

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

GEOPHYSICAL FIELD THEORY AND METHOD



ACOUSTIC AND ELASTIC WAVE FIELDS IN GEOPHYSICS, I

A.A. KAUFMAN

*Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden,
CO 80401, U.S.A.*

and

A.L. LEVSHIN

*Department of Physics, University of Colorado, Boulder,
CO 80309, U.S.A.*

2000



ELSEVIER

Amsterdam—Lausanne—New York—Oxford—Shannon—Singapore—Tokyo

А.А.Кауфман
А.Л.Левшин

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Часть3 Акустические
и упругие волновые
поля в геофизике

Перевод с английского *A.В.Кирюшина*



Москва Недра 2001

УДК 550.83

ББК 26.2

К 30

**Организация-спонсор
Евро-Азиатское геофизическое общество**

Кауфман А.А., Левшин А.Л.

**К 30 Введение в теорию геофизических методов. Часть 3. Акустические
и упругие волновые поля в геофизике: Пер. с англ. А.В. Кирюши-
на. – М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 2001. – 519 с.: ил.**

ISBN 5-8365-0097-5

Дано описание основных физических принципов распространения акустических и сейсмических волн в жидких и упругих средах.

На основе законов Ньютона и Гука выводятся уравнения колебаний. Изучаются свободные и вынужденные колебания, происходящие при распространении волн, описано поведение лучей отраженных, преломленных и головных волн. Сферические, цилиндрические и плоские волны рассмотрены как в частной, так и во временной областях.

С помощью относительно простых моделей описываются интерференция и дифракция волн, приведен вывод формул Гельмгольца и Кирхгофа, описаны принципы Френеля и Гюйгенса. Принципы геометрической акустики в неоднородных средах.

Для геофизиков, работающих в разведочной и глубинной геофизике. Полезна физикам и инженерам-электроникам, а также студентам геофизических специальностей.

ISBN 0-444-503-36-6

ISBN 5-8365-0097-5

© Elsevier Science B.V., 2000

© Оформление. ООО

"Недра-Бизнесцентр", 2001

© Перевод на русский язык.

А.В. Кирюшин, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	7
Благодарности.....	10
К русскому изданию.....	10
Список обозначений.....	10
ГЛАВА 1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА И ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ.....	13
1.1. Законы Ньютона.....	13
1.2. Движение системы частиц.....	25
ГЛАВА 2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	32
2.1. Закон Гука для пружины.....	32
2.2. Свободные колебания системы груз – пружина.....	34
2.3. Вынужденные колебания системы груз – пружина.....	44
2.4. Принципы измерения колебаний.....	54
ГЛАВА 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН.....	59
3.1. Распространение воли через систему масс и пружин.....	59
3.2. Решение одномерного волнового уравнения. Границные условия.....	66
3.3. Поперечные волны в струне.....	99
ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДИЛАТАЦИИ.....	110
4.1. Волновые явления в газе и жидкости.....	111
4.2. Волновое уравнение и граничные условия для волн дилатации.....	129
4.3. Кинетическая и потенциальная энергия воли. Поток энергии. Вектор Пойнтинга.....	140
4.4. Задача с граничными условиями. Теорема единственности.....	149
4.5. Гравитационные волны в жидкостях.....	158
ГЛАВА 5. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ.....	169
5.1. Сферические волны, возбуждаемые элементарным источником.....	169
5.2. Цилиндрические волны, возбуждаемые линейным источником в однородной среде.....	192
5.3. Плоские волны в однородной среде.....	204
ГЛАВА 6. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ.....	215
6.1. Суперпозиция волн от нескольких первичных источников в однородной среде.....	215
6.2. Формула Гельмгольца.....	235
6.3. Теория дифракции Кирхгофа.....	245
6.4. Дифракция Фраунгофера и дифракция Френеля.....	255
6.5. Формула Гельмгольца – Кирхгофа.....	274
6.6. Принципы Гюйгенса – Френеля.....	283
6.7. Связь между потенциалом и начальными условиями. Формула Пуассона.....	298
6.8. Переход к геометрической акустике.....	308
6.9. Уравнение эйконала и уравнение переноса.....	319
ГЛАВА 7. СУПЕРПОЗИЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН, ИМЕЮЩИХ РАЗНЫЕ ЧАСТОТЫ И ДЛИНЫ ВОЛН.....	332
7.1. Группа волн. Фазовая и групповая скорости.....	332
7.2. Суперпозиция синусоидальных волн и метод стационарной фазы.....	346

ГЛАВА 8. ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ.....	373
8.1. Лучи и их основные свойства	373
8.2. Поведение лучей в среде, где скорость зависит от одной декартовой координаты	387
8.3. Поведение лучей в среде, где скорость зависит от одной координаты z	405
8.4. Лучи вблизи внутренних границ раздела среды.....	408
8.5. Поля времен прихода волны.....	428
Приложение 1. Векторная алгебра	434
Приложение 2. Градиент скалярного поля.....	445
Приложение 3. Векторные поля.....	449
Приложение 4. Комплексные числа.....	477
Приложение 5. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	485
Приложение 6. Ряды Фурье	492
Приложение 7. Интеграл Фурье.....	503
Приложение 8. Интеграл Дионеля.....	513
Предметный указатель.....	515
Список литературы	519

Памяти
Людмилы Ивановны Ратниковой
посвящаем

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество великолепных монографий, в которых подробно и глубоко описываются теоретические основы сейсмической разведки и сейсмологии. Среди книг, многие годы влиявших на подготовку сейсмологов, можно упомянуть следующие: К. Аки и П. Ричардс "Количественная сейсмология"; Л.М. Бреховских "Волны в слоистых средах"; К. Буллен "Введение в теоретическую сейсмологию"; Х. Кольский "Волны напряжения в твердых телах"; W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press "Elastic Waves in Layered Media"; F.S. Grant, G.F. West "Interpretation Theory in Applied Geophysics"; J.E. White "Seismic Waves".

Однако практически во всех этих книгах с самого начала предполагается, что читатели обладают достаточно сильной подготовкой в некоторых областях физики, математики и математической физики. К сожалению, это не всегда так. Поэтому, чтобы заполнить существующий пробел, мы попытались дать описание основных физических принципов распространения акустических и сейсмических волн. Другими словами, мы рассматриваем только так называемые "прямые задачи" распространения волн в жидких и упругих средах. За пределами данной книги остались "обратные задачи" определения свойств среды по наблюдениям волнового поля, а также вычислительные аспекты решения "прямых задач". Мы надеемся, что наша книга будет полезна читателям для понимания более сложных вопросов, рассматриваемых в других книгах.

Для удобства читателя материал располагается по принципу "от простого к сложному". Последовательные части монографии органично связаны между собой. И мы надеемся, что преимущества такого расположения материала очевидны. Этот традиционный подход широко используется и в других областях геофизики. Один из авторов книги (А.А. Кауфман) придерживался именно такого способа изложения в своей монографии "Введение в теорию геофизических методов", где приводятся описания гравитационных, электрических и электромагнитных полей, используемых в геофизике.

Опишем кратко содержание данной книги. Первая глава посвящена законам Ньютона, которые вместе с законом Гука управляют поведением акустических и упругих волн. В этой главе мы напоминаем читателю о таких основных понятиях, как сила, работа, энергия, количество движения, импульс силы и центр масс. Все они используются при выводе уравнений, описывающих

ющих волновые явления. С этой же целью в главу помещено несколько примеров. Например, мы иллюстрируем механизм распространения волн через газ и описываем эллиптическую поляризацию, которая типична для большинства волн.

Распространение волн в любой среде сопровождается движением (колебаниями) и деформацией элементарных объемов. Каждый из этих элементов можно мысленно заменить системой, состоящей из масс и пружин. Движение такой системы описывается во второй главе. Сначала мы вводим закон Гука в его простейшей, скалярной форме, т.е. когда сила и смещение имеют либо одинаковые, либо противоположные направления.

Особое внимание уделяется свободным и вынужденным колебаниям, происходящим во время распространения волны. С помощью законов Ньютона и Гука выводятся уравнения колебаний. Существенно, что точно таким законам подчиняются и волновые явления.

Поскольку в реальности механическая энергия всегда преобразуется в тепло, в данной главе мы описываем явление затухания и вводим такие понятия, как декремент затухания, потери энергии и параметр Q . Помимо этого, здесь обсуждаются также принципы измерения смещений и ускорений частиц.

В третьей главе обсуждается совершенно другое явление, а именно, распространение движения. Чтобы подчеркнуть физические аспекты этого явления, мы выбрали модель, состоящую из последовательности масс и пружин, соединенных друг с другом. Такой подход не является новым и часто используется в литературе. Возможно, Ньютон был первым, кто применил эту модель для изучения акустических волн.

Используя эту модель, мы выводим волновое уравнение, описываем разницу между состоянием равновесия и динамическим состоянием и исследуем, как ведут себя смещение и сила в местах разрыва физических параметров. Кроме того, данная модель позволяет наглядно описать, как происходит отражение волн. В третьей главе мы обсуждаем также распространение попечерных (сдвиговых) волн вдоль бесконечной струны и вдоль струны конечной протяженности и, в частности, процесс возбуждения нормальных мод (стоячих волн).

В следующей главе, исходя из принципа сохранения массы, линейной связи между плотностью и давлением и из законов Ньютона, мы приходим к системе уравнений, описывающих волны сжатия (дилатации). Используя принцип неразрывности среды, мы формулируем также граничные условия, в том числе и вблизи источника.

Указанные уравнения используются для изучения поведения волн в различных средах. Поскольку существует бесконечное число решений этих уравнений, мы приводим теорему единственности для кусочно-однородной среды. В процессе обсуждения вводятся такие понятия, как плотность энергии волн сжатия, поток энергии и вектор Пойнтинга.

В эту главу мы включили также описание поверхностных (гравитационных) волн в несжимаемой жидкости. Это сделано по нескольким при-

чинам, главная из которых заключается в том, что эти волны во многом похожи на волны Рэлея и Стонли, существующие в упругой среде с границами раздела.

Следуя принципу "от простого к сложному", в главе 5 мы изучаем поведение волн в однородной среде. Сферические, цилиндрические и плоские волны рассматриваются здесь как в частотной, так и во временной областях. Особое внимание уделяется их свойствам в ближней, промежуточной и дальней зонах.

В главе 6 описываются основные свойства интерференции волн. При этом используются относительно простые модели (экраны), не требующие сложных математических вычислений, однако позволяющие наглядно продемонстрировать картину дифракции. Хотя в оптике эти модели очень часто имеют большое практическое значение, здесь они используются только для иллюстрации явления дифракции. В процессе обсуждения математических и физических основ этого явления, мы приводим вывод формул Гельмгольца и Кирхгофа и подробно описываем принципы Френеля и Гюйгенса. Кроме того, в данной главе рассматриваются зоны Френеля, вторичные источники и интерференция волн, вызванных этими источниками, а также влияние длины волны и геометрических параметров.

Помимо этого, здесь обсуждается переход к высокочастотному приближению, т.е. к геометрической акустике. Для упрощения анализа, мы выполняем его двумя разными способами. Один из них основан на использовании экранов и требует только простейших геометрических преобразований. Другой способ заключается в разложении решения волнового уравнения в степенной ряд по частоте. Для иллюстрации данного способа приводится простой пример, в котором плоская волна бежит в среде, где скорость меняется только в направлении распространения этой волны.

В главе 7 описывается конструктивная и деструктивная интерференция волн с близкими частотами и волновыми числами. Анализ этого явления связан с такими понятиями, как волновая группа, групповая скорость и стационарная фаза. Все эти понятия важны для понимания распространения нестационарных диспергирующих волн.

Последняя, восьмая глава посвящена принципам геометрической акустики в неоднородных средах. Сначала, исходя из уравнения эйконала, мы демонстрируем справедливость принципа Ферма. Затем рассматриваем поведение лучей и волновых фронтов в среде, где скорость является непрерывной функцией. Особое внимание уделяется поведению лучей на поверхностях раздела сред. Поскольку уравнение эйконала на этих границах не имеет смысла, для вывода законов преломления и отражения Снеллуса используются другие методы, основанные на принципе Ферма, принципе Гюйгенса и на решении граничной задачи для плоских волн. Большую часть этой главы занимает описание лучей отраженных, преломленных и головных волн в присутствии плоских границ раздела.

В конце этой книги мы поместили несколько приложений, в которых содержится необходимая информация об используемом здесь математичес-

ком аппарате. В них мы попытались описать в краткой форме смысл применяемых здесь элементов математики. Это особенно важно, когда речь идет о векторном анализе, поскольку такие понятия, как градиент, дивергенция, ротор и лапласиан играют основополагающую роль в теории акустических и упругих волн.

В этом введении мы хотим также вкратце описать содержание следующего тома монографии. Вначале мы продолжим обсуждение приближения геометрической акустики и рассмотрим акустические волны, распространяющиеся в слоисто-однородной среде. В следующих двух главах мы рассматриваем отражение и преломление плоской волны в горизонтально-слоистой среде. Следующая глава описывает поле сферического источника в присутствии одной плоской поверхности раздела. В пятой главе мы описываем распространение нормальных мод внутри слоя с пониженной скоростью. Последняя глава посвящена волнам внутри цилиндрического слоя.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы хотим поблагодарить Михаила Бармина, Норма Блейстайна, Владимира Гречку, Джона Десанто, Александра Каганского, Евгения Ланду, Кена Лэрнера, Льва Островского, Константина Наугольных и Татьяну Яновскую за полезные обсуждения. Мы также благодарны Матту Ханею за проверку приложений.

К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга является продолжением двух монографий "Введение в теорию геофизических методов", переводы которых вышли в издательстве "Недра" в 1997 и 2000 годах. Мы выражаем искреннюю благодарность Евро-Азиатскому геофизическому обществу и его президенту Н.А. Савостьянову за огромную помощь в подготовке этой книги. Мы также благодарны за финансовую поддержку Центру Шлюмберже в Москве (Директор Кристиан Бессон).

*Болдер, Колорадо, США.
Апрель 2001 г.*

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

а	ускорение
a_n, b_n	коэффициенты ряда Фурье
A_n, B_n	амплитуды нормальных мод
A_R	результатирующая амплитуда

c	фазовая скорость
c_a	кажущаяся скорость
c_g	групповая скорость
c_s	скорость поперечных волн
C	сжимаемость
C, S	функции Френеля
d	расстояние между источниками
dl	элементарное перемещение
dS	элемент площади
e_k	плотность кинетической энергии
e_p	плотность потенциальной энергии
e_{xx}	деформация
E	полная энергия
E_k	кинетическая энергия
E^*	параметр пружины
F	сила
g	гравитационное поле
G	функция Грина
h	ступенчатая функция
h'	производная ступенчатой функции
$H_0^{(1)}(mr), H_0^{(2)}(mr)$	функции Ганкеля нулевого порядка
$i = \sqrt{-1}$	мнимая единица
\mathbf{i}	единичный вектор
\mathbf{I}	среднее значение потока энергии
\mathbf{j}	единичный вектор
$J_0(mr), Y_0(mr)$	функции Бесселя
k	жесткость пружины, волновое число
k_r	волновые числа нормальных мод
K	кривизна
$K(\phi)$	коэффициент в формуле Френеля
l	длина пружины
L	путь
L, N	интегралы Френеля
L_1, L_2	характеристические длины
m	масса, параметр диска
M	полная масса, модуль объемного сжатия
\mathbf{M}	вектор
n	коэффициент преломления
\mathbf{n}	единичная нормаль к поверхности
N	импульс силы, акустическая длина
p	точка наблюдения, корни характеристических уравнений
P	давление
P_a	избыточное давление

P	количество движения (импульс)
Q	фактор, характеризующий затухание
r	расстояние от оси z
R	расстояние от начала координат
s	смещение
s_0	единичный вектор вдоль луча
S	эйконал
S_x, S_y, S_z	компоненты вектора Пойнтинга
t	время
T	период
T_b	период биений
T_0	период свободных колебаний, растяжение струны
u, v	переменные интегрирования
U	акустический потенциал, потенциальная энергия
U_n	потенциал, связанный с зонами Френеля
v	скорость
V_0	элементарный объем
W	работа
$\Delta W/W$	удельные потери
\mathbf{Y}	вектор Пойнтинга
X, Y, Z	компоненты силы
z	комплексное число
Z	импеданс
α, β, γ	направляющие косинусы
α	коэффициент в законе Кулона – Мора
$\alpha,$	логарифмический декремент
δ	дельта-функция
δ'	производная дельта-функции
γ	функция, характеризующая спектр
ϵ	малый параметр
Φ	комплексная амплитуда потенциала
ϕ	начальная фаза, акустический потенциал
λ	длина волны
θ	угол падения, дилатация
θ_r	угол отражения
θ_2	угол преломления
θ_c	критический угол
ρ	объемная плотность
ρ_o	приращение плотности
Σ	поверхность
τ	постоянная времени, задержка по времени
ω	частота
ω_0	частота свободных колебаний

Глава 1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА И ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ

1.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В 1686 году Ньютон опубликовал свой трактат “Математические начала натуральной философии”, в котором он сформулировал три физических закона природы. Эти законы лежат в основе классической механики, которая позволяет описывать различные типы движений, включая распространение волн в акустических и упругих средах.

Чтобы выразить физические законы в виде формул, описывающих гравитационные, электрические и магнитные поля, используют такие понятия, как масса, заряд, ток и т.д. Таким же образом можно ввести понятие элементарной массы (частицы) и затем описать законы Ньютона. Предполагается, что масса распределена равномерно внутри частицы, а сама частица настолько мала, что все составляющие ее элементы имеют в каждый момент времени одинаковые скорость и ускорение. В дальнейшем мы покажем, что при этом предположении можно пренебречь собственным вращением частицы и распространением волн внутри нее.

Сформулируем теперь законы Ньютона для элементарной массы.

Первый закон

Существуют системы отсчета, в которых частица (элементарная масса) остается в состоянии покоя или движется с некоторой постоянной скоростью \mathbf{v} при условии, что на нее не действуют никакие внешние силы. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Второй закон

Ускорение \mathbf{a} частицы прямо пропорционально действующей на частицу внешней силе \mathbf{F}

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где m – масса частицы.

Третий закон

Силы всегда возникают парами. Предположим, что частица m_1 действует с силой \mathbf{F}_{12} на частицу m_2 . В свою очередь частица m_2 действует на частицу

m_1 с силой F_{21} , которая имеет ту же величину, что и сила F_{12} , но направлена в противоположную сторону (рис. 1.1, а)

$$\mathbf{F}_{21}(p_1) = -\mathbf{F}_{12}(p_2). \quad (1.2)$$

Теперь, после того как мы сформулировали законы Ньютона, следует сделать несколько замечаний.

1. Законы Ньютона справедливы в любой инерциальной системе отсчета, относительно которой измеряются такие кинематические параметры, как скорость и ускорение. Инерциальная система отсчета определяется следующим образом. Если в отсутствии внешних сил скорость частицы постоянна в некоторой системе отсчета, то такая система называется инерциальной.

2. В общем случае на частицу могут действовать сразу несколько сил, различающихся величиной и направлением. Соответственно, сила F в уравнении (1.1) является суммарной, или полной, силой, действующей на частицу:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (1.3)$$

Полная сила является внешней силой, поскольку ее источник находится вне частицы.

Заметим, что в общем случае сумму сил, приложенных к разным точкам тела, можно представить в виде полной силы, действующей в некоторой точке, и вращающего момента. Моментом сил можно пренебречь в предположении, что вращение частицы отсутствует.

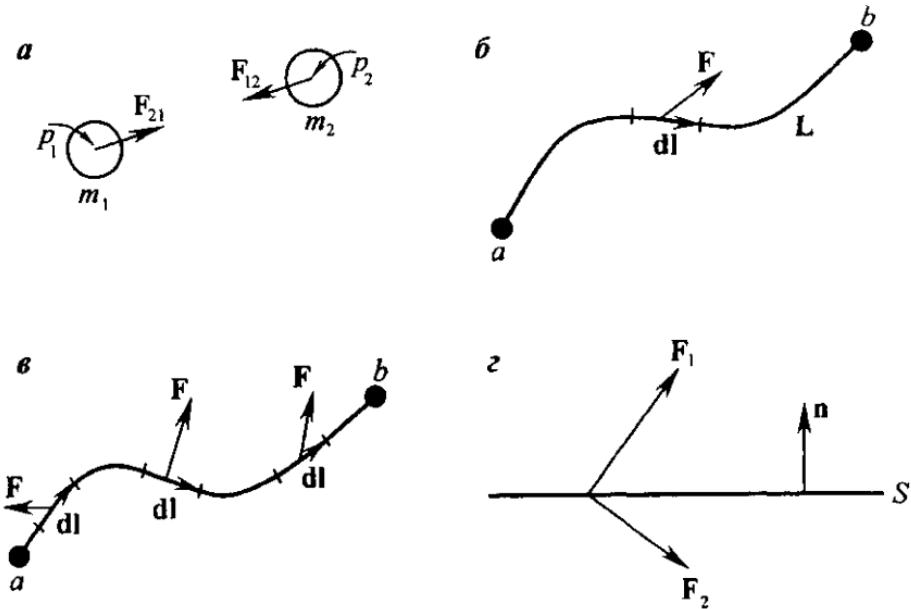


Рис. 1.1. Иллюстрация третьего закона Ньютона (а); сила и работа (б, в, г)

3. Скорость и ускорение являются векторами, которые связаны друг с другом следующим образом:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt. \quad (1.4)$$

Векторы \mathbf{a} и \mathbf{v} зависят от точки наблюдения и от времени и в общем случае имеют различные направления.

4. Как следует из второго закона Ньютона, чем больше масса частицы, тем меньше ее ускорение, вызванное данной силой. Таким образом, масса представляет собой количественную меру инерции или, другими словами, меру способности сопротивляться изменению скорости. Единица измерения, используемая в практической системе для измерения массы, – это килограмм:

[масса] – кг.

Инерция является свойством тел. Так, например, масса любого тела остается одной и той же, независимо от того, находится оно на Земле или на Луне. В главе 3 мы покажем, как инерция связана со временем распространения волн в теле.

5. Поскольку ускорение измеряется в м/с^2 , единицей измерения силы является

$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Эта единица измерения называется Ньютоном:

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н.}$$

В системе СГС (Гауссова система) единицей измерения силы является дина:

$$1 \text{ дина} = 10^{-5} \text{ Н.}$$

6. Согласно равенству (1.1) ускорение прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе. Таким образом, масса и сила играют противоположную роль при ускорении частицы. Мы еще не раз будем это наблюдать, рассматривая различные типы движения, включая распространение волн.

7. Из второго закона Ньютона следует также, что сила и ускорение имеют одинаковое направление. Векторы скорости и силы, тем не менее, могут иметь разную ориентацию, например, они могут быть направлены в противоположные стороны.

8. Предположим, что результирующая сила \mathbf{F} равна нулю. Тогда из (1.1) получаем

$$\mathbf{a} = 0 \quad \text{или} \quad d\mathbf{v}/dt = 0$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \text{const.}$$

Принцип инерциального движения был впервые открыт Галилеем.

9. Формулируя третий закон Ньютона, мы рассматривали две частицы и действующие на них силы. Несмотря на то, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению, их результирующая не равна нулю, поскольку эти силы приложены к разным частицам.

Основываясь на законах Ньютона, введем теперь такие понятия, как количество движения (импульс частицы), импульс силы, работа, а также кинетическая и потенциальная энергия.

Из равенства (1.1) имеем

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F,$$

или

$$dP/dt = F, \quad (1.5)$$

где

$$P = mv \quad (1.6)$$

является вектором, который называется импульсом частицы и измеряется в Н·с:

$$[P] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Таким образом, согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на частицу, равна скорости изменения импульса частицы. Другими словами, импульс частицы изменяется именно благодаря действующей на нее силе. В частности, в отсутствие сил импульс частицы остается постоянным:

$$P = \text{const.} \quad (1.7)$$

Это еще одна формулировка первого закона Ньютона.

Запишем теперь уравнение (1.5) в виде

$$dP = F dt. \quad (1.8)$$

Произведение $F dt$ обычно называют импульсом dN силы, действующей в течение интервала времени dt :

$$dN = F dt + dP. \quad (1.9)$$

Заметим, что импульс силы и количество движения частицы измеряются в одинаковых единицах.

Предположим, что на частицу действует сила $F(t)$ в течение интервала времени

$$t_1 \leq t \leq t_2.$$

Тогда из равенства (1.9) имеем

$$\int_a^b d\mathbf{P} = \int_a^b \mathbf{F}(t)dt = \mathbf{N}$$

или

$$\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{N}, \quad (1.10)$$

т.е. импульс силы \mathbf{N} равняется разности импульсов частицы в моменты времени t_2 и t_1 .

Компоненты этих векторов в прямоугольной декартовой системе координат связаны между собой следующим образом:

$$P_x(t_2) - P_x(t_1) = N_x,$$

$$P_y(t_2) - P_y(t_1) = N_y,$$

$$P_z(t_2) - P_z(t_1) = N_z.$$

Введем теперь понятие работы, которую можно определить (рис. 1.1, б) как

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ – скалярное произведение силы \mathbf{F} и перемещения $d\mathbf{l}$. Оно определяется следующим образом

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_i dl. \quad (1.12)$$

Здесь F_i обозначает тангенциальную компоненту силы в направлении перемещения.

По определению, скалярное произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ характеризует работу силы \mathbf{F} , затраченную на перемещение частицы на расстояние dl . На рис. 1.1, в показаны три возможные ориентации векторов \mathbf{F} и $d\mathbf{l}$ относительно друг друга. В первом случае проекция силы на направление $d\mathbf{l}$ является положительной, и, следовательно, сила \mathbf{F} производит работу. Иными словами, в результате работы, произведенной силой \mathbf{F} , частица перемещается в направлении $d\mathbf{l}$. Во втором случае направления силы \mathbf{F} и перемещения $d\mathbf{l}$ перпендикулярны друг к другу, и, следовательно, сила не производит работы вдоль этого пути. Наконец, в последнем случае, когда угол между этими векторами составляет более 90° , работа является отрицательной. Это означает, что работа по перемещению частицы производится в направлении, противоположном \mathbf{F} .

Как это следует из определения (1.11), работа силы \mathbf{F} вдоль пути $L = [a, b]$ (рис. 1.1, в) представляет собой сумму (или интеграл) положительных и отрицательных элементарных составляющих работы вдоль этого пути. Суммарная работа может зависеть от пути L , а также от положения конечных точек интервала a и b . В дальнейшем мы будем рассматривать в основ-

ном такие силы, работа которых от пути не зависит. Такие силы называются консервативными и, соответственно, в этом случае в определении (1.11) путь указывать не обязательно.

Обратимся теперь к некоторым свойствам векторных полей, рассмотренных в приложении 3. Как там показано, независимость результата интегрирования от пути означает, что работа силы вдоль замкнутого контура равняется нулю:

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.13)$$

Воспользовавшись определением ротора \mathbf{F} , мы приходим к другой форме равенства (1.13)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0. \quad (1.14)$$

Данное выражение справедливо в регулярных точках, т.е. там, где существуют первые производные силы \mathbf{F} . В то же время мы можем предполагать, что на некоторых поверхностях сила \mathbf{F} терпит разрыв. Тогда, как следует из приложения 3, аналогом выражения (1.14) для такой поверхности является формула

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = 0, \quad (1.15)$$

или

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{F}_1,$$

где \mathbf{n} обозначает вектор единичной нормали к поверхности (рис. 1.1, 2). Поскольку эти векторы ортогональны \mathbf{n} , заключаем, что тангенциальные компоненты силы при переходе через поверхность остаются непрерывными.

Непосредственно из равенства (1.14) следует, что консервативную силу \mathbf{F} можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции (см. приложение 3). Представим эту силу в виде

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U, \quad (1.16)$$

поскольку

$$\operatorname{grad} \mathbf{F} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0.$$

Используя выражение (1.16), можно избежать вычисления интеграла в равенстве (1.11) и выразить работу через функцию U . Действительно, подставляя (1.16) в (1.11) и принимая во внимание, что

$$d\mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial l} dl = dU,$$

получим

$$W = - \int_a^b \operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b dU = U(a) - U(b). \quad (1.17)$$

Таким образом, зная значения функции U на концах пути, мы можем найти работу без всякого интегрирования. Эта работа равняется разности значений функции U в конечных точках интервала. Существует аналогия между функцией U и потенциалом электрического и гравитационного полей, с помощью которого можно вычислить работу, производимую этими полями. Функция U , так же, как и потенциалы, определяется неоднозначно, с точностью до некоторой постоянной. В частности, существует бесконечное множество функций U , которые при подстановке в выражение (1.16) будут давать одну и ту же силу F .

Заметим, что функция U и работа W задаются произведением силы на перемещение, и, следовательно, обе эти функции измеряются в джоулях:

$$[W] = [U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж.}$$

Существует несколько классических примеров консервативных сил. К ним относятся гравитационные и не зависящие от времени электрические силы, а также силы, возникающие при упругой деформации пружины. С другой стороны, работа сил трения или магнитных сил зависит от пути интегрирования и, следовательно, такие силы не являются консервативными.

Прежде чем обсуждать смысл функции U , естественно ввести понятие кинетической энергии. Поскольку в нашем случае работа не зависит от пути, будем предполагать, что скорость v направлена по касательной в каждой точке пути L . Тогда, используя второй закон Ньютона, выражение под интегралом (1.11) можно записать как

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = m \frac{dv}{dt} \cdot d\mathbf{l} = m \frac{dv}{dt} dl.$$

Применяя равенство

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} = v \frac{dv}{dl},$$

имеем

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = mv \frac{dv}{dl} dl = mv dv,$$

и, следовательно,

$$W = \int_a^b F_i dl = m \int_a^b v dv = \frac{mv^2(b)}{2} - \frac{mv^2(a)}{2}. \quad (1.18)$$

Функция

$$E = mv^2/2 \quad (1.19)$$

называется кинетической энергией частицы массы m , движущейся со скоро-

стью v . Таким образом, мы нашли еще один способ выразить работу и при этом избежать интегрирования вдоль пути в выражении (1.11).

Как следует из равенства (1.18), работа W , производимая силой F , равняется разнице кинетических энергий частицы в конечных точках интервала пути. Объединяя выражения (1.17) и (1.18), описывающие работу, получим

$$W = U(a) - U(b) = E(b) - E(a),$$

или

$$U(a) + E(a) = U(b) + E(b). \quad (1.20)$$

Последнее соотношение подсказывает, что функция U описывает энергию, которая называется потенциальной энергией частицы. Соответственно, уравнение (1.20) означает, что сумма кинетической и потенциальной энергий частицы не меняется при условии, что работа по перемещению частицы производится консервативными силами. Таким образом, это уравнение является формулой закона сохранения механической энергии:

$$E(p) + U(p) = \text{const}, \quad (1.21)$$

где p – произвольная точка пути, по которому происходит движение частицы.

В соответствии с выражениями (1.17) и (1.18) имеем

$$U(b) = U(a) - W$$

и

$$E(b) = E(a) + W. \quad (1.22)$$

Это означает, что если работа силы F является положительной, то потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая – увеличивается. И наоборот, если частица движется в направлении противоположном направлению силы F , то потенциальная энергия частицы растет, а кинетическая – уменьшается.

Заметим, что уравнение (1.21) объясняет, почему сила F называется кон-

Таблица 1.1

Величина	Обозначение	Выражение	Размерность
Смещение	s	–	м
Скорость	v	ds/dt	$\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$
Ускорение	a	dv/dt	$\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$
Масса	m	–	кг
Сила	F	ma	Н
Количество движения (импульс частицы)	P	mv	$\text{Н}\cdot\text{с}$
Импульс силы	N	$\int F dt$	$\text{Н}\cdot\text{с}$
Работа	W	$\int F \cdot dl$	Дж
Потенциальная энергия	U	$\int F \cdot dl$	Дж
Кинетическая энергия	E	$mv^2/2$	Дж

сервативной. Как было показано ранее, если силы подчиняются равенству (1.13), то механическая энергия частицы сохраняется.

При обсуждении законов Ньютона мы ввели несколько основных понятий (табл. 1.1). Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих движение частицы.

Пример 1

Предположим, что в течение интервала времени

$$0 \leq t \leq T$$

сила F_x , действующая на частицу, имеет только компоненту x (рис. 1.2, *a*).

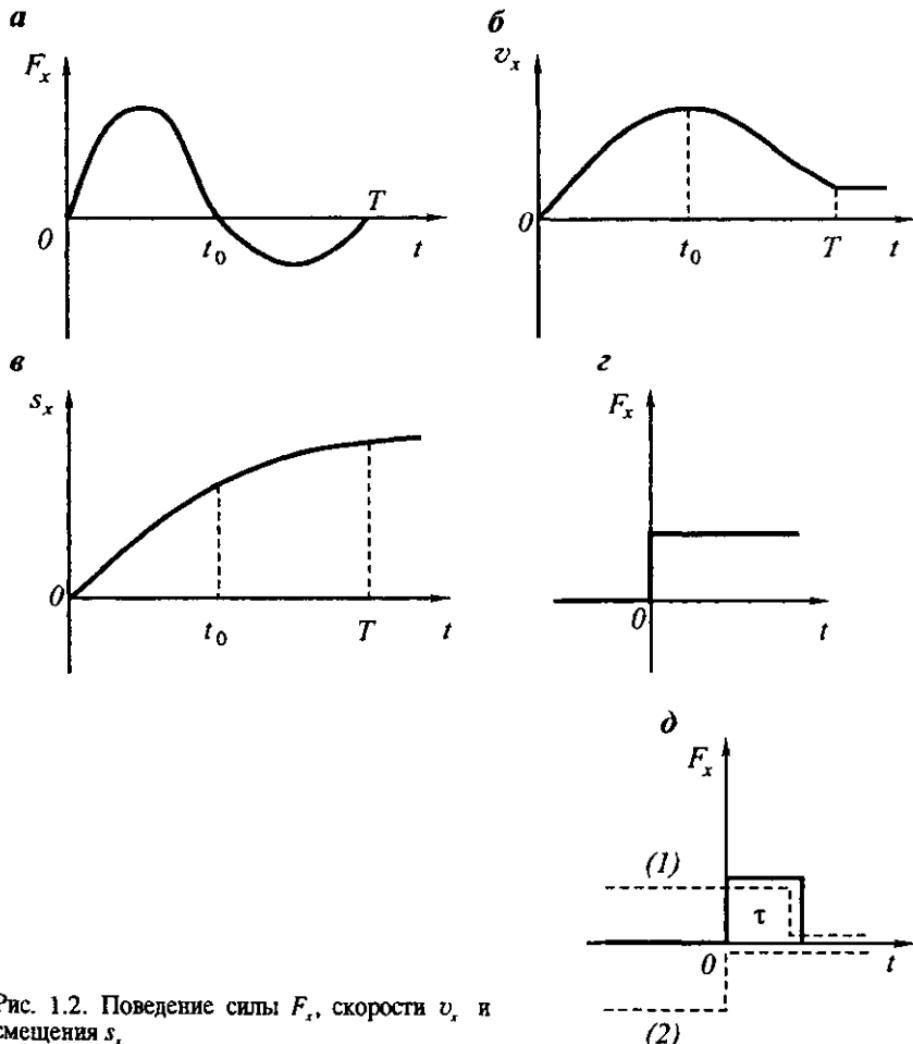


Рис. 1.2. Поведение силы F_x , скорости v_x и смещения s_x .

Опишем движение частицы при условии, что в начальный момент времени она покоялась, т.е.

$$s_x(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad a_x(0) = 0.$$

Здесь s_x , v_x и a_x – это x -компоненты перемещения, скорости и ускорения соответственно.

Применяя второй закон Ньютона, получим

$$a_x = \frac{F_x(t)}{m}, \quad v_x = \frac{\int_0^t F_x dt}{m}, \quad s_x = \int_0^t v_x(t) dt. \quad (1.23)$$

Прежде всего, очевидно, что ускорение и сила зависят от времени одинаковым образом. До некоторого момента времени $t = t_0$ они направлены вдоль оси x . После этого ускорение и сила меняют знак и в момент времени $t = T$ становятся равными нулю. Поведение скорости – совершенно другое (рис. 1.2, б). Сначала скорость быстро возрастает и в момент времени $t = t_0$ достигает своего максимального значения. Затем, по мере уменьшения импульса силы, скорость также падает и в момент времени $t = T$ достигает своего минимального значения. После этого частица движется с постоянной скоростью. Зависимость перемещения от времени показана на рис. 1.2, в. По определению, скорость равняется наклону этой кривой.

В соответствии с выражением (1.23), импульс силы в некоторый момент времени t определяет мгновенную скорость движения частицы. В частности, если

$$\int_0^t F_x(t) dt = 0, \quad (1.24)$$

то частица прекращает свое движение, и ее скорость становится равной нулю:

$$v_x(t) = 0.$$

Очевидно также, что если импульс силы изменит свой знак, то частица начнет двигаться в противоположном направлении.

Пример 2

Предположим теперь, что внешняя сила F_x ведет себя как ступенчатая функция (рис. 1.2, г), претерпевающая разрыв в момент времени $t = 0$. Как следует из равенства (1.23), ускорение в этом случае также является ступенчатой функцией, а для скорости и смещения имеем

$$v_x(t) = \frac{F_1}{m} t \quad \text{и} \quad s_x(t) = \frac{F_1 t^2}{2m}.$$

Таким образом, движение частицы в первый момент времени определяется следующими начальными условиями

$$s_x(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad a_x = F_x/m. \quad (1.25)$$

Другими словами, в начальный момент времени действие силы приводит только к появлению ускорения.

Пример 3

Рассмотрим действие прямоугольного импульса, имеющего амплитуду F_x и длительность τ (рис. 1.2, δ). Видно, что после завершения действия этого импульса в момент времени $t = \tau$ ускорение, скорость и смещение частицы равняются

$$a_x(\tau) = 0, \quad v_x(\tau) = F_x \tau / m, \quad s_x(\tau) = F_x \tau^2 / 2m. \quad (1.26)$$

Из этих выражений следует, что при уменьшении длительности τ и, следовательно, при уменьшении импульса силы $N_x(\tau)$ скорость и смещение также уменьшаются и в пределе стремятся к нулю.

Предположим теперь, что уменьшение длительности импульса τ сопровождается увеличением силы F_x так, что импульс силы N_x остается постоянным. Тогда в пределе мы получим дельта-функцию Дирака δ , т.е. импульс бесконечно малой продолжительности и бесконечно большой амплитуды. Начальные условия в этом случае записываются как

$$a_x(0) = 0, \quad v_x(0) = N_x / m, \quad s_x(0) = 0. \quad (1.27)$$

Это означает, что в момент времени $t = 0$ сила приводит только к появлению ненулевой скорости.

Заметим, что при изучении стационарных колебаний и распространения волн обе эти функции – ступенчатая и дельта-функция – будут использоваться довольно часто.

Пример 4

Представим себе, что на частицу действуют сразу две силы, которые направлены, соответственно, вдоль оси x и вдоль оси y , а их изменение во времени описывается синусоидальными функциями. Предположим также, что эти колебания имеют один и тот же период i , кроме того, сдвинуты по фазе на 90° относительно друг друга. Тогда смещения частиц вдоль каждой из осей можно записать как

$$s_x(t) = a \sin \omega t, \quad s_y(t) = b \sin \left(\omega t \pm \frac{\pi}{2} \right), \quad (1.28)$$

где ω – угловая частота, а множители a и b задают амплитуды колебаний.

Таким образом, вектор смещения записывается в виде

$$s(t) = i a \sin \omega t \pm j b \cos \omega t. \quad (1.29)$$

Здесь \mathbf{i} и \mathbf{j} – единичные векторы вдоль осей x и y .

Чтобы определить траекторию движения частицы, представим выражения (1.28) следующим образом:

$$s_x(t)/a = \sin \omega t \quad \text{и} \quad s_y(t)/b = \pm \cos \omega t.$$

Возводя эти величины в квадрат и затем складывая их, получим

$$s_x^2(t)/a^2 + s_y^2(t)/b^2 = 1. \quad (1.30)$$

Это равенство является уравнением эллипса с полуосами a и b , лежащего в плоскости XOY (рис. 1.3). Таким образом, за время, равное периоду

$$T = 2\pi/\omega,$$

частица движется по эллиптической траектории и возвращается в начальную точку, причем направление движения (по часовой стрелке или против) зависит от знака фазы $\pm\pi/2$. Так, например, если

$$s_x(t) = a \sin \omega t, \quad s_y(t) = b \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

то движение происходит по часовой стрелке. Данное свойство движения частицы называется эллиптической поляризацией. Когда обе амплитуды a и b равны друг другу, эллипс становится кругом. Также легко показать, что если компоненты смещения s_x и s_y изменяются синхронно, т.е. если отсутствует фазовый сдвиг, то частица движется вдоль прямой линии (линейная поляризация), наклон которой относительно оси x равен

$$\operatorname{tg} \varphi = b/a.$$

Мы показали, что движение частицы эллиптически поляризовано, когда разность фаз между смещениями s_x и s_y равняется $\pm\pi/2$. Можно также показать, что такое же движение наблюдается при произвольном фазовом сдвиге. Однако в общем случае полуоси эллипса уже не будут совпадать с осями координат. Позднее, изучая распространение волн, мы рассмотрим различные типы поляризации. Эллиптической поляризацией обладают, например, волны Рэлея и волны Стонли. Стоит также заметить, что если зависимость от времени не является синусоидальной, то траектория движения частицы имеет, как правило, очень сложную форму.

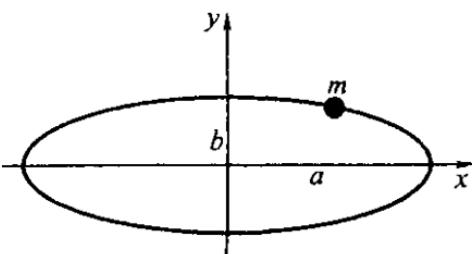


Рис. 1.3. Эллиптическая поляризация

В заключение добавим следующее. Предположим, что в момент времени $t = 0$ частица покоятся, т.е. $\mathbf{v}(0) = 0$. Если затем на частицу действует система сил так, что суммарная сила в каждый момент времени равна нулю, т.е.

$$\sum \mathbf{F}_n(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.31)$$

то, как следует из равенства (1.5), частица двигаться не будет. Таким образом, частица находится в состоянии равновесия, если удовлетворяется условие (1.31), а вращение частицы отсутствует.

1.2. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

До сих пор мы рассматривали движение одной единственной частицы. Теперь целесообразно дать описание некоторых общих свойств движения системы частиц. С этой целью введем понятие центра масс. Предположим сначала, что имеются всего две частицы с массами m_1 и m_2 , движущиеся вдоль оси x (рис. 1.4, a). В каждый момент времени t их положение определяется, соответственно, координатами $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Центр масс этих частиц задается следующим образом:

$$x_0(t) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_{n=1}^2 m_n x_n}{M} = \frac{m_1}{M} x_1(t) + \frac{m_2}{M} x_2(t), \quad (1.32)$$

где

$$M = m_1 + m_2$$

является полной массой системы.

Как видно из выражения (1.32), центр масс расположен между частицами, причем ближе к частице с большей массой. В частности, если массы частиц одинаковы, центр масс располагается точно посередине. Таким

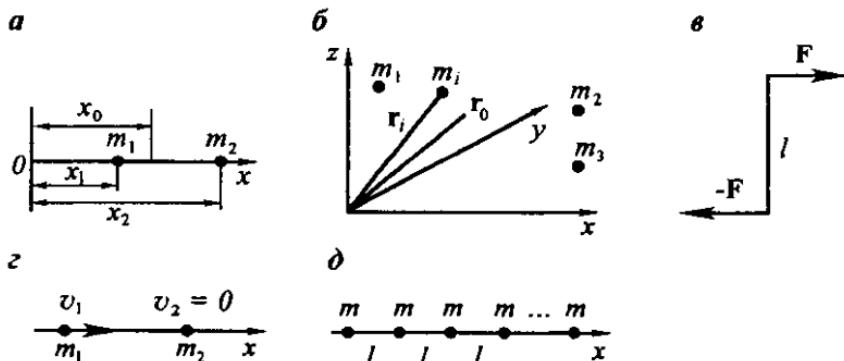


Рис. 1.4. Центр масс (a, δ); пара сил (c); соударение двух частиц (z); система масс (δ)

образом, центр масс характеризует, в некоторой степени, распределение частиц.

Центр масс обладает двумя другими важными свойствами. Формулу (1.32) удобно переписать в виде

$$M x_0(t) = m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t). \quad (1.33)$$

Дифференцирование последнего выражения по времени дает

$$M v_{0x}(t) = m_1 v_{1x}(t) + m_2 v_{2x}(t), \quad (1.34)$$

где v_{1x} , v_{2x} и v_{0x} – скорости частиц и центра масс.

Это соотношение показывает, что в общем случае скорость центра масс отличается от скоростей частиц. Поскольку правая часть уравнения (1.34) представляет собой сумму импульсов обеих частиц, естественно назвать ее импульсом (количеством движения) системы

$$P_x(t) = P_{1x}(t) + P_{2x}(t).$$

Равенство (1.34) тогда записывается следующим образом:

$$M v_{0x} = P_x(t), \quad (1.35)$$

т.е. скорость центра масс определяется импульсом системы и ее полной массой.

После дифференцирования соотношения (1.34) получим

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

или

$$M a_{0x} = m_1 a_{1x}(t) + m_2 a_{2x}(t). \quad (1.36)$$

Здесь a_{0x} – это ускорение центра масс, a_{1x} и a_{2x} – ускорения, соответственно первой и второй частицы.

Применяя второй закон Ньютона, вместо уравнения (1.36) получим

$$M a_{0x} = F_{1x} + F_{2x}. \quad (1.37)$$

Здесь F_{1x} и F_{2x} обозначают результирующие силы, действующие на каждую частицу.

Нам важно различать два типа сил: внутренние и внешние. Внутренние силы возникают из-за взаимодействия частиц системы, в то время как источники внешних сил находятся вне ее. Соответственно, имеем

$$F_{1x} = F_{1x}^e + F_{1x}^i, \quad F_{2x} = F_{2x}^e + F_{2x}^i, \quad (1.38)$$

где F_{1x}^e и F_{2x}^e обозначают внешние силы, источником которых не являются частицы самой системы. И наоборот, силы F_{1x}^i и F_{2x}^i , вызванные частицами самой системы, являются внутренними. Так, например, F_{1x}^i – это сила, с которой вторая частица действует на первую.

Согласно третьему закону Ньютона внутренние силы, например гравитационные, электрические или поверхностные, возникают парами так, что

$$\mathbf{F}_1^i = -\mathbf{F}_2^i \quad \text{или} \quad F_{1x}^i = -F_{2x}^i.$$

Таким образом, правая часть соотношения (1.37) упрощается, и мы получаем

$$M a_{0x} = F_{1x}^e + F_{2x}^e = F_x^e, \quad (1.39)$$

где F_x^e – результирующая внешняя сила.

Это означает, что движение центра масс не зависит от внутренних сил, хотя они и влияют на движение каждой частицы в отдельности.

Выражение (1.39) можно переписать в виде

$$dP_x/dt = F_x^e, \quad (1.40)$$

поскольку

$$M a_{0x} = M \frac{dv_{0x}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}.$$

Таким образом, движение центра масс можно представить как движение частицы массы M под действием внешней силы F_x^e . Таково третье из упомянутых ранее свойств центра масс.

Обобщим теперь этот результат. Предположим, что имеется произвольное число частиц, причем в общем случае эти частицы имеют различные скорости, ускорения и направления движения (рис. 1.4, б).

Координата x центра масс такой системы определяется так же, как и раньше:

$$x_0(t) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n x_n, \quad (1.41)$$

где x_n – координата x частицы массы m_n , M – полная масса системы:

$$M = \sum_{n=1}^N m_n.$$

Для непрерывного распределения масс с линейной плотностью ρ вдоль некоторой линии L имеем

$$M = \int_L \rho dl \quad \text{и} \quad x_0(t) = \frac{1}{M} \int_L \rho x dx, \quad (1.42)$$

где ρdx – масса линейного элемента.

Точно так же определяются две другие координаты центра масс:

$$x_0(t) = \frac{\sum m_n x_n}{M}, \quad y_0(t) = \frac{\sum m_n y_n}{M}, \quad z_0(t) = \frac{\sum m_n z_n}{M}. \quad (1.43)$$

После дифференцирования этих выражений по времени имеем

$$v_{0x} = \frac{\sum m_n v_{nx}}{M}, \quad v_{0y} = \frac{\sum m_n v_{ny}}{M}, \quad v_{0z} = \frac{\sum m_n v_{nz}}{M}. \quad (1.44)$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$a_{0x} = \frac{\sum m_n a_{nx}}{M}, \quad a_{0y} = \frac{\sum m_n a_{ny}}{M}, \quad a_{0z} = \frac{\sum m_n a_{nz}}{M}.$$

Умножая каждую из сумм в выражениях (1.43) соответственно на векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , а затем складывая результаты, получим

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{r}_n}{M}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{v}_n}{M}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\sum m_n \mathbf{a}_n}{M}, \quad (1.45)$$

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор центра масс, а \mathbf{r}_n – радиус-вектор частицы с номером n (рис. 1.4, б):

$$\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{i} + y_n \mathbf{j} + z_n \mathbf{k}.$$

В частности, для непрерывного распределения масс имеем

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{M}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\int \rho \mathbf{v} dV}{M}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\int \rho \mathbf{a} dV}{M}, \quad (1.46)$$

где ρ – объемная плотность, dV – элементарный объем.

Как следует из равенств (1.45),

$$M \mathbf{v}_0 = \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_n = \mathbf{P} \quad (1.47)$$

и

$$M \mathbf{a}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \mathbf{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n^r = \mathbf{F}^r, \quad (1.48)$$

поскольку сумма внутренних сил равна нулю.

Как и ранее, мы видим два замечательных свойства центра масс, а именно:

1) импульс центра масс совпадает с количеством движения тела массы M и равняется следующей сумме:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_n;$$

2) ускорение центра масс определяется суммарной внешней силой и массой всей системы. Этот факт сильно упрощает изучение его движения. В отличие от центра масс, чтобы определить смещение, скорость и ускорение некоторой частицы системы, необходимо знать действующие на нее внутренние силы. Но эти силы существенно зависят от расстояния между частицами,

которое, в общем случае, изменяется со временем. Поэтому вычисление кинематических параметров частиц системы обычно является более сложной задачей, чем вычисление этих параметров для центра масс.

Как отмечалось ранее, в случае непрерывного распределения масс суммирование внешних сил в выражении (1.48) приводит к результирующей силе, приложенной к центру масс, и силовому диполю, т.е. паре сил, имеющих одинаковую величину и противоположное направление (рис. 1.4, в). Здесь мы предполагаем, что эта пара сил отсутствует.

Выражение (1.48) можно переписать как

$$\sum_{n=1}^N m_n \mathbf{a}_n = \sum_{n=1}^N m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e.$$

Таким образом, если результирующая сила равняется нулю, импульс, а также скорость центра масс остаются постоянными:

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{v}_n = \text{const}, \quad \mathbf{v}_0 = \text{const} \quad (\text{если } \mathbf{F}^e = 0). \quad (1.49)$$

В то же время частицы системы могут двигаться с ускорением. Первое из соотношений (1.49) представляет собой формулировку закона сохранения импульса для произвольного распределения масс, например для их непрерывного распределения.

Мы рассмотрели систему элементарных масс и, в частности, поведение ее центра масс по двум причинам. Одна из них связана с изучением столкновений частиц. Другая причина заключается в том, что распространение волн сопровождается движениями элементарного объема среды. Чтобы получить уравнение, описывающее движения такого объема, необходимо применить второй закон Ньютона:

$$m \mathbf{a}_0 = \mathbf{F}^e,$$

где m – масса объема, \mathbf{a}_0 – ускорение его центра масс, а \mathbf{F}^e – внешняя сила.

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

Вернемся теперь к случаю простейшей системы, состоящей из двух частиц, и рассмотрим их соударение. Предположим, что интервал времени, в течение которого происходит столкновение, чрезвычайно мал, и частицы в это время не меняют своего положения. Предположим также, что неконсервативные внешние силы отсутствуют и, следовательно, полная механическая энергия до и после столкновения остается одной и той же. В общем случае наличие неконсервативных сил приводит к некоторым потерям механической энергии.

Во время своего соударения частицы деформируются. Соответственно, они приобретают некоторое количество потенциальной энергии. Затем, после деформаций, частицы восстанавливают свою первоначальную форму, и

потенциальная энергия снова переходит в кинетическую. В действительности этот процесс занимает некоторое время, но в нашем приближении можно считать, что он происходит мгновенно. В качестве примера рассмотрим случай, когда частица массы m_1 движется вдоль оси x с постоянной скоростью v_1 навстречу частице с массой m_2 (рис. 1.4, 2). Предположим также, что внешние силы отсутствуют. Таким образом, оказываются удовлетворенными все условия, необходимые для сохранения импульса системы и ее механической энергии.

До столкновения имеем

$$P = m_1 v_1 \quad \text{и} \quad E = m_1 v_1^2 / 2, \quad (1.50)$$

поскольку

$$v_2 = 0.$$

Обозначая скорости частиц после столкновения как v_{1*} и v_{2*} , приходим к следующим выражениям для импульса и энергии:

$$P = m_1 v_{1*} + m_2 v_{2*} \quad \text{и} \quad E = \frac{m_1 v_{1*}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2*}^2}{2}. \quad (1.51)$$

Принимая во внимание закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, получим систему из двух уравнений относительно неизвестных скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_{1*} + m_2 v_{2*}, \\ m_1 v_1^2 / 2 &= m_1 v_{1*}^2 / 2 + m_2 v_{2*}^2 / 2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Решение этой системы имеет вид

$$v_{1*} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{и} \quad v_{2*} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\text{если } v_2 = 0). \quad (1.53)$$

Из соотношений (1.53) можно сделать следующие выводы.

1. Скорость первой частицы v_{1*} не может превышать скорость v_1 этой же частицы до столкновения, поскольку часть энергии передается другой частице.

2. Если массы обеих частиц равны между собой, то первая частица в результате соударения остановится, а вторая будет двигаться со скоростью, равной скорости v_1 :

$$v_{2*} = v_1.$$

3. Если масса первой частицы больше массы второй частицы: $m_1 > m_2$, то обе частицы будут двигаться в одном направлении. При увеличении отношения m_1/m_2 скорость первой частицы будет стремиться к v_1 , а скорость второй частицы – к $2v_1$.

4. Если масса m_1 меньше массы m_2 , то после столкновения первая частица начнет двигаться в противоположном направлении, а скорость второй частицы будет меньше скорости v_1 .

Рассмотрим теперь распределение кинетической энергии. Согласно формуле (1.19) кинетическая энергия частиц определяется как

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad E_2 = 0$$

и

$$E_{1'} = \frac{m_1 v_{1'}^2}{2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

$$E_{2'} = \frac{m_2 v_{2'}^2}{2} = \frac{4m_1^2 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$$

или

$$\frac{E_{1'}}{E_1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{E_{2'}}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}. \quad (1.54)$$

Отсюда, например, следует, что когда массы частиц равны друг другу, вся кинетическая энергия первой частицы передается после столкновения второй частице.

С другой стороны, если разность масс велика, энергия первой частицы практически не изменится. В то же время энергия второй частицы будет относительно мала, если

$$m_2/m_1 \ll 1 \quad \text{или} \quad m_2/m_1 \gg 1.$$

Полезно также рассмотреть систему, состоящую из нескольких частиц одинаковой массы, расположенных на расстоянии l друг от друга вдоль оси x (рис. 1.4, δ). Предположим, что в момент времени $t = 0$ первая частица начинает двигаться в сторону второй частицы со скоростью v . Затем, в момент времени

$$\tau = l/v$$

она сталкивается со второй частицей и останавливается. В результате соударения частица массы m_2 также начинает двигаться, и это показывает, каким образом движение и энергия передаются в системе. Например, в момент времени

$$t_n = nl/v$$

частица m_{n+1} начинает двигаться со скоростью v .

Для процесса переноса требуются последовательные соударения частиц. Этот процесс играет важнейшую роль при распространении волн в газе, однако в жидкостях и твердых телах механизм распространения волн совершенен иной.

Глава 2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Теперь, используя законы Ньютона, приступим к изучению колебаний. В качестве простейшего примера рассмотрим движение системы, состоящей из пружины и подвешенного к ней груза (груз – пружина). В общем случае движение возникает за счет внутренних и внешних сил. Как будет показано в следующей главе, данный пример полезен для понимания процесса распространения воли. Кроме того, мы обсудим здесь такие важные вопросы, как закон Гука и методы измерения смещения и ускорения тела.

2.1. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПРУЖИНЫ

Предположим, что пружина подвешена к телу A так, что ее верхний конец остается неподвижным (рис. 2.1). Нижний конец пружины, соединенный с грузом массы m , начинает двигаться вниз под действием гравитационной силы

$$P = m g,$$

где g – гравитационное поле, P – вес груза.

По прошествии времени движение груза прекращается и устанавливается равновесие. Поскольку в состоянии равновесия сумма сил, действующих на груз, равняется нулю, можно заключить, что растяжение пружины приводит к появлению силы, равной по величине весу P и направленной вертикально вверх:

$$F = P \text{ или } F = -P. \quad (2.1)$$

Это явление было открыто Робертом Гуком. Результаты выполненных им экспериментальных исследований, опубликованные в 1678 г., показали, что при малых смещениях существует практически линейная связь между весом груза и растяжением пружины в положении равновесия, т.е.

$$s \sim P. \quad (2.2)$$

В этом и состоит закон Гука.

Позднее Томас Юнг провел исследования, позволившие ему обобщить этот закон и найти его аналитическую форму. Так, например, для пружины закон Гука приобрел следующий вид:

$$F^e = k s \text{ или } F = -k s. \quad (2.3)$$

Здесь F^e обозначает внешнюю силу, приложенную к грузу. В частности,

примером такой силы является вес P . Сила F – это упругая сила, вызванная растяжением или сжатием пружины, т.е. ее деформацией. Величина s – это смещение нижнего конца пружины от его начального положения.

Коэффициент k называется жесткостью пружины. Он характеризует способность пружины удерживать массу, и его величина зависит от материала, из которого изготовлена пружина, а также от ее длины. Например, при увеличении жесткости пружины даже относительно небольшое ее растяжение приводит к появлению упругой силы, способной прекратить движение груза.

Здесь полезно отметить следующее:

а) соотношение 2.3 представляет собой простейшую формулировку закона Гука. В дальнейшем аналогичные, но гораздо более сложные выражения будут получены для жидкостей и упругих тел. Эти выражения играют фундаментальную роль в теории распространения акустических и упругих колебаний;

б) как показали экспериментальные исследования, коэффициент жесткости пружины k обратно пропорционален ее первоначальной длине

$$k \sim 1/l.$$

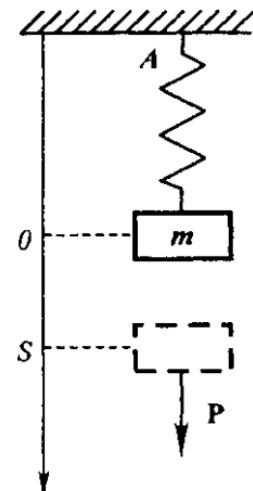
Отсюда, с учетом формулы (2.3), получим

$$s = F^e/k \sim l/F^e,$$

т.е. смещение s прямо пропорционально первоначальной длине пружины l , при условии, что сила F^e является постоянной. В частности, груз, подвешенный к нижнему концу полубесконечной пружины, будет испытывать бесконечные смещения. Это означает, что сила, возникающая при растяжении пружины, не в состоянии прекратить движение груза. Такая зависимость смещения груза от первоначальной длины пружины означает, что ее нижний конец “знает”, как далеко он находится от верхнего конца. Отсюда следует, что эта информация распространяется волнами, бегущими вдоль пружины. Мы подробно обсудим это важное следствие позже;

в) закон Гука выполняется при условии, что силы F^e не слишком велики и, соответственно, величины смещений, вызванных этими силами, лежат в так называемом упругом диапазоне. Последнее означает, что если убрать силы F^e , пружина вернется в свое первоначальное положение;

г) предполагается также, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой груза, и, таким образом, пружина может считаться безмассовой. Иными словами, у пружины нет инерции, и сила, приложенная к одному из ее концов, мгновенно передается во все точки.



2.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ГРУЗ – ПРУЖИНА

Теперь, когда мы готовы рассмотреть различные типы движений, естественно будет начать с простейшего случая колебаний в отсутствии внешней силы.

КОЛЕБАНИЯ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Предположим, что под действием некоторой силы груз перемещается вниз, на расстояние s от его первоначального положения (см. рис. 2.1). После этого, в момент времени $t = 0$, внешняя сила исчезает. В результате из-за деформации пружины возникает упругая сила F , направленная вертикально вверх, и, в соответствии с законом Гука,

$$F = -ks. \quad (2.4)$$

Поскольку груз находится под влиянием упругой силы, он начинает двигаться вверх. В момент времени, когда груз достигает своего первоначального положения $s = 0$, упругая сила становится равной нулю, однако груз продолжает двигаться в том же направлении. Это происходит из-за того, что груз имеет ненулевую скорость и, следовательно, обладает кинетической энергией. Дальнейшее движение груза приводит к сжатию пружины, и, следовательно, вектор скорости и сила направлены теперь в разные стороны. Скорость груза из-за этого падает, и в конце концов груз останавливается. В этот момент кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию сжатой пружины, а упругая сила направлена вертикально вниз. Груз начинает двигаться в направлении своего первоначального положения $s = 0$, минует его, и возвращается в то положение, где вся механическая энергия запасена в виде потенциальной энергии растянутой пружины. После этого груз снова начинает двигаться вертикально вверх под действием силы F . Таким образом, мы наблюдаем свободные колебания груза, возникающие только под действием внутренней силы системы. Выражение “свободные колебания” означает, что внешние силы во время движения отсутствуют. Тем не менее, в нашем случае имеется внешняя сила, а именно вес груза P . Она вызывает некоторое начальное растяжение пружины s_0 и начальную упругую силу F^e . Поскольку сумма этих двух сил равняется нулю в любой момент времени, мы можем пренебречь их влиянием и трактовать движение груза как свободные колебания, при условии, что начало отсчета $s = 0$ находится на расстоянии s_0 от исходного положения нижнего конца пружины.

Получим теперь уравнение движения груза, используя законы Ньютона и Гука

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad \text{и} \quad F = -ks. \quad (2.5)$$

Исключая из этих уравнений силу F , имеем

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + k s = 0$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \quad (2.6)$$

где $s = s(t)$ – расстояние между текущим и начальным положениями груза, t – время, а величина

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2.7)$$

является параметром системы.

Решение уравнения (2.6) имеет следующий вид (см. приложение 5):

$$s(t) = C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t. \quad (2.8)$$

Здесь C и D – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени. Таким образом, свободные колебания рассматриваемой системы происходят синусоидально, с частотой ω_0 , которая обычно называется естественной частотой системы.

Период этих колебаний, т.е. интервал времени, в течение которого груз возвращается в исходное положение, определяется как

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.9)$$

Важно отметить, что период свободных колебаний зависит только от параметров системы m и k , а именно от их комбинации $\sqrt{m/k}$. В частности, период T_0 не зависит от положения и скорости груза в начальный момент времени. Иными словами, колебания системы происходят с постоянной частотой ω_0 , независимо от поведения внешней силы. Чтобы оценить значение этого факта, представьте себе, что могло бы случиться, если бы частота звучания музыкальных инструментов зависела от силы, прикладываемой музыкантом.

Из выражения (2.9) следует, что период колебаний T_0 увеличивается при увеличении массы груза, а также при уменьшении коэффициента жесткости пружины. Такая зависимость легко объяснима. Действительно, поскольку с увеличением массы возрастает ее инерция, скорость движения падает, а период, соответственно, увеличивается. Такая же тенденция наблюдается при уменьшении коэффициента жесткости пружины, поскольку в этом случае пружину необходимо деформировать сильнее, чтобы прекратить движение груза.

В отличие от естественной частоты системы ω_0 , коэффициенты C и D в выражении (2.8) зависят от начальных условий. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость груза известны и

$$s(0) = s_0 \quad \text{и} \quad \dot{s}(0) = v_0. \quad (2.10)$$

Здесь точка над символом \dot{s} обозначает дифференцирование по времени.

Подстановка $t = 0$ в выражение (2.8) дает

$$D = s_0. \quad (2.11)$$

Затем, дифференцируя по времени обе части формулы (2.8) и снова полагая $t = 0$, получим

$$C = v_0/\omega_0. \quad (2.12)$$

Таким образом, равенство (2.8) переписывается в виде

$$s(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + s_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.13)$$

Вводя обозначения

$$s_0 = A \sin \phi \quad \text{и} \quad v_0/\omega_0 = A \cos \phi \quad (2.14)$$

и подставляя их в (2.13), получим

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (2.15)$$

Амплитуда A и начальная фаза колебаний ϕ легко выражаются через начальные условия.

Из соотношений (2.14) следует, что

$$A = \sqrt{s_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2} \quad \text{и} \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_0 s_0}{v_0}. \quad (2.16)$$

Так, например, если начальное смещение равняется нулю, то

$$s(t) = A \sin \omega_0 t, \quad (2.17)$$

где

$$A = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{m/k}.$$

Таким образом, ϕ характеризует сдвиг фазы движения (2.15) относительно колебаний системы, происходящих в том случае, когда начальное смещение отсутствует.

В соответствии с формулой (2.15), скорость и ускорение груза определяются следующими выражениями

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.18)$$

и

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Очевидно также, что упругая сила определяется как

$$F = -k s = -k A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь поведение энергии при таком движении. Учитывая (2.18), кинетическую энергию груза опишем следующим выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi). \quad (2.20)$$

По определению, потенциальная энергия, запасенная пружиной, есть

$$U(s) = - \int_0^s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^s k s \, ds = \frac{ks^2}{2}. \quad (2.21)$$

Таким образом, потенциальная энергия пружины прямо пропорциональна квадрату смещения. В дальнейшем мы будем часто использовать эту зависимость, чтобы характеризовать потенциальную энергию, запасенную в пружине или в упругой среде.

Используя выражение (2.15), запишем

$$U = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \phi). \quad (2.22)$$

Соответственно, полная механическая энергия системы

$$W = E(t) + U(t) = \frac{kA^2}{2} \quad (2.23)$$

не меняется в процессе движения и полностью определяется начальными условиями и параметрами системы. Это означает, что колебания будут продолжаться неограниченно долго.

КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАТУХАНИЯ

До сих пор мы предполагали, что движение груза и пружины происходит без сопротивления и, следовательно, амплитуда свободных колебаний остается постоянной. Однако в реальных условиях всегда присутствуют внешние и внутренние силы трения. Трение может возникать, например, между движущимся грузом и окружающим его воздухом. При изучении влияния трения мы будем использовать закон Кулона – Мора и предполагать, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения, т.е.

$$F_r = -\alpha v, \quad (2.24)$$

где α – коэффициент пропорциональности, зависящий, в частности, от свойств среды, окружающей систему. Знак минус в формуле (2.24) указывает на то, что направление силы сопротивления F_r противоположно скорости v .

Как и ранее, предположим, что груз до начала движения находился в равновесии, т.е. его вес был компенсирован силой натяжения пружины. Тогда, в соответствии с законом Ньютона, уравнение движения, описывающее свободные колебания, имеет вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - \alpha \frac{ds}{dt},$$

или

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\omega_0^2 = k/m \quad \text{и} \quad 2n = \alpha/m. \quad (2.26)$$

Как показано в приложении 5, смещение $s(t)$ можно представить как

$$s(t) = A e^{pt}, \quad (2.27)$$

где A и p – не зависящие от времени постоянные.

Подстановка выражения (2.27) в уравнение (2.25) дает характеристическое уравнение

$$p^2 + 2np + \omega_0^2 = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, функция $s(t)$, задаваемая формулой (2.27), удовлетворяет дифференциальному уравнению движения при условии, что значения параметра p являются корнями уравнения (2.28).

Решая уравнение (2.28), получим

$$p_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2} \quad \text{и} \quad p_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}. \quad (2.29)$$

Общее решение уравнения (2.25) записывается в виде

$$s(t) = C e^{p_1 t} + D e^{p_2 t}, \quad (2.30)$$

где коэффициенты C и D определяются из начальных условий.

Чтобы изучить полученное решение, полезно выделить следующие три случая:

$$1) n > \omega_0; \quad 2) n = \omega_0; \quad 3) n < \omega_0,$$

которые мы рассмотрим отдельно друг от друга.

Первый случай: $n > \omega_0$

Из соотношений (2.26) следует, что

$$\alpha > 2\sqrt{km},$$

и, соответственно, сила трения настолько велика, что никаких колебаний не возникает. Действительно, оба корня, p_1 и p_2 , являются действительными. Поскольку в этом случае они являются также отрицательными, смещение системы дается выражением

$$s(t) = C e^{-|p_1|t} + D e^{|p_2|t}, \quad (2.31)$$

из которого ясно, что синусоидальные колебания в системе отсутствуют.

Для иллюстрации рассмотрим движение при двух различных начальных условиях. Положим сначала, что

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad ds_0/dt = v_0.$$

Как было показано в главе 1, эти условия соответствуют случаю, когда в начальный момент времени на систему действует внешняя сила в виде кратко-временного импульса. Воспользовавшись выражением (2.30), получим следующие уравнения для коэффициентов C и D :

$$C + D = 0$$

и

$$p_1 C + p_2 D = v_0.$$

Отсюда

$$D = v_0/(p_2 - p_1), \quad C = -v_0/(p_2 - p_1)$$

и

$$s(t) = \frac{v_0}{p_1 - p_2} [e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}]. \quad (2.32)$$

Вначале из-за действия исходного импульса груз движется от положения равновесия, и смещение $s(t)$ растет. Поскольку направления возвратной силы и силы трения противоположны направлению скорости, она уменьшается со временем и, в конце концов, движение прекращается. В этот момент потенциальная энергия, запасенная пружиной, меньше работы, произведенной импульсом внешней силы, так как часть механической энергии груза перешла в тепло. В следующий момент времени груз начинает двигаться в обратную сторону, и в момент достижения исходного положения его скорость становится экспоненциально малой величиной, поскольку вся механическая энергия перешла к этому времени в тепло. Поведение функции $s(t)$ показано на рис. 2.2, а (кривая I).

Предположим теперь, что

$$s(0) = s_0 \quad \text{и} \quad v(0) = 0.$$

Обращаясь снова к выражению (2.30), получим

$$s(t) = \frac{s_0}{1 - \frac{p_2}{p_1}} \left[e^{-p_2 t} - \frac{p_2}{p_1} e^{-p_1 t} \right]. \quad (2.33)$$

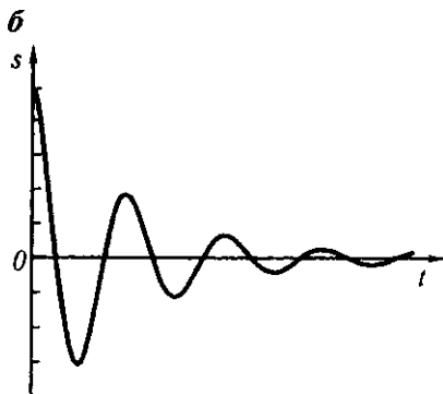
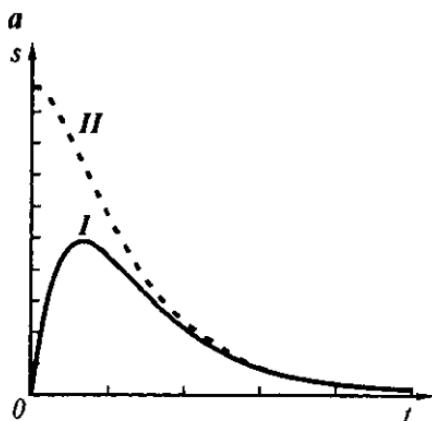


Рис. 2.2. Свободные колебания

Кривая *II* на рис. 2.2, *а* иллюстрирует поведение функции $s(t)$ в этом случае.

Второй случай: $n = \omega_0$

Этот случай обычно называется критическим затуханием. Как следует из выражений (2.29), оба корня в данном случае равны друг другу:

$$p_1 = p_2 = -n. \quad (2.34)$$

Соответственно, правая часть формулы (2.30) содержит только один экспоненциальный член и, следовательно, она не описывает общего решения. Тем не менее, в этом особом случае функция

$$Dt e^{-nt}$$

также удовлетворяет уравнению (2.25), поскольку $n = \omega_0$. Таким образом, общее решение этого уравнения дается следующим выражением:

$$s(t) = (C + Dt) e^{-nt}. \quad (2.35)$$

Если, например,

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad v(0) = v_0,$$

то легко находим

$$s(t) = v_0 t e^{-nt}. \quad (2.36)$$

Сначала смещение растет и в некоторый момент времени достигает своего максимального значения, однако затем груз постепенно возвращается к своему первоначальному положению, как это было в предыдущем примере.

Третий случай: $\omega > n_0$

В этом случае из выражений (2.29) следует, что оба корня являются комплексными:

$$p_1 = -n + i p_0 \quad \text{и} \quad p_2 = -n - i p_0, \quad (2.37)$$

где

$$p_0 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.37) в (2.29) и используя формулу Эйлера (см. приложение 4)

$$e^{ix} = \cos x \pm i \sin x,$$

находим

$$s(t) = e^{-nt} (A \sin p_0 t + B \cos p_0 t). \quad (2.39)$$

Полагая

$$A = A_0 \cos \varphi \quad \text{и} \quad B = A_0 \sin \varphi,$$

выражение (2.39) можно переписать как

$$s(t) = A_0 e^{-nt} \sin(p_0 t + \varphi). \quad (2.40)$$

Таким образом, в отличие от двух предыдущих случаев, движение груза теперь описывается осциллирующей функцией, амплитуда которой уменьшается со временем (рис. 2.2, б). Иными словами, максимальное смещение груза со временем уменьшается, и в конце концов он перестает двигаться и замирает в положении равновесия. Функция $s(t)$, задаваемая формулой (2.40), безусловно отличается от синусоиды, однако мы будем продолжать использовать для этой функции понятия амплитуды и фазы.

Частота p_0 таких колебаний связана с параметрами системы, включая коэффициент трения α , а ее значения меньше, чем ω_0 :

$$p_0 < \omega_0.$$

Однако с уменьшением силы трения частота p_0 стремится к ω_0 :

$$p_0 \rightarrow \omega_0, \text{ если } \alpha \rightarrow 0.$$

В дальнейшем удобно представить экспоненциальный член в выражении (2.40) следующим образом

$$e^{-nt} = e^{-\pi T \frac{t}{T}} = e^{-\pi \frac{t}{fT}} = e^{-\alpha_* \frac{t}{T}}, \quad (2.41)$$

где

$$\alpha_* = nT = \frac{n}{f} = \frac{\alpha}{2mf} \quad \text{или} \quad n = \alpha_* f, \quad (2.42)$$

а f – частота. Параметр α_* называется логарифмическим декрементом. Он указывает на то, что амплитуда колебаний уменьшается в $e^{-\alpha_*}$ раз за интервал времени, равный периоду T . Действительно, беря отношение смещений $s(t)$ для двух расстояний, различающихся на период $T = 2\pi/p_0$, имеем

$$\frac{s(t)}{s(t+T)} = \frac{e^{-\pi t}}{e^{-\pi(t+T)}} = e^{-\pi T} e^{\alpha \cdot}$$

или

$$\ln = \frac{s(t)}{s(t+T)} = \alpha \cdot \quad (2.43)$$

Например, можно взять смещения $s(t)$ и $s(t+T)$, соответствующие последовательным максимумам осциллирующей кривой.

Рассмотрим одно интересное свойство колебаний в присутствии силы сопротивления. В случае простого гармонического движения, т.е. при $\alpha_0 = 0$, функция

$$s(t) = |A \sin(\omega_0 t + \phi)|$$

имеет максимальные значения в следующие моменты времени:

$$t_1 = \frac{\pi/2 - \phi}{\omega_0}, \quad t_2 = \frac{3\pi/2 - \phi}{\omega_0}, \quad t_3 = \frac{5\pi/2 - \phi}{\omega_0}, \dots$$

а груз проходит через положение равновесия $s = 0$, когда

$$t_1^0 = \frac{\pi - \phi}{\omega_0}, \quad t_2^0 = \frac{2\pi - \phi}{\omega_0}, \quad t_3^0 = \frac{3\pi - \phi}{\omega_0}, \dots$$

Это означает, что время, затрачиваемое на движение в противоположных направлениях от точки равновесия, одинаково.

Чтобы определить моменты времени, в которые функция $s(t)$, задаваемая выражением (2.40), принимает максимальные значения, решим уравнение

$$ds(t)/dt = 0.$$

Дифференцируя правую часть (2.40), получим

$$\operatorname{tg} = (p_0 t + \phi) = \frac{p_0}{n} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - n^2}{n^2}}.$$

Найдя корни этого уравнения, можно увидеть, что интервал времени, в течение которого груз движется от положения равновесия $s = 0$ к точке соответствующего максимального удлинения пружины, меньше интервала времени, требующегося для возвращения в исходную позицию. Это происходит вследствие того, что в процессе движения часть механической энергии переходит в тепло.

По определению, параметр n , стоящий в равенствах (2.26) и характеризующий затухание колебаний, прямо пропорционален коэффициенту трения α и обратно пропорционален массе системы. Действительно, с увеличением массы система становится более инертной и, следовательно, требуется боль-

ше времени, чтобы остановить движение. Очевидно, что интервал времени, необходимый для того, чтобы вся механическая энергия преобразовалась в тепло, почти всегда конечен. Для описания этого процесса можно ввести некоторую постоянную τ , которая называется временем релаксации. Очевидно, что с увеличением затухания колебательный характер движения исчезает и вместо него наблюдается экспоненциальное затухание.

В случае с пружиной коэффициент α является постоянным, а логарифмический декремент α , прямо пропорционален периоду колебаний. В то же время теоретические и экспериментальные исследования показывают, что для непрерывных сред α часто не зависит от частоты в широком диапазоне ω . При этом из равенств (2.41) следует, что колебания более высокой частоты будут затухать быстрее.

Полезно продемонстрировать, как изменение механической энергии связано с параметром α . Очевидно, что в отсутствие затухания максимум механической энергии со временем не меняется. В частности, в момент времени, соответствующий максимальному смещению s_{\max} , полная энергия сосредоточена в виде потенциальной энергии и равняется

$$W = U = k s_{\max}^2 / 2. \quad (2.44)$$

Однако при наличии затухания часть этой энергии переходит в тепло. Чтобы охарактеризовать эти потери, естественно рассмотреть следующее отношение:

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{W_1 - W_2}{W_1}, \quad (2.45)$$

где W_1 и W_2 – максимальные значения потенциальной энергии, соответствующие последовательным периодам. Отсюда имеем

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{U_1 - U_2}{U_1}.$$

Ограничимся рассмотрением слабого затухания:

$$U_1 \approx U_2.$$

Тогда, принимая во внимание соотношение (2.44), получим

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1^2} = \frac{(s_1 - s_2)(s_1 + s_2)}{s_1^2} \approx 2 \frac{\Delta s}{s_2}.$$

Учитывая, что (см. 2.43)

$$\ln \frac{s_1}{s_2} = \ln \left(1 + \frac{\Delta s}{s_2} \right) \approx \frac{\Delta s}{s_2} = \alpha_*,$$

имеем

$$\Delta W/W = 2\alpha_*. \quad (2.46)$$

Отношение $\Delta W/W$ обычно называют удельными потерями, и при малом затухании оно равняется двойному логарифмическому декременту.

Оба параметра, $\Delta W/W$ и α , используются при изучении затухания колебаний, а также затухания волн в различных средах.

Следует также отметить, что наряду с удельными потерями $\Delta W/W$ часто применяется безразмерный коэффициент Q , определяемый как

$$Q = \pi W / \Delta W.$$

2.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ГРУЗ – ПРУЖИНА

До сих пор мы изучали только свободные колебания груза, вызванные возвратной силой пружины. Рассмотрим теперь более сложный случай движения, когда к грузу приложена также внешняя сила $F(t)$ (см. рис. 2.1). Предположим сначала, что затухание отсутствует. Тогда уравнение движения запишется как

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = F(t) - ks(t)$$

или

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = f(t), \quad (2.47).$$

где

$$f(t) = F(t)/m. \quad (2.48)$$

Таким образом, мы приходим к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянным коэффициентом ω_0^2 . Существенно, что данное уравнение является линейным. Его решение состоит из двух частей (см. приложение 5):

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t). \quad (2.49)$$

Функция $s_1(t)$ является решением рассмотренного ранее однородного уравнения

$$\frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s_1(t) = 0.$$

В соответствии с выражением (2.8),

$$s_1(t) = C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t.$$

В отличие от функции $s_1(t)$, второй член, $s_2(t)$ представляет собой частное решение уравнения (2.47). Его поведение полностью определяется внешней силой и параметрами системы. Поэтому представляется естественным,

что эта часть решения называется вынужденными колебаниями. Таким образом, движение системы в присутствии внешней силы описывается суммой свободных и вынужденных колебаний. В дальнейшем удобно рассматривать отдельно два типа внешних сил. Первый тип – это силы, имеющие гармоническую зависимость от времени, например, $F = F_0 \sin \omega t$ или $F = F_0 \cos \omega t$; а второй – произвольные функции времени $F(t)$.

Существуют, по крайней мере, две причины для такой классификации. Первая причина заключается в том, что, если внешняя сила является синусоидальной функцией, то и движение $s_2(t)$ – также синусоидальная функция той же частоты (см. приложение 5). Другими словами, вход $F(t)$ и выход $s_2(t)$ такой системы всегда имеют одну и ту же зависимость от времени. Это одно из самых замечательных свойств любых линейных систем, имеющих синусоидальную функцию на входе.

