вынужденных колебаний:

$$D = |G| = \frac{f_0}{|\omega^2 - p^2|}. \quad (19.46)$$

Тогда установившиеся вынужденные колебания можно представить в виде

$$q = D \sin(pt + \beta - \gamma), \quad (19.47)$$

где γ — *сдвиг по фазе* вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы,

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } p < \omega; \\ \pi & \text{при } p > \omega. \end{cases}$$

Разделим числитель и знаменатель (19.46) на ω^2 . Принимая во внимание, что $f_0/\omega^2 = Q_0/c = D_{\text{ст}}$ (где $D_{\text{ст}}$ — статическое смещение системы от положения равновесия под действием постоянной силы, совпадающей по величине с амплитудой Q_0), получаем

$$D = D_{\text{ст}} \frac{1}{|1 - z^2|},$$

где $z = p/\omega$ — коэффициент расстройки, или относительная частота вынужденных колебаний.

Величину

$$\lambda = \frac{1}{|1 - z^2|}$$

называют *коэффициентом динамичности*. Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения.

2. Резонанс. В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление *резонанса*.

При отсутствии сил вязкого сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что, если колебания происходят с собственной частотой, то инерционные силы уравниваются квазиупругими ($ap^2 = c$) при любых амплитудах колебаний. Возмущающая сила оказывается при этом неуравновешенной и увеличивает амплитуду колебаний.

Будем искать частное решение уравнения (19.41) при $p = \omega$ в виде

$$q_{\text{ч.н}} = Gt \cos(pt + \beta).$$

Определив $\ddot{q}_{\text{ч.н}} = -2Gp \sin(pt + \beta) - Gtp^2 \cos(pt + \beta)$ и подставив его вместе с $q_{\text{ч.н}}$ в (19.41), получим

$$-2Gp \sin(pt + \beta) = f_0 \sin(pt + \beta).$$

Отсюда

$$G = -f_0/2p$$

и, следовательно,

$$q_{\text{ч.н}} = -\frac{f_0 t}{2p} \cos(pt + \beta) = \frac{f_0 t}{2p} \sin\left(pt + \beta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (19.48)$$

Анализируя решение (19.48), можно сделать вывод, что, с одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены

по фазе от возмущающей силы на $\pi/2$. С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой. Зависимость $q_{\text{ч.н}}(t)$ представлена на рис. 19.13.

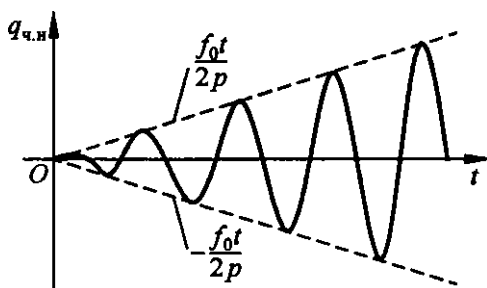


Рис. 19.13

Отметим, однако, что в реальной колебательной системе, во-первых, всегда имеется сопротивление, во-вторых, при достижении больших амплитуд колебаний нарушается допущение о их малости и становятся существенными нелинейные восстанавливающие силы. Все это приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе в реальной колебательной системе хотя и может достигать больших значений, но не является неограниченно возрастающей.

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний пусть до конечных, но больших значений, может стать причиной разрушения конструкции или возникновения опасных напряжений, сокращающих срок ее службы. Поэтому при проектировании машиностроительных конструкций надо, по возможности, избегать резонанса.

Инерционное возбуждение колебаний

В случае инерционного возбуждения колебаний

$$f_0 = \tilde{f}_0 p^2,$$

где $\tilde{f}_0 = Q_0 / ap^2$, и измеряется в тех же единицах, что и обобщенная координата.

Тогда амплитуду D вынужденных колебаний (см. (19.46)) можно представить в виде

$$D = \frac{\tilde{f}_0 p^2}{|\omega^2 - p^2|} = \tilde{f}_0 \frac{z^2}{|1 - z^2|} = \tilde{f}_0 \lambda_{ин},$$

где $\lambda_{ин}$ — коэффициент динамичности при инерционном возбуждении колебаний,

$$\lambda_{ин} = \frac{z^2}{|1 - z^2|}.$$

Коэффициент динамичности $\lambda_{ин}$ показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при инерционном возбуждении с конечной частотой p отличается от амплитуды вынужденных колебаний при бесконечно большой частоте $p \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$).

Зависимости коэффициентов динамичности λ и $\lambda_{ин}$ и сдвига по фазе γ от коэффициента расстройки z представлены на рис. 19.14. Коэффициенты динамичности λ и $\lambda_{ин}$ имеют разрывы при $z=1$, что соответствует резонансу. При $z=0$ $\lambda=1$, что соответствует статическому воздействию на систему, а $\lambda_{ин}=0$, поскольку при нулевой частоте отсутствует инерционное возбуждение. При $z \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$, а $\lambda_{ин} \rightarrow 1$. Сдвиг по фазе γ не зависит от способа возбуждения.

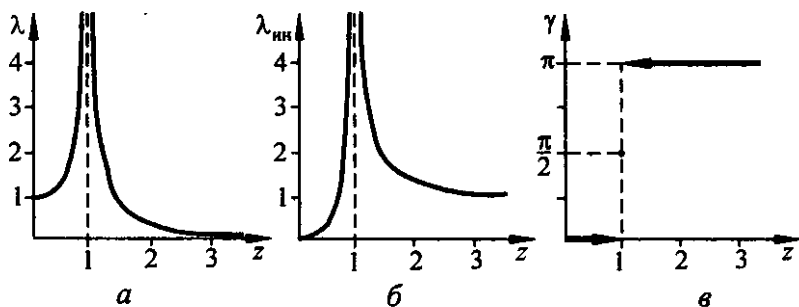


Рис. 19.14

Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении, согласно (19.25), дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(pt + \beta). \quad (19.49)$$

Силовое и кинематическое возбуждения колебаний

Решение (19.49) будем искать в виде суммы (19.42) общего решения однородного уравнения $\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0$ и частного решения неоднородного.

В § 19.3 было показано, что общее решение однородного уравнения может быть представлено в зависимости от соотношения между ε и ω в одной из трех форм:

$$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad \text{при } \varepsilon < \omega;$$

$$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t) \quad \text{при } \varepsilon = \omega; \quad (19.50)$$

$$q_{o.o} = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}) \quad \text{при } \varepsilon > \omega.$$

Для определения частного решения уравнения (19.49) воспользуемся методом комплексных амплитуд. Известно, что

$$f_0 e^{i(pt+\beta)} = f_0 \cos(pt + \beta) + if_0 \sin(pt + \beta),$$

(где i — мнимая единица) и, следовательно,

$$f_0 \sin(pt + \beta) = \text{Im } f_0 e^{i(pt+\beta)}.$$

Поэтому можно ввести вспомогательное уравнение

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = f_0 e^{i(pt+\beta)},$$

найти его частное решение $y_{ч.н}$, а затем, воспользовавшись линейностью вспомогательного уравнения, для которого справедлив принцип суперпозиции, получить $q_{ч.н}$ как $\text{Im } y_{ч.н}$.

Задав $y_{ч.н}$ в виде $y_{ч.н} = Ge^{i(pt+\beta)}$, где G — комплексная амплитуда, получим

$$(\omega^2 - p^2 + 2\epsilon ip)G = f_0,$$

откуда

$$G = \frac{f_0}{(\omega^2 - p^2 + 2\epsilon ip)} = \frac{f_0}{D^* e^{i\gamma}}.$$

Здесь

$$D^* = \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}; \quad \gamma = \arctg \frac{2\epsilon p}{\omega^2 - p^2}. \quad (19.51)$$

Тогда

$$G = D e^{-i\gamma}; \quad y_{\text{ч.н}} = D e^{i(pt + \beta - \gamma)},$$

где

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}}. \quad (19.52)$$

Отсюда

$$q_{\text{ч.н}} = \text{Im } y_{\text{ч.н}} = D \sin(pt + \beta - \gamma). \quad (19.53)$$

Общее решение (19.49) будет иметь вид

$$q = e^{-\epsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \epsilon < \omega;$$

$$q = e^{-\epsilon t} (C_1 + C_2 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \epsilon = \omega; \quad (19.54)$$

$$q = e^{-\epsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } \epsilon > \omega,$$

где C_1 и C_2 — константы, определяемые из начальных условий (19.29) с использованием полного решения (19.54).

Структура общего решения (19.50) однородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях ϵ с течением времени из-за наличия множителя $e^{-\epsilon t}$ оно стремится к нулю, и в решении (19.54) остается только частное решение. В этом случае говорят об **установившихся вынужденных колебаниях**.

На основании решения (19.53) можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

- 1) это незатухающие колебания; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- 2) эти колебания не зависят от начальных условий;
- 3) при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;

4) эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину γ , изменяющуюся, как будет показано ниже, от 0 до π .

Амплитуда D установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе γ зависят в силу (19.51) и (19.52) от соотношения между частотами p и ω и от коэффициента затухания ϵ . Проанализируем эти зависимости, называемые *амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками*.

Для большей общности результатов перейдем к безразмерным параметрам.

Безразмерным коэффициентом затухания d называют отношение

$$d = 2\epsilon/\omega.$$

Если $\epsilon \ll \omega$ и, следовательно, $T_1 \approx T$, то безразмерный коэффициент затухания можно связать с логарифмическим декрементом колебаний:

$$d = \frac{2\epsilon T_1 T}{\omega T T_1} = \frac{2\epsilon T_1 T}{2\pi T_1 T} = \frac{\delta T}{\pi T_1} \approx \frac{\delta}{\pi}.$$

Добротностью D называют величину, обратную d :

$$D = 1/d = \omega/2\epsilon.$$

Очевидно, что при малом затухании добротность, как и безразмерный коэффициент затухания, может быть выражена через логарифмический декремент колебаний: $D = \pi/\delta$.

Разделив числитель и знаменатель амплитуды (19.52) на ω^2 , получим

$$D = D_{ст} \lambda.$$

Здесь $D_{ст} = Q_0/c$, а

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}} \quad (19.55)$$

— коэффициент динамичности при наличии вязкого сопротивления.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности λ от z и d , представляющую собой амплитудно-частотную характеристику системы в безразмерном виде:

при $z = 0$ $\lambda = 1$;

при $z \rightarrow \infty \quad \lambda \rightarrow 0$;

при $z=1 \quad \lambda=1/d = D$.

Таким образом, добротность D представляет собой значение коэффициента динамичности при резонансе; она показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе отличается от статического смещения. В отличие от случая отсутствия вязкого сопротивления, амплитуда при резонансе имеет конечное значение.

Если частота p изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой ω свободных колебаний, т. е. $p \ll \omega$, то амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению, а коэффициент динамичности близок к единице. Если же $p \gg \omega$, то колебательная система ведет себя как фильтр, т. е. практически не воспринимает возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

Выражение для коэффициента динамичности (19.55) показывает, что при малых значениях d вязкое сопротивление становится существенным лишь в достаточно узкой зоне в окрестности резонанса, когда величина $d^2 z^2$ становится соизмеримой с

$(1-z^2)^2$. Это же демонстрирует график $\lambda(z)$ при $d=0$, приведенный на рис. 19.15. Поэтому при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением последнее можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты ω .

Для определения экстремальных значений коэффициента динамичности достаточно исследовать подкоренное выражение в уравнении (19.55),

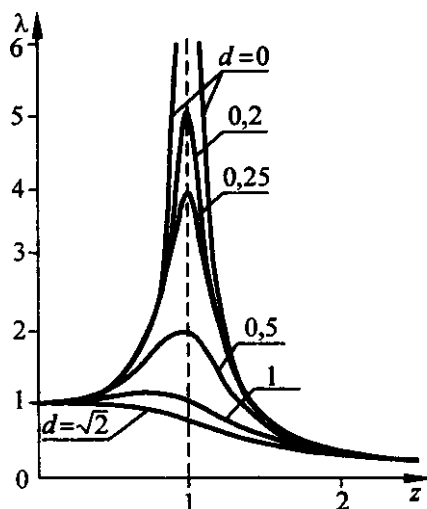


Рис. 19.15

поскольку его максимум в силу структуры уравнения (19.55) будет соответствовать минимуму λ , и наоборот.

Вычислим производные по z от подкоренного выражения $y(z) = (1 - z^2)^2 + d^2 z^2$:

$$y'(z) = -4z(1 - z^2) + 2d^2 z = 2z(d^2 - 2 + 2z^2),$$

$$y''(z) = 2(d^2 - 2 + 2z^2) + 8z^2 = 12z^2 - 4(1 - d^2/2).$$

Приравняв к нулю $y'(z)$, получим два значения z , соответствующие экстремумам:

$$z_1 = 0; z_2 = \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}}$$

(второе значение имеет место только при $d \leq \sqrt{2}$, причем при $d = \sqrt{2}$ оно совпадает с первым).

Если $d < \sqrt{2}$, то вторая производная $y''(z)$ отрицательна при z_1 и положительна при z_2 , следовательно, z_1 соответствует максимуму $y(z)$ и локальному минимуму $\lambda(z)$, а z_2 — минимуму $y(z)$ и максимуму $\lambda(z)$. Максимальное значение коэффициента динамичности при этом будет равно

$$\lambda(z_2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2 + d^2 - \frac{d^4}{2}}} = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}}.$$

При $d \geq \sqrt{2}$ остается только одно экстремальное значение $z_1 = 0$; в этом случае имеет место минимум $y(z)$ и максимум $\lambda(z)$.

На рис. 19.15 представлены кривые, определяющие зависимость $\lambda(z)$ при различных значениях коэффициента d . При $d \geq \sqrt{2}$ максимальное значение коэффициента динамичности $\lambda = 1$ соответствует $z = 0$, т. е. амплитуда установившихся вынужденных колебаний равна или меньше статического смещения. При других значениях d максимум $\lambda(z)$ оказывается всегда сдвинутым влево от резонансной частоты.

Для исследования фазочастотной характеристики в безразмерном виде разделим числитель и знаменатель аргумента арктангенса (19.51) на ω^2 :

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2\varepsilon p}{\omega}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \operatorname{arctg} \frac{d \cdot z}{1 - z^2}.$$

Учтем, что производная $\gamma(z)$ по z независимо от значения d (кроме $d = 0$) положительна при всех значениях z , т. е. $\gamma(z)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию. Тогда

при $z = 0$ $\gamma = \operatorname{arctg}(0) = 0$;

при $z = 1$ $\gamma = \operatorname{arctg}(\infty) = \pi/2$;

при $z \rightarrow \infty$ $\gamma = \operatorname{arctg}(-0) = \pi$.

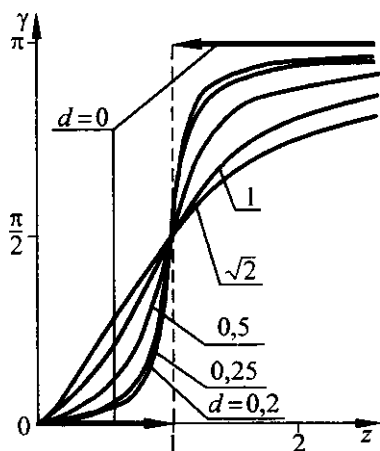


Рис. 19.16

Отметим, что при резонансе фазовое запаздывание $\gamma = \pi/2$ независимо от значения коэффициента d , характеризующего вязкое сопротивление.

На рис. 19.16 представлены кривые, характеризующие зависимость $\gamma(z)$ при различных значениях d . При $d = 0$ (отсутствие вязкого сопротивления) $\gamma(z)$ представляет собой разрывную функцию (см. рис. 19.14, в). Отметим, что с ростом d меняется характер фазовой кривой, она трансформируется из кривой с двумя перегибами в кривую с одним перегибом.

Инерционное возбуждение колебаний

В случае инерционного возбуждения колебаний, как и при отсутствии вязкого сопротивления,

$$f_0 = \tilde{f}_0 p^2.$$

Тогда

$$D = \tilde{f}_0 \lambda_{ин}.$$

Здесь коэффициент динамичности $\lambda_{ин}$ при инерционном возбуждении

$$\lambda_{ин} = \frac{p^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}}.$$

Для исследования амплитудно-частотной характеристики, заменив коэффициент расстройки z обратной ему величиной $\xi = \omega/p$, получим

$$\lambda_{ин} = \frac{1/\xi^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^2 + \frac{d^2}{\xi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + d^2 \xi^2}}.$$

По структуре $\lambda_{ин}(\xi)$ полностью совпадает с $\lambda(z)$ при силовом или кинематическом возбуждении. Следовательно,

при $z=0$ $\xi \rightarrow \infty$, $\lambda_{ин} = 0$;

при $z \rightarrow \infty$ $\xi = 0$, $\lambda_{ин} = 1$;

при $z=1$ $\xi=1$, $\lambda_{ин} = 1/d = D$.

При $d < \sqrt{2}$ имеет место максимальное значение

$\lambda_{ин} = \frac{D}{\sqrt{1 - d^2/4}}$, которому соответствует $\xi = \sqrt{1 - d^2/2}$ или

$z = \frac{1}{\sqrt{1 - d^2/2}}$, т. е. в отличие от силового или кинематического

возбуждения максимальное значение коэффициента динамичности смещено вправо от резонансной частоты.

При $d > \sqrt{2}$ максимальное значение $\lambda_{ин} = 1$, $z \rightarrow \infty$.

Зависимость $\lambda_{ин}(z)$ при различных значениях коэффициента d представлена на рис. 19.17. Как и в случае силового или кинематического возбуждения, при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением последнее можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты ω .

Фазочастотная характеристика не зависит от способа возбуждения (см. рис. 19.16).

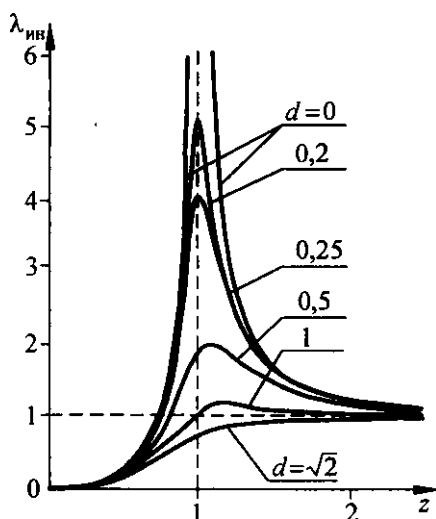


Рис. 19.17

Переходные процессы

Важной характеристикой колебательной системы является временная характеристика — изменение колебаний во времени. Анализ решения (19.54) показал, что по истечении определенного промежутка времени с начала колебаний свободное движение затухает. Однако оно возникает каждый раз, когда изменяется возмущающая сила: возникает, меняется ее амплитуда, или частота, и наконец, прекращает действовать. Возникнув, свободное движение осуществляет плавный **переходный процесс** от одного установившегося режима вынужденных колебаний к другому.

Для того чтобы получить переходный процесс, необходимо зафиксировать значения отклонения и скорости в момент изменения возмущающей силы, а затем, считая эти значения начальными условиями, использовать полное решение (19.54), определив в нем произвольные постоянные.

Пример 19.6. К телу массой $m=1$ кг (см. рис. 19.2, а), подвешенному на пружине АВ, жесткость которой $c=144$ Н/м, приложена сила $F(t)=F_0 \sin pt$, где $F_0=2$ Н; $p=8$ рад/с. При движении тело преодолевает силу вязкого сопротивления $\bar{F}^*=-h\dot{v}$, где $h=1$ Н·с/м. В начальный момент тело смещено от положения равновесия на 4 см и отпущено без начальной скорости. Через 200 с после начала движения амплитуда приложенной силы увеличилась в полтора раза, а еще через 200 с действие силы прекратилось. Исследовать движение тела.

Решение. Рассмотрим три временных интервала движения: 0...200 с, 200...400 с и более 400 с.

На первом интервале (промежуток времени от 0 до 200 с) дифференциальное уравнение движения в каноническом виде (19.5) при $\beta=0$ имеет вид

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin pt,$$

где $\epsilon = h/2m = 0,5$ рад; $\omega = \sqrt{c/m} = 12$ рад; $f_0 = F_0/m = 2$ м/с².

Поскольку $\epsilon < \omega$, запишем решение в виде

$$x = e^{-\epsilon t} (C_{11} \cos \omega_1 t + C_{21} \sin \omega_1 t) + D \sin(pt - \gamma),$$

где C_{11} и C_{21} — произвольные постоянные на первом интервале движения;

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \epsilon^2} = 11,99 \text{ рад}; D = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} = 0,025 \text{ м}; \gamma = \arctg \frac{2\epsilon p}{\omega^2 - p^2} = 0,1 \text{ рад}.$$

Подставив в общее решение начальные условия:

$$\text{при } t=0 \quad x=0,04 \text{ м}; \quad \dot{x}=0,$$

определим произвольные постоянные $C_{11}=0,042$ м; $C_{21}=-0,015$ м. Следовательно,

$$x = e^{-0,5t} (0,042 \cos 11,99t - 0,015 \sin 11,99t) + 0,025 \sin(8t - 0,1) \text{ м}.$$

Процесс перехода от начального смещения к установившимся вынужденным колебаниям представлен на рис. 19.18, а. Видно, что продолжительность переходного процесса составляет примерно 9 с. Поскольку она существенно меньше 200 с, можно при определении параметров движения в конце первого интервала учитывать только частное решение, определяющее установившиеся вынужденные колебания:

$$t = 200 \text{ с};$$

$$x(200) = D \sin(pt - \gamma) = -0,018 \text{ м};$$

$$\dot{x}(200) = Dp \cos(pt - \gamma) = -0,134 \text{ м/с}.$$

Эти значения будут начальными условиями на втором интервале движения.

На втором интервале (промежуток времени от 200 до 400 с) решение с учетом линейной зависимости $D(F_0)$ будет иметь вид

$$x = e^{-\epsilon t_2} (C_{12} \cos \omega_1 t_2 + C_{22} \sin \omega_1 t_2) + 1,5D \sin(pt_2 - \gamma),$$

где $t_2 = t - 200$ с; C_{12} , C_{22} — произвольные постоянные на втором интервале движения, $C_{12} = -0,015$ м; $C_{22} = -0,037$ м.

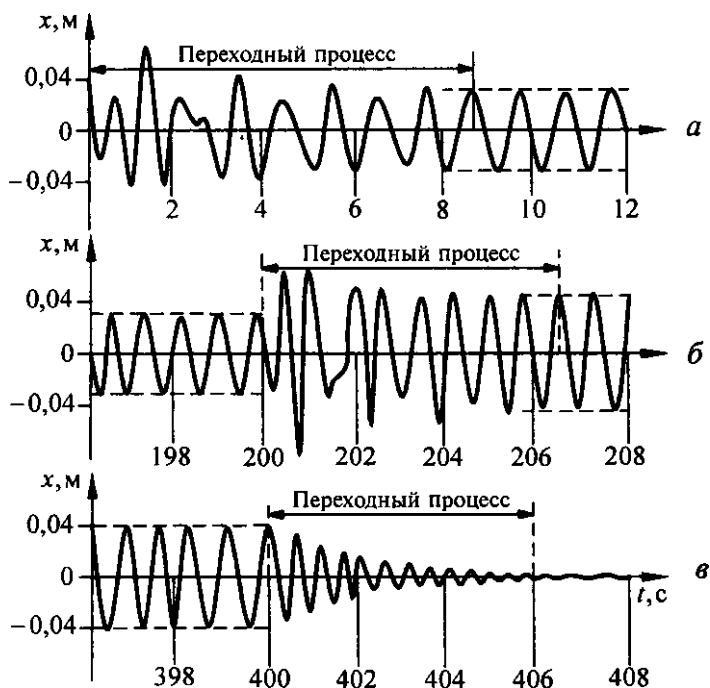


Рис. 19.18

Подставив числовые значения, получим

$$x = -e^{-0,5t_2} (0,015 \cos 1,99t_2 + 0,037 \sin 1,99t_2) + 0,037 \sin(8t_2 - 0,1).$$

Процесс перехода от установившихся вынужденных колебаний с амплитудой D к установившимся вынужденным колебаниям с амплитудой $1,5 D$ представлен на рис. 19.18, б. Продолжительность переходного процесса на втором интервале движения составляет примерно 7 с.

Используя, как и на первом интервале, только частное решение, получим параметры в конце второго интервала, являющиеся начальными условиями для третьего интервала движения:

$$t_2 = 200 \text{ с};$$

$$x(200) = 1,5D \sin(pt - \gamma) = -0,0275 \text{ м};$$

$$\dot{x}(200) = 1,5Dp \cos(pt - \gamma) = -0,2015 \text{ м/с}.$$

На третьем интервале (продолжительность более 400 с) решение при отсутствии возмущающей силы можно записать в виде уравнения затухающих колебаний

$$x = e^{-\varepsilon t_3} (C_{13} \cos \omega_1 t_3 + C_{23} \sin \omega_1 t_3),$$

где $t_3 = t - 400$ с.

Определив произвольные постоянные C_{13} и C_{23} из начальных условий для этого интервала по формулам (19.35):

$$C_{13} = -0,0275 \text{ м}; \quad C_{23} = -0,018 \text{ м},$$

получим следующее решение:

$$x = -e^{-0,5t_3} (0,0275 \cos 1,99t_3 + 0,018 \sin 1,99t_3).$$

Процесс перехода от установившихся вынужденных колебаний с амплитудой $1,5D$ к состоянию покоя представлен на рис. 19.18, в. Его продолжительность составляет примерно 6 с.

Вынужденные колебания в случае периодической возмущающей силы

Часто в технических задачах возмущающая сила является периодической, но негармонической. Примеры такой силы приведены на рис. 19.19.

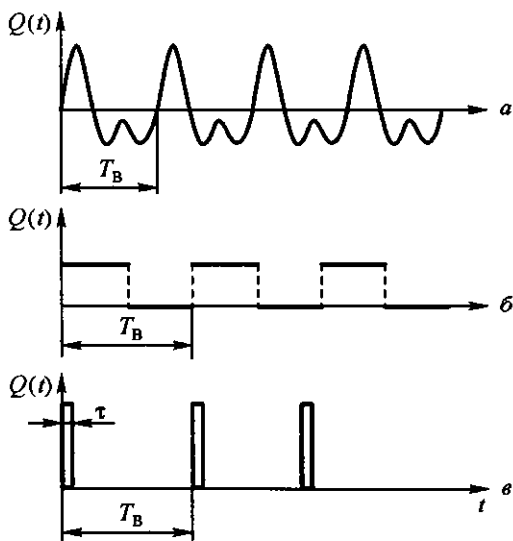


Рис. 19.19

Дифференциальное уравнение движения механической системы в этом случае может быть представлено в виде

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (19.56)$$

где $Q(t) = Q(t + T_B)$; T_B — период возмущающей силы.

Ограничимся случаями силового и кинематического возбуждений. Пусть функция $Q(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. она ограничена, имеет разрывы первого рода и конечное число экстремумов на конечном интервале. Тогда $Q(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (19.57)$$

$$\text{где } Q_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \cos npt dt; \quad b_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \sin npt dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тригонометрический ряд (19.57) можно представить в амплитудной форме

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(p_n t + \beta_n), \quad (19.58)$$

$$\text{где } Q_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad p_n = np; \quad \beta_n = \arctg(a_n/b_n).$$

Отдельные члены этого ряда называют *гармониками*; значениям $n = 1, 2, 3, \dots$ соответствуют гармоники первого, второго, третьего и т.д. порядков.

Подставив (19.58) в (19.56) и разделив каждый член полученного выражения на a , получим дифференциальное уравнение в канонической форме:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(p_n t + \beta_n).$$

Решение этого уравнения, как и в случае гармонической возмущающей силы, можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения, характеризующего свободное движение,

и частного решения неоднородного уравнения, характеризующего установившиеся вынужденные колебания.

В силу линейности дифференциального уравнения частное решение будет представлять сумму

$$q_{\text{чн}} = q_{\text{чн}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{\text{чн}}^{(n)},$$

где $q_{\text{чн}}^{(0)} = Q_0/c$ — смещение центра установившихся колебаний от положения равновесия при $Q_0 \neq 0$; $q_{\text{чн}}^{(n)} = D_n \sin(p_n t + \beta_n - \gamma_n)$; D_n , γ_n — амплитуда и сдвиг фазы n -й гармоники установившихся вынужденных колебаний, определяемые по формулам (19.51), (19.52) после замены в них p на p_n .

В силу кратности частот установившиеся вынужденные колебания будут периодическими с периодом T_B , однако закон изменения $q_{\text{чн}}$ во времени не будет соответствовать закону изменения вынуждающей силы. Здесь действуют следующие закономерности. С одной стороны, последовательность амплитуд Q_n представляет собой дискретный линейчатый спектр с тенденцией уменьшения Q_n с ростом n . В зависимости от закона изменения $Q(t)$ ряд Фурье может сходиться достаточно быстро как, например, для силы, представленной на рис. 19.19, а, так и относительно медленно (в случае импульсной нагрузки, приведенной на рис. 19.19, в). Сама механическая система при этом ведет себя как фильтр: пропускает практически без искажения гармоники с частотами, много меньшими собственной частоты ω , усиливает гармоники с частотами, близкими к резонансной, и не пропускает гармоники с частотами, много большими ω . Из-за этого возникают амплитудные искажения. Последнее обстоятельство, кстати, всегда позволяет ограничиться конечным числом гармоник n_0 .

С другой стороны, при наличии вязкого сопротивления у гармоник оказываются различными фазовые сдвиги, что при суммировании приводит к возникновению фазовых искажений.

Таким образом, при выборе n_0 возможны две ситуации:

1) $p = 2\pi/T_B < \omega$. В этом случае какое-либо значение p_n может оказаться близким к ω (резонансный режим) и из-за возрастания λ_n доля этой гармоник в частном решении будет значительно больше остальных, поэтому n_0 должно быть больше n , соответствующего резонансному режиму.

2) $p = 2\pi/T_B > \omega$. В этом случае резонанс невозможен, коэффициенты динамичности монотонно убывают с увеличением n и можно ограничиться достаточно малым n_0 .

Вынужденные колебания в случае произвольной возмущающей силы

При отсутствии вязкого сопротивления ($\varepsilon = 0$) дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \quad (19.59)$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных представим решение (19.59) в виде

$$q = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t, \quad (19.60)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — искомые функции времени.

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{q} = \dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t - C_1(t) \omega \sin \omega t + C_2(t) \omega \cos \omega t.$$

Так как неизвестные функции две — $C_1(t)$ и $C_2(t)$, то в соответствии с методом вариации произвольных постоянных их можно связать дополнительным условием, потребовав, чтобы выражение для $\dot{q}$ имело тот же вид, что и при постоянных C_1 и C_2 , т. е. приняв

$$\dot{C}_1(t) \cos \omega t + \dot{C}_2(t) \sin \omega t = 0. \quad (19.61)$$

Тогда

$$\dot{q} = -C_1(t) \omega \sin \omega t + C_2(t) \omega \cos \omega t. \quad (19.62)$$

Продифференцировав $\dot{q}$ по времени:

$$\ddot{q} = -\dot{C}_1(t)\omega \sin \omega t + \dot{C}_2(t)\omega \cos \omega t - \omega^2 [C_1(t)\cos \omega t + C_2(t)\sin \omega t] \quad (19.63)$$

и подставив (19.60) и (19.63) в (19.59), получим

$$-\dot{C}_1(t)\sin \omega t + \dot{C}_2(t)\cos \omega t = \frac{1}{a\omega} Q(t). \quad (19.64)$$

Уравнения (19.61) и (19.64) представляют собой неоднородную алгебраическую систему относительно $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$, невырожденную при любых значениях ω , поскольку определитель системы $\Delta = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$. Решая систему по способу Крамера, находим

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{1}{a\omega} Q(t) \sin \omega t; \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1}{a\omega} Q(t) \cos \omega t.$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} C_1(t) &= H_1 - \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \\ C_2(t) &= H_2 + \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \end{aligned} \quad (19.65)$$

где τ — текущее время от 0 до t ; H_1 , H_2 — произвольные постоянные, равные значениям C_1 и C_2 при $t=0$ и определяемые из начальных условий (19.29).

В соответствии с выражениями (19.60) и (19.62)

$$H_1 = q_0; \quad H_2 = \dot{q}_0/\omega.$$

Подставив с учетом начальных условий (19.65) в (19.60), получим

$$\begin{aligned} q &= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \\ &+ \frac{1}{a\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t Q(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t Q(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

Множители $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, стоящие перед интегралами и независимые от переменной интегрирования τ , можно внести под знаки интегралов. Тогда

$$\begin{aligned}
q &= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \\
&+ \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) (\sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau) d\tau = \\
&= q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Если сила $Q(t)$ начинает действовать на покоящуюся систему ($q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$), то решение имеет вид

$$q = \frac{1}{a\omega} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Слагаемое $q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t$ описывает свободные колебания, возникающие в результате начального возмущения.

При наличии вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения будет следующим:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \quad (19.66)$$

Ограничимся важным для инженерной практики случаем малого вязкого сопротивления ($\varepsilon < \omega$). Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
q &= e^{-\varepsilon t} y; \\
\dot{q} &= -\varepsilon e^{-\varepsilon t} y + e^{-\varepsilon t} \dot{y}; \\
\ddot{q} &= \varepsilon^2 e^{-\varepsilon t} y - 2\varepsilon e^{-\varepsilon t} \dot{y} + e^{-\varepsilon t} \ddot{y},
\end{aligned} \quad (19.67)$$

где y — новая переменная.

После подстановки $q, \dot{q}, \ddot{q}$ в (19.66) имеем

$$e^{-\varepsilon t} \ddot{y} + (\omega^2 - \varepsilon^2) e^{-\varepsilon t} y = \frac{1}{a} Q(t).$$

Разделив на $e^{-\varepsilon t}$ и учитывая, что $\omega^2 - \varepsilon^2 = \omega_1^2$, находим

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \frac{1}{a} Q(t) e^{\varepsilon t}.$$

Решение полученного уравнения аналогично решению уравнения (19.59) с заменой ω на ω_1 и $Q(t)$ на $Q(t)e^{\varepsilon t}$:

$$y = H_1 \cos \omega_1 t + H_2 \sin \omega_1 t + \frac{1}{a\omega_1} \int_0^t Q(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau.$$

Умножая в соответствии с (19.67) на $e^{-\varepsilon t}$ и внося $e^{-\varepsilon t}$ под знак интеграла, получаем

$$q = e^{-\varepsilon t} (H_1 \cos \omega_1 t + H_2 \sin \omega_1 t) + \frac{1}{a\omega_1} \int_0^t Q(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau,$$

где H_1, H_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (19.29), $H_1 = q_0$; $H_2 = (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)/\omega_1$.

Слагаемое

$$e^{-\varepsilon t} (q_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t)$$

описывает свободные затухающие колебания, возникающие в результате начального возмущения, а

$$q = \frac{1}{a\omega_1} \int_0^t Q(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau$$

есть решение в случае, когда движение начинается при нулевых начальных условиях или при произвольных начальных условиях, но по истечении времени, равного $3\tau_0$.

19.5. Основы теории регистрирующих приборов

Рассмотрим принципы работы некоторых приборов, предназначенных для регистрации переменных во времени физических величин. Ограничимся случаем, когда измеряемая величина является периодической (и, следовательно, может быть представлена в виде суммы гармоник) либо, в частном случае, гармонической.

Практически все приборы в качестве одного из основных элементов имеют пружину того или иного типа, деформация которой, порождаемая воздействием измеряемой величины (непосредственно или через систему датчик — усилитель — преобразователь), и определяет показания прибора.

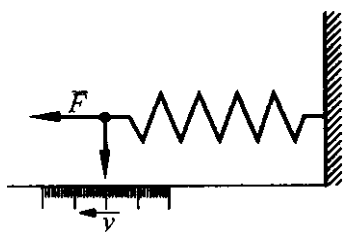


Рис. 19.20

Простейшая схема прибора представлена на рис. 19.20, где $\bar{F}$ — сила, определяемая измеряемой величиной x ; y — показания прибора, пропорциональные деформации пружины под действием силы $\bar{F}$. Показания прибора есть $y = f(x)$.

Основным требованием, предъявляемым к прибору, является соответствие его показаний измеряемой функции. В идеале должно выполняться условие $y(t) = Kx(t)$, где K — постоянная величина. Отметим, что получить такой результат практически невозможно, если не ввести ограничений на измеряемые процессы и не подобрать для них прибор. Действительно, каждый прибор дает искажения, и сделать эти искажения минимальными можно только для определенного по частотным характеристикам процесса.

Остановимся на приборах двух типов: квазистатических и сейсмических.

Квазистатическими называют такие приборы, принцип измерения переменных величин у которых тот же, что и при измерении постоянных (статических) величин. Идеальным прибором такого типа была бы пружина со стрелкой без массы, представленная на рис. 19.20. Однако в действительности и стрелка, и некоторые другие части приборов обладают массой и движутся при измерении физических величин, поэтому нельзя пренебрегать как инерцией подвижных частей, так и возникающим при движении вязким сопротивлением. То есть необходимо рассматривать прибор как некоторую колебательную систему с одной степенью свободы, подверженную силовому воздействию измеряемой величины.

Одним из самых распространенных квазистатических приборов является *шлейфовый осциллограф*, предназначенный для оптической записи колебаний тока, в который преобразуется измеряемая величина. Основой прибора является *шлейф* — петля из тонкой высокопрочной проволоки, натянутая на изоляторы в постоянном магнитном поле, к которой приклеено небольшое зеркальце (рис. 19.21). При протекании тока через петлю проволоки

отклоняются в магнитном поле в разные стороны (на рисунке видно, что направление тока в них противоположное) и зеркальце поворачивается. На зеркальце направляется сфокусированный световой луч, отражение которого фиксируется на рулонной фотобумаге (или киноплёнке), движущейся с фиксированной скоростью, что и создает запись процесса.

Собственная частота шлейфа определяется натяжением нитей (их толщиной и допустимыми нагрузками в материале), массой и размерами зеркальца, а также массой нитей. Последнее обстоятельство не позволяет получить сколь угодно большую собственную частоту, поскольку, увеличивая натяжение нитей, мы должны увеличивать их толщину, а следовательно, и массу. Можно получить собственную частоту порядка 15 кГц, но чувствительность такого шлейфа будет невысокой. Обычно собственная частота лежит в пределах 2–5 кГц. Для обеспечения необходимого значения коэффициента затухания шлейф помещают в прозрачное масло определенной вязкости.

Если обратиться к графикам коэффициента динамичности при силовом возбуждении (см. рис. 19.15) и фазового сдвига (см. рис. 19.16), то кажется, что решение проблемы точности прибора очевидно. Поскольку коэффициент динамичности при $z = 0$ имеет экстремум и, следовательно, в некоторой окрестности $z = 0$ изменяется достаточно слабо, можно потребовать, во-первых, чтобы собственная частота прибора значительно превышала максимальную частоту учитываемых гармоник в разложении в ряд периодической измеряемой величины. Тогда коэффициент динамичности по всем учитываемым гармоникам будет примерно равен единице, что исключит амплитудные искажения, на которые указывалось в § 19.4 при рассмотрении вынужденных колебаний в случае периодической возмущающей силы. Во-вторых, нужно чтобы фазовые сдвиги по любой из учитываемых гармоник были близки к нулю (что исключает фазовые искажения). Для этого необходимо, чтобы прибор имел как можно большую добротность D и соответственно как можно меньший безразмерный коэффициент затухания d .

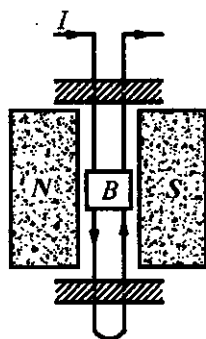


Рис. 19.21

Однако не все так очевидно. Прежде всего, нельзя использовать приборы с большой добротностью, если реальные регистрируемые процессы не являются периодическими, поскольку возникающие в этом случае свободные колебания (переходные процессы) будут затухать очень медленно и сильно искажать показания прибора. Поэтому приходится выбирать достаточно малые значения добротности, близкие к единице. Что касается первого условия, то оно в целом выполнимо при регистрации относительно низкочастотных процессов. В случае высокочастотных процессов, в силу естественной ограниченности собственной частоты прибора, необходимо увеличивать зону в окрестности $z = 0$, в которой коэффициент динамичности незначительно отличается от единицы.

На графике (см. рис. 19.15) видно, что при значениях добротности, близких к единице, зона малых амплитудных искажений значительно расширяется. Наилучший результат получается при добротности, равной 0,91 (рис. 19.22), когда отклонение коэффициента динамичности от единицы на всем диапазоне z от 0 до 1 не превышает 9%. Но максимальный фазовый сдвиг на этом диапазоне будет достигать 90° , а это недопустимо. Даже при использовании половины ширины области (до $z = 0,5$) максимальный фазовый сдвиг для высшей гармоники будет составлять $30-35^\circ$.

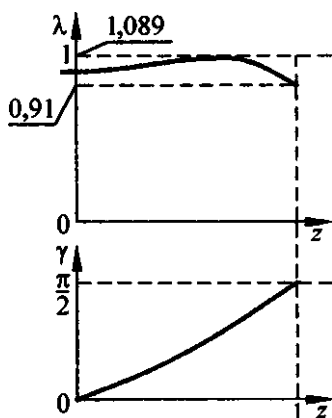


Рис. 19.22

В некоторых случаях можно допустить такие искажения, но их надо иметь в виду. Например, при регистрации гармонических колебаний записанные показания прибора будут отставать от регистрируемого процесса по фазе на величину, которую можно определить по паспорту прибора. При регистрации же периодических (полигармонических) процессов приходится идти на компромисс между искажениями по фазе и амплитуде, несколько увеличивая добротность прибора. При этом, если есть такая возможность,

надо всегда стремиться к уменьшению диапазона измеряемых частот по отношению к собственной частоте прибора, поскольку при $z_{\text{max}}=0,1$ добротность прибора практически не влияет на амплитудные искажения и очень мало влияет на фазовые.

Сейсмическими называются приборы, используемые для замера вибраций подвижных объектов (автомобилей, железнодорожных вагонов, самолетов и т. д.), поскольку они построены по такому же принципу, что и **сейсмографы** — приборы для регистрации колебаний земной коры. При этом проблема состоит в том, что необходимо измерить абсолютные колебания изучаемого объекта, т. е. его колебания относительно некоторой реально не существующей «неподвижной» системы отсчета. Следовательно, в приборе должно быть тело, покоящееся относительно такой «неподвижной» системы отсчета, чтобы измерять колебания исследуемого объекта относительно этого тела.

Таким телом отсчета может служить тело A , упруго скрепленное с исследуемым объектом B (рис. 19.23). В соответствии с графиком, приведенном на рис. 19.15 при $z \gg 1$ (в случае, когда собственная частота колебаний тела на пружине — собственная частота прибора существенно меньше частоты низшей гармоники), коэффициент динамичности $\lambda \approx 0$, т. е. тело A остается практически неподвижным. При этом запись движения объекта относительно тела с точностью до знака будет соответствовать колебаниям объекта.

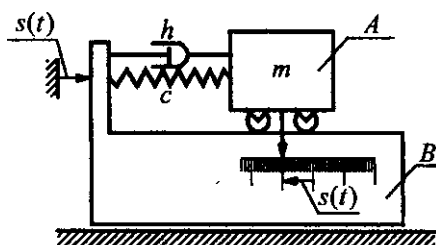


Рис. 19.23

Таким образом, в сейсмических приборах соотношение между собственной частотой и частотами регистрируемых гармоник обратно тому, которое имеет место в квазистатических приборах.

Вопрос о выборе добротности решают так же, как и для квазистатических приборов.

19.6. Основы виброзащиты

Проблемы, связанные с защитой объекта от вредного воздействия вибраций (*виброзащитой*), рассмотрим на простейших примерах систем с одной степенью свободы.

Необходимость виброзащиты возникает в двух случаях:

- 1) когда нужно уменьшить воздействие от вибраций, возникающих в процессе работы какой-либо машины на фундамент;
- 2) когда необходимо защитить какое-либо устройство (экипаж, прибор и т. д.) от вредного воздействия вибраций, возникающих при транспортировке или являющихся результатом работы находящихся рядом машин.

Исследуем вынужденные прямолинейные колебания тела массой m . В первом случае возмущающая сила приложена непосредственно к телу (см. рис. 19.24, а) — силовое возбуждение колебаний, во втором случае (рис. 19.24, б) имеет место кинематическое возбуждение колебаний из-за вибрации основания.

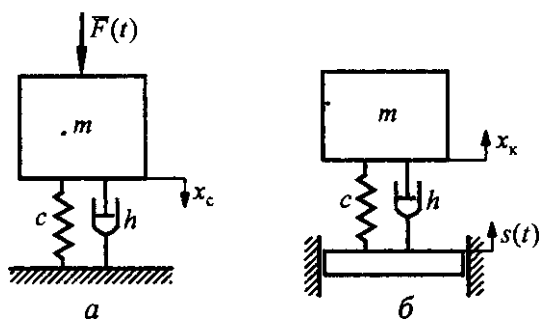


Рис. 19.24

При силовом возбуждении необходимо, чтобы воздействие на фундамент было по возможности малым. Поскольку станки, двигатели или другие аналогичные машины, создающие в процессе работы вибрации, устанавливают, как правило, на фундамент через амортизирующие подушки (прокладки), изготовленные

из специальных сортов резины, обладающих помимо упругости большим внутренним неупругим сопротивлением, эти подушки можно аппроксимировать пружиной жесткостью c и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления h (см. рис. 19.24, а). Тогда динамическое воздействие на фундамент будет равно

$$R(t) = cx_c + h\dot{x}_c, \quad (19.68)$$

где x_c — перемещение тела относительно положения статического равновесия.

При кинематическом возбуждении колебаний необходимо, чтобы как можно более малыми были абсолютные перемещения тела x_k (см. рис. 19.24, б).

При силовом возбуждении, учитывая, что сила тяжести компенсируется статической деформацией пружины, уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}_c + h\dot{x}_c + cx_c = F(t), \quad (19.69)$$

а при кинематическом возбуждении

$$m\ddot{x}_k + h[\dot{x}_k - \dot{s}(t)] + c[x_k - s(t)] = 0,$$

или

$$m\ddot{x}_k + h\dot{x}_k + cx_k = cs(t) + h\dot{s}(t). \quad (19.70)$$

Будем считать, что возмущающая сила и вибрация основания изменяются во времени по гармоническому закону, и воспользуемся изложенным выше методом комплексных амплитуд. Зададимся частным решением уравнения (19.69) в виде $x_c = Ge^{ipt}$ и, подставив x_c в (19.68) и (19.69), получим

$$R(t) = (c + hip)Ge^{ipt};$$

$$F(t) = (-mp^2 + hip + c)Ge^{ipt}.$$

Следовательно, отношение динамического воздействия на фундамент к действующей силе

$$\frac{R(t)}{F(t)} = \frac{(c + hip)}{(c - mp^2 + hip)} = \frac{\omega^2 + 2\epsilon ip}{(\omega^2 - p^2 + 2\epsilon ip)}.$$

В рассматриваемом случае важно только соотношение между амплитудами $R(t)$ и $F(t)$, а фазовый сдвиг между ними интереса не представляет. Обозначим отношение амплитуд через

$$\beta_c = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\epsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}}. \quad (19.71)$$

При кинематическом возбуждении, подставив $x_k = Ge^{ipt}$ и $s(t) = s_0 e^{ipt}$ в (19.70), получим

$$(c - mp^2 + hip)x_k(t) = (c + hip)s(t),$$

откуда

$$\frac{x_k(t)}{s(t)} = \frac{(c + hip)}{(c - mp^2 + hip)} = \frac{\omega^2 + 2\epsilon ip}{(\omega^2 - p^2 + 2\epsilon ip)}.$$

Как и в случае силового возбуждения, интерес представляет только отношение амплитуд $x_k(t)$ и $s(t)$. Обозначим через

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\epsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}}. \quad (19.72)$$

Сопоставив (19.71) и (19.72), приходим к выводу, что условия виброзащиты для случаев силового и кинематического возбуждений совпадают. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\beta = \beta_c = \beta_k = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\epsilon^2 p^2}}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} < 1. \quad (19.73)$$

Введем, как и ранее, коэффициент расстройки $z = p/\omega$ и безразмерный коэффициент затухания $d = 2\epsilon/\omega$. Тогда, разделив числитель и знаменатель (19.73) на ω^2 , получим условие виброзащиты в виде

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + d^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}} < 1.$$

Откуда имеем

$$(1 - z^2)^2 + d^2 z^2 > 1 + d^2 z^2,$$

или

$$z^2(z^2 - 2) > 0.$$

Это неравенство имеет место при $z > \sqrt{2}$ или $p > \omega\sqrt{2}$.

Зависимость $\beta(z)$ представлена на рис. 19.25.

Видно, что для виброзащиты необходимо, чтобы независимо от способа возбуждения и вязкого сопротивления частота собственных колебаний системы была бы значительно ниже (по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз) частоты возбуждения.

Как видно на графике $\beta(z)$, при $p > \omega\sqrt{2}$, т. е. в области виброзащиты, демпфирование играет отрицательную роль, поскольку чем меньше демпфирование, тем больше эффект виброзащиты. Казалось бы, что нужно уменьшать демпфирование, однако это не всегда так.

Необходимо учитывать, что при силовом возбуждении любая машина при пуске проходит режим раскрутки, а при остановке — режим торможения. Частота возбуждения при этом меняется от нуля до p и наоборот. То есть система проходит через резонанс, что вынуждает конструктора вводить в ущерб виброзащите достаточное демпфирование с целью уменьшить амплитуду резонансных колебаний. При кинематическом возбуждении возможно скачкообразное перемещение основания (наезд на препятствие, попадание колеса в яму и т. д.), что при отсутствии демпферов (амортизаторов) может привести к недопустимым перемещениям и, следовательно, перегрузкам виброзащищаемого объекта, а также к длительному процессу затухания возникающих свободных колебаний.

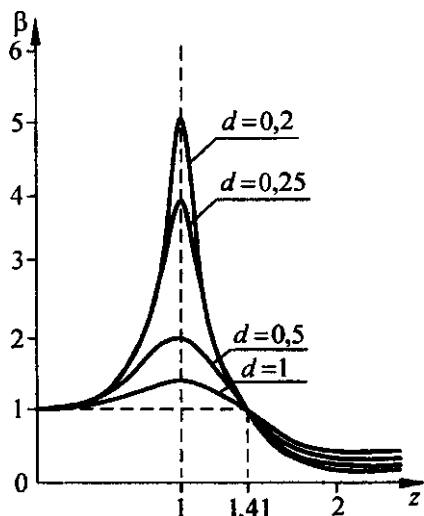


Рис. 19.25

19.7. Дифференциальные уравнения малых колебаний линейной системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и имеющую n степеней свободы, на которую

наложены голономные стационарные связи. Предполагая, что система имеет устойчивое положение равновесия, будем отсчитывать от этого положения обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Сохраним допущения относительно сил, действующих на систему, сделанные при выводе дифференциального уравнения малых колебаний системы с одной степенью свободы.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = Q_{\text{п}} + Q_{\text{ид}} + Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (19.74)$$

В соответствии с предположением о малости колебаний будем считать обобщенные координаты, их скорости и ускорения величинами первого порядка малости. В силу стационарности наложенных на систему связей радиус-векторы точек зависят только от обобщенных координат:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_n).$$

Тогда

$$\bar{v}_k = \frac{d \bar{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (19.75)$$

и, следовательно, кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Здесь масса k -й материальной точки m_k , ее скорость $\bar{v}_k$, а

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (19.76)$$

причем A_{ij} являются в общем случае, как и $\bar{r}_k$, функциями обобщенных координат.

Разложим A_{ij} в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия:

$$A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n) = (A_{ij})_0 + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_r} \right)_0 q_r + \dots$$

В силу малости колебаний будем учитывать только первые члены разложения, которые обозначим

$$(A_{ij})_0 = a_{ij}$$

и назовем *обобщенными инерционными коэффициентами*, причем, согласно (19.76), $a_{ij} = a_{ji}$.

Окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (19.77)$$

Кинетическая энергия оказалась квадратичной формой обобщенных скоростей. Известно, что кинетическая энергия механической системы может быть либо положительна, если отлична от нуля хотя бы одна обобщенная скорость, либо равна нулю при всех равных нулю обобщенных скоростях. Следовательно, квадратичная форма кинетической энергии (19.77) является положительно-определенной.

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил

$$Q_{\text{п}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (19.78)$$

Разложим потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) &= \Pi(0) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i \partial q_j \partial q_r} \right)_0 q_i q_j q_r + \dots \end{aligned} \quad (19.79)$$

Первый член в разложении (19.79) равен нулю, поскольку потенциальная энергия и обобщенные координаты отсчитываются от положения равновесия; вторые члены, включающие в себя

$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0$, также равны нулю, поскольку в положении равновесия

потенциальная энергия имеет экстремум; четвертые и последующие члены отбрасываем в силу предположения о малости колебаний. Тогда

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j.$$

Обозначим $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$ через c_{ij} и назовем их *квазиупругими*

коэффициентами, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

Окончательно имеем

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j, \quad (19.80)$$

т. е. потенциальная энергия представляет собой квадратичную форму обобщенных координат.

Выясним, в каком случае положение равновесия колебательной системы будет устойчивым. Согласно теореме Лагранжа, достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие в нем локального минимума потенциальной энергии. Выше было принято, что потенциальная энергия в положении равновесия равна нулю. Следовательно, для устойчивости положения равновесия достаточно, чтобы в некоторой окрестности положения равновесия она была строго больше нуля и обращалась в нуль только при всех нулевых значениях обобщенных координат. Другими словами, достаточно, чтобы квадратичная форма (19.80) была *положительно-определенной*.

В соответствии с критерием Сильвестра, для того чтобы квадратичная форма была *положительно-определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы были строго больше нуля.

Запишем в соответствии с (19.80) матрицу коэффициентов квадратичной формы

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (19.81)$$

Тогда, в соответствии с теоремой Лагранжа и критерием Сильвестра достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной колебательной системы имеет вид

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Поскольку всегда можно изменить нумерацию обобщенных координат и любую из них сделать первой, то очевидно, что все элементы матрицы (19.81), стоящие на главной диагонали, должны быть строго больше нуля:

$$c_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для анализа устойчивости положения равновесия при наличии диссипативных сил можно так же, как и в случае системы с одной степенью свободы, воспользоваться теоремами Кельвина.

Пример 19.7. Определить, при каких значениях жесткости пружины с положение равновесия системы, состоящей из двух связанных между собой пружиной математических маятников (рис. 19.26), будет устойчиво.

Решение. Изменение потенциальной энергии системы при отклонении от положения равновесия ($\varphi = 0, \psi = 0$) будет результатом подъема груза левого маятника на высоту $h_1 = 3l(1 - \cos\varphi)$, опускания груза правого маятника на высоту $h_2 = 2l(1 - \cos\psi)$ и деформации пружины. Полагая, что в положении равновесия пружина не деформирована, запишем изменение ее потенциальной энергии в виде $c\lambda^2/2$, где λ — деформация пружины, которую в силу предположения о малости колебаний можно определить по формуле $\lambda = l\varphi - l\psi = l(\varphi - \psi)$. Тогда потенциальная энергия системы при ее отклонении от положения равновесия

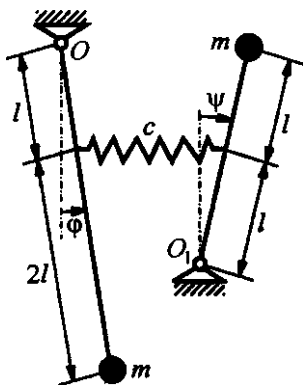


Рис. 19.26

$$П = 3mgl(1 - \cos\varphi) - 2mgl(1 - \cos\psi) + \frac{1}{2}cl^2(\varphi - \psi)^2.$$

Так как в выражении для потенциальной энергии нужно учитывать величины до второго порядка малости, представив $\cos\varphi$ и $\cos\psi$ в виде $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$ и $\cos\psi = 1 - \psi^2/2$, получим

$$П = \frac{1}{2}(c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\psi + c_{22}\psi^2),$$

где $c_{11} = cl^2 + 3mgl$; $c_{12} = c_{21} = -cl^2$; $c_{22} = cl^2 - 2mgl$.

Из условий

$$c_{22} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$$

соответственно имеем

$$c > 2mg/l; \quad (19.82)$$

$$c > 6mg/l. \quad (19.83)$$

Сопоставляя (19.82) и (19.83), получаем, что для устойчивости положения равновесия необходимо выполнение условия (19.83).

Подставив выражение для потенциальной энергии (19.80) в (19.78), получим составляющую обобщенной силы от потенциальных сил

$$Q_{\Pi} = -\sum_{j=1}^n c_{ij} q_j. \quad (19.84)$$

Составляющая обобщенной силы от диссипативных сил равна

$$Q_{\text{д}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}, \quad (19.85)$$

где Φ — диссипативная функция Рэлея.

Учитывая выражение для скорости (19.75), запишем диссипативную функцию Рэлея Φ для системы с n степенями свободы:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (19.86)$$

Здесь B_{ij} являются в общем случае функциями обобщенных координат:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N h_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

Так как диссипативная функция Рэлея уже содержит величины второго порядка малости (произведения скоростей обобщенных координат), в разложении B_{ij} в ряд Маклорена, как и в разложении коэффициентов A_{ij} , будем учитывать только первые члены разложения — значения коэффициентов B_{ij} в положении равновесия.

Обозначим $(B_{ij})_0$ через b_{ij} и назовем их *обобщенными диссипативными коэффициентами*, причем $b_{ij} = b_{ji}$. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (19.87)$$

В общем случае Φ представляет собой, согласно (19.86), *неотрицательную* квадратичную форму. Если же Φ является *положительно-определенной* квадратичной формой, диссипация называется *полной*.

Подставив выражение для диссипативной функции (19.87) в (19.85), получим составляющую обобщенной силы от диссипативных сил:

$$Q_{ид} = - \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j. \quad (19.88)$$

Составляющую обобщенной силы $Q_i(t)$ от сил $\bar{P}_k(t)$, зависящих от времени и действующих на систему извне, можно получить стандартным способом, полагая, что вариация только i -й обобщенной координаты $\delta q_i \neq 0$, вычисляя сумму элементарных работ от сил $\bar{P}_k(t)$ на перемещениях, определяемых δq_i , и относя полученное значение работы к вариации обобщенной координаты:

$$Q_i(t) = \frac{\left(\sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i}{\delta q_i}. \quad (19.89)$$

Подставив выражения (19.77), (19.84), (19.88), (19.89) для T , $Q_{\text{п}}$, $Q_{\text{ц}}$, $Q_i(t)$ в уравнения Лагранжа второго рода (19.74), получим в самом общем случае уравнения малых колебаний линейной системы с n степенями свободы*:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = Q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (19.90)$$

В частном случае системы с двумя степенями свободы квадратичные формы T , Π и Φ будут соответственно

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2); \\ \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2); \\ \Phi &= \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2), \end{aligned} \quad (19.91)$$

а дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= Q_1(t); \\ a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{12} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{12} q_1 + c_{22} q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \quad (19.92)$$

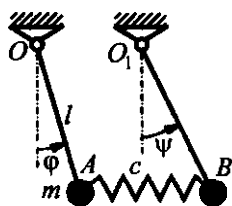


Рис. 19.27

Пример 19.8. Два одинаковых математических маятника длиной l и массой m каждый соединены между собой пружиной, жесткость которой c (рис. 19.27). При вертикальном положении маятников пружина не деформирована. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

Решение. Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат выберем углы отклонения маятников от вертикали ϕ и ψ . Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} (m l^2 \dot{\phi}^2 + m l^2 \dot{\psi}^2).$$

Следовательно, в соответствии с (19.91)

* При выводе дифференциальных уравнений малых колебаний в линейной системе с n степенями свободы мы воспользовались уравнениями Лагранжа второго рода. Иногда этот способ называют *основным* способом составления уравнений движения. Аналогичные по структуре (19.90) уравнения можно получить прямым способом: описывая движения входящих в систему инерционных объектов, используя дифференциальные уравнения поступательного, вращательного, плоского и т. д. движений.

$$a_{11} = a_{22} = ml^2; \quad a_{12} = 0.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi) + mgl(1 - \cos \psi) + \frac{1}{2} c \lambda^2,$$

где λ — деформация пружины.

С учетом малости колебаний

$$\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2, \quad \cos \psi = 1 - \psi^2/2, \quad \lambda = l\varphi - l\psi.$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl\varphi^2 + \frac{1}{2} mgl\psi^2 + \frac{1}{2} c(l\psi - l\varphi)^2 = \frac{1}{2} [(mgl + cl^2)\varphi^2 - 2cl^2\varphi\psi + (mgl + cl^2)\psi^2].$$

Следовательно, в соответствии с (19.91)

$$c_{11} = c_{22} = mgl + cl^2; \quad c_{12} = -cl^2$$

и дифференциальные уравнения малых колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} + (mgl + cl^2)\varphi - cl^2\psi &= 0; \\ ml^2 \ddot{\psi} - cl^2\varphi + (mgl + cl^2)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (19.93)$$

Пример 19.9. Двойной математический маятник (рис. 19.28) состоит из двух связанных шарнирно одинаковых математических маятников массой m и длиной l . К верхнему маятнику приложена горизонтальная сила $\bar{F}(t)$. При движении на грузы маятников действуют силы вязкого сопротивления $\bar{F}^* = -h\bar{v}$, где h — коэффициент вязкого сопротивления; $\bar{v}$ — скорость движения груза. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

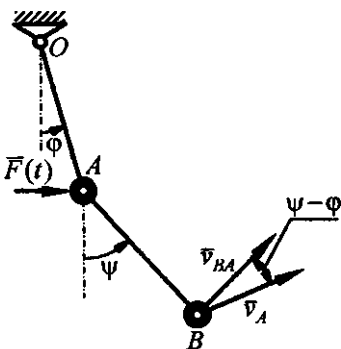


Рис. 19.28

Решение. Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат выберем углы отклонения φ и ψ маятников от вертикали. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_A^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_B^2,$$

где $v_A = l\dot{\varphi}$; $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$; $v_{BA} = l\dot{\psi}$.

Согласно теореме косинусов,

$$v_B^2 = (l\dot{\varphi})^2 + (l\dot{\psi})^2 + 2l^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi).$$

Поскольку в выражении для кинетической энергии при малых колебаниях нужно учитывать члены до второго порядка малости, $\cos(\psi - \varphi)$ заменяем единицей. Тогда

$$v_B^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2l^2 \dot{\varphi} \dot{\psi};$$

$$T = \frac{1}{2} (2ml^2 \dot{\varphi}^2 + ml^2 \dot{\psi}^2 + 2ml^2 \dot{\varphi} \dot{\psi})$$

и, следовательно, в соответствии с (19.91)

$$a_{11} = 2ml^2; \quad a_{22} = ml^2; \quad a_{12} = ml^2.$$

Диссипативная функция Рэлея

$$\Phi = \frac{1}{2} h v_A^2 + \frac{1}{2} h v_B^2 = \frac{1}{2} (2hl^2 \dot{\varphi}^2 + hl^2 \dot{\psi}^2 + 2hl^2 \dot{\varphi} \dot{\psi}).$$

Следовательно, в соответствии с (19.91)

$$b_{11} = 2hl^2; \quad b_{22} = hl^2; \quad b_{12} = hl^2.$$

Потенциальная энергия системы складывается из энергии подъема груза верхнего маятника на высоту $h_1 = l(1 - \cos \varphi)$ и энергии подъема груза нижнего маятника на высоту $h_2 = l(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \psi)$. Принимая с учетом малости колебаний $\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2$, $\cos \psi = 1 - \psi^2/2$, получаем

$$\Pi = \frac{1}{2} (2mgl\varphi^2 + mgl\psi^2),$$

откуда

$$c_{11} = 2mgl; \quad c_{22} = mgl; \quad c_{12} = 0.$$

При $\delta\varphi \neq 0$ и $\delta\psi = 0$ элементарная работа $\delta A(\vec{F}) = F(t)l \cos \varphi \delta\varphi$ и, следовательно, $Q_1(t) = F(t)l \cos \varphi$, при $\delta\psi \neq 0$ и $\delta\varphi = 0$ $\delta A(\vec{F}) = 0$, а значит, $Q_2(t) = 0$. Поскольку в дифференциальных уравнениях малых колебаний учитываются только члены первого порядка малости, то в выражении для $Q_1(t)$ $\cos \varphi = 1$. Тогда дифференциальные уравнения малых колебаний будут иметь вид

$$2ml^2 \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\psi} + 2hl^2 \dot{\varphi} + hl^2 \dot{\psi} + 2mgl\varphi = F(t)l;$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\psi} + hl^2 \dot{\varphi} + hl^2 \dot{\psi} + mgl\psi = 0.$$

Пример 19.10. Два тела с массами m_1 и m_2 , связанные между собой пружиной, жесткость которой c_2 , и скрепленные с основанием пружиной жесткостью c_1 , могут двигаться в вертикальном направлении (рис. 19.29). На тело массой m_1 действует сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону $F(t) = F_0 \sin pt$. Составить дифференциальные уравнения малых колебаний.

Решение. Воспользуемся дифференциальными уравнениями поступательного движения. Будем отсчитывать координаты x_1 и x_2 от положения статического равновесия каждого тела. В этом случае, как было показано при анализе колебательных систем с одной степенью свободы, силы тяжести и упругие силы, возникающие в пружинах в результате статической деформации, взаимно

компенсируются и могут не учитываться при составлении дифференциальных уравнений. Запишем дифференциальные уравнения поступательного движения в проекции на ось Ox :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + F_0 \sin pt;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1),$$

или

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = F_0 \sin pt;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0.$$

(19.94)

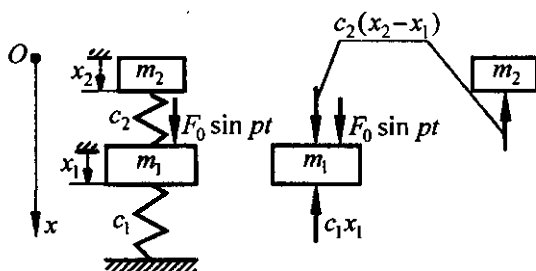


Рис. 19.29

19.8. Свободные колебания линейной консервативной системы с двумя степенями свободы

В соответствии с (19.92), учитывая, что при свободных колебаниях консервативной системы $Q_1(t) = Q_2(t) = 0$, $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, запишем дифференциальные уравнения в виде

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0;$$

$$a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{12} q_1 + c_{22} q_2 = 0.$$

(19.95)

Начальные условия для q_1 и q_2 имеют следующий вид:

$$\text{при } t=0 \quad q_1 = q_{10}; \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}; \quad q_2 = q_{20}; \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}. \quad (19.96)$$

Напомним, что в силу положительно-определенной квадратичной формы кинетической энергии обобщенные инерционные коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$a_{11} > 0; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0; \quad a_{22} > 0,$$

а аналогичные соотношения для квазиупругих коэффициентов

$$c_{11} > 0; \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0; \quad c_{22} > 0 \quad (19.97)$$

являются достаточными условиями устойчивости положения равновесия системы.

Коэффициенты a_{12} и c_{12} , связывающие в уравнениях (19.95) обобщенные координаты q_1 и q_2 , называют соответственно *коэффициентами инерционной и упругой связи*. Если в колебательной системе коэффициент $a_{12} = 0$, ее называют *системой с упругой связью*, а если $c_{12} = 0$ — *системой с инерционной связью*.

Системы с упругой связью представлены в примерах 19.8 и 19.10, а система с инерционной связью — в примере 19.9.