Другая причина такой классификации связана с тем, что произвольную функцию $F(t)$ можно представить в виде интеграла или суммы синусоид, имеющих различные амплитуды, фазы и частоты. Таким образом, зная, как движется масса под действием единичной синусоидальной силы, и применяя затем принцип суперпозиции, можно определить движение $s(t)$, возникающее под действием произвольной силы $F(t)$.

По этой причине мы сначала подробно рассмотрим вынужденные синусоидальные колебания груза.

Предположим, что на систему, находящуюся в состоянии покоя, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0 \cos \omega t, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

где частота ω отличается, в общем случае, от частоты свободных колебаний ω_0 .

Соответственно, вместо уравнения (2.47) получим

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = f_0 \cos \omega t, \text{ если } t > 0, \quad (2.51)$$

и

$$f_0 = F_0/m. \quad (2.52)$$

Поскольку сила, действующая на массу, описывается гармонической функцией, будем искать частное решение уравнения (2.51) также в виде гармонической функции (приложение 5):

$$s_2(t) = L \cos \omega t, \quad (2.53)$$

где L является неизвестным коэффициентом.

Подставляя выражение (2.53) в уравнение (2.51), получаем

$$-\omega^2 L + \omega_0^2 L = f_0$$

или

$$L = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2.54)$$

и частное решение $s_2(t)$ записываем как

$$s_2(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (2.55)$$

Таким образом, мы убедились в том, что предположение (2.53) оказалось верным, и показали, что внешняя сила и вынужденные колебания $s_2(t)$ имеют одинаковые частоты. В то же время амплитуда и фаза движения $s_2(t)$ зависит как от амплитуды и фазы внешней силы, так и от параметров системы.

В соответствии с выражением (2.49) полное решение уравнения (2.51) имеет вид

$$s(t) = C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (2.56)$$

где первое и второе слагаемые описывают свободные колебания с естественной частотой ω_0 , а последний член характеризует вынужденные колебания с той же частотой, которую имеет внешняя сила.

Не зависящие от времени коэффициенты C и D определяются следующими факторами:

- начальным смещением и скоростью массы;
- частотой свободных и вынужденных колебаний;
- амплитудой внешней силы и массой системы.

Таким образом, внешняя сила (2.50) вызывает движение системы, которое описывается двумя гармоническими функциями, обычно имеющими разные частоты.

В реальных системах присутствуют также силы трения, поэтому свободные колебания полностью исчезнут, если они возникли задолго до рассматриваемого момента времени. Тем не менее, в этом случае по-прежнему будут наблюдаться вынужденные колебания $s_2(t)$, имеющие частоту внешней силы. Изучим теперь, как происходят такие движения. Функцию L из формулы (2.54) можно представить как

$$L = \frac{f_0}{\omega_0^2(1 - \omega^2/\omega_0^2)} = \frac{F_0}{k(1 - \omega^2/\omega_0^2)}, \quad (2.57)$$

так как

$$f_0 = F_0/m \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = k/m.$$

Согласно закону Гука,

$$F_0 = kl,$$

где l обозначает смещение массы от положения равновесия под действием постоянной силы F_0 . Таким образом, выражение (2.57) можно переписать как

$$L = l \left(1 - \omega^2/\omega_0^2\right)^{-1}. \quad (2.58)$$

Отсюда видно, что максимальное смещение L вынужденных колебаний отличается от статического смещения l . На рис. 2.3, *a* показана частотная характеристика отношения $|L|/l$. На низких частотах амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению l :

$$|L| \rightarrow l, \text{ если } \omega \rightarrow 0.$$

С увеличением частоты ω амплитуда колебаний также увеличивается и стремится к бесконечности, когда ω стремится к ω_0 . Это явление называется резонансом, а соответствующая частота внешней силы – резонансной.

Конечно, в реальных ситуациях амплитуда вынужденных колебаний из-за затухания всегда имеет конечное значение. Как следует из (2.58), при $\omega < \omega_0$ внешняя сила и смещение $s_2(t)$ изменяются синхронно, т.е. фазовый сдвиг

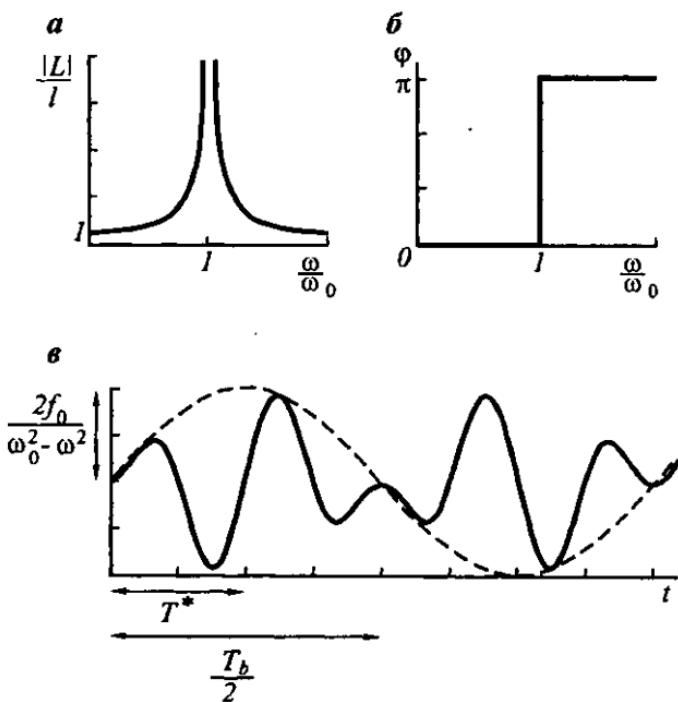


Рис. 2.3. Амплитудная и фазовая частотные характеристики вынужденных колебаний (*a*, *b*); бисения (*c*)

между ними отсутствует. Например, в момент времени, когда сила $F(t)$ имеет максимальное значение, масса будет находиться в наиболее низкой точке, при условии, что эффект свободных колебаний пренебрежимо мал.

При дальнейшем увеличении частоты, когда $\omega > \omega_0$, амплитуда $|L|$ уменьшается и стремится к нулю на высоких частотах $\omega \gg \omega_0$. В этом пределе имеем

$$L \rightarrow 0, \text{ если } \omega/\omega_0 \rightarrow \infty.$$

Такое поведение легко объяснимо. Действительно, уменьшение периода T внешней силы означает, что интервал времени, в течение которого сила $F(t)$ сохраняет свое направление, становится короче. Соответственно, смещение массы при $\omega > \omega_0$ уменьшается, и на достаточно высоких частотах $\omega \gg \omega_0$ длина пружины практически не изменяется. Это явление имеет большое значение для измерения кинематических параметров движения.

Как следует из (2.58), сдвиг фаз между функциями $s_2(t)$ и $F(t)$ при $\omega > \omega_0$ равняется π (рис. 2.3, б). В частности, в момент времени, когда сила имеет максимальное значение и направлена вниз, масса находится в своей верхней точке.

Рассмотрим далее полное смещение $s(t)$. Предположим, в качестве примера, что в начальный момент времени смещение и скорость массы равняются нулю, т.е.

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{s}(0) = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Из выражения (2.56) получим

$$0 = D + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad 0 = \omega_0 C.$$

Отсюда

$$D = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad C = 0. \quad (2.59)$$

Подстановка (2.59) в (2.56) дает

$$s(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega_0 t + \cos \omega_0 t). \quad (2.60)$$

Последнее выражение показывает, что внешняя сила вызывает свободные и вынужденные колебания одинаковой амплитуды. Поэтому при близких частотах ω и ω_0 наблюдаются так называемые биения. Чтобы проиллюстрировать это явление, воспользуемся равенством

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = -2 \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2}.$$

Далее функцию $s(t)$ можно записать как

$$s(t) = A(t) \sin \omega^* t, \quad (2.61)$$

где

$$\omega^* = (\omega - \omega_0)/2$$

и

$$A(t) = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_b t. \quad (2.62)$$

Здесь

$$\omega_b = (\omega_0 - \omega)/2. \quad (2.63)$$

В соответствии с выражением (2.61), движение массы описывается произведением двух гармонических функций. Период одной из них, $\sin \omega^* t$, равняется

$$T^* = 2\pi/\omega^* = 4\pi/(\omega_0 + \omega).$$

Множитель $A(t)$ также ведет себя как синусоидальная функция с частотой ω_b . Период этих колебаний, равный

$$T_b = 2\pi/\omega_b,$$

называется периодом биений (рис. 2.3, *в*) и значительно превышает T^* , если разность между частотами мала. В подобном случае частоты ω^* и ω близки между собой, а амплитуда колебаний изменяется на интервале $T_b/2$ от сравнительно высоких до малых значений (рис. 2.3, *б*).

Когда частоты ω^* и ω приближаются друг к другу, период биений T^* стремится к бесконечности и при наступлении резонанса ($\omega_0 = \omega$) смещение $s(t)$ становится равным

$$s(t) = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega t, \quad (2.64)$$

а его амплитуда неограниченно возрастает со временем. Конечно, в реальности, из-за наличия затухания, такое поведение никогда не наблюдается.

ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ

Теперь мы снова предположим, что сила трения прямо пропорциональна скорости движения (закон Кулона – Мора):

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}.$$

Применяя второй закон Ньютона, получим следующее уравнение для смещения $s(t)$:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k s(t) - \alpha \frac{ds}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = f_0 \cos \omega t, \text{ если } t > 0, \quad (2.65)$$

где

$$2n = \alpha/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad f_0 = F_0/m. \quad (2.66)$$

Уравнения (2.65) и (2.51) совпадают при отсутствии затухания (диссипации), т.е. когда $\alpha = 0$.

Поскольку внешняя сила по-прежнему является гармонической функцией, естественно ожидать, что вынужденные колебания также описываются гармонической функцией той же частоты ω (см. приложение 5). Поэтому частное решение уравнения (2.65) можно представить как

$$s_2(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.67)$$

Подставляя последнее выражение в (2.65), получим

$$L \sin \omega t + M \cos \omega t = f_0 \cos \omega t, \quad (2.68)$$

где

$$L = (\omega_0^2 - \omega^2)A - 2n\omega B,$$

$$M = (\omega_0^2 - \omega^2)B + 2n\omega A.$$

Поскольку соотношение (2.68) справедливо для произвольного момента времени t , коэффициенты должны удовлетворять следующим условиям:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - 2n\omega B = 0, \quad (2.69)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B + 2n\omega A = f_0.$$

Решением этих уравнений являются

$$A = \frac{2n\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$$

и

$$B = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (2.70)$$

Таким образом, поведение синусоидальных вынужденных колебаний описывается формулой

$$s_2(t) = f_0 \frac{2n\omega \sin \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (2.71)$$

В отличие от свободных колебаний они не уменьшаются со временем, а их период равняется периоду внешней силы.

На относительно небольших временах (2.50) важную роль играют как вынужденные, так и свободные колебания. Однако с увеличением времени свободные колебания угасают, и полное смещение определяется только функцией $s_2(t)$. Чтобы упростить дальнейшее изложение, введем следующие обозначения:

$$A = s_0 \sin \phi \quad \text{и} \quad B = s_0 \cos \phi. \quad (2.72)$$

Тогда выражение (2.67) дает

$$s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - \phi), \quad (2.73)$$

где s_0 и ϕ обозначают, соответственно, амплитуду и фазу колебаний.

Из (2.72) следует, что

$$s_0 = f_0 \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (2.74)$$

и

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.75)$$

Угол $\phi(\omega)$ характеризует сдвиг фаз между колебаниями $s_2(t)$ и внешней силой $F(t)$.

Рассмотрим, прежде всего, частотный отклик $s_0(\omega)$, который удобно представить как

$$s_0 = s_{st} \Phi(\omega/\omega_0, \gamma), \quad (2.76)$$

где

$$s_{st} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

является статическим смещением массы; параметр

$$\gamma = 2n/\omega_0 \quad (2.77)$$

зависит от затухания, и

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \gamma\right) = \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{-1/2}. \quad (2.78)$$

Очевидно, что амплитуда смещения приближается к s_{st} в низкочастотной части спектра:

$$s \rightarrow s_{st}, \quad \text{если} \quad \omega/\omega_0 \rightarrow 0.$$

Это означает, что смещение $s_2(t)$, вызванное силой

$$F_0 \cos \omega t,$$

можно в каждый момент времени вычислить непосредственно из закона Гука, так как $\omega \ll \omega_0$.

В то же время, если ω значительно больше ω_0 , амплитуда движения стремится к нулю. Заметим, что такое же асимптотическое поведение колебаний наблюдалось и в отсутствии затухания. По мере достижения резонансной частоты $\omega \rightarrow \omega_0$, амплитуда s_0 увеличивается, и этот эффект резонанса становится более заметен при уменьшении затухания. Поведение функции $\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \gamma\right)$ показано на рис. 2.4, а. Для каждой кривой указано соответствующее значение параметра γ .

Как видно из представленных кривых, максимальная амплитуда колебаний уменьшается с увеличением затухания. Можно также увидеть, что, по сравнению со свободными колебаниями, этот максимум смещен влево, в сторону низких частот. В случае относительно слабой диссипации смещение максимума мало.

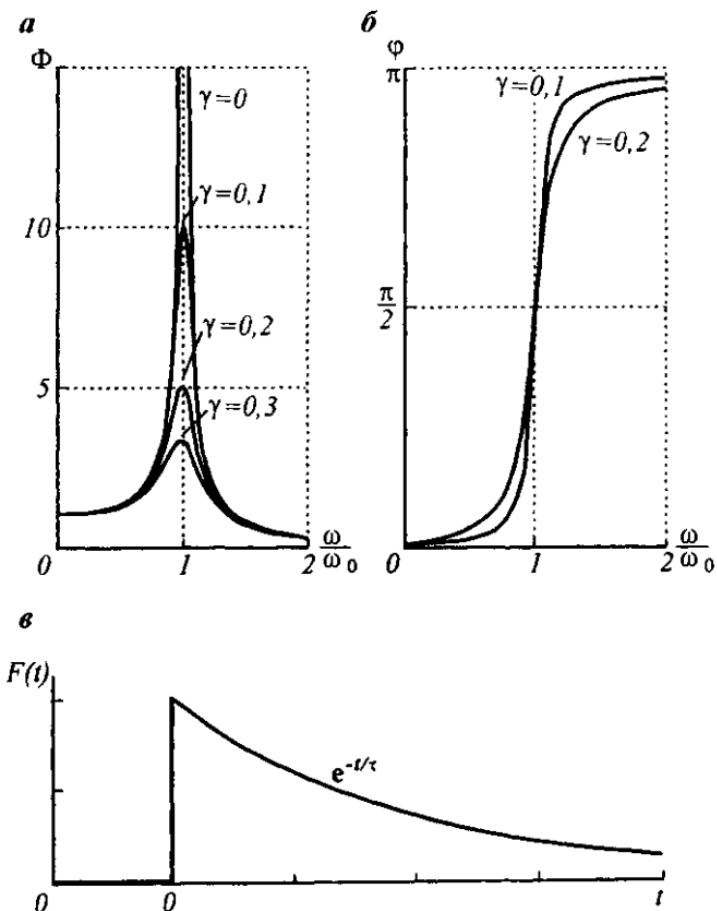


Рис. 2.4. Амплитудная и фазовая частотные характеристики (а, б); внешняя сила $F(t)$ (в)

Из приведенных выкладок видно, что влияние затухания сказывается наиболее сильно вблизи резонансных частот. Из-за действия силы трения, как бы мала она ни была, амплитуда движения всегда имеет конечное значение. Однако вне указанного частотного диапазона влияние диссипации становится меньше, а в нижней и верхней частях спектра оно практически исчезает.

Приступим теперь к изучению фазы колебаний. Из выражения (2.75) следует, что

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\gamma}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (2.79)$$

и, следовательно, между колебаниями и внешней силой всегда существует сдвиг фаз.

В низкочастотной части спектра ($\omega \ll \omega_0$) фаза растет почти линейно с увеличением частоты. Вблизи резонансной частоты ω_0 , фаза становится равной $\pi/2$. Это означает, что в момент времени, когда сила $F(t)$ имеет максимальное значение, масса находится в средней точке. При дальнейшем увеличении частоты ($\omega \gg \omega_0$) фаза продолжает увеличиваться и постепенно достигает значения π (рис. 2.4, б).

До сих пор мы изучали движение массы под действием синусоидальной силы. Рассмотрим теперь совершение другой случай, когда сила $F(t)$ ведет себя как (рис. 2.4, в)

$$F(t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t/\tau}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

где τ является константой, характеризующей изменение силы во времени.

Предположим, что вынужденные колебания имеют ту же зависимость от времени:

$$s_2 = A e^{-t/\tau}, \quad \text{если } t \geq 0. \quad (2.81)$$

Чтобы проверить это предположение, подставим последнее равенство в уравнение движения

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2n \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.82)$$

Здесь $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

После сокращения на множитель $e^{-t/\tau}$, получим

$$\frac{A}{\tau^2} - \frac{2nA}{\tau} + \omega_0^2 A = f_0,$$

или

$$A = \frac{f_0}{\tau^{-2} - 2n\tau^{-1} + \omega_0^2}. \quad (2.83)$$

Таким образом, наше предположение оказалось верным и частное решение уравнения (2.82) есть

$$s_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A e^{-t/\tau} & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Полное смещение массы записывается как

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_1(t) + A e^{-t/\tau}, \quad (2.85)$$

где A определено в (2.83), а $s_1(t)$ представляет собой свободные колебания системы. Из-за наличия диссипации, колебания затухают со временем, независимо от того, какое значение имеет параметр τ .

Полезно рассмотреть предельный случай, при котором сила ведет себя как ступенчатая функция и, следовательно, $\tau \rightarrow \infty$. Из формулы (2.83) имеем

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = s_u,$$

и

$$s(t) = s_1(t) + s_u. \quad (2.86)$$

Таким образом, полное смещение массы представляет собой сумму двух слагаемых. Первое из них – свободные колебания, затухающие во времени. Другое слагаемое представляет собой смещения s_u , вызванные постоянной силой F_0 . Мы видим, что вначале движение системы происходит аналогично свободным колебаниям, а затем оно постепенно приближается к асимптотическому значению s_u .

В заключение следует добавить, что в случае, когда внешняя сила является произвольной функцией времени, функцию $s(t)$ можно определить, используя интеграл Фурье (см. приложение 7).

2.4. ПРИНЦИПЫ ИЗМЕРЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущих разделах мы изучали движение системы, состоящей из пружины и подвешенного к ней груза, при условии, что точка подвеса O оставалась неподвижной. Опишем теперь движение массы для случая, когда верхний конец пружины также вовлечеи в процесс движения системы (рис. 2.5, a). Этот случай полезен для понимания работы приборов, позволяющих записывать колебания. Такие приборы могут измерять движение кораблей и различных механизмов, а также вертикальную и горизонтальную составляющие движения земной поверхности, вызванного землетрясениями, взрывами и другими источниками.

Предположим, что платформа движется в вертикальном направлении, а ее смещение $s(t)$ описывается синусоидальной функцией

$$s(t) = b \cos \omega t. \quad (2.87)$$

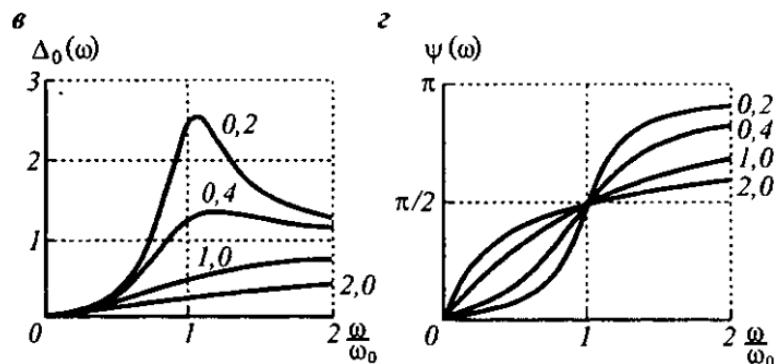
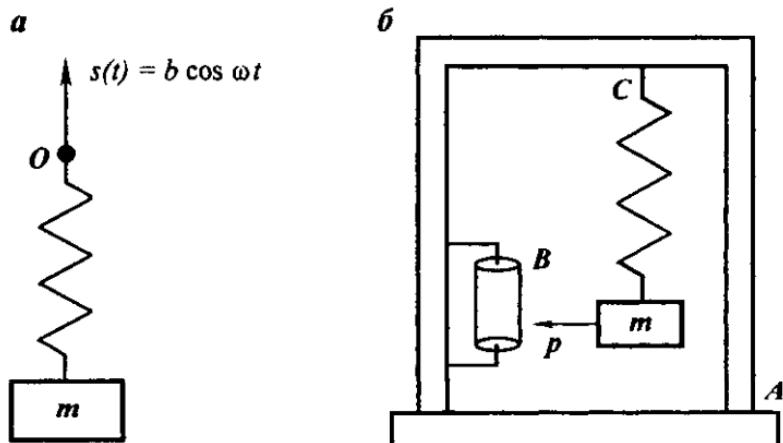


Рис. 2.5. Колебания верхнего конца пружины (а); измерение колебаний (б); частотные характеристики $\Delta_0(\omega)$ и $\psi(\omega)$ (в, г)

Наша задача состоит в том, чтобы измерить амплитуду и частоту колебаний массы m и затем получить информацию о функции $s(t)$. С этой целью представим себе простейший прибор, размещенный на платформе и состоящий из следующих элементов (рис. 2.5, б):

- рамы A ;
- вращающегося барабана B с бумагой, связанного с рамой A ;
- вертикально подвешенной пружины с грузом массы m , верхний конец которой жестко закреплен на раме A ;
- самописца p , прикрепленного к грузу и записывающего движение на вращающемся барабане.

Существенно при этом, что рама A прибора движется вместе с платформой. Другими словами, все точки рамы, включая точку C , двигаются точно так же, как и сама платформа. Это условие является необходимым при измерении колебаний.

Рассмотрим теперь движение массы $s_2(t)$ и установим связь между этим движением и движением платформы, задаваемым выражением (2.87). Это означает, что, записывая движение массы на вращающемся барабане, мы тем самым пытаемся определить значения функции $s(t)$. Ясно, что скорость вращения барабана влияет только на временной масштаб записи.

Если платформа не движется, прибор, включая груз, также поконится и, следовательно, самописец рисует горизонтальную линию на бумаге, надетой на барабан. Предположим, что платформа вместе с рамой A начинают двигаться, например, вниз. Такое движение приводит к сжатию пружины, в результате чего возникают упругие силы. Масса также начинает двигаться и растягивать пружину. Таким образом, силу пружины, действующую на массу, можно представить как

$$F = k(s - s_2),$$

где $s(t)$ и $s_2(t)$ – смещения соответственно рамы прибора и массы, имеющие в общем случае различные амплитуды и фазы.

Следует заметить, что упругая сила возникает вследствие движения обоих концов пружины. Учитывая, что сила трения, вызванная окружающей средой, прямо пропорциональна скорости движения массы относительно рамы, имеем

$$F_r = -\alpha \frac{d}{dt}(s_2 - s).$$

Далее, применяя второй закон Ньютона, получим для функции $s_2(t)$ уравнение, описывающее движение массы:

$$m \frac{d^2 s_2}{dt^2} = -\alpha \frac{d}{dt}(s_2 - s) - k(s_2 - s)$$

или

$$\frac{d^2(s_2 - s)}{dt^2} + 2n \frac{d(s_2 - s)}{dt} + \omega_0^2(s_2 - s) = -\frac{d^2 s}{dt^2},$$

поскольку

$$\omega_0^2 = k/m.$$

Вводя новую переменную

$$\Delta(t) = s_2(t) - s(t), \quad (2.88)$$

перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} + 2n \frac{d\Delta(t)}{dt} + \omega_0^2 \Delta(t) = -\frac{d^2 s(t)}{dt^2}. \quad (2.89)$$

В случае синусоидальных колебаний (2.87) имеем

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} + 2n \frac{d\Delta(t)}{dt} + \omega_0^2 \Delta(t) = \omega^2 b \cos \omega t. \quad (2.90)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.65), при условии, что $f_0 = \omega^2 b$. Поэтому, в принципе, можно было бы использовать результаты предыдущего раздела. Однако здесь удобнее применить комплексную форму синусоидальных функций.

Далее мы будем рассматривать только вынужденные колебания $s_2(t)$. Ранее было показано, что эти колебания ведут себя как гармоническая функция

$$\Delta = \Delta_0 \cos(\omega t - \psi)$$

или, используя формулу Эйлера (приложение 4),

$$\Delta = \operatorname{Re}(\mathcal{D} e^{i\omega t}), \quad (2.91)$$

где

$$\mathcal{D} = \Delta_0 e^{i\psi} \quad (2.92)$$

является комплексной амплитудой смещений.

Подставляя (2.91) в уравнение (2.90) и выражая правую часть этого уравнения через комплексную амплитуду (см. приложение 5), получим

$$\mathcal{D} = \frac{\omega^2 b}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2in\omega} \quad (2.93)$$

или

$$\Delta_0 = \frac{\omega^2 b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

и

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.94)$$

Очевидно, что, если рама A и масса m испытывают одинаковые смещения, то запись на барабане не покажет какого-либо смещения от начального положения. Иными словами, амплитуда записи прямо пропорциональна разности смещений массы и рамы, т.е. функции $\Delta(t)$. Это является важным свойством вибрографов – приборов, измеряющих вибрации.

Как следует из выражений (2.94), на высокочастотном конце спектра ($\omega \gg \omega_0$)

$$\Delta_0 \rightarrow b \quad \text{и} \quad \psi \rightarrow \pi,$$

поскольку масса почти не движется. Этот диапазон частот, безусловно, является самым лучшим для измерений смещений прибора.

В отличие от предыдущего случая, при низких частотах ($\omega \ll \omega_0$)

$$\Delta_0 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} b \quad \text{и} \quad \psi \rightarrow 0.$$

Это означает, что по записи можно определить ускорение рамы.

Похожее поведение наблюдается, когда движение прибора описывается произвольной функцией времени $s_1(t)$. Действительно, если колебания изменяются быстро, то первое слагаемое в левой части уравнения (2.89) является доминирующим. В соответствии с этим

$$\frac{d^2 \Delta(t)}{dt^2} \approx \frac{d^2 s(t)}{dt^2},$$

и функция $\Delta(t)$ характеризует движение прибора.

В противоположном случае, когда движения являются медленными, пре-валирует последнее слагаемое, и поэтому

$$\Delta \approx \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2},$$

т.е. запись определяется ускорением.

Функции $\Delta_0(\omega)$ и $\psi(\omega)$ показаны на рис. 2.5, в, г.

В данном разделе мы проиллюстрировали основные принципы измерения вибраций, используя простой механический прибор с малой чувствительностью. В действительности, такие приборы являются гораздо более сложными. Например, электромагнитный преобразователь, установленный в большинстве геофонов и преобразующий механическую энергию колебаний в электромагнитную энергию, позволяет измерять движения чрезвычайно малых амплитуд порядка $10^{-5} - 10^{-7}$ м.

Глава 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

3.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ МАСС И ПРУЖИН

Приступим теперь к изучению нового явления – распространения движения. Вначале мы дадим его качественное описание, а затем выведем уравнение, которое называется уравнением движения. С этой целью рассмотрим простейшую модель среды, а именно, однородную пружину бесконечной длины. Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ левый конец пружины начинает двигаться со скоростью v . Чтобы упростить анализ и избежать необходимости решать волновое уравнение, мы будем рассматривать только приближенную модель, в которой каждый относительно небольшой элемент пружины заменяется системой, состоящей из двух частей:

- короткой пружины с нулевой массой;
- небольшого твердого тела.

Заметим, что жесткость и масса этой небольшой системы определяются соответствующими параметрами исходной пружины. В результате модель представляет собой систему, состоящую из пружин (одинаковой длины и жесткости) и элементарных тел (одинаковой массы), как это показано на рис. 3.1, а.

Рассмотрим две массы, m_0 и m_1 , и предположим, что в момент времени $t = 0$ масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v . В результате этого движения пружина сжимается и возникает сила, действующая на массу m_1 . Поскольку мы предположили, что масса пружин равняется нулю, эта сила мгновенно возникает на противоположном конце первой пружины. С течением времени пружина продолжает сжиматься и, следовательно, сила увеличивается. В результате импульс силы, действующей на массу m_1 , становится достаточным для того, чтобы привести ее в движение со скоростью v .

Таким образом, для того чтобы масса m_1 начала двигаться со скоростью, равной скорости движения массы m_0 , требуется некоторое время. Обозначим это время задержки как τ . Конечно, в действительности масса m_1 начинает двигаться практически одновременно с массой m_0 , хотя и с гораздо меньшей скоростью. Тем не менее, в рассматриваемом приближении предполагается, что масса поконится в течение промежутка времени

$$0 < t < \tau.$$

В конце этого интервала времени длина l первой пружины становится меньше и величину ее сокращения можно выразить как

$$l - l_1 = v\tau, \quad (3.1)$$

где l_1 – длина пружины в момент времени $t = \tau$.

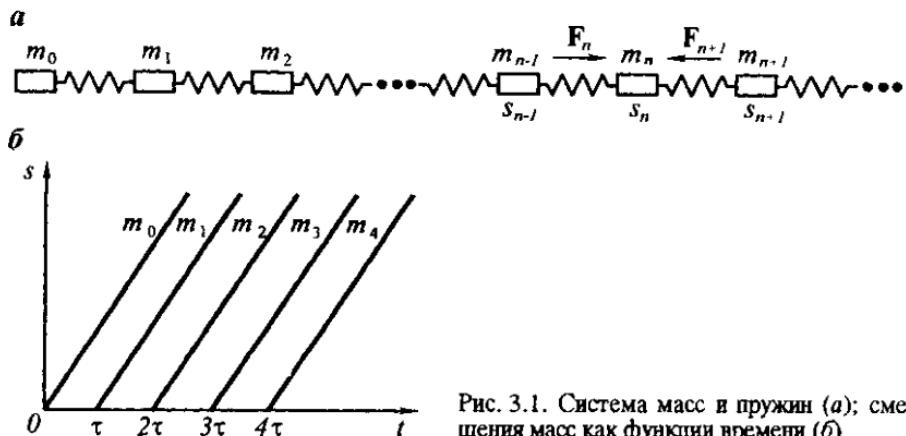


Рис. 3.1. Система масс и пружин (a); смещения масс как функции времени (b)

Поскольку при $t \geq \tau$ оба конца пружины движутся с одинаковой скоростью v , ее длина не меняется и остается равной l_1 . Конечно, сумма внутренних сил, действующих на массу m_1 , равняется нулю. Как только масса m_1 приходит в движение, это приводит к сжатию второй пружины и возникновению силы, действующей на массу m_2 . Поскольку все пружины и массы одинаковы, масса m_2 начинает двигаться со скоростью v в момент времени

$$t = 2\tau.$$

В этот момент длина второй пружины становится равной длине первой пружины. Обобщая полученный результат, можно утверждать, что масса, расположенная на расстоянии

$$L = nl \quad (3.2)$$

от левого конца, начинает двигаться со скоростью v в момент времени

$$t^* = n\tau. \quad (3.3)$$

Здесь n обозначает порядковый номер массы.

Итак, мы имеем дело с таким движением, при котором массы в системе начинают двигаться не одновременно: каждая последующая масса вовлекается в общее движение с некоторой задержкой. Такой тип движения называется распространением воли. Он заключается в переносе движения элементарной массы и пружины, а также силы, количества движения, кинетической и потенциальной энергии.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ

Определим теперь скорость распространения волны вдоль системы, состоящей из масс и пружин. Поскольку масса m_2 начинает двигаться с задержкой τ относительно массы m_1 , а расстояние между этими массами равняется l , скорость волны определяется следующим выражением:

$$c = l/\tau. \quad (3.4)$$

Очевидно, что это же соотношение можно получить, рассматривая произвольную массу m_1 данного массива и используя выражения (3.2) и (3.3).

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выразить скорость распространения через жесткость пружины k и массу m . Для этого мы используем закон Гука и связь между импульсом силы и количеством движения.

Легко найти силу F , которая передается вдоль массива и вызывает движение каждой массы со скоростью v . Действительно, из закона Гука следует, что

$$F = k(l - l_1) = kvt. \quad (3.5)$$

Мы будем трактовать упругую силу, действующую на массу m , как внутреннюю, и исключим из рассмотрения массу m_0 , поскольку ее движение не вызвано сжатием пружины. Учитывая, что импульс этой силы

$$N = Ft^*$$

равняется количеству движения масс

$$Ft^* = nmv,$$

и используя равенства (3.3) и (3.5), получим

$$kvt \cdot n\tau = nmv.$$

Отсюда

$$\tau = \sqrt{m/k}. \quad (3.6)$$

Соответственно, скорость переноса движения, т.е. скорость волны

$$c = l\sqrt{k/m}. \quad (3.7)$$

Чтобы проиллюстрировать этот вывод, рассмотрим массу m_1 на интервале времени

$$\tau < t < 2\tau.$$

Поскольку движется только эта масса, импульс силы и количество движения системы равняются

$$N = Ft = kvt \tau \text{ и } P = mv.$$

Отсюда

$$kv \tau^2 = mv \text{ или } \tau = \sqrt{m/k},$$

и мы снова получаем формулу (3.6).

Этот же результат полезно вывести из соотношения между работой и энергией. Чтобы привести в движение массив, состоящий из масс и пружин, к системе прикладывают силу F . За время t^* масса m_1 перемещается на расстояние

$$s_1 = vt^*.$$

Следовательно, работа, произведенная силой, равняется

$$W = F s_1 = k v \tau v n \tau = k v^2 n (l/c)^2, \quad (3.8)$$

поскольку

$$F = k v \tau, \quad \tau = n \tau = n \frac{l}{c}.$$

Благодаря произведенной работе система, состоящая из n масс, приобретает кинетическую энергию, а потенциальная энергия аккумулируется в n пружинах, соединяющих эти массы. При этом кинетическая энергия n масс равняется

$$E = n \frac{mv^2}{2}, \quad (3.9)$$

а потенциальная энергия n пружин длины l есть

$$U = n \frac{k(l - l_0)^2}{2} = n \frac{k(v\tau)^2}{2} = \frac{nk}{2} v^2 \frac{l^2}{c^2}. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание, что

$$W = E + U$$

и используя выражения (3.8) – (3.10), получаем

$$k v^2 n \left(\frac{l}{c} \right)^2 = n \frac{mv^2}{2} + n \frac{kv^2}{2} \frac{l^2}{c^2}$$

или

$$c = l \sqrt{k/m},$$

что, конечно же, совпадает с (3.7).

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Скорость волны c зависит от следующих параметров:

- жесткости пружины k ;
- длины пружины l ;
- массы m .

2. Согласно закону Гука, с увеличением жесткости пружины k та же самая сила будет передаваться при меньшем сжатии пружины. Это означает, что время задержки τ , необходимое для сжатия пружины, также становится меньше. Скорость c при этом увеличивается.

3. С увеличением массы ее ускорение уменьшается и, следовательно, для переноса такого же количества движения требуется большая деформация пружин. Поэтому скорость волны уменьшается.

4. Скорость движения v никак не связана со скоростью распространения волны c . Для данного массива скорость v определяется импульсом внешней силы.

Обычно эти скорости отличаются друг от друга на несколько порядков, причем $c \gg v$. При выводе выражений для времени задержки t и, следовательно, для скорости c мы использовали два разных подхода, и в обоих случаях скорость масс v не играла никакой роли.

5. До сих пор наши рассуждения основывались на том, что распространение волны сопровождается сжатием пружины. Иными словами, мы рассматривали волну сжатия, для которой обе скорости имеют одно и то же направление. Таким же образом можно предположить, что движение масс приводит к растяжению пружин и, следовательно, возникает волна растяжения. В этом случае скорости c и v имеют противоположные направления.

В нашем приближении смещения s_n и скорости v_n можно представить в следующем виде:

$$s_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t^*, \\ v(t - t^*), & t \geq t^* \end{cases} \quad (3.11)$$

и

$$v_n(t) = v h(t - t^*), \quad (3.12)$$

где $h(t - t^*)$ – ступенчатая функция. Поведение функции $s_n(t)$ показано на рис. 3.1, б.

В предыдущей главе рассматривались колебания, при которых в каждый момент времени все элементы системы были вовлечены в движение. Теперь мы наблюдаем совершенно другую картину. В каждый момент времени массив можно условно разделить на две части. Все массы и пружины первой части вовлечены в движение, в то время как вторая часть системы покоятся. В таком приближении граница между этими частями представляет собой волновой фронт, описывающийся ступенчатой функцией и перемещающейся вдоль массива со скоростью c .

Простота формул (3.11) – (3.12) объясняется тем, что мы пренебрегли некоторыми факторами, включая действие внутренней силы пружины, расположенной перед каждой из масс. Мы предположили, что в момент времени $t = 0$ масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v , в то время как каждая последующая масса приобретает ту же скорость с задержкой по времени τ после предыдущей. Это означает, что каждая масса, находившаяся в покое, приобретает конечную скорость мгновенно, т.е. в момент начала движения ее ускорение становится бесконечно большим. Конечно, такое поведение невозможно, поэтому мы опишем, по крайней мере, качественно, основные черты реального движения. Пусть, как и прежде, масса m_0 начинает двигаться с постоянной скоростью v в момент времени $t = 0$. При этом первая пружина сжимается, и возникает сила, действующая на массу m_1 . В результате масса m_1 начинает двигаться с некоторым ускорением и ее скорость растет. Смещение массы m_1 приводит к сжатию второй пружины, которое вызывает силу, также действующую на m_1 . Направление этой силы противоположно направлению движения. Помимо этого, как только начина-

ет двигаться масса m_0 , другие массы в массиве также оказываются вовлечеными в движение, хотя их смещения могут быть чрезвычайно малы. Сначала из-за инерции сжатие первой пружины играет лидирующую роль, и скорость массы m_1 растет. Однако со временем силы, вызванные второй и последующими пружинами, увеличиваются, и их влияние приводит к уменьшению ускорения. Существует такой момент времени, когда массы m_0 и m_1 движутся с одинаковой скоростью, а результирующая сила, действующая на m_1 , равняется нулю. Движение второй и последующих масс происходит точно так же, но с некоторой задержкой по времени. Оказывается, что такое представление движения является приблизительным только в пределах относительно небольшого промежутка времени, когда масса начинает свое движение. С увеличением времени оно становится все более точным.

В начале данного раздела мы заменили пружину бесконечной длины массивом элементов (рис. 3.1, a) и предположили, что каждый элемент длины l реальной пружины эквивалентен системе, состоящей из твердого тела массы m и пружины, имеющей нулевую массу и жесткость k . Изучение распространения волн вдоль такого массива чрезвычайно интересно, однако в дальнейшем мы сконцентрируем наше внимание на случае, когда длина l каждого элемента бесконечно мала. Как следует из закона Гука,

$$F = ks = kl \frac{s}{l} = E^* \frac{s}{l}, \quad (3.13)$$

где параметр

$$E^* = kl \quad (3.14)$$

в отличие от жесткости k не зависит от длины элемента пружины l и определяется свойствами ее материала.

Введем также линейную плотность ρ пружины в исходном состоянии:

$$m = \rho l. \quad (3.15)$$

В соответствии с этим, выражение для скорости распространения волны запишется как

$$c = \frac{l}{\tau} l \sqrt{k/m} = l \sqrt{E^* / \rho l^2} = \sqrt{E^* / \rho}. \quad (3.16)$$

Таким образом, переходя от дискретного случая к случаю непрерывной пружины, находим, что скорость волны зависит только от упругого параметра E^* (жесткости) и плотности ρ . В частности, если источник возбуждает синусоидальные волны, то скорость волны не зависит от частоты. Иными словами, волны различных частот имеют одинаковую скорость. Это означает, что бегущая волна, распространяющаяся вдоль пружины и представляющая собой суперпозицию синусоидальных волн, сохраняет свою форму. Это важное свойство наблюдается во многих случаях, хотя и не всегда.

ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Выведем теперь уравнение движения произвольной массы m_n (см. рис. 3.1, a). Пусть s_{n-1} , s_n и s_{n+1} обозначают смещения масс m_{n-1} , m_n и m_{n+1} , соответственно. Тогда, согласно закону Гука, силы, действующие на массу m_n , равняются

$$F_n = k(s_{n-1} - s_n), \quad F_{n+1} = -k(s_n - s_{n+1}). \quad (3.17)$$

Применяя второй закон Ньютона, получим следующее уравнение движения массы m_n :

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = F_n + F_{n+1}. \quad (3.18)$$

Здесь мы учли третий закон Ньютона. Очевидно, что силы, действующие на массу, имеют противоположные направления. Подставляя (3.17) в (3.18), приходим к следующему уравнению:

$$m \frac{\partial^2 s_n}{\partial t^2} = k(s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n). \quad (3.19)$$

Пусть положение масс m_{n-1} , m_n и m_{n+1} характеризуется координатами x_{n+1} , x_n и x_{n-1} . Это означает, что

$$s_{n-1} = s(x_{n-1}), \quad s_n = s(x_n) \quad \text{и} \quad s_{n+1} = s(x_{n+1}).$$

Как известно, если расстояние между двумя точками достаточно мало, первая производная непрерывной функции $s(t)$ связана с разностью ее значений следующим образом:

$$s_n - s_{n-1} = \frac{\partial s}{\partial x} = \left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \quad (3.20)$$

и

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\partial s}{\partial x} = \left(x_n + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x.$$

Предположим, что на каждом интервале функция $s(t)$ ведет себя линейным образом и ее производная постоянна. Однако значения производной на разных интервалах в общем случае отличаются друг от друга.

Аналогичным образом, в точках x_{n-1} , x_n и x_{n+1} можно найти соотношение между функцией $s(x)$ и ее второй производной. Действительно, вычитая первое уравнение (3.20) из второго, получаем

$$s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = (\Delta x)^2, \quad (3.21)$$

где вторая производная $\partial^2 s / \partial x^2$ постоянна на интервале

$$x_{n-1} < x < x_{n+1}.$$

Подстановка (3.21) в уравнение (3.19) дает

$$m \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2.$$

Поскольку

$$m = \rho \Delta x \text{ и } E^* = k \Delta x,$$

имеем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.22)$$

Здесь c – скорость распространения волны вдоль пружины, $s(x, t)$ – смещение центра масс любого однородного элемента.

Поскольку смещение $s(x, t)$ зависит от двух аргументов, уравнение (3.22) содержит частные производные и называется волновым уравнением для одномерного случая.

Прежде чем приступить к обсуждению решения этого уравнения, заметим следующее:

а) при выводе уравнения (3.22) мы использовали второй и третий законы Ньютона, а также закон Гука. Этот подход остается справедливым во всех случаях уравнений движения, вызванного распространением волн;

б) мы рассматривали элемент, состоящий из трех масс и двух соединяющих их пружин (см. рис. 3.1, а). В общем случае, эти пружины деформируются по-разному, что приводит к появлению ускорения у массы m_n . Помимо этого, смещения, скорости и ускорения масс m_{n-1} , m и m_{n+1} также могут отличаться друг от друга;

в) левая часть уравнения движения характеризует ускорение центра масс. Правая часть этого уравнения связана с результирующими внешними силами, нормированными на массу элемента.

3.2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как было описано в предыдущем разделе, распространение волны сопровождается смещением частиц $s(x, t)$, которое подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.23)$$

Здесь

$$c = \sqrt{E^* / \rho} \quad (3.24)$$

обозначает скорость волны. Уравнение (3.23) является дифференциальным

уравнением с частными производными второго порядка. Это означает, что решением этого уравнения может быть только функция, имеющая вторые производные по координате x и времени t . Такие функции, как ступенчатая функция, не удовлетворяют волновому уравнению в окрестности точки разрыва.

МЕТОД ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим теперь решение волнового уравнения, играющее фундаментальную роль в теории распространения волн. Заметим, что уравнение (3.23) является самым простым вариантом уравнения движения, соответствующим одномерному случаю, поскольку смещение $s(x, t)$ зависит только от одной пространственной координаты x вдоль пружины.

Как известно, решение обыкновенного дифференциального уравнения, так же, как и уравнения в частных производных, исторически было получено методом проб и ошибок. Так, например, Даламбер предложил решение волнового уравнения (3.23), введя две новые переменные:

$$\zeta = x - ct \quad \text{и} \quad \eta = x + ct. \quad (3.25)$$

Затем, применяя цепное правило дифференцирования (рис. 3.2, а), он заменил производные

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

производными относительно ζ и η .

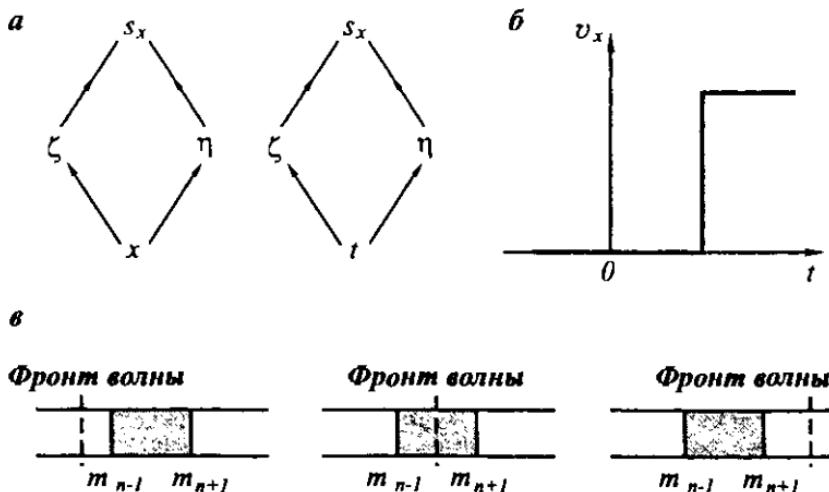


Рис. 3.2. Связь между переменными функции $s(x, t)$ (а); скорость частиц как функция времени (б); положения волнового фронта относительно элемента пружины (в)

Действуя таким образом, первые производные можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial s}{\partial \zeta} + c \frac{\partial s}{\partial \eta},$$

поскольку

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -c \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = c.$$

Для вторых производных имеем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial s}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}. \quad (3.26)$$

Аналогичным образом производная $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ записывается как

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.27)$$

Подстановка (3.26) – (3.27) в (3.23) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial \zeta \partial \eta} = 0. \quad (3.28)$$

Здесь $s_2 = s$, поскольку предполагается, что смещение имеет только x -компоненту.

Данный вид волнового уравнения позволяет получить его решение очень простым способом. Действительно, из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial s_x}{\partial \eta} \right) = 0$$

следует, что функция $\partial s_x / \partial \eta$ не зависит от ζ , т.е.

$$\frac{\partial s_x(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = \phi(\eta),$$

где $\phi(\eta)$ – некоторая функция от η .

Интегрируя по η обе части полученного уравнения, получим

$$s_x(\zeta, \eta) = \int \phi(\eta) d\eta + C. \quad (3.29)$$

Здесь C – коэффициент, не зависящий от η , хотя он может являться функцией от ζ .

Таким образом, правая часть выражения (3.29) является, в общем случае, суммой двух функций, причем каждая из них зависит только от одной переменной (η или ζ):

$$s_x(\zeta, \eta) = A f(\zeta) + B g(\eta). \quad (3.30)$$

Здесь

$$A f(\zeta) = C, \quad B g(\eta) = \int \phi(\eta) d\eta,$$

а A и B – некоторые постоянные, не зависящие от η и ζ . Как будет показано далее, эти постоянные обычно определяются из начальных и граничных условий.

Теперь, используя (3.25), решение волнового уравнения можно представить как

$$s_x(x, t) = A f(x - ct) + B g(x + ct). \quad (3.31)$$

Посмотрим, прежде всего, какой смысл имеет функция $f(x - ct)$, зависящая от аргумента $\zeta = x - ct$. По определению, данная функция является постоянной до тех пор, пока остается постоянной разность $x - ct$, независимо от значений x и t . Это означает, что эта функция описывает волну, распространяющуюся вдоль оси x , например вдоль пружины. Действительно, с увеличением расстояния x от начала пружины одно и то же значение функции $f(x - ct)$ будет наблюдаться на все больших временах.

Аналогично можно заключить, что второй член в выражении (3.31), т.е. функция $g(x + ct)$, описывает волну, распространяющуюся в противоположном направлении, в сторону левого конца пружины. Таким образом, решение волнового уравнения является суммой двух волн, бегущих в противоположных направлениях. В связи с этим следует заметить следующее.

1. Функция $f(x - ct)$ обычно описывает волну, которая распространяется от источника, расположенного в начале координат $x = 0$. Эта волна называется первичной или падающей волной. Указанная функция может характеризовать также волны, возникающие на внутренних границах неоднородности пружины. Такие волны, которые часто называются проходящими или преломленными волнами, распространяются так же, как и падающая волна, в сторону от источника.

2. Функция $g(x + ct)$ может описывать отраженные волны, возникающие на границе между двумя частями пружины с разными значениями ρ и E^* .

3. Мы показали, что произвольные функции аргументов $x - ct$ и $x + ct$ могут характеризовать распространение волн, поскольку такие функции являются решениями уравнения (3.23). Конечно, эти функции должны быть непрерывными вместе со своими первыми производными. Легко показать, что функции от аргументов

$$a\zeta \pm b \quad \text{и} \quad a\eta \pm b, \quad (3.32)$$

где a и b – независимые константы, также удовлетворяют волновому уравнению. Соответственно, аргументы функций, описывающих распространение волн, могут иметь следующий вид:

$$\beta\left(t \pm \frac{x}{c}\right), \quad \alpha(x \pm ct) \quad (3.33)$$

и

$$\beta t \pm \gamma_1 x, \quad \alpha x \pm \gamma_2 t,$$

если

$$\gamma_1 = \beta/c, \quad \gamma_2 = \alpha c.$$

Присутствие здесь коэффициентов α и β является необходимым и следует из физических условий задачи. Так, например, функция

$$e^{(x - ct)}$$

удовлетворяет волновому уравнению, но не имеет никакого физического смысла, поскольку ее аргумент не является безразмерным.

4. Таким образом, практически любая функция $f(x, t)$ может быть решением волнового уравнения (3.23) при условии, что ее аргументы x и t входят в нее в виде комбинации (3.32). Например, произвольная функция вида

$$f[\alpha(x_2 - ct)]$$

не удовлетворяет уравнению (3.23). Другими словами, волновое уравнение накладывает очень жесткие условия на соотношение между расстоянием x и временем t , хотя сами функции $f(x, t)$ и $g(x, t)$ могут быть практически любыми. Это означает, что волновое уравнение имеет бесконечное число решений. Это условие является тривиальным, поскольку можно представить себе бесконечное число различных внешних сил, действующих на один из концов пружины. Естественно, что они будут вызывать появление совершенно разных волн, каждая из которых будет удовлетворять волновому уравнению.

5. Поскольку в каждой точке однородной пружины волна описывается одними и теми же функциями $f(x - t)$ и $g(x + t)$, мы снова видим, что форма волны не меняется с расстоянием x . Конечно, как уже отмечалось ранее, такое поведение проявляется в одномерном случае и означает, что механическая энергия не переходит в тепло.

6. Предположим, что аргументом функции $f(\zeta)$ является

$$\zeta = \alpha(x - ct).$$

Этот аргумент характеризует волновой профиль, распространяющийся вдоль оси x , и называется фазой волны.

Таким же образом аргумент функции $g(\eta)$:

$$\eta = \alpha(x + ct)$$

является фазой волны, распространяющейся в противоположном направлении.

7. Согласно (3.33) скорость волны является, по существу, скоростью распространения фазы и в соответствии с этим называется фазовой скоростью. Позднее мы ознакомимся с другим типом скорости, а именно групповой скоростью.

ДЕФОРМАЦИЯ И ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПРУЖИНЫ

Рассмотрим теперь волны сжатия и растяжения, в которых частицы движутся в направлении распространения волны или в противоположном направлении. Такое движение сопровождается переносом упругой силы и деформацией пружины. Чтобы исследовать поведение этих волн, обратимся снова к дискретной модели пружины (рис. 3.1, a). Как было показано в главе 2, упругие (восстанавливающие) силы пружин, расположенных до и после массы m_n , определяются выражениями

$$F_{n+1} = -k(s_n - s_{n+1})$$

и

$$F_n = -k(s_{n-1} - s_n).$$

Полагая, что длина каждой из пружин стремится к нулю, а их масса распределена однородно, мы снова можем осуществить переход к случаю непрерывной пружины. Тогда разность смещений записывается как

$$s_{n+1} - s_n = -\frac{ds}{dx} \Delta x,$$

$$s_n - s_{n+1} = -\frac{ds}{dx} \Delta x.$$

Подстановка этих выражений в (3.34) дает

$$F_n = E \cdot \frac{ds_x}{dx} \quad \text{и} \quad F_{n+1} = E \cdot \frac{ds_x}{dx} \quad (3.35)$$

или

$$F(x, t) = E \cdot \frac{ds_x(x, t)}{dx}. \quad (3.36)$$

Здесь $s_x = s$.

Соотношение (3.36) представляет собой закон Гука для пружины. По определению, производная ds_x/dx задает относительную величину изменения смещений и характеризует деформацию пружины. Например, если оба конца пружины имеют одинаковые смещения, то деформации отсутствуют и производная ds_x/dx равняется нулю. Вводя эту величину, мы предполагали, что элемент пружины настолько мал, что смещения в пределах этого элемента

изменяются линейным образом. Производную $\partial s_x / \partial x$ называют обычно деформацией:

$$e_{xx} = \partial s_x / \partial x, \quad (3.37)$$

и закон Гука (3.36) можно записать в виде

$$F_x = E^* e_{xx}. \quad (3.38)$$

Очевидно, что, если $\partial s_x / \partial x < 0$, то происходит сжатие пружины, а x -компоненты силы F_x является отрицательной. И наоборот, если $\partial s_x / \partial x > 0$, то пружина растягивается и компонента F_x является положительной.

ВЫРАЖЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЧЕРЕЗ СКОРОСТИ ВОЛНЫ И ЧАСТИЦ

Установим теперь соотношение между скоростью v_x , деформацией e_{xx} и компонентой силы F_x для волны, распространяющейся со скоростью c . Вначале предположим, что мы имеем дело с уходящей волной. Это означает, что

$$\begin{aligned} s_x &= s_0 f[\alpha(x - ct)], \\ v_x &= -\alpha c s_0 f'[\alpha(x - ct)], \\ e_{xx} &= \alpha s_0 f'[\alpha(x - ct)], \\ F_x &= E^* \alpha s_0 f'[\alpha(x - ct)], \end{aligned} \quad (3.39)$$

где f' – производная по аргументу $\alpha(x - ct)$.

Из формул (3.39) приходим к следующему важному соотношению:

$$v_x/c = -F_x/E^* = -e_{xx}. \quad (3.40)$$

Аналогично, для приходящей волны

$$\begin{aligned} s_x(x, t) &= s_0 g[\alpha(x + ct)], \\ v_x(x, t) &= \alpha c s_0 g'[\alpha(x + ct)], \\ e_{xx}(x, t) &= \alpha s_0 g'[\alpha(x + ct)], \\ F_x(x, t) &= E^* \alpha s_0 g'[\alpha(x + ct)]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Отсюда

$$v_x/c = -F_x/E^* = -e_{xx}. \quad (3.42)$$

Таким образом, деформация определяется отношением скорости элемента пружины к скорости волны.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров распространения волны в пружине, полезно сделать несколько очевидных замечаний. Предположим, что сила F_x ведет себя как прямоугольный импульс. Тогда, используя прин-

цип суперпозиции, мы можем представить результирующую волну как разность двух ступенчатых функций. Одна из них описывает волну сжатия с $e_{xx} < 0$ а вторая – волну растяжения с $e_{xx} > 0$.

Приимая во внимание соотношения (3.40) и (3.42), приходим к выводу, что после прекращения действия импульса элемент пружины перестает двигаться и его деформация исчезает. Применяя второй интеграл Дюамеля (см. приложение 8), т.е., по существу, принцип суперпозиции, можно увидеть, что такой же результат будет наблюдаться в случае импульса произвольной формы:

$$v_x = 0, \quad e_{xx} = 0 \quad \text{и} \quad F_x = 0. \quad (3.43)$$

Как следует из второго закона Ньютона, элементарная масса m после действия импульса внешней силы N_x начинает двигаться с постоянной ненулевой скоростью

$$v_x = N_x/m. \quad (3.44)$$

Сравнение (3.43) с (3.44) показывает, что эффекты действия импульса силы на изолированную массу и на элемент пружины при распространении волны отличаются друг от друга. Чтобы объяснить этот очевидный парадокс, рассмотрим движение, вызванное ступенчатой волной, распространяющейся вдоль пружины (рис. 3.2, б). Очевидно, прежде всего, что данная функция не удовлетворяет волновому уравнению вблизи волнового фронта, поскольку в этой области у нее не существует производных по времени и расстоянию.

Рассмотрим три различных положения волнового фронта по отношению к произвольному элементу пружины (рис. 3.2, в). В первом положении волновой фронт еще не достиг элемента пружины, и тот продолжает находиться в состоянии покоя. Следующее положение соответствует моменту времени, когда волновой фронт находится в пределах указанного элемента. Это означает, что смещение, скорость, деформация и сила являются разрывными функциями аргументов x и t . В то же время при выводе волнового уравнения мы предполагали, что все эти функции являются непрерывными. В частности, мы предположили, что упругая сила пружины изменяется линейно между границами элемента. Другими словами, это уравнение не описывает движение элемента пружины, если волновой фронт находится в пределах этого элемента. Заметим, что этот вывод применим для любой волны, даже если вторые производные $\partial^2 s_x / \partial x^2$ и $\partial^2 s_x / \partial t^2$ принимают конечные значения.

Когда волна достигает передней границы элемента пружины (третье положение), все составляющие его частицы движутся с одинаковой скоростью v_x . В этот же момент времени, согласно второму закону Ньютона, на указанную границу начинает действовать внешняя сила. Это вызвано деформацией пружины, расположенной перед рассматриваемым элементом. Начиная с этого момента, полная внешняя сила равняется нулю, и, следовательно, масса движется с постоянной скоростью. Поэтому в результате действия импульса

силы, являющегося суперпозицией двух ступенчатых функций с противоположным направлением скоростей частиц, движение элемента пружины прекращается. Поскольку любая волна представляет собой систему импульсов, возникающих в различные моменты времени, мы можем сказать, что после того, как произвольная волна пройдет через элемент пружины, он обязательно останавливается. Таким образом, мы объяснили разницу между действием импульса силы на изолированную массу и на элемент пружины при распространении волны.

Заметим, что если элемент пружины находится позади волнового фронта, имеющего форму ступенчатой функции (рис. 3.2, в), то смещение является линейной функцией времени и расстояния, и поэтому левая и правая части волнового уравнения равняются нулю. Иными словами, в этом случае уравнение (3.23) корректно описывает движение элемента пружины.

ПОВЕДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В качестве первого примера, иллюстрирующего волновое поведение, рассмотрим волну сжатия, показанную на рис. 3.3. С учетом (3.40) скорость частиц в этом случае описывается следующим выражением:

$$v_x = -\frac{c}{E^*} F_x.$$

Отсюда видно, что скорость направлена вдоль оси x и прямо пропорциональна упругой силе пружины F_x .

По определению,

$$v_x = \partial s_x / \partial t,$$

и, следовательно, смещение s_x есть

$$s_x(x, t) = \int_{t_1}^t v_x dt. \quad (3.45)$$

Здесь t_1 обозначает момент времени, в который волна приходит в точку наблюдения. Таким образом, смещение s_x , постепенно увеличиваясь, достигает своего максимального значения в момент времени $t = t_2$, а затем остается постоянным.

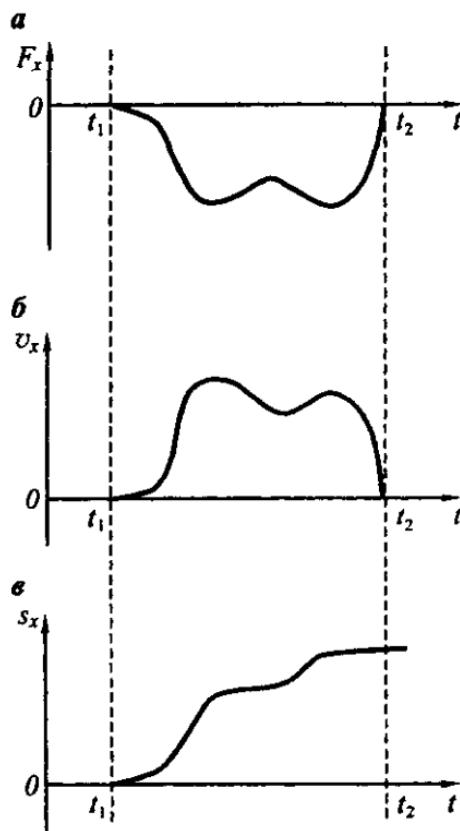
Как следует из равенства (3.45), максимальное смещение определяется как

$$s_x^{\max} = -\frac{c}{E^*} \int_{t_1}^{t_2} F_x(x, t) dt > 0,$$

поскольку скалярная компонента F_x является отрицательной.

Очевидно, что в случае импульса силы растяжения мы получим

Рис. 3.3. Поведение функций $F_x(t)$, $v_x(t)$ и $s_x(t)$ (волна сжатия)



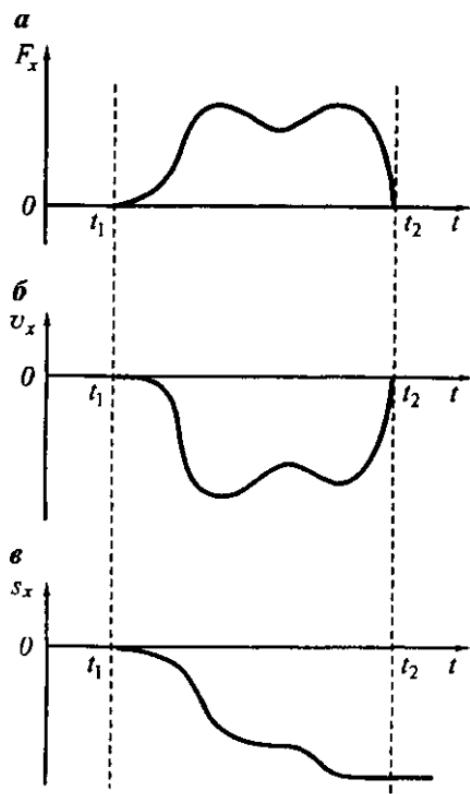
похожий результат (рис. 3.4). В частности, минимальное смещение, вызванное волной в некоторой заданной точке,

$$s_x^{\min} = -\frac{c}{E} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dt < 0.$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы изучить поведение смещения, скорости и упругой силы в гораздо более сложных случаях. Предположим, что мы знаем смещение $s_x(x, t)$, связанное с распространением волны (рис. 3.5, а, б). Вначале, когда волна приходит в заданную точку в момент времени $t = t_1$, функция $s_x(x, t)$ начинает возрастать, затем достигает своего максимального значения, после чего уменьшается и становится равной нулю в момент времени $t = t_2$.

Дифференцируя функцию $s_x(x, t)$ по времени и снова используя соотношения (3.40) и (3.42), мы определим скорость и упругую силу (рис. 3.5, а). Последняя кривая позволяет объяснить поведение функции $s_x(x, t)$. Действительно, мы видим, что волну, вызванную этой силой, можно представить в виде двух последовательных импульсов. Один из них соответствует волне сжатия, $F_x < 0$, которая приходит вначале и вызывает смещение пружины вдоль

Рис. 3.4. Поведение функций $F_x(t)$, $v_x(t)$ и $s_x(t)$ (волна растяжения)



оси x . Затем приходит волна растяжения и вызывает смещение в противоположном направлении. Поскольку площади A_c и A , отличаются только знаком (рис. 3.5, а), частицы пружины возвращаются в свое первоначальное положение.

Как уже отмечалось, полное смещение, вызванное действием произвольной волны, определяется площадью под кривой $F_x(t)$.

Два других примера волн представлены на рис. 3.6, а, б. В первом примере волновой источник приводит к появлению импульса сжатия, вызывающего смещение вдоль оси x . В течение некоторого времени положение частицы не меняется до тех пор, пока не появится импульс растяжения и не вернет частицу в исходное положение.

Во втором примере предполагается, что частица была смещена относительно своего первоначального положения, после чего возник импульс растяжения, параметры которого были таковы, что частица снова вернулась в исходную точку, т.е.

$$s_0 = \frac{c}{E^*} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt.$$

Обсудим теперь одно интересное свойство волн, распространяющихся

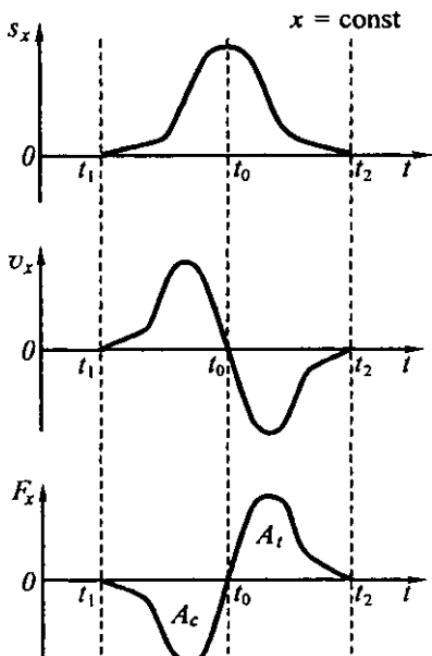
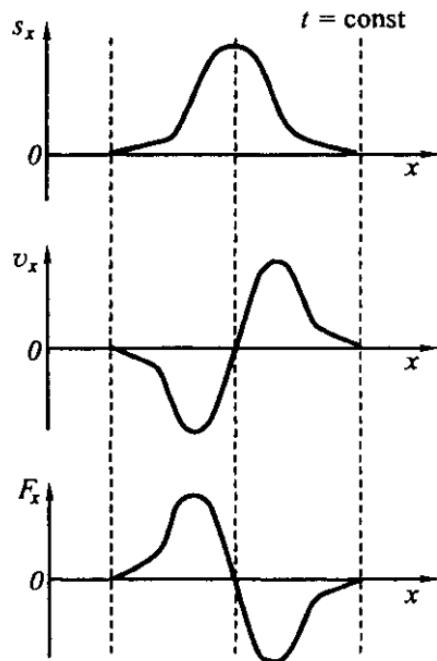
a**б**

Рис. 3.5. Поведение функций s_x , v_x и F_x

вдоль пружины. Как можно увидеть из рис. 3.5, *а* и *б*, они являются зеркальным отражением друг друга. При этом поведение волн в пространстве и времени не является случайным и проявляется для любой волны в одномерном случае. Действительно, произвольную волну можно представить как систему импульсов, возникающих в различные моменты времени (см. приложение 8). Рассмотрим, например, импульс, приходящий первым в некоторую заданную точку пружины, или, иными словами, импульс, который был раньше других сгенерирован на одном из концов пружины. Если мы рассмотрим волновое поле как функцию расстояния x , то окажется, что этот импульс прошел большее, чем другие, расстояние. И наоборот, если мы рассмотрим последний из импульсов, приходящих в точку наблюдения, то в любой заданный момент времени окажется, что он прошел наименьшее расстояние. Таким образом, кривые

$$s_x(x) \quad \text{и} \quad s_x(t),$$

$$v_x(x) \quad \text{и} \quad v_x(t),$$

$$F_x(x) \quad \text{и} \quad F_x(t),$$

$$e_{xx}(x) \quad \text{и} \quad e_{xx}(t)$$

являются зеркальным отражением друг друга.

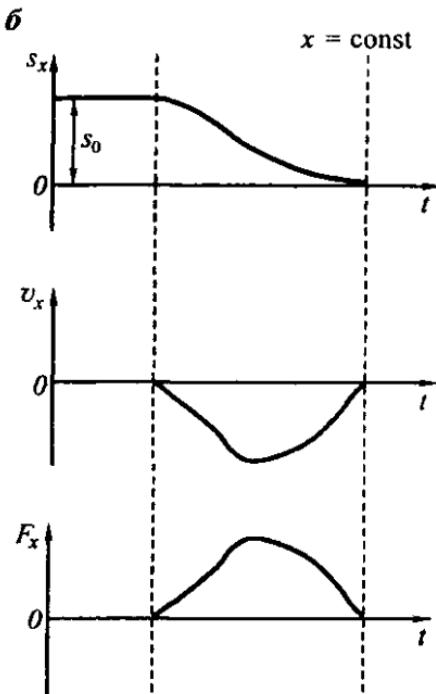
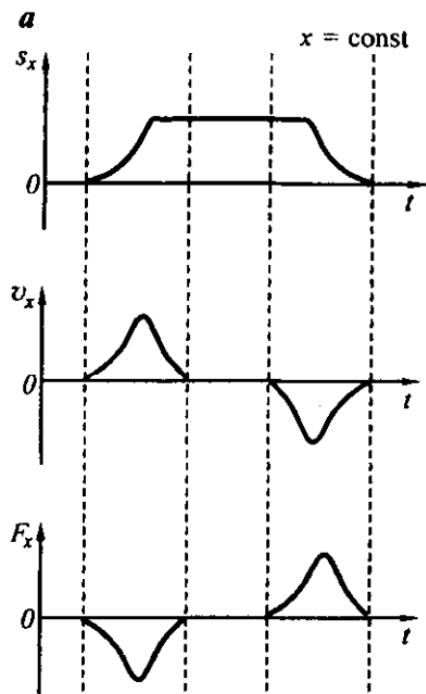


Рис. 3.6. Поведение функций $s_x(t)$, $v_x(t)$ и $F_x(t)$

Итак, мы вывели волновое уравнение для смещения. Теперь, дифференцируя по времени обе части уравнения (3.23), мы приходим к волновому уравнению относительно скорости:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}.$$

Аналогичным образом,

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial t^2}.$$

Отсюда, используя соотношение (3.38), получаем

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2}.$$

Таким образом, все кинематические и динамические характеристики волны удовлетворяют волновому уравнению.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВОЛНОЙ И ЕЕ ИСТОЧНИКОМ

Мы рассмотрели несколько примеров волн различной формы, вызванных источниками, действующими на конец пружины, находящейся в точке

$x = 0$. Теперь легко установить связь между волной и ее источником. Действительно, предположим, что внешняя сила F_x^e , приложенная к концу пружины, ведет себя как

$$F_x^e(0, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \Phi(at), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Тогда для любой точки упругая сила, вызванная деформацией пружины,

$$F_x(x, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ \Phi[a(t - x/c)], & t \geq x/c. \end{cases} \quad (3.47)$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет волновому уравнению, поскольку ее аргумент имеет вид

$$a(t - x/c)$$

и описывает волну, распространяющуюся вдоль оси x от начала пружины. Скорость волны равняется c , поскольку волновой фронт приходит в точку наблюдения в момент времени $t = x/c$. Более того, на левом конце пружины функция $F_x^e(0, t)$ отличается от внешней силы $F_x(0, t)$ только знаком. Так, например, в случае волны сжатия, сила $F_x^e(0, t)$ является положительной, в то время как скалярная компонента упругой силы F_x имеет противоположный знак.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, предположим, что

$$F_x^e = -F_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t/\tau}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

где τ характеризует скорость изменения силы со временем.

В частности, с увеличением τ функция F_x^e стремится к нулю более медленно, и в пределе мы приходим к ступенчатой функции.

Как следует из равенства (3.48), упругая сила, вызванная волной, равняется

$$F_x(x, t) = F_0 \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ \frac{e^{-t-x/c}}{e^{-\tau}}, & t \geq x/c. \end{cases} \quad (3.49)$$

Откуда, учитывая (3.40), для скорости v_x получим

$$v_x(x, t) = -v_{0x} \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ \frac{e^{-t-x/c}}{e^{-\tau}}, & t \geq x/c, \end{cases} \quad (3.50)$$

где

$$v_{0x} = c \frac{F_0}{E^*}.$$

Соответственно, смещение частиц равняется

$$s_x(x, t) = -c \frac{F_0}{E^*} \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ I, & t \geq x/c, \end{cases}$$

где

$$I = \int_{x/c}^t e^{-\frac{t-x/c}{\tau}} dt, \quad \text{если } t > x/c,$$

или

$$I = \tau \left\{ 1 - e^{-\frac{t-x/c}{\tau}} \right\}.$$

НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРУЖИНЫ

Мы получили уравнение движения в предположении, что пружина является однородной, т.е. оба параметра, масса и жесткость, не зависят от координаты x . Рассмотрим более сложный случай, когда эти параметры являются непрерывными функциями от x . Предположим вначале, что жесткость пружины k постоянна, а вдоль пружины изменяется только линейная плотность ρ . Чтобы вывести уравнение движения, мы снова используем дискретную модель пружины (рис. 3.7, a). Как и в случае однородной пружины, силы, действующие на массу m_n , определяются как

$$F_n = k(s_{n-1} - s_n) \quad \text{и} \quad F_{n+1} = -k(s_n - s_{n+1}).$$

Следовательно, результирующая сила

$$F_x = k(s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n).$$

В пределе, когда элемент пружины становится бесконечно малым, получим

$$F_x = k \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \Delta x,$$

поскольку

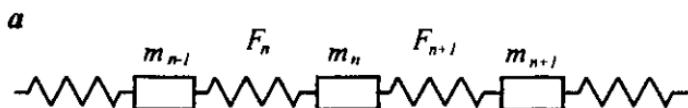
$$s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n \approx \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \quad \text{и} \quad E^* = k \Delta x.$$

Применяя второй закон Ньютона, приходим к следующему уравнению:

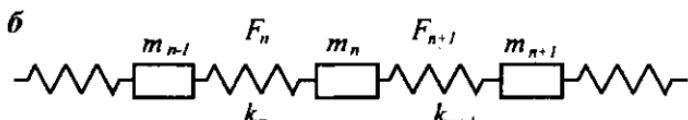
$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} \Delta x, \tag{3.51}$$

где m – масса элемента, расположенного на интервале

$$x_{n-1} < x < x_{n+1},$$



$$m_{n-1} \neq m_n \neq m_{n+1}, k_{n-1} = k_n = k_{n+1}$$



$$m_{n-1} = m_n = m_{n+1}, k_{n-1} \neq k_n \neq k_{n+1}$$

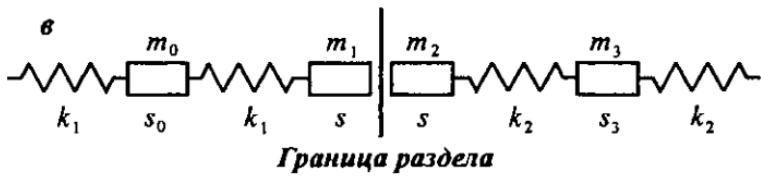


Рис. 3.7. Вывод волнового уравнения (*a*, *b*); граничные условия (*в*)

и она равняется

$$m = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \rho(x) dx. \quad (3.52)$$

Поскольку Δx очень мало, можно предположить, что в пределах каждого элемента плотность ρ является линейной функцией от x . Тогда вместо (3.52) получим

$$m = \rho(x_n) \Delta x. \quad (3.53)$$

Здесь $\rho(x_n)$ – плотность в средней точке элемента.

Подстановка (3.53) в (3.51) дает следующее уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = E^* \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}.$$

Тем не менее, коренное отличие данного примера от случая однородной пружины состоит в том, что здесь плотность ρ и, следовательно, параметр c являются функциями расстояния x .

Предположим теперь, что масса распределена однородно, а жесткость k зависит от x . Из рис. 3.7, *b* следует, что

$$F_n = k_n(s_{n-1} - s_n), F_{n+1} = -k_{n+1}(s_n - s_{n+1})$$

и, следовательно, результирующая сила, действующая на массу m_n , записывается как

$$F_x = k_n(s_{n-1} - s_n) - k_{n+1}(s_n - s_{n+1})$$

или

$$F_x = k_{n+1}(s_{n+1} - s_n) - k_n(s_n - s_{n-1}).$$

Мы можем предположить, что с уменьшением Δx приведенные выше функции становятся непрерывными, тогда

$$F_x = \left[k_{n+1} \frac{\partial s_x(x + \Delta x / 2)}{\partial x} - k_n \frac{\partial s_x(x - \Delta x / 2)}{\partial x} \right] \Delta x.$$

Аналогичным образом получим

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial s_x}{\partial x} \right) (\Delta x)^2. \quad (3.55)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E^* \frac{\partial s_x}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial s_x}{\partial x} \right). \quad (3.56)$$

Последнее уравнение отличается от волнового уравнения для однородной среды.

Таким образом, мы продемонстрировали, что как только пружина становится неоднородной, уравнение движения становится более сложным и обычно перестает совпадать с уравнением для однородной пружины.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим случай, когда плотность и жесткость пружины имеют разрывы. В этих точках уже нельзя применять уравнение движения, а также соотношения (3.54) и (3.56). Чтобы понять поведение волны в таких точках, мы снова используем дискретную модель пружины (рис. 3.7, в). Вертикальная линия на этом рисунке указывает точку, в которой параметры пружины имеют разрыв.

Мы предполагаем, что распространение упругой волны вдоль пружины не нарушает ее целостности. Это означает, что массы m_1 и m_2 , расположенные в окрестности указанной внутренней границы, должны иметь одинаковые смещения:

$$s_{1x} = s_{2x} = s_x, \text{ если } x = x_0. \quad (3.57)$$

В то же время смещения масс m_1 и m_2 , расположенных на некотором небольшом расстоянии по разные стороны этой границы, всегда будут отличаться друг от друга, если $k_1 \neq k_2$. Равенство (3.57) описывает первое свойство волны на внутренней границе.

Чтобы получить второе граничное условие, примем во внимание тот факт, что массы m_1 и m_2 имеют одинаковое смещение s_x и, следовательно, их можно интерпретировать как одну частицу с массой

$$m = m_1 + m_2.$$

Применяя второй закон Ньютона, получим

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_{1x}^e + F_{2x}^e. \quad (3.58)$$

Здесь F_{1x}^e и F_{2x}^e – силы, действующие на массу m со стороны пружин.

Случаи волн сжатия и растяжения удобно рассматривать раздельно.

Первый случай

Предположим, что вдоль оси x распространяется волна сжатия (рис. 3.7, a). Тогда на массу m действуют следующие две силы:

$$F_{1x}^e = k_1 (s_{0x} - s_x) \quad \text{и} \quad F_{2x}^e = -k_2 (s_x - s_{3x}), \quad (3.59)$$

имеющие противоположные направления. Поскольку волна сжатия приводит к отрицательной деформации $e_{xx} < 0$, то

$$F_{1x} < 0 \quad \text{и} \quad F_{2x} < 0$$

или

$$F_{1x} = -F_{1x}^e \quad \text{и} \quad F_{2x} = F_{2x}^e,$$

где силы F_{1x} и F_{2x} подчиняются закону Гука (выражения (3.37) и (3.38))

$$F_e = E^* \frac{\partial s_x}{\partial x}.$$

Тогда уравнение (3.58) можно переписать в следующем виде:

$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_{2x} - F_{1x}. \quad (3.60)$$

С уменьшением длины Δx массы m_1 и m_2 уменьшаются и в пределе стремятся к нулю. Это означает, что правая часть уравнения (3.58) также должна исчезнуть. В противном случае, ускорение $\partial^2 s_x / \partial t^2$ станет бесконечно большим. Поскольку это невозможно, мы должны заключить, что упругие силы

пружин, расположенных по обе стороны от внутренней границы, равны друг другу:

$$F_{1x} = F_{2x}. \quad (3.61)$$

Второй случай

Предположим теперь, что вдоль оси x распространяется волна растяжения. Учитывая, что компонента смещения s_x является отрицательной, мы видим, что

$$F_{1x}^e < 0 \quad \text{и} \quad F_{2x}^e > 0.$$

В то же время, в отличие от предыдущего случая, деформация e_{xx} является положительной. Поэтому

$$F_{1x}^e = -F_{1x} \quad \text{и} \quad F_{2x}^e = F_{2x}, \quad (3.62)$$

и мы снова приходим к уравнению (3.60). Следовательно, граничное условие (3.61) остается справедливым в обоих случаях. Непрерывность упругой силы – это второе важное свойство волны на внутренней границе.

Соотношения (3.57) и (3.61) называются граничными условиями и являются заменой волнистому уравнению в точках разрыва параметров ρ и E^* . Последнее из указанных условий можно переписать в виде

$$E_1^* \frac{ds_{1x}}{dx} = E_2^* \frac{ds_{2x}}{dx} \quad \text{или} \quad (3.63)$$

$$E_1^* e_{xx}^{(1)} = E_2^* e_{xx}^{(2)}.$$

Это условие показывает, что деформация пружины по разные стороны внутренней границы различна, т.е.

$$e_{xx}^{(1)} \neq e_{xx}^{(2)},$$

и, следовательно, смещения s_0 и s_3 не равны друг другу.

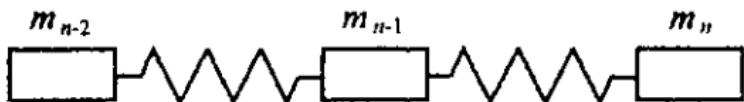
ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Мы показали, что вдоль однородной пружины распространяется единственная волна от источника. Совершенно другая картина возникает, когда в пружине имеется граница, на которой происходит разрыв параметров ρ и E^* . Покажем, что на таких границах появляются новые волны, а именно отраженные и проходящие волны. Невозможно переоценить значение этого явления в сейсмологии.

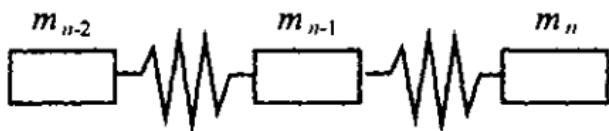
Сначала мы попытаемся качественно объяснить, как возникают отраженные волны. Предположим, что волна сжатия распространяется вдоль однородной системы масс и пружин к ее свободному концу (рис. 3.8, а). Рассмотрим момент времени, когда все массы движутся с одинаковой

a

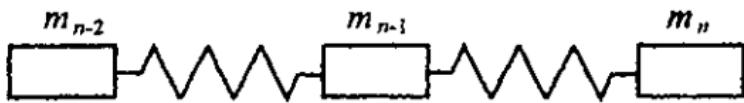
Состояние покоя



→ *Волна сжатия*



→ *Волна сжатия*

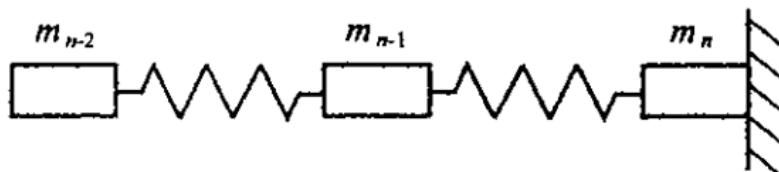


← *Волна растяжения*

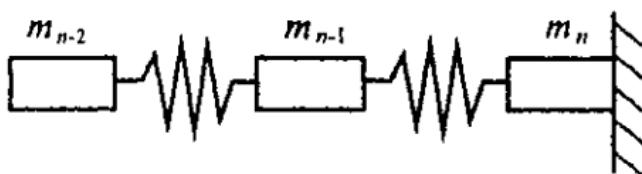
Рис. 3.8. Возникновение отраженной волны

6

Состояние покоя



Волна сжатия



Волна сжатия



скоростью. Это происходит тогда, когда все пружины сжаты одинаковым образом и, следовательно, результирующая сила, действующая на каждую массу, кроме последней, равняется нулю. В этом случае на массу m_n действует только одна единственная сила, вызванная последней пружиной, в результате чего эта масса начинает двигаться с ускорением, а пружина испытывает растяжение.

Сначала скорость массы m_n увеличивается и может значительно превзойти начальную скорость v . В течение этого интервала времени упругая сила F_n последней пружины становится меньше. В момент времени, когда длина пружины совпадет с исходной, сжатие пружины, а также ее упругая сила исчезают. Уменьшение деформации последней пружины сопровождается, с некоторым запозданием по времени, ускорением предыдущей массы m_{n-1} . В результате пружина, расположенная между массами m_{n-1} и m_{n-2} также испытывает растяжение и, наконец, ее сжатие исчезает. Очевидно, что с течением времени все больше пружин испытывают растяжение, а массы приобретают скорость, большую, чем начальная скорость v .

Таким образом, наблюдается волна растяжения, распространяющаяся от свободного конца пружины. Другими словами, падающая волна сжатия приводит к появлению волны растяжения, распространяющейся в противоположном направлении. Эта последняя из указанных волн называется, естественно, отраженной. Точно так же мы можем наблюдать формирование волны сжатия, когда волна растяжения достигает свободного конца пружины.

Поскольку на правом конце системы упругая сила отсутствует, второе граничное условие (соотношение 3.61) заметно упрощается, и мы имеем

$$F_{1x}(x_0) = 0, \quad (3.64)$$

где x_0 – координата свободного конца. Следовательно, упругие силы, сопровождающие волны сжатия и растяжения имеют одинаковую величину, но противоположные знаки. Используя соотношения (3.40) и (3.42), мы можем показать, что существование отраженной волны приводит к удвоению скоростей и величины смещения масс:

$$v_x = 2v \quad \text{и} \quad s_x = 2s_{1x}. \quad (3.65)$$

Это важный результат. Мы снова увидим эти равенства, когда будем изучать отражение плоских волн на поверхности Земли.

Рассмотрим далее случай, когда правый конец системы является идеально жестким, т.е. масса m_n двигаться не может (рис. 3.8, б). Предположим, что в момент времени t все массы, кроме m_n , движутся со скоростью v , а все пружины сжаты одинаково. Как и раньше, это означает, что результирующая сила, действующая на каждую движущуюся массу, равняется нулю.

Благодаря инерции, масса m_{n-1} продолжает движение и, соответственно, последняя пружина оказывается более сжатой, чем другие. Поскольку дополнительная упругая сила, действующая на массу m_{n-1} , направлена противоположно ее движению, масса, в конце концов, останавливается. В этот момент времени следующая масса m_{n-2} продолжает свое движение, но по про-

шествии некоторого времени она тоже останавливается и вторая от конца пружина также становится более сжатой. С течением времени все большее количество масс прекращает свое движение, и сжатие пружин между ними увеличивается. Таким образом, в отличие от предыдущего случая, в данном примере падающая волна сжатия порождает отраженную волну того же типа. По этой причине смещения и скорости частиц, относящиеся к этим волнам, имеют противоположные направления, а знаки упругих сил, наоборот, совпадают. Соответственно, из-за суперпозиции этих волн система прекращает свое движение, но деформация при этом усиливается. Конечно, это же явление возникает, если падающей волной является волна растяжения.

В общем случае, когда пружина состоит из двух однородных, но различающихся между собой частей, естественно ожидать возникновения также и проходящей волны. Эта волна, так же, как и отраженная, распространяется от границы раздела, но в противоположном направлении.

ОТРАЖЕННЫЕ И ПРОХОДЯЩИЕ ВОЛНЫ

Продемонстрируем теперь, что прямая волна, а также волны, возникающие на внутренней границе, могут удовлетворять граничным условиям. Пусть начало оси x совпадает с границей раздела $x_0 = 0$ (рис. 3.9, a), а падающая волна

$$s_1(x, t) = s_0 f_1 \left[a_1 (t - x / c_1) \right] \quad (3.66)$$

распространяется вдоль пружины и достигает этой границы. В соответствии с нашим предположением имеем

$$s_r(x, t) = A f_1 \left[a_1 (t + x / c_1) \right], \quad x \leq 0 \quad (3.67)$$

и

$$s_2(x, t) = B f_2 \left[a_2 (t - x / c_2) \right], \quad x \geq 0.$$

Здесь s_1 и s_2 – смещения отраженной и проходящей волны соответственно. Коэффициенты A и B , так же, как и коэффициенты a_1 и a_2 , неизвестны. Помимо этого, необходимо определить функции f_1 и f_2 .

Таким образом, мы представили смещения частиц в обеих однородных частях системы как

$$s_1(x, t) = s_0 f_1 \left[a_1 (t - x / c_1) \right] + A f_1 \left[a_1 (t + x / c_1) \right], \quad x < 0 \quad (3.68)$$

и

$$s_2(x, t) = B f_2 \left[a_2 (t - x / c_2) \right], \quad x > 0.$$

В соответствии с равенствами (3.57), (3.63), граничные условия запишем как

$$s_{1x} = s_{2x} \quad \text{и} \quad E_1^* \frac{\partial s_{1x}}{\partial x} = E_2^* \frac{\partial s_{2x}}{\partial x}, \quad x = 0.$$

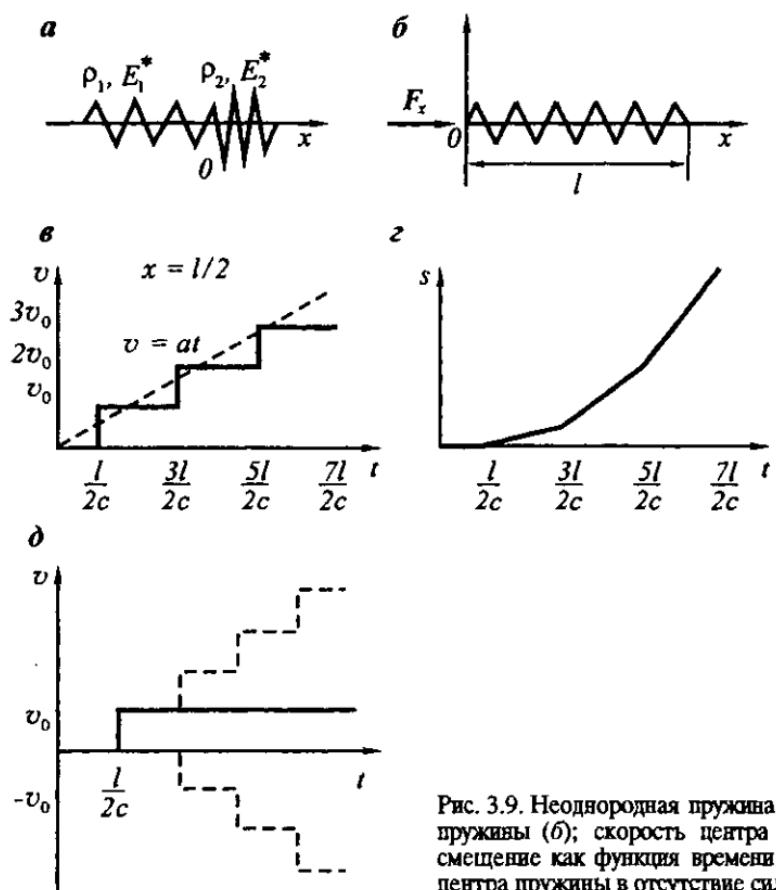


Рис. 3.9. Неоднородная пружина (а); движение пружины (б); скорость центра пружины (в); смещение как функция времени (г); скорость центра пружины в отсутствие силы, $\tau = l/c$ (д)

Подстановка выражения (3.68) в первое из приведенных выше соотношений дает

$$s_0 f(at) + A f_1(a_1 t) = B f_2(a_2 t). \quad (3.69)$$

Равенство (3.69) справедливо для любого момента времени. Это означает, что все три функции, а также их аргументы равны между собой:

$$f_1 = f_2 = f \quad \text{и} \quad a_1 = a_2 = a.$$

Таким образом, вместо (3.68) получим

$$s_1(x, t) = s_0 f[a(t - x/c_1)] + A f[a(t + x/c_1)], \quad x < 0 \quad (3.70)$$

и

$$s_2(x, t) = B f[a(t - x/c_2)], \quad x > 0.$$

Это важный результат, поскольку он показывает, что отраженные и про-

ходящие волны зависят от времени и расстояния так же, как и падающая волна.

Далее, подставляя выражения (3.70) в граничные условия, получим систему уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{cases} s_0 + A = B, \\ -\frac{s_0}{c_1} E_1^* + \frac{A}{c_1} E_1^* = -\frac{B}{c_2} E_2^*. \end{cases} \quad (3.71)$$

Ее решением являются

$$A = \frac{E_1^* c_2 - E_2^* c_1}{E_1^* c_2 + E_2^* c_1} s_0$$

и

$$B = \frac{2E_1^* c_2}{E_1^* c_2 + E_2^* c_1} s_0.$$

Поскольку

$$E^* = \rho c^2,$$

удобно представить эти коэффициенты в следующем виде:

$$A = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} s_0 \quad \text{и} \quad B = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} s_0, \quad (3.72)$$

где

$$Z = \rho c \quad (3.73)$$

является импедансом.

Таким образом, мы показали, что для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо ввести отраженные и проходящие волны. По существу, мы решили так называемую граничную задачу, т.е. математически доказали существование этих волн. Более того, соотношения (3.70) и (3.72) подтверждают наш качественный анализ волнового поведения. Действительно, рассмотрим два предельных случая.

Свободная граница

Предположим, что рассматриваемая граница является свободной: $Z_2 = 0$. Тогда выражения (3.72) дают

$$A = s_0 \quad (3.74)$$

и

$$s_{1x}(x, t) = s_0 f[a(t - x/c_1)] + s_0 f[a(t + x/c_1)]. \quad (3.75)$$

В частности, на свободной границе

$$s_{1x}(0, t) = 2s_{ix}(0, t), \quad (3.76)$$

где $s_{ix}(0, t)$ – смещение частицы, вызванное падающей волной.

Таким образом, обе волны на границе вызывают одинаковые смещения, хотя они и распространяются в разные стороны. Очевидно также, что

$$v_{1x}(0, t) = 2v_{ix}(0, t). \quad (3.77)$$

Дифференцируя это соотношение по x , находим следующее выражение для деформации e_{xx} :

$$e_{xx} = -\frac{s_0 a}{c_1} f \left[a(t - x/c_1) \right] + \frac{s_0 a}{c_1} f' \left[a(t + x/c_1) \right], \quad (3.78)$$

и, следовательно, на границе выполняется условие

$$e_{xx} = 0. \quad (3.79)$$

Это означает, что падающая и отраженная волны приводят к разному типу деформации. Например, падающая волна сжатия вызывает волну растяжения. Ранее мы пришли к такому же заключению, основываясь на физических соображениях.

Жесткая граница

Предполагая, что конец пружины является идеально жестким: $Z_2 = \infty$, имеем

$$A = -s_0, \quad (3.80)$$

и соответственно

$$s_{1x} = s_0 f \left[a(t - x/c_1) \right] - s_0 f \left[a(t + x/c_1) \right]. \quad (3.81)$$

Например, на границе выполняются следующие условия:

$$s_{1x} = 0 \quad \text{и} \quad v_{1x} = 0, \quad (3.82)$$

а деформация равняется

$$e_{xx}(0, t) = \frac{2s_0 a}{c_1} f'(at)$$

или

$$e_{xx}(0, t) = 2e_{ix}^i(0, t), \quad (3.83)$$

где e_{ix}^i – деформация, вызванная падающей волной.

Таким образом, в отличие от предыдущего случая, отраженная волна, возникающая на границе, приводит к такой же деформации, что и падающая волна. В частности, падающая волна растяжения приводит к появлению отраженной волны растяжения. Мы снова видим, что наш качественный анализ подтверждается.

Общий случай

Как следует из выражений (3.70) и (3.72), деформация в окрестности границы ($x < 0$) определяется выражением

$$e_{xx} = \frac{s_0 a}{c_1} \left(-1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) f'(at)$$

или

$$e_{xx} = -\frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{s_0 a}{c_1} f'(at) = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} e_{xx}^i. \quad (3.84)$$

Например, если $Z_2 < Z_1$, то

$$e_{xx} < e_{xx}^i, \quad \text{если } x = 0,$$

т.е. результирующая волна приводит к уменьшению деформации. Другими словами, падающая и отраженная волны принадлежат к разным типам волн. В противоположном случае, когда $Z_2 > Z_1$, деформации увеличиваются ($e_{xx} > e_{xx}^i$), и это указывает на то, что обе волны приводят к одинаковому типу деформации (либо к сжатию, либо к растяжению).

Полезно заметить, что, несмотря на простоту рассматриваемой модели, выражения (3.72), описывающие отраженные и проходящие волны, играют важную роль в разведывательной сейсмологии.

Сделаем в связи с этим три замечания:

а) коэффициент отражения не превосходит единицу и меняется в пределах

$$-1 < A < 1;$$

б) коэффициент прохождения может изменяться в следующих пределах:

$$0 < B < 2;$$

в) как следует из выражений (3.72), проходящая волна всегда приводит к деформациям того же типа, что и падающая волна.

Используя полученные результаты, рассмотрим два примера, иллюстрирующие некоторые важные свойства второго закона Ньютона и закона Гука.

Закон Ньютона и распространение волн

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на левый конец пружины длины l начинает действовать постоянная сила (рис. 3.9, б)

$$F_x = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ F_{0x}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.85)$$

Наша цель – изучить движение пружины.

Очевидно, что указанная сила порождает волну сжатия, которая распространяется вдоль пружины со скоростью c . Этот процесс сопровождается движением частиц, которое происходит с некоторой скоростью v_0 , и обычно

$$v_0 \ll c.$$

В момент времени $t = l/c$ вся пружина оказывается сжатой, и все ее частицы движутся с одинаковой скоростью v_0 . Существенно, что в этот момент на противоположном конце $x = l$ возникает волна растяжения, которая начинает распространяться к левому концу пружины. Эта волна приводит к расширению элементарного объема и к его движению со скоростью v_0 . Следовательно, позади ее волнового фронта частицы начинают двигаться со скоростью $v = 2v_0$, но деформация исчезает. Например, в момент $t = 2l/c$ вся пружина не деформирована и движется со скоростью $2v_0$. Кроме того, в этот момент возникает и начинает распространяться вдоль пружины отраженная волна сжатия. Это происходит из-за того, что оба конца пружины являются свободными и, как мы уже знаем, падающая и отраженная волны всегда имеют различный тип. Соответственно, в момент времени $t = 3l/c$ волна сжатия снова приводит к появлению новой волны растяжения на правом конце пружины. Очевидно, что данный процесс генерации отраженных волн непрерывно повторяется, поскольку мы пренебрегли затуханием в пружине.

Чтобы проиллюстрировать влияние распространения волны на движение пружины, рассмотрим ее средние точки. Хотя постоянная сила F_{0x} начинает действовать в момент времени $t = 0$, частицы в центре масс остаются в покое до момента времени $t = 2l/c$. В этот момент сюда приходит волна сжатия, и частицы начинают двигаться со скоростью v_0 . Такое поведение сохраняется в течение интервала времени

$$\frac{l}{2c} \leq t < \frac{3l}{2c},$$

поскольку волна растяжения, возникшая на правом конце пружины, приходит в центр масс только в момент времени $t = 3l/2c$. Затем эти частицы начинают двигаться со скоростью $v = 2v_0$.

Следующее увеличение скорости происходит, когда волна сжатия приходит от левого конца пружины в момент времени $t = 5l/2c$. Скорость при этом становится равной $3v_0$.

Обобщая этот результат, мы видим, что в момент времени

$$t_n = (2n - 1) \frac{l}{2c}, \quad n \geq 1 \quad (3.86)$$

скорость центра масс равняется

$$v_n = nv_0. \quad (3.87)$$

Таким образом, в течение каждого интервала времени

$$T = l/c$$

$$(3.88)$$

скорость остается постоянной, однако в моменты времени t_n она скачкообразно увеличивается на одну и ту же величину, равную v_0 .

Поведение скорости в средней точке пружины как функции времени показано на рис. 3.9, в. Из этого рисунка ясно видно, что распространение волн между концами пружины приводит к тому, что скорость со временем увеличивается.

Поскольку скорость распространения относительно высока, интервал времени T , в течение которого волна проходит от одного конца пружины к другому, достаточно мал. Так, например, если $c = 5 \times 10^3$ м/с и $l = 1$ м, то

$$T = 2 \times 10^{-4} \text{ с} = 0,2 \text{ мс.}$$

Легко увидеть, что скорости частиц в различных частях пружины ведут себя схожим образом. Исключение составляют только времена t_n , когда изменение скорости зависит от того, в каком месте оно происходит.

Как следует из второго закона Ньютона, скорость центра масс ведет себя во времени совершенно по-другому. Действительно, поскольку постоянная сила приводит к постоянному ускорению

$$a = F/m,$$

скорость частиц должна линейно возрастать со временем:

$$v = at = \frac{F}{m} t. \quad (3.89)$$

Более того, все частицы пружины должны двигаться с одной и той же скоростью.

Безусловно, движение реальной пружины и, в частности, ее центра масс отличается от рассмотренной модели. Это хорошо заметно в начале движения, когда время наблюдения сравнимо с T (формула 3.88). Тем не менее, с увеличением времени, реальное движение частиц асимптотически стремится к тому, которое описывается вторым законом Ньютона. Действительно, при $t \gg T$ увеличение скорости на величину v_0 в момент времени t_n становится мало по сравнению со скоростью v (t_n). Соответственно, разрывную функцию $v(t)$ можно приближенно заменить линейной функцией (3.89).

Наклон прямой $v = at$ равняется

$$a = v_0/T = v_0 c/l. \quad (3.90)$$

Покажем теперь, что параметр a является ускорением, входящим во второй закон Ньютона.

Как следует из (3.42), для каждой волны выполняются равенства

$$v_0/c = F_x/E^* \quad \text{или} \quad v_0/c = F_x/c^2 \rho_0,$$

так как

$$E^* = c^2 \rho_0.$$

Таким образом,

$$v_0 = F_x/c\rho_0 = F_x/Z.$$

Подстановка этого выражения в формулу (3.90) дает

$$a = F_x/m, \quad (3.91)$$

и мы снова приходим ко второму закону Ньютона. Здесь $m = \rho_0 l$ является массой пружины.

Таким образом, у нас есть три выражения для ускорения:

$$a = \frac{v(t_n) - v(t_{n-1})}{T} = \frac{v_0}{T} = \frac{v_0 c}{l}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad a = \frac{F}{m}. \quad (3.92)$$

Последние два выражения характеризуют величину изменения скорости, как если бы она была непрерывной функцией времени. В действительности, это изменение происходит довольно резко, и первое из соотношений (3.92) может служить мерой такого изменения.

Как уже отмечалось, второй закон Ньютона можно применять к пружине или к любому другому телу при условии, что время наблюдения значительно превышает T :

$$t \gg T. \quad (3.93)$$

В этом случае скорости всех частиц тела практически одинаковы, и с увеличением времени резкое изменение скорости становится менее заметным. Таким образом, можно сказать, что закон Ньютона справедлив, если тело является бесконечно малым ($t \rightarrow \infty$) и жестким ($c \rightarrow \infty$). В обоих случаях время T стремится к нулю.

Рассмотрим также поведение смещения s_x средней точки пружины на рис. 3.9, г. Поскольку на интервале

$$t_n < t < t_{n+1}$$

скорость частиц постоянная, $s_x(t)$ является линейной функцией. На каждом последовательном интервале времени увеличение наклона прямой, описывающей смещение, одинаковое. В пределе, при $t \rightarrow \infty$, эта система прямых образует параболу

$$s_x(t) = \beta t^2.$$

Таким образом, ускорение

$$a = \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = 2\beta. \quad (3.94)$$

Наконец, мы получаем известное выражение для линейного движения с постоянным ускорением:

$$s_x(t) = ar^2/2, \quad \text{если } t \gg T.$$

Рассмотрим далее зависимость от времени деформации e_{xx} в окрестности центра масс.

На интервале времени

$$0 < t < l/2c$$

деформация равна нулю. Затем e_{xx} становится отрицательной, поскольку в рассматриваемую точку приходит волна сжатия, и затем остается постоянной до момента времени $t = 3l/2c$, когда в центр масс приходит отраженная волна растяжения. В этот момент деформация снова исчезает. В результате воздействия отраженных волн деформация периодически изменяется. В течение первой половины периода T деформации отсутствуют, а во второй – проявляется сжатие, и такое поведение наблюдается на всех временах. Ранее мы обсуждали поведение пружины для случая, когда внешняя сила F_x приводила к ее сжатию. Очевидно, что похожий результат получится, если сила F_x будет иметь противоположное направление и порождать в пружине волну растяжения.

Как мы уже знаем (см. главу 1), масса тела и, в частности, пружины, является мерой его инерции. Она характеризует интервал времени, требующийся для того, чтобы тело могло достичь определенной скорости. Так, например, с увеличением массы ускорение тела становится меньше и, соответственно, это время увеличивается. Это может произойти из-за увеличения плотности пружины и ее длины. Ранее мы показали, что оба эти фактора приводят к увеличению времени распространения отраженных волн между концами пружины. Это означает, что интервал времени, в течение которого скорость остается постоянной, также увеличивается. Таким образом, можно сказать, что инерция в качестве свойства, присущего телу, связана со временем распространения волны между его краями. Такая же тенденция наблюдается, когда мы увеличиваем поперечное сечение тела, поскольку в этом случае скорость частиц становится меньше.

Рассмотрим еще раз переход от реальной к идеально жесткой пружине. С увеличением жесткости скорость распространения с увеличивается, поскольку

$$c = \sqrt{E^*/\rho}.$$

В то же время скорость частицы, связанная с волной, становится меньше. Действительно, из (3.42) имеем

$$v_0 = c(F_x/E^*) = F_x/\sqrt{\rho E^*}.$$

Таким образом, мы видим, что увеличение E^* ведет к уменьшению скорости v_0 , а также интервала времени $t = l/c$, в течение которого скорость $v_n(t)$ остается постоянной. В предельном случае идеально жесткой пружины

$$c \rightarrow \infty, v_0 \rightarrow 0$$

скорость $v_n(t)$ становится непрерывной функцией и описывает движение всех частиц пружины.

Данное рассуждение подтверждает также тот факт, что жесткость E' не влияет на инерцию. Согласно (3.86) и (3.87) имеем

$$t_n = \frac{l}{c} n = \frac{lv_n}{cv_0}, \quad \text{если } n \gg 1.$$

Здесь t_n – момент времени, в который скорость центра пружины равняется v_n . Из выражения (3.42) следует, что

$$cv_0 = F_x / \rho,$$

следовательно, произведение скорости волны и скорости частицы не зависит от E' . Поэтому

$$t_n = \frac{lv_n \rho}{F_x} = \frac{v_n}{F_x} m.$$

Последнее выражение ясно показывает, что только масса является мерой инерции.

Предположим, что на тело действует импульсная сила, которую можно рассматривать как сумму двух ступенчатых функций противоположного знака. Тогда легко получить суперпозицию отраженных волн, вызванных каждой из этих функций. Полагая, что ширина τ импульса достаточно велика, мы видим (рис. 3.9, δ), что тело начинает двигаться с постоянной скоростью (первый закон Ньютона).

ЗАКОН ГУКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

В главе 2 мы обсуждали закон Гука для пружин и уделили особое внимание его основному свойству, а именно тому, что смещение нижнего конца пружины, $s_x = \Delta l$ (рис. 3.10, a), прямо пропорционально ее первоначальной длине l :

$$\Delta l \sim l.$$

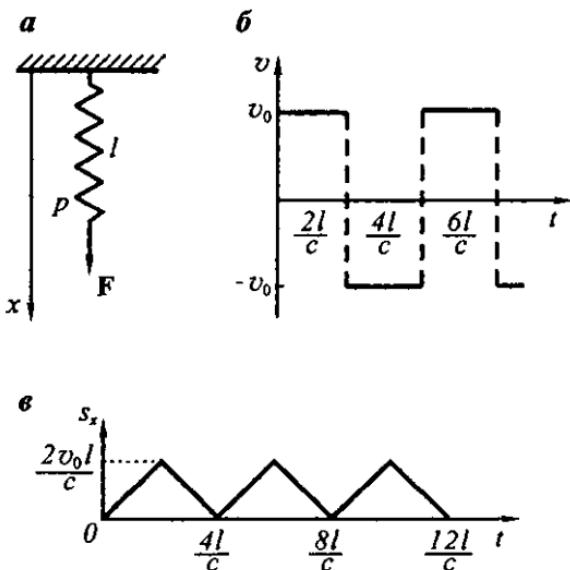
Такое поведение s_x заставило нас задаться следующим вопросом. Откуда нижний конец пружины (точка p на рис. 3.10, a) “знает”, где находится ее противоположный конец? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим движение нижнего конца пружины под действием постоянной силы F_x :

$$F_x = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_{0x}, & t \geq 0 \end{cases}$$

при условии, что верхний конец прикреплен к абсолютно жесткой среде (рис. 3.10, a).

Поскольку сила направлена вниз, в первый момент времени возникает волна растяжения, которая распространяется к верхнему концу. В то же время точка p движется с постоянной скоростью вдоль оси x . В результате отражения исходной волны в момент времени $t = l/c$ возникает волна растяже-

Рис. 3.10. Сила, приложенная к пружине (а); зависимость скорости нижнего конца пружины от времени (б); зависимость смещения нижнего конца пружины от времени (в)



ния, распространяющаяся вниз, хотя сами частицы при этом двигаются в противоположном направлении. Поэтому движение пружины позади волнового фронта прекращается. В момент времени $t = 2l/c$ указанная волна достигает нижнего конца, и вся пружина прекращает свое движение. Однако в этот момент возникает отраженная волна сжатия, которая распространяется вверх. В соответствии с этим изменяется и направление движения частиц. Таким образом, скорость нижнего конца пружины остается постоянной только на интервале времени

$$0 < t < 2l/c.$$

Как только волна сжатия достигает верхнего конца в момент времени $t = 3l/c$, появляется новая волна сжатия. Эта волна распространяется вниз, а скорость частиц направлена по направлению оси x . Соответственно, части пружины, находящиеся позади волнового фронта, не движутся. В частности, в момент времени $t = 4l/c$ все точки пружины находятся в состоянии покоя. Однако в этот момент снова появляется волна растяжения, которая распространяется вверх. Таким образом, мы начинаем наблюдать такое же поведение скорости. Очевиден периодический характер этого поведения во времени (рис. 3.10, б). Период

$$T = 4l/c, \quad (3.95)$$

а в пределах периода

$$v = \begin{cases} v_0, & -T/2 < t < 0, \\ -v_0, & 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (3.96)$$

Последнее выражение показывает, что в течение первого полупериода

смещение s_x нижнего конца пружины линейно растет со временем и достигает своего максимального значения

$$s_x = \frac{2l}{c} t \quad (3.97)$$

в момент времени $t = 2l/c$. Затем, во втором полупериоде, смещение линейно уменьшается, и нижний конец возвращается в свое исходное положение в момент времени $t = 4l/c$ (рис. 3.10, *в*).

Периодическую функцию s_x удобно представить в виде суперпозиции различных синусоидальных гармоник. Поскольку $s_x(t)$ является четной функцией, ее ряд Фурье имеет следующий вид (см. приложение 6):

$$s_x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2\pi n \frac{t}{T}, \quad (3.98)$$

где

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s_x(t) \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt. \quad (3.99)$$

В частности, коэффициент b_0 равняется

$$b_0 = \frac{c}{l} v_0 \int_0^{2lk} t dt = 2 \frac{v_0 l}{c}.$$

Отсюда

$$b_0/2 = v_0 l/c. \quad (3.100)$$

Таким образом, полное смещение нижнего конца пружины представляет собой сумму постоянного смещения Δl и набора гармоник с различными частотами.

Примечательно, что постоянная составляющая смещения

$$\Delta l = b_0/2 = v_0 l/c \quad (3.101)$$

прямо пропорциональна исходной длине пружины l . Другими словами, Δl пропорционально времени, в течение которого волна распространяется от нижнего к верхнему концу пружины.

Как следует из выражения (3.101),

$$\Delta l/l = v_0/c. \quad (3.102)$$

Этот результат не удивителен, поскольку правая и левая части этого равенства характеризуют деформацию.

Согласно (3.42),

$$v_0/c = F_{0x}/E^*,$$

и, соответственно, (3.102) переписывается в виде

$$\Delta l/l = F_{0x}/E^*$$

или

$$F_{0x} = k \Delta l, \quad (3.103)$$

где

$$\Delta l = v_0 l / c \quad \text{и} \quad k = E^* / l.$$

Конечно, соотношение (3.103) описывает закон Гука при условии, что Δl равняется половине максимального смещения нижнего конца пружины.

В связи с этим следует заметить следующее. Закон Гука основывается на экспериментальных данных. Он означает, что смещение конца пружины под действием постоянной силы достигает некоторого значения и далее остается постоянным. Такое поведение противоречит функции $s_x(t)$, показанной на рис. 3.10, в. Это несоответствие можно объяснить, если учесть влияние затухания. В реальной ситуации колебания, описываемые гармониками ряда Фурье при $n \geq 1$, затухают со временем относительно быстро, поскольку период T обычно мал. Наблюдения, выполненные за период времени, существенно превосходящий T , позволяют нам определить Δl .

3.3. ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУНЕ

До сих пор мы изучали распространение продольных волн в пружине, когда скорости частин и волны имели либо совпадающие, либо противоположные направления. Теперь мы рассмотрим поведение поперечных (сдвиговых) волн, распространяющихся вдоль струны.

РАСТЯЖЕНИЕ И СМЕЩЕНИЕ СТРУНЫ

Предположим, что в начальный момент времени прямая струна подвергается некоторому растяжению (рис. 3.11, а). Из-за деформаций возникают внутренние силы растяжения, приложенные к каждому элементу струны (рис. 3.11, б).

Согласно закону Гука имеем

$$T_0 = k \Delta l^*, \quad (3.104)$$

где T_0 обозначает величину внутренней силы, k – жесткость струны, а Δl^* – удлинение элемента Δl ($\Delta l^* \ll \Delta l$).

Поскольку струна однородная, растяжение T_0 – постоянно:

$$T_0 = \text{const.} \quad (3.105)$$

Пусть в некоторый момент времени t происходит небольшое смещение элемента струны в вертикальном направлении. Благодаря действующим внутренним силам, в струне возникнет движение, и наша задача состоит в том, чтобы изучить это явление.

В дальнейшем мы будем предполагать, что наклон каждого элемента от-

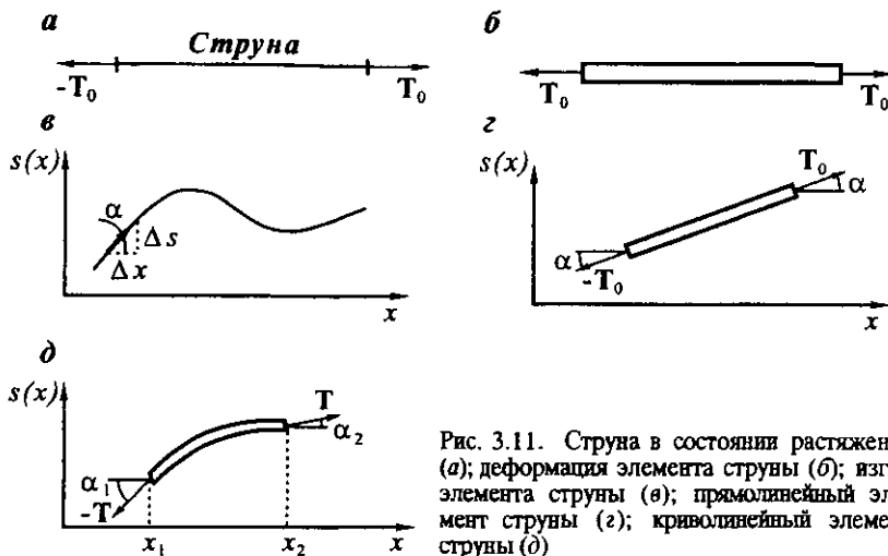


Рис. 3.11. Струна в состоянии растяжения (a); деформация элемента струны (b); изгиб элемента струны (c); прямолинейный элемент струны (d)

носительно его первоначального положения очень мал. Из рис. 3.11, в видно, что наклон элемента струны равняется

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} = s'_x(x, t). \quad (3.106)$$

Здесь $s(x, t)$ – вертикальное смещение струны в каждый момент времени, α – угол между элементом dl и осью x . По определению, производная $s'(x, t)$ смещения по координате x определяет наклон в каждой точке струны и, в общем случае, зависит от времени.

Предположение о том, что наклоны в струне очень малы, означает, что производная $s'(x, t)$ много меньше единицы и, соответственно, мы можем пренебречь квадратом этой величины, т.е.

$$[s'_x(x, t)]^2 = 0. \quad (3.107)$$

Данное условие значительно упрощает анализ движения.

Рассмотрим сначала бесконечно малый элемент dl , который можно трактовать как прямолинейный отрезок (рис. 3.11, б). Его длина dl определяется как

$$dl = \sqrt{dx^2 + ds^2}$$

или

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx} \right)^2} dx = \sqrt{1 + (s'_x(x, t))^2} dx.$$

С учетом (3.107) получим

$dl = dx.$

(3.108)

Это очень важный результат, поскольку он показывает, что в нашем приближении малые смещения струны не приводят к изменению длины ее элементов. Как следует из закона Гука, величина растяжения остается такой же, как и в состоянии равновесия, т.е.

$T = T_0.$

(3.109)

Иными словами, в каждый момент времени величина растяжения равняется T_0 , независимо от формы струны. Поэтому величину T_0 можно рассматривать в качестве параметра струны, который определяется ее растяжением в начальном положении, когда $(x, t) = 0$. Соответственно, мы будем характеризовать струну двумя параметрами, а именно линейной плотностью ρ и величиной растяжения T_0 .

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим силы, действующие на оба конца элемента dl . Мы предполагаем, что струна является идеально гибкой и, следовательно, сила T_0 направлена по касательной в каждой точке струны. Предположим сначала, что элемент dl прямолинеен и, следовательно, силы T_0 и $-T_0$ направлены вдоль одной прямой (рис. 3.11, 2).

Поскольку силы, приложенные к концам элемента, имеют одинаковую величину и противоположные направления, результирующая сила равняется нулю:

$$F = T_0 - T_0 = 0,$$

и элемент находится в состоянии равновесия. Это означает, что он либо наклоняется, либо движется с некоторой постоянной скоростью. Такой же результат следует из рассмотрения компонент силы. Действительно,

$$F_x(x_2, t) = T_0 \cos \alpha, \quad F_x(x_1, t) = -T_0 \cos \alpha,$$

$$F_s(x_2, t) = T_0 \sin \alpha, \quad F_s(x_1, t) = -T_0 \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$F_x = F_x(x_2, t) + F_x(x_1, t) = 0$$

и

$$F_s = F_s(x_2, t) + F_s(x_1, t) = 0.$$

Предположим далее, что малый элемент dl слегка изогнут, но его длина по-прежнему равняется dx (рис. 3.11, 3). В этом случае наклон растягивающей силы на разных концах элемента не одинаков, и

$$F_x(x_1, t) = -T_0 \cos \alpha_1, \quad F_x(x_2, t) = T_0 \cos \alpha_2, \quad (3.110)$$
$$F_s(x_1, t) = -T_0 \sin \alpha_1, \quad F_s(x_2, t) = T_0 \sin \alpha_2.$$

Для того чтобы вывести уравнение движения элемента dl , необходимо выразить тригонометрические функции через производные смещения $s(x, t)$. Как видно из рис. 3.11, α ,

$$\sin \alpha = \frac{ds}{dl} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2 + ds^2}} = \frac{ds}{dx \sqrt{1 + (s'_x)^2}}$$

или

$$\sin \alpha = \frac{s'_x}{\sqrt{1 + (s'_x)^2}} \quad (3.111)$$

и

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dl} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + ds^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (s'_x)^2}}. \quad (3.112)$$

Пренебрегая членом $(s'_x)^2$, получим

$$\sin \alpha = \frac{ds_x}{dx} = s'_x(x, t) \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 1. \quad (3.113)$$

Принимая во внимание первую пару соотношений (3.110), получим, что результирующая компонента силы, приложенной к элементу dl , направленная вдоль оси x , равняется нулю:

$$F_x(x_1, t) = F_x(x_2, t) - F_x(x_1, t) = 0. \quad (3.114)$$

Поскольку в начальном положении струна находилась в состоянии покоя, выражение (3.114) показывает, что движение элемента в горизонтальном направлении отсутствует. В то же время результирующая компонента силы вдоль оси s равняется

$$F_s(x_1, t) = T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1$$

или

$$F_s(x_1, t) = T_0 [s'_x(x_2, t) - s'_x(x_1, t)]. \quad (3.115)$$

Хотя элемент dl искривлен, он по-прежнему настолько мал, что наклон $s'_x(x, t)$ меняется линейно между его границами. Поэтому выражение (3.115) можно переписать как

$$F_s(x, t) = T_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx, \quad (3.116)$$

поскольку $dl = dx$ (формула 3.108) и

$$s'_x(x_2, t) - s'_x(x_1, t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx.$$

Второе уравнение, связывающее смещение струны и результирующую силу F_s , является вторым законом Ньютона:

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_s, \quad \text{или} \quad \rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_s(x, t).$$

Подстановка (3.116) в (3.117) дает

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (3.118)$$

где

$$c_s = \sqrt{T_0 / \rho}.$$

Таким образом, как и в случае продольных волн, мы пришли к волновому уравнению, которое описывает распространение волн вдоль струны. Однако в данном случае частицы движутся в направлении, перпендикулярном направлению распространения. Обозначая скорость элемента v , а скорость волны c , получим

$$v \cdot c_s = 0. \quad (3.120)$$

В дальнейшем мы будем обсуждать поведение сдвиговых волн в упругой среде. Простейшим примером таких волн являются поперечные волны в струне.

Интересно заметить, что скорости продольных и поперечных волн в пружине и струне

$$c_t = \sqrt{E^* / \rho} \quad \text{и} \quad c_s = \sqrt{T_0 / \rho} \quad (3.121)$$

одинаково зависят от плотности ρ , а растяжение T_0 играет ту же роль, что и упругий параметр пружины E^* . В частности, когда растяжение струны становится более сильным, скорость поперечных волн увеличивается.

В предыдущем разделе мы показали, что решение волнового уравнения имеет вид

$$s(x, t) = Af \left[a \left(t - \frac{x}{c_s} \right) \right] + Bg \left[b \left(t + \frac{x}{c_s} \right) \right]$$

и описывает волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Как уже отмечалось ранее, механизм генерации волн очень прост. Если некоторый элемент струны движется вверх или вниз вдоль оси s , в двух прилегающих элементах возникает результирующая сила F_s . В силу инерции эти элементы начинают двигаться с некоторой задержкой по времени. Их движение вызывает, в свою очередь, смещение более далеких элементов. Соответственно, мы наблюдаем распространение волн от первоначального элемента в противоположных направлениях.

Здесь следует сделать одно замечание. Как и в случае продольных волн, мы рассматривали два малых элемента струны с различными длинами. Из-

гнущий элемент имел большую длину, и мы использовали его для вывода волнового уравнения. В то же время более короткий элемент является прямым, и в его пределах скалярная компонента силы F_s и его наклон связаны как

$$F_s = T_0 \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}. \quad (3.122)$$

Это соотношение можно трактовать как простейшую форму закона Гука для сдвиговых волн.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Среди решений волнового уравнения имеется одна группа функций, которая играет очень важную роль. Речь идет о функциях, синусоидальных по времени и расстоянию. Опишем кратко их основные свойства.

Очевидно, что функция

$$s(x, t) = A \sin \omega(t - x/c_s) \quad (3.123)$$

удовлетворяет волновому уравнению и описывает синусоидальную волну.

Здесь

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (3.124)$$

является круговой частотой, а T – периодом колебаний. Каждый из этих параметров характеризует в произвольной точке поведение волны как функции времени. Коэффициент A обозначает амплитуду, а c_s – скорость волны.

По определению, фаза волны задается как

$$\phi = \omega t - \frac{\omega}{c_s} x, \quad (3.125)$$

и ее можно переписать в виде

$$\phi = \omega t - kx, \quad (3.126)$$

где

$$k = \omega/c_s, \quad (3.127)$$

является волновым числом. Волновое число пропорционально частоте и уменьшается при увеличении скорости c_s . В частности, когда скорость волны стремится к бесконечности, параметр k стремится к нулю, и вместо волнового поведения наблюдаются вибрации. Действительно, в этом случае выражение (3.123) переходит в

$$s(x, t) = A \sin \omega t \quad (3.128)$$

и в любой момент времени t одно и то же смещение наблюдается одновременно во всех точках струны.

Как следует из выражения (3.126), волновое число k описывает скорость изменения фазы и, следовательно, формы волны с расстоянием x .

Как мы знаем, период T – это интервал времени

$$T = t_2 - t_1,$$

в течение которого фаза изменяется на 2π , а волновое поле $s(x, t)$ остается прежним, т.е.

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t_1 - kx) &= A \sin(\omega t_2 - kx) = \\ &= A \sin(\omega t_1 + \omega T - kx) = A \sin(\omega t_1 - kx), \end{aligned}$$

так как

$$\omega T = 2\pi.$$

Таким же образом длина волны λ вводится как интервал Δx :

$$\lambda = \Delta x = x_2 - x_1,$$

на котором фаза также изменяется на 2π , а смещения в точках x_1 и x_2 равны друг другу:

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t - kx_1) &= A \sin(\omega t - kx_2) = \\ &= A \sin(\omega t - kx_1 - k\lambda), \end{aligned}$$

поскольку

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{или} \quad \lambda = 2\pi/k. \quad (3.129)$$

Сравнение выражений (3.124) и (3.129) показывает, что длина волны λ и волновое число k играют роль, соответственно, пространственного периода и пространственной частоты.

Очевидно, что две пары параметров ω, T и λ, k связаны между собой. Так, например,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c,$$

или

$$\lambda = c, T, \quad (3.130)$$

т.е. длина волны – это расстояние, которое проходит данная фаза за интервал времени, равный периоду.

Поведение синусоидальной волны как функции времени и расстояния показано на рис. 3.12, а, б.

НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ

До сих пор мы предполагали, что волна распространяется вдоль бесконечной струны. Предположим теперь, что струна не бесконечна и ее правый конец жестко закреплен в точке $x = l$ (рис. 3.12, в):

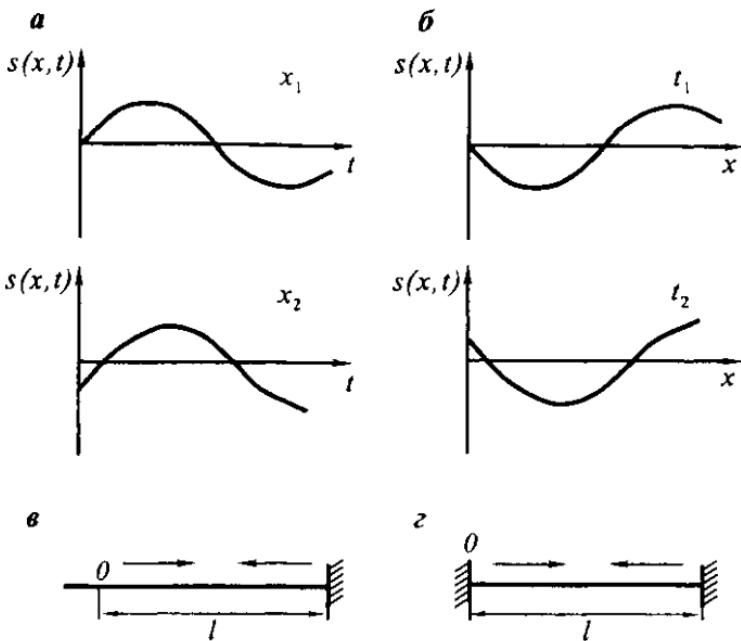


Рис. 3.12. Синусоидальные волны как функции времени (a) и расстояния (b); полубесконечная струна с закрепленным концом (c); струна конечной длины с закрепленными концами (d)

$$s(l, t) = 0. \quad (3.131)$$

Последнее соотношение является граничным условием.

По аналогии со случаем продольных волн, распространяющихся вдоль пружины, мы можем ожидать, что в точке $x = l$ падающая волна приводит к появлению отраженной волны, которая также является синусоидальной и имеет ту же частоту:

$$s(x, t) = B \sin(\omega t + kx + \phi_0), \quad (3.132)$$

где ϕ_0 – некоторая постоянная величина, называемая обычно начальной фазой, и коэффициент B также является неизвестным.

Знак плюс перед kx указывает на то, что отраженная волна движется в сторону начала координат $x = 0$. Таким образом, полностью волну можно представить как

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + B \sin(\omega t + kx + \phi_0). \quad (3.133)$$

На правом конце, $x = l$, мы должны иметь

$$A \sin(\omega t - kl) + B \sin(\omega t + kl + \phi_0). \quad (3.134)$$

Поскольку данное равенство выполняется независимо от момента времени, мы должны заключить, что фазы обеих волн в этой точке равны друг другу:

$$\omega t - kl = \omega t + kl + \Phi_0$$

или

$$\Phi_0 = -2kl. \quad (3.135)$$

Соответственно, из (3.134) получим

$$B = -A. \quad (3.136)$$

Таким образом, мы нашли такие значения начальной фазы и амплитуды отраженной волны, которые удовлетворяют начальным условиям (3.131) и волновому уравнению.

Здесь следует сделать два замечания:

а) определение неизвестных величин Φ_0 и B основывалось на том обстоятельстве, что фазы падающей и отраженной волн должны быть равны на границе $x = l$. Как было показано ранее, это замечательное свойство фазы наблюдается также в гораздо более сложных случаях;

б) отраженная волна существует на всех частотах, причем существуют одновременно две синусоидальные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях:

$$s(x, t) = A [\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx - 2kl)]. \quad (3.137)$$

Эти волны имеют одну и ту же частоту и амплитуду, но разные фазы.

Используя известное тригонометрическое равенство, получим

$$s(x, t) = 2A \sin k(l - x) \cos(\omega t - kl), \quad (3.138)$$

т.е. функцию, которая отличается от синусоидальной.

Это первый пример суперпозиции синусоидальных волн, и, как видно из выражения (3.138), функция $s(x, t)$ не описывает волну, распространяющуюся вдоль струны.

Рассмотрим теперь струну конечной длины l и предположим, что оба её конца неподвижны (рис. 3.12, г). В этом случае граничные условия записываются как

$$s(0, t) = 0 \text{ и } s(l, t) = 0. \quad (3.139)$$

Волновую картину можно описать следующим образом. Предположим, что волна произвольной формы достигла правого конца струны. Это приводит к появлению отраженной волны, распространяющейся к левому краю струны. В этой точке возникает новая отраженная волна, которая распространяется в направлении оси x . Когда она достигает правого края, снова наблюдается отражение.

Таким образом, существует две группы волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Представим теперь, что каждая из этих групп состоит из бесконечного числа синусоидальных волн с различными частотами. Тогда смещение в волне имеет вид

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, t)$$

или

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t - k_n x - \varphi_{1n}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t + k_n x + \varphi_{2n}). \quad (3.140)$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию на левом конце струны ($x = 0$), потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$A_n \sin(\omega_n t - \varphi_{1n}) + B_n \sin(\omega_n t + \varphi_{2n}) = 0.$$

Отсюда

$$B_n \cos \varphi_{2n} + A_n \cos \varphi_{1n} = 0$$

и

$$B_n \sin \varphi_{2n} - A_n \sin \varphi_{1n} = 0.$$

Последние равенства дают

$$\varphi_{1n} + \varphi_{2n} = \pi m$$

и

$$B_n = (-1)^{m+1} A_n, \quad (3.141)$$

где m – произвольное целое число.

Таким образом, каждый из членов (3.140) можно представить как

$$s_n(x, t) = A_n [\sin(\omega_n t - k_n x - \varphi_{1n}) - \sin(\omega_n t + k_n x - \varphi_{1n})]$$

или

$$s_n(x, t) = -2A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}).$$

Необходимо еще удовлетворить условию на правом конце струны. В соответствии с (3.142) это приводит к следующему равенству:

$$-2A_n \sin k_n l \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}) = 0$$

или

$$\sin k_n l = 0. \quad (3.143)$$

Последнее условие эквивалентно следующему:

$$k_n l = \pi n, \quad (3.144)$$

где n – целое число, $n = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, выражение для любого s_n переходит в

$$s_n(x, t) = -2A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos(\omega_n t - \varphi_{1n}) \quad (3.145)$$

и описывает стоячую волну. Здесь

$$\omega_n = k_n c_s = \frac{\pi n}{l} c_s. \quad (3.146)$$

Самая низкая частота называется обычно фундаментальной и равняется

$$\omega_1 = \pi c_s / l.$$

Принимая во внимание (3.130), последнее равенство можно записать в виде

$$\lambda_1 = 2l,$$

т.е. максимальная длина волны равняется удвоенной длине струны.

Соответственно, для произвольного n

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{и} \quad \lambda_n = \lambda_1 / n.$$

Как следует из (3.145), множитель $2A_n \sin \frac{\pi n}{l}$ в любой момент времени имеет одну и ту же форму.

В частности, в точках, называемых узлами, смещение отсутствует, а положение этих точек определяется из условия

$$\frac{\pi n}{l} x = m\pi.$$

Здесь m – также целое число:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

В то же время существуют точки (пучности), в которых смещение имеет максимальную амплитуду. Они определяются соотношением

$$\frac{\pi n}{l} x = \frac{\pi}{2} (2m - 1).$$

Заметим, что суперпозиция волн в полубесконечной струне также приводит к появлению стоячей волны (3.138).

В соответствии с (3.142), каждая стоячая волна является суперпозицией двух синусоидальных функций. Эти волны по-разному называются в литературе: гармоники, нормальные моды, свободные колебания, собственные функции струны. Частоты стоячих волн называются собственными частотами струны. Волна с наименее низкой частотой часто называется фундаментальной модой, а остальные волны – обертонами.

Таким образом, мы показали, что волну, распространяющуюся вдоль струны конечной длины l , можно представить в виде бесконечной суммы стоячих волн, частоты которых подчиняются равенству (3.14, б).

В заключение следует заметить следующее:

а) синусоидальная волна, вызванная гармонической силой, частота которой совпадает с частотой одной из нормальных мод, не может существовать в струне конечной длины. В противном случае, из-за резонанса и отсутствия затухания, амплитуда смещения была бы бесконечной;

б) тот факт, что поведение волны описывается нормальными модами с определенным набором частот можно объяснить, используя понятия конструктивной и деструктивной интерференции.

Глава 4. ОСНОВНЫЕ УПРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДИЛАТАЦИИ

В предыдущих главах мы рассмотрели распространение волн в пружинах и струнах. Этот подход позволил нам дать простое описание волнового процесса и таких важных явлений, как прохождение и отражение волн, а также формирование собственных колебаний.

Конечно, нашей основной целью является изучение волновых процессов в упругих средах, где, в общем случае, существует три типа волн. Первый тип – это волны дилатации, распространение которых связано с изменениями объема среды, при этом его форма может изменяться только определенным образом. Второй тип волн (волны сдвига) сопровождается поворотом произвольного объема среды и изменением его формы. Наконец, третий тип волн характеризуется всеми тремя эффектами сразу. Классическим примером последнего служат поверхностные волны, например волны Рэлея и волны Стона. Все три типа волн играют важную роль в прикладной и глобальной сейсмологии. Важно также заметить, что в неоднородной среде волны различных типов взаимосвязаны. Так, в результате отражения волны дилатации могут образоваться волны дилатации и сдвига.

Подобное взаимодействие определенным образом затрудняет изучение полного волнового поля. Поэтому естественно вначале рассмотреть различные типы волн отдельно друг от друга. Мы начнем с изучения волн дилатации, которые называются также продольными волнами или Р-волнами.

В этой и последующих главах вместо упругой среды мы будем рассматривать газ или жидкость. В этом случае нет никаких других волн, кроме волн дилатации, и анализ волнового поля сильно упрощается. Это дает нам возможность рассмотреть основные характеристики этих волн, проявляющиеся также и в упругих средах. Обычно, волны в газах и жидкостях называются звуковыми или акустическими волнами. Они мало чем отличаются от волн дилатации в упругих средах.

В этой главе мы опишем физические законы, которые управляют поведением волн дилатации. В отличие от колебаний пружины, мы будем рассматривать здесь трехмерную среду. Основываясь на этих законах, мы получим систему уравнений, описывающую смещения и скорости частиц, а также давление в среде. Мы сформулируем также задачу с граничными и начальными условиями и, кроме того, обсудим такие вопросы, как плотность и поток энергии, вектор Пойнтинга, и дадим объяснение теореме единственности.

4.1. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГАЗЕ И ЖИДКОСТИ

Как известно, взаимодействие между атомами в жидкостях и, особенно, в газах чрезвычайно слабое. В состоянии равновесия атомы можно рассматривать как отдельные частицы, движущиеся независимо друг от друга. Распределение атомов характеризуется плотностью ρ , которая определяется как количество жидкости или газа в единице объема:

$$\rho = \Delta m / \Delta V, \text{ если } \Delta V \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

где Δm – масса вещества, заключенного в объеме ΔV .

При таком подходе подразумевается, что размеры объема ΔV значительно превосходят среднюю длину пробега атомов, которая, например, для газов составляет около 10^{-7} м при атмосферном давлении. Другими словами, объем ΔV содержит очень большое число атомов. В соответствии с этим приближением газы и жидкости рассматриваются как непрерывные среды с плотностью ρ . В то же время элементарный объем ΔV , который мы будем иногда называть элементом или частицей, должен быть значительно меньше таких характеристических расстояний, как длина волны или расстояние между источником и точкой наблюдения.

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И ДАВЛЕНИЕ

Теперь представим себе элементарную площадку внутри, например, газа (рис. 4.1, a). Очевидно, что, когда газ или жидкость находится в состоянии равновесия, атомы двигаются случайным образом одинаково во всех направлениях. Соответственно количество атомов, сталкивающихся с элементарной площадкой, не зависит от направления и прямо пропорционально плотности газа ρ .

Переходя к непрерывному представлению, можно сказать, что действие этих частиц приводит к появлению силы $\mathbf{F}(p)$, приложенной к элементарной площадке dS . Поскольку площадь элемента dS мала, можно предположить, что распределение атомов по поверхности равномерное, и, следовательно, силу $\mathbf{F}(p)$ можно представить как

$$\mathbf{F}(p) = P(p)dS. \quad (4.2)$$

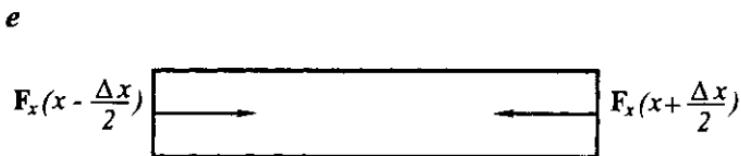
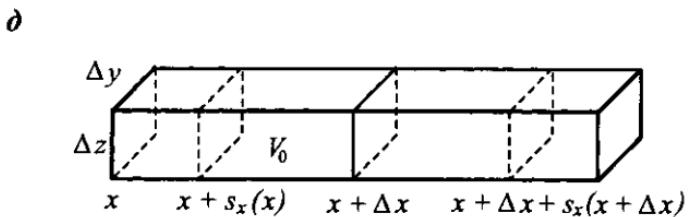
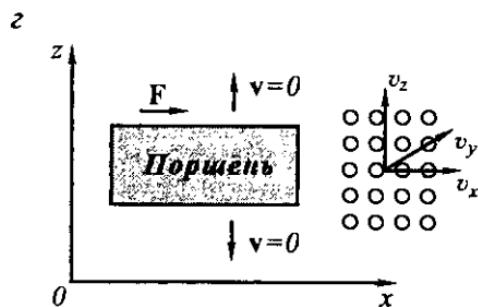
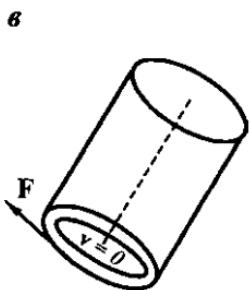
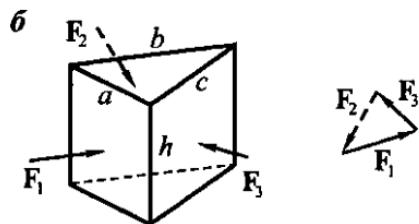
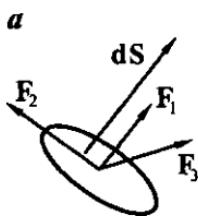
Скалярная функция $P(p)$, характеризующая эту силу, называется давлением. В системе СИ давление измеряется в ньютонах, деленных на квадратный метр:

$$[P] = \text{Н/м}^2.$$

Единица измерения давления, равная 1 Н/м^2 , называется паскалем (Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$$

или



ж

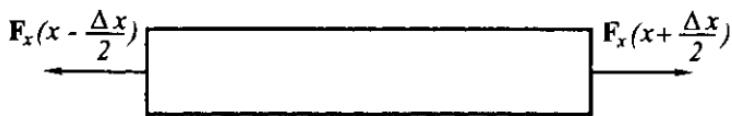


Рис. 4.1. Иллюстрация поведения давления. Распределение сил

$$1 \frac{H}{m^2} = 1 \frac{kg \cdot m}{c^2 \cdot m^2} = 1 \frac{kg}{m \cdot c^2} = 10 \frac{g}{cm \cdot c^2} = 10 \frac{dym}{cm^2}.$$

Часто используется также другая единица измерения, которая называется **бар**:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \frac{H}{m^2} = 10^5 \text{ Па.}$$

Так, например, атмосферное давление на уровне моря приблизительно равно **1 бару**:

$$1 \text{ атм} \approx 1,013 \text{ бар} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

В то же время плотность воздуха при таком давлении равняется

$$\rho = 1,22 \frac{kg}{m^3} = 1,22 \cdot 10^{-3} \frac{g}{cm^3}.$$

Чтобы проиллюстрировать давление, равное **1 атмосфере** (атм.), представим себе вертикальный столб воздуха с площадью сечения S , равной 1 м^2 , и высотой $h = 0,8 \cdot 10^4 \text{ м}$.

Вес W этого воздушного столба равняется

$$W = mg = \rho h S g,$$

где g – это вертикальная компонента гравитационного поля:

$$g \approx 9,8 \frac{m}{s^2}.$$

Таким образом, предполагая для простоты, что плотность воздуха остается постоянной, получим

$$W = 9,8 \frac{m}{s^2} 1,22 \frac{kg}{m^3} 0,8 \cdot 10^4 \text{ м}^3 \approx 10^5 \text{ H} = 1 \text{ бар} \cdot \text{м}^2.$$

Соответственно, давление

$$P \approx 10^5 \text{ Па} \approx 1,0 \text{ атм.}$$

Несмотря на “прозрачность” воздуха, на нас действует очень большой вес.

Рассмотрим теперь силы, ориентированные различным образом по отношению к площадке dS (см. рис. 4.1, а). Прежде всего, рассмотрим силу F_1 , направленную параллельно dS . Здесь $dS = dS \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к площадке. Под действием силы F_1 , атомы движутся, сталкиваются с элементарной площадкой dS и оказываются на ее противоположной стороне. Другими словами, действие силы F_1 передается через элементарную площадку. Если теперь приложить силу F_2 , ортогональную вектору dS , то атомы будут двигаться в направлении силы F_2 , и число частиц, пересекающих поверхность dS , останется прежним. Это означает, что сила F_2 не оказывает никакого влияния на движение молекул, расположенных по другую сторону от площадки.

Поэтому в общем случае, когда сила F_3 направлена произвольным образом, необходимо учитывать только ее нормальную компоненту. Это позволяет переписать равенство (4.2) как

$$F(p) = P(p)dS. \quad (4.3)$$

Из выражения (4.3) видно, что, если сила F ортогональна вектору dS , то она не оказывает никакого действия на элементарную площадку. Это объясняет тот факт, что в газах и жидкостях существуют только волны дилатации.

Перед тем, как приступить к выводу основных уравнений движения, рассмотрим распределение внутренних сил жидкости для случая, когда жидкость находится в состоянии равновесия, а влияние вязкости пренебрежимо мало. Как известно, расстояние между атомами в газе значительно превышает радиус действия сил, вызванных каждым отдельным атомом. В соответствии с этим, взаимодействие атомов с хорошей точностью можно описать как столкновение частиц. В отличие от газов, атомы в жидкости располагаются гораздо ближе друг к другу. Так, например, плотность жидкости на три порядка больше плотности газа. Поэтому расстояния между атомами в жидкости таковы, что атомы взаимодействуют друг с другом и силы межатомного взаимодействия играют фундаментальную роль в распространении волн. Тем не менее, по сравнению с твердыми телами, межатомные расстояния в жидкостях по-прежнему относительно велики, и при изучении распространения волн жидкости можно рассматривать как газы, обладающие большой плотностью.

Предположим, что в некоторой точке происходит увеличение плотности. Давление в этой точке также увеличится. Поскольку давление будет постепенно уменьшаться с расстоянием от этой точки, атомы начнут двигаться в сторону областей с меньшим давлением. Появление в этих областях новых частиц приводит к увеличению плотности, и это снова приводит к выталкиванию частиц. Очевидно, что по прошествии некоторого времени этот волновой процесс проявится и на еще большем расстоянии от того места, где он был возбужден.

Как было упомянуто ранее, молекулярные силы переносят энергию волн в направлении приложенной силы. Аналогия с системой пружин и грузов состоит в том, что груз играет роль атома, а пружина представляет силу взаимодействия между атомами. Таким образом, с увеличением массы атома скорость распространения волны становится меньше. Такая же тенденция наблюдается при уменьшении межатомного взаимодействия.

Ранее, основываясь на физических соображениях, мы пришли к выводу о том, что давление жидкости, находящейся в равновесии, не зависит от ориентации элементарной площадки, т. е. давление является скалярной функцией от координат точки наблюдения и плотности:

$$P = P(p, \rho).$$

Теперь, принимая во внимание тот факт, что сила направлена перпендикулярно площадке dS , мы докажем это замечательное свойство давления.

Рассмотрим очень маленькую треугольную призму с центром в некоторой точке p (рис. 4.1, б). Поскольку призма находится в равновесии, силы, действующие на ее верхнее и нижнее основания, равны по величине и противоположны по направлению. Силы F_1 , F_2 и F_3 , приложенные к боковым граням призмы, перпендикулярны этим граням и лежат в плоскости, параллельной основаниям призмы. Поскольку призма находится в равновесии, сумма этих сил равняется нулю, т.е. эти силы образуют треугольник в горизонтальной плоскости. Учитывая, что стороны этого треугольника перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника, лежащего в основании призмы, можно заключить, что эти треугольники подобны. Следовательно, силы F_1 , F_2 и F_3 пропорциональны длинам соответствующих сторон призмы:

$$F_1/a = F_2/b = F_3/c$$

или

$$F_1/ah = F_2/bh = F_3/ch = P,$$

где h – это высота призмы; ah , bh и ch – площади боковых граней.

Таким образом, если жидкость находится в состоянии равновесия, давление в произвольной точке жидкости одинаково во всех направлениях и не зависит от ориентации элементарной площадки.

Поскольку силы межатомного взаимодействия очень слабы, а расстояния между атомами относительно велики даже в жидкостях, упорядоченное движение атомов не оказывает заметного влияния в направлении, перпендикулярном направлению приложенной силы. Это фундаментальное свойство идеальной жидкости можно сформулировать следующим образом: жидкость не может поддерживать тангенциальные силы, независимо от того, как долго эти силы действуют. Проиллюстрируем это на двух примерах. В первом примере (рис. 4.1, в) цилиндрическая емкость, заполненная идеальной жидкостью, вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью v . В этом случае на все точки цилиндра действует тангенциальная сила, направленная по касательной к поверхности жидкости. Эта поверхность, тем не менее, остается в состоянии покоя, поскольку расстояния между молекулами в радиальном направлении достаточно велики.

Второй пример иллюстрирует действие поршня (рис. 4.1, г), движущегося со скоростью v , например, вдоль оси x . Как и в предыдущем примере, силы, приложенные к боковым поверхностям поршня, не оказывают никакого действия в направлении, перпендикулярном движению. В то же время плотность жидкости перед поршнем изменяется. Соответственно и давление перед поршнем начинает отличаться от того, которое наблюдается в соседних областях. По этой причине можно ожидать появления волн, распространяющихся во всех направлениях.

Теперь мы можем приступить к описанию распространения волн. Это явление сопровождается следующими тремя эффектами:

- 1) упорядоченным движением молекул;
- 2) изменением плотности;
- 3) изменением давления.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ДВИЖЕНИЕМ ЧАСТИЦ И ПЛОТНОСТЬЮ

Чтобы описать распространение воли, необходимо, прежде всего, установить связь между изменениями плотности и смещением частиц. Для этого рассмотрим элементарный объем V_0 с плотностью ρ_0 , имеющий форму параллелепипеда (рис. 4.1, δ):

$$V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Предположим также, что смещения частиц внутри и вне объема имеют только компоненту x :

$$s = s_x(x, y, z, t) \mathbf{i},$$

и что смещение каждой частицы изменяется линейно от задней к передней стороне элементарного объема.

В результате такого движения задняя сторона объема переместится в новое положение с координатами

$$x + s_x, y, z,$$

где $s_x(x, y, z, t)$ – обозначает смещение этой стороны. В то же время передняя сторона переместится на расстояние

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t)$$

и займет положение с координатами

$$x + \Delta x + s_x(x + \Delta x, y, z, t).$$

Таким образом, то же самое количество газа (жидкости) будет теперь занимать новый объем, равный

$$V = \Delta y \Delta z [x + \Delta x + s_x(x + \Delta x, y, z, t) - x - s_x(x, y, z, t)]. \quad (4.4)$$

Мы предположили, что объем настолько мал, что функция s_x изменяется линейно между сторонами элементарного объема. Это позволяет переписать разность, стоящую в правой части уравнения (4.4), в виде

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) - s_x(x, y, z, t) = \frac{\partial s_x}{\partial x} \Delta x, \quad (4.5)$$

где $\partial s_x / \partial x$ характеризует относительное изменение смещения частицы внутри объема.

Таким образом, вместо уравнения (4.4) можно записать

$$V = \Delta y \Delta z (\Delta x + s'_x \Delta x) = V_0 [1 + s'_x(p, t)]. \quad (4.6)$$

Здесь p – произвольная точка внутри элементарного объема.

Последнее уравнение дает

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\partial s_x(p, t)}{\partial x} = s'_x, \quad (4.7)$$

т.е. производная смещения по x характеризует относительное изменение объема V_0 .

Очевидно, что если

$$\partial s_x / \partial x = 0,$$

то задняя и передняя стенки объема смещаются одинаково, и объем не меняется.

Предположим, что

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) > s_x(x, y, z, t).$$

Это означает, что объем увеличивается, и, по определению,

$$\partial s_x / \partial x > 0.$$

Наоборот, если

$$s_x(x + \Delta x, y, z, t) < s_x(x, y, z, t),$$

то элементарный объем уменьшается и

$$\partial s_x / \partial x < 0.$$

Стоит заметить, что уравнение (4.6) остается справедливым только при малых изменениях объема V_0 .

Теперь мы готовы к тому, чтобы установить соотношение между изменениями объема и плотностью. Поскольку в объемах V_0 и ΔV заключена одна и та же масса вещества, имеем

$$\rho_0 V_0 = (\rho_0 + \rho_a)(V_0 + \Delta V)$$

или

$$0 = \rho_0 \Delta V + \rho_a V_0 + \rho_a \Delta V, \quad (4.8)$$

где ρ_a – приращение плотности, появляющееся из-за движения частиц. Она зависит от точки пространства и от времени.

Полная плотность равняется

$$\rho(p, t) = \rho_0(p, t) + \rho_a(p, t). \quad (4.9)$$

Учитывая, что при распространении звука объем и плотность меняются очень мало, т.е.

$$\rho_a \ll \rho_0 \text{ и } \Delta V \ll V_0, \quad (4.10)$$

слагаемым $\rho_a \Delta V$ в уравнении (4.8) можно пренебречь. Уравнение (4.8) в этом приближении дает

$$\Delta V / V_0 = - \rho_a / \rho_0.$$

Отсюда, используя выражение (4.7), получим

$$\rho_a / \rho_0 = - \partial s_x / \partial x. \quad (4.11)$$

Наша первая задача, таким образом, выполнена, поскольку мы установи-

ли соотношение между приращением плотности и смещением частиц. Наличие знака минус в правой части равенства (4.11) можно легко объяснить. Действительно, если происходит сжатие объема, то $\partial s_x / \partial x < 0$, но объемная плотность увеличивается, и, следовательно, $\rho_a > 0$. И наоборот, если происходит расширение объема, то производная $\partial s_x / \partial x$ является положительной, но плотность уменьшается, и $\rho_a < 0$.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ДАВЛЕНИЕМ И ПЛОТНОСТЬЮ

Как уже отмечалось, изменение плотности должно приводить также к изменению давления. Представим функцию давления $P(\rho)$ следующим образом:

$$P(\rho) = P(\rho_0 + \rho_a) = P(\rho_0) + P_a. \quad (4.12)$$

Здесь $P(\rho_0)$ – это начальное давление, соответствующее состоянию равновесия, а P_a – приращение давления, вызванное движением вещества вдоль оси x . Разлагая функцию $P(\rho)$ в ряд Тейлора и принимая во внимание, что

$$\rho_a \ll \rho_0,$$

можно пренебречь всеми членами разложения, кроме первого. Тогда

$$P(\rho_0 + \rho_a) = P(\rho_0) + \frac{\partial P}{\partial \rho} \rho_a. \quad (4.13)$$

Здесь производная

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = P'(\rho_0)$$

характеризует скорость изменения давления как функцию плотности при условии, что

$$\rho = \rho_0.$$

Из выражений (4.12) и (4.13) следует, что

$$P_a = \alpha \rho_a$$

и

$$\alpha = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \text{ если } \rho = \rho_0. \quad (4.15)$$

Параметр α зависит от нескольких факторов, таких, например, как температура и давление, влияющих на состояние газа или жидкости. Как будет показано ниже, этот параметр определяет скорость распространения звуковых волн.

Таким образом, мы предположили, что приращение давления прямо пропорционально приращению плотности вещества. В связи с этим целесообразно отметить следующее. Поскольку приращение давления, вызванное распространением звуковой волны, очень мало:

$$\rho_a \ll P(\rho_0), \quad (4.16)$$

амплитуда этого давления часто измеряется в децибелах, которые определяются как

$$I = 20 \log \frac{P_a}{P_r} \text{ дБ,} \quad (4.17)$$

где

$$P_r = 2 \cdot 10^{-10} \text{ бар или } P_r = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па.}$$

Так, например, если приращение давления

$$P_a = 2 \cdot 10^{-7} \text{ бар,}$$

то величина I равна 60 дБ, что соответствует достаточно громкому звуку. Это давление, однако, чрезвычайно мало по сравнению с начальным давлением $P(p_0) \approx 1$ бар. Это обстоятельство учитывалось при выводе двух важных формул, а именно (4.11) и (4.14):

$$\rho_a = -\rho_0 \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad \text{и} \quad P_a = \alpha \rho_a.$$

Используя обе эти формулы, получим следующее соотношение между смещением s_x и приращением давления P_a :

$$P_a(p, t) = -\alpha \rho_0 \frac{\partial s_x}{\partial x}. \quad (4.18)$$

Из последнего выражения хорошо видно, что при расширении, когда $\partial s_x / \partial x > 0$, давление падает, и это происходит именно благодаря уменьшению плотности. И, наоборот, при сжатии вещества, когда $\partial s_x / \partial x < 0$, давление увеличивается. Аналогия между уравнением (4.18) и законом Гука в случае системы пружин очевидна. Так, например, величина $\partial s_x / \partial x$ характеризует деформацию элементарного объема.

Уравнение (4.18) содержит две неизвестные функции: $P_a(p, t)$ и $s_a(p, t)$. Чтобы найти эти функции, необходимо задать, по крайней мере, еще одно соотношение между ними. Для этого рассмотрим силы, действующие на элементарный объем V . Прежде всего, необходимо отметить следующее. До сих пор мы рассматривали элементарный объем, в котором смещение $s_a(p, t)$ было линейной функцией координаты x . Это означает, что деформация $\partial s_x / \partial x$, плотность ρ_a и давление P_a постоянны внутри данного объема:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = C_1, \quad \rho_a = C_2, \quad P_a = C_3.$$

Другими словами, мы предположили, что объем находится в равновесии, когда на его переднюю и заднюю поверхности действует одинаковое давление.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Изучим теперь движение элементарного объема и предположим, что внутри него функции $\partial s_x / \partial x$, ρ_a , P_a и s_x зависят от x . Предположим сначала,

что данный объем находится в состоянии сжатия и движется вдоль оси x (рис. 4.1, δ). Соответственно, плотность этого объема увеличивается, и

$$P_a > 0.$$

Сила, действующая на заднюю поверхность объема, имеет только одну ненулевую положительную компоненту F_x :

$$F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)dS, \quad (4.19)$$

где P_a – давление; $dS = dydz$; x – координата центра масс.

В результате движения элементарного объема возникает направленная вдоль оси x сила, действующая на расположенную перед ним среду. В свою очередь, как следует из третьего закона Ньютона, со стороны среды на переднюю поверхность объема также действует сила, которая отличается от предыдущей силы только знаком. Следовательно, ее скалярная компонента

$$F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = -P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)dS. \quad (4.20)$$

Для результирующей силы имеем

$$F_x = F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) + F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)$$

или

$$F_x = \left[P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) - P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) \right]dS. \quad (4.21)$$

Предположим теперь, что элементарный объем расширяется и, соответственно, приращение давления P_a является отрицательным (рис. 4.1, e). Поскольку сила, приложенная к задней поверхности объема, направлена к началу координат, имеем

$$F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = P_a\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)dS < 0.$$

В то же время, снова применяя третий закон Ньютона, замечаем, что скалярная компонента этой силы на передней поверхности объема является положительной, и, следовательно, ее можно записать как

$$F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) = -P_a\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)dS > 0,$$

поскольку

$$P_a < 0.$$

Таким образом, результирующая сила в этом случае равняется

$$F_x = \left[P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) - P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) \right] dS. \quad (4.22)$$

Сравнивая выражения (4.21) и (4.22), приходим к выводу, что сумма внешних сил, приложенных к элементарному объему, не зависит от типа деформации.

Поскольку расстояние Δx очень мало, можно предположить, что сила F_x изменяется линейно в промежутке между сторонами объема. Соответственно, и деформация $\partial s_x / \partial x$ меняется в пределах объема таким же образом. Поэтому смещение s_x определяется следующим выражением:

$$s_x(x, y, z, t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4.23)$$

и

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x.$$

Как следует из соотношений (4.11) и (4.14), плотность ρ_a и давление P_a ведут себя так же, как и деформация.

Запишем теперь второй закон Ньютона для нашего случая:

$$m \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = F_x, \quad (4.24)$$

где

$$m = \rho_a \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0 dS \Delta x$$

и F_x обозначает результирующую силу, действующую на элементарный объем V .

Подстановка соотношения (4.21) в уравнение (4.24) приводит к

$$\Delta x \rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \left[-P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) + P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) \right]. \quad (4.25)$$

При выводе последнего уравнения, мы предполагали, что приращение плотности очень мало, $\rho_a \ll \rho_0$, и что только силы, приложенные к поверхностям объема, влияют на его движение. Так, например, мы не рассматривали влияние гравитационных сил.

Поскольку давление является линейной функцией координаты x , разложение в ряд Тейлора функции приращения давления дает

$$P_a \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) = P_a(x, y, z, t) + \frac{\partial P_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (4.26)$$

и

$$P_a \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t \right) = P_a(x, y, z, t) - \frac{\partial P_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}.$$

Здесь $P_a(x, y, z, t)$ – давление в окрестности центра элементарного объема.

ма, а производная $\partial P_a / \partial x$ определяет величину изменения давления с расстоянием.

Подставляя выражения (4.26) в уравнение (4.25), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Таким образом, используя принцип сохранения массы (4.11), соотношение (4.14) между давлением P_a и плотностью ρ_a , а также второй и третий законы Ньютона, мы получили следующую систему из двух уравнений относительно смещения и избыточного давления:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} = - \frac{1}{\alpha \rho_0} P_a \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.28)$$

Дифференцируя по координате x первое уравнение и используя второе уравнение, исключим член, содержащий давление. В результате получим следующее уравнение относительно смещения:

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}, \quad (4.29)$$

где

$$\alpha = c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad \text{если } \rho = \rho_0. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.29) представляет собой хорошо известное волновое уравнение для одномерного случая, описывающее распространение звуковой волны вдоль оси x со скоростью c . Дифференцируя это уравнение по координате x и, затем, используя формулу (4.18), получим волновое уравнение для давления P_0 :

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2}. \quad (4.31)$$

Как следует из равенства (4.14), приращение плотности $\rho_a(p, t)$ также удовлетворяет волновому уравнению.

Таким образом, функции

$$\rho_a, P_a, x_s \text{ и } \partial x_s / \partial x,$$

описывающие распространение звука, являются решениями волнового уравнения, т.е. их поведение во времени и пространстве является волновым.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

В качестве иллюстрации рассмотрим волну, в которой смещения определяются следующим выражением:

$$s_x(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (4.32)$$

$$c = 347 \text{ м/с.}$$

Известно, что слышимый звуковой диапазон ограничивается пределами

$$20 \text{ Гц} < f < 20 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

Соответственно, длина звуковой волны

$$\lambda = cT = c/f = 2\pi c/\omega$$

меняется в пределах

$$1,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} < \lambda < 17,4 \text{ м.}$$

Например, если частота $f = 10^3 \text{ Гц}$, то длина волны

$$\lambda = 0,35 \text{ м.}$$

По определению, размеры элементарного объема должны быть значительно меньше таких характерных параметров, как длина волны. В нашем случае ($\lambda = 0,35 \text{ м}$) минимальное растяжение Δx , которое соответствует лишь незначительной деформации, равняется примерно одному-двум сантиметрам. Эти величины, безусловно, на много порядков больше, чем средняя длина свободного пробега молекул (10^{-7} м). Благодаря этому, при изучении распространения звука газы и жидкости можно рассматривать как непрерывные среды.

Для того чтобы оценить амплитуду смещения и скорость, вернемся к формуле (4.18). Это уравнение, используя равенство (4.32), можно переписать в следующем виде:

$$P_a = -\alpha \rho_0 \frac{\omega A}{c} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (4.33)$$

Таким образом, амплитуда давления B равняется

$$B = c \rho_0 \omega A, \quad (4.34)$$

поскольку

$$\alpha = c^2.$$

Предположим вначале, что звук очень сильный. Полагая $B = 120 \text{ дБ}$, имеем

$$120 = 20 \log \frac{P_a}{2 \cdot 10^{-10} B} \quad \text{или} \quad P_a = 2 \cdot 10^{-4} B = 20 \frac{B}{\text{н}}$$

и при частоте $f = 10^3 \text{ Гц}$ амплитуда смещения равняется

$$A = \frac{B}{c \rho_0 \omega} = \frac{20}{347 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^3} \approx 10^{-5} \text{ м.}$$

Таким образом, даже в случае очень громкого звука, максимальное смещение чрезвычайно мало.

В противоположном случае, когда звук такой тихий, что его с трудом можно услышать, давление равняется

$$P_a = 20 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 2 \cdot 10^{-9} \text{ бар.}$$

Как следует из равенства (4.34), амплитуда смещения в этом случае при той же частоте $f = 10^3 \text{ Гц}$ равняется

$$A \approx 10^{-10} \text{ м.}$$

Следует заметить, что размеры атомов имеют порядок как раз 10^{-10} м , что наглядно демонстрирует удивительную чувствительность нашего слуха.