Парциальной системой, соответствующей обобщенной координате q_i , называют условную колебательную систему с одной степенью свободы, получаемую из исходной системы, если наложить запрет на изменение всех обобщенных координат, кроме q_i . Число парциальных систем равно числу степеней свободы. Дифференциальные уравнения движения парциальных систем получают из дифференциальных уравнений исходной системы, положив условно все коэффициенты связи равными нулю. Для системы с двумя степенями свободы, согласно (19.95), имеем

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 &= 0; \\ a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Парциальными называют собственные частоты n_1, n_2 парциальных систем:

$$n_1^2 = c_{11}/a_{11}; \quad n_2^2 = c_{22}/a_{22}.$$

Парциальные системы, соответствующие рассмотренным в примерах 19.8–19.10 колебательным системам с двумя степенями свободы (см. рис. 19.27–19.29), представлены на рис. 19.30, а–в соответственно.

В силу того, что уравнения (19.95) содержат только обобщенные координаты и их вторые производные по времени, ищем их решения в виде

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \quad (19.98)$$

где A_1, A_2, ω, α — пока не определенные величины.

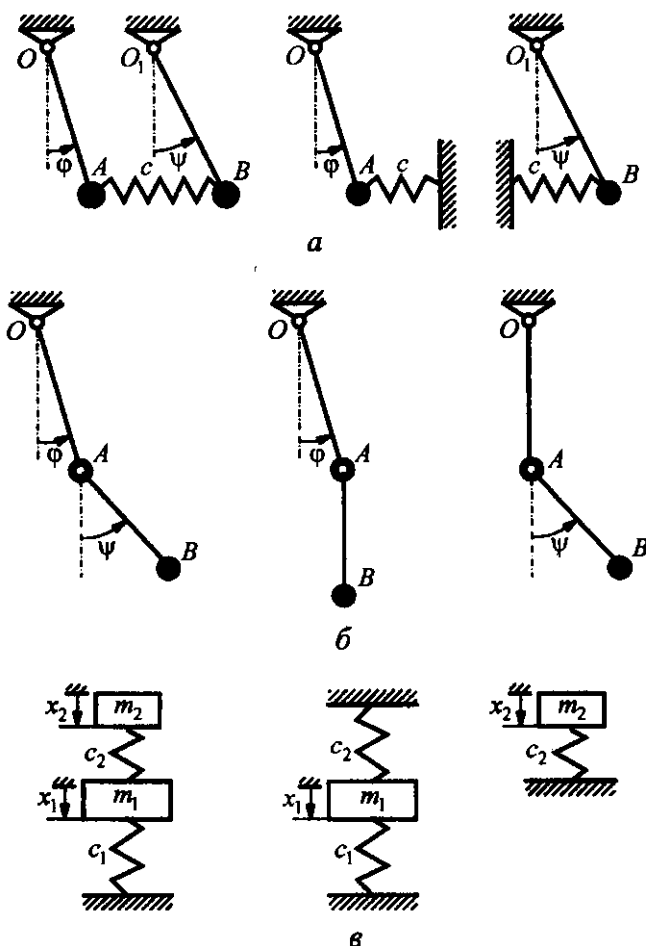


Рис. 19.30

Подставив (19.98) в (19.95) и сократив на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим однородную относительно A_1 и A_2 алгебраическую систему

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega^2 a_{11})A_1 + (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_2 &= 0; \\ (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_1 + (c_{22} - \omega^2 a_{22})A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19.99)$$

Поскольку однородная алгебраическая система всегда имеет нулевое решение ($A_1 = 0, A_2 = 0$), а любая невырожденная алгеб-

раическая система имеет единственное решение, то для того чтобы система (19.99) имела ненулевое решение, она должна быть вырожденной, т. е. ее определитель должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - \omega^2 a_{11}) & (c_{12} - \omega^2 a_{12}) \\ (c_{12} - \omega^2 a_{12}) & (c_{22} - \omega^2 a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (19.100)$$

Следовательно, решение (19.98) будет иметь смысл не при любых значениях ω , а только при тех, которые удовлетворяют условию (19.100).

Раскрывая (19.100), получим

$$(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2 = 0, \quad (19.101)$$

или

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{12})\omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \quad (19.102)$$

Уравнение, представленное в форме (19.100) – (19.102), называют **частотным**. Как следует из (19.102), частотное уравнение биквадратное. Обозначим его корни в порядке возрастания через ω_1^2 и ω_2^2 . Важно убедиться, что оба корня положительные, ибо в противном случае (если один или оба корня окажутся отрицательными) частоты ω_1 и ω_2 (или одна из них) будут мнимыми. Такой аргумент в решении (19.98) приведет к трансформации тригонометрического синуса в гиперболический и, следовательно, к неограниченному возрастанию во времени q_1 и q_2 , что противоречит предположению об устойчивости положения равновесия.

Введем функцию $\Delta(\omega^2)$, равную левой части частотного уравнения (19.101) или (19.102), т. е.

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2,$$

или

$$\Delta(\omega^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{12})\omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2,$$

и построим ее график.

Если положение равновесия устойчивое, то в силу (19.97) $\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$. Если $\omega^2 = n_1^2 = c_{11}/a_{11}$, то

$$\Delta(n_1^2) = -\left(c_{12} - \frac{c_{11}}{a_{11}}a_{12}\right)^2 < 0,$$

если $\omega^2 = n_2^2 = c_{22}/a_{22}$, то

$$\Delta(n_2^2) = -\left(c_{12} - \frac{c_{22}}{a_{22}}a_{12}\right)^2 < 0.$$

Наконец, в силу того, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, при $\omega^2 \rightarrow \infty$ $\Delta(\omega^2) \rightarrow \infty$.

График функции $\Delta(\omega^2)$ в предположении, что $n_1 < n_2$, представлен на рис. 19.31.

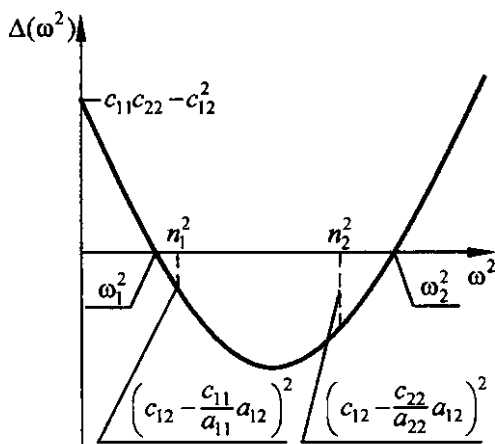


Рис. 19.31

Найденные из (19.100) – (19.102) значения ω называют **собственными частотами колебаний системы**. Собственные частоты системы нумеруют в порядке возрастания, они не зависят от начальных условий и полностью определяются параметрами колебательной системы (квазиупругими и обобщенными инерционными коэффициентами).

Из рассмотренного следует:

1) если положение равновесия устойчивое, то оба корня частотного уравнения положительные;

2) первая собственная частота системы всегда меньше меньшей парциальной частоты, а вторая — больше большей.

Отметим, что для колебательных систем с упругой связью ($a_{12} = 0$)

$$\Delta(n_1^2) = \Delta(n_2^2).$$

В этом случае график функции $\Delta(\omega^2)$, представляющий собой параболу, оказывается симметричным относительно вертикали, проходящей через точку $\omega^2 = 0,5(n_1^2 + n_2^2)$, и справедливо равенство

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2. \quad (19.103)$$

Запишем два частных независимых решения, соответствующих частотам ω_1 и ω_2 , в виде

$$\begin{aligned} q_{11} &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ q_{21} &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ q_{12} &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ q_{22} &= A_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (19.104)$$

где второй индекс соответствует номеру частоты, или номеру тона колебаний.

Отметим, что константы A_{11} , A_{21} и A_{12} , A_{22} не являются независимыми. Действительно, подставив решения в уравнения движения, мы получим вырожденную систему (19.99), у которой одно уравнение будет иметь коэффициенты, пропорциональные коэффициентам другого уравнения. Так, для частоты ω_1 имеем

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega_1^2 a_{11})A_{11} + (c_{12} - \omega_1^2 a_{12})A_{21} &= 0; \\ (c_{12} - \omega_1^2 a_{12})A_{11} + (c_{22} - \omega_1^2 a_{22})A_{21} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A_{21} = \eta_{21} A_{11}, \quad (19.105)$$

$$\text{где } \eta_{21} = -\frac{c_{11} - \omega_1^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_1^2 a_{12}} = -\frac{c_{12} - \omega_1^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_1^2 a_{22}}.$$

Аналогично получаем для ω_2 :

$$A_{22} = \eta_{22} A_{12}, \quad (19.106)$$

$$\text{где } \eta_{22} = -\frac{c_{11} - \omega_2^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_2^2 a_{12}} = -\frac{c_{12} - \omega_2^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_2^2 a_{22}}.$$

С учетом (19.105) и (19.106) частные решения (19.104) будут иметь вид

$$\begin{aligned} q_{11} &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ q_{21} &= \eta_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ q_{12} &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ q_{22} &= \eta_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Эти решения называют *главными колебаниями*. Они представляют собой гармонические колебания с частотами ω_1 и ω_2 соответственно. Коэффициенты η_{21}, η_{22} называют *коэффициентами распределения амплитуд*. Они характеризуют соотношение между амплитудами в главных колебаниях, или *формы главных колебаний*. Коэффициенты распределения амплитуд, а следовательно, и формы главных колебаний, как и собственные частоты, определяются параметрами самой колебательной системы, т. е. обобщенными инерционными и квазиупругими коэффициентами, и не зависят от начальных условий. Поэтому формы колебаний называют так же, как и частоты, *собственными формами колебаний* при колебаниях по соответствующему тону.

В выбранной нами структуре частных решений содержатся пока не определенные произвольные постоянные A_{11} и A_{12} , поэтому для получения общего решения достаточно частные решения сложить:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{11} + q_{12} = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= q_{21} + q_{22} = \eta_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \eta_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (19.107)$$

Общее решение содержит четыре неопределенные величины A_{11}, A_{12}, α_1 и α_2 . Воспользуемся начальными условиями (19.96). Подставляя (19.107) в (19.96), получаем систему

$$\begin{aligned} q_{10} &= A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2; \\ q_{20} &= \eta_{21} A_{11} \sin \alpha_1 + \eta_{22} A_{12} \sin \alpha_2; \\ \dot{q}_{10} &= \omega_1 A_{11} \cos \alpha_1 + \omega_2 A_{12} \cos \alpha_2; \\ \dot{q}_{20} &= \eta_{21} \omega_1 A_{11} \cos \alpha_1 + \eta_{22} \omega_2 A_{12} \cos \alpha_2, \end{aligned}$$

из которой определяем A_{11} , A_{12} , α_1 и α_2 .

Отметим, что при произвольных начальных условиях обе константы A_{11} и A_{12} получаются отличными от нуля. Это означает, что изменение во времени каждой обобщенной координаты будет представлять собой сумму гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , а такая сумма представляет собой не только не гармонический, но и в общем случае не периодический процесс.

Для того чтобы процесс был одночастотным и гармоническим, необходимо специальным образом подобрать начальные условия. Начальные отклонения и скорости должны быть связаны между собой через один из коэффициентов распределения амплитуд. Например, если выполнить условия $q_{20} = \eta_{21} q_{10}$, $\dot{q}_{20} = \eta_{21} \dot{q}_{10}$, то в соответствии с (19.107) константа $A_{12} = 0$, и в системе возникнут одночастотные гармонические колебания с частотой ω_1 . Для этого достаточно, чтобы только начальные отклонения были связаны одним из коэффициентов распределения амплитуд, а начальные скорости равнялись нулю, или наоборот.

Возможен и другой подход — найти новые обобщенные координаты θ_1 и θ_2 , называемые *нормальными*, или *главными*, для которых при любых начальных условиях движение будет одночастотным и гармоническим. Анализируя решение (19.107), убеждаемся, что исходные и нормальные координаты должны быть связаны соотношениями

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta_1 + \theta_2; \\ q_2 &= \eta_{21} \theta_1 + \eta_{22} \theta_2. \end{aligned} \quad (19.108)$$

Можно показать, что переход от исходных координат к нормальным приводит квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий к каноническим. Подставим q_1 и q_2 , выраженные согласно (19.108) через θ_1 и θ_2 , в квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий системы с двумя степенями свободы (19.91):

$$T = \frac{1}{2} \{ (a_{11} + 2a_{12}\eta_{21} + a_{22}\eta_{21}^2) \dot{\theta}_1^2 + 2[a_{11} + a_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + a_{22}\eta_{21}\eta_{22}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (a_{11} + 2a_{12}\eta_{22} + a_{22}\eta_{22}^2) \dot{\theta}_2^2 \};$$

$$P = \frac{1}{2} \{ (c_{11} + 2c_{12}\eta_{21} + c_{22}\eta_{21}^2) \theta_1^2 + 2[c_{11} + c_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + c_{22}\eta_{21}\eta_{22}] \theta_1 \theta_2 + (c_{11} + 2c_{12}\eta_{22} + c_{22}\eta_{22}^2) \theta_2^2 \},$$

и покажем, что коэффициенты $a'_{12} = a_{11} + a_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + a_{22}\eta_{21}\eta_{22}$ и $c'_{12} = c_{11} + c_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + c_{22}\eta_{21}\eta_{22}$, входящие в выражения для кинетической и потенциальной энергий, равны нулю.

Из выражения (19.105) для коэффициента распределения амплитуд η_{21} имеем

$$\omega_1^2 (a_{12}\eta_{21} + a_{11}) = c_{11} + c_{12}\eta_{21}; \quad (19.109)$$

$$\omega_1^2 (a_{22}\eta_{21} + a_{12}) = c_{12} + c_{22}\eta_{21}.$$

Умножив второе равенство (19.109) на η_{22} и сложив с первым, находим

$$\begin{aligned} \omega_1^2 [a_{11} + a_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + a_{22}\eta_{21}\eta_{22}] &= \\ &= c_{11} + c_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + c_{22}\eta_{21}\eta_{22}. \end{aligned} \quad (19.110)$$

Точно таким же путем из выражения для коэффициента η_{22} получаем, что

$$\begin{aligned} \omega_2^2 [a_{11} + a_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + a_{22}\eta_{21}\eta_{22}] &= \\ &= c_{11} + c_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + c_{22}\eta_{21}\eta_{22}. \end{aligned} \quad (19.111)$$

Вычтем (19.110) из (19.111):

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) [a_{11} + a_{12}(\eta_{21} + \eta_{22}) + a_{22}\eta_{21}\eta_{22}] = (\omega_2^2 - \omega_1^2) a'_{12} = 0.$$

Так как $\omega_2^2 \neq \omega_1^2$, то $a'_{12} = 0$. Тогда из выражения (19.110) или (19.111) следует, что $c'_{12} = 0$, а значит, квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий будут каноническими:

$$T = \frac{1}{2} (a_1 \dot{\theta}_1^2 + a_2 \dot{\theta}_2^2); \quad P = \frac{1}{2} (c_1 \theta_1^2 + c_2 \theta_2^2), \quad (19.112)$$

где $a_1 = a_{11} + 2a_{12}\eta_{21} + a_{22}\eta_{21}^2$; $a_2 = a_{11} + 2a_{12}\eta_{22} + a_{22}\eta_{22}^2$; $c_1 = c_{11} + 2c_{12}\eta_{21} + c_{22}\eta_{21}^2$; $c_2 = c_{11} + 2c_{12}\eta_{22} + c_{22}\eta_{22}^2$.

Подставив выражения (19.112) для T и Π в уравнения Лагранжа второго рода, получим уравнения малых колебаний системы в нормальных координатах

$$a_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \theta_1 = 0; \quad a_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \theta_2 = 0,$$

причем $c_1/a_1 = \omega_1^2$; $c_2/a_2 = \omega_2^2$.

Выразив с помощью (19.108) θ_1 и θ_2 через q_1 и q_2 :

$$\theta_1 = \frac{q_2 - \eta_{22} q_1}{\eta_{21} - \eta_{22}}; \quad \theta_2 = \frac{\eta_{21} q_1 - q_2}{\eta_{21} - \eta_{22}},$$

можно из начальных условий для q_1 и q_2 получить начальные условия для нормальных координат.

Нормальные координаты находят широкое применение при решении задач о вынужденных колебаниях при произвольном возмущении, при наличии или отсутствии вязкого сопротивления, а также при решении задач о свободном движении в неконсервативных системах.

Пример 19.11. Два одинаковых математических маятника длиной l и массой m соединены между собой пружиной, имеющей жесткость c (см. рис. 19.27). При вертикальном положении маятников пружина не деформирована. В начальный момент времени левый маятник отклонен на угол β и маятники отпущены без начальной скорости. Исследовать движение системы.

Решение. Дифференциальные уравнения малых колебаний системы были получены в примере 19.8 (см. (19.93)).

Дифференциальные уравнения парциальных систем имеют вид

$$ml^2 \ddot{\phi} + (mgl + cl^2)\phi = 0;$$

$$ml^2 \ddot{\psi} + (mgl + cl^2)\psi = 0.$$

В силу симметрии задач (маятники одинаковые) парциальные частоты совпадают:

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{mgl + cl^2}{ml^2} = \frac{g}{l} + \frac{c}{m}.$$

Зададим решение в виде (19.98)

$$\phi = A_1 \sin(\omega t + \alpha); \quad \psi = A_2 \sin(\omega t + \alpha)$$

и, подставив его в уравнения движения, получим алгебраическую систему относительно A_1 и A_2 :

$$(mgl + cl^2 - ml^2 \omega^2) A_1 - cl^2 A_2 = 0;$$

$$-cl^2 A_1 + (mgl + cl^2 - ml^2 \omega^2) A_2 = 0.$$

Частотное уравнение имеет вид

$$(mgl + cl^2 - ml^2\omega^2)^2 - (cl^2)^2 = 0,$$

или

$$(mgl - ml^2\omega^2)(mgl + 2cl^2 - ml^2\omega^2) = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{mgl + 2cl^2}{ml^2} = \frac{g}{l} + 2\frac{c}{m}.$$

Отметим справедливость утверждения (19.103):

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2 = c/m.$$

Два частных решения (главные колебания) имеют вид

$$\varphi_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad \varphi_2 = A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\psi_1 = A_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad \psi_2 = A_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Учитывая, что

$$\eta_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{mgl + cl^2 - ml^2\omega_1^2}{cl^2} = \frac{mgl + cl^2 - mgl}{cl^2} = 1;$$

$$\eta_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{mgl + cl^2 - ml^2\omega_2^2}{cl^2} = \frac{mgl + cl^2 - mgl - 2cl^2}{cl^2} = -1,$$

получаем

$$\varphi_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad \varphi_2 = A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\psi_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad \psi_2 = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

В первом главном колебании маятники движутся в фазе (рис. 19.32, а), пружина остается недеформированной, и поэтому первая собственная частота ω_1 совпадает с частотой математического маятника.

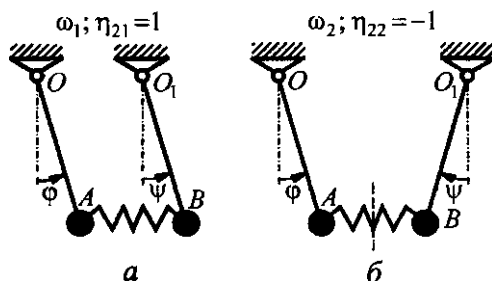


Рис. 19.32

Во втором главном колебании маятники движутся в противофазе (рис. 19.32, б), при этом на пружине имеется неподвижная точка, называемая узлом формы колебаний.

Подставив общее решение

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

в начальные условия

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \beta; \quad \dot{\varphi} = 0; \quad \psi = 0; \quad \dot{\psi} = 0,$$

получим

$$A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 = \beta;$$

$$A_{11} \sin \alpha_1 - A_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$

$$A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0;$$

$$A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 - A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Из последних двух уравнений следует

$$A_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 = 0; \quad A_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Так как A_{11} и A_{12} не могут равняться нулю, то $\cos \alpha_1 = 0$ и $\cos \alpha_2 = 0$. Отсюда

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots$$

Поскольку A_{11} и A_{12} пока не определены, можно выбрать любые α_1 и α_2 . Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$. Тогда первые два уравнения из начальных условий будут иметь вид

$$A_{11} + A_{12} = \beta; \quad A_{11} - A_{12} = 0,$$

откуда

$$A_{11} = A_{12} = \beta/2;$$

$$\varphi = \frac{\beta}{2} \left[\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{\beta}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t);$$

$$\psi = \frac{\beta}{2} \left[\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) - \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{\beta}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),$$

или с учетом известных тригонометрических соотношений для суммы и разности косинусов

$$\varphi = \beta \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t;$$

$$\psi = \beta \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t.$$

Наибольший интерес при анализе полученного результата представляет случай достаточно слабой пружины $c/m \ll g/l$, когда $\omega_2 \approx \omega_1$. Решение для φ и ψ тогда представляет собой произведение двух косинусов (синусов), период одной из которых значительно больше периода другой:

$$\frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1} \gg \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Графически решение приведено на рис. 19.33. Его можно получить тем же способом, который был использован при анализе затухающих колебаний. Видно, что колебания в данном случае представляют собой биения.

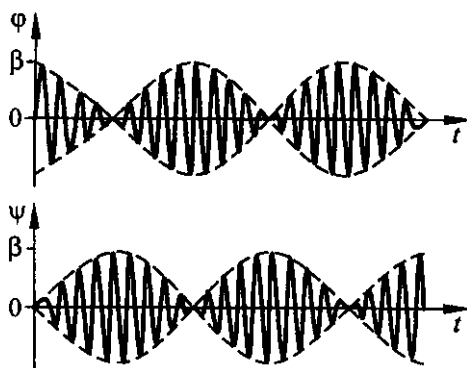


Рис. 19.33

Максимальные отклонения одного маятника соответствуют остановке другого и наоборот. Поскольку система консервативна, то начальный запас полной механической энергии, возникший при отклонении левого маятника, сохраняется при дальнейшем движении системы. Маятники в процессе движения как бы передают энергию друг другу.

19.9. Вынужденные колебания линейной системы с двумя степенями свободы при гармоническом возбуждении. Динамический гаситель колебаний

Ограничимся случаем, когда силы вязкого сопротивления отсутствуют или пренебрежимо малы, а возмущающая сила действует только по одной обобщенной координате. Тогда в соответствии с (19.92) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1 \sin(pt + \beta); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (19.113)$$

где Q_1 — амплитуда обобщенной силы; p и β — частота и начальная фаза вынуждающей силы.

Ограничимся исследованием частного решения системы (19.113), характеризующего вынужденные колебания, и зададим решение в виде

$$q_1 = G_1 \sin(pt + \beta); \quad q_2 = G_2 \sin(pt + \beta). \quad (19.114)$$

Подставив (19.114) в (19.113), получим неоднородную алгебраическую систему относительно G_1 и G_2 . Воспользуемся правилом Крамера, согласно которому

$$G_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad G_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta_1 = (c_{22} - p^2 a_{22})Q_1; \quad \Delta_2 = -(c_{12} - p^2 a_{12})Q_1; \quad (19.115)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (c_{11} - p^2 a_{11}) & (c_{12} - p^2 a_{12}) \\ (c_{12} - p^2 a_{12}) & (c_{22} - p^2 a_{22}) \end{vmatrix} = \\ = (c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2.$$

Отметим, что структура определителя Δ полностью совпадает со структурой функции $\Delta(\omega^2)$, рассмотренной в предыдущем параграфе и имеющей корни ω_1^2 и ω_2^2 . Поэтому Δ можно представить в виде

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2).$$

Тогда

$$G_1 = \frac{(c_{22} - p^2 a_{22})Q_1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}; \\ G_2 = \frac{-(c_{12} - p^2 a_{12})Q_1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \quad (19.116)$$

Полученные решения для G_1 и G_2 имеют смысл для всех p , кроме значений, совпадающих с ω_1 и ω_2 . При $p = \omega_1$ и $p = \omega_2$ в системе при отсутствии сил вязкого сопротивления наблюдаются резонансы. Как было показано выше для системы с одной степенью свободы, решение в этом случае надо искать в особой форме.

Отметим, что отношение G_2/G_1 при резонансах имеет конечную величину:

$$\frac{G_2}{G_1} = -\frac{c_{12} - p^2 a_{12}}{c_{22} - p^2 a_{22}}.$$

Учитывая (19.105), получаем, что при $p = \omega_1$

$$\frac{G_2}{G_1} = -\frac{c_{12} - \omega_1^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_1^2 a_{22}} = \eta_{21}.$$

Следовательно, при резонансе на частоте ω_1 форма вынужденных колебаний (отношение G_2/G_1) совпадает с собственной формой колебаний по первому тону. Аналогичный результат получается и при резонансе на частоте ω_2 .

Пусть $a_{12} = 0$ (система с упругой связью) и $c_{12} < 0$. Отметим, что знак коэффициента c_{12} определяется субъективным фактором — выбором положительных направлений отсчета обобщенных координат.

Так, для рассмотренного в примере 19.8 случая свободных колебаний связанных пружиной маятников направления отсчета обобщенных координат φ и ψ совпадают и коэффициент $c_{12} = -cl^2$. При противоположных направлениях отсчета обобщенных координат φ и ψ деформация пружины $\lambda = l\varphi + l\psi$ и коэффициент $c_{12} = cl^2$.

Выражения (19.116) для G_1 и G_2 при $a_{12} = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(n_2^2 - p^2)Q_1}{a_{11}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}; \\ G_2 &= \frac{-c_{12}Q_1}{a_{11}a_{22}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \quad (19.117)$$

Зависимости G_1 и G_2 от p^2 представлены на рис. 19.34. Интерес представляет случай при $p^2 = n_2^2$, когда $G_1 = 0$. При этом можно определить G_2 , используя для нахождения Δ выражение (19.115). При $p^2 = n_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$ и $a_{12} = 0$ $\Delta = -c_{12}^2$ и тогда

$$G_2 = Q_1/c_{12}.$$

Этот эффект — нулевое значение G_1 при конечном G_2 — носит название *антирезонанса*, или эффекта *динамического гашения колебаний*, и широко используется в технике.

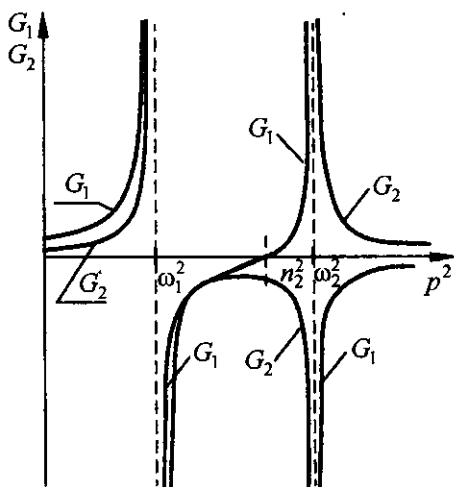


Рис. 19.34

Обратимся к уже рассмотренному примеру 19.10 (см. рис. 19.29). Здесь тело массой m_1 , на которое непосредственно действует вынуждающая сила $F_0 \sin pt$, является объектом, колебания которого необходимо погасить, а упруго скрепленное с ним тело массой m_2 — динамическим гасителем колебаний. Дифференциальные уравнения движения системы были получены выше (см. (19.94)) и имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = F_0 \sin pt;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0,$$

где $m_1 = a_{11}$; $c_1 + c_2 = c_{11}$; $c_2 = c_{22}$; $F_0 = Q_1$; $m_2 = a_{22}$.

Если подобрать параметры гасителя таким образом, чтобы $n_2^2 = c_2/m_2 = p^2$, то перемещения объекта будут равны нулю, а перемещение гасителя $x_2 = G_2 \sin pt = -\frac{F_0}{c_2} \sin pt$.

Тогда в любой момент времени упругая сила в пружине гасителя будет компенсировать возмущающую силу, действующую на объект (рис. 19.35).

Отметим следующее.

1. Настройка гасителя только по частоте недостаточна. Действительно, нельзя с помощью объекта, масса m_2 которого мала, погасить колебания тела большой массы m_1 , поскольку малая масса m_2 означает малую жесткость $c_2 = m_2 p^2$ и в результате необходимая для гашения амплитуда колебаний гасителя F_0/c_2 может оказаться очень большой и технически нереализуемой.

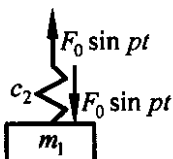


Рис. 19.35

2. Полное гашение в реальной системе, где всегда имеются диссипативные силы, невозможно.

Рассмотрим возможность использования динамического гасителя для подавления колебаний объекта при резонансе. Введем следующие обозначения: $\omega_0 = \sqrt{c_1/m_1}$ — собственная частота колебаний объекта; $n_2 = \sqrt{c_2/m_2}$ — парциальная частота гасителя; $\beta = m_2/m_1$ — отношение масс гасителя и объекта; $G_{ст} = F_0/c_1$ — статическое смещение объекта под действием постоянной силы F_0 ; $\delta = n_2/\omega_0$, $\gamma = p/\omega_0$ — безразмерные частоты гасителя и возмущающей силы; $u_1 = |G_1/G_{cm}|$ и $u_2 = |G_2/G_{cm}|$ — безразмерные амплитуды колебаний объекта и гасителя.

Тогда из (19.117) с учетом выражений (19.115) получаем

$$u_1 = \left| \frac{\delta^2 - \gamma^2}{(1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4} \right|;$$

$$u_2 = \left| \frac{\delta^2}{(1 + \beta\delta^2 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^4} \right|.$$

Амплитудно-частотная характеристика u_1 при $\beta = 0,1$; $\delta = 1$ приведена на рис. 19.36. Поскольку объект с гасителем представляют собой систему с двумя степенями свободы, наряду с гашением колебаний на частоте ω_0 на частотах $\omega_1 = 0,854\omega_0$ и $\omega_2 = 1,17\omega_0$ появляются два новых резонанса, соответствующих собственным частотам двухстепенной системы. Поэтому подобные гасители можно использовать только в тех случаях, когда частота возмущения жестко фиксирована.

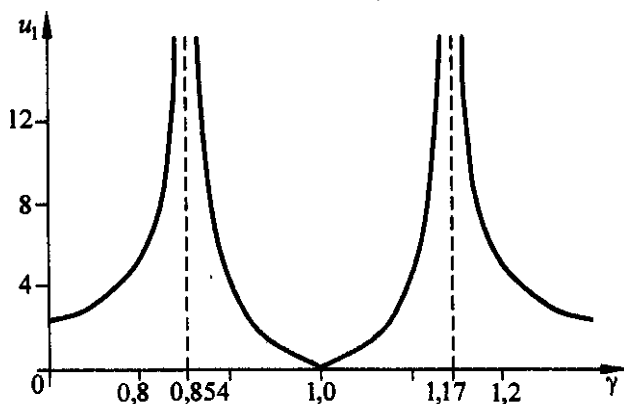


Рис. 19.36

Устранить резонансные колебания с большими амплитудами на частотах ω_1 и ω_2 оказывается возможным, если ввести в конструкцию гаситель демпфирования.

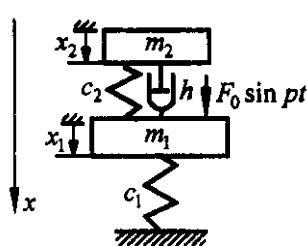


Рис. 19.37

Динамический гаситель в этом случае представляет собой дополнительное тело массой m_2 , соединенное с объектом пружиной жесткостью c_2 и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления h (рис. 19.37).

При наличии демпфера полное гашение колебаний становится невозможным, поскольку гаситель оказывает через него дополнительное воздействие на объект. Однако демпфер позволяет при рациональном подборе параметров гасителя получить ограниченную амплитуду колебаний на всем диапазоне частот.

Дифференциальные уравнения системы с демпфером имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - h \dot{x}_2 - c_2 x_2 = F_0 \sin pt;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 x_1 + h \dot{x}_2 + c_2 x_2 = 0.$$

Добавим к введенным выше безразмерным параметрам β , δ , γ

безразмерный коэффициент вязкого сопротивления $\eta = \frac{h}{2m_2\omega_0}$.

Тогда, после достаточно громоздких преобразований получаем выражение для безразмерной амплитуды колебаний объекта

$$u_1 = \sqrt{\frac{(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\eta^2 \gamma^2}{[(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta \delta^2 \gamma^2]^2 + 4\eta^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \beta \gamma^2)^2}}.$$

На рис. 19.38 представлены амплитудно-частотные характеристики $u_1(\gamma)$ при $\beta = 0,1$; $\delta = 1$ и различных значениях η .

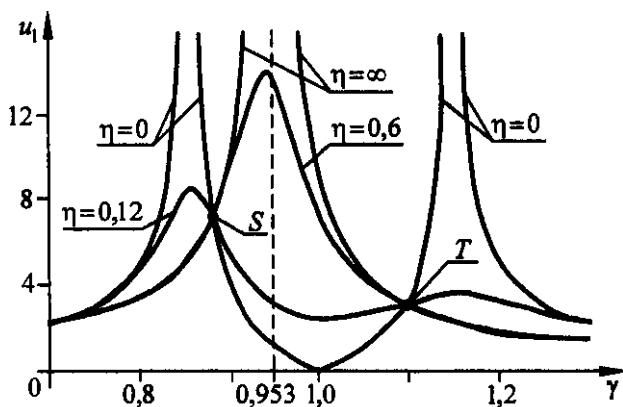


Рис. 19.38

При $\eta = 0$ характеристика имеет два резонанса и тождественна представленной на рис. 19.36. При $\eta \rightarrow \infty$ относительное движение гасителя становится невозможным, система как бы трансформируется в одноступенную с резонансом на частоте

$$\omega^* = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + m_2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \beta}} = 0,953\omega_0.$$

Как видим на рис. 19.38, при этих и любых других значениях η амплитудно-частотные характеристики проходят через точки S и T .

Поскольку избавиться от этих точек нельзя, а снижение одной вызывает подъем другой, то, очевидно, что параметры гасителя станут оптимальными, если точки S и T будут находиться на одной высоте, а коэффициент демпфирования будет выбран

таким образом, чтобы в одной из точек амплитудно-частотная характеристика имела максимум (при этом, как показывают расчеты, и второй максимум будет незначительно превышать ординаты точек S и T). Чтобы выполнить первое условие, необходимо подобрать параметры m_2 и c_2 гасителя так, чтобы выполнялось условие $\delta = \frac{1}{1+\beta}$. При этом ординаты точек S и T будут равны

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\beta} + 1}.$$

Определение оптимального η более сложно и требует использования ЭВМ или специальных номограмм. Для рассматриваемого примера оптимальное $\eta = 0,168$. На рис. 19.39 представлена амплитудно-частотная характеристика объекта при оптимально подобранном гасителе для случая $\beta = 0,1$. Значения параметров при этом $\delta = 0,9091$, $u_1 = 4,59$.

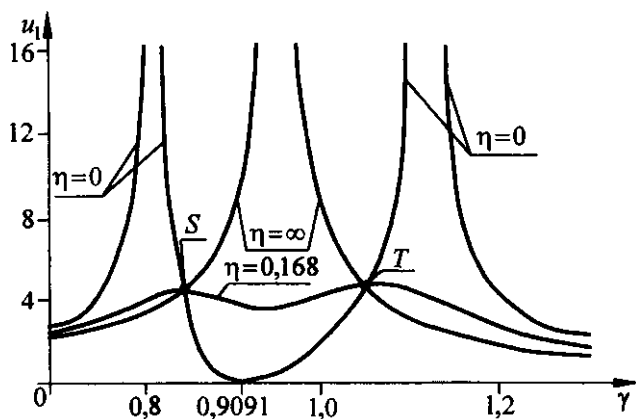


Рис. 19.39

Для расширения зоны гашения и уменьшения амплитудных значений u_1 необходимо в разумных пределах увеличивать массу гасителя по отношению к массе объекта.

19.10. Колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы

Матричная форма дифференциальных уравнений движения

Дифференциальные уравнения движения линейной системы с конечным числом степеней свободы были выведены в § 19.7 и имеют вид (19.90), или в развернутой форме

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1n}\ddot{q}_n + b_{11}\dot{q}_1 + \dots + b_{1n}\dot{q}_n + c_{11}q_1 + \dots + c_{1n}q_n = Q_1(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2n}\ddot{q}_n + b_{21}\dot{q}_1 + \dots + b_{2n}\dot{q}_n + c_{21}q_1 + \dots + c_{2n}q_n = Q_2(t) \\ \dots \\ a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{nn}\ddot{q}_n + b_{n1}\dot{q}_1 + \dots + b_{nn}\dot{q}_n + c_{n1}q_1 + \dots + c_{nn}q_n = Q_n(t) \end{cases}$$

Введем обозначения для вещественных симметрических квадратных размера $n \times n$ матриц инерционных, диссипативных и квазиупругих коэффициентов:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]; \quad \mathbf{C} = [c_{ij}],$$

а также для матриц-столбцов (векторов) обобщенных координат системы и соответствующих им обобщенных возмущающих сил:

$$\mathbf{q} = [q_i] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}(t) = [Q_i(t)] = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения движения можно представить в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \quad (19.118)$$

В силу положительной определенности кинетической энергии T системы матрица $\mathbf{A}$ инерционных коэффициентов как матрица квадратичной формы от обобщенных скоростей является положительно определенной во всех случаях. Матрица $\mathbf{C}$ квазиупругих коэффициентов является положительно определенной только при движении около положения устойчивого

равновесия, где в силу теоремы Лагранжа потенциальная энергия имеет минимум. В этом случае выполняется условие критерия Сильвестра — главные диагональные миноры ее матрицы коэффициентов должны быть строго положительны.

Если матрица $\mathbf{B}$ диссипативных коэффициентов является положительно определенной, то, как указывалось выше, диссипация называется полной (проявляется во всех главных движениях).

Определение собственных характеристик системы

Частоты и формы колебаний системы определяют из матричного уравнения, описывающего свободное движение консервативной системы,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (19.119)$$

решение которого ищут в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \sin(\omega t + \alpha), \quad (19.120)$$

где $\mathbf{V} = [V_i]$ — матрица-столбец (вектор) амплитуд обобщенных координат.

Подстановка выражения (19.120) в (19.119) дает алгебраическое матричное однородное уравнение

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\mathbf{V} = 0. \quad (19.121)$$

Условие существования нетривиального решения уравнения (19.121) приводит к характеристическому уравнению задачи

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0, \text{ или } \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{E}) = 0, \quad (19.122)$$

где $\mathbf{E} = \text{diag}[1]$ — единичная матрица, элементы которой

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Упорядоченная в порядке возрастания и пронумерованная совокупность положительных корней уравнения (19.122) $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$ образует так называемый **спектр собственных значений** системы, а соответствующая ему совокупность $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ — **спектр собственных частот**. Если в спек-

тре собственных значений существует нулевой корень, то такой случай рассматривается как особый; он имеет место, когда матрица C не является положительно определенной.

Каждой собственной частоте ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$, соответствует свой вектор V_k амплитуд обобщенных координат, удовлетворяющий уравнению (19.121), т. е.

$$(C - \omega_k^2 A)V_k = 0 \quad (19.123)$$

или в развернутой форме

$$\sum_{j=1}^n (c_{ij} - \omega_k^2 a_{ij})V_{jk} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнение (19.123) содержит n неизвестных координат вектора V_k , однако, так как, согласно (19.122), матрица коэффициентов однородной системы алгебраических уравнений является вырожденной, число независимых уравнений в системе меньше n . Если характеристическое уравнение (19.122) имеет простые корни (т. е. в спектре нет кратных корней), число независимых уравнений будет равно $n - 1$, и компоненты вектора амплитуд определятся с точностью до множителя. Найденное таким образом (с точностью до множителя) распределение амплитуд в собственном колебании с частотой ω_k называется **собственной формой колебаний**. Задание множителя определяет процедуру нормирования, которая может быть выполнена различными способами. В качестве нормирующего может выступать какой-либо из компонентов вектора амплитуд V_k , например V_{1k} или V_{kk} ,

либо модуль вектора (евклидова норма) $V_k = \sqrt{\sum_j^n V_{jk}^2}$.

Примем в качестве нормирующего множителя вектора V_k его компонент V_{kk} и введем **векторы формы** $\eta_k = V_k / V_{kk}$. Число неизвестных компонентов вектора η_k равно $n - 1$ ($\eta_{kk} = 1$). Отбросив одно из уравнений в (19.123), получим невырожденную систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n-1} (c_{ij} - \omega_k^2 a_{ij}) \eta_{jk} = \omega_k^2 a_{kk} - c_{kk} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

из которой последовательно определяются все векторы η_k . Про-
нумерованная совокупность векторов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ образует
спектр собственных форм колебаний системы.

Свойства собственных частот и форм колебаний

В силу симметричности и положительной определенности матриц A и C из теорем линейной алгебры следует:

1) все корни характеристического уравнения (19.122) положи-
тельны, а в особых случаях, когда возможны и нулевые значения,
неотрицательны и, таким образом, собственные частоты — веще-
ственные;

2) собственные формы попарно ортогональны по отношению
к матрицам A и C , т. е. при $k \neq n$

$$\eta_r^T A \eta_k = \eta_r^T C \eta_k = 0. \quad (19.124)$$

Для доказательства последнего запишем уравнение (19.123)
для собственных форм, соответствующих двум разным частотам
 ω_k и ω_r ($k, r=1, 2, \dots, n$):

$$\omega_k^2 A \eta_k = C \eta_k;$$

$$\omega_r^2 A \eta_r = C \eta_r.$$

Умножим слева первое уравнение на η_r^T , а второе — на η_k^T . Так
как в силу симметричности $A^T = A$, $C^T = C$, то после транспони-
рования и вычитания второго уравнения из первого получаем

$$[\omega_r^2 \eta_k^T A \eta_r]^T = \omega_r^2 \eta_r^T A \eta_k = [\eta_k^T C \eta_r]^T = \eta_r^T C \eta_k.$$

Отсюда

$$(\omega_k^2 - \omega_r^2) \eta_r^T A \eta_k = 0$$

и, следовательно,

$$\eta_r^T A \eta_k = \eta_r^T C \eta_k = 0.$$

Свободные колебания консервативных систем

Собственным частотам ω_k ($k=1, 2, \dots, n$) отвечают частные
решения уравнения (19.119)

$$q^{(k)} = \eta_k v_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) = \eta_k (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t),$$

где P_k, R_k — произвольные постоянные.

Свободные колебания системы представляют собой суперпозицию главных колебаний, т. е.

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_k^n q_j^{(k)} = \sum_k^n \eta_{jk} V_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) = \\ &= \sum_k^n \eta_{jk} (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t) \end{aligned} \quad (19.125)$$

или в векторной форме

$$q = \sum_k^n \eta_k (P_k \cos \omega_k t + R_k \sin \omega_k t).$$

Произвольные постоянные определяют по начальным условиям $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$ с учетом ортогональности собственных форм (19.124). Подстановка в (19.125) $t=0$ и умножение обеих частей полученного равенства слева на $\eta_r^T A$ дает

$$\eta_r^T A q_0 = \sum_r (\eta_r^T A \eta_k) P_k = \eta_r^T A \eta_k P_k \quad (r=k),$$

откуда следует

$$P_k = (\eta_k^T A q_0) / (\eta_k^T A \eta_k).$$

Аналогично

$$R_k = (\eta_k^T A \dot{q}_0) / \omega_k (\eta_k^T A \eta_k). \quad (19.126)$$

Если распределение начальных отклонений и скоростей с точностью до множителя совпадает с какой-либо собственной формой, т. е. $q_0 = a \eta_i, \dot{q}_0 = b \eta_i$, то отличными от нуля, согласно формулам (19.126), будут только две константы: $P_i = a$ и $R_i = b$. Это означает, что при таком специальном задании начальных условий возбуждаются главные колебания системы, причем, если $b=0$, реализуются так называемые переходные, а при $a=0$ — импульсные характеристики.

Нормальные (главные) координаты

Из (19.125) следует, что свободные колебания системы представляют собой суперпозицию гармонических колебаний.

Специальным подбором начальных условий движения можно создать условия, когда система будет совершать гармонические колебания с какой-то одной из возможных собственных частот, т. е. будут возбуждаться главные колебания системы.

Как было показано в § 19.8, этого же возможно добиться, если найти такие новые координаты, каждая из которых будет изменяться по гармоническому закону с какой-либо собственной частотой при любых начальных условиях. Путь решения этой задачи подсказывает сама структура общего решения (19.125).

Введем новые переменные

$$\theta_k = V_{kk} \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Тогда, согласно (19.125), будем иметь

$$q_j = \sum_k^n \eta_{jk} \theta_k \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

или в матричной форме

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}, \quad (19.127)$$

где $\mathbf{H} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ — матрица, столбцами которой являются нормированные собственные векторы; $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ — вектор новых координат. Линейное преобразование координат (19.127) приводит квадратичную форму потенциальной энергии к каноническому виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}^* \boldsymbol{\theta},$$

где

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} = (\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_k) = \text{diag}(c_k); \quad c_k = \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_k = \sum_i^n \sum_j^n \eta_{ki} c_{ij} \eta_{jk}.$$

Аналогично для кинетической энергии

$$\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} = \mathbf{A}^* = \text{diag}(a_k); \quad a_k = \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_k.$$

В новых координатах, называемых *нормальными*, или *главными*, дифференциальные уравнения свободного движения консервативной системы становятся несвязанными относительно координат, т. е. принимают вид

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где $\omega_k^2 = c_k/a_k$ — квадраты собственных частот, определенные теперь по элементам диагональных матриц коэффициентов, соответствующих новым координатам.

Формула (19.127) определяет *прямое* преобразование координат, при котором обобщенные координаты выражаются через нормальные. *Обратное* преобразование имеет вид

$$\theta = Gq,$$

где G — обратная к H матрица, которая показывает, что каждой нормальной координате соответствует линейная комбинация обобщенных координат $\theta_k = g_k^T q$ (g_k^T — вектор-строка матрицы G). Эта линейная комбинация сводится к одному числу только в случае, когда распределение координат в векторе q соответствует k -й собственной форме, т. е. $q = q_k = \eta_k \theta$. Таким образом, каждая нормальная координата представляет собой совокупность обобщенных координат, распределенных в ней в соответствии с собственной формой.

Решение общей задачи

Применив линейное преобразование координат (19.127) к уравнению (19.118) и умножив его слева на H^T , получим

$$H^T A N \ddot{\theta} + H^T B N \dot{\theta} + H^T C N \theta = H^T Q.$$

В силу невозможности одновременного приведения к каноническому виду трех квадратичных форм — кинетической T и потенциальной Π энергий, а также диссипативной функции Φ — действительные нормальные координаты для уравнения (19.118) существуют только при определенных ограничениях, налагаемых на матрицу B диссипативных коэффициентов. В двух простейших частных случаях, когда такое приведение возможно, нормальные координаты диссипативной системы совпадают с нормальными координатами консервативной системы. Первый случай — это когда матрица диссипативных коэффициентов пропорциональна матрице инерционных коэффициентов, т. е. $B = 2\epsilon A$, где $\epsilon = \text{const}$. Демпфирование такого типа называют *внешним*. Во втором случае, когда матрица B пропорциональна

матрице $\mathbf{C}$ квазиупругих коэффициентов: $\mathbf{B} = \tau \mathbf{C}$, где $\tau = \text{const}$, демпфирование называют *внутренним*.

Если диссипативные силы появляются в системах в силу естественных причин, определить их путем прямых измерений затруднительно. Поэтому часто в практических расчетах характеристики и распределение по системе диссипативных сил неизвестны, и исследователь вправе принимать любой вариант демпфирования, добиваясь лишь удовлетворительного совпадения с результатами опыта.

Обозначив вектор обобщенных возмущающих сил, соответствующих нормальным координатам, через $\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}$, получим матричное уравнение движения системы в виде

$$\mathbf{A}^* \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}^* \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}^* \boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}$$

или в развернутой форме

$$\ddot{\theta}_k + 2\varepsilon_k \dot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = F_k / a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь $\varepsilon_k = \varepsilon$ в случае внешнего и $\varepsilon_k = \tau \omega_k^2 / 2$ в случае внутрен-

него демпфирования; $F_k = \sum_j^n \eta_{kj} Q_j$.

ТЕОРИЯ УДАРА

20.1. Основные понятия и допущения. Модель удара

В курсе теоретической механики теорию удара рассматривают как процесс соударения материальных точек и тел со сравнительно малыми относительными скоростями. Для этого используют модель Гюйгенса–Ньютона, в которой интегрально учитываются потери энергии при наличии местных упругопластических деформаций.

Более точной является физическая модель удара, в которой рассматриваются происходящие во времени местные деформации сплошной среды. Для изучения процессов деформирования при этом привлекают теории упругости, пластичности и распространения волн в теле. При значительных относительных скоростях удара (до нескольких километров в секунду) применяют гидродинамическую или специальную теорию высокоскоростного удара.

В излагаемой ниже теории удара рассматривают такие ударные явления, при которых происходит конечное изменение скоростей точек механической системы за весьма малый промежуток времени τ , называемый временем удара.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m в виде

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt = d\bar{S} \quad (20.1)$$

и проинтегрируем его в пределах от 0 до τ

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \int_0^\tau \bar{F}dt = \bar{S}. \quad (20.2)$$

Здесь $\bar{V}$ — скорость точки в процессе удара; $\bar{v}, \bar{u}$ — скорости точки до и после удара соответственно; $\bar{S}$ — импульс ударной силы $\bar{F}$ за время τ . Изменение скорости точки $\Delta \bar{v} = \bar{u} - \bar{v}$ за время удара есть величина конечная, что следует из эксперимента.

Из (20.2) следует, что импульс ударной силы также величина конечная.

Запишем импульс ударной силы с помощью теоремы о среднем значении функции:

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt = \bar{F}_{\text{cp}} \tau, \quad (20.3)$$

где $\bar{F}_{\text{cp}}$ — среднее значение ударной силы за время удара.

Из (20.2) и (20.3) получаем

$$\bar{F}_{\text{cp}} = \frac{m(\bar{u} - \bar{v})}{\tau},$$

т. е. при конечном значении произведения в числителе и очень малом знаменателе ($\tau \approx 10^{-2} - 10^{-4}$ с) $\bar{F}_{\text{cp}}$ очень велико (порядка $1/\tau$). В связи с этим при $\tau \rightarrow 0$ и $\bar{F}_{\text{cp}} \rightarrow \infty$ импульс $\bar{S}$ есть величина конечная.

Согласно принятому допущению, в уравнениях теории удара время отсутствует, поэтому вместо ударных сил будем оперировать их импульсами.

Уравнение (20.2) выражает теорему об изменении количества движения точки при ударе. Покажем, что перемещение $\Delta \bar{r}$ точки за время удара бесконечно мало. Интегрируя уравнение

$$m\bar{V} = m \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{S} + m\bar{v}$$

от 0 до τ , получаем

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \Delta \bar{r} = \left(\bar{v} + \frac{\bar{S}_{\text{cp}}}{m} \right) \tau. \quad (20.4)$$

Здесь $\bar{S}_{\text{cp}} = \int_0^{\tau} \bar{S} dt / \tau$ — средний ударный импульс силы; $\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt$ при $0 < t \leq \tau$. При конечных $\bar{v}$, $\bar{S}_{\text{cp}}$ и $\tau \rightarrow 0$ перемещение точки

$\Delta \bar{F}$ за время удара пренебрежимо мало и его при ударе не учитывают.

Пусть на точку действуют ударная сила $\bar{F}(t)$ и конечная сила $\bar{P}$. В качестве конечных можно рассматривать силы тяжести, упругости, а также силы, зависящие, например, от скорости точки. Суммарный импульс этих сил равен

$$\bar{S}_\Sigma = \int_0^\tau \bar{F} dt + \int_0^\tau \bar{P} dt = \bar{S} + \bar{P}_{\text{ср}} \tau.$$

Вторым слагаемым здесь можно пренебречь, так как оно является малым того же порядка, что и τ , а $\bar{S}$ — величина конечная, поэтому при ударе действие конечных сил не учитывается.

Используя модель Ньютона, рассмотрим удар двух тел, при котором в точке контакта A возникают ударные силы. Трение не будем учитывать, поэтому ударные силы и их импульсы $\bar{S}$ и $\bar{S}'$ направлены по общей нормали к соударяющимся телам в точке A (рис. 20.1).

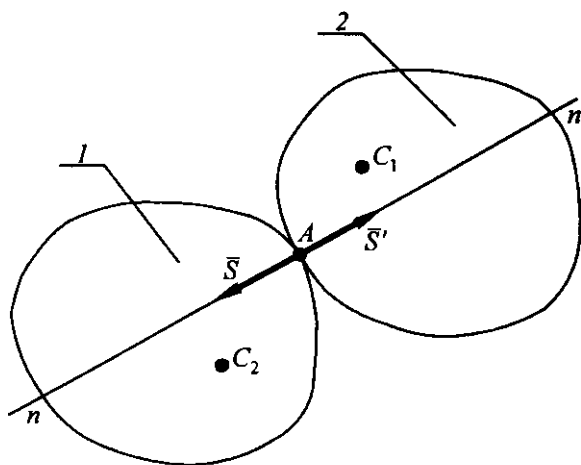


Рис. 20.1

Ударная сила, действующая на тело, изменяется во времени, как показано на рис. 20.2.

В контакте тел образуются местные упругопластические деформации, зависящие от физических свойств тел. Процесс удара

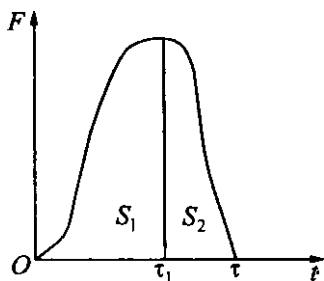


Рис. 20.2

разбивается на две фазы. В первой фазе — фазе деформирования происходит сближение тел в точке A по общей нормали до тех пор, пока нормальная составляющая относительной скорости точки контакта тел не обратится в нуль в момент времени τ_1 . Фаза деформирования характеризуется импульсом ударной силы S_1 . Далее начинается

вторая фаза — фаза восстановления, при которой тела в месте контакта восстанавливают свою форму вследствие упругих сил. Нормальная составляющая относительной скорости точки контакта меняет знак и возрастает, но из-за пластических деформаций не достигает своего первоначального значения. Импульс ударной силы в этой фазе равен S_2 .

Введем коэффициент восстановления K , который характеризует свойства материалов соударяющихся тел:

$$K = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S'_2}{S'_1}, \quad (20.5)$$

где S_1, S'_1, S_2, S'_2 — импульсы ударных сил в фазах деформирования и восстановления для первого и второго тел соответственно.

Коэффициент восстановления определяют экспериментально. Так как после удара в общем случае полного восстановления формы тел не происходит, то $0 \leq K \leq 1$. При $K = 1$ удар называют **абсолютно упругим** и при $K = 0$ — **абсолютно неупругим**, а при $0 < K < 1$ — **упругим**. В случае, когда $K = 0$, нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения тел после удара равна нулю и фаза восстановления отсутствует. Оба тела либо движутся совместно, либо одно тело скользит по другому после максимального сближения в точке контакта.

Теорию удара при изложенных допущениях можно применять с достаточным приближением на практике для сравнительно небольших относительных скоростей точек контакта при ударе (до десятков метров в секунду); для компактных соударяющихся

тел, близких по форме к сферическим, а также для компактного тела, ударяющегося о полупространство.

Формулы классической механики справедливы и при соударении удлинённых тел, если время τ удара в несколько (3–5) раз превышает время T двойного пробега упругих волн по соударяющимся телам, т. е. $\tau \geq (3 \dots 5)T$. Это означает, что время удара должно быть велико, чтобы из места соударения не была безвозвратно удалена упругая энергия волнами возмущения.

Например, для стержней $T = 2l/c$, $c = \sqrt{E/\rho}$, где l , E , ρ — длина, модуль упругости и плотность стержня. Для стального стержня скорость распространения упругих волн (скорость звука) $c \approx 5000$ м/с. Пусть время удара $\tau \approx 0,001$ с, тогда длина стержней, при которых можно использовать данную теорию, должна быть $l \leq \frac{\tau c}{6 \dots 10} = 0,5 \dots 0,83$ м.

На рис. 20.3 представлены экспериментальные зависимости коэффициента восстановления при соударении сфер из одинакового материала (бронзы или свинца), но различной массы и отношения масс, от начальной относительной скорости удара v . Значение коэффициента восстановления K , как видно на рисунке, зависит от v , поэтому выбирают некоторое среднее значение K в определенном диапазоне изменения v . Это среднее значение принимают постоянным (в определенном диапазоне изменения v) и используют при решении практических задач.

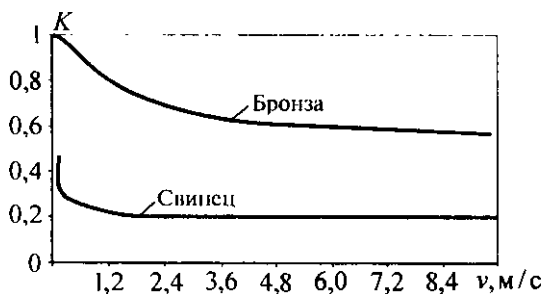


Рис. 20.3

20.2. Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс системы при ударе

Для материальной точки теорема об изменении количества движения при ударе имеет вид (20.2), т. е. *изменение количества движения точки за время удара равно импульсу ударной силы, действующей на точку.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$mu_x - mv_x = S_x; \quad mu_y - mv_y = S_y; \quad mu_z - mv_z = S_z.$$

Для ударных внутренних сил механической системы имеем

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Проинтегрировав по времени удара, получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(i)} = 0; \quad \sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(i)}) = 0. \quad (20.6)$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Применим теорему об изменении количества движения для k -й точки системы:

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)}, \quad k=1, \dots, N. \quad (20.7)$$

Здесь $\bar{u}_k, \bar{v}_k$ — скорости k -й точки после и до удара; $\bar{S}_k^{(e)}, \bar{S}_k^{(i)}$ — импульсы внешней и внутренней ударных сил. Суммируя уравнения (20.7) по точкам системы, получаем

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(i)}.$$

Обозначив $\bar{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{u}_k$, $\bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k$, с учетом свойства

(20.6) из (20.7) находим

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)}, \quad (20.8)$$

где $\bar{Q}, \bar{Q}_0$ — количества движения системы после и до удара соответственно.

Таким образом, *изменение количества движения механической системы за время удара равно векторной сумме импульсов всех внешних ударных сил, действующих на точки системы.*

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^N S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^N S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^N S_{kz}^{(e)}. \quad (20.9)$$

Запишем $\bar{Q} = M \bar{u}_C$, $\bar{Q}_0 = M \bar{v}_C$, где $M, \bar{u}_C, \bar{v}_C$ — соответственно масса системы и скорости ее центра масс после и до удара. Согласно (20.8), выражение для теоремы о движении центра масс системы имеет вид

$$M \bar{u}_C - M \bar{v}_C = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)}. \quad (20.10)$$

В проекциях на оси координат получаем

$$\begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum_{k=1}^N S_{kx}^{(e)}; \quad M(u_{Cy} - v_{Cy}) = \sum_{k=1}^N S_{ky}^{(e)}; \\ M(u_{Cz} - v_{Cz}) &= \sum_{k=1}^N S_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \quad (20.11)$$

Получим *законы сохранения*, вытекающие из этих теорем.

1. Если $\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)} = 0$, то из (20.8), (20.10) следует

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0, \quad \bar{u}_C = \bar{v}_C. \quad (20.12)$$

Таким образом, *если векторная сумма импульсов внешних ударных сил равна нулю, то вектор количества движения и скорость центра масс системы остаются постоянными.*

В проекциях на оси координат имеем

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_{0x}; \quad Q_y = Q_{0y}; \quad Q_z = Q_{0z}; \\ u_{Cx} &= v_{Cx}; \quad u_{Cy} = v_{Cy}; \quad u_{Cz} = v_{Cz}. \end{aligned}$$

2. Если $\sum_{k=1}^N S_{kx}^{(e)} = 0$, то из (20.9), (20.11) получаем

$$Q_x = Q_{0x}, \quad u_{Cx} = v_{Cx}.$$

20.3. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы при ударе

Умножим векторно равенство (20.2) слева на радиус-вектор $\vec{r}$ (рис. 20.4):

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{S}, \text{ или } \vec{M}_0(m\vec{u}) - \vec{M}_0(m\vec{v}) = \vec{M}_0(\vec{S}), \quad (20.13)$$

где $\vec{M}_0(m\vec{u})$, $\vec{M}_0(m\vec{v})$, $\vec{M}_0(\vec{S})$ — моменты количества движения материальной точки после и до удара и момент импульса ударной силы относительно точки O соответственно.

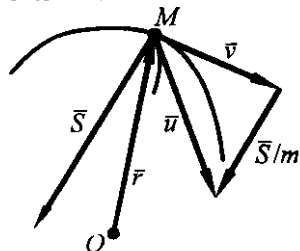


Рис. 20.4

Уравнение (20.13) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно точки O при ударе.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат получаем

$$M_x(m\vec{u}) - M_x(m\vec{v}) = M_x(\vec{S});$$

$$M_y(m\vec{u}) - M_y(m\vec{v}) = M_y(\vec{S});$$

$$M_z(m\vec{u}) - M_z(m\vec{v}) = M_z(\vec{S}).$$

Запишем уравнение, выражающее теорему об изменении момента количества движения для любой из N точек механической системы:

$$\vec{r}_k \times m\vec{u}_k - \vec{r}_k \times m\vec{v}_k = \vec{r}_k \times \vec{S}_k^{(e)} + \vec{r}_k \times \vec{S}_k^{(i)}, \quad k=1, \dots, N, \quad (20.14)$$

где $\vec{u}_k$, $\vec{v}_k$ — скорости k -й точки после и до удара; $\vec{S}_k^{(e)}$, $\vec{S}_k^{(i)}$ — импульсы внешней и внутренней ударных сил, действующих на k -ю точку системы.

Суммируя (20.14) по всем точкам системы, получаем

$$\vec{K}_O - \vec{K}_O^{(0)} = \sum_{k=1}^N \vec{M}_O(\vec{S}_k^{(e)}), \quad (20.15)$$

где $\vec{K}_O = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times m_k \vec{u}_k$, $\vec{K}_O^{(0)} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$ — главные моменты количеств движения системы относительно точки O после и до удара, $\sum_{k=1}^N \vec{M}_O(\vec{S}_k^{(e)}) = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{S}_k^{(e)}$ — сумма моментов импульсов

внешних ударных сил относительно точки O ($\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(i)}) =$
 $= \sum_{k=1}^N \bar{r}_k \times \bar{S}_k^{(i)} = 0$ по свойству внутренних сил).

Сформулируем теорему: *изменение главного момента количеств движения системы относительно какой-либо точки за время удара равно векторной сумме моментов импульсов внешних ударных сил, приложенных к материальным точкам системы, относительно той же точки.*

Для главных моментов количеств движения системы относительно осей координат имеем

$$\begin{aligned} K_x - K_x^{(0)} &= \sum_{k=1}^N M_x(\bar{S}_k^{(e)}); K_y - K_y^{(0)} = \sum_{k=1}^N M_y(\bar{S}_k^{(e)}); \\ K_z - K_z^{(0)} &= \sum_{k=1}^N M_z(\bar{S}_k^{(e)}). \end{aligned} \quad (20.16)$$

Получим законы сохранения, вытекающие из этой теоремы.

1. Если главный момент импульсов внешних ударных сил относительно точки O равен нулю: $\sum_{k=1}^N \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(e)}) = 0$, то, согласно (20.15), $\bar{K}_O = \bar{K}_O^{(0)}$, откуда $K_x = K_x^{(0)}$, $K_y = K_y^{(0)}$, $K_z = K_z^{(0)}$.

2. Если главный момент импульсов внешних ударных сил относительно оси Ox равен нулю: $\sum_{k=1}^N M_x(\bar{S}_k^{(e)}) = 0$, то, согласно (20.16), $K_x = K_x^{(0)}$.

Рассмотрим теперь, как изменяется угловая скорость вращающегося тела при ударе. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Az с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ (рис. 20.5). К телу приложены импульсы $\bar{S}_k^{(e)}$ ($k=1, \dots, N$). Определим изменение угловой скорости $\bar{\omega}$ тела после их приложения.

Главные моменты количеств движения тела относительно оси Az после и до удара равны: $K_z = J_z \omega_z$, $K_z^{(0)} = J_z \omega_{0z}$, где J_z —

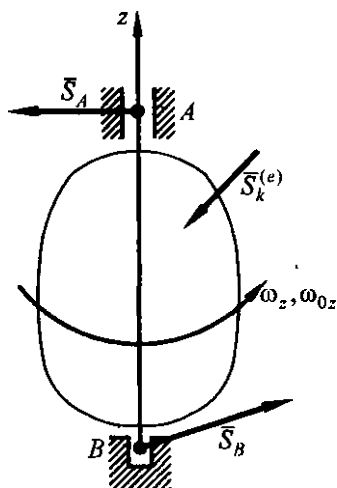


Рис. 20.5

момент инерции тела относительно оси вращения. Из третьего уравнения (20.16) имеем

$$J_z (\omega_z - \omega_{0z}) = \sum_{k=1}^N M_z (\bar{S}_k^{(e)}), \quad (20.17)$$

откуда

$$\Delta \omega_z = \omega_z - \omega_{0z} = \frac{\sum_{k=1}^N M_z (\bar{S}_k^{(e)})}{J_z},$$

где $\Delta \omega_z, \omega_z$ — изменение угловой скорости при ударе и проекция на ось Az угловой скорости тела после удара (см. рис. 20.5). Моменты импульсов $\bar{S}_A, \bar{S}_B$ ударных реакций относительно оси Az при этом равны нулю.

20.4. Коэффициент восстановления

Пусть материальная точка массой m падает на гладкую поверхность со скоростью $\bar{v}$, направленной под углом α к нормали к поверхности (рис. 20.6). После удара скорость точки $\bar{u}$ составит с нормалью угол β . Угол α называют углом падения, угол β —

углом отражения. Если $\alpha \neq 0$, то удар точки о поверхность называют косым, если $\alpha = 0$ — прямым. Импульс $\bar{S}$ ударной реакции поверхности направлен по нормали к поверхности.

Определим скорость $\bar{u}$ точки после удара и импульс $\bar{S}$ ударной реакции. Согласно теореме об изменении количества движения точки, в проекциях на нормаль n и касательную τ имеем

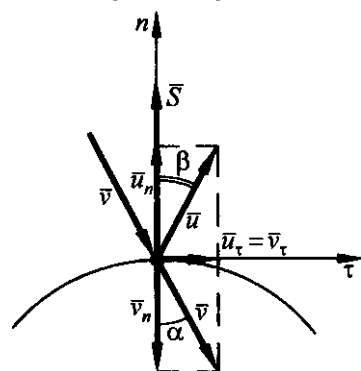


Рис. 20.6

$$m(u_n - v_n) = S; \quad m(u_\tau - v_\tau) = 0.$$

Отсюда $u_\tau = v_\tau = v \sin \alpha$. Но S и u_n нельзя определить из одного уравнения, необходимо знать коэффициент восстановления K . Для его определения представим удар точки о поверхность в двух фазах. В начале фазы деформирования скорость точки равна $\bar{v}$, в конце — $\bar{u}_1$. Импульс ударной реакции в этой фазе

$$S_1 = \int_0^{\tau_1} N dt,$$

где τ_1 , N — время фазы деформирования и нормальная ударная реакция поверхности соответственно.

В конце фазы деформирования нормальная составляющая скорости точки равна нулю и $\bar{u}_1 = \bar{u}_\tau$ (где $\bar{u}_\tau$ — касательная составляющая скорости точки).

Фаза восстановления начинается при скорости точки $\bar{u}_1$ и заканчивается, когда точка покидает поверхность со скоростью $\bar{u}$.