В состоянии равновесия движение молекул является хаотичным, однако при появлении волны они также приобретают небольшую компоненту скорости или в направлении оси x , или в противоположном направлении. Это приводит к небольшим колебаниям элементарного объема, который движется как одна частица. Таким образом, движение объема в некотором направлении сопровождается хаотичным движением его молекул, при котором скорости частиц не имеют выделенного направления.

В отличие от твердых тел и жидкостей, молекулы газа находятся в среднем достаточно далеко друг от друга. Как уже отмечалось, перенос усилия, момента и смещения происходит в основном за счет столкновения молекул. По этой причине разница между средней скоростью молекулы v_m и скоростью звука c оказывается не такой уж большой. Более того, всегда выполняется следующее неравенство:

$$v_m > c.$$

Как следует из выражения (4.32), скорость элементарного объема (частицы)

$$v_x(x, t) = -A\omega \sin\omega(t - x/c). \quad (4.35)$$

Сравнение с равенством (4.33) показывает, что

$$v/c = P_a/\alpha \rho_0 \text{ или } v = P_a/c \rho_0. \quad (4.36)$$

Похожее выражение было получено ранее для волн, распространяющихся в пружине.

Если, как и раньше, принять, что давление имеет очень большую амплитуду:

$$P_a = 120 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 20 \text{ Н/м}^2,$$

то амплитуда скорости v будет иметь величину

$$v = \frac{20}{347 \cdot 1,22} \approx 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

В случае слабого сигнала, например, при

$$P_a = 20 \text{ дБ} \text{ или } P_a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}^2,$$

имеем

$$v = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ м/с.}$$

Таким образом, движение элементарного объема, вызванное распространением звуковой волны, характеризуется чрезвычайно малыми скоростями, которые значительно меньше фазовой скорости волны:

$$v_m > c \gg v. \quad (4.37)$$

В то же время средняя скорость молекул сравнима по величине со скоростью c :

$$v_m \approx 1,7 \text{ с.} \quad (4.38)$$

При распространении звука в газе в последнем возникают зоны растяжения и сжатия, в которых наблюдаются, соответственно, понижение и повышение температуры.

Поэтому естественно ожидать существование потока тепла от зон сжатия к зонам растяжения. Тем не менее, существуют по крайней мере две причины, в силу которых мы можем пренебречь обменом тепла между более нагретыми и охлажденными областями в газе. Во-первых, расстояние между этими областями значительно превышает среднюю длину свободного пробега (среднее расстояние, пробегаемое молекулами между столкновениями). И, во-вторых, учитывая скорость тепловой диффузии, можно сказать, что температура каждого элементарного объема изменяется довольно быстро, даже при частоте волны порядка 20 Гц. Таким образом, процесс сжатия и растяжения является не изотермическим, а скорее адиабатическим.

Имея это в виду, получим теперь оценку фазовой скорости волны. Согласно равенству (4.30), имеем

$$c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}, \text{ если } \rho = \rho_0. \quad (4.39)$$

В качестве начального приближения предположим, что сжатие и растяжение происходят так медленно, что температура в процессе деформации практически не меняется. Согласно закону Бойля – Мариотта,

$$\frac{P}{P_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{m}{\rho_0} \frac{\rho}{m} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

где m – масса рассматриваемого объема.

Последние равенства можно переписать как

$$\frac{P_0 + P_a}{P_0} = \frac{\rho_0 + \rho_a}{\rho_0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{P_a}{P_0} = \frac{\rho_a}{\rho_0} \quad \text{или} \quad P_a = \frac{P_0}{\rho_0} \rho_a. \quad (4.40)$$

Сравнение этих соотношений с формулой (4.14) дает

$$\alpha = P_0 / \rho_0 \text{ и } c = \sqrt{P_0 / \rho_0}. \quad (4.41)$$

Подставляя в эти соотношения значение давления на уровне моря $P_0 \approx \approx 10^5$ Па и значение плотности $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$, получим

$$c \approx 290 \text{ м/с.}$$

Естественно, что это значение фазовой скорости значительно меньше того, которое наблюдается в эксперименте.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СКОРОСТЬ ВОЛНЫ

Несоответствие между рассмотренной выше теорией и экспериментом впервые обнаружил Лаплас. Он заметил, что быстрые деформации элементарного объема, возникающие при распространении звуковой волны, сопровождаются изменением температуры. Например, как уже упоминалось, если объем сжимается, то его температура растет. Соответственно, давление может возрастать по двум причинам. Первая причина связана с уменьшением элементарного объема. При этом плотность газа увеличивается и все больше столкновений молекул приходится на единицу площади элементарной поверхности. Вторая причина заключается в увеличении температуры и, следовательно, кинетической энергии молекул. Поскольку количество движения (импульс) молекул при этом увеличивается, давление также возрастает.

Равенства (4.41) были получены из закона Бойля – Мариотта, в котором учитывается только первая причина возрастания давления – увеличение плотности. Поведение давления описывается законом Бойля – Мариотта в том случае, если деформация происходит значительно медленнее процессов теплового обмена между элементарным объемом и окружающим газом. Конечно, этот закон можно применять и тогда, когда процесс деформации является изотермическим, т.е. когда температура вообще не меняется.

Тем не менее, в большинстве случаев распространения звуковых волн изменение плотности происходит настолько быстро, что тепло, вызванное деформацией, не успевает обмениваться. Именно поэтому в случае сжатия давление увеличивается до больших значений, чем это предсказывается законом Бойля – Мариотта. И наоборот, при растяжении из-за уменьшения кинетической энергии падение давления становится более заметным.

Такое поведение называется адиабатическим, и Лаплас предложил использовать вместо равенства (закона Бойля – Мариотта)

$$P/P_0 = \rho/\rho_0$$

следующее соотношение:

$$P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (4.42)$$

где γ – параметр газа.

Последнее выражение можно переписать как

$$1 + \frac{P_a}{P_0} = \left(1 + \frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^\gamma. \quad (4.43)$$

Поскольку $\rho_a/\rho_0 \ll 1$, правую часть равенства (4.43) можно разложить в ряд Тейлора. Тогда

$$\frac{P_a}{P_0} = \gamma \frac{\rho_a}{\rho_0} \quad \text{или} \quad P_a = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_a.$$

Сравнивая эту формулу с выражением (4.14), получим новое выражение для параметра α :

$$\alpha = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}, \quad (4.44)$$

и новое выражение для фазовой скорости:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}. \quad (4.45)$$

Если положить

$$\gamma = 1,402,$$

то фазовая скорость волны будет равняться

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \approx 343 \text{ м/с},$$

что очень близко к результатам эксперимента.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

До сих пор мы предполагали, что у смещения частицы (элементарного объема) есть только одна компонента: s_x . Рассмотрим теперь более общий случай, когда вектор смещения s произвольно ориентирован относительно координатных осей:

$$s(p, t) = s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k}. \quad (4.46)$$

Здесь \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} – единичные векторы, задающие направления координатных осей.

Согласно равенству (4.7) относительное изменение элементарного объема, вызванное движением вдоль оси x , определяется выражением

$$\Delta V_x/V_0 = \partial s_x / \partial x.$$

Аналогично, смещения вдоль других координатных осей приводят к следующим изменениям элементарного объема:

$$\Delta V_y/V_0 = \partial s_y / \partial y \text{ и } \Delta V_z/V_0 = \partial s_z / \partial z.$$

Таким образом, полное изменение объема, нормализованное на его начальное значение, равняется

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta V_x + \Delta V_y + \Delta V_z}{V_0}$$

или

$$\Delta V/V_0 = \partial s_x/\partial x + \partial s_y/\partial y + \partial s_z/\partial z. \quad (4.47)$$

Как следует из векторного анализа (приложение 3), сумма производных в правой части этого соотношения определяет дивергенцию векторного поля s :

$$\operatorname{div} s = \Delta V/V_0. \quad (4.48)$$

Отсюда видно, что $\operatorname{div} s$ характеризует относительное изменение объема, вызванное либо сжатием, либо растяжением.

В связи с этим полезно заметить следующее:

а) в $\operatorname{div} s$ содержатся производные смещений (4.47), и поэтому дивергенция имеет смысл только в регулярных точках, где эти производные существуют;

б) функция $\operatorname{div} s$ часто называется дилатацией (всесторонним расширением), хотя она описывает как растяжение $\Delta V/V_0 > 1$, так и сжатие $\Delta V/V_0 < 1$. Следуя этой терминологии, волны, которые вызывают изменение объема, называются волнами дилатации. Примером таких волн является звук;

в) уравнение (4.48) было получено в прямоугольной декартовой системе координат. Тем не менее, как показано в приложении 3, дивергенция векторного поля определяется его источниками и, следовательно, от системы координат не зависит. Другими словами, в любой системе координат $\operatorname{div} s$ описывает одни и те же относительные изменения объема.

Обобщим теперь соотношения, связывающие смещения, плотность и давление. Для этого снова используем принцип сохранения массы:

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \rho_a) = \rho_0 V_0$$

или

$$\Delta V/V_0 = -\rho_a/\rho_0, \quad (4.49)$$

поскольку $\rho_a/\Delta V \ll 1$.

Отсюда, используя соотношение (4.48), получаем

$$\operatorname{div} s = -\rho_a/\rho_0, \quad (4.50)$$

где ρ_a – приращение плотности, вызванное изменениями объема.

Таким образом, наша первая задача оказывается выполненной, и равенство (4.11) можно заменить соотношением (4.50), которое справедливо и в трехмерном случае.

Поскольку мы продолжаем предполагать, что изменения плотности, вызванные распространением волны, очень малы, формула (4.14), связывающая давление и плотность, остается без изменений, т.е.

$$P_a = \alpha \rho_a \text{ и } \alpha = \partial P / \partial \rho,$$

$$\text{если } \rho = \rho_0. \quad (4.51)$$

Следующее уравнение следует из второго закона Ньютона (4.27):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_a}{\partial x}. \quad (4.52)$$

Аналогично, для двух других координат имеем

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_a}{\partial y} \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_a}{\partial z}. \quad (4.53)$$

Умножая равенства (4.52) – (4.53) на, соответственно, единичные векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a. \quad (4.54)$$

Это уравнение представляет собой второй закон Ньютона в векторной форме. Из него видно, что ускорение направлено туда, где наблюдается максимальное уменьшение давления.

При выводе этого уравнения предполагалось, что на элементарный объем действуют только силы, приложенные к его граням. Другими словами, принимались во внимание только поверхностные силы. Тем не менее, в общем случае существуют и другие силы, например гравитационные. Тогда вместо уравнения (4.54) будем иметь

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a + \rho_0 \mathbf{g}, \quad (4.55)$$

где вектор \mathbf{g} обозначает гравитационное поле.

В дальнейшем мы будем предполагать, за исключением некоторых специальных случаев, что влияние гравитационного поля пренебрежимо мало. Тогда распространение звука описывается системой из трех уравнений:

$$\text{div } \mathbf{s} = -\rho_a / \rho_0, \quad P_a = \alpha \rho_a, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\text{grad } P_a, \quad (4.56)$$

которые описывают следующие физические законы:

- 1) принцип сохранения массы;
- 2) линейную зависимость давления от плотности, при условии, что относительные изменения плотности малы;
- 3) второй и третий законы Ньютона.

4.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВОЛН ДИЛАТАЦИИ

В предыдущем разделе мы пришли к уравнениям (4.56), которые связывают между собой приращение плотности ρ_a , смещение \mathbf{s} и давление P_a . Поскольку приращение плотности ρ_a , вызванное распространением волны,

обычно не представляет интереса, естественно исключить эту величину из первых двух уравнений указанной системы. Тогда вместо (4.56) получим

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = -CP_a, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P_a, \quad (4.57)$$

где множитель C называется сжимаемостью и характеризует относительное изменение объема при изменении давления на одну единицу. Для жидкостей значение этого параметра чрезвычайно мало. Свойством жидкостей является огромное сопротивление к изменениям объема. Тем не менее, жидкости не являются полностью несжимаемыми и могут претерпевать значительные изменения объема при высоком давлении. Так, например, если давление в воде достигает 1000 атм, ее объем уменьшается примерно на 5 %. И наоборот, распространение звука в жидкостях сопровождается чрезвычайно малой дилатацией.

Как следует из уравнений (4.56),

$$C = 1/\alpha \rho_0, \quad (4.58)$$

и значение этой величины в жидкостях составляет приблизительно

$$C \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Введем также величину, обратную сжимаемости:

$$K = 1/C = \alpha \rho_0, \quad (4.59)$$

которая называется модулем сжатия и является аналогом упругого параметра E^* пружины.

Соответственно, первое уравнение (4.57) можно переписать в виде

$$P_a = -K \operatorname{div} \mathbf{s}. \quad (4.60)$$

Это уравнение можно рассматривать как аналог закона Гука для газов и жидкостей.

Система уравнений (4.57) содержит два неизвестных: избыточное давление P_a и смещение \mathbf{s} . Как следует из определения дивергенции (см. приложение 3), давление P_a можно трактовать как плотность источников поля смещений \mathbf{s} .

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ И СМЕЩЕНИЯ

Теперь по аналогии с одномерным случаем получим волновое уравнение для каждой из этих функций. Беря дивергенцию от обеих частей второго уравнения (4.57), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} P_a. \quad (4.61)$$

Следует заметить, что вывод волнового уравнения основывается на предположении о том, что среда в окрестности регулярной точки является однородной, т.е.

$$\rho_0 = \text{const.}$$

По определению (см. приложение 3),

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} P_a = \nabla^2 P_a,$$

и уравнение (4.61) переходит в

$$\nabla^2 P_a = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{s}. \quad (4.62)$$

Используя первое из равенств (4.57), получаем волновое уравнение для давления в трехмерном случае:

$$\nabla^2 P_a = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (4.63)$$

Здесь вместо P_a стоит P , поскольку давление P_0 постоянно и

$$c = \sqrt{K/\rho_0} \quad (4.64)$$

является скоростью волны.

Перед тем, как получить волновое уравнение для смещения \mathbf{s} , рассмотрим одно интересное свойство этого поля. Для этого запишем сначала второй закон Ньютона:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} P.$$

Беря ротор от обеих частей этого равенства, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} P,$$

поскольку плотность ρ_0 постоянна.

Из векторного анализа известно (см. приложение 3), что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} P = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (4.65)$$

где \mathbf{v} – скорость частицы.

Отсюда

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \text{const.}$$

Принимая во внимание, что в начальный момент времени смещение и его

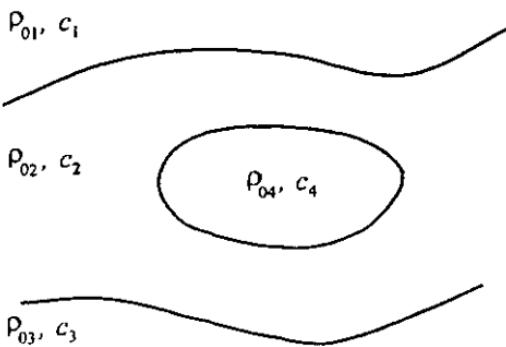
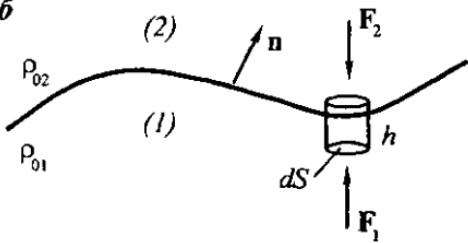
a

Рис. 4.2. Модель кусочно-однородной среды (a); граничные условия (б)

б

производные по времени равнялись нулю, заключаем, что в однородной среде в произвольный момент времени

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0.$$

Геометрический смысл этого равенства будет обсуждаться позже.

Теперь, беря градиент от обеих частей первого уравнения (4.57), получим

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = -C \operatorname{grad} P_a.$$

Далее, второе из указанных уравнений (закон Ньютона) дает

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = \rho_0 C \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}.$$

Из формулы (4.66) и равенства (см. приложение 3)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - \nabla^2 \mathbf{s},$$

следует, что

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = \nabla^2 \mathbf{s}.$$

Соответственно уравнение (4.67) переходит в

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \nabla^2 \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}. \quad (4.68)$$

Таким образом, давление и смещение удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению, причем фазовая скорость с определяется из уравнения (4.64).

В отличие от одномерного случая левая часть уравнений (4.63) и (4.68) содержит производные по всем трем координатам. Так, например, в декартовой прямоугольной системе координат

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (4.69)$$

Одним из наиболее замечательных свойств лапласиана $\nabla^2 P$ или $\nabla^2 s$ является то, что его значение не меняется при замене координат. Этот результат очевиден, поскольку правая часть уравнений движения от системы координат не зависит.

Поскольку волновое уравнение содержит вторые производные по координатам, оно справедливо только в регулярных точках, в окрестности которых плотность ρ_0 и фазовая скорость c постоянные.

Предположим, что среда является кусочно-однородной (рис. 4.2, а). Тогда одна из функций ρ_0 или c , или они обе теряют разрыв на внутренних границах раздела среды. Поэтому волновое уравнение в таких местах не выполняется и его необходимо заменить соответствующими граничными условиями.

УСЛОВИЯ НА ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗДЕЛА СРЕДЫ

Покажем, прежде всего, что давление на границах остается непрерывной функцией. Рассмотрим элементарный объем (рис. 4.2, б). Этот объем ограничен горизонтальной поверхностью S_L , а также поверхностями dS_1 и dS_2 :

$$dS_2 = dS_n, \quad dS_1 = -dS_n.$$

Здесь n – единичная нормаль, направленная от задней к передней стороне границы.

Согласно второму закону Ньютона, ускорение такого объема определяется как

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_1 + F_2.$$

В направлении, перпендикулярном поверхности, имеем

$$\frac{h}{2} (\rho_{01} + \rho_{02}) \frac{\partial^2 s_n}{\partial t^2} = P_1 - P_2,$$

где $F_1 = P_1 dS$; $F_2 = P_2 dS$; ρ_{01} и ρ_{02} обозначают плотности среды по обе стороны границы.

В выражении (4.70) h – высота цилиндрического объема, а P_1 и P_2 обозначают давление на нижней и верхней поверхности цилиндра.

В пределе, когда высота цилиндра стремится к нулю, левая часть уравнения (4.70) также стремится к нулю, поскольку ускорение не может быть бесконечно большим. Отсюда делаем вывод, что

$$P_1 = P_2 \text{ на } S,$$

т.е. давление является непрерывной функцией на границе, разделяющей среды с различными параметрами.

Второе граничное условие следует из предположения, что распространение волн не приводит к возникновению пустот между средами или к их перекрытию. Это означает, что нормальная компонента смещений должна быть непрерывной функцией:

$$s_{1n} = s_{2n}. \quad (4.72)$$

Таким образом, на внутренних границах мы вместо волнового уравнения имеем следующие граничные условия

$$s_{1n} = s_{2n} \text{ и } P_1 = P_2.$$

В то же время тангенциальная компонента смещений может иметь различные значения по обе стороны границы.

СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Существует еще одно важное следствие из уравнений (4.66). Из векторного анализа (см. приложение 3) следует, что, если

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0,$$

то для векторного поля \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = \text{grad } \phi.$$

Следовательно, смещения s можно представить как

$$s = \text{grad } \phi, \quad (4.74)$$

где ϕ – произвольная скалярная функция, имеющая в регулярных точках первые и вторые производные по времени и координатам.

Очевидно, что существует бесконечное множество таких функций, определяющих одно и то же поле s . Другими словами $\phi(r, t)$ является вспомогательной функцией, которая вряд ли имеет какой-либо физический смысл, однако во многих случаях заметно упрощает изучение волн. Функцию ϕ обычно называют скалярным потенциалом векторного поля s или, иначе, акустическим потенциалом. Эта функция используется также для изучения волн дилатации в упругой среде.

Подстановка равенства (4.74) в уравнение (4.68) дает

$$\text{grad} \left(\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0$$

или

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \text{const.}$$

Поскольку константа не зависит от положения точки, а волны отсутствуют на бесконечности, последнее выражение снова приводит к волновому уравнению:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (4.75)$$

Существенно, что одно и то же волновое уравнение описывает распространение волн дилатации в газе, жидкости и упругой среде.

Мы ввели понятие скалярного потенциала $\phi(p, t)$ и нашли, как он связан со смещением (4.74). Выразим теперь давление в терминах этой функции. Подстановка выражения (4.74) в первое уравнение (4.57) дает

$$P_a = -K \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -K \nabla^2 \phi.$$

В соответствии с уравнением (4.75) имеем

$$P_a = -\frac{K}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad P_a = -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (4.76)$$

поскольку

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}.$$

Границные условия для скалярного потенциала следуют из равенств (4.73). По определению, нормальная компонента смещения

$$s_n = \partial \phi / \partial n.$$

Следовательно, на границах выполняются следующие условия

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{и} \quad \rho_{01} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \rho_{02} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}.$$

Последнее равенство можно заметно упростить, поскольку произведение $\rho_0 \phi$ обеспечивает непрерывность давления и, следовательно, само является непрерывной функцией. Отсюда граничные условия для потенциала имеют вид

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{и} \quad \rho_{01} \phi_1 = \rho_{02} \phi_2. \quad (4.77)$$

Мы получили уравнения для смещений, давления и скалярного потенциала, которые являются произвольными функциями времени. Теперь рассмотрим специальный случай синусоидальных волн.

Известно (см. приложение 4), что рассматриваемые волновые поля можно представить как

$$s = \operatorname{Re}(S e^{-i\omega t}), \quad P_a = \operatorname{Re}(P_a e^{-i\omega t}) \quad (4.78)$$

$$\Phi = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}), \quad (4.79)$$

где P_a и Φ обозначают комплексные амплитуды, а S – комплексный вектор, причем все эти функции не зависят от времени. По определению, они характеризуют амплитуду и фазу соответствующего волнового поля.

Подставляя выражение (4.79) в уравнение (4.75), получим следующее уравнение, которое называется уравнением Гельмгольца:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad (4.80)$$

поскольку

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}) \quad (4.81)$$

и

$$k = \omega/c.$$

Таким образом, вместо волнового уравнения для скалярного потенциала, мы получили уравнение для комплексной амплитуды Φ .

Из соотношений (4.74) и (4.76) следует, что комплексные амплитуды смещений и давления связаны с комплексной амплитудой потенциала следующим образом:

$$\mathcal{S} = \operatorname{grad} \Phi \text{ и } \mathcal{P}_a = \rho_0 \omega^2 \Phi. \quad (4.82)$$

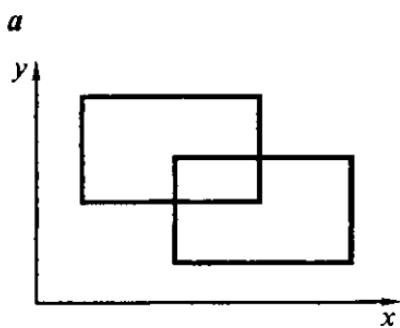
Независимость комплексной амплитуды от времени заметно упрощает задачу определения волнового поля. В то же время, если предположить, что решения для синусоидальных волн известны, то решение для произвольной волны можно найти, применяя интеграл Фурье (см. приложение 7).

ДЕФОРМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЕМА

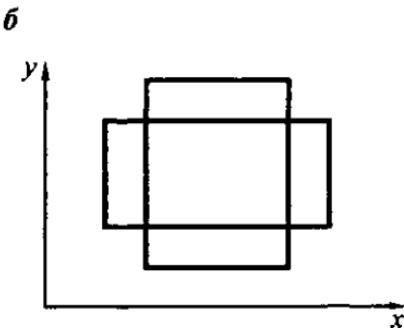
Рассмотрим теперь одно важное свойство волн дилатации. Согласно формулам (4.57) и (4.66), поле смещений описывается в регулярных точках однородной среды следующей системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0 \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{s} = -CP_a. \quad (4.83)$$

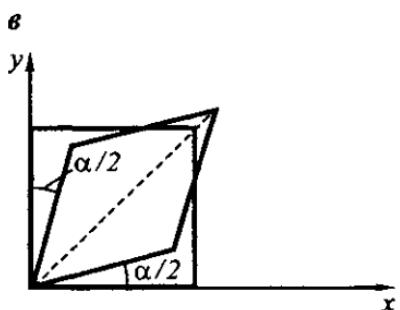
Из нее видно, что вихри в среде отсутствуют (см. приложение 3) и поле смещений \mathbf{s} , возникающее при распространении волны дилатации, является полем источников. Классификация векторных полей, основанная на соотношении между самим полем и генераторами этого поля (вихрями и источниками), является обычной при изучении гравитационных, электрических, магнитных и электромагнитных полей. Однако в случае акустических и упругих волн основное внимание уделяется не источникам и вихрям поля смещений \mathbf{s} или скорости \mathbf{v} , а тем типам деформации среды, которые возникают при распространении волны.



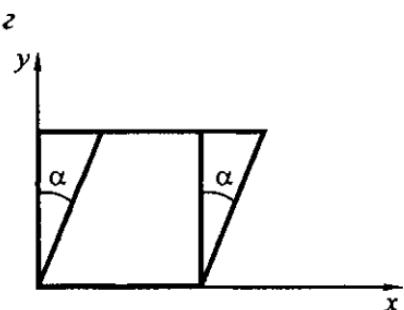
Перенос



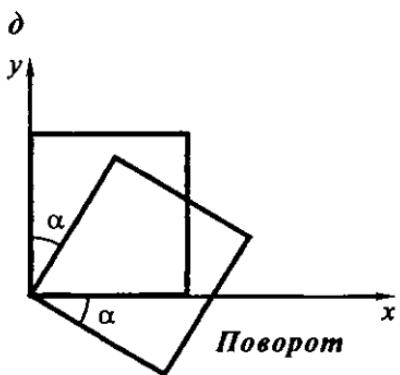
Сжатие (растяжение)



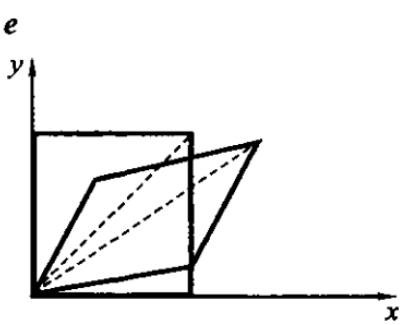
Чистый сдвиг



Простой сдвиг



Поворот



Поворот и деформация

Рис. 4.3. Типы движения и деформации

В связи с этим рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих различные изменения элементарного объема. Для простоты предположим, что объем не изменяется вдоль оси z . В этом случае достаточно рассмотреть изменения его сечения (рис. 4.3). В действительности они чрезвычайно малы, и на рисунке увеличены только для наглядности.

Как известно, дивергенция (дилатация) характеризует относительное изменение объема:

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = \frac{\Delta V}{V_0} = -CP_a, \quad (4.84)$$

поскольку

$$\frac{\partial s_z}{\partial z} = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$s_x = 0 \text{ и } \frac{\partial s_x}{\partial z} = \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0,$$

запишем компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{s}$ как

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{s} = \frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0,$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{s} = \frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y}. \quad (4.85)$$

Уравнения (4.84)–(4.85) позволяют определить те изменения объема или его положения, которые связаны с распространением волны дилатации.

Очевидно, что в случае перемещения объема как единого целого (трансляция) компоненты смещения s_x и s_y не зависят от обеих координат и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0, \operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Сравнение с уравнениями (4.83) показывает, что трансляции могут происходить и происходят в тех точках, где давление P равняется нулю.

Рассмотрим теперь другой случай и предположим, что элементарный объем либо сжимается, либо растягивается, т.е.

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} \neq 0 \text{ и } \frac{\partial s_y}{\partial y} \neq 0. \quad (4.86)$$

В то же время компоненты смещения s_x и s_y не зависят от координат y и x соответственно. Поэтому

$$\frac{\partial s_x}{\partial y} = \frac{\partial s_y}{\partial x} = 0. \quad (4.87)$$

Деформация, соответствующая этому равенству, показана на рис. 4.3, б. Из последних двух соотношений следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{s} = -CP_a.$$

В следующем примере (рис. 4.3, в) рассмотрим деформацию, при которой объем не меняется и соответственно

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Как видно из рисунка, смещение s характеризуется двумя компонентами s_x и s_y , которые прямо пропорциональны соответственно координатам y и x :

$$s_x = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) y, \quad s_y = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) x$$

или

$$s_x = \frac{\alpha}{2} y \quad \text{и} \quad s_y = \frac{\alpha}{2} x, \quad (4.88)$$

поскольку параметр α мал и

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Здесь $\alpha/2$ обозначает угол между начальным и новым положением стороны ab .

Расстояние между частицами с различными координатами y (а также x) изменяется, и возникает новый тип деформации объема, который называется чистым сдвигом. В результате такой деформации прямоугольник трансформируется в ромб, диагонали которого одинаковым образом ориентированы относительно соответствующих координатных осей.

Из уравнения (4.88) следует, что

$$\partial s_x / \partial y = \alpha/2 \quad \text{и} \quad \partial s_y / \partial x = \alpha/2.$$

Это означает, что, как и в случае трансляции,

$$\operatorname{rot} s = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} s = 0.$$

Следующие два примера демонстрируют поведение векторного поля s , которое не удовлетворяет системе уравнений (4.83). В первом из них (рис. 4.3, 2) существует только одна ненулевая компонента s_x , и она прямо пропорциональна координате y . В этом случае

$$s_x = \alpha y \quad \text{или} \quad \partial s_x / \partial y = \alpha.$$

Поскольку

$$\partial s_y / \partial x = 0,$$

имеем

$$\operatorname{rot} s \neq 0.$$

Этот пример иллюстрирует деформацию простого сдвига.

Другой пример приведен на рисунке 4.3, д. Он описывает вращение элементарного объема вокруг оси z . Поскольку при таком движении объем не меняется,

$$\operatorname{div} s = 0.$$

По аналогии с предыдущим случаем, имеем

$$s_x = \alpha y \quad \text{и} \quad s_y = -\alpha x$$

или

$$\frac{ds_x}{dy} = \alpha \text{ и } \frac{ds_y}{dx} = -\alpha. \quad (4.89)$$

Подстановка соотношений (4.89) в формулу (4.85) дает

$$\text{rot}_z \mathbf{s} = -2\alpha. \quad (4.90)$$

Последнее равенство показывает, что волны дилатации не могут приводить к вращению.

Таким образом, волны дилатации могут сопровождаться только следующими тремя типами деформаций: растяжением – сжатием, чистым сдвигом и трансляцией.

В то же время, если среда не является однородной, это заключение не верно. Действительно, как следует из второго закона Ньютона (4.57), обычно вблизи точек неоднородности $\text{rot} \mathbf{s} \neq 0$, и в таких точках могут реализовываться как поворот, так и простой сдвиг.

В заключение отметим, что на рис. 4.3, *e* представлен результат поворота и сдвиговой деформации.

4.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВОЛН. ПОТОК ЭНЕРГИИ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

В этом разделе изучается распределение энергии при распространении в среде волн дилатации, вызывающих соответствующие смещения и деформации элементарного объема. Рассмотрим малый объем V длины l и поперечного сечения S (рис. 4.4, *a*). Предположим сначала, что объем ориентирован таким образом, что смещение частиц в нем происходит перпендикулярно поперечному сечению S . Выбирая ось x системы координат в направлении смещения \mathbf{s} , имеем

$$\mathbf{s} = s_x(p, t)\mathbf{i}. \quad (4.91)$$

Здесь \mathbf{i} – единичный вектор.

Предположим далее, что в некоторый момент времени t_0 волна, распространяющаяся в среде, достигает левой границы этого объема, находящегося в состоянии равновесия. В этот момент вызванное волной давление приводит

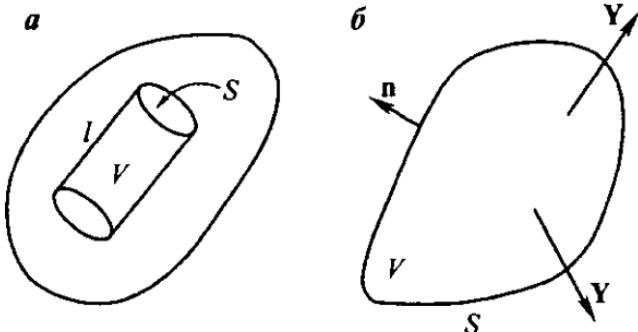


Рис. 4.4. Иллюстрация формул (4.93) и (4.103) (*a*); иллюстрация выражения (4.107) (*b*)

к смещению частиц вблизи границы объема, и по прошествии некоторого времени другие частицы объема также вовлекаются в это движение. В момент времени, когда волна достигает правой границы объема, все составляющие его частицы движутся с одинаковой скоростью. Причиной этого является то, что в среде, расположенной справа за малым объемом, возникает сила, которая имеет ту же величину, что и сила с левой стороны от объема, но противоположное направление.

Таким образом, в результате воздействия волны объем деформируется, причем его частицы движутся с одинаковыми скоростями вдоль оси x . Поэтому полная энергия объема состоит из кинетической (E) и потенциальной (U) энергии.

ПЛОТНОСТЬ КИНЕТИЧЕСКОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Полагая скорость частиц равной v_x , для кинетической энергии объема имеем

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 \quad (4.92)$$

или

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 V, \quad (4.93)$$

поскольку

$$m = \rho_0 V \text{ и } v^2 = v_x^2 \mathbf{i}^2 = v_x^2.$$

Легко показать, что выражение (4.93) справедливо и в общем случае, когда смещение s ориентировано произвольным образом относительно оси x и имеет все три ненулевые компоненты: s_x , s_y и s_z . Действительно, в этом случае кинетическая энергия

$$E = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{m v_y^2}{2} + \frac{m v_z^2}{2},$$

где каждый член суммы описывает энергию движения вдоль соответствующей координатной оси. Последнее выражение можно заменить на соотношение

$$E = \frac{m \mathbf{v}^2}{2} = \rho_0 \frac{\mathbf{v}^2}{2} V, \quad (4.94)$$

которое совпадает с выражением (4.93).

Здесь \mathbf{v} обозначает вектор скорости

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Кинетическая энергия распределена в объеме равномерно, поскольку все частицы объема движутся с одинаковой скоростью, и плотность ρ_0 среды внутри объема постоянная.

Далее, в соответствии с равенством (4.94), имеем для плотности энергии

$$e_k = \frac{\rho_0}{2} v^2 \quad \text{или} \quad e_k = \frac{\rho_0}{2} \cdot \dot{s}^2. \quad (4.95)$$

Плотность e_k характеризует величину кинетической энергии единичного объема, которая равна половине произведения плотности среды на квадрат скорости. Функция e_k , конечно же, зависит от времени и координат точки наблюдения.

Как мы знаем, волна приводит не только к движению объема как единого целого, но и к его деформации. Другими словами, часть работы силы, возникающей при распространении волны, запасается в виде потенциальной энергии. В этом смысле аналогия между движениями элементарного объема и системы пружин и грузов очевидна.

Чтобы найти выражение для потенциальной энергии элементарного объема, имеющего поперечное сечение S и длину l , предположим, что деформация является однородной. Это означает, что во всех точках элементарного объема давление P_a и деформация ds_x/dx имеют одни и те же значения:

$$P_a = \text{const}, \quad ds_x/dx = \text{const} \quad (4.96)$$

и связаны между собой как

$$P_a = -K \frac{ds_x}{dx} = -Ke_{xx}. \quad (4.97)$$

В этом выражении предполагается, что смещение меняется линейно вдоль оси x . В частности, имеем

$$e_{xx} = x/l. \quad (4.98)$$

Здесь x – это смещение левой границы объема, на которую волна падает в начальный момент времени.

Как было показано в главе 1, соотношение между работой силы, приложенной к левой границе объема, и потенциальной энергией можно записать как

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = U(p_1) - U(p_2), \quad (4.99)$$

где точки p_1 и p_2 характеризуют положение этой границы.

Естественно теперь предположить, что до появления волны потенциальная энергия равнялась нулю. Тогда вместо (4.99) получим

$$U(s_x) = - \int_0^{s_x} F_x dx. \quad (4.100)$$

Поскольку

$$F_x = P_a S,$$

выражение (4.100) можно переписать как

$$U(s_x) = -S \int_0^s P_a dx. \quad (4.101)$$

Очевидно, что в течение процесса деформирования объема давление P_a и деформация e_{xx} не остаются постоянными.

Используя равенства (4.97) и (4.98), получим

$$U = K S \int_0^s e_{xx} dx \quad (4.102)$$

или

$$U = \frac{K}{l} S \int_0^s x dx = \frac{K s_x^2}{2l} S. \quad (4.103)$$

Таким образом,

$$U = \frac{K s_x^2}{2l^2} S l = \frac{K}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right)^2 V.$$

По определению, в одномерном случае ($s = s_x \mathbf{i}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \partial s_x / \partial x$$

и, следовательно, плотность потенциальной энергии имеет вид

$$e_p = \frac{K}{2} (\operatorname{div} \mathbf{s})^2. \quad (4.104)$$

Поскольку дивергенция векторного поля характеризует плотность его источников, она не зависит от ориентации координатных осей и от выбора системы координат (см. приложение 3). Таким образом, равенство (4.104) остается верным и в общем случае, когда вектор \mathbf{s} имеет все три ненулевые компоненты.

Из изложения видно, что полная энергия элементарного объема V равняется

$$W = U + E$$

или

$$W = \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{K}{2} \operatorname{div}^2 \mathbf{s} \right) V. \quad (4.105)$$

Соответственно, полная плотность энергии в окрестности некоторой точки дается следующим выражением:

$$e(p, t) = \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{K}{2} \operatorname{div}^2 \mathbf{s}. \quad (4.106)$$

Отсюда, например, можно представить такие точки, в которых плотности потенциальной и кинетической энергий в некоторый момент времени могут либо обращаться в ноль, либо достигать своих максимальных значений.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Как следует из выражения (4.106), полная энергия произвольного объема (рис 4.4, б) дается выражением

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V [\rho_0 \mathbf{v}^2 + K \operatorname{div}^2 \mathbf{s}] dV. \quad (4.107)$$

Причиной изменения полной энергии могут служить следующие три фактора:

- 1) наличие внешних (первичных) источников волн внутри самого объема V ;
- 2) превращение этой энергии в тепло;
- 3) поток энергии через поверхность объема.

Тогда согласно принципу сохранения энергии имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L - Q - \oint_S \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.108)$$

Здесь L – это количество кинетической и потенциальной энергии, созданной внешними источниками в единицу времени, Q – количество механической энергии, перешедшей в тепло (также в единицу времени).

Последний член в правой части равенства (4.108)

$$\oint_S \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.109)$$

называется потоком энергии. Он определяет количество энергии, передающейся через поверхность S объема за одну секунду. Вектор \mathbf{Y} характеризует плотность потока энергии и играет ту же роль, что и плотность тока \mathbf{j} при изучении электрического тока.

Таким образом, поток равняется количеству энергии, переносимой через элементарную поверхность единичной площади за одну секунду. При этом важно, чтобы эта поверхность была перпендикулярна вектору \mathbf{Y} , который так же, как и в случае электромагнитных полей называется вектором Пойнгтинга.

По определению, в системе единиц СИ

$$[Y] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Поскольку вектор $d\mathbf{S}$ направлен в сторону от объема, положительное значение потока означает, что объем теряет энергию, и, наоборот, энергия внутри объема увеличивается, если поток энергии является отрицательным. В общем случае в разных точках поверхности S вектор Пойнтинга имеет различную амплитуду и направление. В частности, в некоторых точках он может быть направлен внутрь объема, а в других иметь направление в сторону от объема или параллельно его поверхности.

Выразим теперь вектор потока энергии \mathbf{Y} через давление и скорость частиц. Для упрощения выкладок предположим, что среда внутри объема однородная, а внешние источники энергии отсутствуют. Также пренебрежем эффектом перехода механической энергии объема в тепло, т.е.

$$L = Q = 0.$$

Тогда вместо (4.108) можно записать

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.110)$$

Очевидно, что в этом случае причиной любого изменения энергии W может быть только поток энергии.

Так, например, если поток через поверхность S является положительным, производная $\partial W / \partial t$ отрицательна, и, следовательно, количество энергии внутри объема уменьшается.

Сначала выразим смещения через скалярный потенциал и выполним некоторые другие довольно простые алгебраические действия. Принимая во внимание тот факт, что в однородной среде векторное поле смещений \mathbf{s} представляет собой поле источников (см. приложение 3), $\text{rot } \mathbf{s} = 0$, мы снова можем ввести потенциал ϕ :

$$\mathbf{s} = \text{grad } \phi = \nabla \phi.$$

Отсюда выражения для плотности кинетической и потенциальной энергий можно записать в виде

$$e_k = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \phi)^2 \quad (4.111)$$

и

$$e_p = \frac{1}{2} K \text{div}^2 \mathbf{s} = \frac{K}{2} (\nabla^2 \phi)^2,$$

поскольку

$$\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi.$$

Подстановка формул (4.111) в равенство (4.107) дает следующее выражение для полной энергии объема V :

$$W = \int_V \left[\frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{K}{2} (\nabla^2 \phi)^2 \right] dV, \quad (4.112)$$

где

$$\dot{\phi} = \partial \phi / \partial t.$$

Дифференцируя равенство (4.112) по времени, получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V [\rho_0 \nabla \dot{\phi} \cdot \nabla \ddot{\phi} + \rho_0 c^2 \nabla^2 \phi \nabla^2 \dot{\phi}] dV, \quad (4.113)$$

поскольку

$$K = \rho_0 c^2$$

и c является фазовой скоростью волны, причем

$$\ddot{\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Поскольку скалярный потенциал удовлетворяет уравнению движения
 $\nabla^2 \phi = \ddot{\phi} / c^2$,

формулу (4.113) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \rho_0 \int_V [\nabla \dot{\phi} \cdot \nabla \ddot{\phi} + \ddot{\phi} \nabla^2 \dot{\phi}] dV. \quad (4.114)$$

Стоящее здесь подынтегральное выражение можно упростить. Действительно, используя тождество

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \nabla^2 b$$

и вводя обозначения

$$a = \ddot{\phi} \text{ и } b = \dot{\phi},$$

получим

$$\nabla \cdot (\ddot{\phi} \nabla \dot{\phi}) = \nabla \ddot{\phi} \cdot \nabla \dot{\phi} + \ddot{\phi} \nabla^2 \dot{\phi}.$$

Таким образом, вместо равенства (4.113) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \rho_0 \int_V [\operatorname{div}(\ddot{\phi} \nabla \dot{\phi})] dV. \quad (4.115)$$

Как было показано в предыдущем разделе,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \dot{\phi} \text{ и } P_a = -\rho_0 \ddot{\phi}.$$

Соответственно, выражение (4.115) можно записать как

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \operatorname{div}(P_a \mathbf{v}) dV. \quad (4.116)$$

Теперь, применяя теорему Гаусса (см. приложение 3)

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S},$$

выразим скорость изменения энергии $\partial W / \partial t$ через поверхностный интеграл:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S P_a v dS, \quad (4.117)$$

где S – поверхность объема V .

Наконец, из формул (4.110) и (4.117) получаем

$$\oint_S (Y - P_a v) dS = 0. \quad (4.118)$$

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Мы удовлетворим уравнению (4.118), если положим

$$Y = P_a v. \quad (4.119)$$

Безусловно, можно представить себе бесконечное число векториальных функций, описывающих вектор Y , которые также будут являться решениями уравнения (4.118). Учитывая, что равенство (4.118) выполняется для произвольной поверхности S , приходим к выводу, что подынтегральное выражение в этой формуле равно нулю. Другими словами, вектор Пойнтинга равен произведению избыточного давления и скорости. Отсюда следует, что если давление P_a положительно, то векторы v и Y направлены в одну сторону. И наоборот, в окрестности тех точек, где давление P_a отрицательное, вектор Пойнтинга и вектор скорости имеют противоположные направления. Можно сказать, что вектор Пойнтинга позволяет наглядно представить распространение волны как перенос энергии.

Рассматривая поведение давления и смещения в окрестности границы раздела двух сред с разными параметрами, мы видели, что

$$P_1 = P_2 \text{ и } s_{1n} = s_{2n}, \quad (4.120)$$

в то время как тангенциальная компонента смещения может иметь разрыв.

Вместо равенств (4.120) можно записать

$$P_1 = P_2 \text{ и } v_{1n} = v_{2n}.$$

Таким образом, нормальная компонента вектора Y является в окрестности границы непрерывной функцией, а тангенциальная компонента этого вектора обычно претерпевает разрыв:

$$Y_{1n} = Y_{2n} \text{ и } Y_{1t} \neq Y_{2t}. \quad (4.121)$$

Последнее соотношение показывает, что по обе стороны границы вектор Пойнтинга имеет разные амплитуды и направления.

По определению (см. приложение 3), вектор Пойнтинга направлен по касательной к векторной линии (линии тока) поля (рис. 4.5, a), а семейство таких линий образует геометрическую модель этого поля. Представим себе произвольную замкнутую кривую l , не совпадающую с векторной линией ни

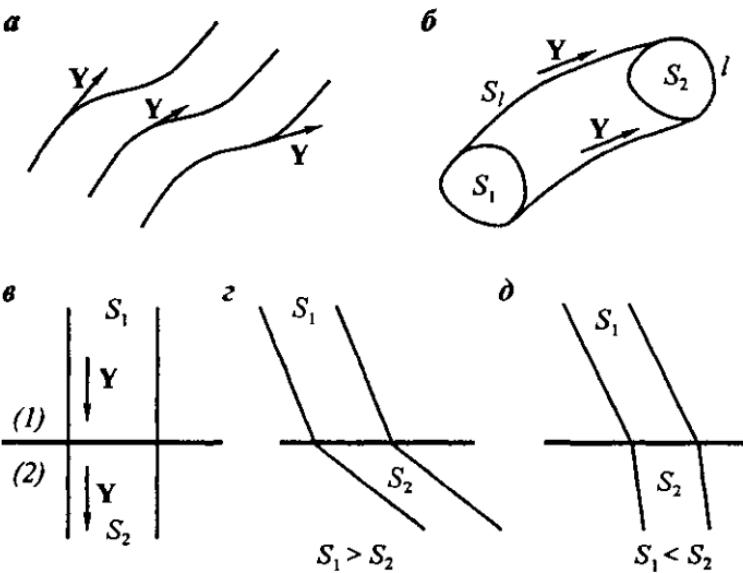


Рис. 4.5. Линии тока вектора Пойнтинга (а); векторные трубы вектора Пойнтинга (б); нормальное падение волны (в); поведение векторных трубок \mathbf{Y} на границе раздела (г, д)

в одной точке и проведем через каждую точку этой кривой векторную линию (рис. 4.5, б). Таким образом, мы получим векторную трубку поля \mathbf{Y} .

Поскольку горизонтальная поверхность S_1 образована векторными линиями, вектор Пойнтинга направлен по касательной к этой поверхности:

$$Y_n = 0 \text{ на } S_1. \quad (4.122)$$

Другими словами, поток энергии через поверхность S_1 равен нулю, и это означает, что поток энергии через любое поперечное сечение векторной трубы остается постоянным. В общем случае вектор Пойнтинга изменяется вдоль трубы, т.е. может иметь различные значения в разных точках сечений трубы. В то же время, поскольку амплитуда вектора Пойнтинга меняется вдоль сечений незначительно, этими различиями можно пренебречь.

Такая векторная трубка называется элементарной, поток энергии внутри трубы

$$Y(p_1)S(p_1) = Y(p_2)S(p_2) = \dots = \text{const.} \quad (4.123)$$

Здесь $Y(p)$ обозначает амплитуду вектора Пойнтинга.

Таким образом, величина \mathbf{Y} обратно пропорциональна площади сечения:

$$Y \sim 1/S. \quad (4.124)$$

Рассмотрим поведение такой трубы на границе раздела двух сред. Сначала предположим, что тангенциальная компонента скорости равняется нулю (рис. 4.5, в). Поскольку модуль вектора \mathbf{Y} остается неизменным, площадь поперечного сечения также не должна меняться:

$$S_1 = S_2.$$

Рассмотрим другой случай (рис. 4.5, 2), при котором тангенциальная компонента смещений и, следовательно, тангенциальная компонента скорости удовлетворяет следующему условию:

$$v_{2r} > v_{1r}.$$

В соответствии с этим условием, амплитуда вектора Пойнтинга во второй среде увеличивается. Поскольку поток энергии в трубке остается постоянным, отсюда делаем вывод, что

$$S_2 < S_1.$$

Наконец, рассмотрим последний случай, при котором $v_{2r} < v_{1r}$ (рис. 4.5, 3). В этом случае поперечное сечение элементарной трубы во второй среде увеличивается:

$$S_2 > S_1.$$

4.4. ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Как уже упоминалось ранее, исходя только из физических законов, управляющих поведением волн, или, что эквивалентно, основываясь только на волновом уравнении, нельзя однозначно определить давление P_n и скорости частиц v , возникающие при распространении волн. Причина этого заключается в том, что волновое уравнение имеет бесконечно много решений. Учитывая это, необходимо сформулировать граничную задачу (см. приложение 3). Другими словами, необходимо задать такие условия, которые вместе с волновым уравнением определяли бы волновое поле единственным образом. Аналогичный подход используется для электрических, магнитных и электромагнитных полей. Чтобы решить эту проблему, мы докажем теорему единственности для случая распространения волны в кусочно-однородной среде.

Как было показано в разделе 4.2, в регулярных точках функции $P(p, t)$ и $v(p, t)$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 v = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4.125)$$

а на границах сред давление и нормальная компонента скорости являются непрерывными функциями (рис. 4.6, а):

$$P_i = P_{i+1} \quad \text{и} \quad v_{n,i} = v_{n,i+1}. \quad (4.126)$$

В то же время тангенциальная компонента скорости v_t может на этих границах претерпевать разрыв. Здесь следует сделать два замечания:

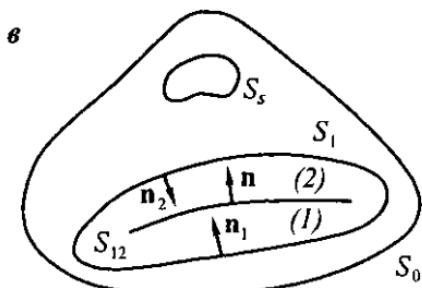
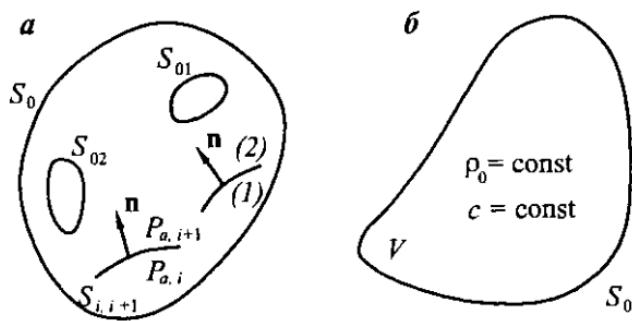


Рис. 4.6. Иллюстрация теоремы единственности

а) второе из уравнений (4.125) получено с помощью дифференцирования по времени волнового уравнения для смещения s ;

б) для упрощения формул мы везде опустили нижний индекс a :

$$P_a = P. \quad (4.127)$$

Уравнения (4.125) и (4.126) описывают поведение волн дилатации в кусочно-однородной среде, за исключением тех точек, где располагаются первичные источники этих волн. Отсюда следует, что эти уравнения имеют бесконечно много решений, т.е. они не определяют волновое поле однозначно. Чтобы определить функции P и v , необходимо иметь о них дополнительную информацию, которую обычно можно получить исходя из конкретной задачи.

В этом смысле существует полная аналогия с формулировками граничных задач для других геофизических полей. Чтобы получить необходимую информацию, мы начнем с принципа сохранения энергии и рассмотрим несколько моделей среды и волновых полей.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Предположим, что среда, заключенная в объеме V (рис. 4.6, б), является однородной, и в ней отсутствует затухание. Кроме того, предположим также, что нет никаких внешних генераторов волнового поля. Тогда, как следует из уравнения (4.117),

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_{S_0} P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (4.128)$$

где S_0 – это замкнутая поверхность объема V , а

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left(\rho_0 \mathbf{v}^2 + \frac{P^2}{K} \right) dV \quad (4.129)$$

– полная энергия, заключенная в данном объеме, которая является величиной неотрицательной.

Существенно, что уравнение (4.128) связывает волновые поля внутри объема и на его поверхности. Именно поэтому оно используется для доказательства теоремы единственности. Интуитивно понятно, что давление и скорость частицы в каждой точке объема V в некоторый момент времени t зависят от поведения волны внутри и вне объема в моменты времени, предшествующие t . Зафиксируем некоторый начальный момент времени t_0 и будем далее рассматривать поведение волн в моменты времени t :

$$t \geq t_0.$$

Для того чтобы однозначно определить параметры волны в момент времени t , необходимо иметь информацию о волновом поведении в интервале времени

$$t_0 < t_* < t.$$

Чтобы определить условия, необходимые для единственности, рассмотрим два произвольных решения волновых уравнений:

$$\mathbf{v}_1, P_1 \text{ и } \mathbf{v}_2, P_2.$$

Поскольку уравнения (4.125) являются линейными, разности

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \text{ и } P_3 = P_2 - P_1 \quad (4.130)$$

также являются решениями уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{v}_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_3}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 P_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}, \quad (4.131)$$

и, следовательно, равенство (4.128) можно записать в виде

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \oint_{S_0} P_3 v_{3n} dS = 0. \quad (4.132)$$

Здесь W_3 – полная энергия разностного поля, а P_3 и v_{3n} обозначают, соответственно, избыточное давление и нормальную компоненту скорости на поверхности S_0 .

Предположим теперь, что оба решения (4.130) имеют одинаковые значения избыточного давления во всех точках поверхности S_0 , т.е.

$$P_1(p, t_*) = P_2(p, t_*) = f_1(p, t_*) \text{ на } S_0. \quad (4.133)$$

В этом случае давление P_3 , разностного поля на поверхности S_0 всегда равняется нулю:

$$P_3(p, t_*) = 0 \quad \text{на } S_0 \quad (4.134)$$

и, в соответствии с уравнением (4.132), поток вектора Пойнтига через эту поверхность также имеет нулевое значение.

Таким образом,

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = 0, \quad (4.135)$$

и сумма кинетической и потенциальной энергий разностного поля в указанном интервале времени остается постоянной.

Пусть в дополнение к этому известно волновое поле в начальный момент времени t_0 :

$$P(p, t_0) = \Psi(p, t_0) \text{ и } \mathbf{v}(p, t_0) = \mathbf{N}(p, t_0). \quad (4.136)$$

Если оба решения: P_1, \mathbf{v}_1 и P_2, \mathbf{v}_2 удовлетворяют условиям (4.136), то разностные поля P_3, \mathbf{v}_3 в этот момент времени равны нулю в каждой точке объема V :

$$P_3(p, t_0) = 0, \quad \mathbf{v}_3(p, t_0) = 0. \quad (4.137)$$

Таким образом, полная энергия E_3 также равняется нулю:

$$W_3(p, t_0) = 0. \quad (4.138)$$

Затем, учитывая выражение (4.135), мы делаем вывод, что функция W_3 остается равной нулю:

$$W_3(p, t_*) = 0, \quad (4.139)$$

при условии, что $t \geq t_0$.

Поскольку полная энергия является суммой двух положительных слагаемых, которые описывают кинетическую и потенциальную энергию (см. формулу 4.129), равенство (4.139) выполняется, если

$$P_3(p, t_*) = 0 \text{ и } \mathbf{v}_3(p, t_*) = 0.$$

По определению разностного поля (4.130) это означает, что

$$P_1(p, t_*) = P_2(p, t_*) \text{ и } \mathbf{v}_1(p, t_*) = \mathbf{v}_2(p, t_*). \quad (4.140)$$

Таким образом, два решения волновых уравнений, удовлетворяющие условиям (4.133) и (4.136), совпадают друг с другом, т.е. эти решения единственным образом определяют волновые поля внутри объема V . Другими словами, мы доказали теорему единственности, и граничную задачу теперь можно сформулировать следующим образом:

а) внутри объема V , где все точки являются регулярными, имеем

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2};$$

б) в каждой точке поверхности S_0 избыточное давление должно совпадать со следующей функцией:

$$P(p, t_*) = f_1(p, t_*) \text{ на } S_0; \quad (4.141)$$

в) в начальный момент времени t_0 давление P и скорость v должны быть известны в каждой точке данного объема:

$$P(p, t_0) = \psi(p, t_0) \text{ и } v = N(p, t_0).$$

В соответствии с теоремой единственности эти три условия однозначно определяют волну в каждой точке объема, показанного на рис. 4.6, б.

Здесь необходимо сделать следующие замечания.

Условие (4.141) называется граничным условием, и для него требуется знать давление в каждой точке замкнутой поверхности на интервале времени

$$t_0 \leq t_* \leq t.$$

Это граничное условие позволяет учесть влияние источников, расположенных вне объема V .

В отличие от граничного условия, выражение (4.136) определяет начальные условия, означающие, что в начальный момент времени t_0 необходимо знать давление P и скорость v в каждой точке объема. Информация, необходимая для задания граничных и начальных условий, определяется обычно из свойств конкретной задачи. Объем V может быть окружен несколькими поверхностями: $S_0, S_{01}, S_{02}, \dots, S_{0n}$ (см. рис. 4.6, а), и давление должно быть известно на каждой из этих поверхностей.

Предположим, что на поверхности S_0 вместо давления задана нормальная компонента скорости:

$$v_n(t_*) = f_2(t_*) \text{ на } S_0. \quad (4.142)$$

Если мы снова рассмотрим два решения волнового уравнения, удовлетворяющие условию (4.142), поверхностный интеграл в выражении (4.132) для разностного поля также обратится в нуль. Отсюда следует, что это граничное условие вместе с начальным условием также однозначно определяют волновое поле.

Исходя из теоремы единственности, мы получили два независимых граничных условия:

$$P(t_*) = f_1(t_*) \text{ или } v_n(t_*) = f_2(t_*) \text{ на } S_0.$$

Каждое из них можно использовать для формулировки граничной задачи.

2. Рассмотрим теперь более общий случай кусочно-однородной среды, заполняющей объем V . Для простоты предположим, что существует единственная внутренняя граница S_{12} (рис. 4.6, в), по обе стороны от которой физические свойства среды (ρ, c) могут различаться. Принимая это во внимание, нарисуем вокруг этой границы поверхность S_1 . Тогда для объема V' , заключенного внутри поверхностей S_0 и S_1 , мы снова имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint_{S_0} Pv_n dS + \oint_{S_1} Pv_n dS = 0. \quad (4.143)$$

В пределе, когда поверхность S_1 стремится к поверхности S_{12} , объем V стремится к V , и следовательно, в последнем слагаемом (4.143) нужно интегрировать по обеим сторонам поверхности S_{12} .

Учитывая направления единичных векторов n , n_1 и n_2 ,

$$n = n_1, \text{ но } n = -n_2,$$

показанных на рисунке 4.6, в, получим

$$\oint_{S_1} Pv_n dS = \int_{S_{12}} \left[P^{(1)} v_n^{(1)} - P^{(2)} v_n^{(2)} \right] dS, \quad (4.144)$$

где $P^{(1)}$, $v_n^{(1)}$ и $P^{(2)}$, $v_n^{(2)}$ обозначают давление и нормальную компоненту скорости соответственно на задней и лицевой поверхности.

Из законов физики следует, что обе эти функции являются непрерывными при переходе через поверхность раздела и, следовательно, решения волнового уравнения также должны удовлетворять равенствам (4.126). Поэтому интеграл (4.144) обращается в нуль, и мы снова приходим к уравнению (4.128). Таким образом, в соответствии с теоремой единственности, в формулировку граничной задачи необходимо включить еще одно условие, а именно условие непрерывности избыточного давления P и нормальной компоненты скорости v_n на внутренней границе. Очевидно, что точно так же будет формулироваться задача с граничными условиями при наличии нескольких границ раздела $S_{i,i+1}$ и поверхностей S_{oi} , окружающих объем V . Следует отметить, что граничные условия могут различаться на разных поверхностях S_{oi} , а также в различных точках одной и той же поверхности S_{oi} .

Сделаем еще одно замечание. То, что граничные и начальные условия определяют единственным образом волновое поле, означает, прежде всего, наличие определенных соотношений между этими условиями и волновым полем в каждой точке объема V . В дальнейшем этот вопрос будет обсуждаться более подробно, что приведет нас к известным формулам Гельмгольца и Кирхгоффа.

3. До сих пор предполагалось, что первичные (внешние) источники волн внутри объема V отсутствуют. Рассмотрим теперь более общий случай, когда внутри указанного объема находится некоторый источник. Окружим этот источник замкнутой поверхностью S_3 (рис. 4.6, в) и снова применим закон сохранения энергии к волновому полю, возникающему в объеме V^* , заключенному внутри поверхностей S_0 , S_{12} и S_3 . В частности, для разностного поля имеем

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \oint_{S_0} Pv_{3n} dS + \oint_{S_{12}} Pv_{3n} dS + \oint_{S_3} Pv_{3n} dS = 0. \quad (4.145)$$

Очевидно, что в случае поверхности S_0 последний интеграл равняется нулю:

$$\oint_{S_0} Pv_{3n} dS = 0, \quad (4.146)$$

если давление либо нормальная компонента скорости заданы на поверхности S_r . В этом случае уравнения (4.145) и (4.143) совпадают. Таким образом, решение граничной задачи, т.е. волновое поле, должно удовлетворять следующим условиям:

а) в регулярных точках кусочно-однородной среды:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2};$$

б) на поверхности S_s , окружающей источник:

$$P(t_*) = f_{1s}(t_*) \text{ или } v_n(t_*) = f_{2s}(t_*) \text{ на } S_s;$$

в) на границе раздела $S_{i,i+1}$:

$$P_i = P_{i+1} \text{ и } v_{n,i} = v_{n,i+1};$$

г) на границе S_0 , окружающей объем, должно быть известно давление P или нормальная компонента скорости v_n :

$$P(t_*) = f_1(t_*) \text{ или } v_n(t_*) = f_2(t_*) \text{ на } S_0;$$

д) в начальный момент времени t_0 в каждой точке объема должны быть известными избыточное давление и скорость:

$$P(p, t_0) = \psi(p, t_0) \text{ и } \mathbf{v}(p, t_0) = \mathbf{N}P(p, t_0).$$

Как следует из теоремы единственности, все перечисленные условия определяют волновое поле единственным образом.

Очень часто оказывается возможным вместо реального источника использовать его подходящую модель, например точечный или линейный источник. Такая замена, как правило, не влияет на поведение волн на расстояниях, в несколько раз превышающих размеры источника. Однако такие модели значительно упрощают граничные условия вблизи него. Как будет показано в дальнейшем, давление и скорость частицы вблизи таких источников увеличиваются до бесконечности, и, следовательно, полное волновое поле определяется только самим источником:

$$P(p, t_*) \rightarrow P_p(p, t_*) \text{ или } v_n(p, t_*) \rightarrow v_{np}(p, t_*), \text{ если } R \rightarrow 0, \quad (4.147)$$

где P_p и v_{np} описывают первичную волну от точечного или линейного источника, а R обозначает расстояние между источником и точкой наблюдения. Асимптотические соотношения (4.147) в дальнейшем будут часто использоваться в качестве граничных условий вблизи источника.

Полезно также отметить следующее. При изучении волнового поля во всем пространстве поверхность S_0 нужно устремить к бесконечности (рис.

4.6, в). В этом случае ее можно рассматривать как поверхность сферы бесконечного радиуса. Поскольку волны распространяются с конечной скоростью c , можно предположить, что волновое поле на этой поверхности отсутствует. Соответствующее граничное условие запишется в виде выражения

$$P(t_*) \rightarrow 0 \text{ и } \mathbf{v}(t_*) \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow \infty, \quad (4.148)$$

которое называется условием на бесконечности. В действительности начальные условия уже содержат эту информацию, и, следовательно, нет необходимости использовать асимптотические соотношения (4.148).

В регулярных точках кусочно-однородной среды скорости частиц и смещения являются полями источников. Поэтому естественно сформулировать граничные условия в терминах скалярного потенциала ϕ . Как мы уже знаем, скалярный потенциал удовлетворяет волновому уравнению и связан со смещением частиц и избыточным давлением следующими соотношениями:

$$\mathbf{s} = \text{grad } \phi \text{ и } P = -\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Учитывая эти равенства, граничную задачу для потенциала можно сформулировать следующим образом:

а) в регулярных точках среды:

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2};$$

б) в окрестности первичного источника:

$$\phi(p, t_*) \rightarrow \phi_p(p, t_*), \text{ если } R \rightarrow 0,$$

где ϕ_p – скалярный потенциал первичной волны от точечного или линейного источника;

в) на границе двух сред с различными физическими свойствами:

$$\rho_i \phi_i(t_*) = \rho_{i+1} \phi_{i+1}(t_*) \text{ и } \frac{\partial \phi_i(t_*)}{\partial n} = \frac{\partial \phi_{i+1}(t_*)}{\partial n},$$

г) на любой граничной поверхности должны быть известны скалярный потенциал или нормальная компонента скорости:

$$\phi(t_*) = \alpha(t_*) \text{ или } \frac{\partial \phi_i(t_*)}{\partial n} = \beta_i(t_*);$$

д) в начальный момент времени в каждой точке объема должны быть известны скалярный потенциал и его вторая производная по времени:

$$\phi(p, t_0) = \alpha_0(p) \text{ и } \frac{\partial \phi(p, t_0)}{\partial t^2} = \beta_0(p),$$

поскольку эти две величины определяют скорость и давление.

ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН

Из-за наличия начальных условий решение граничной задачи обычно оказывается довольно трудной задачей. Это одна из главных причин, из-за которой мы рассмотрим случай, когда волны являются синусоидальными функциями времени. Тогда скалярный потенциал можно представить как

$$\Phi(p, t) = \operatorname{Re}[\Phi(p, \omega)e^{-i\omega t}], \quad (4.149)$$

где $\Phi(p, \omega)$ – комплексная амплитуда потенциала, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi(p, \omega) + k^2 \Phi(p, \omega) = 0.$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число.

Перед тем, как сформулировать граничную задачу, заметим следующее:

а) по определению, комплексная амплитуда $\Phi(p, \omega)$ не зависит от времени и, следовательно, отпадает необходимость использовать начальные условия. По этой причине определение синусоидальных волн значительно легче, чем определение нестационарных (бегущих) волн;

б) очевидно, что из непрерывности давления и нормальной компоненты скорости следует непрерывность комплексных амплитуд.

В соответствии с этим, граничную задачу для комплексных амплитуд можно сформулировать следующим образом.

1. В регулярных точках

$$\nabla^2 \Phi_i + k_i^2 \Phi_i = 0.$$

2. Вблизи точечного или линейного источника

$$\Phi \rightarrow \Phi_p, \text{ если } R \rightarrow 0.$$

3. На внутренней границе

$$\rho_i \Phi_i = \rho_{i+1} \Phi_{i+1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial n}.$$

4. В случае бесконечного пространства функция $\Phi^*(p, \omega)$ стремится к нулю на бесконечности:

$$\Phi(p, \omega) \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow \infty,$$

и ее поведение подчиняется определенному правилу (условию Зоммерфельда), которое мы рассмотрим позднее.

Как уже отмечалось, в результате решения данной граничной задачи и последующего использования интеграла Фурье мы можем также найти выражения для нестационарных волн.

4.5. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ

Ранее мы рассмотрели примеры продольных и поперечных волн, в которых вектор смещения s направлен либо параллельно, либо перпендикулярно вектору скорости волны s . В обоих случаях распространение волны сопровождалось определенными деформациями среды и, как следствие, появлением внутренних (восстанавливающих) сил.

Рассмотрим теперь абсолютно другой тип волн, которые возникают в жидкости в том случае, когда она граничит с воздухом (имеет свободную поверхность). При распространении такой волны форма элементарного объема среды изменяется, но это не приводит к появлению внутренних сил. В то же время сила гравитации играет в этом случае ту же роль, что и внутренняя сила при распространении волн дилатации. Изложенные здесь сведения могут быть полезны при изучении волн Рэлея и Стонли, так как эти волны имеют некоторые общие черты с гравитационными волнами.

Рассмотрим однородное полупространство, заполненное идеальной несжимаемой жидкостью (вязкость идеальной жидкости равняется нулю). Как это следует из рис. 4.7, *a*, в состоянии равновесия давление жидкости определяется следующим образом:

$$P(z + \Delta z) = P(z) + \rho_0 g \Delta z.$$

Здесь z – расстояние от свободной поверхности: $z = 0$, а слагаемое $\rho g \Delta z$ характеризует вес элементарного объема жидкости ΔV , имеющего высоту Δz и единичную площадь поперечного сечения.

Таким образом, в состоянии равновесия давление линейно зависит от глубины.

Предположим далее, что в окрестности некоторой точки на поверхности $z = 0$ образуется впадина, например, вследствие падения какого-нибудь тела. В результате этого частицы не могут двигаться только по вертикали или только по горизонтали, поскольку жидкость несжимаема и ее масса по обе стороны впадины является бесконечной. Вокруг впадины формируется гребень, и, в соответствии с принципом сохранения массы, в этом гребне содержится такое же количество жидкости, какое первоначально занимало объем впадины.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Очевидно, что теперь, в отличие от состояния равновесия, давление изменяется и вдоль горизонтального направления и зависимость давления по глубине уже не является линейной. Из-за этого движение частиц жидкости происходит с ускорением. В частности, под действием силы гравитации частицы гребня движутся вниз и в результате на его месте также образуется впадина. Как следствие, гребни и впадины образуются на более далеких расстояниях и таким образом возникает волна, распространяющаяся в сторону от точки своего зарождения.

Такая волна называется гравитационной из-за роли, которую в ней играет гравитационное поле.

В дальнейшем нам понадобятся следующие предположения:

- жидкость является идеальной, т.е. ее вязкость считается равной нулю;
- жидкость является несжимаемой: $K \rightarrow \infty$;
- амплитуды смещений s малы по сравнению с длиной волны.

Изучение гравитационных волн естественно начать со следующей системы уравнений, полученной в разделе 4.1:

$$\operatorname{div} s = -\frac{P_a}{K} \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P + \rho_0 g$$

или, поскольку жидкость является несжимаемой,

$$\operatorname{div} s = 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\nabla P + \rho_0 g. \quad (4.150)$$

Здесь целесообразно заметить следующее:

а) ускорение частиц элементарного объема вызвано двумя причинами: гравитационным полем и разностью давлений;

б) в случае волн дилатации разность давлений является единственной причиной, которая приводит к появлению избыточной плотности массы. В случае гравитационных волн эта избыточная плотность ρ_a равняется нулю, а разность давлений возникает из-за вертикального движения частиц вблизи свободной поверхности и ниже.

Согласно уравнениям (4.150), в регулярных точках выполняются следующие равенства:

$$\operatorname{rot} s = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} s = 0, \quad (4.151)$$

т.е. внутри жидкости отсутствуют источники и вихри поля s .

Геометрическая интерпретация уравнений (4.151) состоит в том, что гравитационное поле не приводит к изменению объема ($\operatorname{div} s = 0$) и у поля смещений отсутствуют вращения и простые сдвиги ($\operatorname{rot} s = 0$).

Вместо смещения s , удобнее использовать скорость частицы v . Дифференцируя уравнения (4.151) по времени, получим

$$\operatorname{rot} v = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (4.152)$$

Как известно, из первого уравнения этой системы следует, что

$$v = \operatorname{grad} \phi_1, \quad (4.153)$$

где ϕ_1 – скалярный потенциал поля v .

Подстановка уравнения (4.153) во второе уравнение (4.151) дает

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi_1 = 0$$

или

$$\nabla^2 \phi_1 = 0. \quad (4.154)$$

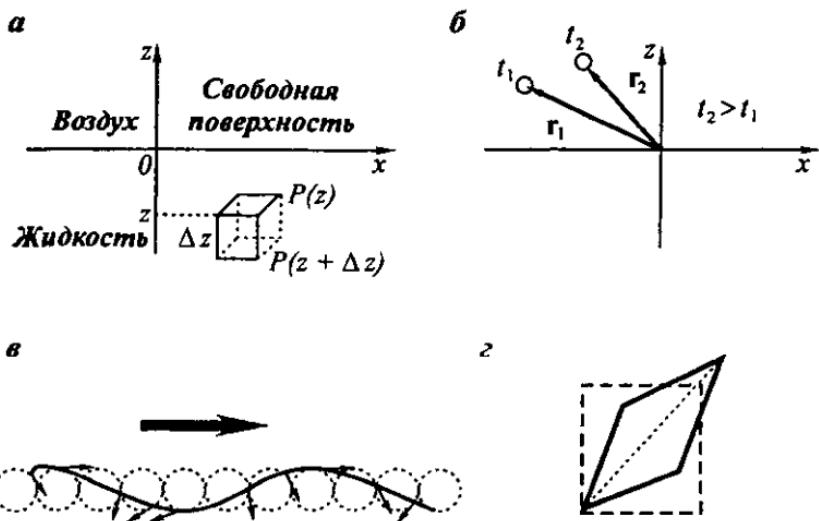


Рис. 4.7. Давление в положении равновесия (a); движение частиц во времени (b); распространение поверхностной волны (c); деформация элементарного объема (d)

Таким образом, скалярный потенциал ϕ_1 в регулярных точках удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в декартовых прямоугольных координатах (рис. 4.7, a) записывается как

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (4.155)$$

Это уравнение выполняется во всех точках полупространства, за исключением свободной поверхности $z = 0$.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Чтобы изучить поведение потенциала на свободной поверхности, воспользуемся уравнением (4.150), представляющим собой формулировку второго закона Ньютона. Вводя скорость частицы

$$\mathbf{v} = \partial \mathbf{s} / \partial t$$

и используя уравнение (4.153), получим

$$\rho_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\operatorname{grad} P + \rho_0 \mathbf{g}. \quad (4.156)$$

По определению градиента скалярной функции, z -компоненты этого уравнения записывается как

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_0 g. \quad (4.157)$$

Здесь g – амплитуда гравитационного поля, а знак "минус" перед последним слагаемым в правой части появляется из-за того, что направление поля g всюду противоположно направлению оси z .

Интегрирование уравнения (4.157) по координате z дает

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -P - \rho_0 g z + C. \quad (4.158)$$

Здесь C – постоянная интегрирования, не зависящая от z , а потенциал ϕ_1 является вспомогательной функцией, определяемой с точностью до константы.

Учитывая, что давление на свободной поверхности равняется атмосферному давлению P_0 , которое считается постоянным, перепишем уравнение (4.158) в виде

$$P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_0 g s_z + C, \quad (4.159)$$

где s_z обозначает смещение частиц свободной поверхности, и $s_z = z$.

Чтобы упростить уравнение (4.159), зададим скалярный потенциал ϕ_1 как

$$\phi_1 = \phi - \frac{1}{\rho_0} (P_0 - C) t.$$

Тогда уравнение (4.159) перепишется следующим образом:

$$P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P_0 - \rho_0 g s_z,$$

или

$$s_z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (4.160)$$

Это уравнение задает соотношение между смещением s_z и потенциалом ϕ в точках свободной поверхности.

Поскольку наша цель состоит в том, чтобы получить решение граничной задачи относительно скалярного потенциала, естественно теперь заменить смещение s_z в уравнении (4.160) его выражением через потенциал ϕ .

Дифференцируя уравнение (4.160) по времени, получим

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (4.161)$$

Левая часть этого выражения представляет собой z -компоненту скорости частицы: v_z . В то же время, согласно уравнению (4.161), z -компонента скорости определяется как

$$v_z = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Таким образом, вместо уравнения (4.161) имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (4.162)$$

Это уравнение записано для точек свободной поверхности, смещенных в результате распространения волны относительно своего первоначального положения. Тем не менее, учитывая, что смещения частиц малы, будем предполагать, что производные в уравнении (4.162) берутся в точках $z = 0$.

Сформулируем теперь граничную задачу, состоящую из следующих условий:

а) в регулярных точках потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0;$$

б) на свободной поверхности выполняется следующее граничное условие:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \text{ если } z = 0;$$

в) с увеличением расстояния от свободной поверхности, амплитуда волнового поля должна уменьшаться и на бесконечности стремиться к нулю:

$$\Phi(z) \rightarrow 0, \text{ если } z \rightarrow -\infty.$$

Поскольку нашей задачей является изучение общих свойств гравитационных волн, мы не будем учитывать влияние первичных источников. Более того, мы предположим, что потенциал ϕ не зависит от координаты u и описывает синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль оси x . В этом случае уравнение Лапласа заметно упрощается:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.163)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений. Поскольку мы интересуемся волновыми явлениями, естественно искать решение уравнения (4.163) в виде

$$\phi = A(z) \cos(\omega t - kx). \quad (4.164)$$

Множитель

$$\cos(\omega t - kx)$$

указывает на то, что волна распространяется в сторону от начальной точки $x = 0$.

В предыдущих выражениях $A(z)$ является неизвестной функцией, ω обозначает круговую частоту, а k – волновое число, причем (см. главу 3)

$$k = \omega/c, \quad (4.165)$$

где c – фазовая скорость волны.

Чтобы определить функцию $A(z)$, подставим выражение (4.164) в уравнение (4.163). В результате получим обычное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^2 A/dz^2 - k^2 A = 0. \quad (4.166)$$

Известно, что решение этого уравнения имеет вид

$$A(z) = C e^{-kz} + D e^{kz}. \quad (4.167)$$

Учитывая, что волновое поле должно затухать при $z \rightarrow \infty$, отбросим член Ce^{-kz} и получим

$$A(z) = De^{kz}. \quad (4.168)$$

Выражение для скалярного потенциала принимает вид

$$\phi(x, z, \omega) = De^{kz} \cos(\omega t - kx). \quad (4.169)$$

Здесь D и k являются неизвестными. Поскольку первичные источники гравитационных волн здесь не рассматриваются, коэффициент D останется неопределенным.

Существенно, что потенциал ϕ , задаваемый выражением (4.169), удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям на бесконечности. Таким образом, два из сформулированных ранее условий граничной задачи оказываются выполненными. Неизвестное волновое число k теперь можно найти из условий на свободной поверхности.

Подставляя (4.169) в (4.162), получим

$$kD\cos(\omega t - kx) = \frac{\omega^2}{g} D\cos(\omega t - kx)$$

или

$$k = \omega^2/g. \quad (4.170)$$

Из последнего равенства видно, что гравитационные волны существуют только тогда, когда волновое число k и круговая частота ω связаны между собой определенным соотношением. Другими словами, скалярный потенциал ϕ , задаваемый выражением (4.169), является решением сформулированной выше граничной задачи, если только волновое число k и круговая частота ω удовлетворяют условию (4.170).

Из формул (4.165) и (4.170) следует, что фазовая скорость и длина волны определяются следующими двумя выражениями:

$$c = g/\omega = gT/2\pi \quad (4.171)$$

и

$$\lambda = cT = gT^2/2\pi = 2\pi g/\omega^2. \quad (4.172)$$

ПОВЕДЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В уравнениях (4.171) и (4.172) содержится очень интересная информация о гравитационных волнах. Прежде всего, заметим, что их скорость значительно меньше, чем скорость акустических волн (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

$f, \text{ Гц}$	0,1	1,0	10,0	100,0
$c, \text{ м/с}$	15,6	1,56	0,16	0,016
$\lambda, \text{ м}$	$1,56 \cdot 10^2$	1,56	$1,56 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^4$
$K, \text{ м}^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	4,0	$4,0 \cdot 10^2$	$4,0 \cdot 10^4$

Из равенства (4.171) видно, что фазовая скорость является функцией частоты или, точнее, она обратно пропорциональна круговой частоте ω . В общем случае, зависимость скорости v от частоты называется дисперсионным соотношением и будет часто встречаться в дальнейшем изложении.

Рассмотрим теперь движение частиц, связанных с распространением гравитационной волны.

По определению, имеем

$$v_x = \partial\phi/\partial x \text{ и } v_z = \partial\phi/\partial z.$$

Отсюда, учитывая выражение (4.169) для скалярного потенциала, получим

$$v_x = Dk e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

и

$$v_z = Dk e^{kz} \cos(\omega t - kx). \quad (4.173)$$

Таким образом, скорость частицы v имеет две компоненты с одинаковыми амплитудами и сдвигом фаз, равным $\pi/2$. Одна из этих компонент, v_x , имеет то же направление, что и фазовая скорость волны, а вторая, v_z , направлена вдоль оси z .

Из выражений (4.173) следует, что амплитуда вектора v определяется как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = Dk e^{kz} \quad (4.174)$$

и в любой точке среды вектор скорости вращается в плоскости, параллельной плоскости XOZ .

Кроме этого, видно, что по мере удаления от свободной поверхности амплитуда волнового поля и, в частности, амплитуда поля скорости частиц уменьшается. Имея в виду именно эту характеристику гравитационных волн, их часто называют поверхностными. Тем не менее, это не означает, что гравитационные волны концентрируются вблизи свободной поверхности. Действительно, их зависимость от координаты z описывается множителем

$$e^{kz} = e^{2\pi z/\lambda}. \quad (4.175)$$

Если глубина $|z|$ значительно меньше длины волны λ , $|z| \ll \lambda$, то затухание волны с глубиной очень мало. Соответственно на больших глубинах можно наблюдать практически такие же амплитуды волнового поля, как и рядом со свободной поверхностью $z=0$. Наоборот, если глубина $|z|$ превышает длину волны, $|z| > \lambda$, амплитуда волны уменьшается очень быстро. Таким образом, низкочастотные волны можно наблюдать и на больших глубинах, в то время как высокочастотные волны концентрируются вблизи свободной поверхности. Здесь просматривается очевидная аналогия со скрин-эффектом в электромагнетизме.

Определим теперь траекторию движения частиц жидкости. Интегрирование уравнений

$$v_x = \partial s_x / \partial t \text{ и } v_z = \partial s_z / \partial t$$

дает

$$s_x = x - x_0 = -D \frac{k}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad (4.176)$$

и

$$s_z = z - z_0 = D \frac{k}{\omega} e^{kz} \sin(\omega t - kx).$$

Здесь x_0 и z_0 – координаты точки, когда жидкость находится в состоянии равновесия.

Поскольку смещения частиц очень малы, мы можем заменить координаты x и z в правой части уравнения (4.176), соответственно, на x_0 и z_0 . В результате такой замены получим

$$x - x_0 = -D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(\omega t - kx_0), \quad (4.177)$$

$$z - z_0 = D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(\omega t - kx_0).$$

Отсюда видно, что траектория движения частицы описывается следующим уравнением:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = D^2 \frac{k^2}{\omega^2} e^{2kz_0},$$

т.е. частица движется по окружности радиуса

$$R = D \frac{k}{\omega} e^{kz_0} = D \frac{\omega}{k} e^{kz}, \quad \text{если } z < 0. \quad (4.178)$$

Координаты x_0 и z_0 центра этой окружности соответствуют положению равновесия частицы. Как следует из равенств (4.178), с увеличением глубины $|z_0|$ радиус этой окружности уменьшается.

Чтобы определить направление движения частицы вдоль траектории, предположим вначале, что

$$0 \leq \omega t - kx < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, как следует из уравнений (4.177), с течением времени горизонтальная компонента смещения $|s_x|$ становится меньше, в то время как вертикальная компонента $|s_z|$ увеличивается (рис. 4.7, б). Отсюда следует, что частица движется по часовой стрелке.

Аналогичным образом можно показать, что такое же направление движения сохраняется и для другого интервала периодов

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega t - kx \leq 2\pi.$$

Форма волны и движения частиц показаны на рис. 4.7, в.

Безусловно, между движениями различных частиц существует фазовый сдвиг. Как видно из рис. 4.7, в, каждая частица движется вдоль окружности по часовой стрелке, причем центры этих окружностей имеют одну и ту же координату z_0 . При этом существенно, что в каждый момент времени положение частицы характеризуется синусоидальной функцией, зависящей от координаты x . Согласно выражению (4.169), волна распространяется по оси x в сторону от точки своего зарождения. Поскольку все волновые поля: поле смещений, поле скоростей и поле давления – не зависят от координаты u , такая волна называется плоской. Это название вполне себя оправдывает, поскольку фаза волны

$$\omega t - kx$$

остается одной и той же для всех точек, принадлежащих какой-либо плоскости, параллельной плоскости YOZ . Таким образом, каждому значению фазы соответствует некоторая плоскость – фазовая поверхность волны, скорость распространения которой описывается, по определению, параметром c (см. выражение 4.171).

В отличие от фазы, амплитуда волны на фазовой поверхности не остается постоянной, и поэтому гравитационная волна представляет собой пример неоднородной плоской волны.

Интересно также рассмотреть поведение вектора Пойнтинга \mathbf{Y} , где

$$\mathbf{Y} = P\mathbf{v},$$

или

$$Y_x = Pv_x \text{ и } Y_z = Pv_z. \quad (4.179)$$

Заменяя потенциал ϕ_1 на ϕ в выражении (4.158), получим

$$P(z, t) = P_0 - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho_0 g z$$

или

$$P(z, t) = A - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (4.180)$$

Здесь слагаемое A не зависит от времени.

Подстановка выражения (4.169) для скалярного потенциала в формулу (4.180) дает

$$P = A + \rho_0 \omega D e^{i\omega t} \sin(\omega t - kx). \quad (4.181)$$

Последнее выражение совместно с формулами (4.173) и (4.179) позволяют выразить компоненты вектора Пойнтинга в следующем виде:

$$Y_x = A v_x + \rho_0 \omega k D^2 e^{2i\omega t} \sin^2(\omega t - kx)$$

и

$$Y_z = A v_z + \frac{\rho_0 \omega k D^2}{2} e^{2i\omega t} \sin 2(\omega t - kx),$$

где горизонтальная компонента Y_x характеризует распространение волны.

Существенно, что в любой промежуток времени поток компоненты Y_x направлен в сторону от точки зарождения волны. Действительно, интегрируя первое из выражений (4.182) по времени, получим

$$\int_0^T Y_x dt = \frac{\rho_0 \omega k D^2 e^{2kz}}{2} \int_0^T dt = \pi \rho_0 k D^2 e^{2kz}, \quad (4.183)$$

причем слагаемое $A v_x$ не дает никакого вклада в этот интеграл.

С другой стороны, на этом интервале времени компонента Y_z меняет знак и поток через единичную площадку в плоскости $z = \text{const}$ обращается в нуль. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^T Y_z dt &= ADk e^{kz} \int_0^T \cos(\omega t - kx) dt + \\ &+ \frac{\rho_0 \omega k}{2} D^2 e^{2kz} \int_0^T \sin 2(\omega t - kx) dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что та часть энергии, которая связана с компонентой Y_z , в первые полпериода переносится вниз от свободной поверхности, а затем возвращается обратно. Таким образом, одновременно наблюдаются распространение волны вдоль горизонтального направления и колебания частиц вдоль оси z . Заметим, что аналогичное поведение наблюдается и в случае неоднородных волн дилатации.

Рассмотрим теперь деформацию элементарного объема жидкости, вызванную гравитационной волной. Для этого убедимся еще раз в справедливости уравнений (4.151).

По определению,

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \partial s_x / \partial x + \partial s_z / \partial z.$$

Используя это уравнение и выражения (4.176), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = -\frac{k^2}{\omega} D e^{kz} \sin(\omega t - kx) + \frac{k^2}{\omega} D e^{kz} \sin(\omega t - kx) = 0,$$

т.е., как мы уже знаем, движение частиц не приводит к изменению объема.

Поскольку смещение \mathbf{s} имеет только две ненулевые компоненты: s_x и s_z , эти компоненты не зависят от координаты y , получим

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{s} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{s} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{s} = \frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x}. \quad (4.184)$$

Далее из уравнения (4.176) имеем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = -D \frac{k^2}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

и

(4.185)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = -D \frac{k^2}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0.$$

Как уже было отмечено, это означает отсутствие вращения и деформаций простого сдвига. В то же время имеется деформация чистого сдвига, при которой первоначальный прямоугольник трансформируется в ромб (рис. 4.7, 2).

Г л а в а 5. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В этой главе рассматриваются сферические, цилиндрические и плоские волны в однородной среде, характеризующейся тем, что в ней существуют только волны дилатации ($\text{rot } \mathbf{s} = \mathbf{0}$). Детально обсуждается поведение таких волн в ближней, промежуточной и дальней зонах.

5.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Предположим, что в однородной среде с модулем всестороннего сжатия K и плотностью ρ_0 содержится сферическая полость радиуса S , (рис. 5.1, а). В момент времени $t = 0$ полость начинает пульсировать, вследствие чего в каждой точке ее поверхности действует сила, направленная по нормали к поверхности и имеющая во всех точках одинаковую величину:

$$\mathbf{F}(p, t) = P(p, t)S\mathbf{n}. \quad (5.1)$$

Здесь S – площадь поверхности источника, $P(p, t)$ – давление в точке p на

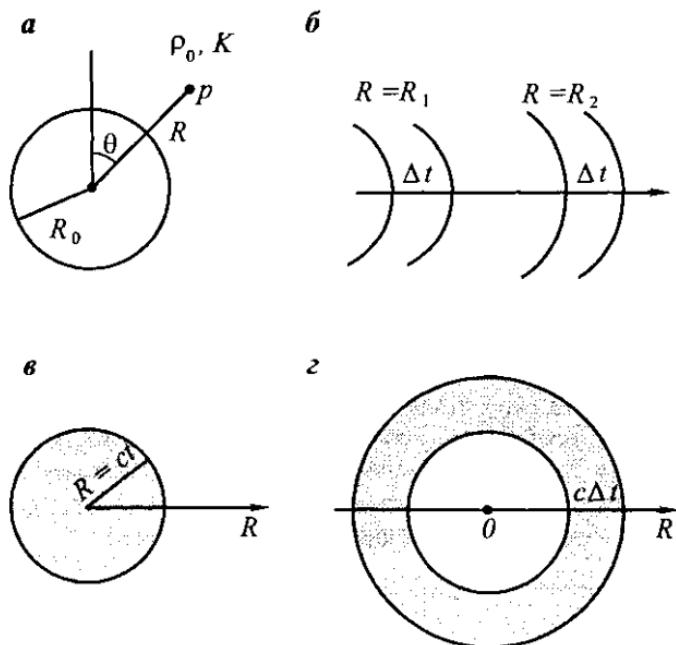


Рис. 5.1. Сферическая волна

поверхности полости, n – единичная нормаль к поверхности, направленная от источника.

Из-за колебаний давления, вызванных изменением радиуса источника, в среде возникают и распространяются волны. Очевидно, что распределение давления, так же как и распределения смещений и скоростей частиц в волне дилатации, является сферически-симметричным. Учитывая этот факт, выберем сферическую систему координат с началом в центре полости и предположим, что все перечисленные функции зависят только от одной координаты R :

$$\mathbf{v} = v(R, t) \mathbf{i}_R, \quad P = P(R, t) \quad \text{и} \quad \mathbf{s} = s(R, t) \mathbf{i}_R. \quad (5.2)$$

Здесь \mathbf{i}_R обозначает единичный вектор, направленный по радиусу.

АКУСТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Чтобы задать волновые поля, удобно использовать скалярный потенциал смещения $\phi(r, t)$, который в рассматриваемом случае является функцией только одной координаты R :

$$\phi = \phi(R, t). \quad (5.3)$$

Смещения и скорости частиц, а также давление выражаются тогда через производные функции $\phi(R, t)$. Если же в основу рассмотрения положить давление или скалярный потенциал скорости, то по крайней мере одно из волновых полей будет определяться с помощью интегрирования, что гораздо менее удобно.

Как следует из раздела 4.2,

$$\mathbf{s} = \text{grad } \phi, \quad \mathbf{v} = \partial \mathbf{s} / \partial t \quad (5.4)$$

и

$$P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

и всюду вне источника потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

Здесь c обозначает скорость волны дилатации.

Помимо этого, необходимо дать описание поведения потенциала на поверхности полости, а также сформулировать начальные условия. В результате колебаний полости возбуждаются уходящие волны, амплитуда которых уменьшается с расстоянием от источника. В пределе имеем

$$\phi \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad R \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Условие (5.7) имеет простой смысл, оно означает отсутствие источников на бесконечности. Как было отмечено ранее, то же самое можно получить,

если представить себе сферическую поверхность, радиус R которой настолько велик, что волна не успевает достигнуть поверхности за время наблюдения (а также до начала наблюдений). Стоит заметить, что информация о волнах на бесконечности содержится в начальных условиях.

Пусть смещение поверхности полости описывается функцией

$$s_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ s_0 f(at) & t \geq 0. \end{cases}$$

Наличие коэффициента a в этой формуле связано с тем, что аргумент указанной выше функции является безразмерным. Этим аргументом может быть, например, угловая частота ω .

Тогда, по определению (см. равенства 5.4), граничное условие для потенциала в точках поверхности полости можно представить в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & t \geq 0, \end{cases} \text{ если } R = R_0 + s_R(t). \quad (5.8)$$

Предположим также, что до момента времени $t = 0$, когда начал действовать источник, волновые движения во всех точках среды отсутствовали:

$$s(R, 0) = 0 \text{ и } P(R, 0) = 0$$

или

$$\frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial t^2} = 0, \text{ если } R > R_0. \quad (5.9)$$

Таким образом, граничную задачу для скалярного потенциала можно сформулировать в виде следующих условий.

1. В регулярных точках среды

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

2. На поверхности источника

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & t \geq 0, \end{cases} \text{ если } R = R_0 + s_R(t).$$

3. В начальный момент времени волновое поле в среде отсутствует:

$$\frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial t^2} = 0, \text{ если } R > R_0, t = 0.$$

Найдем, прежде всего, решение волнового уравнения, которое в сферической системе координат записывается в следующем виде (см. приложение 3):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (5.10)$$

Здесь учтено, что потенциал зависит только от координаты R .

Чтобы упростить решение этого уравнения, введем новую функцию

$$W = R\phi.$$

Дифференцируя скалярный потенциал ϕ , получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = -R^{-2} W + R^{-1} \frac{\partial W}{\partial R}$$

и

$$R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} = -W + R \frac{\partial W}{\partial R}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = R \frac{\partial^2 W}{\partial R^2}$$

и уравнение (5.10) можно переписать в виде

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} = \frac{1}{Rc^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Это уравнение уже упоминалось в главе 3 при описании распространения волн вдоль одной из координатных осей. Решение данного уравнения состоит из двух независимых функций:

$$f_1[a(t - R/c)] \text{ и } g_1[a(t + R/c)].$$

Соответственно, скалярный потенциал запишется как

$$\phi(R, t) = A \frac{f_1[a(t - R/c)]}{R} + B \frac{g_1[a(t + R/c)]}{R}, \quad (5.11)$$

где A и B – некоторые константы.

Поскольку второе слагаемое в правой части этого выражения описывает волну, распространяющуюся из бесконечности в направлении источника, оно не удовлетворяет начальным условиям. Таким образом, можно положить $B = 0$, что дает следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\phi(R, t) = A \frac{f_1[a(t - R/c)]}{R}. \quad (5.12)$$

Очевидно, что скалярный потенциал (5.12) характеризует волну, распространяющуюся от точечного источника с фазовой скоростью c , и удовлетворяет волновому уравнению и условию (5.7).

Чтобы определить неизвестный коэффициент A и функцию f_1 , используем условие (5.8), справедливое для всех точек движущейся поверхности источника. Из равенств (5.4) и (5.12) следует

$$s_R(R, t) = \partial \phi / \partial R$$

или

$$s_R(R, t) = \frac{Af_1[a(t - R/c)]}{R^2} - \frac{Aa}{c} \frac{f_1'[a(t - R/c)]}{R},$$

где $f_1'[a(t - R/c)]$ обозначает первую производную функции f_1 по аргументу $a(t - R/c)$.

Сделаем теперь три предположения. Прежде всего предположим, что пульсации источника характеризуются относительно малыми смещениями т.е.

$$1. |s_R(t)| \ll R_0.$$

Поэтому в граничном условии (5.8) положение поверхности полости можно задать, используя постоянную координату R_0 . Смещение точек этой поверхности можно представить в виде

$$s_0 f(at) = - \frac{Af_1[a(t - R_0/c)]}{R_0^2} - \frac{Aa}{c} \frac{f_1'[a(t - R_0/c)]}{R_0}. \quad (5.13)$$

Таким образом, определение неизвестных величин сводится к решению дифференциального уравнения. Чтобы упростить процедуру поиска решения, предположим, что второе слагаемое в правой части уравнения (5.13) также мало:

$$2. \left| \frac{1}{R_0^2} f_1[a(t - R_0/c)] \right| \gg \left| \frac{a}{cR_0} f_1'[a(t - R_0/c)] \right| \text{ и } 3. t \gg R_0/c.$$

Тогда вместо уравнения (5.13) получим

$$s_0 f(at) = -Af_1(at)/R_0^2, \quad (5.14)$$

откуда

$$A = -R_0^2 s_0 \text{ и } f_1(at) = f(at). \quad (5.15)$$

Подстановка равенств (5.15) в уравнение (5.12) дает следующее приближенное выражение для скалярного потенциала:

$$\phi(R, t) = -\frac{R_0^2 s_0}{R} f[a(t - R/c)], \text{ если } R \geq R_0. \quad (5.16)$$

В заключение этого раздела мы определим условия, при которых полученнное выражение для скалярного потенциала описывает волновое поведение с достаточной точностью.

Очевидно, что функция $\phi(R, t)$, задаваемая выражением (5.16), удовлетворяет волновому уравнению и условию вблизи источника. Более того, поскольку функция $f[a(t - R/c)]$ и ее производные равны нулю, когда аргумент $a(t - R/c)$ отрицателен, скалярный потенциал ϕ удовлетворяет также начальным условиям. Таким образом, мы получили решение граничной задачи и, соответственно, $\phi(R, t)$ является скалярным потенциалом смещения для случая однородной среды и сферического источника (5.8).

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В соответствии с равенствами (5.4)–(5.5) радиальные компоненты смещений и скорости, а также избыточное давление описываются следующими выражениями:

$$s_R(R, t) = \frac{R_0^2}{R} s_0 f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a s_0}{c R} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (5.17)$$

$$v(R, t) = \frac{R_0^2}{R^2} a s_0 f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a^2 s_0}{c R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и

$$P(R, t) = \frac{R_0^2 a^2 s_0 \rho_0}{R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

Поскольку

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{s} = -P/K,$$

дилатация описывается как

$$\theta = -\frac{R_0^2 a^2 s_0 \rho_0}{K R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

или

$$\theta = -\frac{R_0^2 a^2 s_0}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (5.18)$$

В выражениях (5.18) учтено, что

$$K = \rho_0 c^2.$$

В то же время

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0, \quad (5.19)$$

и, как уже было сказано, волны дилатации не вызывают вращения и деформаций простого сдвига в объеме независимо от его ориентации.

В дальнейшем мы будем использовать следующие два основные свойства функции $f[a(t - R/c)]$ и ее производных.

1. Если аргумент $a(t - R/c)$ отрицательный, указанные функции принимают нулевые значения.

2. Распределение давления и дилатации, а также смещения и скорости частиц зависит от одной единственной координаты R , т.е. указанные функции остаются постоянными на сферической поверхности с центром в источнике. Такая волна является сферически симметричной, и именно поэтому она называется сферической.

Векторы смещения и скорости частиц имеют только радиальную компоненту и, следовательно, перпендикулярны к поверхности

$$R = \text{const},$$

что отражает одно из возможных свойств волн дилатации.

Предположим, что поверхность полости изменяется в течение интервала времени Δt :

$$0 \leq t < \Delta t,$$

и рассмотрим волну, пришедшую в некоторую точку на расстоянии R от источника.

Как это следует из равенств (5.17), частицы среды будут покоиться в моменты времени

$$t < R/c.$$

Затем в момент времени

$$t = R/c$$

волна одновременно придет во все точки с одной и той же координатой R . В этот момент наблюдается волновой фронт. В течение интервала времени

$$R/c \leq t \leq R/c + \Delta t$$

частицы вовлечены в волновое движение, которое сопровождается также появлением избыточного давления и деформацией жидкости (рис. 5.1, б).

В момент времени

$$t = \frac{R}{c} + \Delta t$$

хвост волны минует точку наблюдения, после чего среда вернется в состояние равновесия. Таким образом, независимо от расстояния продолжительность волны равняется Δt , а время пробега волны до точки наблюдения увеличивается с расстоянием.

Рассмотрим, как волна распределется с расстоянием R . Прежде всего заметим, что волна может существовать только на расстояниях R , удовлетворяющих следующему условию:

$$R \leq ct.$$

Кроме того, следует разделять два случая:

$$1) \Delta t > t, \quad 2) \Delta t < t.$$

В первом случае в момент времени t источник продолжает возбуждать колебания, и, следовательно, волновые движения происходят всюду внутри сферического объема радиуса

$$R = ct,$$

как это показано на рис. 5.1, в.

Во втором случае волна приходит в точку наблюдения, когда источник уже прекратил действовать. В момент времени $t = R/c$ хвост волны достигает точек с координатой

$$R = c(t - \Delta t).$$

Таким образом, в этом случае волна наблюдается в сферическом слое толщиной

$$\Delta R = c\Delta t.$$

Очевидно, что форма волны $\phi(R, t)$ и толщина слоя ΔR не изменяются с расстоянием от источника (рис. 5.1, 2).

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь волновые поля P , s , v и θ как функции времени и расстояния от источника. Но сначала следует сделать два замечания.

1. Работа внешних сил, действующих в источнике, преобразуется в механическую энергию волны, и ее количество остается постоянным, поскольку мы пренебрегаем влиянием диссипации. Как мы знаем, с течением времени объем сферического слоя, занятого волной, становится больше и плотность энергии уменьшается. Это показывает, что с увеличением расстояния R скорость и избыточное давление, а также значения других параметров волнового поля уменьшаются, что, конечно, следует из выражений (5.17), (5.18).

2. По определению, дилатация в сферической системе координат дается следующим выражением (см. приложение 3):

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 s),$$

где

$$s = s_R.$$

Далее, принимая во внимание первое из соотношений (5.17), имеем

$$R^2 s = R_0^2 s_0 f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 a s_0 R}{c} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и, после дифференцирования,

$$\theta = - \frac{R_0^2 s_0 a}{R^2 c} f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{R_0^2 s_0 a}{c R^2} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] -$$

$$- \frac{R_0^2 s_0 a^2}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

или

$$\theta = - \frac{R_0^2 s_0 a^2}{c^2 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right],$$

что, безусловно, совпадает с (5.18).

Эти формулы показывают несколько интересных свойств дилатации. Прежде всего, независимо от расстояния до источника ее поведение определяется второй производной функции $f[a(t - R/c)]$. Например, в окрестности источника в выражении для смещения доминирующую роль играет первый член

$$\frac{R_0^2 s_0}{R^2} f\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right].$$

но при этом дилатация существенно зависит от производной, взятой от второго члена:

$$\frac{R_0^2 s_0 a}{c R} f'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right].$$

Другое важное свойство функции θ состоит в том, что ее зависимость от расстояния всюду одинаковая. Наконец, как следует из выражения (5.18), дилатация сферической волны уменьшается с ростом фазовой скорости c . Это предполагает, что конечное значение этой скорости является необходимым фактором для деформации жидкости. Например, если волна распространяется мгновенно ($c \rightarrow \infty$), то смещение $s(R, t)$ становится равным

$$s(R, t) = \frac{R_0^2 s_0}{R^2} f(at),$$

и, следовательно, дилатация θ , характеризующая изменения элементарного объема, обращается в ноль.

Чтобы проиллюстрировать поведение волновых полей, предположим, что смещение поверхности полости в момент времени $t = 0$ начинает расти, достигает максимума, а затем постепенно уменьшается до нуля. Помимо этого, предположим, что первые и вторые производные смещения также равны нулю в начале процесса $t = 0$ и в момент времени Δt . Поведение указанных функций показано на рис. 5.2, а.

В соответствии с (5.17) избыточное давление определяется как

$$P(R, t) = \frac{m a^2}{4 \pi R} f''\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \quad (5.20)$$

где

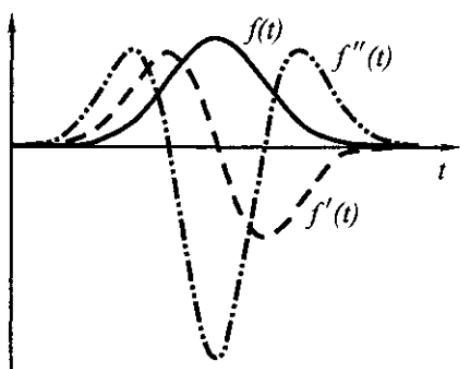
$$m = \rho_0 4 \pi R_0^2 s_0 \quad (5.21)$$

является массой жидкости, переместившейся от источника, когда смещение полости равнялось s_0 .

Таким образом, поведение давления определяется, независимо от расстояния до источника, величиной отношения

$$\frac{f''[a(t - R/c)]}{R}.$$

a



б



в

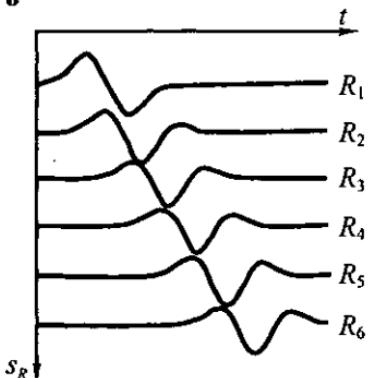


Рис. 5.2. Смещение полости $s_R(t)$ и его производные (а); зоны сжатия и растяжения (б); смещение полости $s_R(t)$ на различных расстояниях $R_1 < R_2 < \dots < R_6$ от источника (в)

Например, если время и расстояние удовлетворяют равенству
 $t_* = t - R/c = \text{const.}$

то давление изменяется обратно пропорционально R .

Как видно из рис. 5.2, а, функция $f''(t_*)$ меняет свой знак дважды. Снова предположим, что волна наблюдается в некоторой точке с координатой R . До момента времени $t = R/c$ давление отсутствует. Затем в течение интервала времени

$$R/c < t < R/c + \Delta t$$

существуют два более коротких интервала времени, на которых давление P является положительным, а между ними – отрицательным.

Ранее мы предположили, что смещение поверхности полости характеризуется только одним максимумом. В более общем случае количество интервалов, на которых давление P будет иметь поочередно положительные и отрицательные значения, возрастает.

Поскольку

$$\theta = -P/K,$$

дилатация ведет себя похожим образом, но с другим знаком. Это означает, что положительные и отрицательные значения P наблюдаются соответственно в зонах сжатия и растяжения. Данное рассмотрение ясно указывает на то, что в каждый момент времени мы можем различать три части волны (см. рис. 5.2, a). Поскольку в начале процесса избыточное давление является положительным, приходим к заключению, что внешняя часть сферического слоя находится в состоянии сжатия. Промежуточная часть находится в состоянии растяжения ($P < 0$), а задняя часть – снова в состоянии сжатия (рис. 5.2, б). Зоны сжатия всегда чередуются с зонами растяжения в волне, ограниченной сферическим слоем. Для доказательства этого утверждения рассмотрим интеграл от дилатации:

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta dt = -\frac{ma^2}{4\pi R c^2} I, \quad (5.22)$$

где

$$t_1 < \frac{R}{c}; \quad t_2 > \frac{R}{c} + \Delta t;$$

Δt – продолжительность действия источника;

$$I = a \int_{t_1}^{t_2} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] dt. \quad (5.23)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$I = f' \left[a \left(t_2 - \frac{R}{c} \right) \right] - f' \left[a \left(t_1 - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Поскольку в момент времени $t = t_1$ волна еще не пришла в точку наблюдения, скалярный потенциал ϕ и его производные равняются нулю, и, следовательно, выражение (5.24) переписывается в виде

$$I = f' \left[a \left(t_2 - \left(R/c \right) \right) \right]. \quad (5.25)$$

Если мы предположим, что функция $f' \left[a \left(t_2 - \left(R/c \right) \right) \right]$ отлична от нуля, то согласно (5.17) должно существовать движение частиц позади волны. Поскольку это невозможно, мы должны положить

$$f' \left[a \left(t_2 - \left(R/c \right) \right) \right] = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta dt = 0. \quad (5.26)$$

Последнее выражение показывает, что если возбуждение колебаний в ис-

точнике происходит в течение конечного промежутка времени, то для произвольной функции $f(at)$ существуют зоны сжатия и растяжения в пределах сферической волны. Более того, распределение дилатации θ и избыточного давления P между фронтом и окончанием волны таково, что интегралы

$$\int_1^2 \theta dt \quad \text{и} \quad \int_1^2 P dt$$

равны нулю. Очевидно, что этот результат не зависит от величины коэффициента A в (5.12).

Согласно формуле (5.17) смещения и скорости частиц описываются суммой двух слагаемых, причем каждое из них по-разному зависит от расстояния. Поэтому естественно различать три интервала расстояний, которые обычно называют ближней, промежуточной и дальней зонами. Начнем с рассмотрения первой зоны.

1. Ближняя зона

Если расстояния от источника относительно малы, т.е. первое слагаемое в выражениях (5.17) для s и v является доминирующим, то мы имеем

$$s(R, t) \approx \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} f\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right],$$

$$v(R, t) \approx \frac{ma}{4\pi\rho_0 R^2} f'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \quad (5.27)$$

в то время как

$$P(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi R} f''\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]$$

и

$$\theta = -P/K.$$

В этой зоне функции s и v относительно быстро уменьшаются с расстоянием от источника, а их зависимость от времени такая же, как для соответствующих функций на поверхности полости.

Тем не менее, дилатацию и избыточное давление нельзя получить из приближенного уравнения (5.27) для смещений. Чтобы получить правильные выражения, описывающие поведение θ и P , необходимо учесть второе слагаемое в формуле (5.17) для функции $s(R, t)$.

2. Промежуточная зона

С увеличением расстояния от источника влияние второго члена в правой части выражений (5.17) для смещения и скорости становится все более за-

метным. Поэтому с изменением расстояния R изменяется и форма волновых полей $s(R, t)$ и $v(R, t)$ как функций времени. Пример такого поведения для смещения представлен на рис. 5.2, в.

3. Дальняя зона

Как следует из соотношений (5.17), на достаточно больших расстояниях

$$s(R, t) \approx \frac{ma}{4\pi c \rho_0 R} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (5.28)$$

$$v(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi c \rho_0 R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и

$$P(R, t) \approx \frac{ma^2}{4\pi R} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

В этой зоне, в отличие от предыдущего случая, все волновые поля убывают с расстоянием одинаковым образом и относительно медленно. Как и в ближней зоне, здесь поведение волны как функции времени не зависит от расстояния до источника.

В соответствии с (5.28) отношение скорости к избыточному давлению определяется как

$$v/P = 1/c \rho_0 = 1/Z. \quad (5.29)$$

Как мы уже знаем, параметр

$$Z = c \rho_0 \quad (5.30)$$

называется, по аналогии с электрическими цепями, волновым сопротивлением или импедансом среды. Скорость и давление играют роль, соответственно, тока и напряжения. При изучении плоских волн в слоистых средах мы будем часто использовать понятие импеданса, как это уже делалось в случае пружины.

С увеличением расстояния от источника кривизна сферических поверхностей волны становится меньше. Это приводит к увеличению области, где волну можно рассматривать как плоскую волну практически одинаковой амплитуды.

ДИЛАТАЦИЯ В БЛИЗИ ИСТОЧНИКА

Прежде чем рассматривать примеры сферических волн в однородной среде, интересно обсудить связь между скоростью сферической полости и деформацией среды вблизи источника. Выберем с этой целью достаточно малый интервал времени

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

так, чтобы практически любую функцию $f(at)$, характеризующую смещение поверхности полости

$$S(R_0, t) = s_0 f(at) \text{ и } s_0 > 0, \quad a > 0,$$

можно было приближенно представить как

$$f(at) = a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 \quad (5.31)$$

и так, чтобы эта функция не меняла знака. Помимо этого, предположим, что $a_2(t - t_1)^2 < |a_1(t - t_1)|$ и $2a_2(t - t_1) < |a_1|$.

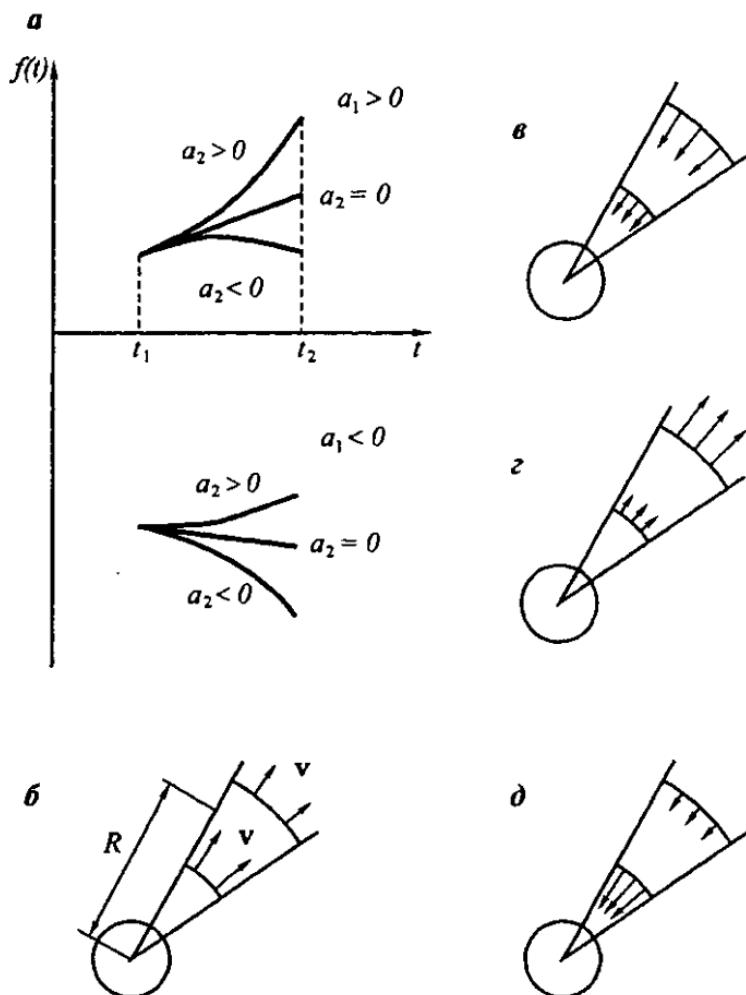


Рис. 5.3. Скорость источника и деформация в его окрестности

Соответственно, первая и вторая производные определяются как

$$\begin{aligned}f'(at) &= [a_1 + 2a_2(t - t_1)]a, \\f''(at) &= 2a_2a^2.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Далее естественно различать три случая:

- 1) $a_2 > 0$,
- 2) $a_2 < 0$,
- 3) $a_2 = 0$,

для которых функция $f(at)$ ведет себя различным образом (рис. 5.3, a). Рассмотрим эти случаи отдельно друг от друга.

Случай 1: $a_2 > 0$

Предположим сначала, что $a_1 > 0$. Тогда скорость поверхности полости направлена вдоль радиуса R ($f' > 0$) и увеличивается со временем. Рассмотрим элементарный сферический объем, показанный на рис. 5.3, б, на интервале времени

$$t_1 + \frac{R}{c} < t < t_2 + \frac{R}{c}.$$

Здесь мы пренебрегли растяжением ΔR , которое мало по сравнению с расстоянием R от начала координат.

Поскольку движение поверхности полости вызывает распространение волн в сторону от источника, мы должны заключить, что чем больше расстояние, на котором находится частица объема, тем меньше ее скорость (рис. 5.3, б). Поскольку радиальная компонента скорости v_r является положительной, мы видим, что объем находится в состоянии сжатия ($\theta < 0$), и, соответственно,

$$P > 0.$$

Если коэффициент a_1 отрицательный, то скорость поверхности полости направлена к началу координат $R = 0$ и ее величина уменьшается со временем. Следовательно, абсолютная величина $|v|$ на фронте элементарного объема больше, чем величина скорости в его задней части (рис. 5.3, в), и в этом случае также наблюдается сжатие.

Случай 2: $a_2 < 0$

Если коэффициент a_1 положителен, скорость поверхности полости уменьшается со временем и направлена вдоль радиуса R , соответственно, скорость передней части объема больше, чем задней. По этой причине объем находится в состоянии растяжения (рис. 5.3, г) и $P < 0$. Если же коэффициент a_1 отрицательный, скорость поверхности полости направлена в сторону, противоположную радиусу R , и ее величина растет со временем. Следовательно, скорость частиц, расположенных в задней части объема, больше

скорости частиц в его передней части (рис. 5.3, *д*), и в этом случае объем также испытывает растяжение ($P < 0$).

Случай 3: $a_2 = 0$

В этом случае скорость движения поверхности полости постоянная, и, следовательно, ее смещение линейно растет со временем. Очевидно, что на интервале времени

$$t_1 + \frac{R}{c} < t < t_2 + \frac{R}{c}$$

частицы элементарного объема обладают одинаковой скоростью и, следовательно, в нашем приближении ($f''' = 0$) дилатация отсутствует.

Далее мы обсудим поведение сферических волн, имеющих различную зависимость от времени.

Пример 1

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение поверхности полости начинает увеличиваться и затем в момент времени τ достигает некоторого постоянного значения s_0 (рис. 5.4, *а*). В частности, если интервал времени τ , на котором изменяется функция $f(at)$, становится бесконечно малым, мы в пределе получим ступенчатую функцию

$$f(at) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Как следует из (5.17) и рис. 5.4, *а*, в каждый момент времени $t > \tau$ имеется сферический волновой слой

$$c(t - \tau) \leq R \leq ct,$$

внутри которого частицы движутся с различными скоростями, формируя таким образом зоны сжатия и растяжения.

В то же время позади этого сферического слоя мы имеем

$$s(R, t) = m/4\pi\rho_0 R^2, \quad v = 0, \quad P_a = 0, \quad (5.34)$$

т.е. эта часть среды находится в равновесии и дилатация здесь отсутствует. Единственный результат действия этой волны состоит в том, что смещения частиц быстро убывают с расстоянием, но не зависят от времени.

Для случая, когда $f(at)$ является ступенчатой функцией, мы имеем

$$\mathbf{s}(R, t) = \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} h\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] + \frac{ma}{4\pi\rho_0 c R} \delta\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right],$$

$$\mathbf{v}(R, t) = \frac{ma}{4\pi\rho_0 R^2} \delta\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] + \frac{ma^2}{4\pi\rho_0 c R} \delta'\left[a\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \quad (5.35)$$

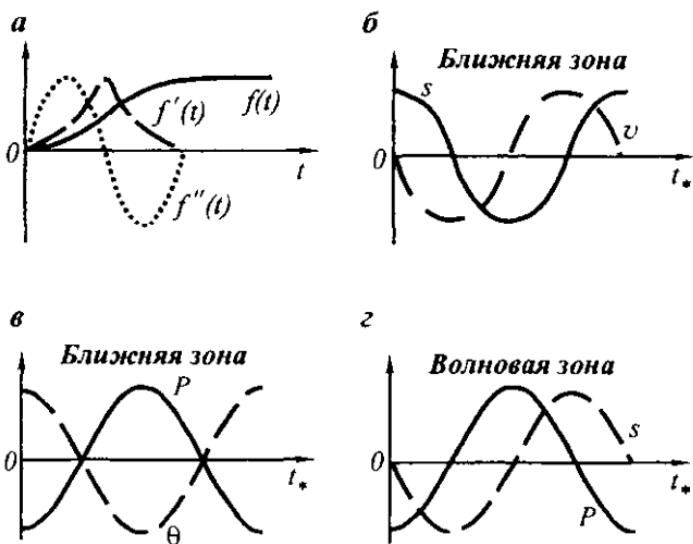


Рис. 5.4. Поведение смещения, скорости и давления на поверхности источника (а); синусоидальная волна в ближней зоне (б, в); синусоидальная волна в дальней зоне (г): $t_* = t - R/c$

$$P(R, t) = \frac{ma^2}{4\pi R} \delta' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right].$$

Здесь h , δ и δ' обозначают соответственно ступенчатую функцию, дельта-функцию и ее первую производную. Конечно, такой случай является предельным, поскольку ни ступенчатая, ни дельта-функция в действительности не реализуются.

Пример 2

Предположим теперь, что смещение поверхности мгновенно возрастает в момент времени $t = 0$, затем остается постоянным в течение интервала Δt , а после этого мгновенно исчезает:

$$f(at) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0 & \text{при } t > \Delta t. \end{cases} \quad (5.36)$$

Применяя результаты, полученные в первом примере, мы видим, что, как и ранее, волна движется от источника и занимает сферический слой толщиной ΔR .

$$\Delta R = c\Delta t.$$

Внутри слоя смещение равняется

$$s(R, t) = m/4\pi\rho_0 R^2,$$

при условии, что

$$R/c < t < R/c + \Delta t,$$

а скорости частиц, избыточное давление и дилатация равны нулю.

В то же время поведение волновых полей на фронте волны и в ее хвосте описывается равенствами (5.35). Когда волна приходит в некоторую точку среды, она порождает смещение $s(R)$, которое затем не изменяется в течение интервала времени Δt . После этого хвост волны приводит к появлению смещения той же величины, но противоположного направления, в результате чего частицы возвращаются в свои исходные позиции.

Пример 3

Пусть теперь колебания полости описываются синусоидальной функцией с круговой частотой ω :

$$s(t) = s_0 \cos \omega t. \quad (5.37)$$

Предположим также, что этот процесс начался бесконечно давно, и, следовательно, в соответствии с выражениями (5.17) и (5.18) в каждой точке жидкости

$$s(R, t) = \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{\omega R}{c} \sin \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right],$$

$$v(R, t) = \frac{-m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\sin \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{\omega R}{c} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

и

$$P(R, t) = -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right),$$

$$\theta(R, t) = \frac{m\omega^2}{4\pi KR} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right).$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют волновому уравнению и граничным условиям. Поскольку данная волна описывает стационарный (установившийся) процесс, нет необходимости учитывать начальные условия. В каждой точке среды все волны являются периодическими функциями времени и их период равняется

$$T = 2\pi/\omega = 1/f. \quad (5.39)$$

Зависимость этих полей от расстояния также носит периодический характер, но при этом изменяется амплитуда. Чтобы исследовать роль расстояния R , удобно снова использовать понятие длины волны λ :

$$\lambda = cT = c/f = 2\pi c/\omega. \quad (5.40)$$

Тогда вместо выражений (5.38) получим

$$s(R, t) = \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\pi R}{\lambda} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \right], \quad (5.41)$$

$$\alpha(R, t) = \frac{m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \left[\sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{2\pi R}{\lambda} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) \right]$$

и

$$P(R, t) = \frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (5.42)$$

$$\theta(R, t) = \frac{m\omega^2}{4\pi K R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

В отличие от общего случая волн с произвольной зависимостью от времени, в данном случае довольно легко оценить диапазон расстояний, соответствующих ближней, промежуточной и дальней зонам.

Действительно, как следует из (5.41) и (5.42), для расстояний, много меньших длины волны λ :

$$R \ll \lambda \quad (5.43)$$

имеем

$$s(R, t) \approx \frac{m}{4\pi\rho_0 R^2} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right),$$

$$\alpha(R, t) \approx \frac{m\omega}{4\pi\rho_0 R^2} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (5.44)$$

$$P(R, t) = -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

и

$$\theta = -P/K.$$

Поведение полей во времени в ближней зоне показано на рис. 5.4, б, в. В ближней зоне смещение и дилатация изменяются синхронно, причем между ними и скоростью частиц существует фазовый сдвиг, равный $\pi/2$.

Проследим теперь за тем, как меняются эти функции в течение одного периода T . В момент времени $t = 0$ поверхность полости испытывает максимальное растяжение $s = s_0$, однако ее скорость равняется нулю. Затем радиус полости начинает уменьшаться и растяжение исчезает в момент времени

$$t = \pi/2\omega.$$

Это означает, что в течение интервала

$$0 \leq t \leq \pi/2\omega$$

скорость направлена в сторону начала координат, а ее значение увеличивается.

По этой причине каждый элементарный объем в ближней зоне, находящийся на расстоянии R , испытывает растяжение, когда

$$R/c \leq t \leq R/c + \pi/2\omega.$$

Поскольку на интервале

$$\pi/2\omega \leq t \leq 3\pi/2\omega$$

скорость поверхности полости увеличивается, тот же самый элементарный объем начинает сжиматься при условии, что

$$R/c + \pi/2\omega < t < R/c + 3\pi/2\omega.$$

В момент времени $t = 3\pi/(2\omega)$ поверхность полости возвращается в первоначальное положение, а скорость достигает своего максимального положительного значения.

Затем, в течение последнего интервала периода

$$3\pi/2\omega < t < 2\pi/\omega$$

скорость падает.

Следовательно, элемент объема снова начинает растягиваться, когда

$$R/c + 3\pi/2\omega < t < R/c + 2\pi/\omega.$$

В отличие от описанного случая, в промежуточной зоне поведение волнового поля во времени зависит от расстояния между источником и точкой наблюдения.

С увеличением расстояния R или с уменьшением длины волны λ влияние второго слагаемого в выражении (5.41) становится, в общем случае, доминирующим, и мы получаем следующие выражения для волнового поля в дальней зоне:

$$\begin{aligned} s(R, t) &= -\frac{m}{2\rho_0\lambda R} \sin\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ v(R, t) &= -\frac{m\omega}{2\rho_0\lambda R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right), \\ P(R, t) &= -\frac{m\omega^2}{4\pi R} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Формулы (5.45) справедливы, если расстояние R больше длины волны λ , т.е.

$$R > \lambda, \tag{5.46}$$

и, соответственно, эта зона обычно называется волновой. Она играет важную роль в сейсмологии, поскольку там наблюдения ведутся в большинстве случаев на расстояниях, превышающих длину волны.

Граница между промежуточной и волновой зонами существенно зависит от частоты. В частности, с увеличением частоты ω волновая зона начинается на более близких расстояниях от источника. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, что частотный диапазон волн есть

$$10 \text{ Гц} < f < 100 \text{ Гц},$$

а их фазовая скорость равна

$$c = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Тогда, по определению, длина волны изменяется в пределах

$$20 \text{ м} < \lambda < 200 \text{ м.}$$

Поведение волнового поля во времени в волновой зоне показано на рис. 5.4, 2, и оно, безусловно, отличается от поля в ближней зоне. Прежде всего, скорость и избыточное давление здесь изменяются синхронно во времени и в пространстве, а их отношение остается постоянным:

$$\frac{v}{P} = \frac{2\pi}{\lambda \omega \rho_0} = \frac{1}{c \rho_0} \approx \frac{1}{Z}, \quad (5.47)$$

где Z обозначает волновой импеданс.

Как мы уже знаем, в волновой (далней) зоне указанное отношение справедливо для любой функции $f(at)$, характеризующей колебания в источнике.

ПОТОК ЭНЕРГИИ

В главе 4 мы показали, что распространение энергии описывается вектором Пойнтинга

$$\mathbf{Y} = P\mathbf{v}. \quad (5.48)$$

Далее, учитывая (5.41) и (5.42), для радиальной компоненты этого вектора мы имеем

$$Y = \frac{m^2 \omega^3}{16\pi^2 \rho_0 R^3} (\sin x \cos x + \frac{2\pi R}{\lambda} \cos^2 x), \quad (5.49)$$

где

$$x = \omega(t - R/c).$$

Определим среднее значение потока энергии

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \int S dS dt$$

по сферической поверхности радиуса R за период T . В силу сферической симметрии,

$$I = \frac{4\pi R^2}{T} \int_0^T Y dt$$

или

$$I = \frac{m^2 \omega^3}{4\pi \rho_0 R T} \left[\int_0^T \sin x \cos x dt + \frac{2\pi R}{\lambda} \int_0^T \cos^2 x dt \right].$$

Поскольку первый интеграл исчезает, и

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

мы получим

$$I = m^2 \omega^3 / 4\lambda \rho_0. \quad (5.50)$$

Представим себе замкнутый контур l , расположенный на некоторой сферической поверхности радиуса R . Проводя прямые из начала координат к каждой точке l , мы получим конус (рис. 5.5, *a*), представляющий собой векторную трубку вектора Пойнтинга. Семейство таких трубок дает нам возможность визуализации поля независимо от длины волны.

Полезно также кратко обсудить деформацию элементарного объема, вызванную сферической волной. Рассмотрим сначала малый объем, ограниченный координатными поверхностями, показанными на рис. 5.5, *б*. Поскольку смещение имеет только радиальную компоненту

$$\mathbf{s} = s_R \mathbf{i}_R, \quad s_\theta = s_\phi = 0,$$

изменение объема происходит из-за движения частиц вдоль оси R . В то же время угол между элементарными поверхностями, формирующими данный

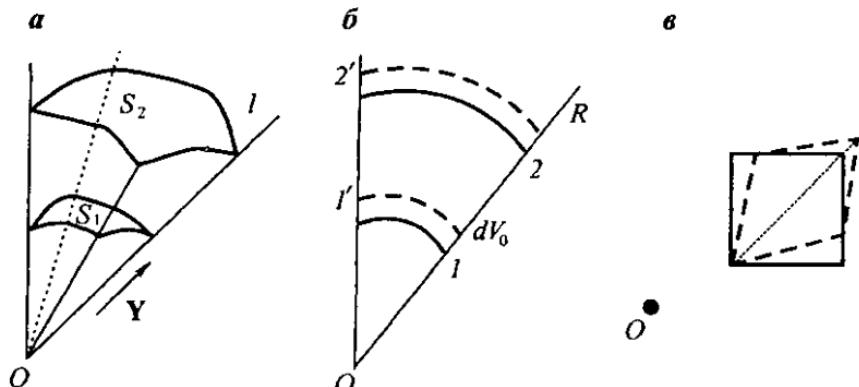


Рис. 5.5. Вектор Пойнтинга. Деформация

объем, остается постоянным и равняется $\pi/2$. Если объем dV имеет произвольную ориентацию относительно осей координат, то затем он трансформируется в ромб (рис. 5.5, в). В общем случае новый объем отличается от исходного. Как мы знаем, для таких деформаций

$$\operatorname{rot} \mathbf{s} = 0,$$

т.е. элементарный объем не вращается и в нем отсутствуют деформации простого сдвига.

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА A ОТ ЧАСТОТЫ

Ранее мы получили приближенное выражение (5.15) для коэффициента A . Теперь целесообразно найти значение A в частотном диапазоне, по-прежнему полагая $|s_R(t)| \ll R_0$.

Применяя формулу Эйлера, выражение (5.12) для синусоидальных волн можно переписать как

$$\phi(R, t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}). \quad (5.51)$$

Здесь

$$\Phi(k, R) = \mathcal{A} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (5.52)$$

является комплексной амплитудой, а k – волновым числом.

Таким же образом мы введем комплексную амплитуду для смещения:

$$s(R, t) = \operatorname{Re}(\mathcal{S} e^{-i\omega t})$$

и, по определению,

$$\mathcal{S} = \operatorname{grad} \Phi \text{ или } \mathcal{S} = \partial \Phi / \partial R.$$

Следовательно, после дифференцирования равенства (5.52) получим

$$\mathcal{S}(k, R) = -\frac{\mathcal{A}}{R^2} e^{ikR} + \frac{i k \mathcal{A}}{R} e^{ikR}. \quad (5.53)$$

Чтобы определить неизвестный коэффициент \mathcal{A} , мы снова используем граничное условие на поверхности полости, где смещение

$$s(R_0, t) = \operatorname{Re}(s_0 e^{-i\omega t}),$$

или, учитывая (5.37), получим

$$\mathcal{S}(R_0, t) = s_0. \quad (5.54)$$

Сравнение (5.53) с (5.54) дает

$$s_0 = -\frac{\mathcal{A}}{R_0^2} e^{ikR_0} + \frac{i k \mathcal{A}}{R_0} e^{ikR_0}.$$

Отсюда

$$\mathcal{A} = -\frac{s_0 R_0^2}{1 - ikR_0} e^{-ikR_0}. \quad (5.55)$$

Подставив последнее выражение в формулу (5.52), мы получим следующее выражение для комплексной амплитуды скалярного потенциала:

$$\Phi(k, R_0, R) = -\frac{s_0 R_0^2}{1 - ikR_0} \frac{e^{ik(R-R_0)}}{R}. \quad (5.56)$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$kR_0 = 2\pi R_0 / \lambda,$$

заключаем, что если длина волны λ значительно превышает радиус полости:

$$\lambda/R_0 \gg 2\pi \text{ и } R/R_0 \gg 1, \quad (5.57)$$

то выражение (5.15) дает корректное значение коэффициента \mathcal{A} при условии, что $|s_R(t)| \ll R_0$.

Так как радиус полости очень мал, неравенства (5.57) справедливы и для относительно высоких частот. Этот результат можно применить и для нестационарных волн, при условии, что они сформированы в основном синусоидальными волнами, длина волны которых значительно превосходит радиус полости.

В общем случае произвольной длины волны скалярный потенциал можно представить в следующем виде (см. приложение 7):

$$\phi(R, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\omega) F(\omega) e^{-i(\omega - kR)} d\omega,$$

где $\mathcal{A}(\omega)$ определяется выражением (5.55), а $F(\omega)$ – спектр функции $f(at)$, задаваемый формулой (5.8).

5.2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пусть в однородной среде имеется бесконечно длинная цилиндрическая полость радиуса r_0 (рис. 5.6, a). В момент времени $t = 0$ она начинает колебаться так, что смещение ее поверхности в радиальном направлении описывается следующим образом:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & t > \tau. \end{cases} \quad (5.58)$$

Здесь $f(at)$ – произвольная функция времени, обладающая первой и второй производными и одинаковая во всех точках поверхности полости.

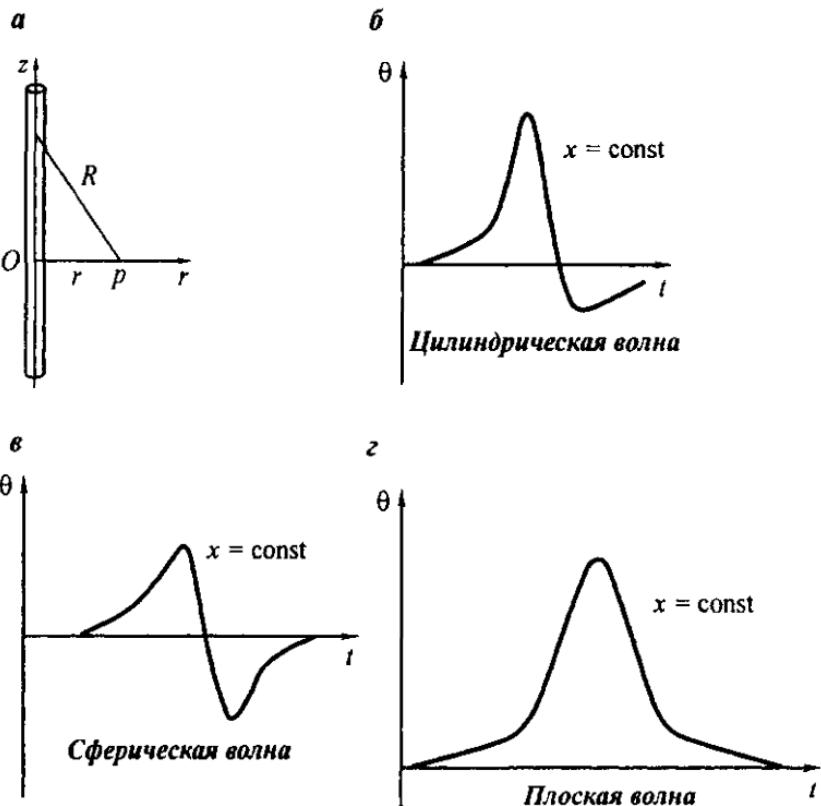


Рис. 5.6. Линейный источник (а); дилатация для различных волн как функция времени (б, в, г)

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена вдоль источника. Очевидно, что источник возбуждает уходящую волну, зависящую только от координаты r . Как и в предыдущем разделе, выведем сначала выражение для скалярного потенциала смещения ϕ :

$$s = \text{grad } \phi \text{ или } s_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (5.59)$$

В цилиндрической системе координат волновое уравнение для потенциала записывается как

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.60)$$

так как волновое поле не зависит от других координат.

В отличие от сферически симметричного случая, решение уравнения (5.60) в общем случае нельзя выразить через элементарные функции. По-

этому мы используем два различных метода, которые позволяют нам определить функцию ϕ . В основе одного из них лежит принцип суперпозиции, а в другом используется решение волнового уравнения для синусоидальных функций. Рассмотрим сначала первый подход. Линейный источник можно представить как сумму бесконечного числа элементарных источников одинаковой интенсивности, действующих синхронно во времени. В соответствии с этим волновое поле является в каждый момент результатом суперпозиции сферических волн от элементарных источников, и согласно (5.12) мы имеем

$$\phi(r, t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f[\alpha(t - R/c)]}{R} dz, \quad (5.61)$$

где постоянная A определяется из условия, заданного вблизи источника, а R обозначает расстояние от элементарного источника до точки наблюдения p .

Как следует из рис. 5.6, a,

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Поскольку элементарные источники, расположенные на одинаковом расстоянии от точки наблюдения p , вызывают одинаковые волновые поля, выражение (5.61) можно переписать как

$$\phi(r, t) = 2A \int_0^{\infty} \frac{f[\alpha(t - R/c)]}{R} dz. \quad (5.62)$$

Таким образом, мы получили выражение для потенциала ϕ в интегральной форме.

По определению, функция

$$A \frac{f[\alpha(t - R/c)]}{R}$$

отлична от нуля на интервале

$$\frac{R}{c} < t < \frac{R}{c} + \tau. \quad (5.63)$$

ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН

Простой физический смысл подынтегрального выражения в формуле (5.62) позволяет объяснить некоторые основные свойства волн, порожденных линейным источником. Прежде всего, учитывая тот факт, что источник имеет бесконечную длину и его интенсивность не зависит от координаты z , мы заключаем, что избыточное давление P и дилатация θ остаются постоянными на цилиндрической поверхности радиуса r . В то же время смещение и скорость частиц направлены по нормали к этой поверхности, где сохраняются также и их амплитуды. В силу указанной геометрии эта волна называется цилиндрической.

Все элементарные источники порождают в один и тот же момент времени волны одинаковой интенсивности, однако эти источники расположены на разном расстоянии от точки наблюдения. Поскольку источник, расположенный в окрестности начала координат ($r = 0, z = 0$), является ближайшим к точке r (рис. 5.6, *a*), волна от этого источника приходит раньше других. Таким образом, волновой фронт, имеющий форму цилиндрической поверхности, достигает наблюдателя в момент времени

$$t = r/c, \quad (5.64)$$

и в каждой точке вступление волны вызвано источником, расположенным на расстоянии r .

С течением времени в точку наблюдения начинают приходить элементарные сферические волны от все большего числа удаленных источников. Результирующее возмущение среды определяется суперпозицией этих волн. При этом необходимо различать два основных свойства этого явления. Как следует из выражения (5.58), линейный источник возбуждает колебания в течение интервала времени τ , а затем его действие прекращается. В этот момент заканчивается каждая из сферических волн. В частности, это означает, что момент времени

$$t = r/c + \tau$$

является последним моментом, когда источник, расположенный в окрестности начала координат, дает вклад в результирующую волну. В последующем интервале оси z , на котором источники уже прекратили вносить свой вклад в волновое поле в заданной точке, становится все больше. Иными словами, сферические волны от этих источников уже прошли через точку наблюдения. Соответственно, усиливается относительное влияние источников, расположенных на более далеких расстояниях R . Однако амплитуда сферических волн обратно пропорциональна расстоянию. Этот анализ показывает, что когда время стремится к бесконечности, суперпозиции этих волн, т.е. волновое поле, возбужденное линейным источником, становится меньше и стремится к нулю:

$$\phi(r, t) \rightarrow 0, \quad s(r, t) \rightarrow 0, \quad v(r, t) \rightarrow 0,$$

и (5.65)

$$P(r, t) \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow \infty.$$

Цилиндрическая волна имеет еще одно интересное свойство. Поскольку линейный источник является бесконечно длинным, для любого момента времени t всегда можно указать такой удаленный источник, от которого сферическая волна достигнет точки наблюдения еще позже. Таким образом, в отличие от сферической волны, цилиндрическая волна затухает в течение бесконечно долгого времени, т.е. она не заканчивается, и в этом смысле она напоминает процесс диффузии. Конечно, все это справедливо только для бесконечно длинного источника. Например, если длина линейного источни-

ка равняется 2δ , а точка наблюдения расположена в плоскости симметрии $z = 0$, то хвост волны, которая в данном случае не является цилиндрической, приходит в момент времени

$$t = \frac{R}{c} + \tau, \quad R = \sqrt{r^2 + l^2}.$$

Выражение (5.62) удобно переписать в виде

$$\phi(r, t) = 2A \begin{cases} 0 & t < r/c, \\ l & t \geq r/c. \end{cases} \quad (5.66)$$

Здесь

$$I \int_0^{\infty} \frac{f[\alpha(t - R/c)]}{R} dz. \quad (5.67)$$

Ранее мы пришли к заключению, что волновые поля исчезают, когда время стремится к бесконечности. Этот же результат следует из (5.67). Поскольку положение каждого из элементарных источников по отношению к точке наблюдения характеризуется величиной R , заменим переменную z в этом выражении на R .

В результате получим

$$z = \sqrt{R^2 - r^2}$$

и

$$dz = \frac{R dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Отсюда

$$I = \int_r^{\infty} \frac{f[\alpha(t - R/c)]}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR.$$

Вводя обозначение

$$x = t - R/c$$

или

$$R = c(t - x),$$

получим

$$dR = -c dx$$

и

$$I = \int_{-\infty}^x \frac{f[(ax)dx]}{\sqrt{(t-x)^2 - r^2/c^2}}.$$

Поскольку функция $f(ax)$ отлична от нуля на интервале

$$0 \leq x \leq t,$$

имеем

$$I = \int_0^t \frac{f(ax)dx}{\sqrt{(t-x)^2 - r^2/c^2}}. \quad (5.68)$$

Последнее выражение позволяет определить асимптотическое поведение, когда время стремится к бесконечности. В этом случае знаменатель в (5.68) стремится к t , и мы получаем

$$I = \frac{1}{t} \int_0^t f(ax)dx, \text{ если } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы убедились в том, что с увеличением времени существует такой момент, когда скалярный потенциал и, следовательно, амплитуда волновых полей начинает постепенно уменьшаться.

Рассмотрим теперь интеграл

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} P dt,$$

характеризующий распределение дилатации в цилиндрической волне.

Поскольку

$$P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

мы имеем

$$L = -\rho_0 \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} dt = \rho_0 \left[\frac{\partial \Phi(t_1)}{\partial r} - \frac{\partial \Phi(\infty)}{\partial r} \right],$$

где t_1 – произвольный момент времени, удовлетворяющий неравенству

$$t_1 < r/c.$$

Учитывая, что волновые поля отсутствуют до момента вступления волны и исчезают, когда время неограниченно растет, мы должны заключить, что

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} P dt = 0. \quad (5.69)$$

Следовательно, как и в случае сферической волны, в цилиндрической волне существуют зоны сжатия и растяжения, которые распределены таким образом, что интеграл L равен нулю. Поведение функции $\Theta(t)$ для цилиндри-

ческой и сферической волны показано на рис. 5.6, а и 5.6, в соответственно.

Как следует из выражения 5.62, легко вывести выражения для волновых полей. Так, например, избыточное давление определяется как

$$P(r, t) = -2A\rho_0 a^2 \int_0^R \frac{f''[\alpha(t - R/c)]}{R} dz.$$

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Получим решение волнового уравнения для гармонических волн. Пусть смещение поверхности полости линейного источника задается выражением

$$s = s_0 \cos \omega t \text{ или } s(t) = \operatorname{Re}(s_0 e^{-i\omega t}). \quad (5.71)$$

Тогда скалярный потенциал в каждой точке среды можно представить как

$$\phi(r, \omega, t) = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

или

$$\phi(r, \omega, t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}), \quad (5.72)$$

где

$$\Phi = \phi_0 e^{-i\alpha} \quad (5.73)$$

является комплексной амплитудой потенциала.

Подстановка (5.72) в (5.60) дает уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + k^2 \Phi = 0. \quad (5.74)$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число.

Приведенное выше уравнение является уравнением Бесселя нулевого порядка. Как известно, его решением являются функции Бесселя первого и второго рода:

$$J_0(mr) \text{ и } Y_0(mr).$$

Поведение этих функций и их производных показано на рис. 5.7, а, б. В частности, когда аргумент kr мал,

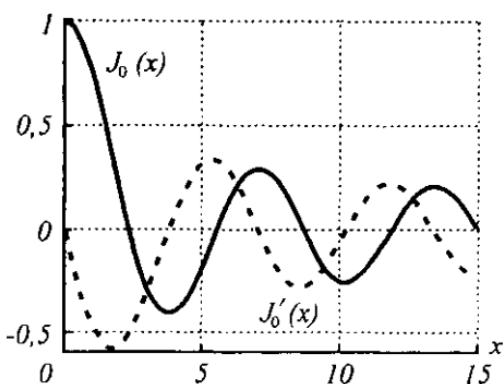
$$J_0(kr) \rightarrow 1 \text{ и } Y_0(kr) \rightarrow \frac{2}{\pi} \ln kr, \text{ если } kr \rightarrow 0, \quad (5.75)$$

т.е. функции Бесселя второго рода имеют логарифмическую особенность.

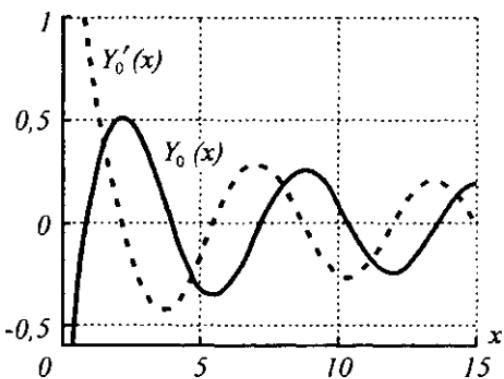
В противоположном случае, когда kr велико, функции Бесселя и их производные ведут себя как синусоидальные функции, амплитуда которых относительно медленно уменьшается:

Рис. 5.7. Функции Бесселя

а



б



$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.76)$$

$$Y_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } kr \gg 1.$$

Это асимптотическое поведение соответствует волновой зоне, поскольку, если $r/\lambda > 1$, то

$$kr = \frac{\omega}{c} r = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1.$$

Предположим, что функция $J_0(kr)$ описывает поведение потенциала в однородной среде:

$$\phi(r, \omega, t) = \operatorname{Re}(\mathcal{A} J_0(kr) e^{-i\omega t}).$$

Тогда согласно (5.76) мы имеем в волновой зоне

$$\phi(r, \omega, t) = \mathcal{A} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \cos\omega t, \text{ если } \frac{r}{\lambda} > 1.$$

Последнее выражение может характеризовать стоячую волну. Как мы знаем, такая волна возникает благодаря суперпозиции волн с одинаковыми частотами. Однако приведенная выше функция не удовлетворяет условию на бесконечности, где волна должна вести себя как уходящая. Таким образом, функцию $J_0(kr)$ нельзя использовать для описания волнового поля, возбуждаемого линейным источником в однородной среде. Конечно, такое же заключение можно сделать и в отношении функции Бесселя второго рода $Y_0(kr)$.

Чтобы удовлетворить условию на бесконечности, мы используем функции Ганкеля второго рода, которые определяются следующим образом:

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

и

(5.77)

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr).$$

Обе эти функции являются комбинациями функций Бесселя и, следовательно, они также являются решениями уравнения (5.74).

Теперь мы покажем, что использование функций Ганкеля позволяет удовлетворить условию на бесконечности. Как следует из (5.76) и (5.7), асимптотическое поведение функций Ганкеля описывается выражениями

$$H_0^{(1)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}$$

и

(5.78)

$$H_0^{(2)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)}, \text{ если } kr \gg 1.$$

Представим, прежде всего, комплексную амплитуду скалярного потенциала как

$$\Phi(r, \omega) = \mathcal{A} H_0^{(2)}(kr).$$

Отсюда

$$\Phi(r, \omega, t) = \mathcal{A} \operatorname{Re} \{H_0^{(2)}(kr)e^{-i\omega t}\}.$$

Принимая во внимание второе из выражений (5.78), мы видим, что с увеличением расстояния от источника произведение $\Phi e^{-i\omega t}$ стремится к следующему выражению:

$$\Phi e^{-i\omega t} = \mathcal{A} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(\omega t + kr - \pi/4)}, \text{ если } \frac{r}{\lambda} > 1.$$

Последняя формула описывает волну, распространяющуюся к началу координат, и поэтому она не удовлетворяет условию на бесконечности.

Однако если комплексная амплитуда потенциала записывается как

$$\Phi(r, \omega) = \mathcal{A} H_0^{(1)}(kr), \quad (5.79)$$

то указанное требование выполняется. Действительно, используя (5.78), получаем

$$\Phi(r, \omega) e^{-i\omega t} \approx \mathcal{A} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \omega t - \pi/4)}, \quad \text{если } \frac{r}{\lambda} > 1, \quad (5.80)$$

что, как известно, характеризует уходящую волну.

Как следует из выражения (5.79), скалярный потенциал $\Phi(r, \omega, t)$ удовлетворяющий условию на бесконечности, определяется как

$$\Phi(r, \omega) = \operatorname{Re}[\mathcal{A} H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}]. \quad (5.81)$$

Таким образом, мы показали, что выбор одной из функций $H_0^{(1)}(kr)$ или $H_0^{(2)}(kr)$ определяется зависимостью от времени: $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$.

Например, если решение волнового уравнения имеет вид

$$\Phi(r, \omega, t) = \operatorname{Re}(\Phi e^{i\omega t}),$$

то комплексную амплитуду необходимо записывать как

$$\Phi = \mathcal{A} H_0^{(2)}(kr).$$

Данный анализ показывает также, что если рассматривается волна в объеме конечных размеров (в направлении r), то решение можно представить через функции Бесселя

$$J_0(kr) \text{ и } Y_0(kr).$$

Заметим, что до настоящего момента коэффициент \mathcal{A} оставался неизвестным.

По аналогии со сферическими волнами определим коэффициент \mathcal{A} , используя граничное условие вблизи источника. Предположим, что радиус линейного источника r_0 достаточно мал, так что

$$kr_0 \gg 1.$$

Другими словами, длина волны λ много больше r_0 :

$$\lambda \gg r_0.$$

Тогда, принимая во внимание выражения (5.75) и (5.79), вблизи источника имеем

$$\Phi = \mathcal{A} \frac{2i}{\pi} \ln kr, \quad \text{если } kr \ll 1.$$

Поскольку

$$S = \partial \Phi / \partial r,$$

комплексная амплитуда смещения есть

$$S = \frac{2i}{\pi} \frac{A}{r}, \text{ если } kr \ll 1. \quad (5.82)$$

С другой стороны, из (5.71) следует, что

$$S(r_0, \omega) = s_0. \quad (5.83)$$

Сравнение двух последних равенств дает

$$s_0 = \frac{2i}{\pi} \frac{A}{r_0}$$

или

$$A = -\frac{i\pi}{2} s_0 r_0. \quad (5.84)$$

Таким образом, выражение для комплексной амплитуды потенциала записывается в виде

$$\Phi(r_0, \omega) = -\frac{i\pi}{2} r_0 s_0 H_0^{(0)}(kr), \text{ если } r > r_0 \quad (5.85)$$

или

$$\Phi(r_0, \omega) = -\frac{\pi r_0 s_0}{2} [Y_0(kr) - iJ_0(kr)].$$

Соответственно, для потенциала (5.72) имеем

$$\Phi(r, t) = \frac{\pi r_0 s_0}{2} [Y_0(kr) \cos \omega t - J_0(kr) \sin \omega t]. \quad (5.86)$$

Эта функция удовлетворяет волновому уравнению и условиям вблизи источника и на бесконечности, и, следовательно, она описывает волновые поля, возбуждаемые линейным источником в однородной среде.

Конечно, поведение функций Бесселя $J_0(kr)$ и $Y_0(kr)$, а также функций Ганкеля $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ известно во всех деталях.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Поскольку

$$s_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{и} \quad P = -\rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

поля цилиндрической волны задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} s(r, t) &= -\frac{\pi}{2} kr_0 s_0 \operatorname{Re} \{iH_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}\}, \\ v(r, t) &= -\frac{\pi}{2} kr_0 s_0 \omega \operatorname{Re} \{H_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}\}, \\ P(r, t) &= -\frac{\pi}{2} kr_0 s_0 \omega^2 \operatorname{Re} \{iH_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}\}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

где

$$H_0^{(0)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(1)}(x).$$

Для иллюстрации рассмотрим волновую зону. Как следует из формул (5.78) и (5.81),

$$\varphi(r, t) = \frac{\pi r_0 s_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sin\left(kr - \omega t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } r > \lambda. \quad (5.88)$$

Таким образом,

$$s = r_0 s_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \frac{\cos(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}},$$
$$v = r_0 s_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \omega \frac{\sin(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}}, \quad (5.89)$$
$$P = r_0 s_0 \sqrt{\frac{\pi k}{2}} k \omega^2 \rho_0 \frac{\sin(kr - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{r}}.$$

Мы видим, что в волновой зоне поля убывают с расстоянием гораздо быстрее, а именно, как $1/\sqrt{r}$.

Такая зависимость связана с тем, что поток энергии через произвольную цилиндрическую поверхность радиуса r должен оставаться постоянным. Действительно, площадь такой поверхности прямо пропорциональна r , а вектор Пойнтинга

$$\mathbf{Y} = Pv$$

ведет себя как $1/r$, так что произведение площади на этот вектор не меняется.

Возвращаясь к общему случаю соотношений (5.87), описывающих волновое поле на любом расстоянии от источника, следует заметить следующее.

1. В случае сферической волны, вызванной единичным источником, выражение для любого из волновых полей записывается в виде произведения двух функций:

$$f_1(R) \operatorname{Re} e^{-i\omega(t-R/c)} \text{ или } f_2(R) \operatorname{Im} e^{-i\omega(t-R/c)}.$$

Присутствие аргумента $t - R/c$ ясно указывает на их волновую природу.

Однако этот аргумент отсутствует в случае цилиндрической волны, когда дело касается ближней или промежуточной зоны. Это можно объяснить тем, что в каждой точке волна является суперпозицией элементарных волн, источники которых находятся на разных расстояниях kr от точки наблюдения. В волновой зоне, где расстояние r больше длины волны λ , эффект распространения виден непосредственно из выражений (5.88)–(5.89), поскольку все элементарные волны относятся к этой зоне.

2. В соответствии с выражениями (5.89) мы имеем в волновой зоне

$$v/P = 1/c\rho_0 = 1/Z,$$

что наблюдается также и в случае сферической волны.

3. С увеличением расстояния от источника кривизна волновых поверхностей $r = \text{const}$ становится меньше, и, соответственно, объем, в пределах которого цилиндрическую волну можно интерпретировать как плоскую, становится больше.

4. Очевидно, что, зная решение граничной задачи для синусоидальных волн, мы можем описать нестационарные волны, используя для этого интеграл Фурье.

5.3. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь третий, самый простой тип волн. Предположим, что источник состоит из двух параллельных плоскостей бесконечной протяженности, расположенных в окрестности плоскости YOZ (рис. 5.8, a). Пусть в каждый момент времени эти плоскости движутся в противоположных направлениях так, что смещение s имеет только одну компоненту: $s_x = s(t)$, не зависящую от координат u и z . Очевидно, что колебания такого источника вызывают уходящую волну по обе его стороны.

Для определения волновых полей, мы могли бы использовать, как и ранее, скалярный потенциал. Однако, учитывая простоту геометрии волнового поля, мы можем начать непосредственно с выражения для смещения и предположить, что в окрестности источника оно меняется как

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(at) & 0 < t \leq \tau, \\ f(at) & t > \tau. \end{cases} \quad (5.90)$$

Поскольку волновые поля зависят только от координаты x , волновое уравнение сильно упрощается, и мы имеем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (5.91)$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$s(x, t) = A\phi[a(t - x/c)] + Bg[a(t + x/c)].$$

Описанный выше источник генерирует одинаковые волны по обе стороны плоскости YOZ , и, следовательно, мы можем ограничиться диапазоном $x > 0$. В этом случае

$$s(x, t) = A\phi[a(t - x/c)]. \quad (5.92)$$

Смещение (5.92) должно удовлетворять граничным условиям (5.90) на поверхности источника.

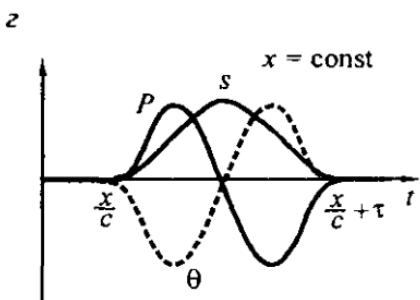
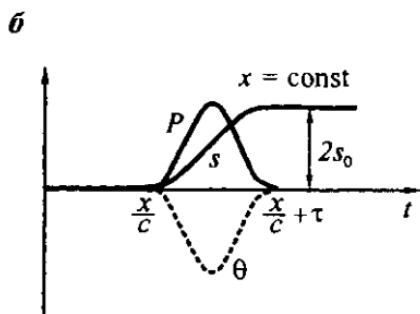
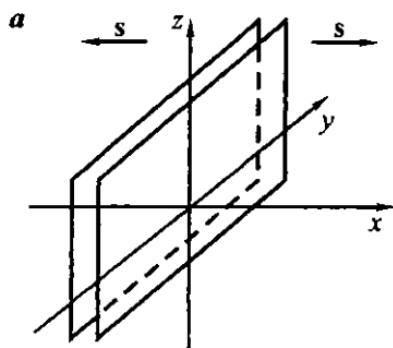


Рис. 5.8. Источник плоской волны (a); плоские волны как функции времени и расстояния (b, в, г)

Эти условия будут удовлетворены, если

$$A = s_0 \text{ и } \Phi[a(t - x/c)] = f[a(t - x/c)].$$

Таким образом,

$$s(x, t) = s_0 f[a(t - x/c)]. \quad (5.93)$$

Из соотношений

$$v = \partial s / \partial t, \quad \theta = \partial s / \partial x \quad \text{и} \quad P = -K\theta$$

получаем волновые поля

$$s(x, t) = s_0 f[a(t - x/c)], \quad v(x, t) = s_0 a f'[a(t - x/c)]$$

и

$$\theta(x, t) = -\frac{s_0 a}{c} f'[a(t - x/c)]. \quad (5.94)$$

Здесь $K = \rho_0 c^2$.

По аналогии с синусоидальными колебаниями аргумент

$$a(t - x/c)$$

называется фазой волны.

Как видно из выражений (5.94), поверхности постоянной фазы являются плоскостями, перпендикулярными оси x . По этой причине эти волны называются плоскими. Они играют чрезвычайно важную роль в сейсмологии. Из выражений (5.94) следует, что фронт волны приходит в момент времени $t = x/c$, и его фаза равняется нулю. Затем, на интервале

$$\frac{x}{c} \leq t < \frac{x}{c} + \tau$$

частицы среды вовлекаются в движение, пока не наступит момент времени

$$t = x/c + \tau,$$

когда приходит хвост волны. Фаза на этой плоскости равняется $a\tau$. После прохождения этой плоскости движение частиц прекращается, и они находятся в состоянии покоя.

Следует заметить, что, в отличие от цилиндрических волн, у плоских волн так же, как у сферических, имеется фронт и хвост волны.

ПОВЕДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассматривая поведение волновых полей как функции расстояния, целесообразно различать два временных интервала:

1) $t \leq \tau$ и 2) $t \geq \tau$.

В течение первого интервала движение частиц происходит в объеме среды, который определяется неравенствами

$$0 \leq x \leq ct,$$

но по-прежнему отсутствует, если

$$x > ct.$$

Во втором случае у волны имеется как фронтальная, так и хвостовая части, и соответственно имеется два диапазона расстояний, где волна отсутствует:

а) $x > ct$ и б) $x < c(t - \tau)$.

В то же время волна присутствует в слое, ограниченном следующими двумя плоскостями:

$$x = c(t - \tau) \text{ и } x = ct.$$

В предыдущих разделах мы показали, что в пределах сферического или цилиндрического слоя всегда имеются такие зоны сжатия или растяжения, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt$$

обращается в ноль. Однако в случае плоских волн этот интеграл не обязательно исчезает. Действительно, из последнего равенства (5.94) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P dt &= \frac{s_0 a K}{c} \int_{t_1}^{t_2} f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] dt = \\ &= \frac{s_0 K}{c} \left\{ f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] - f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.95)$$

где

$$t_1 < x/c \text{ и } t_2 > x/c + \tau.$$

Здесь t_1 – момент времени до прихода волны, а t_2 соответствует моменту времени, когда волна уже прошла через точку наблюдения.

Когда источник плоской волны возвращается в свое исходное положение,

$$f(at_2) = f(at_1) = 0$$

и, следовательно, в пределах волнового слоя имеются зоны сжатия и растяжения и

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt = 0. \quad (5.96)$$

Предположим теперь, что смещение в источнике не обращается в нуль, т.е.

$$f(at) \neq 0, \text{ если } t \geq \tau.$$

Так, например, со временем смещение изменяется и асимптотически стремится к некоторому постоянному значению функции $f(at)$.

В соответствии с (5.95) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt = \frac{K s_0}{c} f \left[a \left(t_2 - \frac{x}{c} \right) \right]. \quad (5.97)$$

Таким образом, в отличие от сферической и цилиндрической волны, в данном случае интеграл может быть не равен нулю. В частности, можно представить себе волну, в которой происходит только сжатие или только растяжение.

Этот результат можно описать следующим образом. Если интеграл в (5.95) равняется нулю, то частицы возвращаются в свое первоначальное положение за хвостом волны. Если же интеграл отличен от нуля, эти частицы также находятся в равновесии, но они смещены на некоторое расстояние от своего первоначального положения. Имеется еще одно интересное свойство плоских волн, а именно взаимосвязь между скоростью частиц и избыточным давлением. Как следует из равенства (5.94),

$$v/P = c/K = 1/\rho_0 c = 1/Z. \quad (5.98)$$

Как мы показали ранее, последнее равенство наблюдается также в волновой зоне сферической и цилиндрической волны, и это совпадение не случайно.

Оценим отношение v/c . Полагая

$$P = 2 \cdot 10^3 \text{ Па или } P = 160 \text{ дБ, } \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с,}$$

имеем

$$K = \rho_0 c^2 = 10^3 \cdot 2,25 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$$

и, следовательно,

$$\frac{v}{c} \approx \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2}{2,25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2} \approx 10^{-6},$$

т.е. скорость частиц на несколько порядков меньше фазовой скорости волны даже при высоком давлении.

Для иллюстрации поведения плоской волны рассмотрим два примера.

Пример 1

Предположим, что смещение в источнике постепенно растет и достигает своего максимального значения. Его зависимость от времени описывается следующим выражением:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \cos \frac{\pi}{\tau} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2, & t > \tau. \end{cases}$$

Соответственно, волновое поле $s(x, t)$ имеет вид

$$s(x, t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ 1 - \cos \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 2, & t > \tau + \frac{x}{c}. \end{cases}$$

Таким образом, для дилатации θ и избыточного давления P имеем

$$\theta = \partial s / \partial x \text{ и } P = -K\theta,$$

где

$$\theta(x, t) = -\frac{\pi s_0}{\tau c} \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ \sin \frac{\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 2, & t > \tau + \frac{x}{c}. \end{cases}$$

Поведение этих полей как функций времени показано на рис. 5.8, б.

Как следует из (5.98), скорость частиц, а также давление зависят от времени и расстояния от источника одинаковым образом.