Импульс ударной реакции в этой фазе $S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau} N dt$. Коэффициент

восстановления для точки $K = S_2/S_1$. Согласно теореме об изменении количества движения точки в проекции на нормаль (см. рис. 20.6) для первой и второй фаз удара соответственно, имеем

$$m(u_{1n} - v_n) = m(-v_n) = S_1; \quad (20.18)$$

$$m(u_n - u_{1n}) = m u_n = S_2. \quad (20.19)$$

Заметим, что $S_1 + S_2 = S$. Разделив (20.19) на (20.18), получим

$$K = \frac{S_2}{S_1} = -\frac{u_n}{v_n}. \quad (20.20)$$

Соотношение $K = -u_n/v_n$ подчиняется модели Ньютона. В учебной литературе его используют для определения коэффициента восстановления. При отсутствии ударного трения (20.5) и (20.20) во многих случаях равнозначны. При наличии ударного трения для тел, совершающих при ударе произвольное движение, модель Ньютона в ряде случаев противоречит теореме о кинетической энергии, поэтому уравнение (20.5) более приемлемо.

Формула (20.20) позволяет определить с помощью простого эксперимента значение коэффициента восстановления K .

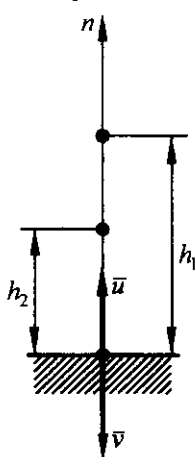


Рис. 20.7

При прямом ударе $\alpha = 0$, $v_n = -v$, $u_n = u$ и $K = u/v$. В то же время $v = \sqrt{2gh_1}$, $u = \sqrt{2gh_2}$ (рис. 20.7). Подставив выражения для v и u в формулу для K , получим

$$K = \sqrt{h_2/h_1}.$$

Измерив высоты падения h_1 и отскока h_2 материальной точки, можно рассчитать значение коэффициента восстановления.

При косом ударе $\alpha \neq 0$ (см. рис. 20.6)

$$K = -\frac{u_n}{v_n} = -\frac{v_\tau}{v_n} \frac{u_n}{u_\tau} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Измерив экспериментально углы падения α и отражения β , можно вычислить значение коэффициента восстановления.

При известном коэффициенте восстановления K можно решить задачу об определении $\bar{u}$ и $\bar{S}$ с помощью дополнительной зависимости $u_n = -Kv_n = Kv \cos \alpha$, так как $v_n = -v \cos \alpha$.

20.5. Теорема об изменении кинетической энергии системы при ударе. Теорема Карно

Теорема Кельвина

Получим выражение для работы ударных сил. Умножив скалярно члены уравнения (20.2) на $\bar{u}$ и $\bar{v}$, получим

$$m\bar{u}^2 - m\bar{u}\bar{v} = \bar{S}\bar{u}, \quad m\bar{u}\bar{v} - m\bar{v}^2 = \bar{S}\bar{v}.$$

Сложив эти уравнения и разделив на 2, находим

$$\frac{m\bar{u}^2}{2} - \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{\bar{S}(\bar{u} + \bar{v})}{2}. \quad (20.21)$$

Из теоремы (20.21) следует, что изменение кинетической энергии точки при ударе равно работе A ударной силы $\bar{F}$:

$$A(\bar{F}) = \frac{\bar{S}(\bar{u} + \bar{v})}{2}.$$

Сформулируем теорему Кельвина: *работа ударной силы, приложенной к материальной точке, за время удара равна скалярному произведению ударного импульса на полусумму скоростей точки после и до удара.*

Теорема об изменении кинетической энергии

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N точек. Запишем теорему Кельвина для k -й точки:

$$\frac{m_k u_k^2}{2} - \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\bar{S}_k(\bar{u}_k + \bar{v}_k)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{где } \bar{S}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)}.$$

Суммируя по точкам левую и правую части уравнения, получаем уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии системы при ударе:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N \frac{(\bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)})(\bar{u}_k + \bar{v}_k)}{2}, \quad (20.22)$$

где $T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k u_k^2}{2}$, $T_0 = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}$ — кинетические энергии системы после и до удара соответственно.

Согласно (20.22), сумма работ ударных сил, приложенных к материальным точкам механической системы, равна

$$\sum_{k=1}^N A_k = \sum_{k=1}^N \frac{\bar{S}_k^{(e)}(\bar{u}_k + \bar{v}_k)}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{\bar{S}_k^{(i)}(\bar{u}_k + \bar{v}_k)}{2}.$$

Сформулируем теорему об изменении кинетической энергии: *изменение кинетической энергии механической системы при ударе равно сумме работ внешних и внутренних ударных сил, выраженной через суммы скалярных произведений внешних и внутренних ударных импульсов на полусуммы скоростей точек после и до удара.*

Теорема Карно

В выражении (20.22) присутствуют неизвестные ударные импульсы. Чтобы использовать теорему об изменении кинетической энергии при ударе для решения практических задач, необходимо эти неизвестные импульсы исключить. Для этого нужно воспользоваться теоремой об изменении количества движения при ударе. Теорема Карно соединяет эти две теоремы.

Выведем теорему Карно для материальной точки (см. рис. 20.6). При падении материальной точки на гладкую поверхность происходит наложение идеальной стационарной неупругой связи. В начале фазы деформирования скорость точки равна $\bar{v}$, в конце $\bar{u}_1 = \bar{u}_1$; импульс в фазе деформирования $\bar{S}_1$. Так как ударная поверхность гладкая, $\bar{S}_1 \bar{u}_1 = 0$. Запишем для фазы деформирования уравнения, выражающие теорему Кельвина и теорему об изменении количества движения:

$$\frac{mu_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{\bar{S}_1(\bar{u}_1 + \bar{v})}{2} = \frac{\bar{S}_1 \bar{v}}{2}; \quad m(\bar{u}_1 - \bar{v}) = \bar{S}_1.$$

Умножив второе уравнение скалярно на $\bar{S}_1$, получим

$$-\frac{m\bar{S}_1 \bar{v}}{2} = \frac{S_1^2}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{mu_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{S_1^2}{2m} < 0. \quad (20.23)$$

При мгновенном наложении связи на точку происходит потеря ее кинетической энергии. Для фазы восстановления скорости точки в начале и в конце фазы будут соответственно $\bar{u}_1$ и $\bar{u}$, импульс ударной реакции $\bar{S}_2$. Так как $\bar{S}_2$ перпендикулярен $\bar{u}_1$, $\bar{S}_2 \bar{u}_1 = 0$. Далее аналогично записываем

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mu_1^2}{2} = \frac{\bar{S}_2(\bar{u} + \bar{u}_1)}{2} = \frac{\bar{S}_2 \bar{u}}{2}; \quad m(\bar{u} - \bar{u}_1) = \bar{S}_2.$$

Умножив второе уравнение скалярно на $\bar{S}_2$, получим

$$\frac{m\bar{u}\bar{S}_2}{2} = \frac{S_2^2}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mu_1^2}{2} = \frac{S_2^2}{2m} > 0. \quad (20.24)$$

В фазе восстановления происходит мгновенное снятие связи. При мгновенном снятии связи изменение кинетической энергии точки положительное.

Сложив (20.23) и (20.24), получим

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{S_1^2 - S_2^2}{2m} = -\frac{(S_1 + S_2)(S_1 - S_2)}{2m}. \quad (20.25)$$

Кроме того, $S = S_1 + S_2$, $S_2 = KS_1$. Отсюда

$$S_1 = \frac{S}{1+K}; \quad S_1 - S_2 = \frac{1-K}{1+K} S. \quad (20.26)$$

Из (20.25) с учетом (20.26) запишем

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1-K}{1+K} \frac{S^2}{2m}. \quad (20.27)$$

Согласно теореме об изменении количества движения точки при ударе $\bar{S} = m(\bar{u} - \bar{v})$. Подставив это выражение в (20.27), получим

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1-K}{1+K} \frac{m(\bar{v} - \bar{u})^2}{2}. \quad (20.28)$$

Величину $\bar{v} - \bar{u}$ называют *потерянной скоростью* точки, а $\frac{m(\bar{v} - \bar{u})^2}{2}$ — *кинетической энергией точки, соответствующей потерянной скорости*. Из (20.28) следует, что в результате удара при $0 \leq K < 1$ происходит потеря кинетической энергии точки, а при $K = 1$ (при абсолютно упругом ударе) потери кинетической энергии отсутствуют.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из N точек. Предположим, что коэффициент восстановления K одинаков для всех соударений (налагаемых связей). Тогда для k -й точки теорема Карно будет выражаться уравнением

$$\frac{m_k u_k^2}{2} - \frac{m_k v_k^2}{2} = -\frac{1-K}{1+K} \frac{m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Суммируя по всем точкам, получаем

$$T - T_0 = -\frac{1-K}{1+K} \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2}{2},$$

где $T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k u_k^2}{2}$, $T_0 = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}$ — кинетические энергии системы после и до удара соответственно.

Обозначим кинетическую энергию системы, соответствующую потерянным скоростям точек, через $T_{\text{пс}}$. Тогда

$$T_0 - T = \frac{1-K}{1+K} T_{\text{пс}},$$

где $T_{\text{пс}} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2}{2}$. Величину $T_0 - T = T_{\text{пот}}$ называют еще потерянной кинетической энергией при ударе.

Сформулируем теорему Карно для механической системы: *потеря кинетической энергии системы при упругом ударе в случае мгновенного наложения идеальных связей равна кинетической энергии системы, которая соответствует потерянным скоростям точек системы, умноженной на коэффициент $\frac{1-K}{1+K}$.*

Пример 20.1. Однородный диск радиусом R и массой m имеет угловую скорость ω_0 . По ободу диска вдоль линии $N-N$, отстоящей от оси Oz на расстоянии $R/2$ (рис. 20.8) со скоростью $\bar{v}$ ударяет материальная точка массой m_1 .

Определить угловую скорость диска после удара и импульс ударной реакции опоры, если удар абсолютно неупругий, а угол $\alpha = 30^\circ$.

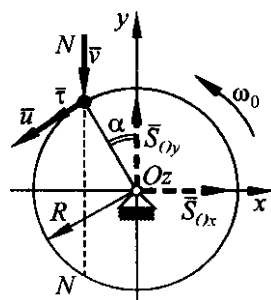


Рис. 20.8

Решение. Механическая система состоит из диска и материальной точки. Согласно теореме об изменении главного момента количеств движения системы относительно оси Oz ,

$$K_z - K_z^{(0)} = \sum_{k=1}^N M_z (\bar{S}_k^{(e)}).$$

Внешний ударный импульс — это импульс ударной реакции оси вращения $\bar{S}_O$, который пересекает ось, и его момент относительно оси равен нулю. Поэтому $K_z = K_z^{(0)}$, где $K_z, K_z^{(0)}$ — главные моменты количеств движения системы относительно оси Oz после и до удара.

Найдем $K_z^{(0)}$ как сумму главного момента количества движения диска и момента количества движения точки относительно оси Oz :

$$K_z^{(0)} = K_{zd}^{(0)} + K_{zm}^{(0)} = J_z \omega_0 + M_z(m_1 \bar{v}).$$

Окончательно имеем

$$K_z^{(0)} = J_z \omega_0 + m_1 v R/2.$$

Так как удар точки абсолютно неупругий, то вектор скорости точки после удара направлен по касательной к ободу диска и $u_\tau = \omega_z R$, где ω_z — угловая скорость диска после удара. Тогда

$$K_z = J_z \omega_z + m_1 u_\tau R = \omega_z (J_z + m_1 R^2).$$

где $J_z = mR^2/2$, и

$$\omega_z (J_z + m_1 R^2) = J_z \omega_0 + m_1 v \frac{R}{2}.$$

Отсюда

$$\omega_z = \frac{mR\omega_0 + m_1 v}{R(m + 2m_1)}.$$

Согласно теореме об изменении количества движения системы $S_{Ox} = \Delta Q_x$, $S_{Oy} = \Delta Q_y$. Количества движения системы до и после удара соответственно $\bar{Q}_0 = m_1 \bar{v}$ и $\bar{Q} = m_1 \bar{u}$. Тогда $\Delta \bar{Q} = m_1 (\bar{u} - \bar{v})$. Количества движения однородного диска до и после удара равны нулю, так как скорости центра масс диска равны нулю

В проекциях на оси координат при $\alpha = 30^\circ$ получаем

$$S_{Ox} = -m_1 \omega_z R \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3} m_1 (mR\omega_0 + m_1 v)}{2(m + 2m_1)};$$

$$S_{Oy} = m_1 (v - \omega_z R \cos 60^\circ) = \frac{m_1 (2mv + 3m_1 v - mR\omega_0)}{2(m + 2m_1)}.$$

Пример 20.2. В кулисном механизме между ползуном A и стержнем OM имеется зазор (рис. 20.9, а). Стержню AB сообщается угловая скорость ω_0 . После закрытия зазора стержню OM сообщается угловая скорость при обычном (беззазорном) контакте. Однородный стержень AB длиной l и массой m может вращаться вокруг оси Bz . Момент инерции стержня OM относительно оси вращения Oz равен J . Угол α задан. Массой и размерами ползуна A , а также трением пренебречь.

Определить угловую скорость стержня OM после закрытия зазора, ударный импульс в соединении A , потерю угловой скорости стержня AB и потерю энергии в системе при ударе.

Решение. Закрытие зазора в соединении A будем рассматривать как ударный процесс, так как при этом происходит мгновенное изменение угловых скоростей стержней. До закрытия зазора угловые скорости стержней AB и OM

соответственно равны ω_0 и 0, после закрытия — ω_z и ω_{1z} . Составим выражение для теоремы об изменении главного момента количеств движения для систем, изображенных на рис. 20.9, б и в соответственно:

$$\Delta K_{Oz} = \sum_{k=1}^N M_{Oz}(\bar{S}_k^{(e)}), \quad J_{Oz}\omega_{1z} = S_A OA; \quad (20.29)$$

$$\Delta K_{Bz} = \sum_{k=1}^N M_{Bz}(\bar{S}_k^{(e)}), \quad J_{Bz}(\omega_z - \omega_0) = -S_{A'} A' B \sin \alpha, \quad (20.30)$$

где $J_{Oz} = J$; $J_{Bz} = \frac{ml^2}{3}$; $S_A = S_{A'}$; $OA = A' B \sin \alpha = l \sin \alpha$.

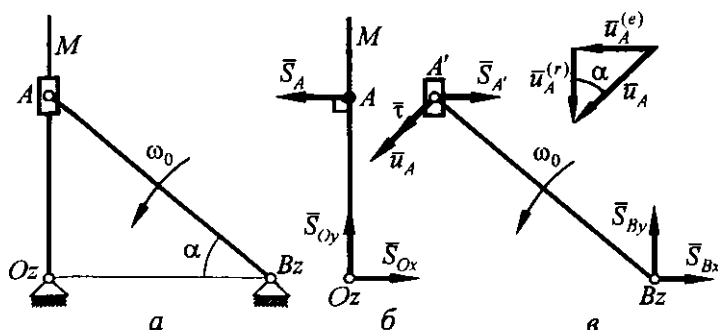


Рис. 20.9

Скорость точки A после удара представим как скорость сложного движения по формуле $\bar{u}_A = \bar{u}_A^{(e)} + \bar{u}_A^{(r)}$. Переносное движение точки A — это движение вместе со стержнем OM , причем переносная скорость $u_{A\tau}^{(e)} = OA\omega_{1z} = u_{A\tau} \sin \alpha$, относительное движение — движение вдоль стержня OM со скоростью $\bar{u}_A^{(r)}$. Далее имеем

$$u_{A\tau} = A' B \omega_z = l \omega_z; \quad \omega_{1z} = u_{A\tau}^{(e)} / OA = \omega_z. \quad (20.31)$$

Сложив (20.29) и (20.30), получим

$$J\omega_{1z} + \frac{ml^2}{3}(\omega_z - \omega_0) = 0,$$

откуда с учетом (20.31) имеем

$$\omega_{1z} = \frac{ml^2 \omega_0}{3J + ml^2} = \omega_z.$$

Из уравнения (20.29) находим

$$S_A = \frac{J\omega_{1z}}{OA} = \frac{Jml\omega_0}{(3J + ml^2)\sin \alpha}.$$

Потеря угловой скорости стержня AB

$$\Delta\omega_z = \omega_z - \omega_0 = -\frac{3J\omega_0}{3J + ml^2}.$$

Потеря кинетической энергии в системе после закрытия зазора

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{J\omega_{1z}^2}{2} + \frac{J_{Bz}\omega_z^2}{2} - \frac{J_{Bz}\omega_0^2}{2} = -\frac{ml^2 J\omega_0^2}{2(3J + ml^2)}.$$

Пример 20.3. В механизме к зубчатой рейке 1 массой m_1 применен импульс ударной силы $\bar{S}$ (рис. 20.10). Рейка 1 находится в зубчатом зацеплении с шестерней 2 массой m_2 и шестерней 3 массой m_3 и радиусом r_3 . Шестерни представляют собой однородные диски. До приложения импульса $\bar{S}$ механизм покоился. Зазоров в зацеплении нет.

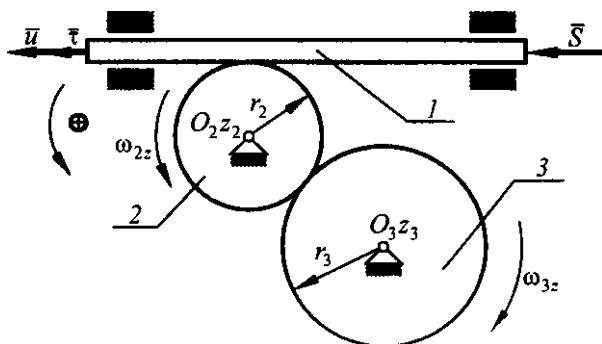


Рис. 20.10

Определить угловую скорость ω_{3z} шестерни 3 после удара.

Решение. Данная задача может быть решена с помощью теоремы об изменении кинетической энергии при ударе, согласно которой

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}),$$

где T, T_0 — кинетическая энергия системы после и до удара соответственно.

Работа внутренних ударных сил $\sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(i)}) = 0$ (нет зазоров), $T_0 = 0$ (по условиям задачи), а

$$T = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{J_{2z} \omega_{2z}^2}{2} + \frac{J_{3z} \omega_{3z}^2}{2}.$$

Здесь u — скорость рейки 1 после удара, $u_1 = \omega_{2z} r_2 = -\omega_{3z} r_3$ (ω_{2z}, ω_{3z} — проекции на оси $O_2 z_2, O_3 z_3$ угловых скоростей шестерен 2 и 3 после удара); $J_{2z} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, $J_{3z} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ — моменты инерции шестерен относительно осей вращения.

Сумма работ внешних ударных импульсов равна работе ударного импульса $\bar{S}$:

$$\sum_{k=1}^N A(\bar{F}_k^{(e)}) = \bar{S}u/2.$$

После подстановки получаем

$$\omega_{3z}^2 \left(m_1 r_3^2 + \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{r_3^2}{r_2^2} + \frac{m_3 r_3^2}{2} \right) = -S \omega_{3z} r_3,$$

откуда находим

$$\omega_{3z} = -\frac{2S}{r_3(2m_1 + m_2 + m_3)}$$

(знак «—» означает, что направление угловой скорости ω_{3z} совпадает с направлением вращения часовой стрелки).

20.6. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара

Определение импульсов ударных реакций

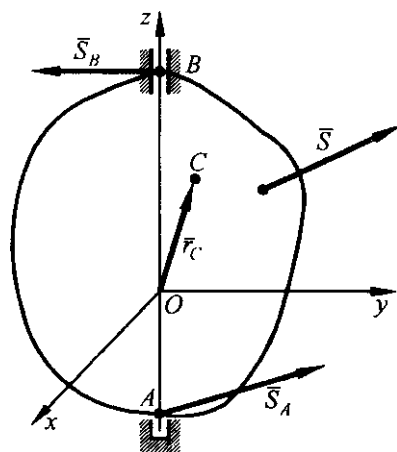


Рис. 20.11

Рассмотрим удар, импульс которого $\bar{S}$, по твердому телу массой m , вращающемуся вокруг неподвижной оси (рис. 20.11). Пусть это будет ось Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, связанной с телом. В точках закрепления тела появятся импульсы $\bar{S}_A, \bar{S}_B$ ударных реакций, проекции которых на оси обозначим $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$. Согласно теоремам об изменении количества движения и главного момента количества движения при ударе для данного тела,

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{S}_B; \quad (20.32)$$

$$\Delta \bar{K}_O = \bar{K}_O - \bar{K}_O^{(0)} = \bar{M}_O(\bar{S}) + \bar{M}_O(\bar{S}_A) + \bar{M}_O(\bar{S}_B), \quad (20.33)$$

где $\bar{Q}, \bar{Q}_0$ — векторы количества движения тела после и до удара, $\bar{K}_O, \bar{K}_O^{(0)}$ — главные моменты количеств движения тела относительно точки O после и до удара.

Так как

$$\Delta \bar{Q} = m(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = m(\bar{\omega} \times \bar{r}_C - \bar{\omega}_0 \times \bar{r}_C) = m\Delta \bar{\omega} \times \bar{r}_C,$$

получаем

$$\Delta \bar{Q} = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \Delta \omega \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = m[\bar{i}(-y_C \Delta \omega) + \bar{j}x_C \Delta \omega + \bar{k} \cdot 0], \quad (20.34)$$

где $\Delta \omega = \Delta \omega_z = \omega_z - \omega_{0z}$.

Определим проекции главного момента количеств движения тела на оси координат по формулам для твердого тела, имеющего неподвижную точку, при условии, что $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z \neq 0$,

$$K_x = -J_{xz}\omega_z, \quad K_y = -J_{yz}\omega_z, \quad K_z = J_z\omega_z;$$

$$\Delta K_x = -J_{xz}\Delta \omega, \quad \Delta K_y = -J_{yz}\Delta \omega, \quad \Delta K_z = J_z\Delta \omega. \quad (20.35)$$

Система уравнений (20.32), (20.33) с учетом (20.34), (20.35) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= -m y_C \Delta \omega = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \\ \Delta Q_y &= m x_C \Delta \omega = S_y + S_{Ay} + S_{By}; \\ \Delta Q_z &= 0 = S_z + S_{Az}; \\ \Delta K_x &= -J_{xz}\Delta \omega = M_x(\bar{S}) + M_x(\bar{S}_A) + M_x(\bar{S}_B); \\ \Delta K_y &= -J_{yz}\Delta \omega = M_y(\bar{S}) + M_y(\bar{S}_A) + M_y(\bar{S}_B); \\ \Delta K_z &= J_z\Delta \omega = M_z(\bar{S}). \end{aligned} \quad (20.36)$$

С помощью системы (20.36) при заданных импульсе $\bar{S}$ и точке его приложения определяют изменение угловой скорости $\Delta \omega$ (см. последнее уравнение), а также $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$. Последнее уравнение (20.36) уже было получено ранее (см. (20.17)).

Центр удара

Рассмотрим теперь задачу о нахождении условий, при которых удар, произведенный по телу, не создает ударных реакций. Положим в (20.32), (20.33) $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$, тогда уравнения (20.36) примут вид

$$\begin{aligned} -m y_C \Delta\omega = S_x; \quad m x_C \Delta\omega = S_y; \quad 0 = S_z, \\ -J_{xz} \Delta\omega = M_x(\bar{S}); \quad -J_{yz} \Delta\omega = M_y(\bar{S}); \quad J_z \Delta\omega = M_z(\bar{S}). \end{aligned} \quad (20.37)$$

Из третьего уравнения системы (20.37) следует, что импульс $\bar{S}$ должен быть перпендикулярен оси вращения тела Oz . Выберем плоскость Oxy так, чтобы в ней находился импульс $\bar{S}$, а ось Ox направим параллельно $\bar{S}$ (рис. 20.12). Тогда $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(\bar{S}) = M_y(\bar{S}) = 0$. Пусть $ON = l$. Уравнения (20.37) примут вид

$$\begin{aligned} -m y_C \Delta\omega = S; \quad m x_C \Delta\omega = 0; \quad 0 = S_z, \\ -J_{xz} \Delta\omega = 0; \quad -J_{yz} \Delta\omega = 0; \quad J_z \Delta\omega = -lS. \end{aligned}$$

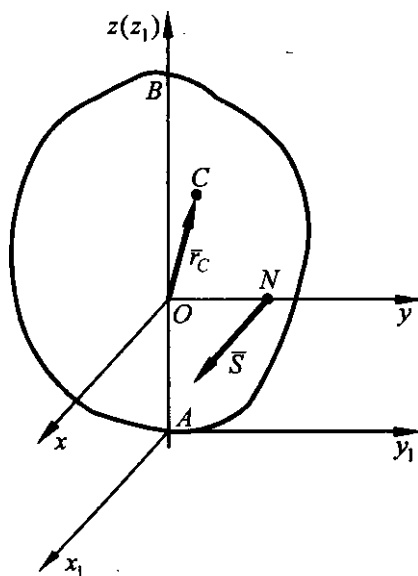


Рис. 20.12

Из второго уравнения имеем $x_C = 0$, из четвертого и пятого находим $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Это означает, что центр масс тела лежит в плоскости Oyz , ось Oz является главной для точки O , а импульс $\bar{S}$ ударной силы перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела. Из первого и последнего уравнений получаем

$$l = J_z / (m y_C). \quad (20.38)$$

Из (20.38) следует, что знаки y_C и l одинаковы, т. е. центр масс системы и точка N лежат в плоскости Oyz по одну сторону от оси Oz .

Точка N , в которой приложен импульс $\bar{S}$ при отсутствии ударных реакций подшипников, называется центром удара.

Если центр масс системы находится на оси вращения, то $y_C = 0$ и $l = \infty$, т. е. в этом случае центр удара отсутствует (из уравнения (20.32) следует $\bar{S}_A + \bar{S}_B = -\bar{S}$). Отметим, что удары по уравновешенным вращающимся валам машин передаются на подшипники.

Итак, чтобы при приложении к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, ударного импульса не возникали ударные реакции в опорах, т. е. чтобы существовал центр удара, необходимо и достаточно выполнить следующие условия:

- 1) ударный импульс должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения тела и его центр масс;
- 2) точка N пересечения линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения тела и его центр масс, должна лежать в этой плоскости по одну сторону от оси вращения вместе с центром масс;
- 3) ударный импульс, произвольный по величине, должен лежать в плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку O , для которой ось вращения является главной осью инерции тела.

Замечание. Покажем, как на оси Oz определить точку O , для которой ось вращения является главной. Проведем оси Ax_1, Ay_1 , параллельные осям Ox, Oy (см. рис. 20.12), тогда $x = x_1, y = y_1, z = z_1 - a$ ($OA = a$). Далее для центробежных моментов относительно осей систем $Oxyz$ и $Ax_1y_1z_1$ имеем $J_{xz} = J_{x_1z_1}$,

$J_{yz} = J_{y_1 z_1} - m y_C a$. Если ось Oz является главной для точки O , то $J_{yz} = J_{yx} = 0$. Поэтому $J_{x_1 z_1} = 0$ и $a = J_{y_1 z_1} / (m y_C)$. Оси Ax_1 и Ay_1 должны быть расположены так, чтобы легко было определить $J_{y_1 z_1}$.

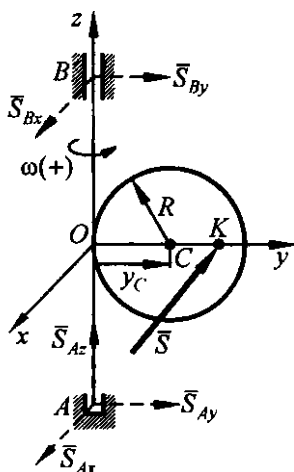


Рис. 20.13

Пример 20.4. Однородный диск массой m и радиусом R закреплен жестко на оси и может вращаться вокруг оси Oz (рис. 20.13). В точке K перпендикулярно плоскости диска приложен импульс $\vec{S}$ ударной силы. В начальный момент диск покоился.

Определить угловую скорость диска после удара, а также ударные реакции; найти центр удара.

Решение. Введем систему координат Oxy . Диск лежит в плоскости Oyz . Ось Oz — главная в точке O , так как она перпендикулярна плоскости симметрии диска Oxy , поэтому центробежные моменты относительно осей Ox , Oz и Oy , Oz равны нулю: $J_{yz} = J_{yx} = 0$. Координаты центра масс $x_C = 0$, $y_C = R$. Обозначим $OK = y$.

Составим уравнения для теоремы об изменении количества движения в проекции на ось Ox и для теоремы об изменении главного момента количества движения относительно осей Oy и Oz

$$m u_{Cx} = -S + S_{Ax} + S_{Bx}; \quad -J_{yz} \omega_z = S_{Bx} OB - S_{Ax} OA; \quad J_z \omega_z = S y,$$

где u_{Cx} — проекция скорости центра масс на ось Ox , $u_{Cx} = -\omega_z y_C$, $y_C = R$; ω_z — угловая скорость диска после удара.

Решив систему уравнений, получим

$$\omega_z = \frac{S y}{J_z} = \frac{4 S y}{5 m R^2}; \quad S_{Bx} = S_{Ax} \frac{OA}{OB} = S_{Ax} \lambda; \quad S_{Ax} = \frac{S}{1 + \lambda} \left(1 - \frac{4 y}{5 R} \right),$$

где $y = OK$; $J_z = m R^2 + J_{Cz} = \frac{5}{4} m R^2$; $\lambda = OA/OB$.

Очевидно, что $S_{Ay} = S_{By} = S_{Az} = 0$.

Для нахождения центра удара положим $S_{Ax} = 0$, тогда $S_{Bx} = 0$ и $1 - \frac{4 y_N}{5 R} = 0$, откуда $y_N = \frac{5}{4} R$.

Таким образом, центр удара (точка N) лежит на оси Oy на расстоянии $ON = (5/4) R$. На рис. 20.14 построены зависимости $\omega_z(y)$, $S_{Ax}(y)$ при $\lambda = 1$, $0 \leq y \leq 2 R$.

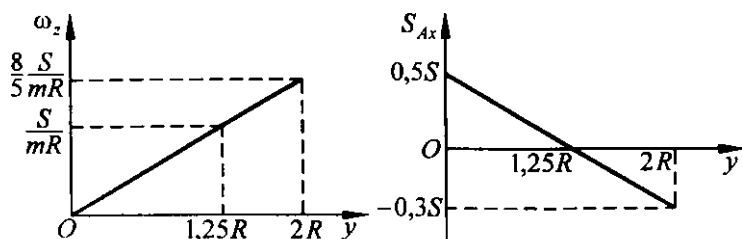


Рис. 20.14

20.7. Удар по твердому телу с неподвижной точкой.

Центр удара. Удар по свободному твердому телу

Приложим импульс $\bar{S}$ ударной силы к твердому телу массой m , имеющему одну закрепленную точку O (рис. 20.15). В неподвижной точке O выберем тройку главных осей инерции тела. Воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения для осей координат и определим изменение угловой скорости:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_x &= \omega_x - \omega_{0x} = \frac{M_x(\bar{S})}{J_x}; \\ \Delta\omega_y &= \omega_y - \omega_{0y} = \frac{M_y(\bar{S})}{J_y}; \\ \Delta\omega_z &= \omega_z - \omega_{0z} = \frac{M_z(\bar{S})}{J_z},\end{aligned}\tag{20.39}$$

где J_x, J_y, J_z — главные моменты инерции для точки O .

Импульс $\bar{S}_O$ ударной реакции вычислим с помощью уравнения, выражающего теорему о движении центра масс тела:

$$m\Delta\bar{v}_C = \bar{S}_O + \bar{S},\tag{20.40}$$

где $\Delta\bar{v}_C = \Delta\bar{\omega} \times \bar{r}_C$; $\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_0$.

При ударе по телу, имеющему неподвижную точку, также можно определить центр удара.

Рассмотрим частный случай. Пусть ось OZ — главная центральная ось инерции тела, а импульс $\bar{S}$ параллелен оси OX (рис. 20.16). Тогда

$$M_X(\bar{S}) = 0; \quad M_Y(\bar{S}) = SZ_N; \quad M_Z(\bar{S}) = -SY_N.$$

Пусть $\bar{S}_O = 0$. Уравнение (20.40) в проекциях на оси координат имеет вид

$$m\Delta\omega_Y Z_C = S_X = S; \quad -m\Delta\omega_X Z_C = S_Y = 0. \quad (20.41)$$

Согласно (20.39),

$$\Delta\omega_X = 0; \quad \Delta\omega_Y = \frac{SZ_N}{J_Y}; \quad \Delta\omega_Z = -\frac{SY_N}{J_Z}, \quad (20.42)$$

где J_Y, J_Z — моменты инерции тела относительно осей OY и OZ .

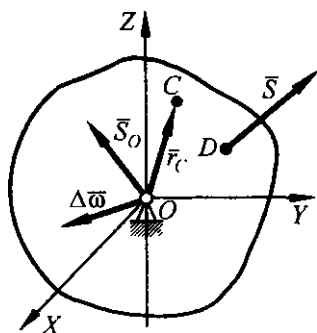


Рис. 20.15

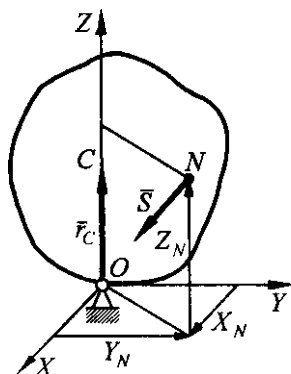


Рис. 20.16

Из первого выражения (20.41) и второго (20.42) находим $Z_N = J_Y / (mZ_C)$, Y_N задаем произвольно и из третьего уравнения

(20.42) определяем $\Delta\omega_Z$. Координата X_N произвольна. Ввиду того, что X_N и Y_N произвольны, точка N — это любая точка плоскости $Z = Z_N$.

Это решение доказывает существование центра удара.

Пусть теперь импульс $\bar{S}$ приложен к телу массой m , имеющему угловую скорость $\bar{\omega}_0$ и скорость центра масс $\bar{v}_C$ (рис. 20.17). Необходимо определить угловую скорость тела $\bar{\omega}$

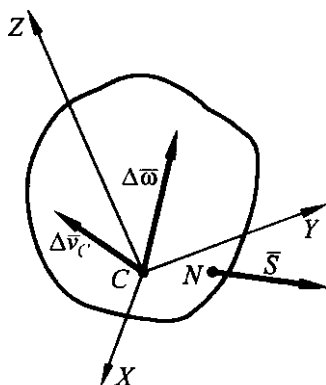


Рис. 20.17

(или $\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_0$) и скорость центра масс тела $\bar{u}_C$ (или $\Delta\bar{v}_C = \bar{u}_C - \bar{v}_C$) после удара.