Очевидно, что распределение давления как функции расстояния характеризуется тремя диапазонами:

- 1) $x > ct$, 2) $c(t - \tau) \leq x \leq ct$, 3) $x < c(t - \tau)$.

Избыточное давление отлично от нуля только в промежуточном диапазоне. В то же время позади волны частицы смещены на расстояние, равное $2s_0$, и остаются в состоянии покоя (рис. 5.8, в). Данный пример соответствует случаю, когда существует только один тип деформации (сжатие) и частицы не возвращаются в свое первоначальное положение.

Пример 2

Предположим теперь, что смещение в источнике описывается следующей формулой:

$$s(t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \cos \frac{2\pi}{\tau} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Отсюда для волновых полей вытекают следующие выражения:

$$s(x, t) = s_0 \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ 1 - \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 0, & t > \frac{x}{c} + \tau \end{cases}$$

и

$$\theta(x, t) = -\frac{2\pi s_0}{\tau c} \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c}, \\ \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right), & \frac{x}{c} \leq t \leq \frac{x}{c} + \tau, \\ 0, & t > \frac{x}{c} + \tau, \end{cases}$$

тогда как

$$P = -K\theta \quad \text{и} \quad v = \frac{c}{K} P.$$

Поведение этих функций, характеризующих волновое поле в пространстве и времени, показано на рис. 5.8, г, 5.9, а.

В отличие от предыдущего примера, волновое поле здесь имеет две зоны: зону сжатия и зону растяжения. Позади этих зон частицы среды возвращаются в свое исходное положение.

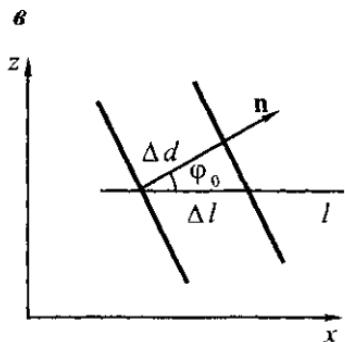
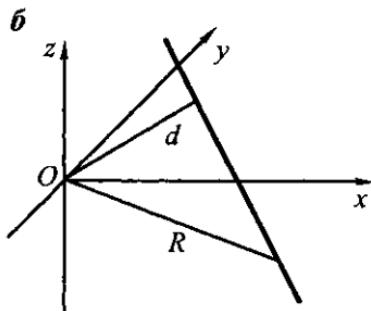
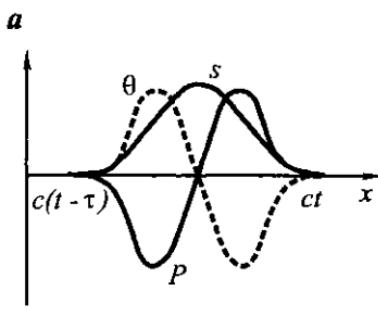


Рис. 5.9. Плоская волна как функция расстояния (а); ориентация фазовой поверхности (б); кажущаяся скорость (в); переход к плоской волне (г)

Очевидно, что, если колебания в источнике описываются во времени синусоидальными функциями, то волна существует повсюду, а зоны сжатия и растяжения чередуются друг с другом.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

До сих пор мы предполагали, что волна распространяется вдоль оси x . Для последующего изучения полезно рассмотреть также общий случай, когда волна имеет произвольную ориентацию (рис. 5.9, б). С этой целью выберем декартову прямоугольную систему координат x , y , z с началом в некоторой точке O , расположенной в плоскости источника, где волна возникает в момент времени $t = 0$.

Тогда для смещения и избыточного давления имеем

$$s = s_0 f \left[a \left(t - \frac{d}{c} \right) \right] \mathbf{n} \quad (5.99)$$

и

$$P = \frac{s_0 K a}{c} f \left[a \left(t - \frac{d}{c} \right) \right].$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения волны, d – расстояние от начала координат до любой из фазовых поверхностей, например до фронта волны.

Расстояние естественно выразить через координаты произвольной точки фазовой поверхности и компоненты единичного вектора \mathbf{n} .

Очевидно, что радиус-вектор

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}.$$

Как видно из рис. 5.9, б, расстояние

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = n_x x + n_y y + n_z z. \quad (5.100)$$

Соответственно вместо выражения (5.99) получим

$$s(x, t) = s_0 f \left[a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \right] \quad (5.101)$$

и

$$P(x, t) = \frac{s_0 K a}{c} f' \left[a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \right],$$

где

$$a \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right)$$

является фазой.

Коэффициенты n_x , n_y и n_z являются проекциями единичного вектора на координатные оси и по определению они равняются направляющим косинусам:

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \cos \beta, \quad n_z = \cos \gamma, \quad (5.102)$$

где α , β и γ – углы между вектором \mathbf{n} и координатными осями.

Как известно (см. приложение 1),

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (5.103)$$

и

$$n_x \leq 1, \quad n_y \leq 1, \quad n_z \leq 1.$$

Предположим, что на интервале времени Δt фазовая поверхность перемещается на расстояние Δd :

$$\Delta d = c \Delta t. \quad (5.104)$$

Если мы рассмотрим распространение волны вдоль произвольной прямой l , то указанная поверхность пересечет эту линию в точке на расстоянии Δl , и, как видно из рис. 5.9, θ ,

$$\Delta l = \Delta d / \cos \phi_0,$$

где ϕ_0 – угол между прямыми d и l . Таким образом, скорость фазовой поверхности вдоль прямой l равна

$$c_l = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{c}{\cos \phi_0}, \quad (5.105)$$

и с ростом ϕ_0 эта скорость неограниченно возрастает. В частности, на фазовой поверхности скорость c , равняется бесконечности.

Как следует из (5.102) и (5.105), скорости фазовой поверхности вдоль осей координат определяются следующими равенствами:

$$c_x = c/n_x, \quad c_y = c/n_y \quad \text{и} \quad c_z = c/n_z. \quad (5.106)$$

В отличие от фазовой скорости c , которая определяется только физическими параметрами среды ρ_0 и K , функция c_l , называемая кажущейся скоростью волны, зависит также от направления прямой l .

Запишем выражения для синусоидальных волн. Согласно (5.101) имеем

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right) \quad (5.107)$$

и

$$P(x, t) = -\frac{s_0 K \omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} \right).$$

Каждую из этих формул можно записать в другом виде. Например, для смещения имеем

$$s(x, t) = s_0 \cos [\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)], \quad (5.108)$$

где

$$k_x = \omega n_x / c, \quad k_y = \omega n_y / c, \quad k_z = \omega n_z / c. \quad (5.109)$$

Иногда бывает удобно ввести вектор распространения \mathbf{k} , имеющий компоненты

$$k_x = k n_x, \quad k_y = k n_y, \quad k_z = k n_z$$

или

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma.$$

Здесь

$$k = \omega/c.$$

Следовательно, выражение (5.108) можно представить как

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kR). \quad (5.111)$$

Конечно, ни плоская, ни цилиндрическая волна в реальности не существуют, поскольку их источники должны обладать бесконечно большой энергией. В то же время при определенных условиях эти модели волн могут интерпретироваться как достаточно точная аппроксимация реально существующих волн. Например, рассмотрим снова сферическую волну. Увеличение расстояния R от источника приводит к двум эффектам. Прежде всего, волновые поля начинают медленно затухать и, в соответствии с (5.17), на достаточно больших расстояниях мы имеем

$$\begin{aligned} s(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a}{cR} f' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \\ v(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a^2}{cR} f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \\ P(R, t) &= \frac{R_0^2 s_0 a^2}{R} \rho_0 f'' \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Во-вторых, кривизна волновой поверхности становится меньше, и это означает, что гораздо большую ее часть можно приближенно заменить плоской волной.

Полагая в (5.112)

$$\frac{R_0^2 s_0 a}{cR} = A$$

и заменяя функцию $f'[a(t-R/c)]$ функцией $f[a(t-R/c)]$, мы приходим к выражению (5.94).

Таким образом, поведение сферической волны на достаточно больших расстояниях и в пределах некоторого объема конечных размеров (рис. 5.9, 2) практически совпадает с поведением плоской волны. В частности, в случае синусоидальной волны эта эквивалентность выполняется в волновой зоне ($R > \lambda$) при условии, что расстояние R достаточно велико.

Если сферическая волна является нестационарной, то плоская волна также может служить относительно точной аппроксимацией на больших расстояниях от источника и в волновой зоне:

$$R > \lambda_0.$$

Здесь λ_0 – наибольшая длина волны в спектре, которая еще дает существенный вклад в амплитуду сферической волны.

В заключение заметим следующее. С геометрической точки зрения мы рассмотрели три различные волны: сферическую, цилиндрическую и плоскую. Все эти волны обладают одним общим свойством, которое заключается в том, что избыточное давление, дилатация, а также амплитуда смещений и скорость частиц остаются постоянными на фазовой поверхности:

$$P = C_1, \quad \theta = C_2, \quad |\mathbf{s}| = C_3, \quad |\mathbf{v}| = C_4. \quad (5.113)$$

В дальнейшем мы будем изучать волны более общего типа, когда волновые поля изменяются на фазовых поверхностях. Примером таких волн являются гравитационные волны.

Глава 6. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

6.1. СУПЕРПОЗИЦИЯ ВОЛН ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ранее мы рассматривали поведение волн, возбуждаемых в однородной среде либо единственным элементарным, либо линейным источником. Перед тем, как рассматривать более сложные случаи, сформулируем еще раз основные свойства волновых полей, возбуждаемых элементарными источниками.

1. Волновое поле элементарного источника является сферически симметричным. Это означает, что поток энергии распределяется равномерно по сфере, в центре которой расположен сам источник. Геометрия волновых полей (включая вектор Пойнтинга) описывается в предположении, согласно которому распространение волн происходит вдоль прямых лучей, направленных от источника к точке наблюдения.

В соответствии с этим можно представить себе множество воображаемых конических трубок с вершиной в источнике. Поток энергии вдоль каждой такой трубки остается постоянным, а величина вектора Пойнтинга уменьшается, поскольку по мере удаления от источника растет площадь сечения трубы. Векторы смещений и скорости смещений частиц среды ортогональны сечению каждой конической трубы.

2. Всегда существуют три зоны волнового поля, а именно ближняя, промежуточная и собственно волновая. В ближней зоне волновое поле в любой точке почти синхронно с колебаниями в непосредственной близости от источника. В этой части упругой среды присутствуют только колебания, при которых эффект распространения преибержимо мал. В пределах промежуточной зоны эффекты распространения становятся сравнимыми с вибрационными эффектами. И, наконец, в волновой зоне наблюдаются в основном бегущие волны, амплитуда которых медленно уменьшается с расстоянием.

Таким образом, обычно можно наблюдать два явления. Одно из них (вибрации) проявляется в синхронном изменении положения всех частиц. Оно сопровождается деформацией среды, при которой отсутствует дилатация, и таким образом в среде не возникает дополнительного давления. Вибрации быстро затухают с расстоянием от источника. Второе явление – распространение волн – также наблюдается во всех трех зонах, однако только в волновой зоне оно начинает доминировать и дает наибольший вклад в смещения и скорости частиц. Для синусоидальных волн эта зона определяется неравенством R/λ .

Следует еще раз отметить, что избыточное давление описывается одинаковым образом во всех трех зонах.

Как правило, волновые поля становятся гораздо более сложными, когда вместо одного точечного источника используются сразу несколько. В этом случае результирующее волновое поле является суммой полей от всех источников:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

В результате такой суперпозиции возникает явление, которое называется либо интерференцией, либо дифракцией, и которое играет фундаментальную роль в сейсмологии. В дальнейшем мы увидим, что любая волна (падающая, отраженная, преломленная, головная или поверхностная) в действительности представляет собой суперпозицию бесконечного числа элементарных волн.

В этом разделе описывается суперпозиция синусоидальных волн в предположении, что частота этих волн одинакова. В дальнейшем это ограничение будет снято.

Иногда, при небольшом числе источников, мы будем говорить об интерференции волн. Суперпозиция волн от большого числа источников называется дифракцией. Конечно, такая классификация является условной, поскольку и интерференция, и дифракция описывают, по сути, один и тот же процесс суммирования волновых полей.

Чтобы лучше понять, каким образом происходит взаимодействие волн от разных источников, рассмотрим сначала несколько относительно простых примеров.

Пример 1: интерференция двух волн

Пусть имеется два элементарных источника. Тогда для скалярного потенциала ($\mathbf{s} = \text{grad } U$) имеем

$$U_1(p, t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

и

$$U_2(p, t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

или

$$U_1(p, t) = A_1 \cos(\omega t + kR_1)$$

и

$$U_2(p, t) = A_2 \cos(\omega t + kR_2 - \alpha),$$

где R_1 и R_2 обозначают расстояния от точки наблюдения до, соответственно, первого и второго источника, а волновое число k определяется как

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda.$$

Параметр α характеризует сдвиг фаз между колебаниями источниками.

Из равенств (6.2) следует, что сдвиг фаз между волнами, приходящими в точку наблюдения, определяется, помимо параметра α , разностью расстояний

$$\Delta R = R_2 - R_1. \quad (6.3)$$

Предположим, что амплитуды воли одинаковы: $A_1 = A_2$. Тогда сумма двух волн описывается выражением

$$U(p, t) = A \cos(\omega t + \phi_1) + A \cos(\omega t + \phi_2).$$

Применяя известную тригонометрическую формулу, получим

$$U(p, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right)$$

или

$$U(p, t) = A_R \cos\left(\omega t + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right), \quad (6.4)$$

где

$$A_R = 2A \cos\frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1). \quad (6.5)$$

Таким образом, результирующее поле также является синусоидальной функцией, зависящей от разности фаз между исходными волнами и имеющей амплитуду, прямо пропорциональную A . В то же время начальная фаза суммарной волны равняется среднему от фаз ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\tau = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}. \quad (6.6)$$

Прежде чем приступить к анализу эффекта суперпозиции, рассмотрим более общий случай, когда амплитуды A_1 и A_2 не равны друг другу. С этой целью удобно использовать комплексную амплитуду скалярного потенциала. В этом случае

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$$

или

$$\mathcal{U} = A_R e^{i\tau} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}. \quad (6.7)$$

Чтобы определить амплитуду A_R , учтем равенство

$$z^2 = zz^*,$$

где z^* – величина, комплексно сопряженная числу z .

Полагая

$$u = A_R e^{i\pi} \quad \text{и} \quad u^* = A_R e^{-i\pi},$$

получим

$$\begin{aligned} A_R^2 &= (A_1 e^{i\Phi_1} + A_2 e^{i\Phi_2})(A_1 e^{-i\Phi_1} + A_2 e^{-i\Phi_2}) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} + e^{-i(\Phi_2 - \Phi_1)}] \end{aligned}$$

или

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (6.8)$$

Таким образом,

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)}. \quad (6.9)$$

В частности, при $A_1 = A_2$

$$A_R = \sqrt{2A \sqrt{1 + \cos(\Phi_2 - \Phi_1)}}$$

или

$$A_R = 2A \cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2},$$

что совпадает с выражением (6.5).

Как известно, величина вектора Пойнтинга прямо пропорциональна A_R^2 и характеризует интенсивность сигнала I . В соответствии с равенством (6.8) интенсивность результирующей волны равняется сумме трех слагаемых. Первые два, пропорциональные A_1^2 и A_2^2 , описывают интенсивность волн, вызванных, соответственно, первым и вторым источником, а последнее слагаемое

$$2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

характеризует эффект интерференции этих волн. Это слагаемое может быть положительным, отрицательным или равняться нулю. В первом случае мы имеем дело с конструктивной интерференцией, поскольку интенсивность I результирующей волны превышает сумму интенсивностей волн, вызванных каждым из источников:

$$I > I_1 + I_2.$$

Если третье слагаемое в (6.8) отрицательное, наблюдается деструктивная интерференция и

$$I < I_1 + I_2.$$

Наконец, если фазы Φ_1 и Φ_2 связаны соотношением

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\pi}{2} (2n + 1),$$

где n – целое число, то интерференционный член в (6.8) исчезает и

$$I = I_1 + I_2.$$

Чтобы проиллюстрировать использование равенства (6.5), предположим, что существует два источника с одинаковыми амплитудами колебаний, имеющих фазовый сдвиг α .

Будем рассматривать взаимодействие волн, вызванных этими источниками, на расстояниях, значительно превышающих расстояние d между самими источниками (рис. 6.1, *a*):

$$R_1 \gg d \quad \text{и} \quad R_2 \gg d. \quad (6.10)$$

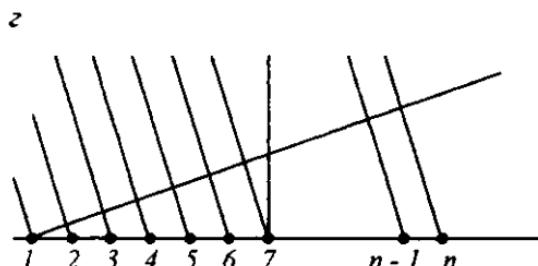
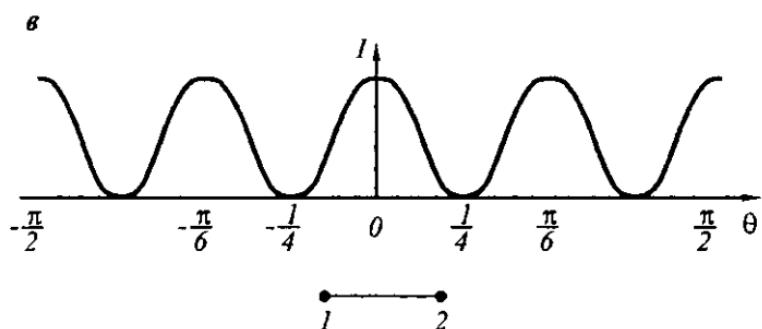
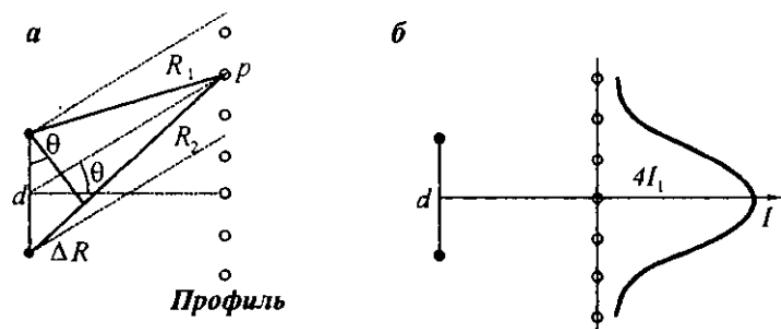


Рис. 6.1. Система, состоящая из двух источников (*a*); поведение функции интенсивности ($d = \lambda/2$) (*b*); поведение функции интенсивности ($d = 2\lambda$) (*в*); система, состоящая из n источников (*г*)

Данное условие вместе с условием равенства амплитуд источников означает, что амплитуды волн практически равны друг другу и не зависят от точки наблюдения.

Исследуем теперь, как ведут себя амплитуда и интенсивность результирующей волны вдоль профиля, параллельного линии, соединяющей оба источника (рис. 6.1, a). В общем случае волны, приходящие в произвольную точку p , имеют различные фазы, и, как отмечалось ранее, фазовый сдвиг состоит из двух слагаемых. Первое из них равняется α . Второе слагаемое возникает из-за того, что источники находятся на разных расстояниях от точки наблюдения. С учетом условий (6.10) указанная разность фаз приближенно равняется следующей величине:

$$\Delta R = R_2 - R_1 = d \sin \theta, \quad (6.11)$$

где угол θ показан на рис. 6.1, a.

Хотя разность ΔR чрезвычайно мала по сравнению с R , фаза, определяемая отношением

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda},$$

может быть очень большой. Таким образом, полный сдвиг фаз равняется

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \alpha + k \Delta R = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (6.12)$$

Из равенства (6.5) следует, что функция A_R является периодической относительно сдвига фаз $\Phi_2 - \Phi_1$.

Полагая $\alpha = 0$, перепишем выражение (6.5) в виде

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta\right). \quad (6.13)$$

Отсюда, например, для средней точки профиля $\theta = 0$, имеем

$$A_R = 2A. \quad (6.14)$$

Этот результат очевиден, поскольку обе волны приходят в указанную точку с одинаковыми фазами и, следовательно, наблюдается максимальный эффект конструктивной интерференции, при котором интенсивность увеличивается в 4 раза.

При изучении интерференции волн вдоль рассматриваемого профиля удобно различать следующие два случая:

1) $d \leq \lambda$ и 2) $d > \lambda$.

Случай 1: $d \leq \lambda$

В качестве примера положим

$$d = \lambda/2.$$

Тогда вместо равенства (6.13) получим

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right), \quad (6.15)$$

и амплитуда результирующей волны постепенно уменьшается с увеличением угла θ .

Так, например, при $\theta = \pi/6$

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad A_R = \sqrt{2}A.$$

Отсюда

$$I = 2I_1 = II_2.$$

В пределе, при $\theta \rightarrow \pi/2$, получаем

$$A_R \rightarrow 0$$

и в этом случае мы имеем дело с деструктивной интерференцией, поскольку сдвиг фаз достигает значения π (рис. 6.1, б).

В общем случае, при $d = \lambda/m$ и $m \gg 1$, также наблюдается уменьшение интенсивности результирующей волны, когда $\theta \rightarrow \pi/2$. Однако при $d \ll \lambda$ влияние деструктивной интерференции относительно мало, поскольку максимальная разность фаз ϕ_{\max} стремится к $2\frac{\pi}{m}$:

$$0 \leq \phi < 2\frac{\pi}{m}.$$

Случай 2: $d > \lambda$

Для иллюстрации этого случая положим $d = 2\lambda$. Тогда равенство (6.13) дает

$$A_R = 2A \cos(2\pi \sin \theta). \quad (6.16)$$

Учитывая, что функция A_R является четной относительно угла θ , рассмотрим ее поведение на интервале

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Из формулы (6.16) следует, что интенсивность максимальна при

$$2\pi \sin \theta = k\pi,$$

где

$$k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, максимум амплитуды наблюдается в точках, соответствующих следующим углам θ :

$$\theta = 0, \pi/6, \pi/2.$$

Точки, в которых результирующая амплитуда равняется нулю, определяются равенством

$$2\pi \sin \theta = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

т.е. при следующих значениях угла θ : $\theta = 0,25$ и $\theta = 0,85$. Поведение функции I показано на рис. 6.1, в.

В отличие от предыдущего случая, теперь функция I имеет пять максимумов, расположенных симметрично относительно экваториальной плоскости $\theta = 0$, однако между этими точками наблюдается сильная деструктивная интерференция.

Пусть расстояние между источниками равняется

$$d = m\lambda, \quad (6.17)$$

где m – целое число.

Из равенства (6.13) следует, что интенсивность максимальна, если

$$\pi m \sin \theta = k\pi$$

или

$$\sin \theta = k/m,$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, отношение расстояния d к длине волны λ определяет число экстремумов функции A_R . В частности, на интервале

$$0 \leq \theta < \pi/2$$

амплитуда результирующей волны достигает одного и того же максимального значения

$$A_R = 2A$$

в $m+1$ точках.

В то же время, если расстояние d между источниками меньше λ , то при $\theta = 0$ существует только один максимум.

В этих случаях, когда m не является целым числом, например, когда

$$[m] < m < [m + 1],$$

число максимумов функции A_R равняется $[m] + 1$. Здесь квадратные скобки обозначают целое число.

Как следует из выражений (6.2) – (6.5), амплитуда и фаза результирующей волны не изменяются, если, соответственно,

$$R_1 - R_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad R_1 + R_2 = \text{const}.$$

Это означает, что функция A_R остается постоянной на поверхности гиперболоида вращения, а фаза не изменяется на эллипсоидах вращения, и у них имеется общие фокусы, в которых располагаются источники. Таким образом, амплитуда меняется на поверхностях равной фазы, и мы имеем дело с неоднородной волной.

Учитывая, что точки наблюдения расположены далеко от источников, можно представить себе, что энергия, сгенерированная каждым из источников, переносится вдоль параллельных прямых (пунктирные линии на рис. 6.1, a). Направление этих прямых определяется углом θ , характеризующим точку наблюдения. Очевидно, что сдвиг фаз между волнами, распространяющимися вдоль этих прямых, по-прежнему определяется выражением (6.10). Такой подход, лежащий в основе так называемых приближений Фраунгофера и Френеля, полезен при изучении суперпозиции волн в гораздо более сложном случае, описание которого приводится ниже.

Пример 2: интерференция волн от n источников

Рассмотрим дифракцию волн от n источников, расположенных на одной прямой (рис. 6.1, г). Пусть расстояние и сдвиг фаз между любыми двумя соседними источниками остаются постоянными и равняются, соответственно, d и α . Предположим также, что протяженность $(n - 1)d$ всего источника мала по сравнению с расстоянием от него до точки наблюдения. Следовательно, разность фаз ϕ волн, вызванных этими источниками, определяется в точке наблюдения выражением (6.12).

Применяя принцип суперпозиции, получим следующее выражение для скалярного потенциала результирующей волны:

$$U(p, t) = A[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + \cos(\omega t + (n-1)\phi)], \text{ если } n > 1. \quad (6.18)$$

Определить эту сумму можно двумя разными способами. Во-первых, равенство (6.18) можно переписать как

$$U(p, t) = \operatorname{Re} A \left\{ e^{-i\omega t} + e^{-i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + 2\phi)} + \dots + e^{-i(\omega t + (n-1)\phi)} \right\} \quad (6.19)$$

или

$$U(p, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{U} e^{-i\omega t} \right\}, \quad (6.20)$$

где комплексная амплитуда потенциала дается формулой

$$\mathcal{U} = A \left\{ 1 + e^{-i\phi} + e^{-i2\phi} + \dots + e^{-i(n-1)\phi} \right\}. \quad (6.21)$$

Данная сумма является геометрической прогрессией, и, применяя известное правило суммирования, получаем

$$\mathcal{U} = A \frac{1 - e^{-in\phi}}{1 - e^{-i\phi}}. \quad (6.22)$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\mathcal{U} = A \frac{1 - e^{-i\pi\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \left(\frac{e^{i\pi\phi/2} e^{-i\pi\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} \right)$$

или

$$\mathcal{U} = A \frac{\sin(\pi\phi/2)}{\sin(\phi/2)} e^{-i(n-1)\phi/2}. \quad (6.23)$$

Подстановка (6.23) в равенство (6.20) дает

$$U(p, t) = A \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \cos[\omega t + (n-1)\phi/2]. \quad (6.24)$$

Таким образом, амплитуда и фаза результирующей волны определяются следующим образом:

$$A_R = A \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{n-1}{2} \phi. \quad (6.25)$$

В частности, полагая $n = 2$, приходим к выражению (6.5), при условии, что $\phi_1 = 0$. Действительно, в этом случае равенство (6.5) принимает вид

$$A_R = A \frac{\sin \phi}{\sin(\phi/2)} = 2A \cos(\phi/2) \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\phi}{2} = \frac{\phi_2}{2}.$$

Получим теперь формулу (6.5) другим способом. Каждый из членов выражения (6.21), заключенных в скобки, является комплексным числом, которое можно описать единичным вектором на комплексной плоскости XY (рис. 6.2, a). Ориентация этого вектора определяется аргументом. Так, например, первое слагаемое $A e^{i\phi}$ характеризуется единичным вектором, направленным вдоль оси x . В общем случае соответствующий вектор \mathbf{A}_i имеет амплитуду A и аргумент ϕ .

Применяя правило суммирования векторов (рис. 6.2, a), мы видим, что они образуют многоугольник, вершины которого расположены на окружности радиуса OK_i с центром в точке O . Сумма этих векторов описывается результирующим вектором $K_1 K_n$, который можно найти с помощью простых геометрических соотношений.

Как показано на рис. 6.2, a, угол между векторами \mathbf{A}_i и OK_i является одинаковым для любого i и равняется β . Учитывая, что сумма углов треугольника равна π и

$$2\beta + \phi = \pi,$$

мы видим, что угол $K_1 O K_2$ равен ϕ и, следовательно,

$$|\mathbf{A}_i| = A = 2K_1 O \sin \frac{\phi}{2}. \quad (6.26)$$

Второе из равенств (6.26) получено из треугольника $2K_1 O_n$:

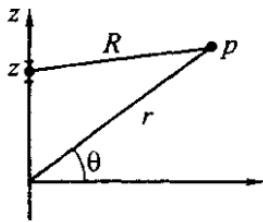
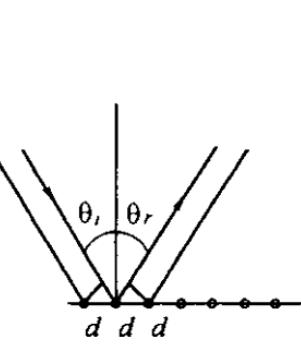
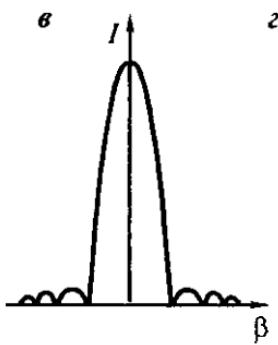
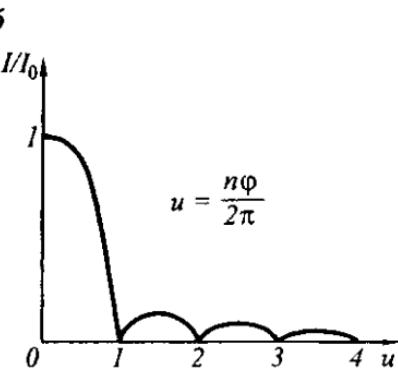
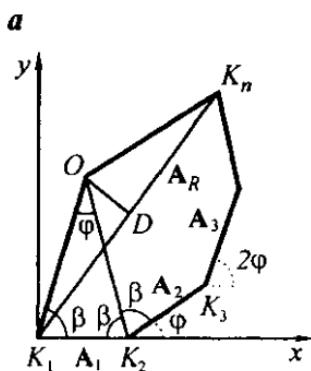


Рис. 6.2. Суммирование комплексных чисел как векторов (а); интенсивность волны от дискретной системы источников (б); интенсивность волны от непрерывной системы источников (в); закон отражения Снеллиуса (г); расстояние между источниками и точкой наблюдения (д)

$$K_1 K_n = 2 K_1 O \sin \frac{n\phi}{2}, \quad (6.27)$$

поскольку по определению угол $2K_1O_n$ равняется π .

Наконец, для амплитуды и фазы результирующей волны из выражений (6.26) и (6.27) находим

$$A_R = K_1 K_n = A \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)},$$

что совпадает с формулой (6.25).

Используя рис. 6.2, а, несложно также найти фазу τ .

Рассмотрим зависимость функции A_R от аргумента ϕ . Как мы уже знаем, аргумент может изменяться как в силу изменения положения источника или точки наблюдения, так и в силу обоих этих факторов.

Прежде всего, в пределе, когда ϕ стремится к нулю, имеем

$$A_R = \frac{n\Phi/2}{\Phi/2} = nA \quad (6.28)$$

и

$$\tau \rightarrow 0, \text{ если } \Phi \rightarrow 0.$$

Таким образом, результирующая амплитуда в n раз превышает амплитуду единичной волны. Этот результат очевиден, поскольку направления всех векторов \mathcal{U}_n практически совпадают ($\Phi \rightarrow 0$), а результирующий вектор является их арифметической суммой.

Из равенства (6.25) следует, что с увеличением Φ результирующая амплитуда начинает уменьшаться и, когда

$$n \frac{\Phi}{2} = \pi \text{ или } \Phi = \frac{2\pi}{n}, \quad (6.29)$$

становится равной нулю.

Другими словами, если сдвиг фаз определяется равенствами (6.29), деструктивная интерференция максимальна. С геометрической точки зрения это означает, что точка K_n (рис. 6.2, a) совпадает с началом K_1 . Соответственно, длина $K_1 K_2$ становится равной нулю, а сдвиг фаз между первым и последним вектором равняется 2π . Очевидно, что с увеличением числа источников n , зона первого интерференционного максимума сужается.

При дальнейшем увеличении фазы Φ снова наблюдается максимум, однако на этот раз значительно меньший. Этот факт можно было легко предсказать, поскольку при $\Phi \neq 0$ векторы не лежат на одной прямой (рис. 6.2, a). Положение и величину этого максимума легко оценить, полагая, что n достаточно велико.

Числитель первого из равенств (6.25) достигает своего максимального значения (равного единице) при

$$n \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \text{ или } \Phi = \frac{\pi}{4} (2k + 1). \quad (6.30)$$

В то же время знаменатель можно представить как

$$\sin \frac{\Phi}{2} \approx \frac{\pi}{2n} (2k + 1),$$

при условии, что угол Φ достаточно мал и

$$2k + 1 \leq \frac{2n}{\pi}.$$

Таким образом, амплитуды максимумов определяются выражением

$$A_R = nA \frac{2}{\pi(2k + 1)}, \quad (6.31)$$

из которого видно, что с увеличением целого числа k величины максимумов уменьшаются.

Поведение отношения

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2(n\phi/2)}{n^2 \sin^2(\phi/2)}, \quad (6.32)$$

характеризующего распределение интенсивности как функции угла ϕ , показано на рис. 6.2, б.

Здесь

$$I_0 = n^2 A^2$$

характеризует интенсивность при $\phi = 0$.

Вычисляя первую производную функции A_R по ϕ , нетрудно определить положение и величину максимумов или минимумов. Следует заметить, что с увеличением числа источников эффект суперпозиции волн становится сильнее и, в соответствии с этим, наблюдается большее количество зон конструктивной и деструктивной интерференции.

Чтобы проиллюстрировать использование выражений (6.5), рассмотрим, как ведет себя амплитуда ϕ_2 результирующей волны вдоль профиля, параллельного линии источников (рис. 6.1, г). Предположим сначала, что колебания всех источников происходят синхронно: $\alpha = 0$. Тогда, с учетом равенства (6.12), имеем

$$A_R = A \frac{\sin\left(\frac{\pi n d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}. \quad (6.33)$$

По аналогии с системой, состоящей из двух источников, будем различать два случая:

1) $d < \lambda$ и 2) $d > \lambda$.

Случай 1: $d < \lambda$

Из выражения (6.33) следует, что максимум появляется, когда

$$\theta = 0 \quad \text{или} \quad n \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = 0, \quad (6.34)$$

и его амплитуда равняется

$$A_R = nA. \quad (6.35)$$

Таким образом, в середине профиля наблюдается максимум конструктивной интерференции. С увеличением угла θ амплитуда результирующей волны быстро уменьшается и первый минимум появляется, когда

$$n \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \pi$$

или

$$\sin \theta = \lambda / nd, \quad (6.36)$$

при условии, что

$$\lambda / nd \leq 1.$$

В этом случае сдвиг фаз между волнами от первого и последнего источников равняется

$$n\phi = n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = n \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\lambda}{nd} = 2\pi$$

и, соответственно, вектор $K_1 K_n$ (рис. 6.2, a) становится нулевым. Из равенства (6.36) очевидно следует, что чем больше число источников n , тем уже пучок лучей, формирующих максимум.

Так же, как в случае $n = 2$, формируются боковые максимумы. Их положение приближенно определяется условием

$$\frac{\pi n d \sin \theta}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

или

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2dn} (2k + 1) < 1, \quad (6.37)$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Подстановка (6.37) в (6.33) дает

$$A_R = nA \frac{2}{\pi(2k+1)}, \quad (6.38)$$

где nA – амплитуда результирующей волны в точке $\theta = 0$.

Таким образом, мы видим, что отношение бокового и основного максимумов не зависит от числа источников ($n \gg 1$), однако при увеличении их числа абсцисса каждого из боковых максимумов стремится к средней точке. Следовательно, используя достаточно большое число источников, можно сконцентрировать волновое поле в пределах относительно узкого пучка. Такая концентрация происходит благодаря как конструктивной, так и деструктивной интерференции.

Случай 2: $d > \lambda$

Как было показано ранее, интерференция воли от двух источников ($n = 2$) имеет более сложный характер, когда $d > \lambda$. Похожее поведение волнового поля наблюдается и в общем случае системы из n источников. Действительно, предположим, что в некоторой точке амплитуда имеет определенное значение A_R , а сдвиг фаз между волнами от соседних источников равняется

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

Согласно уравнению (6.18), амплитуда результирующей волны останется той же, если фаза ϕ изменится на $2\pi m$, где m – произвольное целое.

Например, наибольшее значение A_R наблюдается, когда все векторы \mathcal{U}_n (рис. 6.2, а) направлены вдоль одной и той же линии, а именно

$$\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\pi m$$

или (6.39)

$$d \sin \theta = m\lambda.$$

Подстановка последнего соотношения в равенство (6.33) дает

$$A_R = A \frac{\sin \pi m n}{\sin \pi m} = A \frac{\sin \pi n x}{\sin \pi x}.$$

Применяя правило Лопитала, снова получаем известное выражение

$$A_R = nA.$$

Так, например, при $m = 0$ и $m = 1$ из равенства (6.39) следует, что максимум будет наблюдаться, соответственно, при $\theta = 0$ и $\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda}{d}$. Точно так же можно определить и положение боковых максимумов. Таким образом, в общем случае система возбуждает в разных направлениях группы пучков, каждый из которых имеет центральный максимум и последовательность боковых, более слабых максимумов. Чтобы различать центральные максимумы, соответствующие различным значениям m , их обычно называют максимумами m -го порядка. Как следует из соотношения (6.39), если расстояние между источниками меньше длины волны, т.е.

$$d < \lambda,$$

то существует только одна группа пучков. Действительно, в этом случае неравенство

$$\sin \theta = m\lambda/d < 1$$

удовлетворяется только при m , равном нулю. В заключение следует заметить, что равенства (6.25) справедливы при условии, что расстояние между первым и последним источниками значительно меньше расстояния до точки наблюдения. Это означает, что разность фаз между волнами, вызванными любыми двумя соседними источниками, остается постоянной.

Пример 3: линия источников

Рассмотрим предельный случай, когда источники непрерывно распределены вдоль прямой. В этом случае выражение (6.33) принимает вид

$$A_R = A n \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad (6.40)$$

где $A \rightarrow 0$ и $n \rightarrow 0$, однако их произведение остается постоянным. Параметр β определяется как

$$\beta = \frac{\pi \sin \theta}{\lambda} l, \quad (6.41)$$

$l = (n - 1)d$ характеризует размер источника, а $\frac{\pi \sin \theta}{\lambda}$ определяет величину изменения фазы. Соответственно, интенсивность результирующей волны равняется

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}. \quad (6.42)$$

Здесь

$$I_0 = n^2 A^2,$$

и поведение отношения I/I_0 показано на рис. 6.2, в.

Максимум, возникающий в точке $\beta = 0$, называется главным максимумом. Его величина равняется I_0 , и он соответствует углу $\theta = 0$. В точках $\beta = \pm \beta_m$ возникают также дополнительные максимумы. Например, первый такой максимум возникает при $\beta_1 = 1,43\pi$, причем

$$I/I_0 = 0,0472,$$

т.е. этот максимум является относительно слабым.

Для больших значений m имеем

$$\frac{I}{I_0} \sim \frac{1}{\pi^2 (m + 1/2)^2}.$$

Таким образом, при непрерывном распределении источников конструктивная интерференция наблюдается в основном вблизи $\theta = 0$.

Удобно различать два предельных случая:

$$\lambda \gg l \quad \text{и} \quad \lambda \ll l.$$

В первом случае независимо от того, какие значения принимает угол θ , параметр β мал, и, следовательно,

$$I(\theta) \approx I_0.$$

Другими словами, источники возбуждают сферическую волну, которая имеет одинаковую интенсивность во всех направлениях. Этот результат очевиден, поскольку сдвиг фаз между элементарными источниками стремится к нулю, и всюду при $R \gg l$ наблюдается конструктивная интерференция.

Предположим теперь, что длина волны значительно меньше протяженности системы источников. Тогда аргумент

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

является малым только в пределах очень узкого диапазона углов вблизи значения $\theta = 0$, где функция I почти совпадает с I_0 . В то же время вне данного пучка интенсивность пренебрежимо мала. Таким образом, картина дифракции имеет, в значительной степени, направленный характер.

До настоящего момента мы изучали дифракцию волн, вызванных первичными источниками, которыми могли быть как элементарные, так и линейные источники. Исключение составляет следующий случай. Рассмотрим фиктивные источники, которые возникают под действием падающей плоской волны (рис. 6.2, г). В результате вторичные волны появляются над и под плоскостью. Другими словами, они играют роль вторичных источников. Введем следующие обозначения. Пусть θ_i обозначает угол между направлением падающей волны и нормалью к линии источников, а θ_r — угол между нормалью и направлением на точку наблюдения.

В общем случае угол θ_r между направлением распространения волны и нормалью отличен от нуля. Поэтому колебания вторичных источников происходят асинхронно и, как видно из рис. 6.2, г, сдвиг фаз между ними равняется

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i.$$

Вторичные волны от соседних источников, распространяющиеся в направлении некоторой точки r , также имеют сдвиг фаз, равный

$$\Phi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_r.$$

Таким образом, полный сдвиг фаз между этими волнами

$$\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin \theta_r - \sin \theta_i). \quad (6.43)$$

Учитывая, что наибольший максимум возникает при $\beta = 0$, получим

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i. \quad (6.44)$$

Данное выражение представляет собой формулировку закона отражения Снеллиуса, и

$$\theta_r = \theta_i, \quad (6.45)$$

т.е. углы падения и отражения равны друг другу.

Таким образом, в случае, когда источники распределены непрерывно, а влиянием вторичных максимумов можно пренебречь, наблюдается переход к так называемой геометрической акустике. Иными словами, геометрическая акустика также является результатом суперпозиции волн. Конечно, если падающая волна не является плоской, выражение (6.43) уже не описывает сдвиг фаз между отраженными волнами и равенство (6.45) перестает выполняться. В этом случае вторичные волны имеют разную интенсивность.

Если же падающая волна остается по-прежнему плоской, но источники располагаются на поверхности, обладающей некоторой кривизной, то разность фаз больше не описывается соотношением (6.43). Тем не менее, если радиус кривизны этой поверхности значительно больше длины волны, то равенство (6.45) по-прежнему верно. Это означает, что углы падения и отражения почти равны друг другу.

Уравнение (6.44) имеет еще одно решение

$$\theta = \pi - \theta_0,$$

характеризующее направление, вдоль которого наблюдается максимальный сигнал под источниками (рис. 6.2, г). Это также очень интересный результат, поскольку он описывает закон отражения Снеллиуса в предельном случае, когда среда всюду однородна.

В одном из следующих разделов мы рассмотрим дифракцию волн для более сложного распределения источников. Чтобы упростить анализ, получим еще раз выражение (6.42), но другим способом. Из рис. 6.2, д видно, что комплексную амплитуду потенциала, вызванного элементарным источником, можно представить в виде

$$d \mathcal{U}(p) = C dz \frac{e^{ikR}}{R},$$

где C характеризует интенсивность источников на единицу длины.

Применяя далее принцип суперпозиции, получим следующий потенциал результирующей волны:

$$\mathcal{U}(p) = C \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{ikR}}{R} dz.$$

Как и ранее, l обозначает протяженность источника.

Несмотря на относительную простоту подынтегрального выражения e^{ikR}/R , приведенный выше интеграл нельзя представить в виде элементарных функций. Сделаем теперь два предположения. Во-первых, предположим, что точка наблюдения p расположена на расстоянии R , значительно превышающем протяженность системы l :

$$R \gg l.$$

Это означает, что источники находятся практически на одном и том же расстоянии от точки наблюдения p , и выражение для потенциала принимает вид

$$\mathcal{U}(p) \approx C \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikR} dz.$$

Здесь r – расстояние между началом системы координат и точкой наблюдения.

Последний интеграл все еще нельзя выразить через элементарные функ-

ции. Второе предположение основывается на приближенном выражении для расстояния R . Из рис. 6.2, δ следует, что

$$R = \sqrt{r^2 + z^2 - 2zr \sin \theta}.$$

Здесь θ является углом между R и перпендикуляром к оси z .

Учитывая, что $R \gg l/2$ и $|z| \leq l/2$, выражение для R можно разложить в ряд по степеням z/r . Поскольку

$$R = r \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2z}{r} \sin \theta}$$

и

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$$

где

$$x = -\frac{2z}{r} \sin \theta + \frac{z^2}{r^2},$$

имеем

$$R \approx r \left(1 + \frac{z^2}{2r^2} - \frac{z}{r} \sin \theta - \frac{z^2}{2r^2} \sin^2 \theta \right)$$

или

$$R = r - z \sin \theta + \frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta + \dots$$

Таким образом, выражение для комплексной амплитуды потенциала преобразуется к виду

$$\mathcal{U}(p) = \frac{C}{r} e^{ikr} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikz \sin \theta} e^{ik\frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta} dz.$$

Очевидно, что фаза элементарной волны от источника, расположенного на расстоянии z от начала координат, равняется

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(r - z \sin \theta + \frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta \right).$$

Пусть последнее слагаемое в скобках настолько мало, что

$$\left| e^{ik\frac{l^2}{8r} \cos^2 \theta} \right| = 1.$$

Последнее соотношение выполняется, когда

$$\frac{kl^2 \cos^2 \theta}{8r} \ll \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \frac{l^2}{\lambda r} \cos^2 \theta \ll 1.$$

Если расстояние r достаточно велико, данные неравенства выполняются независимо от того, какое значение имеет угол θ . В соответствии с этим фаза элементарной волны равняется

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r - z \sin \theta),$$

т.е. она линейно изменяется с расстоянием от начала координат. Такое приближение называется приближением Фраунгофера. Очевидно, что в двух предыдущих примерах мы использовали именно этот подход. Когда в выражении для фазы удерживается третий член

$$\frac{z^2}{2r} \cos^2 \theta,$$

мы имеем дело с более точным приближением, которое называется приближением Френеля.

В действительности в обоих приближениях принимается, что

$$R \gg l.$$

С уменьшением длины волны условие

$$\frac{l^2}{\lambda r} \cos^2 \theta < 1$$

перестает выполняться. Таким образом, приближение Фраунгофера не достаточно для изучения перехода к предельному случаю, когда λ стремится к нулю. То же самое относится и к приближению Френеля.

Используя приближение Фраунгофера, легко получить формулу (6.42). Действительно, комплексная амплитуда потенциала дается выражением

$$\mathcal{U}(p) = \frac{C}{r} e^{ikr} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikz \sin \theta} dz$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{Cl}{r} e^{ikr} \frac{\sin \beta}{\beta},$$

где

$$\beta = \frac{kl}{2} \sin \theta.$$

Отсюда

$$\mathcal{U}(p) = \frac{Cl \sin \beta}{r \beta} \cos(\omega t - kr).$$

Усредняя интенсивность по времени, получим

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2},$$

что совпадает с (6.42).

У приближения Фраунгофера есть одно интересное свойство. Как следует из равенства

$$R = r - z \sin \theta,$$

если точка наблюдения располагается на перпендикуляре к линии источников, пересекающей $\theta = 0$, то расстояние R от этой точки до любого из элементарных источников является одним и тем же: $R = r$. Поскольку все элементарные волны имеют в таких точках одну и ту же фазу, в них наблюдается главный максимум.

Мы изучили дифракцию, вызванную источниками синусоидальных волн в однородной среде. В дальнейшем особое внимание будет уделяться дифракции при наличии неоднородностей. Чтобы изучить поведение волн в таких средах, необходимо решить задачу с граничными условиями. Однако изучение волновых полей полезно начать с приближением теории, разработанной Кирхгофом. С этой целью мы в дальнейших разделах получим формулы Гельмгольца – Кирхгофа, устанавливающие соотношения между значением скалярного потенциала в некоторой точке внутри объема среды и его значениями на поверхности данного объема.

6.2. ФОРМУЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В главе 4 рассматривалась теорема единственности. Было показано, что комплексная амплитуда потенциала в произвольной точке r объема V однородной среды однозначно определяется уравнением Гельмгольца и граничными условиями на поверхности S данного объема. Поэтому естественно ожидать, что значения волнового поля внутри объема и на его поверхности связаны между собой. Другими словами, поведение волны на этой поверхности определяет волну с заданным распределением плотности ρ и сжимаемости C внутри объема. Этот вывод, следующий из теоремы единственности, является, с физической точки зрения, почти очевидным, особенно, когда речь идет о нестационарных волнах. Предположим, например, что первичный источник возбуждает колебания в течение некоторого интервала времени Δt , а затем перестает действовать. Очевидно, что в каждый момент времени волновое поле содержит информацию о своем источнике. Поэтому естественно, что волна на поверхности, окружающей такой источник, определяет волновое поле, возникающее впоследствии на больших расстояниях.

Получим теперь соотношение между гармоническими полями внутри и на поверхности объема. С этой целью рассмотрим сначала скалярный потенци-

ал. Как было показано ранее (см. главу 4), смещение и скорость частицы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{s} = 0 \text{ и } \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

Это означает, что данные волновые поля можно выразить через скалярный потенциал U . В отличие от предыдущей главы, введем теперь скалярный потенциал как

$$\mathbf{v} = \text{grad } U.$$

Поскольку существует бесконечное множество функций U , описывающих одни и те же поля \mathbf{s} и \mathbf{v} , для обоих потенциалов можно использовать одинаковое обозначение. Далее удобно рассмотреть несколько случаев, различающихся между собой положением первичного источника внутри объема.

Из векторного анализа (см. приложение 3) хорошо известно следующее. Чтобы получить соотношение между значениями волнового поля внутри объема V и на окружающих его поверхностях, удобно воспользоваться теоремой Гаусса–Остроградского

$$\int_V \text{div } \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.46)$$

где \mathbf{M} – волновое поле, $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичный вектор, направленный в сторону от объема.

Предполагается, что в каждой точке объема определена дивергенция векторного поля \mathbf{M} , т.е. существуют первые производные его скалярных компонент. Конечно, имеется бесконечное множество векторных полей \mathbf{M} , удовлетворяющих уравнению (6.46).

Заметим, что данный раздел целиком основывается на использовании теоремы Гаусса. Прежде всего, введем вектор \mathbf{M} следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mathcal{U}(p, k) \nabla G(p, q, k). \quad (6.47)$$

Здесь $\mathcal{U}(p, k)$ – комплексная амплитуда потенциала, $G(p, q, k)$ – функция, имеющая производные первого и второго порядка, k – волновое число, p – точка наблюдения, а точка q располагается на поверхности объема V .

Подставляя выражение (6.47) в уравнение (6.46) и учитывая, что

$$\text{div}(\mathcal{U} \nabla G) = \nabla \mathcal{U} \cdot \nabla G + \mathcal{U} \nabla^2 G,$$

получим

$$\int_V \{\nabla \mathcal{U} \cdot \nabla G + \mathcal{U} \nabla^2 G\} dV = \oint_S \mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (6.48)$$

поскольку

$$\nabla G \cdot d\mathbf{S} = \text{grad } G \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Используем далее другой вектор:

$$\mathbf{M} = G \nabla \mathcal{U}. \quad (6.49)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (6.46) дает

$$\int_V \{\nabla \mathcal{U} \cdot \nabla G + G \nabla^2 \mathcal{U}\} dV = \oint_S G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} dS. \quad (6.50)$$

Следует заметить, что если функция G является постоянной, то мы приходим к формуле Грина:

$$\int_V \nabla^2 \mathcal{U} dV = \oint_S \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} dS.$$

Вычитая уравнение (6.50) из (6.48), получим

$$\int_V (\mathcal{U} \nabla^2 G - G \nabla^2 \mathcal{U}) dV = \oint_S \left(\mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \right) dS. \quad (6.51)$$

Последнее выражение называется второй формулой Грина и также представляет собой формулировку теоремы Гаусса–Остроградского.

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Формула Грина (6.51) справедлива при условии, что обе функции \mathcal{U} и G имеют первые и вторые производные всюду внутрь объема V .
2. Существует бесконечное число функций $G(p, q, k)$, удовлетворяющих уравнению (6.51).

3. Уравнение (6.51) уже является соотношением между комплексной амплитудой \mathcal{U} внутри объема и ее значениями, а также значениями ее нормальной производной на поверхности S . Тем не менее, неизвестная функция \mathcal{U} представлена здесь не в явной форме, а только в качестве элемента подынтегрального выражения. Чтобы преодолеть эту проблему, введем еще одно ограничение для функций Грина и получим из уравнения (6.51) формулу Гельмгольца. Начнем с простейшего случая.

Случай 1: среда является однородной, а первичные источники отсутствуют

Предположим, что среда внутри объема V однородная и все источники располагаются вне данного объема (рис. 6.3, a). Поскольку комплексная амплитуда и ее производные описывают реальную волну, эти функции принимают конечные значения всюду внутри объема и

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} = 0. \quad (6.52)$$

Здесь $k = \omega/c$.

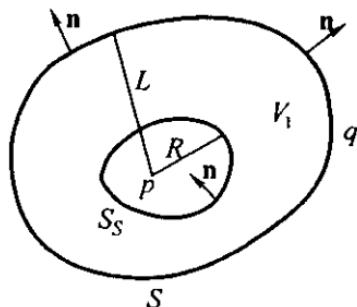
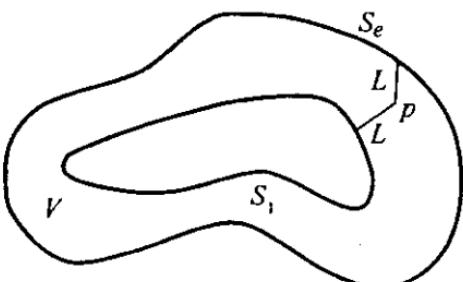
а**б****в**

Рис. 6.3. Иллюстрация формулы (6.57) (а); объем, окруженный двумя источниками (б); первичный источник внутри объема (в)

Выберем среди всех возможных функций Грина G такие, которые подчиняются следующим условиям.

1. Всюду в объеме, за исключением некоторой точки p , в которой наблюдается волна, функция $G(p, q, k)$ является решением уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0. \quad (6.53)$$

2. В окрестности точки p функция G ведет себя как

$$G \rightarrow 1/R, \quad (6.54)$$

где R – расстояние до точки p .

Из-за того, что в точке p имеется сингулярность, мы не можем применить уравнение (6.51) ко всему объему V . Чтобы преодолеть это препятствие, окружим точку p поверхностью “безопасности” S_s и затем применим вторую формулу Грина (6.51) к объему V_1 , заключенному между поверхностями S и S_s (см. рис. 6.3, а).

Оба условия, (6.53) и (6.54), играют важную роль при выводе формулы Гельмгольца. В силу условия (6.53) исчезает объемный интеграл в левой части соотношения (6.51). Действительно, учитывая (6.53) и (6.54), имеем

$$\mathcal{U}\nabla^2 G - G\nabla^2 \mathcal{U} = -k^2 \mathcal{U}G + k^2 \mathcal{U}G = 0.$$

Отсюда выражение (6.51) принимает вид

$$0 = \oint_S \left(\mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_0} \left(\mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \right) dS. \quad (6.55)$$

Второе условие позволяет выразить значение функции \mathcal{U} в точке p через значения этой функции, а также ее нормальной производной $\partial \mathcal{U} / \partial n$ на поверхности S .

Чтобы продемонстрировать это, предположим, что радиус R сферической поверхности S_s стремится к нулю, т.е. $V_1 \rightarrow V$, и рассмотрим поведение второго интеграла в правой части выражения (6.55). Как отмечалось ранее, функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$ принимают конечные значения всюду внутри объема V , включая, безусловно, и точки на поверхности $t = t_2$. В отличие от этого, при стремлении радиуса R к нулю обе функции G и $\partial G / \partial n$ неограниченно растут в соответствии с (6.54) и

$$G \rightarrow \frac{1}{R} \text{ и } \frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{1}{R^2}, \text{ если } R \rightarrow 0. \quad (6.56)$$

Последнее равенство следует из того, что направление радиус-вектора \mathbf{R} противоположно направлению нормали \mathbf{n} .

Тогда для интеграла по поверхности S_s имеем

$$\oint_{S_s} \left(\mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \right) dS = \oint_{S_s} \mathcal{U} \frac{dS}{R^2} - \oint_{S_s} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \frac{dS}{R}, \text{ если } R \rightarrow 0. \quad (6.57)$$

Функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$ – непрерывные и, следовательно, при $R \rightarrow 0$ их значения на поверхности S_s совпадают с соответствующими значениями в точке p :

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}(p), \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}(p)}{\partial n}, \text{ если } R \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\oint_{S_s} \mathcal{U} \frac{dS}{R^2} = \frac{\mathcal{U}(p)}{R^2} \oint_{S_s} dS = 4\pi \mathcal{U}(p) \quad (6.58)$$

и

$$\oint_{S_s} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \frac{dS}{R} = \frac{\partial \mathcal{U}(p)}{\partial n} \frac{1}{R} \oint_{S_s} dS = \frac{\partial \mathcal{U}(p)}{\partial n} 4\pi R \rightarrow 0, \text{ если } R \rightarrow 0.$$

Окончательно, подставляя равенства (6.58) в формулу (6.55), получим следующее соотношение между комплексной амплитудой \mathcal{U} в точке p и значениями этой функции, а также ее нормальной производной на поверхности S :

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.59)$$

Функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$, стоящие в правой части этого выражения зависят от точки g , расположенной на поверхности S , причем обе точки, g и p , являются аргументами функции Грина $G(p, q, k)$. Очевидно, что выражение (6.59) позволяет определить волновые поля в любой точке объема V . Так, например, если на поверхности S известны функции \mathcal{U} и $\partial \mathcal{U} / \partial n$, то, беря производные по координатам точки p от обеих частей этого равенства, мы найдем скорость частицы $v(p, k)$.

Безусловно, существует бесконечное число функций Грина, имеющих такую же особенность (6.54) в точке p и удовлетворяющих уравнению (6.53) во всех остальных точках. Среди всех таких функций выберем простейшую:

$$G(p, g, k) = \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.60)$$

Данная функция является решением уравнения Гельмгольца во всех точках внутри объема V , кроме точки p , в которой эта функция имеет соответствующую особенность $1/R$. Таким образом, вместо выражения (6.59) мы приходим к известной формуле Гельмгольца

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{e^{ikL}}{L} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} \right) dS, \quad (6.61)$$

где L – расстояние между точкой наблюдения p и произвольной точкой q на поверхности S . Из последнего выражения видно, что в каждой точке внутри объема V комплексная амплитуда является результатом суммирования следующих членов:

$$\frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} dS \text{ и } \mathcal{U}(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikL}}{L} dS.$$

Это означает, что вблизи каждой точки g поверхности S существует два типа источников, сила которых пропорциональна соответственно

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \text{ и } \mathcal{U},$$

а волна в любой точке внутри объема V является суперпозицией элементарных волн, вызванных данными поверхностными источниками. Мы обсудим это более подробно в одном из последующих разделов. Тем не менее, следует пояснить следующее. Поскольку рассматриваются синусоидальные волны, колебаниям подвергается каждый элементарный объем как внутри, так и вне объема V . Это означает, что действительные источники волны, вызванной движением частиц и деформацией среды, располагаются повсюду. В то же время из выражения (6.61) следует, что, задав некоторое распределение ис-

точников только на поверхности S , можно вычислить соответствующее волновое поле в любой точке объема V . Поэтому указанные поверхностные источники естественно трактовать как фиктивные. Чтобы понять значение этого факта, полезно вспомнить, что потенциалы гравитационного и электрического полей выражаются аналогичным образом, а поверхность S можно всегда вообразить даже в свободном пространстве, где отсутствуют какие-либо массы или заряды.

Из теоремы единственности следует, что волновые поля определяются однозначно в объеме при условии, что в каждой точке поверхности S известны значения одной из функций \mathcal{U} или $\partial\mathcal{U}/\partial n$. Отсюда следует, что выражение (6.59) можно соответствующим образом преобразовать. Действительно, выберем функцию Грина $G(p, q, k)$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) всюду внутри объема V , кроме точки p ,

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0;$$

б) в окрестности точки p

$$G \rightarrow e^{ikR}/R;$$

в) во всех точках поверхности S

$$G = 0. \quad (6.62)$$

С учетом последнего условия, выражение (6.59) можно представить в виде

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathcal{U}(g) \frac{\partial G(p, g, k)}{\partial n} dS. \quad (6.63)$$

Таким образом, чтобы определить комплексный потенциал \mathcal{U} внутри объема, достаточно знать значения этой функции на поверхности S . Тем не менее, в общем случае существует одна сложная проблема, а именно, определение функции Грина G связано с решением задачи с граничными условиями.

Если вместо (6.62) использовать условие

$$\partial G/\partial n = 0 \text{ на } S, \quad (6.64)$$

то необходимо будет решать другую граничную задачу, при этом выражение (6.59) перейдет в

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} dS. \quad (6.65)$$

В соответствии с этим, функция $\mathcal{U}(a)$ будет выражаться через значения ее нормальной производной на поверхности S . Таким образом, одну и ту же комплексную амплитуду \mathcal{U} можно выразить различными способами, используя разные функции Грина G . Это еще раз указывает на то, что функции \mathcal{U} или $\partial \mathcal{U}/\partial n$ в общем случае не характеризуют распределение действительных источников на поверхности S .

В отличие от выражений (6.63) и (6.65), функция Грина в формуле Гельмгольца является известной:

$$G = e^{i\mathcal{U}}/L.$$

Следовательно, если на поверхности S известны значения функций \mathcal{U} или $\partial\mathcal{U}/\partial n$, то определение \mathcal{U} в произвольной точке p является задачей численного интегрирования выражения (6.61). Однако, если на поверхности S известны точные значения этих функций, это обычно означает, что граничная задача для потенциала \mathcal{U} уже решена. Другими словами, эти функции известны всюду внутри объема V и применять формулу Гельмгольца уже не требуется.

В то же время выражение (6.61) может оказаться полезным для многих целей (в частности, для изучения дифракции) при условии, что значения функций \mathcal{U} или $\partial\mathcal{U}/\partial n$ приближенно известны на заданной поверхности S , окружающей объем V .

Сделаем еще одно замечание. При выводе выражения (6.59) мы предполагали, что существует только одна поверхность S (см. рис. 6.3, a). Легко заметить, что выражение (6.59) не изменится, если вместо одной поверхности имеется сразу несколько. В этом случае

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n.$$

Пример объема, заключенного между несколькими поверхностями, приводится на рис. 6.3, б.

Случай 2: бесконечный объем

Предположим теперь, что объем V заключен между двумя поверхностями S_1 и S_2 , и в нем по-прежнему не содержится первичных источников (см. рис. 6.3, б). Тогда формула Гельмгольца преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(p) = & \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left[\frac{e^{i\mathcal{U}}}{L} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\mathcal{U}}}{L} \right] dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_2} \left[\frac{e^{i\mathcal{U}}}{L} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\mathcal{U}}}{L} \right] dS. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Рассмотрим поведение второго интеграла, когда все точки поверхности S_2 стремятся к бесконечности. В этом случае поверхность S_2 можно заменить сферой S с центром в точке p и радиусом $R = L$, увеличивающимся до бесконечности.

Поскольку направления нормали n и радиус-вектора R совпадают,

$$\partial\mathcal{U}/\partial n = \partial\mathcal{U}/\partial R$$

и второй интеграл в выражении (6.66) переходит в

$$\oint_{S_e} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} - \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} \right] dS = \oint_{S_e} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} - ik\mathcal{U} \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\mathcal{U}}{R^2} e^{ikR} \right] dS =$$

$$= \oint_{S_e} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} - ik\mathcal{U} \right] \frac{e^{ikR}}{R} dS + \oint_{S_e} \frac{\mathcal{U} e^{ikR}}{R^2} dS. \quad (6.67)$$

Элемент поверхности dS записывается виде

$$dS = R^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – телесный угол, под которым элемент dS виден из точки p . Соответственно, правую часть соотношения (6.67) можно представить как

$$\oint_{S_e} R \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} - ik\mathcal{U} \right] e^{ikR} d\Omega + \oint_{S_e} \mathcal{U} e^{ikR} d\Omega. \quad (6.68)$$

Слагаемое

$$\oint_{S_e} \mathcal{U} e^{ikR} d\Omega$$

стремится к нулю, если комплексная амплитуда \mathcal{U} непрерывно стремится к нулю ($\mathcal{U} \rightarrow 0$) по координатам θ и ϕ . Так, например, указанный интеграл исчезает, если

$$|R\mathcal{U}| < N \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (6.69)$$

где N – некоторое конечное число.

Первый из интегралов (6.66) стремится к нулю при условии

$$R \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R} - ik\mathcal{U} \right] \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Последний предел является монотонным по координатам θ и ϕ .

Таким образом, если удовлетворяются условия (6.69) и (6.70), введенные Зоммерфельдом, то формулу Гельмгольца (6.61) можно по-прежнему применять, даже в том случае, когда объем является бесконечным.

Рассматривая теорему единственности для синусоидальных волн, мы пришли к нестрогому выводу о том, что волновые поля должны стремиться к нулю на бесконечности.

Теперь можно утверждать, что условия (6.69) и (6.70) ясно показывают справедливость этого вывода. В реальных ситуациях первичные источники располагаются внутри объема конечных размеров. Это означает, что на бесконечности наблюдаются только уходящие волны и

$$\mathcal{U} \sim \frac{e^{ikR}}{R}, \text{ если } R \rightarrow \infty.$$

Подставляя это выражение в (6.70), мы видим, что это последнее условие удовлетворяется. Если же предположить, что на бесконечности существует приходящая волна

$$\mathcal{U} \sim e^{-ikR}/R,$$

то условие (6.70) перестает выполняться.

Таким образом, условия (6.69) и (6.70), называемые обычно условиями излучения Зоммерфельда, означают отсутствие первичных источников на бесконечности.

Случай 3: источники внутри однородной среды

Предположим теперь, что первичный источник располагается в окрестности точки O внутри объема V , занятого однородной средой (рис. 6.3, в). Например, таким источником может быть элементарный сферический источник, имеющий особенность в этой точке. Поскольку формула Гельмгольца перестает выполнятся, если комплексная амплитуда \mathcal{U} имеет особенность внутри объема V , представим эту функцию в следующем виде:

$$\mathcal{U}(p, k) = \mathcal{U}_0(p, k) + \mathcal{U}_s(p, k). \quad (6.71)$$

Здесь \mathcal{U}_0 является комплексной амплитудой потенциала, вызванного первичным источником в точке O в бесконечном объеме однородной среды. Эта составляющая поля рассматривалась в предыдущей главе и, следовательно, предполагается известной.

Второе слагаемое, \mathcal{U}_s , может быть вызвано первичным источником или наличием неоднородностей за пределами данного объема и, в отличие от первого слагаемого, оно не имеет сингулярности внутри V .

В соответствии с этим, формулу Гельмгольца применим к функции \mathcal{U}_s и в результате получим следующее выражение для полной комплексной амплитуды:

$$\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}_0(p) + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{e^{i\mu}}{L} \frac{\partial \mathcal{U}_s}{\partial n} - \mathcal{U}_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\mu}}{L} \right) dS. \quad (6.72)$$

Безусловно, это выражение остается справедливым и в том случае, когда имеется несколько первичных источников и несколько поверхностей, ограничивающих объем V .

В заключение данного раздела обсудим одно интересное свойство интеграла (6.59). Предположим, что вне объема V среда является однородной и функция Грина G имеет особенность внутри V . Тогда, согласно выражению (6.51), имеем

$$\oint_S \left(G \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} - \mathcal{U} \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (6.73)$$

где подынтегральное выражение берется на внешней стороне поверхности S .

Из сравнения формул (6.59) и (6.72) видно, что фиктивные источники на поверхности S "возбуждают" волну внутри объема V , однако вне объема суммарный эффект от этих источников равняется нулю.

Этот факт используется иногда в качестве доказательства одного из самых важных предположений Гюйгенса, и мы подробно обсудим это в дальнейшем.

6.3. ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА

В этом разделе мы продолжим изучение волн, вызванных различными источниками, и покажем, как формула Гельмгольца применяется для изучения дифракции в присутствии жесткого экрана. Конечно, такая модель среды обычно рассматривается в оптике и вряд ли имеет какое-либо практическое значение в сейсмологии. Однако изучение волн в присутствии жесткого экрана позволяет наблюдать формирование различных дифракционных картин, а также переход к высокочастотной части спектра (лучевое приближение). В то же время, как будет показано, существуют случаи, когда этого предела нельзя достичь, даже для самых малых длин волн.

В дальнейшем все перечисленные свойства будут наблюдаться при изучении акустических и упругих волн в более реалистичных моделях. Учитывая, что теория Кирхгофа в случае жесткого экрана математически довольно проста, мы подробно опишем дифракцию именно в этой модели.

Удобно различать следующие два случая.

1. Непрозрачный экран с отверстием (щелью) (рис. 6.4, а).
2. Экран конечных размеров (рис. 6.4, б).

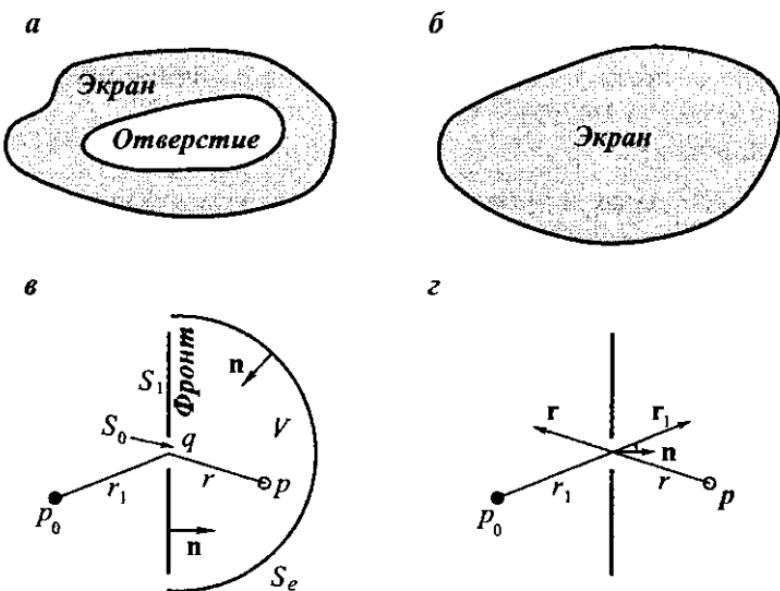


Рис. 6.4. Экран с отверстием (а); экран конечных размеров (б); иллюстрация формулы (6.74) (в); иллюстрация формулы (6.83) (г)

Экран (с отверстием или без него) представляет собой неоднородность, параметры которой отличаются от параметров окружающей среды. Чтобы определить волновые поля, необходимо решить задачу с граничными условиями. Другими словами, требуется найти решение волнового уравнения внутри и вне экрана. Помимо этого, функции, являющиеся решениями этого уравнения, должны удовлетворять граничным условиям на поверхности экрана. Это означает, что поведение комплексной амплитуды \mathcal{U} должно обеспечивать равенство избыточного давления и компонент скорости частиц на обеих сторонах поверхности экрана. Более того, вне экрана функция \mathcal{U} должна вести себя соответствующим образом вблизи источника и на бесконечности.

Следовательно, для того чтобы определить волновые поля вне экрана, необходимо их знать внутри него, что в общем случае является сложной вычислительной задачей. Поэтому большое значение имеют приближенные методы расчета. В данном разделе рассматривается один из таких методов, предложенный Кирхгофом.

Пусть первичный источник расположен в окрестности точки p_0 и в среде имеется жесткий экран с отверстием. Наша цель состоит в том, чтобы найти волновые поля в объеме V за экраном (рис. 6.4, в). В соответствии с формулой Гельмгольца, комплексную амплитуду \mathcal{U} в любой точке объема V позади экрана можно записать как

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \mathcal{U}(g) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \right\} dS. \quad (6.74)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь предполагается, что единичный вектор n направлен внутрь объема и

$$S = S_0 + S_1 + S_e, \quad (6.75)$$

где S_0 и S_1 обозначают, соответственно, площадь отверстия и остальной части экрана, а S_e – сферическая поверхность бесконечного радиуса. Считая, что на бесконечности первичные источники отсутствуют, интегралом по поверхности S_e можно пренебречь. Тогда вместо (6.75) получим

$$S = S_0 + S_1. \quad (6.76)$$

Таким образом, площадь интегрирования совпадает с поверхностью экрана и включает в себя как его непрозрачные части, так и площадь отверстия. Предположим сначала, что непрозрачный экран занимает всю плоскость до бесконечности. Под действием падающей волны \mathcal{U}_0 , вызванной первичным источником, частицы экрана начинают колебаться, и эти новые источники приводят к появлению вторичных волн \mathcal{U}_s . Таким образом, полная комплексная амплитуда равняется

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_s. \quad (6.77)$$

Поскольку экран жесткий и имеет неограниченные размеры, волны в объеме V позади экрана отсутствуют. Иными словами, волны, вызванные первичными и вторичными источниками, гасят друг друга, и

$$\mathcal{U} = 0 \text{ в } V.$$

В частности, вблизи передней части экрана функция \mathcal{U} и ее производная $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n}$ равны нулю. При наличии в экране отверстия (см. рис. 6.4, a) распределение вторичных источников на экране меняется, и вследствие этого в объеме V появляются волны. Как отмечалось ранее, чтобы определить волновые поля, необходимо, в общем случае, решить граничную задачу. Однако при определенных условиях поведение волн вблизи передней части экрана можно предсказать с достаточной точностью, используя формулу Гельмгольца для вычисления функции \mathcal{U} в объеме V .

Рассмотрим волну в точках, принадлежащих отверстию. Конечно, вторичные источники на экране вызывают появление дополнительных волн в каждой точке отверстия, и поэтому полное волновое поле неизвестно. В то же время при увеличении размеров отверстия расстояние между его центральной частью и вторичными источниками вблизи экрана становится больше, а их влияние, соответственно, уменьшается. Поэтому приближенно можно считать, что в таких точках отверстия, имеющего достаточно большие размеры, волновое поле состоит только из падающей волны. Это предположение не выполняется в точках, находящихся вблизи края непрозрачного экрана, хотя в этой области волны могут взаимно гасить друг друга из-за разности фаз. Конечно, такое поведение волн может наблюдаться, только если длина волны значительно меньше размеров отверстия.

ФОРМУЛА ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим далее поведение волны вблизи передней части экрана, но вне отверстия. Как мы уже знаем, если отверстие в экране отсутствует, функция \mathcal{U} и ее производные равны нулю в объеме V , однако при его наличии волновая картина меняется, и волна появляется всюду, включая переднюю часть экрана. С физической точки зрения почти очевидно, что в точках экрана, расположенных относительно далеко от отверстия, влияние этой волны пре-небрежимо мало. А с уменьшением длины волны такое поведение наблюдается все ближе к отверстию. Подобные рассуждения позволили Кирхгофу предположить следующее.

На поверхности отверстия S_0 волна совпадает с первичной (падающей) волной, и

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \text{ и } \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial n} \text{ на } S_0, \quad (6.78)$$

в то время как на передней части непрозрачного экрана выполняются следующие равенства:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \text{ и } \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1. \quad (6.79)$$

Соотношения (6.78), (6.79) называются граничными условиями Кирхгофа и играют основополагающую роль в предложенной им теории дифракции.

Здесь следует сделать два замечания:

а) первое из условий (6.78) означает, что здесь пренебрегли взаимодействием между вторичными источниками;

б) данный подход очень похож на борновское приближение, часто используемое в математической физике.

Предположим для простоты, что падающая волна вызвана элементарным сферическим источником, расположенным в точке r_0 . Тогда

$$\mathcal{U}_0 = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad (6.80)$$

где r_0 – расстояние от источника, а коэффициент A характеризует его силу.

Дифференцирование \mathcal{U}_0 по n дает

$$\frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial n}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial n} = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0^2} (ikr_0 - 1) \frac{\partial r_0}{\partial n}. \quad (6.81)$$

Из рис. 6.4, г видно, что

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0).$$

Здесь $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)$ обозначает угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r}_0 .

Действительно, имеем

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \operatorname{grad} r_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0^0 \cdot \mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0),$$

так как $\operatorname{grad} r_0 = \mathbf{r}_0^0$

является единичным вектором в направлении \mathbf{r}_0 .

Следует заметить, что

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{n r_0} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0},$$

поскольку $|\mathbf{n}| = 1$.

По аналогии получим

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} = \frac{e^{ikr_0}}{r_0^2} (ikr_0 - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0), \quad (6.82)$$

где r – расстояние между произвольной точкой отверстия в экране и точкой наблюдения p .

Подстановка выражений (6.81), (6.82) в формулу Гельмгольца дает

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A}{4\pi} \int_{S_0} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr_1}}{r^2} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr_1}}{r^2} (ikr_1 - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \right] dS$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A}{4\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+n)}}{rr_1} \left[\frac{1}{r} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \frac{1}{r_1} (ikr_1 - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \right] dS, \quad (6.83)$$

где (\mathbf{n}, \mathbf{r}) обозначает угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r} (рис. 6.4, г).

Таким образом, используя формулу (6.83), основанную на приближенных граничных условиях, можно оценить волновые поля в объеме V , при условии, что длина волны меньше размеров отверстия, а точки наблюдения лежат вдали от его края.

Подынтегральное выражение в (6.83) содержит только элементарные функции, и численное интегрирование довольно просто выполняется на компьютере, несмотря на присутствие осциллирующего множителя $e^{ik(r+n)}$.

Однако в прошлом выполнить процедуру интегрирования было очень сложно, и поэтому были предложены различные приближенные способы для выражения интеграла (6.83) через известные функции. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые из этих методов, а пока можно заметить следующее.

1. Значение интеграла (6.83) не изменится, если в нем r и r_1 поменять местами. Это означает, что источник в точке p_0 приводит к тому же эффекту в точке p , как если бы он находился в точке p , а наблюдение велось в точке p_0 . Этот результат был установлен Гельмгольцем и называется теоремой взаимности.

2. Опишем теперь еще одно интересное свойство волн, которое также следует из формулы Гельмгольца. Оно относится к действию двух дополняющих друг друга экранов, установленных так, что отверстие в одном из них в точности соответствует непрозрачной части другого (рис. 6.5, а).

Пусть \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 обозначают комплексные амплитуды потенциалов, когда между источником и точкой наблюдения располагаются, соответственно, экран с отверстием и дополняющий его экран. Тогда, в соответствии с формулой Гельмгольца, имеем

$$\mathcal{U}_1(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{01}} \left[\mathcal{U}(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \mathcal{U}(g)}{\partial n} \right] dS$$

и

$$\mathcal{U}_2(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{02}} \left[\mathcal{U}(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \mathcal{U}(g)}{\partial n} \right] dS,$$

где S_{01} и S_{02} – площади отверстий обоих экранов.

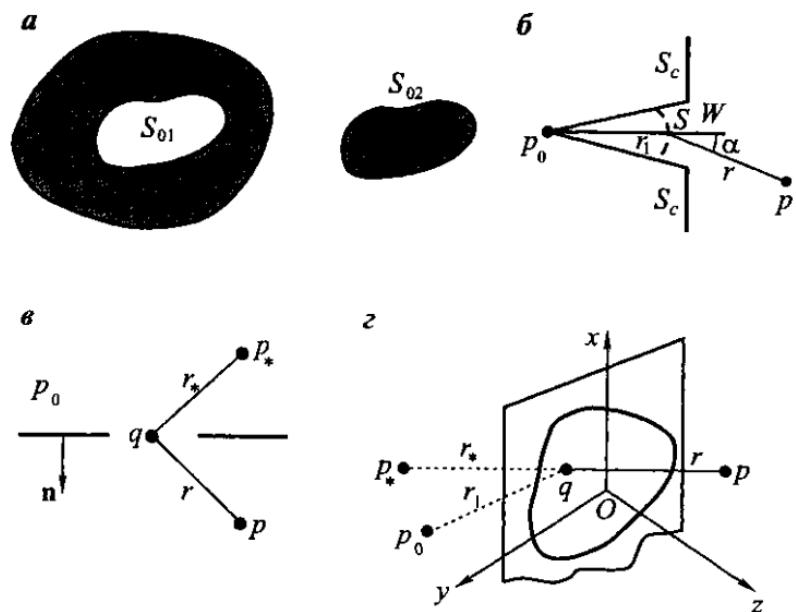


Рис. 6.5. Экраны, дополняющие друг друга (а); иллюстрация формулы (6.89) (б); иллюстрация формулы (6.92) (в); вывод формулы (6.96) (г)

Очевидно, что

$$S = S_{01} + S_{02}$$

равняется площади всей поверхности экрана.

Из формулы (6.61) следует, что

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\mathcal{U}(g) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \mathcal{U}(g)}{\partial n} \right] dS, \quad (6.85)$$

где $\mathcal{U}(p)$ – комплексная амплитуда в точке p при отсутствии экранов.

Следовательно, выражения (6.84), (6.85) приводят к важному результату:

$$\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}_1(p) + \mathcal{U}_2(p), \quad (6.86)$$

т.е. сумма волн в присутствии двух дополняющих друг друга экранов равняется волне, которая распространяется, когда эти экраны отсутствуют. Этот результат известен как принцип Бабине. Используя выражение (6.86) легко показать, что этот принцип справедлив для любой кусочно-однородной среды.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, положим $\mathcal{U}_1 = 0$. Это означает, что $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$ и во всех точках, где интенсивность равняется нулю из-за при-

существия одного из экранов, в присутствии дополнительного экрана она становится равной той интенсивности, которая образуется, когда экран полностью отсутствует.

Вернемся теперь к выражению (6.83) и рассмотрим один частный случай. Предположим, что расстояния от отверстия до источника r_1 и до точки наблюдения r много больше длины волны:

$$r_1 \gg \lambda \text{ и } r \gg \lambda$$

или

$$kr_1 \gg 1 \text{ и } kr \gg 1. \quad (6.87)$$

Тогда, пренебрегая в (6.83) единицей по сравнению с kr и kr_1 , получим

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A i}{2\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+\eta)}}{rr_1} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})] dS, \quad (6.88)$$

т.е. известную формулу дифракции Френеля – Кирхгофа.