Согласно теореме о движении центра масс, мгновенное приращение скорости центра масс тела в проекциях на главные центральные оси инерции — оси координат $CXYZ$ равно

$$\Delta v_{CX} = \frac{S_X}{m}; \Delta v_{CY} = \frac{S_Y}{m}; \Delta v_{CZ} = \frac{S_Z}{m}. \quad (20.43)$$

Для определения мгновенного приращения угловой скорости воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения относительно осей координат $CXYZ$:

$$\Delta K_{CX} = J_{CX} \Delta\omega_X = M_{CX}(\bar{S});$$

$$\Delta K_{CY} = J_{CY} \Delta\omega_Y = M_{CY}(\bar{S});$$

$$\Delta K_{CZ} = J_{CZ} \Delta\omega_Z = M_{CZ}(\bar{S}),$$

откуда

$$\Delta\omega_X = \frac{M_{CX}(\bar{S})}{J_{CX}}; \Delta\omega_Y = \frac{M_{CY}(\bar{S})}{J_{CY}}; \Delta\omega_Z = \frac{M_{CZ}(\bar{S})}{J_{CZ}}, \quad (20.44)$$

где J_{CX}, J_{CY}, J_{CZ} — главные центральные моменты инерции тела.

Если тело совершает плоскопараллельное движение параллельно плоскости CXY , то уравнения движения в этом частном случае определяются из (20.43), (20.44):

$$\Delta v_{CX} = \frac{S_X}{m}; \Delta v_{CY} = \frac{S_Y}{m}; \Delta\omega_Z = \frac{M_{CZ}(\bar{S})}{J_{CZ}}.$$

20.8. О связях при ударе. Общее уравнение механики

Классификация связей

Связи при ударе в механической системе отличаются от рассмотренных ранее. В основном их подразделяют на сохраняющиеся и не сохраняющиеся после удара. Кратко это можно представить так:

* Классификация связей при ударе дана в книге П. Аппеля «Теоретическая механика» (М.: ГИФМЛ, 1960. Ч. II).

1) связи, существующие до, во время и после удара (как в большинстве обычных систем);

2) связи, не существующие до, возникающие во время и сохраняющиеся после удара;

3) связи, существующие до, сохраняющиеся во время и не сохраняющиеся после удара;

4) связи, существующие только во время удара, но не сохраняющиеся после него.

Первые два типа связей сохраняющиеся, вторые — несохраняющиеся. Соответственно этим связям возникают различные задачи удара в системах, в которых удар вызван либо приложенными ударными импульсами, либо мгновенным наложением или мгновенным снятием связей.

Общее уравнение механики

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек. Импульсы ударных сил, действующих на точки системы, разделим на активные (заданные) $\bar{S}_k^{(A)}$ и ударные $\bar{S}_k^{(R)}$ импульсы реакций связей. Для k -й точки запишем теорему об изменении количества движения: $m_k(\bar{u}_k - \bar{v}_k) = \bar{S}_k^{(A)} + \bar{S}_k^{(R)}$, $k = 1, 2, \dots, N$, где изменение скорости k -й точки при ударе обозначим $\bar{u}_k - \bar{v}_k = \Delta \bar{v}_k$. Запишем уравнения в виде

$$\bar{S}_k^{(A)} + \bar{S}_k^{(R)} + (-m_k \Delta \bar{v}_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (20.45)$$

Соотношения (20.45) выражают принцип Даламбера для системы материальных точек при ударе. Зададим механической системе возможное перемещение $\delta \bar{r}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Умножим (20.45) скалярно на $\delta \bar{r}_k$ и просуммируем полученные выражения по всем точкам системы, учитывая, что для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(R)} \delta \bar{r}_k = 0. \quad (20.46)$$

Общее уравнение механики при ударе в механической системе имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (\bar{S}_k^{(A)} - m_k \Delta \bar{v}_k) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (20.47)$$

Если отсутствуют активные (заданные) ударные импульсы, то (20.47) принимает вид

$$\sum_{k=1}^N m_k \Delta \bar{v}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Следует обратить внимание на выбор возможных перемещений системы. Если связи, наложенные на систему при ударе не меняются, то возможные перемещения определяют традиционным путем. Если же при ударе возникают новые связи, то выгоднее выбирать возможные перемещения для системы с наложенными идеальными связями, так как при этом выполняется условие (20.46). Можно воспользоваться и принципом освобождения от связей, заменив их действие приложением импульсов ударных реакций к точкам системы. В этом случае возможные перемещения задают без учета дополнительных связей, а импульсы ударных реакций вводят в уравнение (20.47) как заданные (но неизвестные).

Пример 20.5. В механизме, приведенном на рис. 20.18, в зацеплении ступенчатой шестерни 2 с рейкой 3 имеется зазор. До закрытия зазора угловая скорость шестерни 1 равна $\omega_0 < 0$. Массы шестерен и рейки соответственно равны m_1, m_2, m , радиусы шестерен — r_1 и r_2, r_3 , радиус инерции шестерни 2 относительно ее оси вращения равен ρ .

Определить скорость рейки после закрытия зазора. Шестерню 1 считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение. В зацеплении шестерен 1 и 2 нет зазора, поэтому до закрытия зазора в зацеплении В $\omega_0 r_1 = -\omega_{20} r_2$, а скорость рейки равна нулю. После закрытия зазора в зацеплении В (удара) система имеет одну степень свободы и скорость рейки $u_r = \omega_{2z} r_3$. Так как $u_{1r} = -\omega_{1z} r_1 = \omega_{2z} r_2$, то $u_r = -\frac{r_1 r_3}{r_2} \omega_{1z}$. В соответствии с наложенными связями возможные перемещения системы выберем в конце удара (при закрытии зазора):

$$\delta r = r_3 \delta \varphi_2, \quad r_1 \delta \varphi_1 = -r_2 \delta \varphi_2, \quad \delta r = -\frac{r_1 r_3}{r_2} \delta \varphi_1.$$

Общее уравнение механики имеет вид

$$J_{z_1} (\omega_{1z} - \omega_0) \delta \varphi_1 + J_{z_2} (\omega_{2z} - \omega_{20}) \delta \varphi_2 + m u_r \delta r = 0,$$

где $J_{z_1} = m_1 r_1^2 / 2$, $J_{z_2} = m_2 \rho^2$.

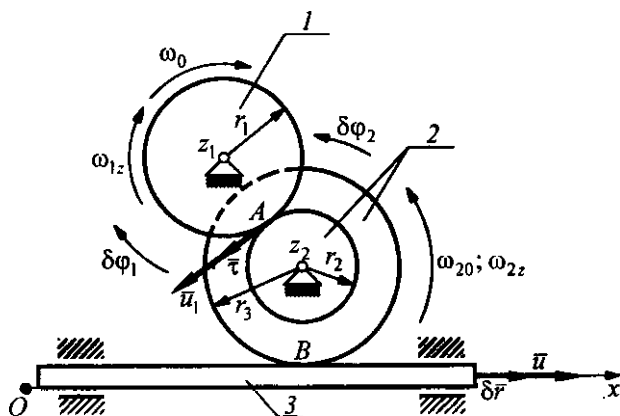


Рис. 20.18

Подставив в уравнение все зависимости, получим

$$u_x = - \frac{(m_1 r_2^2 + 2m_2 \rho^2) \omega_0 r_3 r_1}{r_2 (m_1 r_2^2 + 2m_2 \rho^2 + 2m_3 r_3^2)}.$$

20.9. Уравнение Лагранжа второго рода при ударе в механической системе

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, на которую до и после удара наложены голономные связи $f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда число независимых координат $n = 3N - m$.

Запишем для такой системы уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20.48)$$

где T, q_i, Q_i — соответственно кинетическая энергия системы, обобщенные координаты, обобщенные силы.

Проинтегрировав уравнения (20.48) по времени от 0 до τ , получим

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\tau} - \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right|_0 = \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $S_i = \int_0^\tau Q_i dt$ — импульсы обобщенных ударных сил. Так как

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_{\text{ср}} \text{ есть величина конечная за время удара, то } \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt = \\ = \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_{\text{ср}} \cdot \tau \rightarrow 0 \text{ (обращается в нуль).}$$

Пример 20.6. Рейки 1 и 2 массами m_1 и m_2 соответственно находятся в зацеплении с шестерней C (однородным диском) массой m и радиусом r (рис. 20.19). К шестерне C приложена пара ударных импульсов с моментом L .

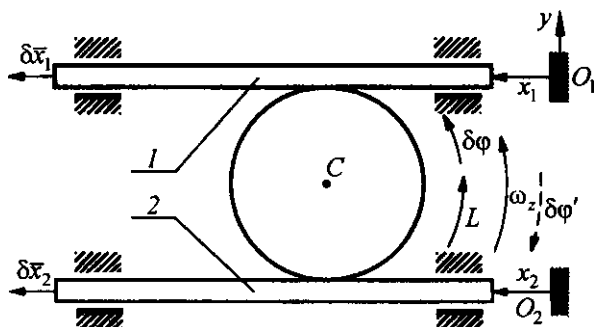


Рис. 20.19

Определить скорость рейки 1 после удара, если до удара система покоилась. Трением пренебречь.

Решение. Применим уравнения Лагранжа второго рода. Обобщенные координаты x_1, x_2 указаны на рис. 20.19, связь в системе при ударе не меняются. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega_z^2}{2} + \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}.$$

Скорость центра масс и угловая скорость шестерни C соответственно равны $v_{Cx} = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/2$, $v_{Cy} = 0$ и $\omega_z = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)/2r$, где $\dot{x}_1 = v_{1x}$, $\dot{x}_2 = v_{2x}$ ($v_{1y} = v_{2y} = 0$).

После подстановки и математических преобразований выражение для кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{\dot{x}_1^2}{16}(3m + 8m_1) + \frac{m}{8}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{\dot{x}_2^2}{16}(3m + 8m_2).$$

Вычислим обобщенные импульсы:

$$S_{x_1} = \frac{L\delta\phi}{\delta x_1} = \frac{L}{2r}; \quad S_{x_2} = -\frac{L\delta\phi'}{\delta x_2} = -\frac{L}{2r}$$

и составим уравнения

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = S_{x_1}, \text{ или } \frac{\dot{x}_1}{8}(3m+8m_1) + \frac{m}{8}\dot{x}_2 = \frac{L}{2r};$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = S_{x_2}, \text{ или } \frac{m}{8}\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2}{8}(3m+8m_2) = -\frac{L}{2r}.$$

Здесь $\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right|_0 = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right|_0 = 0$, так как до удара система покоилась.

Из полученной системы уравнений находим проекцию скорости рейки 1 на ось Ox после удара

$$u_{1x} = \dot{x}_1 = \frac{2L(m+2m_2)}{r[m^2 + 3m(m_1+m_2) + 8m_1m_2]},$$

$$u_{1y} = 0.$$

20.10. Удар двух тел при поступательном движении. Энергетические соотношения

Удар двух тел

Рассмотрим удар двух тел, движущихся поступательно, без учета трения. Тела 1 и 2 массами m_1 и m_2 соответственно имеют до удара скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис 20.20). При отсутствии трения импульсы ударных сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ направлены по общей нормали nn к соударяющимся телам в точке контакта, которую называют

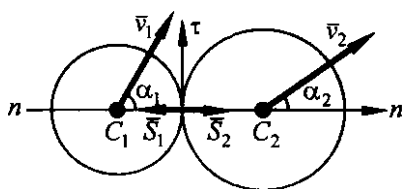


Рис. 20.20

линией удара. Будем рассматривать центральный удар, при котором центры масс тел лежат на линии удара (см. рис. 20.20). Необходимо определить скорости $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ тел после удара и ударные импульсы $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$.

Так как $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$, то

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 0. \quad (20.49)$$

Нормальные составляющие скоростей тел до удара

$$v_{n1} = v_1 \cos \alpha_1; \quad v_{n2} = v_2 \cos \alpha_2.$$

Чтобы удар состоялся, должно выполняться условие $v_{n1} > v_{n2}$.

Согласно теореме об изменении количества движения при ударе,

$$m_1(\bar{u}_1 - \bar{v}_1) = \bar{S}_1; \quad m_2(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) = \bar{S}_2. \quad (20.50)$$

Сложив уравнения (20.50) с учетом (20.49), получим

$$m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2. \quad (20.51)$$

Из (20.51) нельзя определить скорости $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ в общем случае, однако при абсолютно неупругом ударе $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}$, т. е. неизвестной становится общая скорость тел после удара, которую можно вычислить.

Уравнение (20.51) показывает, что выполняется закон сохранения количества движения системы двух тел.

Для решения поставленной выше задачи необходимо знать коэффициент восстановления. Получим формулу для его определения.

Запишем уравнения для фаз деформирования ($S^{(1)}$) и восстановления ($S^{(2)}$) тел 1 и 2 соответственно:

$$m_1(\bar{u}' - \bar{v}_1) = \bar{S}_1^{(1)}; \quad m_1(\bar{u}_1 - \bar{u}') = \bar{S}_1^{(2)}$$

и

$$m_2(\bar{u} - \bar{v}_2) = \bar{S}_2^{(1)}; \quad m_2(\bar{u}_2 - \bar{u}) = \bar{S}_2^{(2)},$$

где $\bar{u}', \bar{u}$ — скорости тел 1 и 2 в конце фазы деформирования соответственно.

В проекции на ось τ имеем

$$m_1(u'_\tau - v_{1\tau}) = 0; \quad m_1(u_{1\tau} - u'_\tau) = 0 \quad —$$

для тела 1 и

$$m_2(u_\tau - v_{2\tau}) = 0; \quad m_2(u_{2\tau} - u_\tau) = 0 \quad —$$

для тела 2.

Отсюда

$$\begin{aligned} u_{1\tau} &= u'_\tau = v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha_1; \\ u_{2\tau} &= u_\tau = v_{2\tau} = v_2 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

В проекции на ось n получаем

$$m_1(u_{1n} - u'_n) = -S_1^{(2)}; \quad m_1(u'_n - v_{1n}) = -S_1^{(1)} \quad (20.52)$$

для тела 1 и

$$m_2(u_{2n} - u_n) = S_2^{(2)}; \quad m_2(u_n - v_{2n}) = S_2^{(1)} \quad (20.53)$$

для тела 2.

Из уравнений (20.52) и (20.53) находим

$$K = \frac{S_1^{(2)}}{S_1^{(1)}} = \frac{u_{1n} - u'_n}{u'_n - v_{1n}}; \quad K = \frac{S_2^{(2)}}{S_2^{(1)}} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_n - v_{2n}}. \quad (20.54)$$

Условием окончания первой фазы — фазы деформирования является $u'_n = u_n$. Тогда из (20.54) получаем

$$K = -\frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}. \quad (20.55)$$

Теперь определим $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ и $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$ при условии, что задан коэффициент восстановления K . В проекции на ось n уравнение (20.51) имеет вид

$$m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}. \quad (20.56)$$

Из (20.55) и (20.56) находим

$$u_{1n} = \Delta_1 / \Delta; \quad u_{2n} = \Delta_2 / \Delta.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 + m_1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} K(v_{2n} - v_{1n}) & -1 \\ m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} & m_2 \end{vmatrix} = v_{1n}(m_1 - Km_2) + m_2 v_{2n}(1 + K);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & K(v_{2n} - v_{1n}) \\ m_1 & m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \end{vmatrix} = m_1 v_{1n}(1 + K) + v_{2n}(m_2 - Km_1).$$

Окончательно имеем

$$u_{1n} = \frac{v_{1n}(m_1 - Km_2) + m_2 v_{2n}(1 + K)}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2n} = \frac{m_1 v_{1n}(1 + K) + v_{2n}(m_2 - Km_1)}{m_1 + m_2}. \quad (20.57)$$

В проекции на ось n первое уравнение (20.50) имеет вид

$$m_1(u_{1n} - v_{1n}) = -S_1,$$

откуда с учетом (20.57) находим

$$S_1 = (1 + K) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1n} - v_{2n}); \quad S_2 = S_1.$$

Пример 20.7. Определить скорости центров масс $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ шаров, имеющих одинаковую массу, после абсолютно упругого соударения при скоростях центров масс $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ (рис. 20.21).

Решение. По условию задачи $v_{1n} = v_1, v_{2n} = 0, v_{1\tau} = 0, v_{2\tau} = v_2, m_1 = m_2 = m$ и $K = 1$. Тогда

$$u_{1n} = 0, \quad u_{2n} = v_{1n} = v_1; \quad u_{1\tau} = 0,$$

$$u_{2\tau} = v_2.$$

Окончательно имеем

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

т. е. первый шар останавливается, а второй получает скорость центра масс $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

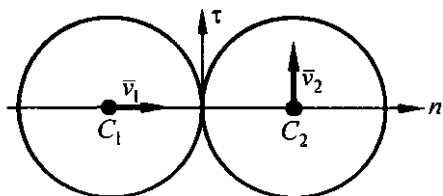


Рис. 20.21

Энергетические соотношения

Определим изменение кинетической энергии при ударе двух тел, движущихся поступательно (рис. 20.22). Удар считаем прямым центральным, трение не учитываем.

В проекции на ось n , согласно (20.51), имеем

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Тогда с учетом (20.55)

$$K = - \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

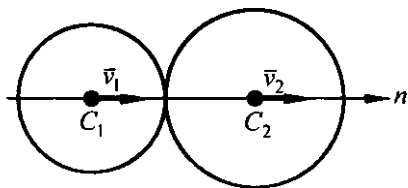


Рис. 20.22

Потерянная кинетическая энергия системы $T_n = T_0 - T$, где

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы после удара

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (20.58)$$

Здесь, согласно (20.57),

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2 K)v_1 + m_2(1 + K)v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u_2 = \frac{m_1(1 + K)v_1 + (m_2 - m_1 K)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (20.59)$$

После подстановки (20.59) в (20.58) и преобразований получаем

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1 - K^2}{2} (v_1 - v_2)^2. \quad (20.60)$$

Следовательно,

$$T_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1 - K^2}{2} (v_1 - v_2)^2. \quad (20.61)$$

Кинетическая энергия тел, соответствующая потеряннм скоростям,

$$T_{nc} = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)^2. \quad (20.62)$$

Используя (20.59), определим разность скоростей тел до и после удара:

$$v_1 - u_1 = \frac{m_2(1 + K)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2};$$

$$v_2 - u_2 = \frac{m_1(1 + K)(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}. \quad (20.63)$$

Подставив (20.63) в (20.62), находим

$$T_{nc} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + K)^2 (v_1 - v_2)^2. \quad (20.64)$$

Сравнивая (20.61) и (20.64), получаем

$$T_n = \frac{1 - K}{1 + K} T_{nc}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для данного соударения справедлива теорема Карно.

Коэффициенты использования кинетической энергии при ударе

Ковка металла. При ковке металла полезной является та доля кинетической энергии молота, которая тратится на работу пластического деформирования металла поковки. Будем считать, что работа пластического деформирования равна потере кинетической энергии T_n молота, а полная кинетическая энергия молота $T_0 = m_1 v_1^2 / 2$. Если скорость наковальни $v_2 = 0$, то

$$T_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1 - K^2}{2} v_1^2.$$

КПД процессаковки равен

$$\eta = \frac{T_n}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - K^2).$$

Пусть $m_1 / m_2 = x$, тогда

$$\eta = \frac{1}{1 + x} (1 - K^2), \quad (20.65)$$

где m_1, m_2 — соответственно массы молота и наковальни с поковкой.

На рис. 20.23 построен график зависимости (20.65). Видно, что $\eta_{\max} = 1 - K^2$ при $x = 0$ (т. е. реально при x , близком к нулю). Следовательно, чтобы повысить эффективностьковки, необходимо уменьшить массу молота.

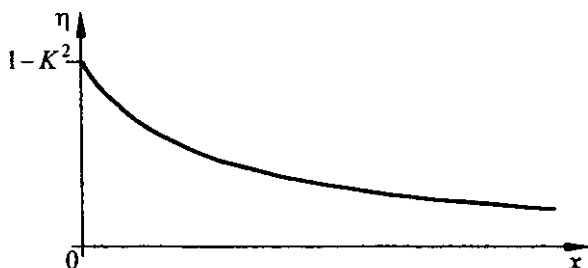


Рис. 20.23

Забивка свай. В этом случае полезной будем считать энергию свай после удара $T_2 = m_2 u_2^2 / 2$. Исходная энергия молота $T_0 = m_1 v_1^2 / 2$.

КПД процесса забивки свай

$$\eta_1 = T_2 / T_0 .$$

При условии, что скорость свай до удара была равна нулю ($v_2 = 0$), из (20.59) определим скорость свай после удара

$$u_2 = \frac{m_1 (1 + K) v_1}{m_1 + m_2} .$$

Тогда для КПД имеем

$$\eta_1 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 + K)^2 . \quad (20.66)$$

Обозначив $m_1 / m_2 = x$, из (20.66) находим

$$\eta_1 = \frac{x}{(1 + x)^2} (1 + K)^2 . \quad (20.67)$$

Если принять $K = \text{const}$, то $\eta_1 = \eta_1(x)$. Согласно (20.67), $\eta_1 = 0$ при $x = 0$ и $\eta_1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, поэтому имеется максимум. Определим его:

$$\frac{d\eta_1}{dx} = (1 + K)^2 \frac{(1 + x)^2 - 2x(1 + x)}{(1 + x)^4} = 0 .$$

Максимум достигается при $x = 1$. Зависимость $\eta_1 = \eta_1(x)$ представлена на рис. 20.24, а.

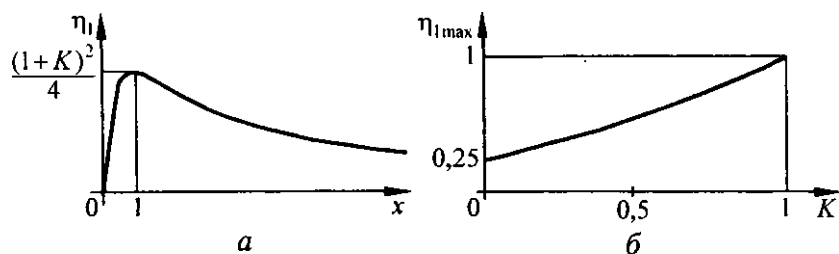


Рис. 20.24

Из (20.67) при $x=1$ имеем

$$\eta_{1\max} = \frac{(1+K)^2}{4}, \quad (20.68)$$

где $0 \leq K \leq 1$. Зависимость (20.68) изображена на рис. 20.24, б.

20.11. Удар материальной точки о неподвижную шероховатую поверхность

Рассмотрим косой упругий удар материальной точки массой m о неподвижную поверхность с учетом сухого трения. В этом случае импульс ударной реакции поверхности

$$\bar{S} = \bar{S}_n + \bar{S}_\tau,$$

где $\bar{S}_n, \bar{S}_\tau$ — нормальная и касательная составляющие импульса.

Коэффициент восстановления

$$K = \frac{S_{n2}}{S_{n1}}, \quad (20.69)$$

где S_{n1}, S_{n2} — нормальная составляющая импульса ударной реакции в фазах деформирования и восстановления соответственно, причем

$$S_n = S_{n1} + S_{n2}. \quad (20.70)$$

Составляющая импульса, учитывающая сухое трение

$$S_\tau = -f S_n \operatorname{sign} v_\tau, \quad (20.71)$$

где f — коэффициент трения скольжения, $\operatorname{sign} v_\tau$ — функция, учитывающая знак касательной составляющей скорости v_τ точки.

Скорости точки до и после удара соответственно (рис. 20.25)

$$\bar{v} = \bar{v}_n + \bar{v}_\tau; \quad \bar{u} = \bar{u}_n + \bar{u}_\tau.$$

Рассмотрим различные возможные движения точки при ударе и определим условия, при которых эти движения реализуются.

1. Материальная точка скользит в течение всего времени удара τ . Фаза

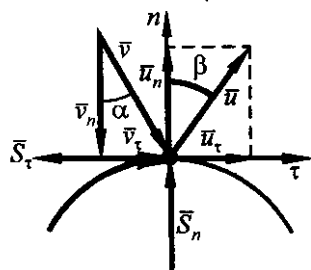


Рис. 20.25

деформирования начинается при $t = 0$ и заканчивается при $t = \tau_1$. Составляющие скорости точки в начале удара v_n, v_τ , в конце фазы деформирования v_n^*, v_τ^* . Фаза восстановления начинается при $t = \tau_1$ и заканчивается при $t = \tau$. Составляющие скорости точки в начале фазы восстановления v_n^*, v_τ^* , в конце удара u_n, u_τ .

Согласно теореме об изменении количества движения точки при ударе,

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{S} = \bar{S}_n + \bar{S}_\tau. \quad (20.72)$$

В проекциях на оси n и τ уравнение (20.72) для фазы деформирования имеет вид

$$m(v_n^* - v_n) = S_{n1}; \quad m(v_\tau^* - v_\tau) = S_{\tau 1}. \quad (20.73)$$

В конце фазы деформирования $v_n^* = 0$. Из (20.71) получаем

$$S_{\tau 1} = -f S_{n1}, \quad (20.74)$$

где $S_{\tau 1} < 0$, $f > 0$, $S_{n1} > 0$ (см. рис. 20.25). Кроме того, $v_n = -v \cos \alpha$, $v_\tau = v \sin \alpha > 0$, $\text{sign } v_\tau = 1$.

Из (20.73) имеем

$$S_{n1} = -mv_n = mv \cos \alpha. \quad (20.75)$$

Из (20.74) и (20.75) получаем

$$S_{\tau 1} = -f mv \cos \alpha < 0. \quad (20.76)$$

Из (20.73) и (20.76) находим

$$v_\tau^* = v_\tau + \frac{S_{\tau 1}}{m} = v(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (20.77)$$

Для фазы восстановления соответственно имеем

$$m(u_n - v_n^*) = S_{n2}; \quad m(u_\tau - v_\tau^*) = S_{\tau 2}, \quad (20.78)$$

$$S_{\tau 2} = -f S_{n2}, \quad (20.79)$$

где $S_{n2} > 0$, $S_{\tau 2} < 0$.

Согласно (20.69),

$$S_{n2} = KS_{n1}. \quad (20.80)$$

Из (20.75) и (20.80) определяем

$$S_{n2} = Kmv \cos \alpha,$$

а из (20.70) получаем полную нормальную составляющую импульса ударной реакции

$$S_n = mv \cos \alpha (1 + K). \quad (20.81)$$

Подставив S_{n2} в (20.79), находим

$$S_{t2} = -f K m v \cos \alpha < 0. \quad (20.82)$$

Касательная составляющая импульса ударной реакции $S_t = S_{t1} + S_{t2}$. С учетом (20.76) и (20.82) получаем

$$S_t = -mv \cos \alpha (1 + K) \cdot f. \quad (20.83)$$

Согласно (20.75) и (20.78), нормальная составляющая скорости точки после удара

$$u_n = \frac{S_{n2}}{m} = \frac{K S_{n1}}{m} = -K v_n, \quad (20.84)$$

т. е. для материальной точки при наличии трения для вычисления коэффициента восстановления можно использовать кинематическую модель Ньютона. Из (20.84) получаем

$$u_n = K v \cos \alpha. \quad (20.85)$$

Согласно (20.78), касательная составляющая скорости после удара

$$u_t = v_t^* + \frac{S_{t2}}{m} = v [\sin \alpha - f \cos \alpha (1 + K)]. \quad (20.86)$$

Теперь определим условия, при которых возможно скольжение точки в течение всего времени удара, т. е. когда $v_t^* > 0$, $u_t > 0$. Из (20.77) и (20.86) имеем $v(\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0$ и $v[\sin \alpha - f \cos \alpha (1 + K)] > 0$, откуда получаем $\operatorname{tg} \alpha > f$ и $\operatorname{tg} \alpha > f(1 + K)$. Таким образом, общее условие скольжения при ударе имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha > f(1 + K).$$

Модули скорости точки после удара и полного импульса ударной силы соответственно равны

$$u = \sqrt{u_t^2 + u_n^2} = v \sqrt{[\sin \alpha - f(1 + K) \cos \alpha]^2 + (K \cos \alpha)^2};$$

$$S = \sqrt{S_n^2 + S_t^2} = mv(1 + K) \cos \alpha \sqrt{1 + f^2}.$$

Если в этих формулах положить $f = 0$, то

$$u = v\sqrt{\sin^2 \alpha + K^2 \cos^2 \alpha}; \quad S = mv(1 + K) \cos \alpha,$$

т. е. получаем решение для случая удара материальной точки о неподвижную поверхность без учета трения (см. § 20.4).

2. *Скольжение материальной точки заканчивается в фазе деформирования.* В этом случае фаза деформирования разделяется на два этапа: $0 - \tau'$ — скольжение точки, $\tau' - \tau_1$ — движение точки без скольжения (движение по нормали). В момент времени $t = \tau'$ касательная составляющая скорости точки станет равной нулю (т. е. $v'_\tau = 0$) и скольжение точки прекратится.

Первый этап фазы деформирования начинается при $t = 0$ (v_n, v_τ) и заканчивается при $t = \tau'$ ($v'_n, v'_\tau = 0$). Необходимые уравнения имеют вид

$$m(v'_n - v_n) = S_{n1}^{(I)}; \quad m(v'_\tau - v_\tau) = S_{\tau 1}^{(I)},$$

где $S_{n1}^{(I)}, S_{\tau 1}^{(I)}$ — нормальная и касательная составляющие импульса ударной реакции за время от 0 до τ' , $S_{\tau 1}^{(I)} = -f S_{n1}^{(I)}$.

Откуда

$$\begin{aligned} S_{\tau 1}^{(I)} &= -mv_\tau = -mv \sin \alpha < 0; \\ S_{n1}^{(I)} &= -\frac{S_{\tau 1}^{(I)}}{f} = \frac{mv \sin \alpha}{f} > 0; \\ v'_n &= \frac{S_{n1}^{(I)}}{m} + v_n = v \left(\frac{\sin \alpha}{f} - \cos \alpha \right). \end{aligned} \quad (20.87)$$

Второй этап фазы деформирования начинается при $t = \tau'$ (v'_n, v'_τ) и заканчивается при $t = \tau_1$ ($v''_n = 0, v''_\tau = 0$).

Уравнения удара будут следующими:

$$m(v''_n - v'_n) = S_{n1}^{(II)}; \quad m(v''_\tau - v'_\tau) = S_{\tau 1}^{(II)},$$

где $S_{n1}^{(II)}, S_{\tau 1}^{(II)}$ — нормальная и касательная составляющие импульса ударной реакции на втором этапе фазы деформирования. Из уравнений следует:

$$S_{\tau 1}^{(II)} = 0; \quad S_{n1}^{(II)} = -mv'_n = mv \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{f} \right).$$

Составляющие импульса ударной реакции в фазе деформирования

$$S_{\tau 1} = S_{\tau 1}^{(I)} + S_{\tau 1}^{(II)} = -mv \sin \alpha; \quad S_{n1} = S_{n1}^{(I)} + S_{n1}^{(II)} = mv \cos \alpha.$$

Для фазы восстановления, которая начинается при $t = \tau_1$ и заканчивается при $t = \tau$, составляющие скорости будут соответственно $v_n^* = 0, v_\tau^* = 0$ и $u_\tau = 0, u_n$. Уравнения удара имеют вид

$$m(u_n - v_n^*) = S_{n2}; \quad m(u_\tau - v_\tau^*) = S_{\tau 2} \quad \text{и} \quad S_{n2} = KS_{n1}.$$

Отсюда получаем

$$S_{\tau 2} = 0; \quad S_{n2} = mu_n = KS_{n1}.$$

Тогда

$$u_n = \frac{KS_{n1}}{m} = Kv \cos \alpha = -Kv_n;$$

$$S_n = S_{n1} + S_{n2} = (1 + K)mv \cos \alpha;$$

$$S_\tau = S_{\tau 1} + S_{\tau 2} = -mv \sin \alpha.$$

Чтобы скольжение точки при ударе закончилось в фазе деформирования, необходимо выполнение кинематического условия

$$v_n' < 0. \quad (20.88)$$

Из (20.87) и (20.88) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha < f. \quad (20.89)$$

При отсутствии скольжения в конце фазы деформирования и в конце удара должны быть соблюдены динамические условия отсутствия скольжения: $|S_{\tau 1}| < f S_{n1}, |S_\tau| < f S_n$. Легко проверить, что эти условия подтверждают требование (20.89).

3. *Скольжение материальной точки заканчивается в фазе восстановления.* Получим сначала решение для фазы деформирования ($t = 0 \dots \tau_1$). Скольжение в этой фазе присутствует, т. е. $v_\tau > 0$ и $v_\tau^* > 0$, а нормальные составляющие скорости точки будут v_n и $v_n^* = 0$. Необходимые уравнения имеют вид

$$m(v_n^* - v_n) = S_{n1}; \quad m(v_\tau^* - v_\tau) = S_{\tau 1}; \quad S_{\tau 1} = -f S_{n1}.$$

Отсюда

$$S_{n1} = -mv_n = mv \cos \alpha; \quad S_{\tau 1} = -f mv \cos \alpha;$$

$$v_{\tau}^* = \frac{S_{\tau 1}}{m} + v_{\tau} = v(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Фазу восстановления разобьем на два этапа. На первом этапе ($t = \tau_1 \dots \tau''$) составляющие скорости будут соответственно $v_n^* = 0$, $v_{\tau}^* > 0$ и v_n'' , $v_{\tau}'' = 0$, а уравнения удара имеют вид

$$m(v_n'' - v_n^*) = S_{n2}^{(I)}; \quad m(v_{\tau}'' - v_{\tau}^*) = S_{\tau 2}^{(I)} \quad \text{и} \quad S_{\tau 2}^{(I)} = -f S_{n2}^{(I)}.$$

Отсюда получаем

$$S_{\tau 2}^{(I)} = -mv(\sin \alpha - f \cos \alpha); \quad S_{n2}^{(I)} = -\frac{S_{\tau 2}^{(I)}}{f} = mv \left(\frac{\sin \alpha}{f} - \cos \alpha \right);$$

$$v_n'' = \frac{S_{n2}^{(I)}}{m} + v_n^* = v \left(\frac{\sin \alpha}{f} - \cos \alpha \right),$$

где $S_{\tau 2}^{(I)}$, $S_{n2}^{(I)}$ — касательная и нормальная составляющие импульса ударной реакции; $v_n'' \geq 0$.