Из вывода формулы Гельмгольца следует, что вместо поверхности S_0 можно взять произвольную поверхность W , граница которой совпадает с краем отверстия (рис. 6.5, б). Например, эта поверхность может состоять из двух частей: части сферической поверхности S , на которой падающая волна имеет постоянные амплитуду и фазу, и сегмента конической поверхности S_c с вершиной в точке p_0 . С увеличением расстояния r , вклад интеграла по конической поверхности становится меньше, и поверхность S_0 почти совпадает с волновой поверхностью S . Поскольку на этой поверхности отношение

$$e^{ikr_1}/r_1$$

остается постоянным и

$$\frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = 1,$$

получаем

$$\mathcal{U}(p) = \frac{iA}{2\lambda} \frac{e^{ikr_1}}{\pi r} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\alpha) dS, \quad (6.89)$$

где

$$\cos\alpha = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

Если, помимо этого, расстояние r достаточно велико по сравнению с размерами отверстия, то комплексная амплитуда (6.89) на поверхности S_0 меняется мало, и вместо этого выражения мы можем записать

$$\mathcal{U}(p) = \frac{iA}{2\lambda} \frac{e^{ikr_1}}{\pi r} \int_{S_0} e^{ikr} (1 + \cos\alpha) dS$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ik\eta}}{r} \int_{S_0} e^{ikr} \cos^2 \frac{\alpha}{2} dS. \quad (6.90)$$

До настоящего момента выводы всех выражений основывались на формуле Гельмгольца, однако теперь мы используем соотношение (6.63), полученное в предыдущем разделе:

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \mathcal{U}(g) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (6.91)$$

Здесь $G = G(p, g, k)$ – функция Грина, равная нулю на поверхности экрана.

Как отмечалось ранее, для экрана произвольной формы эту функцию определить достаточно трудно. Однако плоский экран является одним из немногочисленных исключений, и в этом случае функция Грина записывается как

$$G(p, g, k) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_*}}{r_*}, \quad (6.92)$$

где r_* – расстояние между экраном и точкой p_* , которая является зеркальным отображением точки наблюдения (рис. 6.5, в). Действительно, указанная функция удовлетворяет формуле Гельмгольца в объеме V , имеет особенность в точке наблюдения, подчиняется условиям на бесконечности и равняется нулю во всех точках отверстия, когда $r = r_*$. Введем теперь декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O , расположенным в пределах отверстия (рис. 6.5, г). Ось z при этом направлена внутрь объема V , а ξ , η и ζ являются координатами точки g отверстия. Тогда расстояния r и r_* определяются следующими равенствами:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

и

$$r_*^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

где x, y и z – координаты точки наблюдения.

Нормальные производные от первого и второго члена в выражении (6.92) равняются

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_*}}{r_*} \right) = \frac{e^{ikr_*}}{r_*^2} (ikr_* - 1) \frac{\partial r_*}{\partial n} = \frac{e^{ikr_*}}{r_*^2} (ikr_* - 1) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_*).$$

Учитывая, что

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = -\cos\alpha \text{ и } \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = -\cos\alpha,$$

получим

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{2e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1) \cos\alpha \text{ на } S_0. \quad (6.95)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (6.91) и используя условия Кирхгофа, окончательно получим

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{A}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+n)}}{r^2 r_1} (ikr - 1) \cos\alpha \, dS. \quad (6.96)$$

В частности, в волновой зоне, где

$$kr \gg 1,$$

имеем

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{Ai}{\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r+n)}}{rr_1} \cos\alpha \, dS. \quad (6.97)$$

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА

Далее, выполняя интегрирование в (6.97), предположим, что члены $1/r r_1$ и $\cos\alpha$ остаются практически постоянными. В этом приближении выражение (6.97) записывается в виде

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{Ai \cos\alpha}{\lambda R R_1} \int_{S_0} e^{ik(r+n)} d\xi \, d\eta, \quad (6.98)$$

где R и R_1 – расстояния от начала координат O до точки наблюдения и первичного источника, соответственно, а α – угол, образованный нормалью \mathbf{n} и радиус-вектором \mathbf{R}_1 . Что выражения (6.88) и (6.97) совпадают, если предположить, что $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \cos\alpha$.

Согласно сделанным предположениям, размер отверстия значительно меньше расстояний R и R_1 , что позволяет упростить формулу (6.98). Поскольку $\zeta = 0$, имеем

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2,$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2$$

и

$$(6.99)$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Теперь представляется естественным разложить r и r_1 в ряд по степеням ξ/R , η/R и ξ/R_1 , η/R_1 .

Из равенств (6.99) следует, что

$$r_1 = R_1 \left(1 - 2 \frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_1^2} \right)^{1/2} \approx R_1 - \frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_1} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_1^3} + \dots$$

и

(6.100)

$$r \approx R - \frac{x \xi + y \eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x \xi + y \eta)^2}{2R^3} + \dots$$

Подстановка выражений (6.100) в (6.98) дает

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{A i \cos \alpha}{\lambda R R_1} \int_{S_0} e^{i k (R + R_1)} d\xi d\eta, \quad (6.101)$$

где

$$f(\xi, \eta) \approx -\frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_1} - \frac{x \xi + y \eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_1} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_1^3} - \frac{(x \xi + y \eta)^2}{2R^3}. \quad (6.102)$$

Заметим, что в этом выражении отброшены члены со степенями ξ и η больше двух.

Удобно также ввести направляющие косинусы:

$$l_0 = -x_0/R_1, m_0 = -y_0/R_1$$

и

(6.103)

$$l = x/R, m = y/R.$$

Например, l и l_0 характеризуют углы между осью x и векторами \mathbf{R} и \mathbf{R}_1 , соответственно.

Следовательно, функцию $f(\xi, \eta)$ можно записать в следующем виде:

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0 \xi + m_0 \eta)^2}{R_1} - \frac{(l \xi + m \eta)^2}{R} \right]. \quad (6.104)$$

Предположим, что в формуле (6.104) можно пренебречь квадратичными членами, т.е.

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta. \quad (6.105)$$

В этом случае, как уже было отмечено в разделе 6.2, говорят о дифракции Фраунгофера. При сохранении этих членов мы имеем дело с дифракцией Френеля. Это означает, что приближение Фраунгофера справедливо, если точка наблюдения и первичный источник находятся далеко от экрана. Строго говоря, выражение (6.105) соответствует случаю, когда

$$R \rightarrow \infty \text{ и } R_1 \rightarrow \infty. \quad (6.106)$$

В то же время приближение Френеля довольно хорошо описывает волновые поля на более близких расстояниях, хотя и не вблизи самого экрана.

6.4. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА И ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим теперь некоторые интересные черты поведения волн за экраном (рис. 6.5, г). Согласно теории Кирхгофа, комплексную амплитуду скалярного потенциала \mathcal{U} можно записать в следующем виде (см. формулу 6.98):

$$\mathcal{U}(p) = C_0 \int_{S_0} e^{i\mathcal{U}(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (6.107)$$

где функция $f(\xi, \eta)$ определяется выражением (6.104).

Комплексный множитель C_0 прямо пропорционален силе источника и зависит от волнового числа, а также от того, на каком расстоянии от отверстия в экране находятся первичный источник и точка наблюдения.

При выводе формулы (6.107) использовались следующие предположения.

1. Поведение волны на поверхности экрана описывается граничными условиями Кирхгофа. Это означает, в частности, что размер отверстия должен быть больше длины волны.

2. Расстояние от экрана до точки наблюдения и источника превышает длину волны:

$$R > \lambda \text{ и } R_1 > \lambda.$$

3. Расстояния R и R_1 должны быть также больше размеров отверстия. Это предположение позволяет заменить функции $1/r$, в выражении (6.97) на постоянный множитель $1/RR_1$, и вынести его, а также $\cos\alpha$, из-под знака интеграла. Помимо этого мы представили функцию $r + r_1$ на поверхности интегрирования в виде полинома второй степени по координатам ξ и η , и пренебрели членами более высокого порядка.

С учетом сделанных предположений трудно ожидать, что выражение (6.107) может обеспечить достаточную точность вблизи отверстия или непрозрачной части экрана. Из формулы (6.107) следует, что волну в любой точке наблюдения можно трактовать как суперпозицию плоских волн с одинаковой амплитудой $|C_0 d\xi d\eta|$, но с разными фазами

$$k(R + R_1) - \frac{\pi}{2} + k f(\xi, \eta). \quad (6.108)$$

Другими словами, все выглядит так, как если бы каждый элемент поверхности S_0 возбуждал плоскую волну, амплитуда которой, в отличие от фазы, не зависела бы от координат ξ и η . Заметим, что первые два слагаемых в (6.108) появляются из-за множителя C_0 , как это следует из формулы (6.101).

Ранее мы показали, что интерференция плоских волн может быть конструктивной или деструктивной. Например, если волны приходят в точку наблюдения с близкими фазами, то наблюдается увеличение амплитуды волны. И, наоборот, в случае, когда фазы волн заметно различаются между собой, это приводит к взаимному гашению волн и результирующая волна имеет относительно небольшую амплитуду.

Поэтому, рассматривая поведение волн в различных точках позади экрана, мы можем ожидать, что будут наблюдаться зоны относительно высоких и относительно низких амплитуд, которые, по существу, представляют собой дифракционную картину.

Прежде чем приступить к изучению этого явления, рассмотрим факторы, влияющие на фазу каждой из плоских волн в точке наблюдения. Для этого представим функцию $f(\xi, \eta)$, заданную выражением (6.104), в виде

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) + f_2(\xi, \eta), \quad (6.109)$$

где

$$f_1(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta \quad (6.110)$$

и

$$f_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0 \xi + m_0 \eta)^2}{R_1} - \frac{(l \xi + m \eta)^2}{R} \right]. \quad (6.111)$$

Как следует из формулы (6.101), фаза волны, вызванной элементом dS в окрестности начала координат $\xi = 0, \eta = 0$, равняется

$$k(R + R_1) - \frac{\pi}{2}.$$

Она зависит от длины волны и расстояния от начала координат до первично-го источника и точки наблюдения.

В то же время фаза плоской волны, вызванной произвольным элементом dS , определяется следующими параметрами:

- 1) длиной волны λ ;
- 2) координатами ξ и η элемента dS ;
- 3) координатами источника и точки наблюдения.

Например, с увеличением расстояния R_1 влияние этого параметра на функцию $f_2(\xi, \eta)$ уменьшается. Это означает, что падающая волна вблизи поверхности экрана S_0 ведет себя как плоская, и ориентация ее фронта относительно плоскости S_0 определяется направляющими косинусами l_0 и m_0 . Например, если источник располагается на оси z , то

$$l_0 = m_0 = 0.$$

В этом случае фронт падающей волны параллелен плоскости экрана и, следовательно, вторичные источники имеют одинаковую фазу. Однако в общем случае фазы этих источников зависят также от координат ξ и η элемента поверхности. Вблизи начала координат разность фаз между волнами в

некоторой точке и в начале координат описывается с хорошей точностью линейной функцией $f_1(\xi, \eta)$. Однако с увеличением расстояния $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ необходимо также учитывать функцию $f_2(\xi, \eta)$.

Очевидно, что когда оба расстояния R и R_1 становятся значительно больше размеров отверстия, поведение функции $f(\xi, \eta)$ в основном определяется первым слагаемым: $f_1(\xi, \eta)$. В этом случае мы имеем дело с приближением, которое называется дифракцией Фраунгофера. Прежде чем приступить к рассмотрению примеров, иллюстрирующих этот тип дифракции, следует сформулировать условия, при которых можно пренебречь функцией $f_2(\xi, \eta)$ и считать, что фаза элементарных волн изменяется линейно. Из формулы (6.107) следует, что указанная функция задает поведение члена

$$e^{i k f_2(\xi, \eta)}.$$

Его амплитуда всегда равняется единице, но фаза $k f_2(\xi, \eta)$ может очень быстро изменяться от точки к точке на поверхности S_0 при больших значениях волнового числа. Тем не менее, если фаза мала, значения этого члена близки к единице. Соответственно, условие, позволяющее рассматривать только линейный член функции $f(\xi, \eta)$, можно записать как

$$k f_2(\xi, \eta) \ll 2\pi$$

или

$$\frac{1}{2} k \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0 \xi + m_0 \eta)^2}{R_1} - \frac{(l \xi + m \eta)^2}{R} \right] \ll 2\pi. \quad (6.112)$$

Воспользуемся также следующим неравенством:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2). \quad (6.113)$$

Действительно, имеем

$$2abcd \leq b^2 a^2 + a^2 d^2$$

или

$$(ad - bc)^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$(l_0 \xi + m_0 \eta)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2)$$

и

$$(l \xi + m \eta)^2 \leq (l^2 + m^2)(\xi^2 + \eta^2).$$

Так как значения параметров l_0 , l , m_0 и m не превышают единицы, неравенство (6.112) будет выполняться, если

$$R_1 \gg \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda} \text{ и } R \gg \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda}. \quad (6.114)$$

Эти условия определяют те расстояния R и R_1 , а также размер площадки интегрирования S_0 , для которых можно использовать приближение Фраунгофера. Данные условия схожи с условиями, полученными в разделе 1.

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующие дифракцию в указанном приближении.

Пример 1: дифракционная картина для прямоугольного отверстия

Пусть отверстие имеет форму прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, как показано на рис. 6.6, *a*. Оси x и y прямоугольной системы координат параллельны сторонам прямоугольника, а ее начало O расположено в центре прямоугольника. Соответственно, ось z перпендикулярна экрану и направлена внутрь объема V . Предположим также, что первичный источник расположен на оси z , т.е.

$$l_0 = x_0/R_1 = 0 \text{ и } m_0 = y_0/R_1 = 0.$$

Тогда вместо выражения (6.107) имеем

$$\mathcal{U}(p) = C_0 N, \quad (6.115)$$

где

$$N = \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\eta \quad (6.116)$$

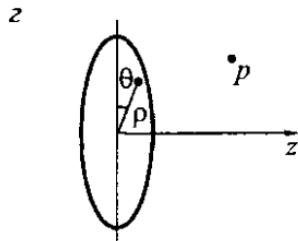
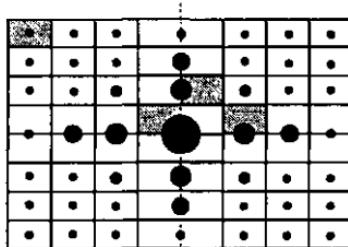
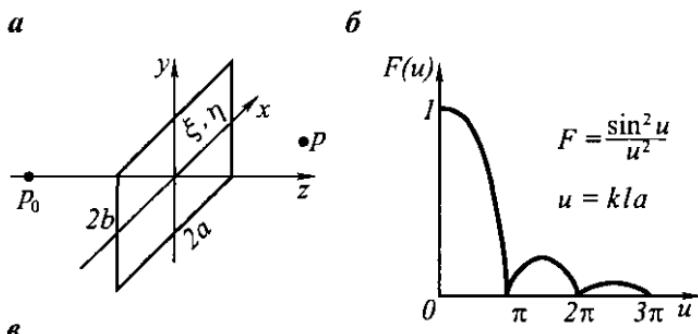


Рис. 6.6. Отверстие прямоугольной формы (*a*); функция интенсивности F (*b*); дифракционная картина для прямоугольного отверстия (*c*); экран с круглым отверстием (*d*)

или

$$N = \int_{-a}^a e^{-ikl\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikm\eta} d\eta.$$

Здесь

$$l = x/R \text{ и } m = y/R, \quad (6.117)$$

x и y обозначают координаты точки наблюдения, и

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (6.118)$$

Интегралы в выражениях (6.116) являются табличными и

$$\int_{-a}^a e^{ikl\xi} d\xi = \frac{1}{ikl} (e^{ikla} - e^{-ikla}) = \frac{2}{kl} \sin kla.$$

Аналогично,

$$\int_{-b}^b e^{ikm\eta} d\eta = \frac{2}{km} \sin kmb.$$

Таким образом,

$$N = S_0 \left(\frac{\sin kla}{kla} \right) \left(\frac{\sin kmb}{kmb} \right), \quad (6.119)$$

где

$$S_0 = 4ab \quad (6.120)$$

является площадью прямоугольника.

Поскольку интенсивность волны пропорциональна \mathcal{U}^2 , введем, как и ранее, функцию I :

$$I = \mathcal{U}^2 = I_0 F, \quad (6.121)$$

где

$$I_0 = C_0^2 S_0^2, \quad C_0 = -\frac{A i \cos \alpha}{\lambda R R_1} \quad (6.122)$$

и

$$F = N^2 \left(\frac{\sin kla}{kla} \right)^2 \left(\frac{\sin kmb}{kmb} \right)^2. \quad (6.123)$$

Рассмотрим сначала, как ведет себя функция I в точках на оси z . В этом случае $x = 0$, $y = 0$ и, следовательно,

$$l = 0 \text{ и } m = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

получим

$$F = 1 \text{ и } I = I_0. \quad (6.124)$$

Таким образом, из выражения (6.122) следует, что функция интенсивности I ведет себя обратно пропорционально квадрату расстояния от начала координат O .

Изучим теперь, как ведет себя функция F на плоскости

$$z = d,$$

параллельной экрану.

Рассмотрим сначала профиль $y = 0, m = 0$. В этом случае

$$F = N^2 \frac{\sin^2 kla}{(kla)^2}, \quad (6.125)$$

где

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \quad (6.126)$$

При изучении интерференции волн, вызванных первичными источниками, мы имеем дело с той же самой функцией $F(u)$, которая изображена на рис. 6.6, б.

С увеличением расстояния от оси z интенсивность сначала падает, а затем обращается в нуль при значении аргумента

$$k l a = \pm \pi n, \quad (6.127)$$

где n – целое число.

Таким образом, существует такое множество точек x_1, x_2, x_3, \dots , в которых интерференция вторичных волн имеет деструктивный характер и результирующая волна отсутствует. Между этими точками располагаются максимумы функции F , положение которых определяется уравнением

$$F' = \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right)' = 0$$

или

$$u = \operatorname{tg} u. \quad (6.128)$$

Здесь

$$u = k l a.$$

Как показано в табл. 1, с увеличением u корни этого уравнения асимптотически стремятся к

Таблица I

u	$\sin^2 u/u^2$
0	1
$1,430\pi = 4,493$	0,04718
$2,459\pi = 7,725$	0,01648
$3,470\pi = 10,90$	0,00834
$4,479\pi = 14,07$	0,00503

$$u = \frac{2n+1}{2}\pi. \quad (6.129)$$

Подставляя (6.129) в (6.125), получаем приближенное значение максимумов

$$F_{\max} \approx \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}. \quad (6.130)$$

Похожее поведение наблюдается вдоль оси y , где

$$I = I_0 \frac{\sin^2 kmb}{(kmb)^2}.$$

Очевидно, что чередование максимумов и минимумов происходит также вдоль прямых, направленных под углом к осям координат, однако такие максимумы гораздо слабее, чем те, что располагаются вдоль осей x и y . Причиной этого является то, что значение функции F определяется в формуле (6.123) произведением двух малых сомножителей.

Следует заметить, что с увеличением координаты x либо y параметры l и m стремятся к единице и, соответственно,

$$F \rightarrow \frac{\sin^2 ka}{(ka)^2} \text{ или } F \rightarrow \frac{\sin^2 kb}{(kb)^2}.$$

Из выражения (6.123) видно, что вдоль прямых

$$kla = \pi n \text{ и } klb = \pi n,$$

где n – целое число, функция I обращается в нуль. Эти два множества прямых образуют систему поверхностных элементов, в пределах которой наблюдаются максимумы различной интенсивности (рис. 6.6, в). Следовательно, в силу конструктивной и деструктивной интерференции отображение прямоугольного отверстия на плоскость $z = d$ имеет регулярный, хотя и довольно сложный характер, который является яркой иллюстрацией явления дифракции.

Рассмотрим теперь, как на дифракционную картину влияют размеры отверстия и длина волны. Как следует из формул (6.126) – (6.127), положение нулей интенсивности определяется выражением

$$\frac{kxa}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \pm \pi n$$

или

$$x_n = \pm \frac{d}{\sqrt{k^2 a^2 / \pi^2 n^2 - 1}}.$$

Полагая, что длина волны удовлетворяет условию

$$k a \gg \pi n,$$

мы приближенно получим

$$x_n = \pm \pi n d / k a, \text{ если } y = 0. \quad (6.131)$$

Аналогично,

$$y_n = \pm \pi n d / k b, \text{ если } x = 0. \quad (6.132)$$

Таким образом, с уменьшением размеров отверстия площадь, на которой наблюдается дифракционная картина, увеличивается. То же самое происходит с увеличением расстояния d от экрана.

В то же время с уменьшением длины волны вторичные максимумы стремятся к главному. Однако, как следует из соотношения (6.114), в приближении Фраунгофера частоту нельзя увеличивать до бесконечности. Это обстоятельство мы обсудим позже.

Интересно оценить размер элементарной поверхности, занятой первым максимумом. Из (6.131) – (6.132) имеем

$$x_1 = \pi d / k a \text{ и } y_1 = \pi d / k b$$

или

$$x_1 = \lambda d / 2a \text{ и } y_1 = \lambda d / 2b. \quad (6.133)$$

Поскольку

$$\lambda \ll 2a \text{ и } \lambda \ll 2b,$$

размер рассматриваемой площадки гораздо меньше расстояния d , однако он может значительно превышать размеры отверстия.

Пример 2: дифракционная картина для отверстия в форме круга

Рассмотрим теперь случай, когда отверстие имеет форму круга радиуса a (рис. 6.6, 2). В этом случае удобно ввести цилиндрическую систему координат:

$$\xi = \rho \cos \theta \text{ и } \eta = \rho \sin \theta. \quad (6.134)$$

Параметры l и m , характеризующие положение точки наблюдения p , также записываются в виде

$$l = s \cos \phi \text{ и } m = s \sin \phi.$$

Учитывая (6.110), вместо (6.107) получаем

$$\mathcal{U}(p) = C_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ip\rho \cos(\theta-\Phi)} \rho d\rho d\theta. \quad (6.135)$$

Из теории функций Бесселя известно следующее равенство:

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} e^{in\alpha} d\alpha.$$

В частности,

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \alpha} d\alpha. \quad (6.136)$$

Сравнение выражений (6.135) и (6.136) дает

$$\mathcal{U}(p) = 2\pi C_0 \int_0^a J_0(ks\rho) \rho d\rho$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{2\pi C_0}{(ks)^2} \int_0^{ksa} y J_0(y) dy. \quad (6.137)$$

Для дальнейшего упрощения этого выражения используем рекуррентное соотношение

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x).$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$x J_1(x) = \int_0^x y J_0(y) dy. \quad (6.138)$$

Соответственно, вместо (6.137), имеем

$$\mathcal{U}(p) = \frac{2\pi C_0}{(ks)^2} k s a J_1(ksa)$$

и

$$\mathcal{U}(p) = C_0 S_0 \frac{2J_1(ksa)}{ksa}, \quad (6.139)$$

где $S_0 = \pi a^2$ – площадь круга.

Отсюда функцию интенсивности можно записать как

$$I = I_0 F = I_0 \left[\frac{2J_1(ksa)}{ksa} \right]^2, \quad (6.140)$$

где

$$I_0 = C_0^2 S_0^2 \text{ и } F = \left[\frac{2J_1(ksa)}{ksa} \right]^2.$$

Выражение (6.140) представляет собой известную формулу, полученную Эйри в девятнадцатом веке.

Поведение функции $F(ksa)$ показано на рис. 6.7, а. Очевидно, что оно похоже на поведение функции F , соответствующей случаю прямоугольного отверстия. По определению,

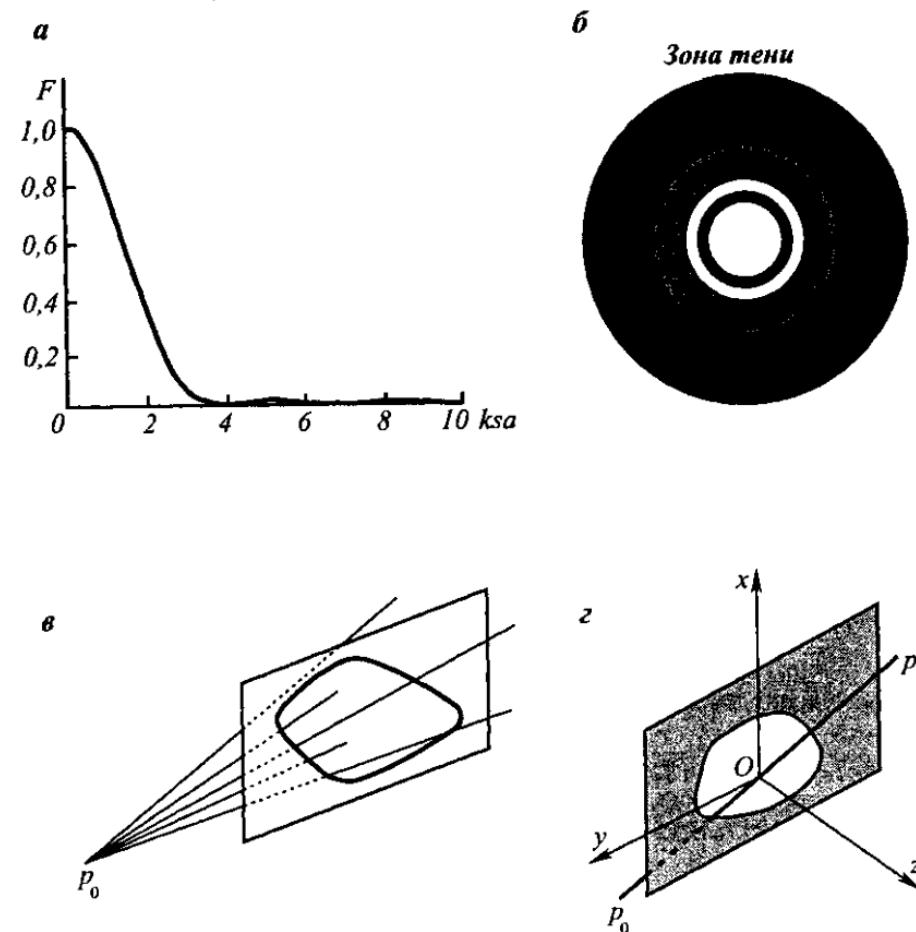


Рис. 6.7. Поведение функции $F(a)$; дифракционная картина для кругового отверстия (б); геометрия лучей в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ (в); иллюстрация дифракции Френеля (г)

$$s = \sqrt{l^2 + m^2} = r/R. \quad (6.141)$$

В каждой точке на оси z функция F имеет главный максимум, равный единице. Далее, на плоскостях параллельных экрану, функция l быстро уменьшается с увеличением расстояния r , а затем наблюдаются кольцевые зоны разной интенсивности.

Положение нулей функции l определяется из равенства

$$J_1(ksa) = 0. \quad (6.142)$$

Значения нескольких первых максимумов и минимумов функции F приводятся в табл. 2.

Поскольку

$$\frac{r}{R} ka = ksa,$$

из табл. 2 следует, что радиусы колец с нулевыми значениями интенсивности равны

$$\frac{r^{(1)}}{R} = 0,61 \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{r^{(2)}}{R} = 1,116 \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{r^{(3)}}{R} = 1,619 \frac{\lambda}{a}, \dots \quad (6.143)$$

С увеличением аргумента ksa поведение функций Бесселя становится асимптотическим и описывается синусоидами с затухающими амплитудами. Поэтому отношение этих радиусов r/R стремится к $\lambda/2a$. Как и в предыдущем примере, размер дифракционной картины обратно пропорционален радиусу отверстия.

В соответствии с (6.143), с уменьшением длины волны ширина зоны главного и вторичных максимумов становится меньше, и они приближаются друг к другу. В пределе, при $\lambda \rightarrow 0$, из равенств (6.143) следует, что интенсивность волны всюду, за исключением оси z , равняется нулю. Конечно, этот результат противоречит экспериментальным данным, которые показывают, в общем случае, что в рассматриваемом высокочастотном пределе ($\lambda \rightarrow 0$) волны существуют только в пределах конуса, вершина которого находится в источнике, а его горизонтальные поверхности проходят через край отверстия (рис. 6.7, в).

Наше рассмотрение предполагает, что приближение Фраунгофера приме-

Таблица 2

ksa	F	
0	1	max
$1,220\pi = 3,833$	0	min
$1,635\pi = 5,136$	0,0175	max
$2,223\pi = 7,016$	0	min
$2,679\pi = 8,417$	0,0042	max
$3,238\pi = 10,174$	0	min
$3,699\pi = 11,620$	0,0016	max

нимо только в определенном диапазоне частот. С одной стороны, граничные условия Кирхгофа можно использовать, только когда длина волны меньше размеров отверстия. Это определяет верхний предел для волновых чисел. С другой стороны, нижнюю границу длины волны можно оценить из выражения (6.114), характеризующего приближение Фраунгофера. Полагая, например, что источник находится на бесконечности, выражения (6.114) можно записать как

$$R \gg a^2/\lambda \text{ или } R/a \gg a/\lambda. \quad (6.144)$$

Комбинируя эти неравенства с первым из равенств (6.143), получим

$$r^{(1)}/a \gg 1, \quad (6.145)$$

т.е. при длинах волн удовлетворяющих приближению Фраунгофера, радиус главного максимума значительно превышает радиус диска a . Заметим также, что поскольку источник находится на бесконечности, коническая поверхность (рис. 6.7, в) вырождается в цилиндрическую поверхность радиуса a . Соответственно, граница главной зоны находится далеко за пределами этой поверхности и предельный случай ($\lambda \rightarrow 0$) не наблюдается.

Чтобы изучить поведение дифракционной картины на меньших длинах волн, необходимо использовать более точное приближение, либо численно интегрировать непосредственно выражение (6.97).

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим теперь приближение, которое называется дифракцией Френеля и при котором, в отличие от предыдущего случая, функция $f(\xi, \eta)$ заменяется первыми двумя членами в разложении (6.109). Это означает, что мы предполагаем квадратичное изменение фазы вторичных волн вдоль поверхности S_0 . Конечно, такой подход также является приближенным, однако он позволяет изучать дифракцию в более близких к экрану точках и при меньших длинах волн.

Перепишем выражение (6.107) в виде

$$\mathcal{U}(p) = B(C + iS), \quad (6.146)$$

где

$$B = -A \frac{i \cos \alpha}{\lambda} \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1} \quad (6.147)$$

и

$$C = \int_{S_0} \cos[kf(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (6.148)$$

$$S = \int_{S_0} \sin[kf(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

Как и ранее, мы предполагаем, что поверхность S_0 плоская, а точки p и p_0 находятся на одной прямой. Пусть также ось x расположена в плоскости, образованной прямой pp_0 и осью z (рис. 6.7, 2). Тогда, как это следует из формулы (6.103),

$$l_0 = l \text{ и } m_0 = m$$

и, следовательно, линейные члены функции $f(\xi, \eta)$ обращаются в нуль. Как видно из рис. 6.7, 2,

$$l = l_0 = \sin \delta, m = m_0 = 0, n = n_0 = \cos \delta, \quad (6.149)$$

где δ – угол между прямой pp_0 и осью z .

Соответственно, для функции

$$f(\xi, \eta) = f_2(\xi, \eta),$$

определенной выражением (6.111), получим

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \xi^2 \sin^2 \delta \right]$$

или

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2). \quad (6.150)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении интегралы C и S записываются как

$$C = \int_{S_0} \cos \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta \quad (6.151)$$

и

$$S = \int_{S_0} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta.$$

Чтобы упростить изучение дифракции в одном относительно простом, но интересном случае, мы введем новые переменные

$$\frac{\pi}{2} u^2 = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \xi^2 \cos^2 \delta \quad (6.152)$$

и

$$\frac{\pi}{2} v^2 = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \eta^2.$$

Отсюда

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \xi \cos \delta$$

и

$$v = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \eta.$$

(6.153)

Выполняя операцию дифференцирования, получим

$$du = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} \cos \delta d\xi,$$

$$dv = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} d\eta$$

и

$$d\xi d\eta = \frac{\lambda}{2} \frac{du dv}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \cos \delta}. \quad (6.154)$$

Подстановка выражений (6.153) – (6.154) в формулу (6.151) дает

$$C = b \int_{S_1} \cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] du dv$$

(6.155)

$$S = b \int_{S_1} \sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] du dv,$$

где

$$b = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) \cos \delta}, \quad (6.156)$$

а S_1 обозначает новую площадь интегрирования в плоскости координат u и v .

Дальнейшие упрощения возможны в том случае, когда поверхность S_1 является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям u и v . Для этого случая мы будем использовать тождества

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right),$$

$$\sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] = \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right).$$

ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Указанные соотношения позволяют выразить функции C и S в (6.155) через интегралы Френеля

$$L(\gamma) = \int_0^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau \quad (6.157)$$

и

$$N(\gamma) = \int_0^\gamma \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau,$$

которые можно часто встретить в различных задачах, связанных с дифракцией.

Обе приведенные функции, также как и функции Бесселя и Лежандра, являются примерами специальных функций. Опишем кратко некоторые из их свойств.

Прежде всего, разлагая их подынтегральные выражения в степенные ряды и интегрируя затем каждый из членов ряда, получим

$$L(\gamma) = \gamma \left[1 - \frac{1}{2!5} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2 \right)^2 + \frac{1}{4!9} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2 \right)^4 + \dots \right]$$

и

$$N(\gamma) = \gamma \left[\frac{1}{1!3} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2 \right)^2 - \frac{1}{3!7} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2 \right)^3 + \frac{1}{5!11} \left(\frac{\pi}{2} \gamma^2 \right)^5 + \dots \right].$$

Легко увидеть, что данные ряды сходятся при любом значении γ , однако для вычислительных целей их удобно использовать, когда γ относительно мало.

Если значение γ велико, оба интеграла можно разложить в ряд по степеням величины, обратной γ .

Для этого представим функцию L как

$$L(\gamma) = L(\infty) - L_1, \quad (6.158)$$

где

$$L_1 = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\pi\tau} d\sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right). \quad (6.159)$$

Интегрирование по частям дает

$$L_1 = \left. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right)}{\pi\tau} \right|_{\gamma}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\tau^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \gamma^2\right)}{\pi\gamma} - \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\tau^3} d\cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right).$$

Таким образом,

$$L(\gamma) = L(\infty) + \frac{1}{\pi\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) + \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\pi^2\tau^3} d\tau \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right).$$

Снова выполняя операции разложения в ряд и интегрирования, получим

$$L(\gamma) = L(\infty) - \frac{1}{\pi\gamma} \left[P(\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) - Q(\gamma) \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) \right], \quad (6.160)$$

где

$$P(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(\pi\gamma^2)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(\pi\gamma^2)^5} - \dots$$

и

$$Q(\gamma) = 1 - \frac{1 \cdot 3}{(\pi\gamma^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(\pi\gamma^2)^4} - \dots$$

По аналогии имеем

$$N(\gamma) = N(\infty) - \frac{1}{\pi\gamma} \left[P(\gamma) \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) + Q(\gamma) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma^2\right) \right]. \quad (6.162)$$

Теперь необходимо найти значения интегралов $L(\infty)$ и $N(\infty)$. Чтобы решить эту задачу, составим сумму

$$L(\infty) + iN(\infty) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau + i \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

или

$$L(\infty) + iN(\infty) = \int_0^{\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)} d\tau. \quad (6.163)$$

Полагая

$$\alpha = -i \frac{\pi}{2},$$

мы приходим к хорошо известному интегралу Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Отсюда

$$L(\infty) + iN(\infty) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{-i}} = \sqrt{\frac{i}{2}}.$$

Поскольку

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

получаем

$$L(\infty) + iN(\infty) = (1+i)/2.$$

Таким образом, в предельном случае интегралы Фурье равняются

$$L(\infty) = 1/2 \text{ и } N(\infty) = 1/2, \quad (6.164)$$

а при достаточно больших значениях γ эти интегралы можно оценить, воспользовавшись формулами (6.160)–(6.161). Выражения (6.161) являются типичными примерами расходящихся (асимптотических) рядов, ограниченное число членов которых обеспечивает достаточную точность, однако дальнейшее увеличение числа используемых членов ряда приводит к увеличению ошибки аппроксимации.

На практике разложение как в степенной, так и в асимптотический ряд позволяет оценить интегралы Фурье с хорошей точностью.

Отметим еще одно интересное свойство этих функций, следующее из их определения (6.157), а именно

$$L(\gamma) = -L(-\gamma) \text{ и } N(\gamma) = -N(-\gamma). \quad (6.165)$$

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КРАЕ

Предположим, что экраном является полубесконечная плоскость и оси x и z системы координат направлены перпендикулярно краю экрана. Первичный источник и точка наблюдения находятся на оси z , а положение начала координат O характеризуется расстоянием x от края экрана (рис. 6.8, *a*). Наша цель состоит в том, чтобы изучить, как ведет себя функция интенсивности I при различных значениях x .

Очевидно, что обе координаты ξ и η точек, расположенных в области интегрирования, изменяются в пределах

$$-\infty < \xi < x \text{ и } -\infty < \eta < \infty$$

и, как следует из (6.153),

$$-\infty < u < \gamma, \quad -\infty < v < \infty,$$

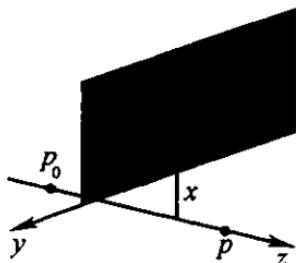
где

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right)} x \cos \delta, \quad (6.166)$$

а δ обозначает угол между прямой pp_0 и осью z . В данном частном случае $\delta = 0$.

Интегралы C и S записываются как

а



б



в

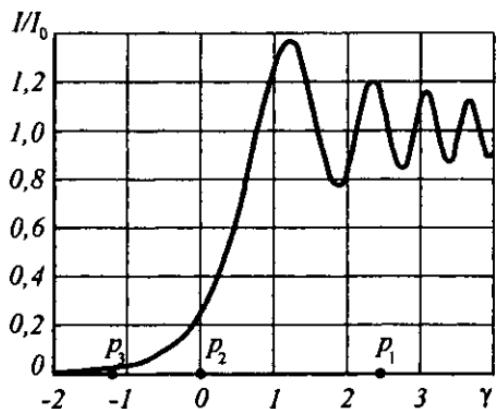


Рис. 6.8. Положение полубесконечного экрана (а); освещенная зона и зона тени; вторичные источники (б); дифракция Френеля на прямом угле (в)

$$C = b \int_{-\infty}^{\gamma} du \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \right] dv \quad (6.167)$$

и

$$S = b \int_{-\infty}^{\gamma} du \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \right] dv.$$

В соответствии с формулами (6.164) – (6.165), имеем

$$\int_{-\infty}^{\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\gamma} = \frac{1}{2} + L(\gamma) \quad (6.168)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau = 1.$$

Таким же образом получаем

$$\int_{-\infty}^{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = \frac{1}{2} + N(\gamma),$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau = 1.$$

Следовательно, выражения (6.167) записываются теперь как

$$C = b \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right) - \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right) \right]$$

и

$$S = b \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right) + \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right) \right].$$

Таким образом, интегрирование вдоль полуплоскости сводится к вычислению функций Френеля. Как следует из формулы (6.146), функция интенсивности равняется

$$I = B^2 (C^2 + S^2)$$

или

$$I = I_0 F,$$

где

$$I_0 = 4B^2 B^2$$

и

$$F = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + L(\gamma) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + N(\gamma) \right)^2 \right]. \quad (6.170)$$

Последняя формула описывает, по существу, результирующую волну, вызванную первичными источниками, расположенными на бесконечности, как показано на рис. 6.8, б. В этом случае вторичные источники имеют одинаковые амплитуды и фазы.

Поведение функции I/I_0 показано на рис. 6.8, в и является яркой демонстрацией эффекта дифракции. Заметим, прежде всего, что если точка наблюдения p_1 находится в "освещенной" зоне, то с увеличением расстояния от края экрана отношение I/I_0 асимптотически стремится к единице, хотя и осциллирующим образом.

В точке p_2 , относящейся к краю экрана, интенсивность равняется

$$I/I_0 = 0,25.$$

Совершенно другая картина наблюдается в зоне "тени", где по мере увеличения расстояния между точкой p_3 и краем экрана функция I/I_0 постепенно уменьшается. Как следует из формулы (6.166), с уменьшением длины волны переходная зона между "освещенной" и "теневой" зонами становится все уже, и в пределе ее ширина стремится к нулю. Следует заметить, что, несмотря на то что теория Кирхгофа справедлива только в случае отверстия конечных размеров, представленные здесь результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

6.5. ФОРМУЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА – КИРХГОФА

Ранее мы вывели формулу Гельмгольца, которая устанавливает связь между комплексной амплитудой потенциала стационарной волны в некоторой точке объема V и значениями этой функции \mathcal{U} и ее производной $\partial\mathcal{U}/\partial n$ на поверхности S данного объема (рис. 6.3, a). Согласно (6.61) это выражение записывается как

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \mathcal{U}(g, \omega)}{\partial n} - \mathcal{U}(g, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS, \quad (6.171)$$

где R – расстояние между точкой наблюдения p и точкой g , расположенной на поверхности S , а единичный вектор n направлен во внешнюю сторону от объема.

Заметим, что, если точка p лежит вне поверхности S , то внутри объема V особенности отсутствуют, и интеграл в правой части (6.171) обращается в нуль:

$$\mathcal{U}(p) = 0. \quad (6.172)$$

Как мы уже знаем, выражение (6.171) играет чрезвычайно важную роль в изучении основных свойств дифракции волн.

В данном разделе мы покажем, что формулы (6.171) – (6.172) можно также использовать, во-первых, для получения аналогичных соотношений в случае нестационарных волн и, во-вторых, как теоретическое обоснование принципа Гюйгенса – Френеля.

ФОРМУЛА КИРХГОФА

Для решения первой из поставленных задач используем интеграл Фурье:

$$U(p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(p, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.173)$$

Прежде всего, продифференцируем второй член, стоящий в скобках под интегрального выражения (6.171). В результате получим

$$\mathcal{U}(p, \omega) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \mathcal{U}(g, \omega)}{\partial n} - \mathcal{U}(g, \omega) e^{ikR} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \right. \\ \left. - \mathcal{U}(g, \omega) \frac{ik}{R} e^{ikR} \frac{\partial R}{\partial n} \right] dS. \quad (6.174)$$

Далее, применяя преобразование Фурье и меняя порядок интегрирования в правой части выражения (6.174), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(p, \omega) e^{-i\omega} d\omega = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{U}(g, \omega)}{\partial n} e^{-i\omega(t-R/c)} d\omega - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(g, \omega) e^{-i\omega(t-R/c)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d\omega - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\omega}{c} \mathcal{U}(g, \omega) e^{-i\omega(t-R/c)} d\omega \right] dS. \quad (6.175)$$

Из формулы (6.173) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \mathcal{U}(p, \omega) e^{-i\omega} d\omega.$$

Следовательно, соотношение (6.175) после умножения на коэффициент $1/2\pi$ запишется как

$$U(p, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial U(g, t_1)}{\partial n} - U(g, t_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} + \frac{1}{cR} \frac{\partial U(g, t_1)}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial n} \right] dS, \quad (6.176)$$

где

$$t_1 = t - R/c. \quad (6.177)$$

Выражение (6.176) называется формулой Кирхгофа и показывает, что потенциал $U(p, t)$ в произвольный момент времени t и для любой точки p объема V определяется значениями этой же функции на поверхности S , а также ее производными $\partial U / \partial n$ и $\partial U / \partial t$ в предыдущие моменты времени. Запаздывание по времени $\Delta t = t - t_1 = R/c$ зависит при этом от расстояния R и скорости c .

Выражения (6.173) и (6.176) являются, по существу, формулами, представляющими, соответственно, синусоидальные и нестационарные волны. Они описывают соотношение между волновым полем в некоторой точке внутри объема и значениями этого поля на поверхности данного объема.

Именно поэтому эти выражения играют такую важную роль в теории волн. В частности, эти формулы лежат в основе некоторых методов сейсмической миграции. Интересно отметить, что выражение (6.171) было первоначально выведено Гельмгольцем. После этого Кирхгоф снова получил формулу (6.171), а также выражение (6.17, б), описывающее нестационарные волны, и использовал их для изучения дифракции света.

Обсудим теперь смысл подынтегральных выражений, стоящих в указанных формулах. Эти выражения принято интерпретировать как сумму элементарных сферических волн, вызванных источниками, расположенными на поверхности S . Так, например, из формулы Кирхгофа следует, что значения волнового поля внутри объема V в момент времени t определяются силой источников в предыдущие моменты времени.

СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим геометрию и физический смысл волн, вызванных элементарным источником. Для этого можно воспользоваться как формулой Кирхгофа, так и формулой Гельмгольца, однако здесь мы рассмотрим только случай стационарных волн.

Подынтегральное выражение в (6.171) представляет собой сумму двух членов:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.178)$$

и

$$\mathcal{A}_2 = -\mathcal{U} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right). \quad (6.179)$$

Последнее выражение можно записать как

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \cos \psi, \quad (6.180)$$

где

$$\cos \psi = \partial R / \partial n, \quad (6.181)$$

а ψ – угол между радиус-вектором R и единичным вектором n (см. рис. 6.9, a).

Согласно (6.178) – (6.179) каждый элемент поверхности dS вызывает появление в объеме V двух сферических волн. Одна из них, описываемая функцией \mathcal{A}_1 , является сферической волной, амплитуда и фаза которой остаются постоянными на сфере S_0 с центром в точке g . В то же время вторая волна, задаваемая выражением (6.179), является сферической волной другого типа. Ее фазовая поверхность, как и в предыдущем случае, является сферой, однако амплитуда волны на этой поверхности изменяется в зависимости от угла ψ . Поскольку поверхности обеих волн являются сферами, имеющими общий центр в точке g , сумма этих элементарных волн также является сферической волной. Наконец, как следует из (6.171), полная волна является результатом суперпозиции элементарных сферических волн.

Суммируя, можно сказать, что источники распределяются таким образом, что оказываются выполнеными следующие условия.

1. Каждый элемент поверхности S порождает сферическую волну.
2. Полную волну внутри объема V можно рассматривать как результат интерференции элементарных волн.
3. Как следует из выражения (6.172), результирующий потенциал, порожденный источниками на поверхности S , равняется нулю вне объема V . Этот факт может служить доказательством того, что волны в однородной среде не распространяются в сторону первичного источника.

Наш анализ основывался на использовании формул (6.171)–(6.172), однако, как уже отмечалось ранее, аналогичный результат можно получить, исходя из формулы Кирхгофа (6.176).

ВТОРИЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

В обеих рассматриваемых формулах предполагается, что существуют вторичные источники двух типов. Их появление связано с тем, что распространение волн сопровождается деформацией и движением среды. Теперь, основываясь на понятиях источников, мы снова выведем формулу Гельмгольца. Воспользуемся для этого соотношениями между волновыми полями и потенциалом, т.е.

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} U, \quad P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t}$$

и

(6.182)

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{или} \quad \Theta = -\frac{P}{\rho c^2},$$

где \mathbf{v} – скорость частицы, Θ – дилатация, P – вызванное волной избыточное давление.

Как было показано в главе 5, потенциал элементарного сферического источника определяется как

$$U(p, t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (6.183)$$

Здесь $f(t - R/c) = \cos \omega(t - R/c)$. Соответственно, скорость частиц

$$v_R = \partial U / \partial R$$

равняется

$$v_R = \frac{1}{R^2} f\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{Rc} f'\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

или

$$4\pi R^2 v_R = -4\pi f\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{4\pi R}{c} f'\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (6.184)$$

Левая часть этого равенства описывает скорость, с которой среда движется через поверхность, окружающую источник.

В пределе $R \rightarrow 0$ имеем

$$4\pi R^2 v_R \rightarrow -4\pi f(t). \quad (6.185)$$

По этой причине функцию $f(t)$ естественно назвать силой источника, поскольку с точностью до множителя -4π она равняется количеству жидкости, проходящей через поверхность за единицу времени, при условии, что плотность ρ равна единице. Очевидно, что такой тип источника порождает однородную сферическую волну.

В нашем случае, когда среда движется внутрь объема V через элементарную поверхность dS , сила источника становится равной

$$f(t) = -\frac{v_n dS}{4\pi} \text{ или } f(t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (6.186)$$

Сравнение выражений (6.184) и (6.186) показывает, что компонента v_R заменяется нормальной компонентой v_n , а поверхность сферы – элементарной поверхностью dS . Следовательно, для синусоидальных колебаний комплексная амплитуда сферической волны, вызванной этим элементарным источником (рис. 6.9, a), есть

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \frac{e^{iKR}}{R}, \quad (6.187)$$

что совпадает со вторым членом, стоящим в скобках выражения (6.74).

Ранее было отмечено, что волна, распространяющаяся через поверхность S , приводит к появлению следующих двух эффектов:

- появлению потока вещества через поверхность dS ;
- изменению давления.

В силу первого эффекта простейшие источники появляются вблизи поверхности S .

Рассмотрим теперь, как зарождаются и действуют источники второго типа. Согласно (6.182), комплексная амплитуда избыточного давления определяется из равенства

$$P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \text{ или } \mathcal{P} = i \omega \rho \mathcal{U}. \quad (6.188)$$

Отсюда комплексная амплитуда силы, действующей на элемент dS , есть

$$d\mathcal{F} = i \omega \rho \mathcal{U} dS, \quad (6.189)$$

и наша цель состоит в том, чтобы определить волну, вызванную силой

$$dF = \operatorname{Re}(i \mathcal{U} e^{-i\omega t}) \omega \rho dS. \quad (6.190)$$

Чтобы исследовать эффект действия этой силы, рассмотрим следующую задачу. Предположим, что, в отличие от предыдущих случаев, заданная внешняя сила F распределена внутри объема V_1 . Тогда, как это следует из второго

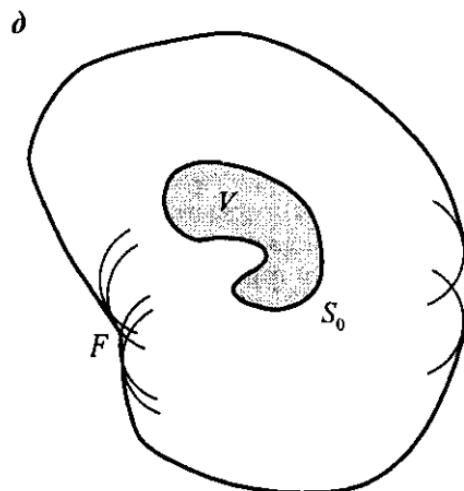
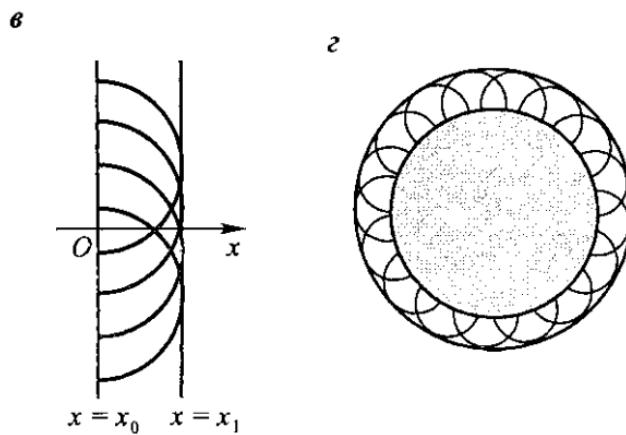
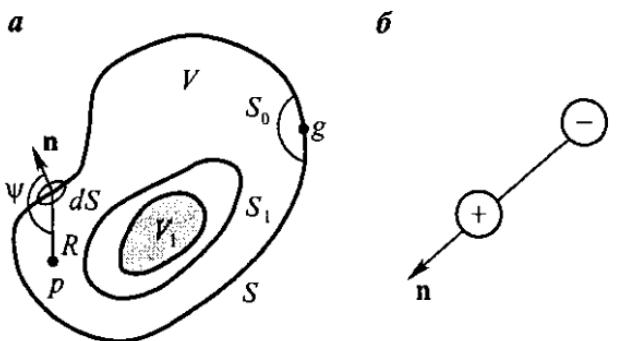


Рис. 6.9. Иллюстрация формул (6.179) – (6.181) (*a*); акустический диполь (*b*); принцип Гюйгенса для плоской, сферической и произвольной волны (*c*, *z*, *d*)

закона Ньютона, уравнение движения частицы, например, вдоль оси x записывается следующим образом:

$$m \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta V + F_x \rho \Delta V, \quad (6.191)$$

где ΔV – элементарный объем; $\rho F_x \Delta V$ – x -компоненты силы \mathbf{F} ;

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (6.192)$$

Здесь \mathbf{F} – сила, действующая на единицу массы.

Учитывая уравнение (6.182), вместо формулы (6.191) имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + F_x. \quad (6.193)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + F_y \quad (6.194)$$

и

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + F_z. \quad (6.195)$$

Дифференцируя каждое из уравнений (6.193)–(6.195) соответственно по x , y и z , а затем складывая получившиеся выражения, имеем

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Theta + \operatorname{div} \mathbf{F},$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (6.196)$$

Соответственно, для синусоидальной волны получим

$$\nabla^2 \Theta + k^2 \Theta = - \frac{1}{c^2} \operatorname{div} \mathcal{F}. \quad (6.197)$$

Здесь Θ и \mathcal{F} – комплексные амплитуды дилатации и силы \mathbf{F} .

Таким образом, функция Θ является решением неодиородного уравнения Гельмгольца в объеме V_1 . Присутствие правой части в уравнении (6.197) предполагает наличие внешней силы $\operatorname{div} \mathcal{F}/c^2$ в каждой точке внутри данного объема. Как было показано в главе 5, комплексную амплитуду дилатации, вызванной таким источником, можно записать как

$$d\Theta = \frac{\operatorname{div} \mathcal{F}}{4\pi c^2} \frac{e^{i k R}}{R} dV_1.$$

Следовательно, действие силы \mathbf{F} можно представить как суперпозицию волн, вызванных элементарными источниками. Это дает

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \int_V \operatorname{div} \mathcal{F} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_1, \quad (6.198)$$

где

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1.$$

Объем интегрирования имеет конечные размеры, а dx_1 , dy_1 и dz_1 , обозначают координаты точек внутри объема. Другими словами, мы получили решение уравнения (6.197).

Применим теперь следующее известное соотношение из векторного анализа (приложение 3):

$$\operatorname{div}(\phi \mathcal{F}) = \mathcal{F} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \mathcal{F}, \quad (6.199)$$

где

$$\phi = e^{ikR}/R.$$

Подставляя (6.199) в (6.198), получим

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\int_V \operatorname{div}(\phi \mathcal{F}) dV_1 - \int_V \mathcal{F} \cdot \nabla \phi dV_1 \right]. \quad (6.200)$$

Согласно формуле Гаусса – Остроградского,

$$\int_V \operatorname{div}(\phi \mathcal{F}) dV_1 = \oint_{S_1} \phi \mathcal{F} \cdot dS$$

и, следовательно, вместо выражения (6.200) мы имеем

$$\Theta = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\oint_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} (\mathcal{F} \cdot dS) - \int_V \mathcal{F} \cdot \nabla \frac{e^{ikR}}{R} dV_1 \right]. \quad (6.201)$$

где g обозначает точку объема V_1 , и операции дифференцирования и интегрирования выполняются относительно координат точки. На это указывает используемое нами обозначение ∇^g .

Вне указанного объема силы \mathcal{F} отсутствуют, следовательно, поверхностный интеграл в (6.201) обращается в нуль, и мы имеем

$$\Theta = - \frac{1}{4\pi c^2} \int_V \mathcal{F} \cdot \nabla \frac{e^{ikR}}{R} dV_1. \quad (6.202)$$

Предположим теперь, что сила \mathcal{F} направлена вдоль оси x и концентрируется в окрестности начала координат ($R \rightarrow 0$) в некотором объеме, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Тогда вместе члена

$$\nabla \frac{e^{ikR}}{R}$$

мы можем использовать только его x -компоненту

$$\nabla \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Поскольку объем мал, этот член можно вынести из-под знака интеграла. Таким образом, получим

$$\Theta = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R} \int \mathcal{F}_x dV_1,$$

и \mathcal{F}_x является x -компонентой потенциала \mathcal{F} .

В силу определения (6.192),

$$\Theta = -\frac{F}{4\pi c^2 \rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.203)$$

где F обозначает силу, действующую на массу объема V_1 .

Учитывая, что

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{ikR}}{R} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R},$$

и, следовательно,

$$\Theta = -\frac{F}{4\pi c^2 \rho} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.204)$$

Последнее выражение позволяет определить потенциал волны, источником которой служит сила, сконцентрированная в малом объеме. Действительно, из (6.182) следует, что

$$\Theta = -\frac{i\omega}{c^2} \mathcal{U}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (6.204) дает

$$\mathcal{U} = \frac{iF}{\omega 4\pi \rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.205)$$

В частности, если сила направлена вдоль нормали n , комплексная амплитуда потенциала равняется

$$\mathcal{U} = \frac{i}{4\pi} \frac{F}{\omega \rho} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.206)$$

Сравнение с выражением (6.171) показывает, что второй член в скобках описывает волну, вызванную элементарной силой, действующей на элемент dS и ориентированной в направлении нормали n .

Легко показать, что потенциал \mathcal{U} , задаваемый выражением (6.206), совпадает с потенциалом, вызванным двумя элементарными источниками, расположеными вдоль нормали (рис. 6.9, б), а сдвиг фаз между ними равняется π . Существенно при этом, что расстояние от этой системы до точки наблюдения гораздо больше расстояния между источниками. Такая пара источников называется акустическим диполем.

Следует заметить, что приведенные формулы следуют непосредственно из волнового уравнения, т.е. они основываются на физических законах и не требуют никаких дополнительных предположений. В то же время основные положения, вытекающие из формул Гельмгольца – Кирхгофа, были известны ранее из результатов Гюйгенса (1690) и Френеля (1818). К таким положениям относятся существование элементарных сферических волн с центрами в каждой точке волновой поверхности и интерференция таких волн, в результате которой образуется поляя волны.

Учитывая основополагающую роль, которую играют принципы Гюйгенса и Френеля в теории волн, мы подробно остановимся на них в следующем разделе.

6.6. ПРИНЦИПЫ ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ

Для того чтобы описать поведение волн, Гюйгенс ввел несколько предположений, известных теперь как принцип Гюйгенса. Предположим, что нам известно положение волновой поверхности в некоторый момент времени. Тогда, согласно принципу Гюйгенса, каждый элемент этой поверхности можно рассматривать как источник вторичной сферической волны. Более того, в некоторый последующий момент времени огибающая таких элементарных волн характеризует новое положение фазовых поверхностей. По существу, принцип Гюйгенса является правилом, которое позволяет строить волновые поверхности в различные моменты времени. В той части среды, которая является однородной, радиусы указанных волновых поверхностей могут иметь произвольное значение, так как скорость распространения постоянная. Если же среда неоднородна, то радиусы волновых поверхностей могут различаться и часто оказываются весьма малыми. Помимо этого, Гюйгенс предположил, что возмущения, вызванные каждым из элементов поверхности волны, распространяются только в сторону от первичного источника. Это предположение очень важное, поскольку всегда существуют две огибающие, по обе стороны от волновой поверхности.

Таким образом, принцип Гюйгенса основывается на следующих трех предположениях.

1. Каждая точка волновой поверхности является источником вторичной волны.

2. Эти волны являются сферическими, а их огибающая определяет новое положение фазовой поверхности.

3. Суперпозиция элементарных волн в однородной среде не приводит к появлению волны, приходящей к первичному источнику.

Сравнение выражений (6.171) и (6.176) показывает, что принцип Гюйгенса согласуется с формулами Гельмгольца – Кирхгофа.

Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих этот принцип.

Пример 1: принцип Гюйгенса и плоские волны

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси x (рис. 6.9, в). Как мы знаем, скалярный потенциал скорости описывается формулой

$$U(x, t) = A_0 f \left[a \left(t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad (6.207)$$

а фазовые поверхности являются плоскостями параллельными плоскости $Y Oz$.

Пусть в момент времени $t = t_0$ фронт волны характеризуется координатой $x = x_0$. Чтобы определить его положение в момент времени $t = t_1$ ($t > t_0$), используя принцип Гюйгенса, построим в каждой точке фазовой поверхности ($x = x_0$) сферу радиуса

$$R = c(t_1 - t_0).$$

Из рис. 6.9, в видно, что огибающая этих вторичных волн образует плоскость $x = x_1$, где

$$x_1 = x_0 + c(t_1 - t_0),$$

что, конечно, следует из выражения (6.207).

По определению, фазы волнового фронта в обоих положениях должны совпадать. Действительно,

$$t_1 - \frac{x_1}{c} = t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + c\Delta t}{c} = t_0 - \frac{x_0}{c}.$$

Пример 2: принцип Гюйгенса и сферические волны

Предположим теперь, что волна является сферической:

$$U(R, t) = \frac{A_0}{R} f \left[a \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \quad (6.209)$$

и в некоторый момент времени $t = t_0$ нам известно положение фазовой по-

верхности S_0 и, в частности, положение волнового фронта (рис. 6.9, г). Чтобы определить его конфигурацию в произвольный момент времени $t_1 > t_0$, используя принцип Гюйгенса, нарисуем снова элементарные волны с тем же радиусом

$$R = c(t_1 - t_0),$$

так, чтобы их центры находились на поверхности S_0 . Поскольку среда однородная, можно задать произвольный радиус R и получить положение фазовой поверхности на любом расстоянии от той, что была вначале.

Очевидно, что в силу симметрии фазовая поверхность всюду является сферической. Однако форма этой поверхности может изменяться, если параметры среды не остаются постоянными. Например, если скорость имеет различные значения на поверхности S_0 , то со временем фазовая поверхность деформируется и будет вытянута вдоль направления, соответствующего максимальной скорости.

Пример 3: принцип Гюйгенса и произвольные волны

Рассмотрим случай, когда фазовая поверхность S_0 имеет в момент времени $t = t_0$ произвольную форму (рис. 6.9, д). Снова рассматривая точки этой поверхности как центры вторичных сферических волн с радиусом

$$R = c(t_1 - t_0),$$

мы определим новое положение этой поверхности в момент времени $t = t_1$. Очевидно, что, если указанный радиус мал по сравнению с максимальным объемом V , окруженным поверхностью S_0 , то обе поверхности S_0 и S_1 имеют практически одинаковую форму. Однако с увеличением времени расстояния от точек текущей фазовой поверхности до соответствующих точек исходной поверхности, расположенных на одной и той же прямой, становятся практически одинаковыми. Это означает, что на достаточно больших расстояниях от S_0 форма фазовых поверхностей становится почти сферической. Процедура построения фазовых поверхностей подсказывает также то, что в общем случае амплитуда волны на таких поверхностях ($t \gg t_1$) изменяется медленнее по сравнению с амплитудой на исходной поверхности.

Как видно из рис. 6.9, д, выполняя рассматриваемую процедуру, можно столкнуться с ситуацией, когда все вторичные волны пересекаются в одной точке, которая называется фокусом. Это происходит тогда, когда на поверхности S_0 имеется вогнутость или если среда является неоднородной.

Мы рассмотрели несколько примеров, показывающих, как принцип Гюйгенса позволяет строить волновые поверхности в однородной среде в том случае, когда в некоторый момент времени $t = t_0$ известна исходная фазовая поверхность. Этот результат остается справедливым и для многих случаев неоднородной среды, при условии, что радиус элементарных волн достаточно мал. Следует отметить, что принцип Гюйгенса очень часто дает правильный результат, независимо от длины волны. Далее мы рассмотрим модель, в

которой применение этого принципа обычно не дает практически никакой информации о волновом поле.

Пример 4: использование принципа Гюйгенса позади отверстия в экране

Предположим, что первичная волна – плоская, а ее фазовые поверхности параллельны плоскости экрана с отверстием (рис. 6.10, *a*). Для того чтобы, используя принцип Гюйгенса, определить положение поверхностей волн за экраном, мы должны исходить из фазовой поверхности S_0 , которая совпадает с отверстием. Выполняя процедуру построения волн и соответствующих огибающих, мы видим, что волновые поверхности не являются плоскими, а с увеличением расстояния от отверстия они становятся практически сферическими. Помимо этого, из самой процедуры следует, что распределение волн не зависит от длины волны. Однако, изучая дифракцию Фраунгофера и Френеля, мы видели, что поведение волн гораздо сложнее и существенно зависит от длины волны. Другими словами, принцип Гюйгенса не учитывает влияние интерференции волн на их амплитуду. Здесь следует вспомнить, как,

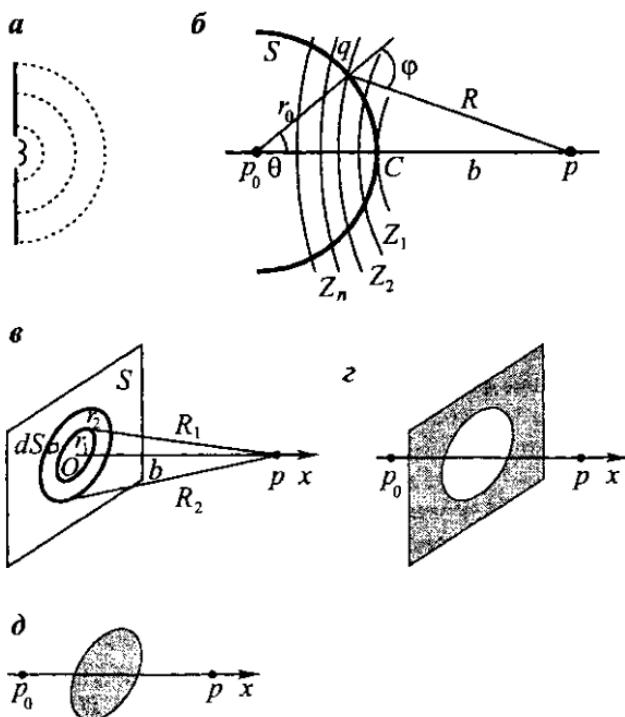


Рис. 6.10. Использование принципа Гюйгенса в области позади отверстия (*a*); зоны Френеля для сферических волн (*b*); зоны Френеля для плоских волн (*c*); точки наблюдения позади круглого отверстия (*d*); точки наблюдения позади круглого экрана (*d*)

рассматривая данный пример и используя принцип Гюйгенса для звука и света, Ньютона отверг представление о волнистой природе света.

Суммируя сказанное, стоит отметить следующее.

1. Согласно формуле Гельмгольца – Кирхгофа, каждый элемент фазовой поверхности порождает сферическую волну. Ставя в каждой такой точке элементарную волну радиуса $R = c\Delta t$, мы видим, что новое положение фазовой поверхности определяется огибающей этих волн. Таким образом, основные положения, заложенные в принципе Гюйгенса, следуют непосредственно из формул (6.171) и (6.176).

2. При выводе этих формул мы показали также, что источники, расположенные на поверхности S (рис. 6.9, а) не порождают волны вне объема V однородной среды и, в частности, позади волнового фронта. Таким образом, было подтверждено третье предположение, сделанное Гюйгенсом.

3. Рассматриваемый принцип является большим вкладом в теорию волн. Он позволяет строить волновые поверхности в различных средах и, в частности, его можно использовать для изучения преломления и отражения волн на границах раздела сред с различными параметрами.

4. В то же время принцип Гюйгенса не позволяет оценить распределение амплитуды волны и, следовательно, его нельзя применить для изучения дифракции.

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ

Следующий шаг в разработке теории волн, позволяющий учитывать также дифракцию, был сделан Френелем. Он исходил из основных положений принципа Гюйгенса, а именно из того, что каждый элемент фазовой поверхности в любой точке среды порождает сферическую волну. Помимо этого Френель предположил следующее.

1. Вторичная волна в произвольной точке p пропорциональна следующим величинам:

а) элементу dS в окрестности точки q фазовой поверхности;

б) амплитуде волны в этой точке, т.е. интенсивности первичного источника;

в) некоторому множителю $K(\phi)$, зависящему от угла ϕ между нормалью к элементу поверхности $dS(q)$ и прямой, соединяющей точки q и p (рис. 6.10, б); этот множитель уменьшается с ростом ϕ .

2. В точке наблюдения p волна является результатом интерференции сферических волн, возникающих на всех элементах фазовой поверхности.

3. Если между dS и точкой наблюдения имеется жесткое препятствие, то влияние волны, вызванной источником на элементе dS , исчезает. В то же время присутствие такого препятствия не меняет амплитуды других вторичных источников. Очевидно, что данное предположение совпадает с условиями Кирхгофа.

4. Длина волны λ гораздо меньше расстояния R между точкой наблюдения p и точками q фазовой поверхности:

Другими словами, наше рассмотрение ограничивается волновой зоной, определяемой для источников на поверхности S .

В отличие от принципа Гюйгенса, указанные предположения позволяют вывести выражение для результирующей волны и, следовательно, изучить распределение ее амплитуды. Рассмотрим синусоидальную зависимость от времени. В этом случае комплексная амплитуда $d\mathcal{U}(p)$ сферической волны с началом в точке q дается выражением

$$d\mathcal{U}(p) = K(\phi) \mathcal{U}(q) \frac{e^{ikR}}{R} dS, \quad (6.211)$$

где $\mathcal{U}(p)$ – комплексная амплитуда волны в точках фазовой поверхности S . В волновой зоне ($kR \gg 1$) второй член в подынтегральном выражении (6.171) является доминирующим и, следовательно, мы приходим к формуле (6.211).

Затем, применяя постулат Френеля об интерференции элементарных волн, мы получим окончательное выражение для комплексной амплитуды $\mathcal{U}(p)$ полной волны:

$$\mathcal{U}(p) = \int_S K(\phi) \mathcal{U}(q) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.212)$$

Разрабатывая данную теорию дифракции, Френель не определял функцию $K(\phi)$, называемую обычно фактором наклона. Однако он предполагал, что эта функция достигает своего максимального значения в направлении распространения $\phi = 0$, затем быстро убывает по мере увеличения угла ϕ и обращается в нуль, когда прямая qp становится касательной к фазовой поверхности.

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА (6.212) В ЗОНАХ ФРЕНЕЛЯ

Несмотря на то что явный вид множителя $K(\phi)$ был не известен, Френелю удалось описать множество существенных свойств дифракции. Это было сделано благодаря чрезвычайно элегантному методу оценки интеграла в правой части выражения (6.212).

Для того чтобы проиллюстрировать этот подход, называемый построением зон Френеля, предположим сначала, что первичная волна, распространяющаяся вдоль оси x , является плоской, т.е.

$$\mathcal{U}(q) = A e^{ikx}. \quad (6.213)$$

Соответственно, фазовые поверхности являются плоскостями перпендикулярными оси x (рис. 6.10, в).

Прежде всего, учитывая выражение (6.213), мы имеем

$$\mathcal{U}(p) = A e^{ikx_0} \int_S K(\phi) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.214)$$

Здесь x_0 характеризует положение данной фазовой поверхности S , а R обозначает расстояние между точками p и q .

Чтобы оценить приведенный выше интеграл в некоторой точке p , опустим из этой точки перпендикуляр на плоскость $x = x_0$ и обозначим точку их пересечения как O (рис. 6.10, в). Очевидно, что сферические волны, возбужденные элементами dS , расположенными на одинаковом расстоянии от точки O , дают одинаковый вклад в потенциал \mathcal{U} . Поэтому фазовую поверхность $x = x_0$ можно представить как систему кольцевых зон, называемых зонами Френеля, с центром в точке O (рис. 6.10, в), так что

$$R_1 = b + \frac{\lambda}{2}, \quad R_2 = b + 2\frac{\lambda}{2}, \quad R_3 = b + 3\frac{\lambda}{2}, \dots$$

и, в общем случае,

$$R_n = b + n\frac{\lambda}{2}, \quad (6.215)$$

где b – расстояние между точками O и p .

Чтобы выполнить это построение, нарисуем сферические поверхности с началом в точке p и радиусами, удовлетворяющими соотношению (6.215). Пересечение этих поверхностей с плоскостью $x = x_0$ дает набор окружностей. Каждая пара соседних окружностей образует при этом кольцо (зону Френеля). Конечно, для каждой точки наблюдения p имеется свое собственное множество зон Френеля.

Таким образом, результирующая волна представляет собой сумму элементарных волн \mathcal{U}_n , порожденных источниками, расположенными в каждом из колец:

$$\mathcal{U}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(p). \quad (6.216)$$

Прежде чем рассмотреть эффект от единичной зоны, обсудим ее параметры. Из рис. 6.10, в видно, что зона с индексом n ограничивается двумя окружностями с радиусами r_{n-1} и r_n , причем

$$r_{n-1}^2 = R_{n-1}^2 - b^2 \text{ и } r_n^2 = R_n^2 - b^2, \text{ если } n \geq 1. \quad (6.217)$$

Подстановка (6.215) в (6.217) дает

$$r_n^2 = \left(b + n\frac{\lambda}{2} \right)^2 - b^2 \text{ или } r_n^2 = \lambda nb + \frac{n^2\lambda^2}{4}.$$

Полагая

$$b \gg n\lambda, \quad (6.218)$$

получим

$$r_n^2 = b\lambda n \text{ или } r_n = \sqrt{b\lambda n}. \quad (6.219)$$

Конечно, с увеличением номера n неравенство (6.218) перестает выполнятьсь, однако это относится к настолько далеким зонам, что их вклад в потенциал $\mathcal{U}(p)$ практически равен нулю. Площадь рассматриваемых колец определяется как

$$S_n = \pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 = \pi b \lambda [n - (n-1)]$$

или

$$S_n = \pi b \lambda. \quad (6.220)$$

Таким образом, все зоны имеют одинаковую площадь, которая прямо пропорциональна расстоянию b и длине волны λ . Из выражений (6.219) следует, что

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) = 2r_n \Delta r_n = b \lambda$$

или

$$\Delta r_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b \lambda}{n}}.$$

Так, например, при $n = 1$

$$\frac{\Delta r_1}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta r_1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \gg 1,$$

однако с ростом n ширина зоны Δr_n становится сравнимой с длиной волны.

Согласно (6.214) потенциал, соответствующий зоне с номером n , определяется как

$$\mathcal{U}_n(p) = A e^{ikx_0} \int_{S_n} K(\phi) \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.221)$$

Поскольку

$$dS = 2\pi r dr,$$

имеем

$$\mathcal{U}_n(p) = 2\pi A e^{ikx_0} \int_{S_n} K(\phi) \frac{e^{ikR}}{R} r dr. \quad (6.222)$$

Чтобы упростить этот интеграл, произведем в нем замену переменных. Для этого продифференцируем равенство

$$R^2 = b^2 + r^2.$$

Это дает

$$R dR = r dr.$$

Далее вместо (6.222) получим

$$\mathcal{U}_n(p) = 2\pi A e^{ikx_0} \int_{R_{n-1}}^{R_n} K(\phi) e^{ikR} dR. \quad (6.223)$$

Учтем теперь тот факт, что расстояния R_n и R_{n-1} значительно больше длины волны (выражение (6.210)), а ширина каждой зоны Δr_n мала по сравнению с этими расстояниями:

$$\Delta r_n \ll R_{n-1} \text{ и } \Delta r_n \ll R_n.$$

Последние неравенства означают, что фактор наклона K почти постоянен в пределах зоны и, следовательно, его можно вынести из-под знака интеграла. Окончательно получим

$$\mathcal{U}_n(p) = 2\pi A K_n e^{ikx_0} \int_{R_{n-1}}^{R_n} e^{ikR} dR. \quad (6.224)$$

В отличие от множителя K_n функция e^{ikR} может быстро изменяться в пределах зоны и поэтому она должна оставаться под интегралом.

Выполняя интегрирование в (6.224) и используя (6.215), получим

$$\mathcal{U}_n = \frac{2\pi A}{ik} K_n e^{ikx_0} (e^{ikR_n} - e^{ikR_{n-1}})$$

или

$$\mathcal{U}_n = \frac{2\pi A}{ik} K_n e^{ik(x_0+b)} [e^{ik\frac{n\lambda}{2}} - e^{ik\frac{(n-1)\lambda}{2}}].$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, последнее выражение можно переписать как

$$\mathcal{U}_n(p) = -i\lambda A K_n e^{ik(x_0+b)} e^{i\pi n} (1 - e^{-i\pi}).$$

Учитывая, что

$$e^{i\pi n} = (-1)^n \text{ и } 1 - e^{i\pi} = 2,$$

имеем

$$\mathcal{U}_n(p) = 2i\lambda(-1)^{n+1} K_n A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.225)$$

В связи с этим полезно заметить следующее. По определению, колебания в источниках, расположенных на фазовой поверхности и, в частности, в пределах каждой из зон, происходят синхронно, однако волны, вызванные этими источниками, имеют различные фазы в точке наблюдения p .

Подстановка (6.225) в (6.216) дает следующее выражение для комплексной амплитуды результирующей волны:

$$\mathcal{U}(p) = 2i\lambda A e^{ik(x_0+b)} L, \quad (6.226)$$

где

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_n = K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + K_5 - K_6 + \dots \quad (6.227)$$

Таким образом, вычисление результирующей волны, возникшей в результате интерференции волн от всех зон, сводится в волновой зоне ($b \gg \lambda$) к оценке ряда L . Этот ряд имеет несколько важных свойств, которые следуют из сделанных ранее предположений:

а) ряд является знакопеременным;

б) с увеличением индекса n члены ряда уменьшаются в силу свойств K_n ;

в) абсолютные величины двух последовательных членов ряда близки друг к другу.

В силу этих свойств относительно легко оценить сумму ряда L .

Прежде всего, представим (6.227) в виде

$$L = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \left(\frac{K_5}{2} - K_6 + \frac{K_7}{2} \right) + \dots \quad (6.228)$$

Предположим сначала, что каждый из членов K_n больше или равен среднему арифметическому значений K_{n-1} и K_{n+1} :

$$K_n \geq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Тогда выражения, стоящие в скобках (6.228) отрицательны и, соответственно,

$$L \leq K_1/2. \quad (6.229)$$

Таким же образом ряд (6.228) можно записать как

$$L = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots \quad (6.230)$$

Выражения в скобках снова являются отрицательными и, следовательно,

$$L \geq K_1 - K_2/2. \quad (6.231)$$

Учитывая, что значения K_1 и K_2 почти одинаковы, вместо предыдущего неравенства получим

$$L \geq K_1/2. \quad (6.232)$$

Сравнение выражений (6.229) и (6.232) позволяет сделать вывод о том, что приблизительно

$$L = K_1/2. \quad (6.233)$$

Очевидно, что при уменьшении длины волны относительно расстояния R разница между факторами наклона, относящимися к соседним зонам, становится меньше и, следовательно, выражение (6.233) выполняется с большей точностью.

Если предположить, что

$$K_n \leq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2},$$

то мы снова придем к формуле (6.223) Действительно, из (6.228) и (6.230) получим, соответственно,

$$L \leq \frac{K_1}{2} \text{ и } L \geq K_1 - \frac{K_2}{2} > \frac{K_1}{2},$$

Как и ранее, это означает, что

$$L = K_1/2.$$

Из этого равенства следует, что амплитуда волны, вызванной первой зоной, в 2 раза превышает амплитуду результирующей волны. Этот интересный факт мы используем позднее.

Далее, подстановка (6.233) в (6.226) дает

$$\mathcal{U}(p) = i\lambda K_1 A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.234)$$

Последнее выражение представляет собой комплексную амплитуду \mathcal{U} плоской волны в однородной среде, полученную как результат суперпозиции вторичных элементарных волн.

С другой стороны, как известно, плоская волна в рассматриваемой среде определяется выражением

$$\mathcal{U}(p) = A e^{ik(x_0+b)}. \quad (6.235)$$

Сравнение последних двух равенств позволяет определить фактор наклона для первой зоны:

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}. \quad (6.236)$$

Покажем теперь, что аналогичные результаты получаются, когда первичная волна возбуждается элементарным источником, а фазовые поверхности являются, соответственно, сферическими (рис. 6.10, б).

Построим снова зоны Френеля, рисуя сферические поверхности с началом в точке наблюдения и радиусами, удовлетворяющими соотношению (6.215). Как и ранее, предполагается, что радиус r_0 фазовой поверхности, а также расстояние b значительно превышают длину волны λ .

Комплексная амплитуда потенциала первичной волны хорошо известна и равняется

$$\mathcal{U}(q) = A e^{ikr_0} / r_0. \quad (6.237)$$

Согласно формуле (6.212), потенциал в точке p , соответствующий зоне с номером n , определяется как

$$\mathcal{U}_n(p) = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} K_n \int_{S_n} \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (6.238)$$

Из рис. 6.10, б видно, что

$$R^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta. \quad (6.639)$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$R dR = r_0(r_0 + b) \sin\theta d\theta. \quad (6.240)$$

Площадь элементарного кольца с радиусом $r_0 \sin\theta$ и шириной $r_0 d\theta$ равняется

$$dS = 2\pi r_0^2 \sin\theta d\theta$$

или, с учетом (6.240),

$$dS = \frac{2\pi r_0 R dR}{r_0 + b}.$$

Следовательно, выражение (6.238) записывается как

$$\mathcal{U}_n(p) = \frac{2\pi A e^{ikr_0}}{r_0 + b} K_n \int_{R_{n-1}}^{R_n} e^{iR} dR.$$

Интеграл, стоящий в этом выражении, рассматривался ранее, и мы получаем

$$\mathcal{U}_n(p) = 2i\lambda(-1)^{n+1} K_n \frac{A e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}.$$

Соответственно, результирующая волна определяется как

$$\mathcal{U}_n(p) = 2i\lambda A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} L_N, \quad (6.241)$$

где

$$L_N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_n. \quad (6.242)$$

В отличие от случая плоской волны, сумма L_N содержит конечное число членов. Ее оценка слегка отличается от рассмотренного ранее случая, поскольку здесь необходимо учесть присутствие последнего члена K_N .