На втором этапе фазы восстановления ($t = \tau'' \dots \tau$) составляющие скорости точки будут v_n'' , $v_{\tau}'' = 0$ и u_n , $u_{\tau} = 0$, а уравнения примут вид

$$m(u_n - v_n'') = S_{n2}^{(II)}; \quad m(u_{\tau} - v_{\tau}'') = S_{\tau 2}^{(II)};$$

$$S_{n2} = S_{n2}^{(I)} + S_{n2}^{(II)} = KS_{n1}.$$

Отсюда

$$S_{\tau 2}^{(II)} = 0;$$

$$S_{n2}^{(II)} = KS_{n1} - S_{n2}^{(I)} = mv \left(K \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{f} + \cos \alpha \right) =$$

$$= mv \left[(1 + K) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{f} \right];$$

$$u_n = \frac{S_{n2}^{(II)}}{m} + v_n'' = Kv \cos \alpha = -Kv_n.$$

Для касательной и нормальной составляющих импульса ударной реакции имеем

$$S_{\tau} = S_{\tau 1} + S_{\tau 2}^{(I)} + S_{\tau 2}^{(II)} = -mv \sin \alpha,$$

$$S_n = (1 + K)S_{n1} = (1 + K)mv \cos \alpha.$$

Для реализации данного случая удара необходимо выполнение условия $v_n'' \geq 0$, или $v \left(\frac{\sin \alpha}{f} - \cos \alpha \right) \geq 0$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha \geq f. \quad (20.90)$$

При этом также должно выполняться динамическое условие $|S_\tau| \leq f S_n$, или

$$mv \sin \alpha \leq f(1 + K)mv \cos \alpha,$$

откуда следует

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f(1 + K). \quad (20.91)$$

Объединив неравенства (20.90) и (20.91), получим

$$f \leq \operatorname{tg} \alpha \leq f(1 + K),$$

где $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

На рис. 20.26 построены зависимости $\alpha = \operatorname{arctg}[f(1 + K)]$ при $K = 0,5$ и $K = 0$.

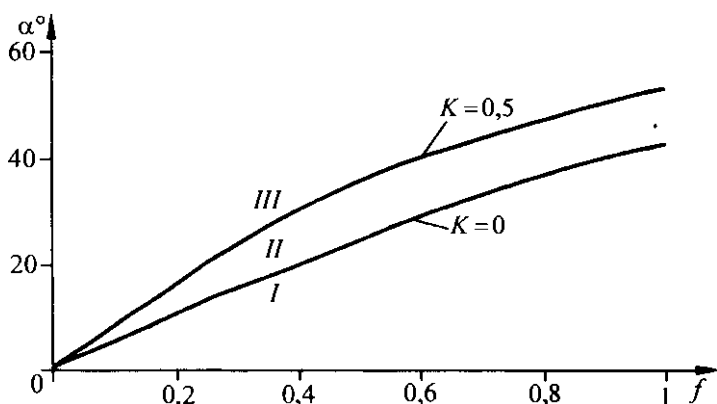


Рис. 20.26

При $K = 0$ кривая $\alpha(f)$ является общей нижней границей для всех случаев удара. Кривые разделяют области I–III, в которых точка движется при ударе различным образом. При $f = 0,5$ зона I определяется углом $\alpha = 26,6^\circ$. При $\alpha < 26,6^\circ$ скольжение точки заканчивается в фазе деформирования. При $f = 0,5$ и $K = 0,5$ зона

II определяется углом $\alpha = 36,9^\circ$. При $26,6^\circ \leq \alpha \leq 36,9^\circ$ при ударе материальной точки о шероховатую поверхность скольжение точки заканчивается в фазе восстановления. Зона III определяется изменением α в пределах $36,9^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. В этом диапазоне изменения угла падения материальной точки на шероховатую поверхность скольжение точки при ударе не прекращается до конца удара. При построении кривых коэффициент трения скольжения изменялся в пределах $0 \leq f \leq 1$. Однако этот диапазон не часто практически реализуется. При больших значениях f эта модель может отличаться от результатов эксперимента.

Анализ полученных решений в случае прекращения скольжения в фазах деформирования и восстановления показывает, что окончательные значения скоростей и импульсов у них одинаковые, различия наблюдаются в промежуточных значениях.

Для этих случаев имеем при $\operatorname{tg} \alpha \leq f(1 + K)$

$$u = Kv \cos \alpha ;$$

$$S = mv \sqrt{\cos^2 \alpha (1 + K)^2 + \sin^2 \alpha} .$$

На рис. 20.27 построены зависимости безразмерных скорости точки после удара $\tilde{u} = u/v$ и полного импульса ударной реакции $\tilde{S} = S/(mv)$ в зависимости от угла падения α ($K = 0,5$; $f = 0,5$).

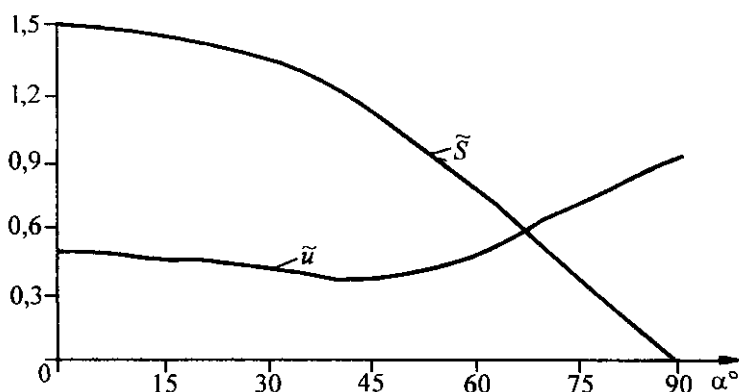


Рис. 20.27

Так как $\operatorname{tg} \beta = u_{\tau} / u_{n}$, то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{K} - f \left(1 + \frac{1}{K} \right) \text{ при } \operatorname{tg} \alpha > f(1 + K);$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0 \text{ при } \operatorname{tg} \alpha \leq f(1 + K).$$

Зависимость $\beta(\alpha)$ приведена на рис. 20.28 ($K = 0,5$; $f = 0,5$).

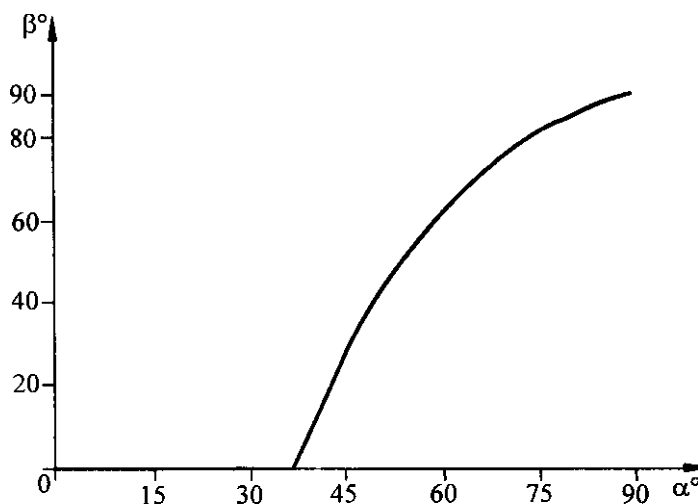


Рис. 20.28

20.12. Удар двух шаров. Модель Герца

Покажем, как при решении задачи об ударе двух шаров можно использовать зависимость силы упругого сжатия шаров от величины местного упругого смятия, полученную Герцем при решении задачи о статическом сжатии шаров. Предположим, что такая же зависимость существует и для ударной силы.

При ударе шары, массы которых m_1 и m_2 , движутся поступательно. Уравнения движения шаров будут иметь вид (рис. 20.29)

$$m_1 \ddot{x}_1 = -P; \quad m_2 \ddot{x}_2 = P. \quad (20.92)$$

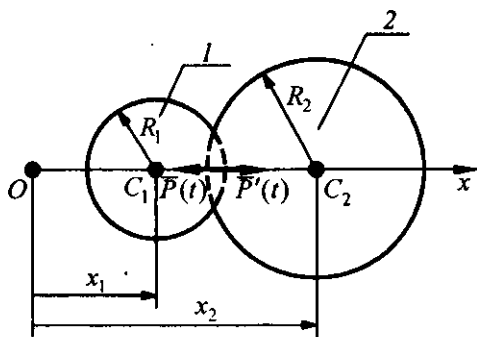


Рис. 20.29

Расстояние между центрами масс шаров $l = x_2 - x_1$. До удара это расстояние было $l_0 = R_1 + R_2$.

В процессе удара $l = l_0 - \alpha = R_1 + R_2 - \alpha$, откуда

$$\alpha = l_0 - l = l_0 + x_1 - x_2.$$

Здесь α — местное смятие шаров, или относительное смещение центров масс шаров при их деформировании в процессе удара.

Из уравнений (20.92) получаем

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -P \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = -P \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}. \quad (20.93)$$

При упругом деформировании шаров Герцем была решена задача об их сжатии и получена зависимость силы в контакте тел от местного смятия:

$$P = K_0 \alpha^{3/2}, \quad (20.94)$$

где $K_0 = \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$; μ_1, μ_2, E_1, E_2 — коэффициенты Пуассона и модули упругости шаров соответственно.

Зависимость (20.94) получена в предположении, что в зоне контакта шары деформируются как упругие полупространства. Радиус площадки контакта r_k много меньше R_1 и R_2 , поэтому это допущение приемлемо, а решение дает хорошее согласование с экспериментом.

Экспериментально показано, что зависимость (20.94) можно также использовать при ударе при условии, что время пробега поперечной волны по радиусу площадки контакта много меньше времени нарастания силы. Из (20.93) получаем

$$m\ddot{\alpha} = -K_0\alpha^{3/2}, \quad (20.95)$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Начальные условия задачи имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = v_0, \quad (20.96)$$

где $\dot{\alpha} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = v_1 - v_2$.

Запишем уравнение (20.95) в виде

$$m \frac{\dot{\alpha} d\dot{\alpha}}{d\alpha} = -K_0\alpha^{3/2}$$

и проинтегрируем с учетом начальных условий (20.96). После интегрирования получим

$$\frac{m(\dot{\alpha}^2 - v_0^2)}{2} = -\frac{2}{5} K_0 \alpha^{5/2}.$$

Отсюда можно определить $\alpha_{\max}$ при $\dot{\alpha} = 0$, т. е. в момент наибольшего сближения шаров:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\frac{2}{5} K_0 \alpha_{\max}^{5/2}, \quad \text{или} \quad \alpha_{\max} = \left(\frac{5}{4} \frac{mv_0^2}{K_0} \right)^{2/5}.$$

При этом

$$P_{\max} = K_0 \alpha_{\max}^{3/2} = K_0 \left(\frac{5mv_0^2}{4K_0} \right)^{3/5}. \quad (20.97)$$

Определим время нарастания контактной силы:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5} \frac{K_0}{m} \alpha^{5/2}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{4}{5} \frac{K_0}{mv_0^2} \alpha^{5/2}} = \\ &= v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \right)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (20.98)$$

После интегрирования имеем

$$t = \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^{\alpha/\alpha_{\max}} \frac{d(\alpha/\alpha_{\max})}{\sqrt{1 - (\alpha/\alpha_{\max})^{5/2}}} . \quad (20.99)$$

Пусть $\tilde{\alpha} = \alpha/\alpha_{\max}$ — безразмерное смятие шаров, тогда выражение (20.99) примет вид

$$t = \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^{\tilde{\alpha}} \frac{d\tilde{\alpha}}{\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^{5/2}}} = \frac{\alpha_{\max}}{v_0} I_{\alpha} ,$$

где I_{α} — интеграл, рассчитываемый численно, так как его нельзя выразить через элементарные функции.

Время удара

$$\tau = 2I_{\alpha_{\max}}/v_0 .$$

Вычислив I

$$I = \int_0^1 \frac{d\tilde{\alpha}}{\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^{5/2}}} = 1,4716 ,$$

находим

$$\tau = 2,9432\alpha_{\max}/v_0 .$$

Из выражений (20.94) и (20.97) получаем

$$\frac{P}{P_{\max}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \right)^{3/2} , \text{ или } \tilde{P} = \tilde{\alpha}^{3/2} , \quad (20.100)$$

где $\tilde{P}, \tilde{\alpha}$ — безразмерные ударная сила и смятие соответственно.

Введем безразмерное время $\tilde{t} = t/\tau$ и преобразуем уравнение (20.98) к безразмерному виду

$$\frac{d(\alpha/\alpha_{\max})}{\frac{2I}{P_{\max}} d\left(\frac{rv_0}{\alpha_{\max}}\right)} = \frac{d\tilde{\alpha}}{2I\tilde{d}\tilde{t}} = \sqrt{1 - \tilde{\alpha}^{5/2}} .$$

Отсюда с учетом (20.100) получаем

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{t}} = 3I\tilde{P}^{1/3} \sqrt{1 - \tilde{P}^{5/3}} . \quad (20.101)$$

Уравнение (20.101) интегрируется численно. На рис. 20.30 представлена рассчитанная зависимость безразмерной ударной силы от безразмерного времени.

Аналогично можно решить задачу об ударе поступательно движущихся тел, имеющих другие геометрические формы. В формуле (20.94) коэффициент K_0 в общем случае имеет вид

$$K_0 = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{A+B}}, \text{ где функция } q = q(A/B) \text{ заранее расчи-}$$

тана; $\delta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{\pi E_i}$ ($i = 1, 2$). Напри-

мер, при ударе сферы радиусом R_1 по образующей прямого кругового цилиндра с радиусом R_2 имеем

$$A = \frac{1}{2R_1}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

В случае соударения двух прямых круговых цилиндров с радиусами R_1, R_2 , при котором оси цилиндров перпендикулярны между собой,

$$A = \frac{1}{2R_1}, \quad B = \frac{1}{2R_2}.$$

В модели Ньютона скорости шаров при ударе изменяются скачкообразно. Уравнения движения шаров после интегрирования имеют вид

$$m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{10}) = -S(t); \quad m_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_{20}) = S(t), \quad (20.102)$$

где $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ — начальные скорости шаров; $S(t) = \int_0^t P(t) dt$ — им-

пульс ударной силы в момент времени t . Если положить $t = \tau$, то в уравнениях будут записаны скорости шаров после удара и полный импульс ударной силы.

Интегрируя (20.95), получаем

$$m[\dot{\alpha}(\tau) - \dot{\alpha}(0)] = -S, \quad (20.103)$$

где $S = \int_0^\tau P(t) dt$.

Введем, согласно (20.55), коэффициент восстановления

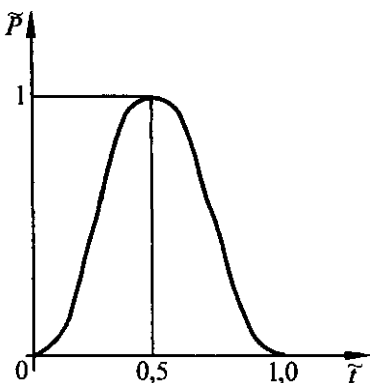


Рис. 20.30

$$K = -\frac{\dot{\alpha}(\tau)}{\dot{\alpha}(0)} = -\frac{\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)}{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)} = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}, \quad (20.104)$$

где $\dot{x}_1(\tau) = u_1$, $\dot{x}_2(\tau) = u_2$, $\dot{x}_1(0) = v_1$, $\dot{x}_2(0) = v_2$ — скорости шаров после и до удара соответственно.

С учетом (20.104) из (20.103) находим

$$S = (1 + K)mv_0 = (1 + K)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2),$$

где $v_0 = v_1 - v_2$.

Из (20.102) определяем

$$u_1 = v_1 - \frac{(1 + K)mv_0}{m_1} = \frac{(m_1 - Km_2)v_1 + (1 + K)m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u_2 = v_2 + \frac{(1 + K)mv_0}{m_2} = \frac{(1 + K)m_1 v_1 + (m_2 - Km_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Решения для S , u_1 , u_2 совпадают с выражениями (20.59), полученными с использованием модели Ньютона.

В качестве примера рассмотрим соударение двух одинаковых стальных шаров ($R_1 = R_2 = 1$ см, $m_1 = m_2 = 32,7$ г) при $v_0 = 5,13$ см/с. После расчета по приведенным выше формулам получаем $\tau = 110$ мкс, $\alpha_{\max} = 1,91 \cdot 10^{-3}$ мм, т. е. $\tau \rightarrow 0$, $\alpha_{\max} \rightarrow 0$.

Замечание. Энергия удара расходуется на энергию местного деформирования и энергию колебаний соударяющихся тел. В простейшем случае соударения двух одинаковых шаров отношение энергий (по Рэлею) равно $T/T_0 = 0,02 v_0/c$, где T — максимальная кинетическая энергия колебаний шаров; $T_0 = mv_0^2/2$; m — масса шара; v_0 — скорость соударения; $c \sim \sqrt{E/\rho}$ (для стали $c \approx 5000$ м/с). Упругий удар будет в том случае, когда $v_0/c \approx 10^{-2} \dots 10^{-3}$, при этом отношение $T/T_0 \sim 10^{-4} \dots 10^{-5}$.

Таким образом, анализ соударения тел с применением модели Герца показывает справедливость модели Ньютона.

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

21.1. Основные понятия и допущения

В некоторых задачах механики предпочтительнее рассматривать не движение системы материальных точек, а движение некоторого объекта, ограниченного замкнутой поверхностью, через которую движется поток материальных частиц. К такому типу относятся задачи, связанные с движением жидкостей, расчетом двигательных установок различных аппаратов (в частности, ракетных двигателей) а также задачи, связанные с движением ракет, при котором двигатель выбрасывает поток газа. Нас, естественно, интересует движение корпуса ракеты, а не центра масс системы «ракета–сгоревший газ». Ракета является ярким примером движущегося тела переменной массы.

Примеров движущихся тел, масса которых заметно изменяется в процессе движения, множество как в различных областях производства (вращающееся веретено, на которое навивается нить; рулон газетной бумаги, разматывающийся на валу печатной машины и т. п.), так и в природе (изменение массы ядра кометы, возрастание массы Земли вследствие падения на ее поверхность метеоритов, таяние плавающей льдины и др.).

Следует отметить, что в теоретической механике переменность массы понимается не в смысле ее возникновения или исчезновения, а в смысле присоединения или отделения либо совместного присоединения и отделения частиц. Предметом дальнейшего рассмотрения будет система частиц с постоянными массами, состав которой изменяется: некоторое количество час-

тиц покидает рассматриваемую систему, новые частицы к ней присоединяются.

Хотя изменение массы мы наблюдаем лишь в случае тел конечных размеров, тем не менее, в динамике тел с переменной массой (переменным составом), введение понятия материальной *точки переменной массы* (ТПМ) упрощает и облегчает изложение материала. ТПМ можно определить как множество частиц (с постоянной массой), которые в момент времени t находятся внутри области, ограниченной некоторой контрольной поверхностью, причем предполагается, что эта область движется поступательно (вместе с некоторой своей геометрической точкой). Переходом к пределу при стремлении к нулю объема области, ограниченной контрольной поверхностью, приходим к понятию, аналогичному понятию материальной точки постоянной массы. Таким образом, ТПМ — это геометрическая точка с некоторой конечной массой, изменяющейся в процессе движения.

Основное уравнение движения ТПМ было получено И. В. Мещерским в 1897 г. в его магистерской диссертации. В 1898 г. результаты диссертации были им обобщены на случай одновременного присоединения и отделения частиц. Обобщенное уравнение Мещерского является основным в разделе «Динамика тел переменной массы», составляющем теоретическую базу ракетодинамики.

Принципиальным допущением, позволяющим получить дифференциальное уравнение движения ТПМ, является *гипотеза близкодействия* (контактного взаимодействия), согласно которой частицы изменяют количество движения ТПМ только в момент их непосредственного контакта. Как только отделяющаяся частица получает относительную скорость по отношению к ТПМ, ее воздействие на точку прекращается. Присоединяющаяся частица до момента контакта с ТПМ не взаимодействует. Ввиду того, что скорости присоединяющихся или отделяющихся частиц в момент контакта, вообще говоря, отличаются от скорости ТПМ, она будет испытывать удары со стороны этих частиц. Для случая непрерывного изменения массы точки воздействие таких ударов на нее аналогично действию некоторых дополнительных сил, называемых *реактивными*.

21.2. Обобщенное уравнение Мещерского, реактивные силы

Ограничимся рассмотрением тех случаев, для которых процесс изменения массы происходит непрерывно. При скачкообразном изменении массы соответствующие задачи решаются путем непосредственного применения общих теорем динамики тел постоянной массы, а также методами теории удара.

Для вывода уравнения движения ТПМ воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы. Для этого рассмотрим механическую систему, состоящую из частиц постоянной массы, которые в момент времени t составляют материальную точку M (обозначим массу точки M , скорость $\bar{v}$) и за время Δt присоединятся к материальной точке M (обозначим их массы $\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_{N_1}^{(1)}$, скорости в момент времени t — $\bar{v}_1^{(1)}, \dots, \bar{v}_{N_1}^{(1)}$ соответственно). Пусть $\mu_1^{(2)}, \dots, \mu_{N_2}^{(2)}$ — массы тех частиц, которые за время Δt отделяются от точки M , а $\bar{v}_1^{(2)}, \dots, \bar{v}_{N_2}^{(2)}$ — их абсолютные скорости в момент времени $t + \Delta t$. Введем также обозначения

$$\bar{v}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} \mu_k^{(1)} \bar{v}_k^{(1)}}{\Delta m_1}; \quad \bar{v}_2 = \frac{\sum_{k=1}^{N_2} \mu_k^{(2)} \bar{v}_k^{(2)}}{\Delta m_2}, \quad (21.1)$$

$$\text{где } \Delta m_1 = \sum_{k=1}^{N_1} \mu_k^{(1)}; \quad \Delta m_2 = \sum_{k=1}^{N_2} \mu_k^{(2)}.$$

Запишем количество движения этой механической системы в моменты времени t и $t + \Delta t$. С учетом (21.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) &= M \bar{v} + \Delta m_1 \bar{v}_1, \\ \bar{Q}(t + \Delta t) &= (M + \Delta m_1 - \Delta m_2)(\bar{v} + \Delta \bar{v}) + \Delta m_2 \bar{v}_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Q}(t) &= \bar{Q}(t + \Delta t) - \bar{Q}(t) = \\ &= M \Delta \bar{v} + \Delta m_1 (\bar{v} - \bar{v}_1) - \Delta m_2 (\bar{v} - \bar{v}_2) + \\ &\quad + (\Delta m_1 - \Delta m_2) \Delta \bar{v}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Учитывая, что $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}(t)}{\Delta t}$, из (21.2) получаем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{v}}{dt} + (\bar{v} - \bar{v}_1) \frac{dm_1}{dt} - (\bar{v} - \bar{v}_2) \frac{dm_2}{dt}, \quad (21.3)$$

так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v} \Delta m_1}{\Delta t} = 0$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v} \Delta m_2}{\Delta t} = 0$.

Теорему об изменении количества движения системы

$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}$ с учетом (21.3) запишем в виде

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_1 - \bar{v}) \frac{dm_1}{dt} - (\bar{v}_2 - \bar{v}) \frac{dm_2}{dt}. \quad (21.4)$$

Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ Δm_1 и Δm_2 также будут стремиться к нулю, то в уравнении (21.4) $\bar{F}$ является равнодействующей сил, приложенных к точке M . Отметим, что и $\bar{v}_2$ в формулах (21.3) и (21.4) будет скоростью центра масс отделяющихся частиц в момент времени t (ранее $\bar{v}_2$ — скорость центра масс отделяющихся частиц в момент времени $t + \Delta t$).

Уравнение (21.4) называется *обобщенным уравнением Мещерского*. Если относительные скорости присоединяющихся и отсоединяющихся частиц обозначить соответственно

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}, \quad \bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \bar{v},$$

то обобщенное уравнение Мещерского примет вид

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{u}_1 \frac{dm_1}{dt} - \bar{u}_2 \frac{dm_2}{dt}. \quad (21.5)$$

Поскольку $\Delta M = \Delta m_1 - \Delta m_2$, то после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем так называемое *уравнение неравности*

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt}. \quad (21.6)$$

Система уравнений (21.4), (21.6) или (21.5), (21.6) даже при известных $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ и заданном значении силы $\bar{F}$ незамкнута (содержит шесть неизвестных величин $\bar{F}$, M , m_1 , m_2 , где $\bar{F}$ в общем случае задается тремя обобщенными координатами) и должна

быть дополнена еще двумя уравнениями вида $f(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}, M, m_1, m_2) = 0$, например зависимостями $m_1 = m_1(t)$ и $m_2 = m_2(t)$. В ракетодинамике эту систему дополняют условиями экстремума функционала, оптимизирующего расход топлива, время полета и т. п.

Представляет также интерес следующая форма обобщенного уравнения Мещерского, которую легко получить из (21.4) и (21.6):

$$\frac{d}{dt}(M \bar{v}) = \bar{F} + \bar{v}_1 \frac{dm_1}{dt} - \bar{v}_2 \frac{dm_2}{dt}. \quad (21.7)$$

Обозначив

$$\bar{P}_1 = \bar{u}_1 \frac{dm_1}{dt}, \quad \bar{P}_2 = -\bar{u}_2 \frac{dm_2}{dt}, \quad (21.8)$$

запишем обобщенное уравнение Мещерского (21.5) в следующей форме:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2, \quad (21.9)$$

или

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{P}. \quad (21.10)$$

Сила $\bar{P}$ называется *реактивной* и представляет собой геометрическую сумму реактивных сил, обусловленных присоединением $\bar{P}_1$ и отделением $\bar{P}_2$ частиц.

Заметим, что вывод обобщенного уравнения Мещерского применим не только к ТПМ, но и к поступательно движущемуся телу переменной массы.

21.3. Частные случаи уравнения Мещерского

А. Пусть имеет место лишь процесс отделения масс. Тогда $m_1 \equiv 0$, $\frac{dm_1}{dt} \equiv 0$, $\frac{dM}{dt} = -\frac{dm_2}{dt}$ и уравнения (21.4), (21.5), (21.7), (21.8) принимают вид

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_2 - \bar{v}) \frac{dM}{dt}; \quad (21.4a)$$

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{u}_2 \frac{dM}{dt}; \quad (21.5a)$$

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}) = \bar{F} + \bar{v}_2 \frac{dM}{dt}; \quad (21.7a)$$

$$\bar{P}_1 \equiv 0, \quad \bar{P} \equiv \bar{P}_2 = \bar{u}_2 \frac{dM}{dt}. \quad (21.8a)$$

Б. Пусть происходит лишь присоединение частиц. Тогда $m_2 \equiv 0$, $\frac{dM}{dt} = \frac{dm_1}{dt}$ и обобщенное уравнение Мещерского можно представить в следующих формах:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_1 - \bar{v}) \frac{dM}{dt}, \quad (21.46)$$

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{u}_1 \frac{dM}{dt}, \quad (21.56)$$

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}) = \bar{F} + \bar{v}_1 \frac{dM}{dt}. \quad (21.76)$$

Реактивные силы при этом будут

$$\bar{P}_2 \equiv 0; \quad \bar{P} \equiv \bar{P}_1 = \bar{u}_1 \frac{dM}{dt}. \quad (21.86)$$

В. Пусть абсолютные скорости частиц в момент присоединения и отделения равны нулю, т. е. $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$, либо, если происходит только присоединение или только отделение частиц, то соответственно $\bar{v}_1 = 0$ или $\bar{v}_2 = 0$. В этом случае обобщенное уравнение Мещерского принимает вид

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}) = \bar{F}, \quad (21.7b)$$

а реактивная сила

$$\bar{P} = -\bar{v} \frac{dM}{dt}. \quad (21.8b)$$

Г. Пусть относительные скорости частиц в моменты присоединения и отделения равны нулю, т. е. $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$, либо, если происходит только присоединение или только отделение, то соответственно $\bar{u}_1 = 0$ или $\bar{u}_2 = 0$. В этом случае обобщенное уравнение Мещерского имеет вид

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \quad (21.5г)$$

а реактивная сила

$$\bar{P} = 0. \quad (21.8г)$$

Д. Пусть одновременно происходит присоединение и отделение частиц при равных скоростях центров масс присоединяющихся и отделяющихся частиц, т. е. $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_0$ (при этом $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_0$). Обобщенное уравнение Мещерского в этом случае можно представить в следующих формах:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_0 - \bar{v}) \frac{dM}{dt}; \quad (21.4д)$$

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{u}_0 \frac{dM}{dt}; \quad (21.5д)$$

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}) = \bar{F} + \bar{v}_0 \frac{dM}{dt}, \quad (21.7д)$$

а реактивная сила

$$\bar{P} = \bar{u}_0 \frac{dM}{dt}. \quad (21.8д)$$

Е. Пусть масса присоединившихся частиц за любой промежуток времени равна массе отделившихся частиц. В этом случае $m_1 = m_2$, $M = \text{const}$ и обобщенное уравнение Мещерского примет одну из следующих форм:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \frac{dm_1}{dt} \quad (21.4е)$$

или

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \frac{dm_1}{dt}. \quad (21.5е)$$

Реактивные силы при этом определяются выражениями

$$\bar{P}_1 = \bar{u}_1 \frac{dm_1}{dt}; \quad \bar{P}_2 = -\bar{u}_2 \frac{dm_1}{dt}; \quad \bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \frac{dm_1}{dt}. \quad (21.8е)$$

С помощью дифференциальных уравнений движения (21.4)–(21.7) формулируют различные задачи динамики ТПМ, которые

(аналогично задачам динамики точки постоянной массы) условно подразделяют на прямые и обратные.

21.4. Некоторые классические задачи динамики точки переменной массы

Задача Кейли (о движении опускающейся тяжелой цепи)

Пусть с горизонтальной подставки опускается вниз тяжелая цепь, элементы которой непрерывно присоединяются к движущейся части цепи. Оставшаяся часть цепи находится в состоянии покоя у края подставки. Предполагая, что цепь движется по вертикальной прямой, исследовать процесс падения цепи с подставки, пренебрегая силами сопротивления*.

По сути, эта задача относится к динамике механической системы. Но так как свешивающаяся часть цепи представляет собой поступательно движущееся тело переменной массы, в котором отсутствует относительное движение частиц, то, как указывалось выше, при решении задачи можно использовать уравнение Мещерского.

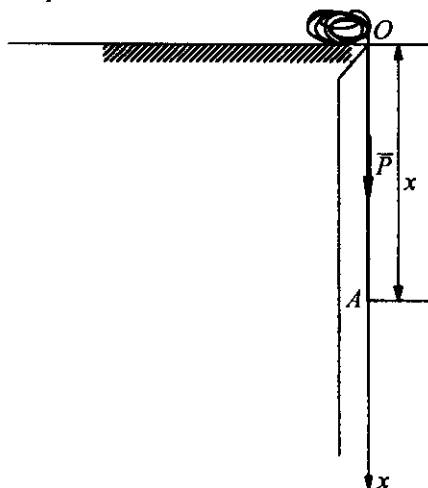


Рис. 21.1

Пусть x — длина, а m — масса свешивающейся и движущейся части цепи (рис. 21.1). Эта масса непрерывно увеличивается за счет присоединения элементов dm части цепи, лежащей на подставке. При этом скорость присоединяющихся элементов возрастает в момент присоединения от нуля до скорости движущейся части. Таким образом, при решении данной задачи можно воспользоваться уравнением (21.76), которое в проекции на вертикальную ось Ox имеет вид

* Эта задача была решена английским математиком А. Кейли в 1857 г.

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg. \quad (21.11)$$

Обозначим через γ вес единицы длины цепи. Тогда $m = \gamma x / g$, $v = \dot{x}$ и уравнение (21.11) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}(\gamma x \dot{x} / g) = \gamma x, \text{ или } \frac{d}{dt}(x \dot{x}) = gx. \quad (21.12)$$

Так как $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{df}{dx}$, то уравнение (21.12) можно представить следующим образом:

$$\dot{x} \frac{d}{dx}(x \dot{x}) = gx. \quad (21.13)$$

Умножив уравнение (21.13) на x , запишем полученное уравнение в виде

$$d(x \dot{x})^2 = 2gx^2 dx. \quad (21.14)$$

После интегрирования имеем

$$(x \dot{x})^2 = \frac{2}{3} gx^3 + C. \quad (21.15)$$

В качестве начальных условий выберем следующие:

$$\text{при } t_0 = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0. \quad (21.16)$$

Из формул (21.15) и (21.16) находим $C = 0$. Сократив (21.15) на x^2 , получим

$$(\dot{x})^2 = \frac{2}{3} gx. \quad (21.17)$$

Продифференцировав (21.17) по t и сократив на $2\dot{x}$, найдем

$$\ddot{x} = \frac{1}{3} g. \quad (21.18)$$

Интегрируя уравнение (21.18) с начальными условиями (21.16), окончательно получаем

$$x = \frac{1}{6} gt^2. \quad (21.19)$$

Решение (21.19) не является единственным: начальным условиям (21.16) и дифференциальному уравнению (21.12) можно удовлетворить, полагая $x \equiv 0$. Если считать, что в момент $t = 0$

точка A не имеет ускорения (см. рис. 21.1), то цепь будет оставаться в покое; если же точка A имеет ускорение (с подставки свешивается бесконечно малый элемент цепи), то цепь придет в движение. Нетривиальное решение (21.19) соответствует второму случаю.

Первая задача Циолковского (о движении ракеты вне силового поля)

Пусть ТПМ движется в безвоздушном пространстве вне силового поля, причем имеет место лишь один процесс отделения частиц. Движение такой точки моделирует движение ракеты в космическом пространстве, если пренебречь внутренним движением частиц, силами сопротивления космической среды, гравитационным притяжением, силами светового давления и т. п.

Тогда $\bar{F} = 0$ и из уравнения Мещерского (21.5а) получим векторное уравнение движения ракеты

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{u}_r \frac{dM}{dt}, \quad (21.20)$$

где $\bar{u}_r$ — относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива.

Полагая, что $\bar{u}_r$ постоянна по величине и направлена противоположно скорости $\bar{v}$ ракеты, найдем скорость и закон движения ракеты.

Направим ось Ox вдоль вектора скорости $\bar{v}$ ракеты (рис. 21.2). В проекции на ось Ox уравнение (21.20) с учетом, что $v_x = v$, $u_{rx} = -u_r$, имеет вид

$$M dv = -u_r dM. \quad (21.21)$$



Рис. 21.2

Разделяя в (21.21) переменные и интегрируя, находим

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M(t)}, \quad (21.22)$$

где v_0 — начальная скорость ракеты; M_0 — масса ракеты в начальный момент времени.

Так как $M_0 = M_k + M_r$, где M_k — масса корпуса ракеты со всем оборудованием и полезным грузом; M_r — масса топлива в начальный момент времени, из формулы (21.22) легко найти предельную скорость, которую получит ракета, когда будет израсходовано все топливо:

$$v_k = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_r}{M_k} \right). \quad (21.23)$$

Выражение (21.23) — это известная формула К. Э. Циолковского, опубликованная в его работе 1903 г. Из нее следует, что предельная скорость v_k ракеты зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов его сгорания. От закона изменения массы ракеты (режима работы двигателя) предельная скорость ракеты не зависит. Если задано отношение $M_r/M_k = Z$, где Z — **число Циолковского**, то предельная скорость $v_k = v_0 + u_r \ln(1 + Z)$ будет вполне определенной независимо от того, быстро или медленно происходило сгорание топлива.

Путь, пройденный ракетой на активном участке траектории (соответствующий этапу сгорания топлива), зависит от закона сгорания топлива. Полагая при $t=0$ $x=0$, из уравнения (21.22) получаем

$$x(t) = v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt. \quad (21.24)$$

В теоретических работах по ракетодинамике обычно рассматривают два закона изменения массы: экспоненциальный

$$M = M_0 e^{-\beta t}, \quad (21.25)$$

где $\beta = \text{const}$, и линейный

$$M = M_0 - \alpha t = M_0(1 - \alpha t), \quad (21.26)$$

где $\alpha_1 = M_0 \alpha$; $\alpha_1 = \text{const} > 0$; $\alpha = \text{const} > 0$.

Из формул (21.25), (21.26) найдем время T сгорания топлива. Для экспоненциального закона имеем

$$T_z = \frac{1}{\beta} \ln(1 + Z),$$

для линейного —

$$T_n = \frac{Z}{\alpha(1 + Z)}.$$

Интегрируя (21.24) при экспоненциальном законе изменения массы (21.25), получаем закон движения ракеты

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} u_r \beta t^2 \quad (0 \leq t \leq T_z).$$

Если же сгорание топлива происходит по линейному закону, то, согласно (21.24) и (21.26),

$$x = v_0 t + \frac{u_r}{\alpha} [\alpha t + (1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t)] \quad (0 \leq t \leq T_n).$$

Отметим, что при линейном законе изменения массы (21.26) ее расход

$$-\frac{dM}{dt} = M_0 \alpha = \text{const}$$

и реактивная сила

$$P = -u_r \frac{dM}{dt} = M_0 \alpha u_r = \text{const}.$$

При экспоненциальном законе изменения массы (21.25) расход массы и реактивная сила переменны (изменяются по экспоненте), но ускорение, вызванное действием на ракету одной лишь реактивной силы, постоянно, т. е.

$$a = \frac{P}{M} = -\frac{u_r}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{u_r \beta M_0 e^{-\beta t}}{M_0 e^{-\beta t}} = \beta u_r = \text{const}.$$

ОСНОВЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Небесная механика изучает движение искусственных и естественных небесных тел под действием сил, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона, сил светового давления, сопротивления среды и др.

Классическими задачами небесной механики являются *задача о движении материальной точки под действием центральной силы, задача двух тел*, в которой рассматривается движение двух материальных точек в пространстве под действием сил взаимного притяжения, а также *задачи трех и n тел*.

22.1. Формулы Бине

Сила, линия действия которой проходит через неподвижную точку, называется *центральной*. Такая сила может быть как притягивающей, так и отталкивающей.

Рассмотрим движение материальной точки M , имеющей массу m , под действием силы $\vec{F}$, линия действия которой все время проходит через неподвижную точку O , принимаемую за начало координат. В § 15.5 было доказано, что в задаче о движении точки под действием центральной силы существует интеграл площадей

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C} \quad (\vec{C} = \text{const}),$$

а траекторией точки M будет кривая, расположенная в неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{C}$ и проходящей через центр O центральной силы (случай $\vec{C} = 0$ исключим из рассмотрения). В небесной механике эту плоскость называют *плоскостью Лапласа*.

Для описания движения точки M введем полярные координаты. Поместим полюс в неподвижный центр O и проведем полярную полуось через начальное положение точки (рис. 22.1). Уравнения движения точки в проекциях на оси полярной системы координат примут вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= F_r; \\ m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) &= 0. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Начальные условия таковы:

$$\text{при } t=0 \quad r=R, \quad \phi=0, \quad \dot{r}=v_0 \cos \alpha, \quad \dot{\phi} = \frac{v_0 \sin \alpha}{R},$$

где α — угол между вектором $\vec{v}_0$ и полярной полуосью.

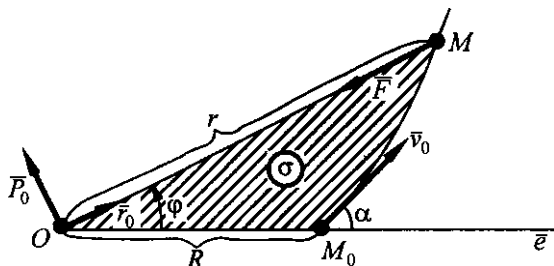


Рис. 22.1

Из второго уравнения (22.1) следует

$$r^2 \dot{\phi} = C = \text{const}, \quad (22.2)$$

т. е. под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью

$$\dot{\sigma} = r^2 \dot{\phi} / 2 = C / 2$$

так, что радиус-вектор точки за равные промежутки времени «заметает» равные площади. Эта закономерность имеет место при движении планет и выражает собой закон площадей Кеплера.

Первое уравнение (22.1) с учетом (22.2) можно представить в виде

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r + m C^2 / r^3. \quad (22.3)$$

Если F_r не зависит от φ , т. е. $F_r = F(r)$, уравнения движения точки решают последовательно: сначала из (22.3) определяют закон изменения во времени полярного радиуса $r = r(t)$, а затем из (22.2) — зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Если же $F_r = F(r, \varphi)$, уравнения будут связанными и их решают совместно.

Выведем такое дифференциальное уравнение, из решения которого можно сразу определить траекторию. Заменим дифференцирование по t дифференцированием по φ , учитывая существование интеграла площадей (22.2):

$$v_p = r\dot{\varphi} = \frac{C}{r}; \quad (22.4)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C \frac{d(1/r)}{d\varphi};$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dv_r}{d\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(-C \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}. \quad (22.5)$$

Тогда получим *первую формулу Бине*

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = C^2 \left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right], \quad (22.6)$$

позволяющую находить скорость в различных точках орбиты, если известны траектория $r = r(\varphi)$ и постоянная C секторной скорости.

Подставив выражение (22.5) в (22.3), получим *вторую формулу Бине*

$$\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right) = -F_r. \quad (22.7)$$

Формулы Бине позволяют находить решения как прямой, так и обратной задач динамики, т. е. определять центральную силу, если известна траектория движения точки, или определять траекторию, зная центральную силу. Если F_r явно не зависит от времени, для решения достаточно одного уравнения (22.7), представляющего собой дифференциальное уравнение траектории

точки. В задачах небесной механики центральная сила зависит только от расстояния ($F_r = F_r(r)$) и, следовательно, является потенциальной. В таком случае существует интеграл энергии

$$mv^2/2 + \Pi(r) = h_1, \quad (22.8)$$

где $\Pi(r) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int F_r(r) dr$ — потенциальная энергия силового поля центральной силы; h_1 — константа интегрирования.

Подставив первую формулу Бине (22.6) в интеграл энергии, получаем уравнение

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2r^4}{mC^2} \left[h_1 - \Pi(r) - \frac{mC^2}{2r^2} \right],$$

решение которого сводится к квадратуре и зависит от конкретного вида функции $F_r = F_r(r)$.

22.2. Закон всемирного тяготения. Законы Кеплера

Закономерности в движении планет были установлены Иоганном Кеплером (1571–1630) путем обработки многочисленных астрономических наблюдений, полученных астрономом Тихо Браге (1546–1601). Они были сформулированы Кеплером в виде трех законов:

1. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Площади, заметаемые радиус-векторами планет относительно Солнца, пропорциональны временам движения планет.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит, т. е. $T^2/a^3 = \text{const}$.

На основе этих законов, используя сложный геометрический метод, И. Ньютон в 1666 г. установил закон всемирного тяготения. В наше время это можно сделать проще. Действительно, из второго закона Кеплера следует, что существует интеграл площадей, т. е. сила, действующая на планеты, является центральной,

причем ее центром является Солнце. Первый закон Кеплера определяет орбиту планеты и позволяет найти центральную силу при помощи формул Бине. Уравнение эллипса в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}, \quad (22.9)$$

где $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ — эксцентриситет; $p = b^2/a$ — фокальный параметр; a, b — большая и малая полуоси эллипса, причем полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине эллипса.

Подставив (22.9) во вторую формулу Бине (22.7), получим

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2} \left(-\frac{e \cos \varphi}{p} + \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \right) = -\frac{mC^2}{r^2 p}. \quad (22.10)$$

Таким образом, действующая на планету центральная сила является притягивающей и обратно пропорциональной квадрату расстояния планеты от Солнца.

Обозначим в формуле (22.10) $C^2/p = C^2 a/b^2 = \mu$, где μ — постоянная Гаусса. Так как за период обращения T радиус-вектор планеты «заметает» с постоянной секторной скоростью $C/2$ всю площадь эллипса, то $CT/2 = \pi ab$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{C^2 a}{b^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \text{const}; \\ F_r &= -\mu \frac{m}{r^2}. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Так как согласно третьему закону Кеплера отношение a^3/T^2 постоянно, постоянная Гаусса μ есть величина, одинаковая для всех планет, движущихся под действием силы притяжения Солнца, и должна зависеть от массы Солнца.

Для тел, движущихся под действием притяжения Земли или других планет, существуют свои постоянные Гаусса, обозначим их μ_i . Сила, с которой Солнце будет притягивать планету,

$$F_{Gi} = \frac{\mu m_i}{r^2},$$

где m_i — масса i -й планеты. Сила, с которой планета притягивает Солнце,

$$F_{ic} = \frac{\mu_i M_c}{r^2},$$

где M_c — масса Солнца. По третьему закону Ньютона $F_{ic} = F_{ci}$, или $\mu m_i / r^2 = \mu_i M_c / r^2$, откуда $\mu / M_c = \mu_i / m_i = \text{const}$. Следовательно, отношение постоянной Гаусса μ_i любой планеты к ее массе m_i есть величина постоянная, равная отношению постоянной Гаусса Солнца к массе Солнца.

Постоянную Гаусса для Земли легко определить из следующих условий: на поверхности Земли сила тяготения F_τ равна весу тела, т. е. при $r = R_3$ $F_\tau = mg$, откуда $\mu_3 = gR_3^2 \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$.

Если обозначить $f = \mu / M_c$, то сила, действующая на планету, может быть представлена в виде

$$\vec{F} = -f \frac{m M_c}{r^2} \vec{r}_0, \quad (22.12)$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}/r$.

Формула (22.12) выражает собой закон всемирного тяготения, справедливый для любых двух материальных тел (точек). Коэффициент $f \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ называется *гравитационной постоянной*.

Рассмотрим обратную задачу — выведем законы Кеплера из закона всемирного тяготения. Так как сила, определяемая формулой (22.12), центральная, то существует интеграл площадей и соответственно выполняется второй закон Кеплера. Для вывода первого закона Кеплера воспользуемся второй формулой Бине. Подставив проекцию F_r силы тяготения, определяемую вторым соотношением (22.11), в формулу (22.7), получим дифференциальное уравнение траектории планеты:

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}, \quad (22.13)$$

общее решение которого имеет вид

$$1/r = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \mu/C^2 ,$$

или

$$1/r = \frac{\mu}{C^2} [1 + e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)] , \quad (22.14)$$

где A, B, e, φ_0 — произвольные постоянные интегрирования.

Выражение (22.14) представляет собой уравнение конического сечения с эксцентриситетом e и фокальным параметром $p = C^2/\mu$, фокус которого совпадает с притягивающим центром. Таким образом, получен обобщенный первый закон Кеплера, так как в зависимости от эксцентриситета орбиты небесных тел могут быть не только эллиптического ($e < 1$), но и параболического ($e = 1$) и гиперболического ($e > 1$) видов.

Если в формуле $p = b^2/a = C^2/(fM)$ константу C выразить, согласно (22.11), через период T обращения планеты, то получим

$$\frac{b^2}{a} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2\pi ab}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \mu} ,$$

откуда следует третий закон Кеплера

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \text{const} .$$

Конкретный вид орбиты, определяемый выражением (22.14), зависит от значений постоянных интегрирования e и φ_0 , т. е. от начальных условий. Надлежащим выбором положения полярной полуоси всегда можно обеспечить $\varphi_0 = 0$. Для этого следует провести полярную полуось через точку P орбиты, ближайшую к притягивающему центру O , которая называется **перигелием**. Положение этой точки заранее не известно и подлежит определению по начальным условиям.

22.3. Энергетическая классификация орбит

Рассмотрим движение материальной точки, масса которой m , под действием силы тяготения (22.12). Если начальное расстояние R точки от центра O задано (здесь R — расстояние до пери-

центра), то вид ее орбиты будет определяться начальной скоростью v_0 . Для доказательства этого факта найдем зависимость между эксцентриситетом орбиты и значениями R и v_0 . Потенциальная энергия поля силы тяготения, согласно (22.12),

$$П(r) = - \int F_r(r) dr = \mu m \int \frac{dr}{r^2} = -\mu m/r + C_1,$$

где константа интегрирования $C_1 = 0$, так как при $r \rightarrow \infty$ $П(r) \rightarrow 0$.

Разделив в выражении (22.8) все члены на массу m и учитывая (22.9), представим интеграл энергии в виде

$$v^2 = 2\mu/r + h = \frac{2\mu}{p}(1 + e \cos \varphi) + h,$$

где h — константа энергии, $h = 2h_1/m = v_0^2 - 2\mu/R$.

Подстановка же (22.9) в первую формулу Бине дает

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(1 + 2e \cos \varphi + e^2).$$

Приравнивая правые части полученных выражений и учитывая, что $p = C^2/\mu$, получаем

$$e^2 = 1 + (C/\mu)^2 h. \quad (22.15)$$

Из равенства (22.15) следует, что при $h = v_0^2 - 2\mu/R = 0$ $e = 1$, т. е. орбита имеет вид параболы. Скорость $v_0 = \sqrt{2\mu/R}$ называется *параболической*, или *второй космической* v_{II} , и представляет собой наименьшую скорость, которую нужно сообщить точке, находящейся в перигентре (на расстоянии R от точки O), чтобы она удалилась на сколь угодно большое расстояние от центра тяготения O . Для условий Земли ($R_3 \cong 6370$ км)

$$v_{II} = \sqrt{2\mu_3/R_3} = \sqrt{2gR_3} \cong 11,2 \text{ км/с}.$$

При $v_0 < v_{II}$ константа энергии $h < 0$, в этом случае $e < 1$ и орбита будет эллиптической; скорости, удовлетворяющие этому неравенству, называются *эллиптическими*. При $v_0 > v_{II}$ константа $h > 0$ и орбиты будут гиперболическими ($e > 1$).

Для случая круговой орбиты ($e=0$) константа площадей $C = Rv_0$. Подставив эти значения в (22.15), получим

$$1 + (Rv_0/\mu)^2 (v_0^2 - 2\mu/R) = 1 - 2\frac{R}{\mu} v_0^2 + (Rv_0^2/\mu)^2 = \\ = (1 - Rv_0^2/\mu)^2 = 0,$$

откуда следует, что скорость движения точки по круговой орбите, или *первая космическая скорость*

$$v_1 = \sqrt{\mu/R}.$$

Для условий Земли $v_1 = \sqrt{\mu_3/R_3} = \sqrt{gR_3} = v_{II}/\sqrt{2} \cong 7,9$ км/с.

22.4. Движение точки по орбите

Для окончательного решения задачи, т. е. для определения закона движения точки по орбите, воспользуемся интегралом площадей, представив его в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

Заменив согласно (22.9) в этом уравнении r , получим

$$dt = \frac{p^2}{C} \frac{d\varphi}{(1+e \cos \varphi)^2},$$

откуда

$$t - t_0 = \frac{p^2}{C} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+e \cos \varphi)^2},$$

где t_0 — момент времени, когда точка проходит через перигелий.

В случае эллиптической орбиты для вычисления интеграла выполняют следующие подстановки: $\operatorname{tg}(\varphi/2) = x$, $\operatorname{tg}(E/2) = kx$, где $k^2 = (1-e)/(1+e)$, что приводит к уравнению, известному в небесной механике как *уравнение Кеплера*

$$E - e \sin(E) = 2\pi(t - t_0)/T.$$

Переменная φ в небесной механике называется *истинной аномалией*, переменная E — *эксцентрической аномалией*, соотношение между ними определяется формулой $\operatorname{tg}(E/2) = k \operatorname{tg}(\varphi/2)$.

Уравнения движения по параболической и гиперболической орбитам выводятся аналогично.

Таким образом, общее решение задачи о движении материальной точки под действием силы притяжения к неподвижному центру по закону всемирного тяготения зависит от шести произвольных констант, определяемых начальными условиями. Форма, размеры и положение орбиты в ее плоскости определены, если известны эксцентриситет e , фокальный параметр p (или полуоси a и b для случая эллиптической орбиты) и угол φ_0 , образуемый осью конического сечения с полярной полуосью. Кроме того, необходимо знать положение плоскости орбиты в пространстве, которое задается направлением векторной константы площадей.

В небесной механике для задания орбиты и движения по ней точки широко используются так называемые *кеплеровские элементы*. Помимо параметров e и p к ним относятся (рис. 22.2): τ — время прохождения через перигей; Ω — *долгота восходящего узла* — угол, который составляет с осью Ox линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy ; i — *наклонение орбиты* — двугранный угол между плоскостью орбиты и плоскостью Oxy .

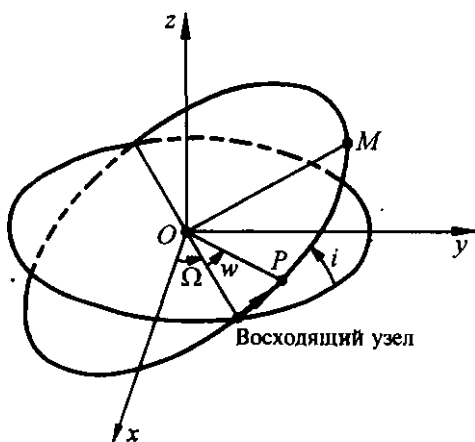


Рис. 22.2

Наконец, параметр w определяет положение орбиты в ее плоскости и называется *угловым расстоянием перицентра P от узла*; он равен углу между направлением на перицентр и линией пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy .

22.5. Задача двух тел

В рассмотренной выше задаче центр тяготения считался неподвижным по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета. Рассмотрим теперь две материальные точки с массами m_1 и m_2 соответственно, движущиеся под действием сил взаимного притяжения.

Для получения уравнений движения введем инерциальную систему отсчета O_1xyz . Положения материальных точек O и M определены радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно (рис. 22.3). Положение точки M относительно O зададим радиус-вектором $\vec{r}$.

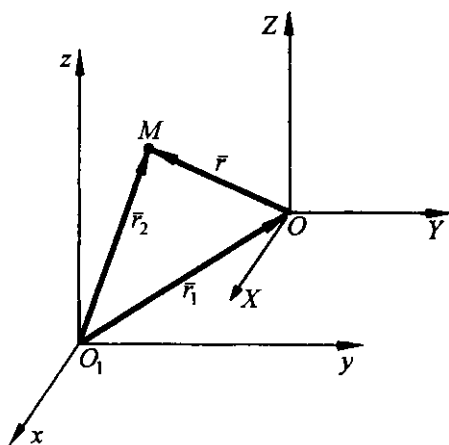


Рис. 22.3

Запишем уравнения движения точек в инерциальной системе отсчета O_1xyz :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = f \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r};$$

$$m_2 \frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} \bar{r}.$$

Так как $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -f \frac{m_1}{r^3} \bar{r} - f \frac{m_2}{r^3} \bar{r} = -f(m_1 + m_2) \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Если ввести обозначение

$$\mu = f(m_1 + m_2), \quad (22.16)$$

то получим

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\bar{r}}{r^3}. \quad (22.17)$$

Дифференциальное уравнение (22.17) описывает движение точки M в подвижной системе отсчета $OXYZ$ (где оси системы $OXYZ$ параллельны соответствующим осям системы O_1xyz). Это уравнение также можно интерпретировать как дифференциальное уравнение движения точки M относительно неподвижного притягивающего центра O под действием центральной силы $\bar{F} = -\mu m_2 \bar{r} / r^3$. Таким образом, все полученные ранее результаты применимы к рассматриваемой задаче. Если вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$ найдена, то определение движения относительно системы координат O_1xyz не представляет труда. Точка C — центр масс точек O и M — движется равномерно и прямолинейно; ее скорость полностью определяется начальными скоростями точек O и M . Если $\bar{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, то

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_C - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{r}, \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_C + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{r}.$$

Исходя из результатов, полученных в § 22.2, найдем поправку к третьему закону Кеплера. Рассмотрим движение вокруг Солнца двух планет с массами m_1 и m_2 без учета взаимного влияния. Согласно формулам (22.11) и (22.16), для первой и второй планет соответственно имеем

$$\frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = \mu_1 = f(M + m_1);$$

$$\frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} = \mu_2 = f(M + m_2).$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{a_1^3/T_1^2}{a_2^3/T_2^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{1 + m_1/M}{1 + m_1/M},$$

т. е. третий закон Кеплера носит приближенный характер и выполняется постольку, поскольку массы планет m_1 и m_2 малы по сравнению с массой Солнца $M_\odot$.

22.6. О задаче n тел и о других задачах небесной механики

Задача n тел ($n \geq 3$) является одной из наиболее известных проблем классической динамики. В ней рассматривается движение n материальных точек в пространстве под действием сил взаимного гравитационного притяжения и требуется определить положения всех точек в произвольный момент времени, если в момент $t = t_0$ заданы их координаты и скорости. В указанной постановке эта задача не решена и до сих пор. Исследования этой задачи, а особенно задачи трех тел ($n = 3$), оказали огромное влияние на развитие всей динамики. Многие из наиболее важных результатов современной динамики в той или иной степени связаны с этой задачей.

При решении различных проблем космонавтики и астрономии большую роль играет так называемая *ограниченная задача трех тел*. Она заключается в изучении движения точки, имеющей малую массу в поле тяготения двух тел (материальных точек), массы которых конечны. Предполагается, что точка малой массы не оказывает влияния на движение тел конечной массы, которые движутся по орбитам, определяемым в задаче двух тел, т.е. движение тел конечной массы считается известным. Эта задача гораздо проще *общей (неограниченной) задачи трех тел*. Но и она до конца не проинтегрирована, хотя для многих частных случаев этой задачи, возникающих в астрономии, удается построить приближенное решение с очень высокой степенью точ-

ности. Примерами ограниченной задачи трех тел являются задачи движения систем Земля – Луна – спутник, Солнце – планета – комета и т. д.

Важнейшими проблемами небесной механики являются следующие:

- 1) определение движения центров масс небесных тел;
- 2) нахождение движения небесных тел вокруг их центров масс.

Если вопросы, относящиеся к первой проблеме, разработаны в научной и учебной литературе достаточно хорошо и имеют многолетнюю историю, то работы, связанные со второй проблемой, опубликованы в основном за последние два-три десятилетия в научных журналах и являются менее доступными.

Следует отметить, что задачи, в которых изучается движение небесных тел вокруг их центров масс, сформулированы либо в ограниченной постановке (движение их центров масс считается известным), либо в общей или неограниченной постановке (дифференциальные уравнения поступательных движений центров масс и вращений вокруг центров масс взаимосвязаны и решаются совместно).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	6
Некоторые сведения из теории векторов	9
В.1. Скалярные и векторные величины. Единичные векторы	9
В.2. Проекции вектора на ось и плоскость	11
В.3. Координаты вектора. Аналитическое задание вектора. Радиус- вектор точки	12
В.4. Сложение и вычитание векторов	14
В.5. Умножение векторов	16
В.6. Векторы и матрицы	24
В.7. Связь между проекциями вектора на оси двух прямоугольных систем координат	29
В.8. Вектор-функция. Голограф вектора. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу	32

Раздел I. КИНЕМАТИКА

Глава 1. Кинематика точки	39
1.1. Скорость точки	39
1.2. Ускорение точки	41
1.3. Векторный способ задания движения точки	44
1.4. Координатный способ задания движения точки	44
1.5. Естественный способ задания движения точки	61
Глава 2. Простейшие движения твердого тела	70
2.1. Степени свободы и теорема о проекциях скоростей	70
2.2. Поступательное движение твердого тела	73
2.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	75
Глава 3. Плоское движение твердого тела	85
3.1. Разложение плоского движения твердого тела на поступательное и вращательное движения	85
3.2. Уравнения движения, угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при плоском движении	87
3.3. Скорости точек тела при плоском движении	89
3.4. Мгновенный центр скоростей	90
3.5. Мгновенный центр вращения. Центроиды	94

3.6. Вычисление угловой скорости твердого тела при плоском движении	96
3.7. Ускорения точек тела при плоском движении	98
3.8. Мгновенный центр ускорений	102
3.9. Способы вычисления углового ускорения тела при плоском движении	106
Глава 4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки	110
4.1. Число степеней свободы. Углы Эйлера. Уравнения вращения	110
4.2. Матрица направляющих косинусов. Траектория точки тела	114
4.3. Мгновенная ось вращения. Аксоиды	116
4.4. Мгновенные угловая скорость и угловое ускорение	119
4.5. Скорости точек тела. Кинематические уравнения Эйлера	122
4.6. Ускорения точек тела	128
4.7. Вычисление углового ускорения тела	130
Глава 5. Общий случай движения твердого тела	134
5.1. Число степеней свободы. Обобщенные координаты. Уравнения движения	134
5.2. Траектория произвольной точки тела	139
5.3. Скорость произвольной точки тела	140
5.4. Ускорение произвольной точки тела	141
Глава 6. Сложное движение точки	143
6.1. Относительное, переносное и абсолютное движения точки	143
6.2. Абсолютная и относительная производные вектора. Формула Бура	145
6.3. Теорема о сложении скоростей	148
6.4. Теорема о сложении ускорений, или кинематическая теорема Кориолиса. Ускорение Корнолнса	150
6.5. Сложение ускорений в частных случаях переносного движения	153
Глава 7. Сложное движение твердого тела	162
7.1. Теорема о сложении угловых скоростей при сложном движении твердого тела	162
7.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей	164
7.3. Сложение вращений вокруг параллельных осей. Пара вращений	165
7.4. Сложение поступательных движений	168
7.5. Сложение поступательного и вращательного движений	169
Раздел II. СТАТИКА	
Глава 8. Аксиомы и основные положения статики	173
8.1. Аксиомы статики	174
8.2. Основные виды связей и их реакции	177
8.3. Система сходящихся сил	181
8.4. Момент силы относительно точки и относительно оси	189

8.5. Сложение параллельных сил. Пара сил	196
8.6. Приведение системы сил к простейшей системе	204
Глава 9. Равновесие тел	214
9.1. Условия равновесия системы сил	214
9.2. Равновесие системы тел	222
9.3. Определенные внутренние силы	225
9.4. Статически определимые и статически неопределимые системы тел	227
9.5. Расчет плоских ферм	228
9.6. Распределенные силы	229
Глава 10. Трение	236
10.1. Законы трения скольжения	236
10.2. Реакции шероховатой поверхности. Угол трения	237
10.3. Реакция связи при качении	238
10.4. Равновесие тела при наличии трения. Конус трения	239
Глава 11. Центр тяжести	248
11.1. Центр системы параллельных сил	248
11.2. Центр тяжести твердого тела	251
11.3. Методы определения координат центров тяжести тел	253
Глава 12. Равновесие гибкой и нерастяжимой нити	260
12.1. Дифференциальные уравнения равновесия нити	260
12.2. Частные случаи внешних сил	263
12.3. Цепная линия	265

Раздел III. ДИНАМИКА

Глава 13. Динамика материальной точки	271
13.1. Аксиомы динамики	271
13.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	273
13.3. Две основные задачи динамики материальной точки	275
13.4. Движение несвободной материальной точки	280
13.5. Динамика относительного движения	288
13.6. Равновесие и движение материальной точки относительно Земли	293
Глава 14. Геометрия масс	298
14.1. Центр масс механической системы	298
14.2. Моменты инерции	301
14.3. Зависимость моментов инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса–Штейнера)	304
14.4. Моменты инерции однородных тел	305
14.5. Моменты инерции однородных тел вращения	310
14.6. Момент инерции относительно оси, проходящей через заданную точку	315
14.7. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции	318

14.8. Свойства главных осей инерции тела	321
14.9. Определение направления главных осей инерции	326
Глава 15. Общие теоремы динамики	331
15.1. Механическая система. Внешние и внутренние силы	331
15.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы	334
15.3. Теорема о движении центра масс механической системы	335
15.4. Теорема об изменении количества движения	342
15.5. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы	353
15.6. Теорема об изменении кинетической энергии	382
15.7. Потенциальное силовое поле	400
15.8. Примеры использования общих теорем динамики	412
Глава 16. Динамика твердого тела	424
16.1. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твердого тела	424
16.2. Сферическое движение твердого тела	436
16.3. Общий случай движения твердого тела	465
Глава 17. Принцип Даламбера. Динамические реакции связей	469
17.1. Принцип Даламбера. Сила инерции	469
17.2. Принцип Даламбера для механической системы	471
17.3. Главный вектор и главный момент сил инерции	473
17.4. Динамические реакции опор	475
17.5. Статическая и динамическая уравновешенность твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	482
17.6. Балансировка роторов	487
Глава 18. Основы аналитической механики	493
18.1. Основные понятия	493
18.2. Возможная работа силы. Идеальные связи	504
18.3. Обобщенные силы	507
18.4. Дифференциальные принципы аналитической механики	513
18.5. Уравнение Лагранжа второго рода	527
18.6. Интегральные вариационные принципы механики	536
Глава 19. Теория колебаний	555
19.1. Устойчивость положения равновесия механической системы	555
19.2. Дифференциальные уравнения малых колебаний линейной системы с одной степенью свободы	559
19.3. Свободные движения линейной системы с одной степенью свободы	568
19.4. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы	582
19.5. Основы теории регистрирующих приборов	607

19.6. Основы виброзащиты	612
19.7. Дифференциальные уравнения малых колебаний линейной системы с конечным числом степеней свободы	615
19.8. Свободные колебания линейной консервативной системы с двумя степенями свободы	625
19.9. Вынужденные колебания линейной системы с двумя степенями свободы при гармоническом возбуждении. Динамический гаситель колебаний	637
19.10. Колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы	645
Глава 20. Теория удара	653
20.1. Основные понятия и допущения. Модель удара	653
20.2. Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс системы при ударе	658
20.3. Теорема об изменении главного момента количества движения системы при ударе	660
20.4. Коэффициент восстановления	662
20.5. Теорема об изменении кинетической энергии системы при ударе. Теорема Карно	664
20.6. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара	672
20.7. Удар по твердому телу с неподвижной точкой. Центр удара. Удар по свободному твердому телу	677
20.8. О связях при ударе. Общее уравнение механики	679
20.9. Уравнение Лагранжа второго рода при ударе в механической системе	682
20.10. Удар двух тел при поступательном движении. Энергетические соотношения	684
20.11. Удар материальной точки о неподвижную шероховатую поверхность	691
20.12. Удар двух шаров. Модель Герца	699
Глава 21. Введение в динамику тел переменной массы	705
21.1. Основные понятия и допущения	705
21.2. Обобщенное уравнение Мещерского, реактивные силы	707
21.3. Частные случаи уравнения Мещерского	709
21.4. Некоторые классические задачи динамики точки переменной массы	712
Глава 22. Основы небесной механики	717
22.1. Формулы Бине	717
22.2. Закон всемирного тяготения. Законы Кеплера	720
22.3. Энергетическая классификация орбит	723
22.4. Движение точки по орбите	725
22.5. Задача двух тел	727
22.6. О задаче и тел и о других задачах небесной механики	729

Учебное издание

**Дронг Владислав Иванович
Дубинин Владимир Валентинович
Ильин Михаил Михайлович
Колесников Константин Сергеевич
Космодемьянский Вадим Аркадьевич
Назаренко Борис Петрович
Панкратов Александр Алексеевич
Русанов Павел Григорьевич
Саратов Юрий Сергеевич
Степанчук Юрий Михайлович
Тушева Галина Михайловна
Шкапов Павел Михайлович**

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *Е. Н. Ставицкая*
Художник *С. С. Водчик*
Корректоры *О. В. Калашникова, О. Ю. Соколова*
Компьютерная верстка *И. М. Зверева*
Компьютерная графика *В. В. Бельтюкова, С. А. Холодова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.09.2004 г.

Подписано в печать 31.01.2005. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 46. Уч.-изд. л. 46,14.
Тираж 3000 экз. Заказ 16

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана,
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Отпечатано с диапозитивов в ГП «Облиздат»
248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5

ISBN 5-7038-1695-5