Предположим сначала, что сумма L_N содержит нечетное число членов. Тогда ее можно записать как

$$L_N = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + \frac{K_N}{2}$$

или

$$L_N = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots - \frac{K_{N-1}}{2} + K_N.$$

Если мы снова предположим, что

$$K_n \geq \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2},$$

то тогда (6.243) даст

$$L_N \geq \frac{K_1 + K_N}{2} \text{ и } L_N \leq \frac{K_1 + K_N}{2}.$$

Следовательно,

$$L_N = \frac{K_1 + K_N}{2}. \quad (6.244)$$

Легко показать, что это выражение остается верным, когда

$$K_n < \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда N является четным числом. Как и в предыдущем случае, сумму L_N можно представить двумя разными способами:

$$L_N = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + \frac{K_{N-1}}{2} - K_N$$

или (6.245)

$$L_N = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2} \right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2} \right) - \dots - \frac{K_N}{2}.$$

Если, например, K_N превышает среднее арифметическое соседних с ним членов, то выражение (6.245) дает

$$L_N > \frac{K_1}{2} + \frac{K_{N-1}}{2} - K_N \text{ и } L_N < K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{K_N}{2}$$

или

$$L_N > \frac{K_1 - K_N}{2} \text{ и } L_N < \frac{K_1 - K_N}{2}, \quad (6.246)$$

поскольку соседние члены почти равны друг другу. Таким образом, в случае четного числа членов мы имеем

$$L_N = \frac{K_1 - K_N}{2}. \quad (6.247)$$

Этот результат не изменится, если

$$K_n < \frac{K_{n-1} + K_{n+1}}{2}.$$

Подстановка (6.244) и (6.247) в (6.241) дает

$$\mathcal{U}_n(p) = i\lambda(K_1 \pm K_N)A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}. \quad (6.248)$$

Из рис. 6.10, б видно, что прямая qr является касательной к зоне $\phi = \pi/2$ и, в соответствии с предположением Френеля, $K_N = 0$.

Таким образом, мы снова получаем

$$\mathcal{U}_n(p) = i\lambda K_1 A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}, \quad (6.249)$$

в то время как потенциал, соответствующий первой зоне, имеет в 2 раза большие значения:

$$\mathcal{U}_1(p) = 2\mathcal{U}(p). \quad (6.250)$$

Потенциал в точке наблюдения, вызванный элементарным источником в однородной среде,

$$\mathcal{U}(p) = A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}$$

и, следовательно, как и в случае плоской волны,

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}.$$

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующие применение зон Френеля.

Пример 1: зависимость интенсивности от расстояния позади кругового отверстия

Предположим, что отверстие в экране представляет собой круг, а источник p_0 и точка наблюдения p располагаются на прямой, проходящей через его центр (рис. 6.10, г). Согласно выражению (6.219), радиус зоны Френеля пропорционален расстоянию b от точки наблюдения до экрана. Поэтому размер отверстия может быть гораздо меньше первой зоны, если это расстояние достаточно велико. Соответственно, амплитуда волны значительно меньше амплитуды в однородной среде, когда экран полностью отсутствует. По мере приближения к экрану существует такое расстояние, при котором радиус первой зоны равняется радиусу отверстия. В этом случае, согласно (6.250), амплитуда волны в 2 раза больше, чем в случае однородной среды. Конечно, этот эффект было довольно трудно предсказать, так как экран располагается между точкой наблюдения и практически всей фазовой поверхностью. По мере приближения к экрану амплитуда волны начинает уменьшаться, поскольку вместе с первой зоной отверстие частично занято второй зоной Френеля. Это также довольно удивительно, потому что точка p становится ближе к отверстию, однако амплитуда при этом уменьшается. Кроме того, существует такое расстояние, при котором внешний контур вто-

рой зоны совпадает с краем отверстия. В этом случае интенсивность волны падает почти до нуля, поскольку волны, вызванные обеими зонами, имеют практически одинаковые амплитуды $K_2 \approx K_1$, а сдвиг фаз между ними равен π . Когда расстояние b становится еще меньше (рис. 6.10, г), наблюдаются целые серии максимумов и минимумов. Максимумы появляются тогда, когда в отверстии укладывается нечетное число зон, а минимумы, когда число зон в пределах отверстия оказывается четным. И, наконец, когда точка p находится совсем близко от отверстия, амплитуда волны достигает некоторого постоянного значения, соответствующего волне в однородной среде.

Аналогичное поведение наблюдается, когда точка p фиксирована, а изменяется радиус отверстия.

Пример 2: зависимость интенсивности от расстояния позади кругового экрана

Предположим теперь, что между источником и точкой наблюдения расположены экран в форме круга (рис. 6.10, д) и все расстояния остаются неизменными.

Если радиус экрана достаточно большой по отношению к b , то существует множество зон Френеля, расположенных в пределах площади круга, однако они не вносят вклада в амплитуду волны. В то же время эффект от зон, расположенных вне экрана, пренебрежимо мал, поскольку малы соответствующие им факторы наклона ($\phi \rightarrow \pi/2$). Интенсивность волны очень слабая (тень). С уменьшением размеров экрана интенсивность начинает возрастать. Так, например, когда с круговым отверстием совпадает первая зона, наблюдается почти такая же амплитуда волны, как и в случае, когда экран отсутствует. Действительно, в этом случае, как следует из (6.255), волна в точке наблюдения описывается как

$$\mathcal{U}(p) = 2i\lambda \frac{e^{i\lambda(r_0+b)}}{r_0+b} [-K_2 + K_3 - K_4 + K_5 - \dots], \quad (6.251)$$

поскольку эффект от первой зоны отсутствует.

Используя тот же подход, что и ранее, мы приходим к выводу, что сумма (6.251) приближенно равняется величине $-\frac{1}{2}K_2$. Так как $K_2 \approx K_1$, имеем

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{i\lambda K_1}{r_0+b} e^{i\lambda(r_0+b)}.$$

Таким образом, позади экрана имеется геометрическая тень, однако существует такая точка, в которой амплитуда волны такая же, как и в случае отсутствия экрана.

Это открытие имеет очень интересную историю. В 1818 году Френель представлял перед Французской Академией свою работу, в которой были изложены принципы интерференции волны и построения зон. Эту работу проанализировал Пуассон, который пришел к выводу, что в некоторой точ-

ке позади экрана интенсивность волны может быть такой же, как и в случае его отсутствия. Этот результат он рассматривал как доказательство того, что теория не верна. Однако эксперименты, проведенные Араго и Френелем, подтвердили правоту Френеля.

Концепция зон Френеля в присутствии таких неоднородностей, как экраны, основывается на предположениях, которые впоследствии были использованы в теории дифракции Кирхгофа. Действительно, вклад каждой из зон Френеля остается постоянным и не зависит от того, находятся ли остальные зоны напротив отверстия или напротив непрозрачной части экрана.

В заключение следует сказать, что работа Френеля была важным шагом в развитии теории волн. Сущностью этой работы является принцип суперпозиции вторичных волн, полностью соглашающийся с формулами Гельмгольца – Кирхгофа. Как мы уже знаем, эти выражения подтвердили многие положения, лежащие в основе принципов Гюйгенса и Френеля, но, в отличие от них, эти формулы позволяют точно определить волну внутри объема, при условии, что она известна на поверхности, окружающей данный объем.

6.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛОМ И НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Ранее мы получили соотношения между потенциалом $U(p, t)$ в произвольной точке объема V и значениями этой функции и ее нормальной производной на поверхности S данного объема (формулы Гельмгольца – Кирхгофа). Решим теперь совершенно другую задачу и предположим, что потенциал U и его производная по времени $\partial U / \partial t$ известны в некоторый момент времени $t = 0$:

$$U(g, 0) = \phi(g) \text{ и } \frac{\partial U(g, 0)}{\partial t} = \chi(g), \text{ если } t = 0. \quad (6.252)$$

Следует заметить, что функции ϕ и χ отличны от нуля только внутри некоторого объема V , ограниченного поверхностью Σ (рис. 6.11, а).

Учитывая соотношения между потенциалом U и волновыми полями, можно сказать, что в начальный момент времени заданы распределения давления и скорости. И, конечно, скалярный потенциал в каждой точке подчиняется волновому уравнению:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (6.253)$$

Соотношения (6.252) – (6.253) однозначно определяют волну во всех точках однородной среды. Наша цель состоит в том, чтобы получить выражение для скалярного потенциала U в произвольный момент времени, считая, что начальные условия (6.252) известны.

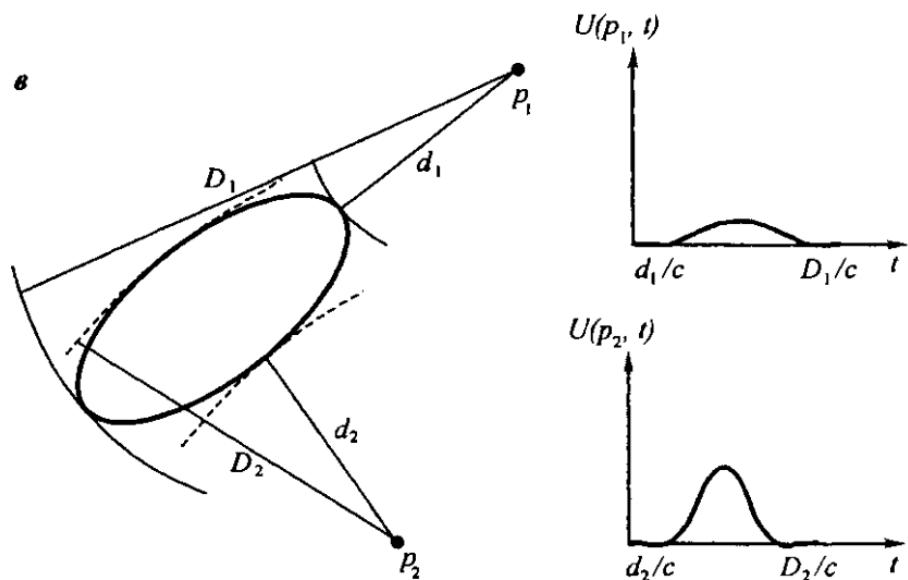
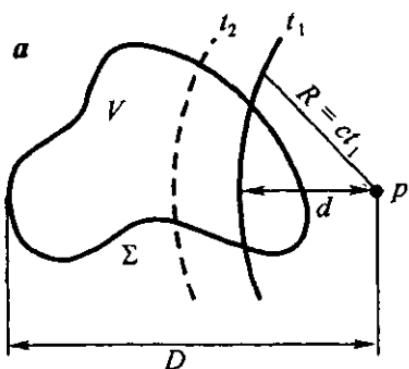


Рис. 6.11. Начальные условия внутри произвольного объема (а); равномерное сжатие сферы (б); потенциал как функция времени (в)

Мы начнем с простейшего случая плоской волны, затем рассмотрим сферическую волну, а после этого перейдем к случаю волн, вызванных произвольным распределением источников.

Случай 1: плоская волна

Пусть волна является плоской. Тогда, как известно, уравнение (6.253) заметно упрощается, и его решение описывается выражением

$$U(x, t) = F(x + ct) + f(x - ct). \quad (6.254)$$

Для простоты здесь опущен коэффициент a аргумента $a(x \pm ct)$.

Определим теперь неизвестные функции F и f таким образом, чтобы удовлетворить начальным условиям. В соответствии с (6.252) имеем

$$U(x, 0) = F(x) + f(x) = \phi(x) \quad (6.255)$$

и

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = cF'(x) - cf'(x) = \chi(x). \quad (6.256)$$

Интегрирование этого выражения дает

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + C, \quad (6.257)$$

где x_0 и C – постоянные, α – переменная интегрирования.

Решая систему уравнений

$$F(x) + f(x) = \phi(x),$$

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + C,$$

получим

$$F(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \quad (6.258)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Полученные выражения справедливы для любого аргумента и, в частности, для $x + ct$ или $x - ct$, т.е.

$$F(x + ct) = \frac{1}{2} \phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \quad (6.259)$$

и

$$f(x - ct) = \frac{1}{2} \phi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Подстановка (6.259) в (6.254) дает

$$U(x, t) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \chi(\alpha) d\alpha. \quad (6.260)$$

Таким образом, потенциал плоской волны выражается через начальные условия. Выражение (6.260) называется формулой Даламбера.

Случай 2: сферическая волна

Предположим теперь, что источник порождает сферическую волну. В частности, такая волна может быть вызвана элементарным источником. В силу центральной симметрии относительно начала координат O , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

а его решение (глава 5) дается формулой

$$RU(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct). \quad (6.261)$$

Очевидно, что данный случай похож на предыдущий, однако имеется одно существенное отличие, а именно то, что в левой части (6.261) присутствует множитель R .

Чтобы удовлетворить начальным условиям, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$F(R) + f(R) = R \phi(R),$$

$$F'(R) - f'(R) = \frac{R}{c} \chi(R).$$

Эти уравнения справедливы при любом значении R . Поэтому их удобно переписать в виде:

$$F(z) + f(z) = z \phi(z), \quad (6.262)$$

$$F'(z) - f'(z) = \frac{z}{c} \chi(z),$$

где z – произвольный аргумент.

Интегрируя второе из приведенных уравнений, мы приходим к системе уравнений относительно двух неизвестных функций:

$$F(z) + f(z) = z \phi(z)$$

и

$$F(z) - f(z) = \frac{1}{c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha + C.$$

Отсюда

$$F(z) = \frac{z \phi(z)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}$$

и

$$f(z) = \frac{z \phi(z)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^z \alpha \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Как и в случае плоских волн, выражения (6.264) справедливы при любом аргументе. Так, например,

$$F(R + ct) = \frac{(R + ct)\phi(R + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{z_0}^{R+ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}$$

и

$$f(R - ct) = \frac{(R - ct)\phi(R - ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{z_0}^{R-ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Таким образом, потенциал U описывается выражением

$$U(R, t) = \frac{(R + ct)\phi(R + ct) + (R - ct)\phi(R - ct)}{2R} + \frac{1}{2cR} \int_{R-ct}^{R+ct} z \chi(z) dz. \quad (6.266)$$

При выводе этой формулы мы предполагали, что z является одним из возможных значений R , т.е. величиной положительной. Это означает, что (6.266) справедливо, когда

$$R \geq ct.$$

Для того чтобы получить аналогичное выражение для отрицательных z , рассмотрим как ведет себя потенциал в окрестности начала координат O .

Из выражения (6.262) следует, что

$$0 = F(z) + f(-z)$$

или

$$f(z) = -F(-z), \quad (6.267)$$

где

$$z = R - ct < 0.$$

Таким образом, потенциал можно представить как

$$RU(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct) = F(R + ct) - F(ct - R).$$

Отсюда, с учетом первого из выражений (6.265), получим

$$U(R, t) = \frac{(R + ct)\phi(R + ct)}{2} + \frac{1}{2cR} \int_{z_0}^{R+ct} \alpha \chi(\alpha) d\alpha -$$

$$- \frac{(ct - R)\phi(ct - R)}{2R} - \frac{1}{2cR} \int_{z_0}^{ct-R} \alpha \chi(\alpha) d\alpha$$

или

$$U(R, t) = \frac{(ct + R)\phi(ct + R) - (ct - R)\phi(ct - R)}{2R} + \frac{1}{2cR} \int_{ct-R}^{ct+R} z \chi(z) dz. \quad (6.268)$$

Таким образом, формулы (6.266) и (6.268) показывают, что в произвольной точке среды потенциал $U(R, t)$ определяется начальными условиями.

С физической точки зрения приведенные соотношения очевидны, поскольку, как уже отмечалось ранее, условия (6.252) характеризуют распределение источников в начальный момент времени.

Чтобы продемонстрировать применение выражения (6.266), рассмотрим один пример. Предположим, что часть среды, имеющая форму сферы радиуса a (рис. 6.11, б), находится в состоянии однородного сжатия и покоятся. В момент времени $t = 0$ сфера начинает возвращаться в свое недеформированное состояние. В результате этого движения возникает волна, которая должна удовлетворять начальным условиям

$$v_R(R, 0) = 0 \text{ и } \theta(R, 0) = \begin{cases} \theta_0, & \text{если } R \leq a, \\ 0, & \text{если } R > a, \end{cases} \quad (6.269)$$

где v_R и θ обозначают, соответственно, скорость частиц и дилатацию.

Поскольку

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} U, \quad P_a = -\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t}$$

и

$$\theta = -P_a / \rho_0 c^2,$$

мы вместо условий (6.252) имеем

$$\phi(R) = 0 \text{ и } \chi(R) = \begin{cases} c^2 \theta_0, & \text{если } R \leq a, \\ 0, & \text{если } R > a. \end{cases} \quad (6.270)$$

Следует заметить, что дилатация θ удовлетворяет волновому уравнению и, поскольку волны распространяются от сферы, аргумент функции θ равняется

$$R - ct.$$

Соответственно, последнее из условий (6.270) можно записать как

$$\chi(z) = \begin{cases} c^2 \theta_0, & \text{если } z \leq a, \\ 0, & \text{если } z > a. \end{cases} \quad (6.271)$$

Каждый элемент сферы можно рассматривать как элементарный источник, причем ближайший к точке наблюдения источник расположен на расстоянии $R - a$, а $R + a$ характеризует максимальное расстояние. Следовательно, движение в окрестности произвольной точки p будет происходить в течение интервала времени

$$\frac{R-a}{c} \leq t \leq \frac{R+a}{c}.$$

В силу сферической симметрии волновые движения возникают в сферической оболочке толщины $2a$.

Из начальных условий (6.270) следует, что в этом случае выражение для потенциала (6.266) заметно упрощается, и мы имеем

$$U(R, t) = \frac{1}{2cR} \int_{R-ct}^{R+ct} z \chi(z) dz.$$

Используя (6.271), получим

$$U(R, t) = \frac{1}{2c} \frac{c^2 \theta_0}{R} \int_{R-ct}^R z dz$$

или

$$U(R, t) = \frac{c \theta_0}{4R} [a^2 - (R - ct)^2]. \quad (6.272)$$

Поскольку

$$\theta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t},$$

дилатация внутри зоны возмущения равняется

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} \frac{R - ct}{R}$$

или

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{R - ct}{2R}, \quad (6.273)$$

где

$$ct - a \leq R \leq ct + a.$$

Радиус сферической поверхности, проходящей через середину оболочки,

$$R_m = ct.$$

Из соотношения (6.273) следует, что вблизи этой поверхности функция θ стремится к нулю. В то же время во внешней по отношению к данной поверхности области ($R > R_m$) дилатация имеет тот же знак, что и θ_0 , а во внутренней области ($R < R_m$) – противоположный.

Заметим, что функция θ в точках волнового фронта определяется соотношением

$$\theta/\theta_0 = a/2R$$

и уменьшается пропорционально расстоянию R .

Для того чтобы рассмотреть более общий случай, необходимо вывести соотношение между начальными условиями и потенциалом U в начале координат, которое должно выполняться для произвольного момента времени.

Из (6.262) следует, что

$$U(R, t) = \frac{F(R + ct) + f(R - ct)}{R}.$$

Используя соотношения (6.267), получим

$$U(R, t) = 2 \frac{F(ct + R) - F(ct - R)}{2R}, \text{ если } R \rightarrow 0,$$

или, разлагая функцию F в ряд в окрестности точки $R = 0$, имеем

$$U(0, t) = 2F'(ct). \quad (6.274)$$

Дифференцируя первое из уравнений (6.262), приходим к новой системе уравнений относительно функций f' и F' :

$$F'(z) + f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} [z \varphi(z)]$$

и

$$F'(z) - f'(z) = \frac{z}{c} \chi(z).$$

Отсюда

$$2F'(z) = \frac{z}{c} \chi(z) + \frac{\partial}{\partial z} [z \varphi(z)],$$

и вместо (6.274) имеем

$$U(0, t) = t \chi(ct) + \frac{\partial}{\partial t} [t \varphi(ct)]. \quad (6.275)$$

Таким образом, мы выразили потенциал в точке начала координат через функции φ и χ .

Применяя этот результат к волне (6.270), вызванной однородно сжатой сферой, получим

$$U(0, t) = c^2 \theta_0 \begin{cases} t, & \text{если } ct < a, \\ 0, & \text{если } ct > a. \end{cases}$$

Случай 3: произвольная волна

Предположим, что начальные условия заданы в произвольном объеме V , окруженном поверхностью Σ (рис. 6.11, а). Для того чтобы выразить по-

тенциал U для любой точки p в произвольный момент времени t через функции ϕ и χ , мы используем подход, предложенный Пуассоном.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R с центром в точке наблюдения p . В общем случае значения потенциала U меняются на этой поверхности. Введем среднее значение потенциала:

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S U(g, t) dS, \quad (6.276)$$

где g обозначает точку поверхности S .

Конечно, функция $U_m(R, t)$ зависит от радиуса R и времени t и обычно не совпадает со значением потенциала в точке p . Например, варьируя радиус R при постоянном времени, мы получим различные значения U_m . В частности, если волна еще не достигла поверхности S , среднее значение функции U_m равняется нулю. Точно так же варьирование времени приводит к изменению функции U_m на фиксированной сферической поверхности.

Из выражения (6.276) следует, что

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S U(g, t) d\Omega, \quad (6.277)$$

где $d\Omega$ обозначает телесный угол, под которым элемент сферической поверхности виден из точки наблюдения p .

Это означает, что функция $U_m(R, t)$ является линейной комбинацией скалярных потенциалов ϕ и, следовательно, удовлетворяет также волновому уравнению. Более того, поскольку функция U_m не зависит от сферических координат θ и ϕ , ее можно записать как

$$RU_m(R, t) = F(R + ct) + f(R - ct).$$

Вводя средние значения начальных условий

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_S U(g, 0) d\Omega \quad (6.278)$$

и

$$\chi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial U(g, 0)}{\partial t} d\Omega,$$

общий случай сводим к предыдущему. Затем, используя (6.275), запишем следующее выражение для среднего значения U_m в начале координат:

$$U_m(0, t) = t\chi_m(ct) + \frac{\partial}{\partial t} [t\phi_m(ct)]. \quad (6.279)$$

С другой стороны, поскольку скалярный потенциал является непрерывной функцией,

$$U_m(0, t) = U(0, t).$$

Действительно, при $R \rightarrow 0$ имеем

$$U_m(R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint U dS \rightarrow \frac{S}{4\pi R^2} U(0, t) = U(0, t), \text{ если } R \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$U(0, t) = \frac{t}{4\pi} \oint \chi(ct) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \oint \phi(ct) d\Omega \right)$$

или

$$U(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \oint \chi(ct) dS + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2 t} \oint \phi(ct) dS \right), \quad (6.280)$$

поскольку

$$R = ct.$$

Формула (6.280) позволяет найти волновое поле в однородной среде при условии, что заданы начальные условия. Это выражение называется формулой Пуассона.

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (6.280), предположим, что внутри поверхности Σ имеется определенное распределение первичных источников, которые начинают действовать в момент времени $t = 0$. Каждый из этих источников порождает сферическую волну, которая достигает точки наблюдения p (рис. 6.11, *a*) в момент времени t . Очевидно, что волны, вызванные источниками, расположеными на одной и той же сферической поверхности, приходят в ее центр одновременно, и благодаря их интерференции формируется результирующая волна. Из рис. 6.11, *a* видно, что первая волна приходит в эту точку в момент времени $t = d/c$. Амплитуда этой волны очень мала, поскольку в этот момент мала часть сферической поверхности S_m . С течением времени площадь S_m увеличивается и, соответственно, амплитуда волны также может возрасти, при условии, что элементарные волны имеют почти одинаковые фазы. Наконец, в момент времени $t = D/c$ наблюдается хвост волны, после чего колебания отсутствуют.

Рассмотрим еще один пример (рис. 6.11, *b*), в котором в момент времени $t = 0$ функция ϕ равняется нулю, а χ имеет постоянное значение внутри Σ . Как и следовало ожидать, формула Пуассона в этом случае сильно упрощается, и мы имеем

$$U(p, t) = \frac{\chi S_\Sigma}{4\pi c^2 t}. \quad (6.281)$$

Здесь S_Σ обозначает площадь, образованную пересечением поверхности Σ и сферы S радиуса

$$R = ct$$

с центром в точке p . Это означает, что эффект действия источников зависит от размера и формы поверхности S_z , а также от положения точки наблюдения p . Из рис. 6.11, *в* легко увидеть, что максимальный сигнал в точке p_1 будет меньше, чем в точке p_2 , однако продолжительность этого сигнала будет больше.

6.8. ПЕРЕХОД К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКЕ

Приступим теперь к изучению волн и, в частности, дифракционной картины в предельном случае, когда длина волны стремится к нулю: $\lambda \rightarrow 0$. Сначала мы рассмотрим относительно простой случай, когда в однородной среде имеется экран с отверстием произвольной формы. Затем, основываясь на уравнении Гельмгольца, мы обсудим общий случай.

Ранее было показано (см. формулу 6.97), что комплексную амплитуду \mathcal{U} стационарной волны позади неоднородности можно записать как

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = A \int_{S_e} \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) dS_e, \quad (6.282)$$

где R и R_1 – расстояния от точки отверстия до, соответственно, точки наблюдения и источника; S_e – площадь отверстия (рис. 6.12, *а*). С уменьшением длины волны параметр k неограниченно возрастает, и подынтегральное выражение становится сильно осциллирующей функцией. Поэтому вряд ли возможно проанализировать асимптотическое поведение функции \mathcal{U} , используя для этого численное интегрирование. Для решения этой задачи был предложен очень простой и элегантный подход. В формуле (6.282) под интегралом стоит выражение

$$\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{RR_1} e^{ik(R+R_1)}$$

и очевидно, что поверхности постоянной фазы этой функции определяются как

$$R + R_1 = \text{const.} \quad (6.283)$$

Эти поверхности являются эллипсоидами, имеющими общие фокальные точки p_1 и p (рис. 6.12, *а*). Поскольку в данном разделе нигде не используется понятие плотности среды, мы обозначим расстояние через ρ .

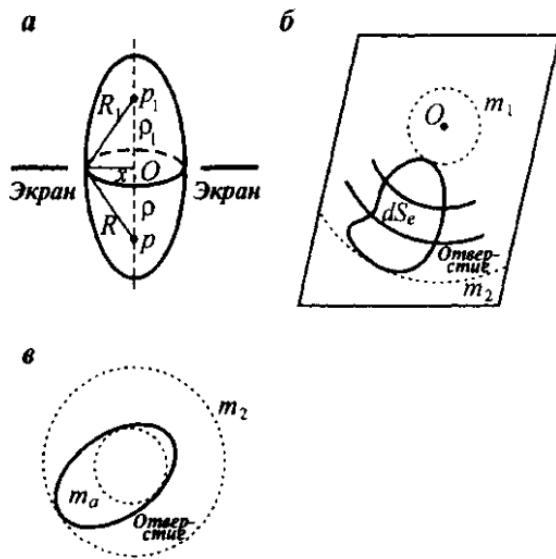
Можно представить себе бесконечное число таких эллипсоидов. В частности, когда максимальное сечение эллипсоида стремится к нулю, он вырождается в прямую линию pp_1 . Расстояние

$$\rho + \rho_1$$

называется фокальным расстоянием, где

$$\rho = pO \text{ и } \rho_1 = p_1O,$$

Рис. 6.12. Иллюстрация формул (6.283) и (6.285) (а); точка O находится на экране (б); точка O находится в пределах отверстия (в)



а точка O является точкой пересечения фокальной прямой с плоскостью экрана.

Наша цель состоит в том, чтобы преобразовать интеграл из выражения (6.282) таким образом, чтобы можно было довольно легко получить его асимптотическое значение при $\lambda \rightarrow 0$. Предположим, что прямая pp_1 перпендикулярна отверстию, и рассмотрим круговое сечение эллипсоида с центром в точке O . Радиус этого сечения равняется x , а расстояния от произвольной точки сечения до точек p_1 и p равняются, соответственно, R и R_1 :

$$R^2 = \rho^2 + x^2, \quad R_1^2 = \rho_1^2 + x^2$$

или

$$R = \rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2}} \quad \text{и} \quad R_1 = \rho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}}. \quad (6.284)$$

Поскольку мы предположили, что обе точки p_1 и p находятся далеко от экрана, можно использовать разложение Маклорена для функций R и R_1 :

$$R \approx \rho \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho^2} \right) \quad \text{и} \quad R_1 \approx \rho_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho_1^2} \right). \quad (6.285)$$

Таким образом,

$$R + R_1 = \rho + \rho_1 + m, \quad (6.286)$$

где

$$m = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{x^2}{2} + \dots, \quad dm = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) x \, dx. \quad (6.287)$$

Следовательно, параметр m характеризует, с точностью до константы, площадь соответствующего круга радиуса x , полученного пересечением эллипса и экрана.

Каждый из этих кругов можем представить как набор элементарных колец с площадью

$$dS_r = 2\pi x \, dx,$$

либо, используя (6.287), получим

$$dS_r = \frac{2\pi}{1/\rho + 1/\rho_1} dm = f dm. \quad (6.288)$$

Здесь

$$f = \frac{2\pi}{1/\rho + 1/\rho_1}. \quad (6.289)$$

Далее, введем функцию $\phi(m)$, определяющую ту часть кольца радиуса x , которая умещается в пределах отверстия:

$$0 \leq \phi(m) \leq 1,$$

т.е.

$$dS_r = \phi(m) dS_r = f \phi(m) dm,$$

где dS_r обозначает площадь, соответствующую отверстию (рис. 6.12, б). Таким образом, интегрирование по области отверстия выполняется с использованием суммирования элементарных круговых колец.

В дальнейшем удобно рассматривать раздельно следующие две ситуации:

- точка O располагается на экране;
- точка O находится в пределах отверстия.

Начнем с первого случая, показанного на рис. 6.12, б. После введения параметра m интегрирование в правой части (6.282) можно производить по этому параметру, имея m_1 и m_2 в качестве нижнего и верхнего пределов:

$$m_1 \leq m \leq m_2.$$

Из рис. 6.12, в видно, что те части колец, которые относятся к предельным значениям m_1 и m_2 , равняются нулю:

$$\phi(m_1) = \phi(m_2) = 0. \quad (6.290)$$

Используя обозначение

$$F(m) = f \phi(m) \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{RR_1}$$

и выражения (6.286) – (6.288), формулу (6.282) можно переписать в виде

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = Ae^{i(p+\rho_1)} \int_{m_1}^{m_2} F(m) e^{im} dm. \quad (6.291)$$

Интегрирование этого выражения по частям дает

$$\int_{m_1}^{m_2} F(m) e^{ikm} dm = \frac{F(m)}{ik} e^{ikm} \Big|_{m_1}^{m_2} - \frac{1}{ik} \int_{m_1}^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm. \quad (6.292)$$

В силу (6.290) первый член в выражении (6.292) исчезает, и мы получаем

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{m_1}^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm,$$

так как

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Поскольку функция, стоящая в последнем интеграле, имеет осциллирующий характер, этот интеграл стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, в предельном случае, когда длина волны стремится к нулю, волна в точке p исчезает, если прямая pp_1 пересекает экран. Это происходит независимо от того, имеется в экране отверстие или нет. Иными словами, результирующая волна в таких точках исчезает в результате интерференции волн, возникших на поверхности отверстия. Поскольку между источником и указанными точками наблюдения располагается жесткий экран, мы можем сказать, что волна отсутствует в зоне геометрической тени. В то же время в реальной ситуации, когда $\lambda \neq 0$, всегда наблюдается дифракция и, до некоторой степени, волны всегда присутствуют в этой части среды.

Рассмотрим теперь второй случай, когда точка O располагается где-то в пределах отверстия (рис. 6.12, в). Согласно (6.287) интегрировать нужно, начиная со значения $m = 0$, поскольку площадь начальной полосы также равна нулю. На интервале

$$0 \leq m \leq m_a$$

все точки круговых колец относятся к отверстию и, следовательно,

$$\phi(m) = 1.$$

Из рис. 6.12, в хорошо видно, что эта функция уменьшается от единицы до нуля между точками $m = m_a$ и $m = m_2$:

$$1 \geq \phi(m) \geq 0.$$

Соответственно, выражение (6.291) можно переписать как

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = A e^{ik(p+p_1)} \int_0^{m_2} F(m) e^{ikm} dm.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{m_2} F(m) e^{ikm} dm = \frac{F(m)}{ik} e^{ikm} \Big|_0^{m_2} - \frac{1}{ik} \int_0^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A e^{ik(p+p_1)}}{2\pi} \left[-F(m) e^{ikm} \Big|_0^{m_2} + \int_0^{m_2} F'(m) e^{ikm} dm \right]. \quad (6.293)$$

Как и в предыдущем случае, интеграл исчезает при $\lambda \rightarrow 0$. Значение первого члена, соответствующее верхнему пределу, также равняется нулю, поскольку $\phi(m_2) = 0$.

Таким образом,

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A e^{ik(p+p_1)}}{2\pi} F(0). \quad (6.294)$$

Принимая во внимание, что

$$\phi(0) = 1, \frac{\cos(n, R)}{RR_1} = \frac{1}{\rho\rho_1},$$

а также формулу (6.289), получим

$$F(0) = \frac{2\pi}{\rho_1 + \rho} \quad (6.295)$$

и, используя выражение (6.293),

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A}{\rho_1 + \rho} e^{ik(p+p_1)} \quad (6.296)$$

Это выражение описывает комплексную амплитуду потенциала падающей волны на расстоянии $\rho + \rho_1$ от источника, которая была бы в отсутствие экрана. Таким образом, каждый раз, когда прямая pp_1 пересекает отверстие, волна позади экрана совпадает с той, что была бы в однородной среде. Другими словами, волна распространяется от источника к точке наблюдения вдоль прямой линии. Как видно из рис. 6.13, *а, б*, такое поведение наблюдается внутри конуса с вершиной в точке p_1 , боковая поверхность которого касается края отверстия. В то же время вне этого конуса, в зоне геометрической тени волна отсутствует. Следовательно, в пределе ($R \rightarrow 0$) дифракционная картина исчезает и, соответственно, волновые поля претерпевают разрыв на боковой поверхности конуса. Как уже отмечалось, в реальной ситуации, независимо от того, насколько мала длина волны, дифракция проявляется в пределах относительно небольшой зоны по обе стороны от этой поверхности.

Предположим, что в экране имеется множество различных отверстий. Тогда в пределе $\lambda \rightarrow 0$ все пространство позади экрана можно разбить на две

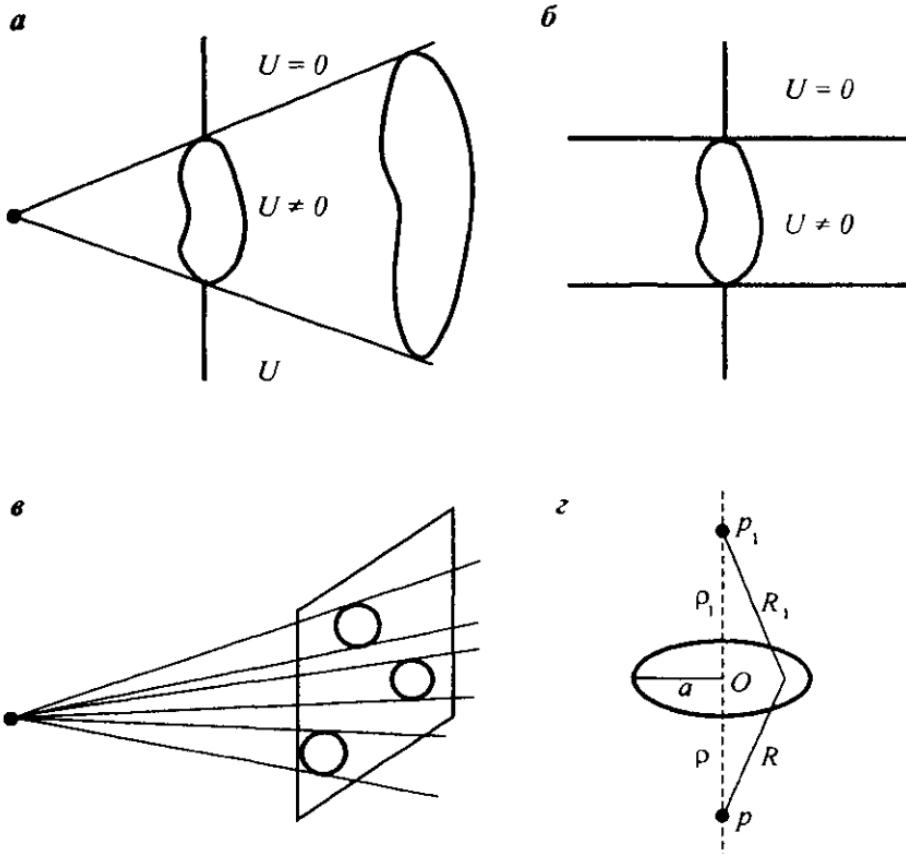


Рис. 6.13. Переход к геометрической акустике (а, б, в); круглый экран радиуса a (г)

части. Одна часть, где волны распространяются вдоль прямых линий, состоит из пучков лучей, а в другой части объема частицы находятся в покое.

Поскольку распределение волн определяется только геометрическими факторами, а именно положением источника и точки наблюдения, размером, формой и положением отверстия, рассматриваемое приближение ($\lambda \rightarrow 0$) называется геометрической акустикой. Оно играет чрезвычайно важную роль в сейсмологии, а его основные черты будут описаны в одной из следующих глав.

Здесь следует отметить, что переход от волновой к геометрической акустике происходит не всегда. Существуют такие случаи, когда при стремлении длины волны λ к нулю все еще наблюдается дифракция. Для иллюстрации такого поведения мы рассмотрим два связанных между собой примера.

Пример 1: интенсивность позади экрана

Как было показано ранее, если точка O находится за пределами отверстия (рис. 6.12, б), то

$$\mathcal{U}(p) \rightarrow 0, \text{ если } \lambda \rightarrow 0.$$

Однако существуют исключения из этого правила, например когда конечная часть указанного края экрана совпадает с одним из двух граничных кругов, характеризующихся параметрами

$$m_1 = \text{const} \text{ и } m_2 = \text{const}.$$

В таких случаях множители $\phi(m_1)$ и $\phi(m_2)$ не равны нулю и, следовательно, первый член в правой части выражения (6.292) не исчезает. Отсюда следует, что позади экрана (в зоне геометрической тени) присутствует волна. Иными словами, суперпозиция волн не приводит к их полному взаимному гашению, если край экрана имеет соответствующую круговую форму. Например, это происходит, когда точки p_1 и p расположены на перпендикуляре, проходящем через центр круга (рис. 6.13, г), и именно этот круг является экраном (остальная часть плоскости прозрачна). В этом случае выражение (6.282) можно переписать как

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = A \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(R + R_1)}}{RR_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) 2\pi x dx. \quad (6.297)$$

Мы предполагаем, что $\rho = \rho_1$, и, следовательно $R = R_1 = r$, а также

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) = \frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{r}.$$

Далее, из формулы (6.284) следует, что

$$r^2 = \rho^2 + x^2, \quad x dx = r dr.$$

Отсюда вместо (6.297) получаем

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = 2\pi A \rho \int_{\sqrt{\rho^2 + \rho^2}}^{\infty} \frac{e^{2ikr}}{r^2} \frac{dr}{r^2}. \quad (6.298)$$

Интегрирование по частям дает

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = \frac{2\pi A \rho}{2ik} \left\{ \left. \frac{e^{2ikr}}{r^2} \right|_{\sqrt{\rho^2 + \rho^2}}^{\infty} + 2 \int_{\sqrt{\rho^2 + \rho^2}}^{\infty} \frac{e^{2ikr}}{r^3} dr \right\}$$

или

$$\mathcal{U}(p) = -\frac{A \rho}{2} \left\{ \left. \frac{e^{2ikr}}{r^2} \right|_{\sqrt{\rho^2 + \rho^2}}^{\infty} + 2 \int_{\sqrt{\rho^2 + \rho^2}}^{\infty} \frac{e^{2ikr}}{r^3} dr \right\}.$$

Интегрируя по частям второй член этого выражения, мы видим, что он обращается в ноль при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, в пределе мы получим

$$\mathcal{U}(p) = \frac{A\rho}{2(a^2 + \rho^2)} e^{2ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}. \quad (6.299)$$

Как видно из рис. 6.13, z , потенциал падающей волны в точках на краю экрана определяется формулой

$$\mathcal{U}_1 = A \frac{e^{ikR_1}}{R_1} = A \frac{e^{ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}.$$

Соответственно, выражение (6.289) переходит в

$$\mathcal{U}(p) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} e^{ik\sqrt{a^2 + \rho^2}} \mathcal{U}_1,$$

а функция интенсивности I изменяется вдоль оси диска как

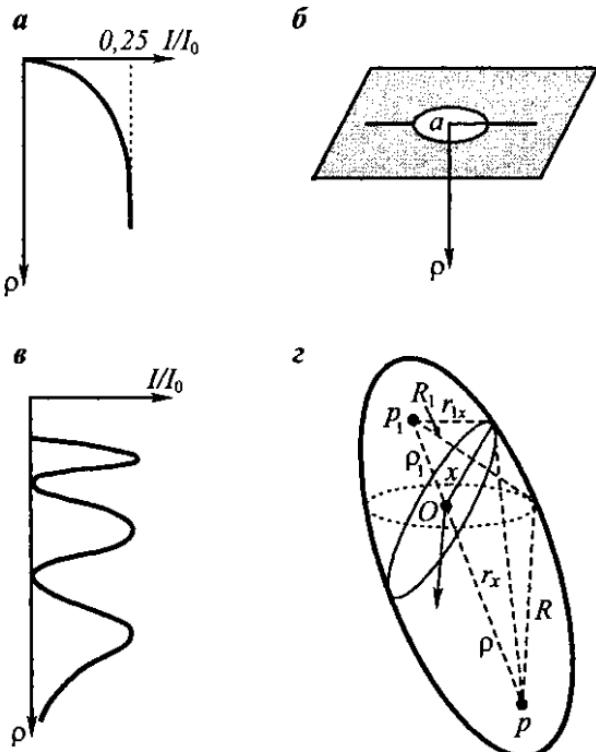


Рис. 6.14. Интенсивность позади круглого экрана (a); экран с круглым отверстием (б); интенсивность позади круглого отверстия (в); произвольное положение источника и точки наблюдения (г)

$$I(p) = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} I_0, \quad (6.300)$$

где I_0 – интенсивность падающей волны на краю экрана.

Качественно мы уже обсуждали этот парадоксальный результат, изображенный на рис. 6.14, а. Из равенства (6.300) следует, что волна присутствует всюду вдоль оси ρ , за исключением точек вблизи диска. Это происходит, несмотря на то, что точки наблюдения лежат в области геометрической тени. Относительная интенсивность I/I_0 постепенно увеличивается с увеличением расстояния ρ между экраном и точкой p и асимптотически стремится к значению 0,25.

Заметим, что если падающая волна является плоской, то

$$I \rightarrow I_0, \text{ если } \rho \rightarrow \infty,$$

т.е. на достаточно больших расстояниях присутствие экрана практически никак не влияет на точки, расположенные на оси ρ . Как отмечалось ранее, поведение волны, описываемое выражением (6.300) противоречит концепции распространения волн вдоль прямолинейных лучей при $\lambda \rightarrow 0$. Иногда такое поведение называют дифракцией Пуассона. В то же время следует снова подчеркнуть, что равенство (6.300) выполняется только на оси ρ , поскольку в этом случае прямые

$$m = \text{const}$$

совпадают с краем диска. Вместе с тем, данное условие не удовлетворяется в точках, не принадлежащих этой оси, и, соответственно, для этих точек амплитуда волны стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$.

Пример 2: интенсивность позади кругового отверстия

Рассмотрим теперь экран с круговым отверстием и поведение волны вдоль его оси ρ (рис. 6.14, б). Придерживаясь предположений и обозначений предыдущего примера, вместо выражения (6.298) получим

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = 2\pi A p \int_0^{\sqrt{a^2 + \rho^2}} e^{2ikr} \frac{dr}{r^2}. \quad (6.301)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что получившийся член, содержащий интеграл, стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$i\lambda \mathcal{U}(p) = \frac{2\pi A p}{2ik} \frac{e^{2ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}}{r^2} \Big|_0^{\sqrt{a^2 + \rho^2}}$$

или

$$\mathcal{U}(p) = \frac{Ap}{2} \left[\frac{e^{2ikp}}{\rho^2} - \frac{e^{2ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}}{a^2 + \rho^2} \right] = \frac{A e^{2ikp}}{2\rho} \left[1 - \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} e^{2ik(\sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho)} \right]. \quad (6.302)$$

Предположим, что точки наблюдения расположены на достаточно больших расстояниях от отверстия:

$$\rho \gg a.$$

Тогда, используя приближенные формулы

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} \approx 1, \quad \sqrt{a^2 + \rho^2} - \rho \approx \frac{a^2}{2\rho},$$

запишем выражение (6.302) в виде

$$\mathcal{U}(\rho) = \frac{A}{2\rho} e^{2ik\rho} \left(1 - e^{2ik\frac{a^2}{\rho}} \right) = -i \frac{A}{\rho} e^{2ik\rho} e^{ik\frac{a^2}{2\rho}} \sin \frac{ka^2}{2\rho}. \quad (6.303)$$

Снова вводя функцию интенсивности I , находим, что

$$\frac{I}{I_0} \sin^2 \left(\frac{ka^2}{2\rho} \right), \quad (6.304)$$

где

$$I_0 = \frac{A^2}{a^2 + \rho^2} \approx \frac{A^2}{\rho^2}.$$

По мере увеличения расстояния ρ отношение I/I_0 образует систему максимумов и минимумов, причем вначале расстояние между ними увеличивается с увеличением ρ (рис. 6.14, в). Все максимумы имеют одинаковую амплитуду, равную единице, а все минимумы равны нулю. Для относительно больших расстояний, когда $2\rho > ka^2$, функция I/I_0 постепенно стремится к нулю.

В данном примере источник и точки наблюдения лежат на оси ρ , и между ними нет никакого экрана. Естественно ожидать поэтому, что в пределе $\lambda \rightarrow 0$ амплитуда волны будет отличаться от нуля во всех точках оси ρ . Однако, как следует из выражения (6.304), вместо этого наблюдается большое число точек, в которых волна отсутствует. Более того, с увеличением расстояния ρ интенсивность волны становится значительно меньше I_0 .

В противоположном случае, когда между источником и приемником находится круговой экран, интенсивность стремится к I_0 при $\rho \rightarrow \infty$. Коиечно, поведение волновых полей в обоих случаях достаточно парадоксальное. Интересно также заметить следующее. В присутствии отверстия картина дифракции Фраунгофера на плоскости $\rho = \text{const}$ предполагает, что максимум интенсивности должен наблюдаться в точках на оси ρ . Следовательно, данное приближение применимо только в том случае, когда отношение I/I_0 , задаваемое равенством (6.304), монотонно уменьшается.

До сих пор мы предполагали, что точки ρ и ρ_1 расположены на перпендикуляре к экрану. Теперь представим себе более общую ситуацию (рис. 6.14, г), и снова построим семейство эллипсоидов. Очевидно, что

$$r_x = \rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2}} \text{ и } r_{1x} = \rho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}}.$$

Поскольку

$$\frac{x}{\rho} \ll 1 \text{ и } \frac{x}{\rho_1} \ll 1,$$

приведенные выше выражения можно представить как

$$r_x \approx \rho \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho^2} \right), \quad r_{1x} \approx \rho_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho_1^2} \right)$$

и, соответственно,

$$r_x + r_{1x} \approx \rho + \rho_1 + m,$$

где, как и ранее,

$$m = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{x^2}{2}.$$

Последнюю величину можно рассматривать как параметр системы эллипсов, сформированных в результате пересечения эллипсоида вращения с плоскостью экрана.

Площадь элементарного кольца сечения эллипсоида

$$dS_r = 2\pi x \, dx.$$

Конечно, существует корреляция между этой площадью и проекцией на отверстие dS_e , которое является эллиптической полосой, т.е.

$$dS_e = f_1 dS_r = f \, dm,$$

где f – некоторый коэффициент пропорциональности.

Таким образом, мы представили площадку интегрирования в виде системы эллиптических полос, каждая из которых характеризуется параметрами m и $f(m)$.

Используя данный подход, снова приходим к выражению (6.291), которое позволяет получить такой же результат, как и в предыдущем случае.

Мы продемонстрировали переход от волновой к геометрической акустике на относительно простой модели экрана, помещенного в однородную среду. В дальнейшем мы остановимся на более общих моделях среды и будем использовать формулы, описывающие волновые поля.

6.9. УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Как мы знаем из изучения волн в однородной среде, их поведение в волновой зоне можно описать следующим образом:

$$A(R, k) e^{i k R}. \quad (6.305)$$

Иными словами, амплитуда волны зависит, в общем случае, от расстояния R , а поведение фазы определяется экспоненциальным членом $e^{i k R}$.

С уменьшением длины волны λ ближняя и промежуточная зоны занимают относительно меньший объем вокруг источника, и в пределе $\lambda \rightarrow 0$ практически всюду наблюдается волновая зона.

Предположим теперь, что среда неоднородна и скорость распространения c является непрерывной функцией пространственных координат. Легко увидеть, что в этом случае комплексная амплитуда потенциала \mathcal{U} также удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} = 0, \quad (6.306)$$

а волновое число

$$k = \omega/c$$

является функцией координат точки. Действительно, из первого основного уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P$$

и соотношения

$$s = \operatorname{grad} U$$

имеем

$$P = -\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

при условии, что плотность является постоянной. Тогда второе уравнение

$$\operatorname{div} s = -\frac{1}{c^2 \rho} P$$

даст

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Соответственно, в частотной области мы приходим к уравнению (6.306).

Полагая, что длина волны стремится к нулю, т.е. $k \rightarrow \infty$, мы будем искать асимптотическое решение уравнения (6.306). Поскольку расстояния от источника при этом становятся значительно больше длины волны, представляется естественным, по аналогии со случаем однородной среды, представить искомое решение в виде

$$\mathcal{U} = A e^{ik_0 S(\mathbf{R})}, \quad (6.307)$$

где k_0 – значение волнового числа в некоторой точке среды; A – амплитуда; S – функция, называемая эйконалом; \mathbf{R} – радиус-вектор.

Так как $k_0 \rightarrow \infty$, скалярный потенциал \mathcal{U} является быстро изменяющейся функцией пространственных координат. Однако амплитуда A и эйконал S изменяются от точки к точке относительно медленно и не стремятся к бесконечности при $k_0 \rightarrow \infty$.

Из определения (6.307) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} \mathcal{U}. \quad (6.308)$$

Соответственно, вторая производная записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{ik_0 S} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \mathcal{U} + \\ &+ ik_0 \frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} \right). \end{aligned} \quad (6.309)$$

Поскольку $k_0 \rightarrow \infty$, первым членом в правой части этого выражения можно пренебречь. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} = 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 \mathcal{U} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \mathcal{U}$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} - k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \mathcal{U} + 2ik_0 \mathcal{U} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \log A}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)$$

Аналогично записываются выражения для вторых производных $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2}$ и

$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2}$, и мы приходим к следующему выражению для лапласиана $\nabla^2 \mathcal{U}$:

$$\nabla^2 \mathcal{U} = -k_0^2 \mathcal{U} D(S) + 2ik_0 \mathcal{U} \left(\operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \log A + \frac{1}{2} \nabla^2 S \right), \quad (6.310)$$

где

$$D(S) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \quad (6.311)$$

и

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \quad (6.312)$$

Следовательно, в любой точке с координатами x, y, z уравнение Гельмгольца можно приближенно заменить следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} &= -k_0^2 \mathcal{U} \left[D(S) - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + \\ &+ 2ik_0^2 \mathcal{U} \left(\operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \log A + \frac{1}{2} \nabla^2 S \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.313)$$

Это уравнение будет выполняться, если функции A и S подчиняются следующим двум условиям:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (6.314)$$

где

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{c_0}{c} \quad (6.315)$$

является показателем преломления, и

$$\operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \log A = -\frac{\nabla^2 S}{2}. \quad (6.316)$$

Дифференциальное уравнение эйконала (6.314) является неоднородным уравнением первого порядка и второй степени.

Как только решение этого уравнения $S(x, y, z)$ становится известным, мы можем определить функции $\operatorname{grad} S$ и $\nabla^2 S$. После этого амплитуду A можно определить из уравнения (6.316), которое называется уравнением переноса.

Левая часть (6.316) представляет собой скалярное произведение двух векторов: ∇S и $\nabla \log A$, зависящее от $\nabla \log A$ только в направлении градиента S . Это означает, что данное уравнение описывает новедение волн даже в том случае, когда амплитуда A является разрывной функцией в направлении, ортогональном вектору $\operatorname{grad} S$.

Согласно определению (6.307), равенство

$$S(x, y, z) = \text{const} \quad (6.317)$$

характеризует поверхности постоянной фазы, т.е. волновые поверхности. Единичный вектор нормали \mathbf{n}_0 к такой поверхности определяется градиентом S :

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\text{grad } S}{|\text{grad } S|} \quad (6.318)$$

и задает направление прямой (луча), ортогональное поверхности эйконала. Очевидно, что в общем случае направление p_1 изменяется и, соответственно, лучи изгибаются. В неоднородной среде интегрирование уравнения эйконала – это наиболее естественный способ определения направления указанных лучей и положения фазовых поверхностей. Так, например, согласно равенству (6.315), в однородной среде $n = \text{const}$ и простейшим решением уравнения (6.314) является линейная функция

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (6.319)$$

Подстановка последнего выражения в (6.314) дает

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (6.320)$$

Функция $S(x, y, z)$ содержит две произвольные постоянные; она описывает плоскости, а лучи в этом случае являются прямыми линиями, которые задаются уравнением

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dz}{\beta} = \frac{dy}{\gamma}. \quad (6.321)$$

Эти соотношения следуют из того, что смещение dl вдоль луча

$$dl = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

и градиент S

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k} = n(\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k})$$

параллельны друг другу.

Поскольку S – линейная функция, из (6.316) получаем

$$\nabla S \cdot \nabla \log A = 0, \quad (6.322)$$

т.е. функция $\log A$ и, следовательно, A могут изменяться только вдоль фазовой поверхности, хотя этого изменения может и не быть. В случае однородной плоской волны амплитуда A постоянна и уравнение (6.322) удовлетворяется автоматически.

Если элементарный источник порождает сферическую волну, то решением уравнения (6.314) является функция

$$S = nR, \quad (6.323)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{nx}{R}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{ny}{R}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{nz}{R}$$

и

$$\text{grad } S = \frac{n\mathbf{R}}{R} = n\mathbf{R}_0.$$

Аналогично, простейшее решение уравнения эйконала в двумерном случае (цилиндрическая волна) есть

$$S = nr \text{ и } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, мы описали метод, основанный на решении уравнения эйконала и уравнения переноса, позволяющий определить поверхности постоянной фазы и амплитуды волн в произвольной среде при $\lambda \rightarrow 0$.

ОБЛАСТЬ, В КОТОРОЙ УРАВНЕНИЯ (6.314) И (6.316) ОСТАЮТСЯ СПРАВЕДЛИВЫМИ

Полезно определить условия, при которых уравнение эйконала и уравнение переноса можно использовать вместо волнового уравнения с приемлемой точностью.

Для решения этой задачи вернемся снова к определению (6.307) и уравнению Гельмгольца:

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik_v S(\mathbf{r})} \quad (6.324)$$

и

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k_0^2 n^2 \mathcal{U} = 0,$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых длин волн λ , естественно предположить, что относительное изменение показателя преломления n в рассматриваемом диапазоне длин волн мало:

$$\Lambda |\nabla n| \ll n, \quad (6.325)$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (6.326)$$

а $|\nabla n|$ – абсолютная величина градиента, т.е. максимальная производная, n .

Таким образом, неравенство (6.325) показывает, что максимальное изменение n

$$\Lambda |\nabla n|$$

на интервале $\lambda/2\pi$ незначительно по сравнению с самим n .

Заметим, что по определению

$$k = nk_0 \text{ или } \frac{1}{c} = n \frac{1}{c_0},$$

и $\text{grad } n$ характеризует изменение скорости $c(\mathbf{r})$.

По аналогии с предположением (6.325) можно ожидать, что амплитуда $\phi(\eta)$ также мало меняется на рассматриваемом интервале и

$$\Lambda |\nabla A| \ll A. \quad (6.327)$$

Неравенства (6.325) и (6.327) удобно представить в виде

$$\Lambda \ll \frac{n}{|\nabla n|} = L_1 \text{ и } \Lambda \ll \frac{A}{|\nabla A|} = L_2.$$

Здесь L_1 и L_2 называются характеристическими длинами данной задачи, а их значения могут изменяться от точки к точке. В частности, с уменьшением $\text{grad } n$ значение L_1 становится больше.

Рассмотрим поведение показателя преломления n на интервале L_1 и предположим, что он меняется на этом интервале почти линейно. Тогда мы можем записать

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r}) \approx \mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } n$$

или

$$|n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r})| \approx L_1 |\nabla n|.$$

Здесь \mathbf{L}_1 обозначает произвольно ориентированный вектор, длина которого равняется L_1 . В то же время из равенств (6.328) следует, что

$$n(\mathbf{r}) = |\nabla n| L_1.$$

Сравнение двух последних соотношений показывает, что

$$|n(\mathbf{r} + \mathbf{L}_1) - n(\mathbf{r})| \approx n(\mathbf{r}), \quad (6.329)$$

т.е. изменение n вдоль \mathbf{L}_1 сравнимо по величине с самим n .

По аналогии, имеем

$$|A(\mathbf{r} + \mathbf{L}_2) - A(\mathbf{r})| \approx |A(\mathbf{r})|. \quad (6.330)$$

Вектор \mathbf{L}_2 также имеет произвольную ориентацию, а его длина равняется L_2 . Очевидно, что неравенства (6.328) можно переписать как

$$\frac{L_1}{\Lambda} \gg 1 \text{ и } \frac{L_2}{\Lambda} \gg 1. \quad (6.331)$$

Эти неравенства показывает, что характеристические длины значительно превышают величину Λ .

Выбирая минимальное из двух значений L_1 и L_2 :

$$L = \min(L_1, L_2),$$

вместо неравенств (6.331) имеем

$$L \gg \Lambda$$

или

$$\frac{\Lambda}{L} = \frac{1}{kL} = \frac{1}{k_0 n L} \ll 1. \quad (6.332)$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В СТЕПЕННОЙ РЯД

Покажем теперь, что решение уравнения Гельмгольца можно представить в виде ряда по степеням Λ/L , первый и второй члены которого соответствуют уравнению эйконала и уравнению переноса. Более того, как будет показано, вклад последующих членов этого ряда относительно мал, если $\Lambda/L \ll \ll 1$, т.е. показатель преломления мало изменяется на расстоянии, равном длине волны.

С физической точки зрения, это должно означать, что поведение волны корректно описывается в рамках геометрической акустики, если выполняются условия (6.328). Чтобы удостовериться в этом, введем новые переменные:

$$x_1 = x/L, y_1 = y/L, z_1 = z/L$$

или

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/L, \quad (6.333)$$

т.е. координаты точки наблюдения нормируются на характеристическую длину L .

Очевидно, что

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$$

и

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z_1^2}.$$

Таким образом, получаем

$$\nabla^2 \mathcal{U} = \frac{1}{L^2} \nabla_1^2 \mathcal{U}, \quad (6.334)$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}.$$

Уравнение Гельмгольца записывается как

$$\nabla_1^2 \mathcal{U}(\mathbf{r}_1) + k_0^2 L^2 n^2 \mathcal{U}(\mathbf{r}_1) = 0$$

или

$$\nabla_1 \mathcal{U}(\mathbf{r}_1) + \frac{n^2}{\mu^2} \mathcal{U}(\mathbf{r}_1) = 0, \quad (6.335)$$

где

$$\mu = \frac{1}{k_0 L} = \frac{\Lambda_0}{L} \quad (6.336)$$

является малым параметром.

Из равенства (6.333) следует, что

$$\nabla_1 n = L \nabla n \text{ и } \nabla_1 A = L \nabla A \quad (6.337)$$

а, используя (6.328), мы получаем

$$L \approx \frac{n}{|\nabla n|} = \frac{nL}{|\nabla_1 n|} \text{ и } L \approx \frac{|A|}{|\nabla A|} = \frac{|A|L}{|\nabla_1 A|}$$

или

$$\nabla_1 n \approx n \text{ и } |\nabla_1 A| \approx |A|. \quad (6.338)$$

Таким образом, в новой системе координат x_1, y_1, z_1 скорость изменения показателя преломления n и амплитуды A сравнима по величине с значениями этих величин, которые обычно близки к единице.

Фазу в уравнении (6.324) целесообразно записать как

$$k_0 S(\mathbf{r}) = k_0 L \cdot \frac{S_1(\mathbf{r}_1)}{\mu} = \frac{S_1(\mathbf{r}_1)}{\mu}.$$

Функция $S_1(\mathbf{r}_1)$ меняется относительно медленно, т.е.

$$|\nabla_1 S_1(\mathbf{r}_1)| \leq 1.$$

Таким образом, скалярный потенциал \mathcal{U} записывается в следующем виде:

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}_1) = A(\mathbf{r}_1) e^{-\frac{S_1(\mathbf{r}_1)}{\mu}}. \quad (6.339)$$

Учитывая уравнение (6.334), соотношения

$$k_0 \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\mu L} \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \quad k_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu L^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2},$$

а также формулу (6.309), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} &= \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} e^{\frac{iS_1}{\mu}} + \frac{i}{L^2 \mu} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} e^{\frac{iS_1}{\mu}} + \frac{iA}{L^2 \mu} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} e^{\frac{iS_1}{\mu}} + \\ &+ \frac{i}{L^2 \mu} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} e^{\frac{iS_1}{\mu}} + A \frac{i}{\mu} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} e^{\frac{iS_1}{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда уравнение Гельмгольца записывается как

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} &= \frac{1}{L^2} \left[\nabla_1^2 A + \frac{i}{\mu} \nabla_1 A \cdot \nabla_1 S_1 + \frac{iA}{\mu} \nabla_1^2 S_1 + \frac{i}{\mu} \nabla_1 S_1 \cdot \nabla_1 A - \right. \\ &\left. - \frac{A}{\mu^2} (\nabla_1 S_1)^2 \right] e^{\frac{iS_1}{\mu}} + k_0^2 n^2 A e^{\frac{iS_1}{\mu}} = 0. \end{aligned}$$

Умножая последнее выражение на L^2 и учитывая, что

$$\mu = 1/k_0 L,$$

получим

$$[n^2 - (\nabla_1 S_1)^2] \frac{A}{\mu^2} e^{\frac{iS_1}{\mu}} + \frac{i}{\mu} [2 \nabla_1 A \cdot \nabla_1 S_1 + A \nabla_1^2 S_1] e^{\frac{iS_1}{\mu}} + \nabla_1^2 A e^{\frac{iS_1}{\mu}} = 0. \quad (6.340)$$

Представим теперь амплитуду A в виде ряда по степеням μ :

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}_1) = e^{\frac{iS_1}{\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{i} \right)^m A_m(\mathbf{r}_1), \quad (6.341)$$

где множитель $(1/i)^m$ введен для упрощения алгебраических преобразований.

Подставляя (6.341) в (6.340) и приравнивая отдельно действительные и мнимые члены с одинаковыми степенями μ , получим

$$(\mu^{-2}) \quad (\nabla_1 S_1)^2 = n^2,$$

$$(\mu^{-1}) \quad 2(\nabla_1 A_0 \cdot \nabla_1 S_1) + A_0 \nabla_1^2 S_1 = 0,$$

$$(\mu^0) \quad 2(\nabla_1 A_1 \cdot \nabla_1 S_1) + A_1 \nabla_1^2 S_1 = -\nabla_1^2 A_0, \quad (6.342)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(\mu^{m-1}) \quad 2(\nabla_1 A_m \cdot \nabla_1 S_1) + A_m \nabla_1^2 S_1 = -\nabla_1^2 A_{m-1}.$$

Возвращаясь к исходной системе координат, имеем

$$(\nabla S)^2 = n^2,$$

$$2(\nabla A_0 \cdot \nabla S_1) + A_0 \nabla^2 S = 0,$$

$$2(\nabla A_1 \cdot \nabla S_0) + A_1 \nabla^2 S = -L \nabla^2 A_0,$$

...

Из формул (6.342) следует, что первые два приведенных уравнения являются уравнением эйконала и уравнением переноса, а вклад остальных членов мал, поскольку $\mu \ll 1$.

Следует заметить, что малость μ обеспечивается как уменьшением длины волны, так и увеличением L , что соответствует более плавному изменению n . Таким образом, мы показали, что поведение волн описывается законами геометрической акустики, если выполняются условия

$$\Lambda |\nabla n| \ll n \text{ и } \Lambda |\nabla A| \ll A. \quad (6.343)$$

Ранее мы рассматривали дифракцию в однородной среде позади экрана, где неравенства (6.343) не выполнялись вблизи края отверстия практически при любой длине волны. Несмотря на это, с уменьшением λ влияние дифракции становится меньше, и энергия распространяется от источника к точкам наблюдения вдоль прямых линий. Однако существуют такие случаи, когда этого перехода не происходит.

Согласно (6.324), в рассматриваемом приближении волна ведет себя как плоская. Заметим, что потенциал \mathcal{U} можно представить как

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{i\omega t(\mathbf{r})}.$$

Тогда, выполняя ту же процедуру, что и ранее, мы получим уравнения для времени t и амплитуды A . Таким образом, при описании геометрической акустики, мы можем иметь дело как с уравнением эйконала, так и с временными полями. Конечно, оба этих подхода являются эквивалентными.

Пример: плоская волна в вертикально неоднородной среде

Чтобы проиллюстрировать сделанные нами выкладки, рассмотрим относительно простой пример, в котором плоская волна распространяется вдоль оси z , а параметры среды зависят только от этой координаты. В этом случае решение уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2(z) \mathcal{U} = 0 \quad (6.344)$$

хорошо известно и записывается как

$$\mathcal{U} = A e^{\pm ikz}, \quad (6.345)$$

где A и k – константы.

Предположим далее, что длина волны λ настолько мала, что волновое число $k(z)$ практически не меняется на расстоянии λ , т.е.

$$\frac{k(z + \lambda) - k(z)}{k(z)} \ll 1.$$

Это позволяет представить решение уравнения Гельмгольца в виде, аналогичном тому, который получается для однородной среды:

$$\mathcal{U} = A(z)e^{i\phi(z)}. \quad (6.346)$$

Поскольку в однородной среде $A = \text{const}$ и $\partial\phi/\partial z = k = \text{const}$, будем считать, что вариации этих функций малы в масштабе длины волны λ . Беря первые и вторые производные от \mathcal{U} , получим

$$\mathcal{U}' = A'e^{i\phi} + A\phi'e^{i\phi(z)} = (A' + A\phi')e^{i\phi}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'' &= (A'' + iA'\phi' + iA\phi'')e^{i\phi} + [iA'\phi' - (\phi')^2 A]e^{i\phi} = \\ &= [A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A(\phi')^2]e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (6.344) записывается как

$$A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' + [k^2(z) - (\phi')^2]A = 0. \quad (6.347)$$

Попытаемся теперь найти приближенное решение этого уравнения. Обозначим через L расстояние, на котором вариации $A(z)$ и $\phi(z)$ являются еще значимыми. Очевидно, что

$$L \gg \lambda.$$

Данное неравенство указывает на то, что члены уравнения (6.347) имеют различный порядок малости. Покажем это, используя следующие равенства:

$$f'(x) \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \sim \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

если

$$f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \gg f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Соответственно,

$$f''(x) \approx f(x)/(\Delta x)^2.$$

Таким образом, можно записать

$$A' \sim A/L, A'' \sim A/L^2, \phi'' \sim \phi'/L. \quad (6.348)$$

Оценка членов в (6.347) дает

$$A'' \sim A/L^2,$$

$$2i\phi'A' + i\phi''A \sim \phi'A/L$$

и

$$[k^2(z) - (\phi')^2]A \sim A/\lambda^2$$

в силу соотношения

$$\phi' \sim 1/\lambda \approx k.$$

Это следует из предположения о том, что фаза $\phi(z)$ изменяется почти так же, как и в случае однородной среды.

Поскольку слагаемые в уравнении (6.347) имеют различный порядок, каждое из них должно равняться нулю, чтобы удовлетворить этому уравнению. Помимо этого, мы пренебрежем первым членом, в силу его малости.

Таким образом, получаем два уравнения:

$$(\phi')^2 = k^2(z) \quad (6.349)$$

и

$$2\phi'A' + \phi''A = 0. \quad (6.350)$$

Решением уравнения (6.349) является функция

$$\phi' = \pm k(z)$$

и, соответственно,

$$\phi(z) = \pm \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi. \quad (6.351)$$

В действительности мы решили таким образом уравнение эйконала.

Второе уравнение записывается теперь как

$$\frac{A'}{A} = \frac{\Phi''}{2\phi'} = -\frac{k'(z)}{2k(z)}. \quad (6.352)$$

Его решением является функция

$$A(z) = C/\sqrt{k(z)}, \quad (6.353)$$

где C – некоторая константа.

Подставляя (6.351) и (6.353) в (6.346), получим

$$U = \frac{1}{\sqrt{k(z)}} \left[C_1 e^{i \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi} + C_2 e^{-i \int_{z_0}^z k(\xi) d\xi} \right]. \quad (6.354)$$

Последнее выражение называется приближением геометрической акустики или, иначе, приближенным решением Венцеля – Крамера – Брюллюэна (ВКБ). Следует заметить, что интеграл

$$\int_{z_0}^z k(\xi) d\xi$$

характеризует изменение фазы между точками z_0 и z .

Из физических соображений очевидно, что среднее значение потока энергии не должно зависеть от z . Докажем это утверждение.

Потенциал U определяется как

$$U(z) = \frac{C}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

Таким образом,

$$s_z = -\frac{Ck'(z)}{2\sqrt{k^3(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)] + \frac{C\varphi'(z)}{\sqrt{k(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)].$$

Отсюда

$$v_z = \frac{Ck'(z)\omega}{2\sqrt{k^3(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)] + \frac{C\varphi'(z)\omega}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)] = \\ = \frac{Ck'(z)\omega}{2\sqrt{k^3(z)}} \sin[\omega t - \varphi(z)] + C\omega\sqrt{k(z)} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

В то же время давление задается формулой

$$P = \frac{C\rho_0\omega^2}{\sqrt{k(z)}} \cos[\omega t - \varphi(z)].$$

Следовательно, среднее значение потока энергии через единичную поверхность, перпендикулярную оси z , за один период равняется

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T P v_z dt = \frac{1}{2} C^2 \rho_0 \omega^3.$$

Г л а в а 7. СУПЕРПОЗИЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН, ИМЕЮЩИХ РАЗНЫЕ ЧАСТОТЫ И ДЛИНЫ ВОЛН

В предыдущих главах мы описали интерференцию волн, имеющих одинаковые частоты и, соответственно, одинаковые длины волн, и рассмотрели такие явления, как стоячая волна, а также формирование собственных колебаний и явление дифракции. Помимо этого мы смогли представить волны в виде суперпозиции элементарных волн и объяснить некоторые важные особенности дифракции, например чередование зон с относительно низкой и высокой интенсивностью.

Также мы описали возникновение неоднородной волны на поверхности воды и продемонстрировали эффект суперпозиции элементарных волн от нескольких источников.

Рассмотрим теперь суперпозицию синусоидальных волн, имеющих разные частоты и длины волн. Этот случай очень важен, поскольку он помогает понять, как происходит распространение произвольной (нестационарной) волны.

7.1. ГРУППА ВОЛН. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ

Смещения в синусоидальной волне, распространяющейся, например, вдоль оси x , описываются следующим выражением:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx), \quad (7.1)$$

где

$$k = \omega/c \quad (7.2)$$

является волновым числом, а c характеризует скорость распространения произвольной фазы и поэтому называется фазовой скоростью. Например, как показано на рис. 7.1, a , одна и та же фаза возникает в точках x_1 и x_2 ($x_1 > x_2$) и, в соответствии с выражением (7.1),

$$\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2$$

или

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

С учетом равенства (7.2) выражение (7.1) можно представить в виде

Рис. 7.1. Фазы синусоидальных волн
(*a*); синхронные колебания (*б*); не-
стационарные волны (*в*); суперпози-
ция двух синусоидальных волн (*г*)

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

или

$$s(x, t) = s_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

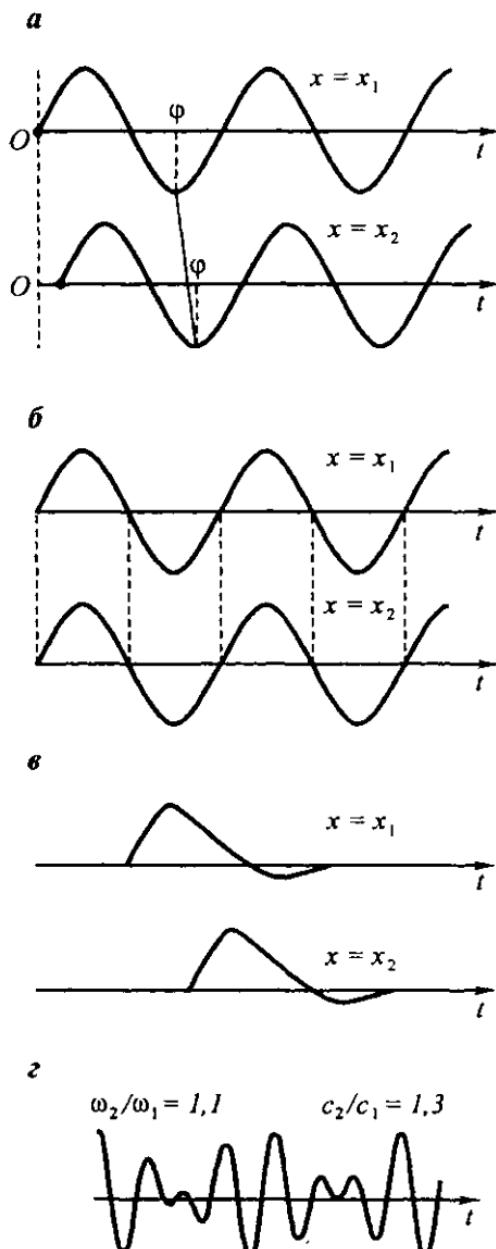
В частности, когда фазовая скорость стремится к бесконечности, вместо волны наблюдаются синхронные вибрации (рис. 7.1, *б*).

Предположим сначала, что фазовая скорость волны не зависит от частоты. Поскольку произвольная волна представляет собой суперпозицию элементарных волн (интеграл Фурье), можно сказать, что *c* характеризует скорость распространения такой волны вдоль оси *x* (рис. 7.1, *в*). Это означает, что *c* описывает также скорость переноса энергии. Таким образом, в рассматриваемом случае форма волны не зависит от расстояния *x*.

Если же, в отличие от предыдущего случая, предположить, что скорость $c(\omega)$ является функцией частоты, то возникает дисперсия, и поведение нестационарных волн станет гораздо более сложным. Чтобы исследовать основные свойства такой волны, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Две синусоидальные волны

Пусть волна является суперпозицией двух синусоидальных волн бесконечной протяженности, имеющих одинаковые амплитуды и мало различающиеся фазовые скорости и волновые числа:



$$s(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - c_1 t) - \alpha_1 \right] + A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_2} (x - c_2 t) - \alpha_2 \right]. \quad (7.3)$$

Здесь α_1 и α_2 обозначают начальные фазы, и

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{d\lambda}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda + \frac{d\lambda}{2}, \quad (7.4)$$

$$c_1 = c - \frac{dc}{2}, \quad c_2 = c + \frac{dc}{2},$$

причем

$$dc/c \ll 1, \quad d\lambda/\lambda \ll 1. \quad (7.5)$$

Таким образом,

$$s(x, t) = 2A \cos \left[\pi \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) x - \left(\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t \right\} - \Phi_1 \right] \times \\ \times \cos \left[\pi \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) x - \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t \right\} - \Phi_2 \right], \quad (7.6)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

Используя разложение Маклорена, получим следующие приближенные выражения:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda \left(1 - \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)} \approx \frac{1}{\lambda} + \frac{d\lambda}{2\lambda^2}, \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)} \approx \frac{1}{\lambda} - \frac{d\lambda}{2\lambda^2}$$

и

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{2}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Аналогичным образом получим

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c \left(1 - dc/2c \right)}{\lambda \left(1 - d\lambda/2\lambda \right)} \approx \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{dc}{2c} + \frac{d\lambda}{2\lambda} \right),$$

$$\frac{c_2}{\lambda_2} = \frac{c \left(1 + dc/2c \right)}{\lambda \left(1 + d\lambda/2\lambda \right)} \approx \frac{c}{\lambda} \left(1 + \frac{dc}{2c} - \frac{d\lambda}{2\lambda} \right)$$

и

$$\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \approx 2 \frac{c}{\lambda},$$

$$\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \approx \frac{dc}{\lambda} + \frac{cd\lambda}{\lambda^2} = \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left(c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \right).$$

Таким образом, выражение (7.6) можно в приближенном виде представить как

$$s(x, t) = 2A \cos \left[\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) - \varphi_2 \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1 \right], \quad (7.7)$$

где

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (7.8)$$

Здесь dc и $d\lambda$ – малые приращения соответственно c и λ .

Помимо этого, заметим следующее:

а) значения фаз φ_1 и φ_2 зависят от выбора начальной точки $x = 0$ и начального момента времени;

б) в главе 2 рассматривалась суперпозиция двух синусоидальных колебаний с близкими частотами и одинаковыми амплитудами, причем каждое из этих колебаний описывало вибрации, что позволило нам изучить эффект биения.

Согласно формуле (7.7), функция $s(x, t)$ представима в виде произведения двух синусоид, описывающих волны с совершенно разными длинами волн. Одной из этих волн является

$$2A \cos \left[\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) - \varphi_2 \right], \quad (7.9)$$

длина волны которой равняется

$$\lambda_g = \frac{2\lambda^2}{d\lambda} = 2\lambda \frac{\lambda}{d\lambda}. \quad (7.10)$$

Вторая волна

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1 \right] \quad (7.11)$$

имеет длину волны, равную λ .

Волна $s(x, t)$ не является периодической функцией ни по времени, ни по расстоянию, и, как видно из рис. 7.1, 2 – 7.2, а, б, в, форма этой волны меняется по мере распространения волны вдоль оси x .

Учитывая, что

$$\lambda_g \gg \lambda, \quad (7.12)$$

данную волну можно рассматривать как “синусоидальную” волну с длиной волны λ и медленно меняющейся амплитудой

$$A_g = 2A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_g} (x - c_g t) - \varphi_2 \right]. \quad (7.13)$$

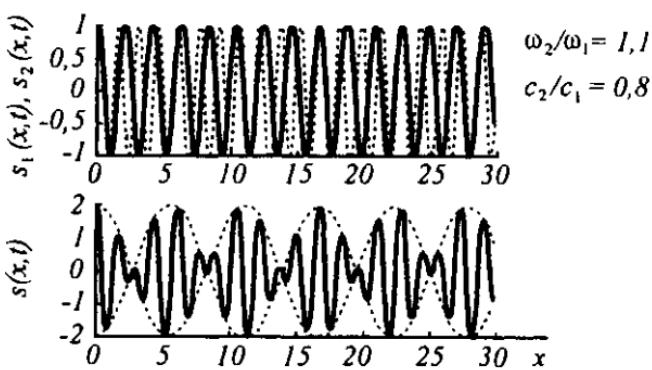
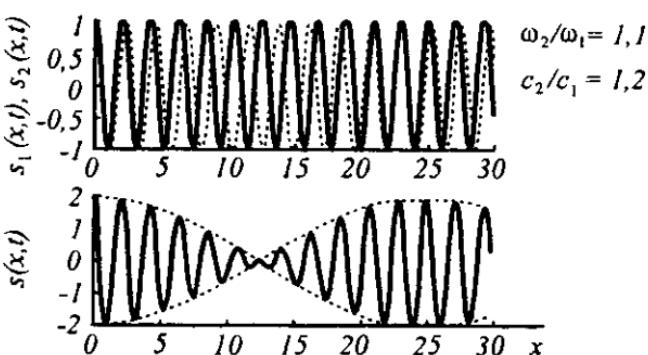
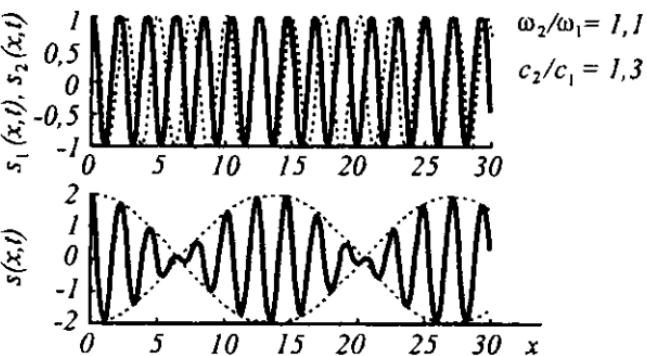
a**б****в**

Рис. 7.2. Суперпозиция двух синусоидальных волн

Другими словами, длина волны и скорость результирующей волны практически совпадают с длинами волн и скоростями исходных волн, однако ее амплитуда модулируется множителем

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_g} (x - c_g t) - \varphi_2 \right].$$

Рассмотрим поведение данной волны как функции времени и расстояния. Вначале зафиксируем точку наблюдения x и выберем такой момент времени, когда фазы обеих синусоидальных волн в выражении (7.3) равны друг другу:

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - c_1 t) - \alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - c_2 t) - \alpha_2.$$

Отсюда

$$2\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) x = 2\pi \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) t + \alpha_1 - \alpha_2$$

или

$$2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} x = 2\pi \frac{c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1}{\lambda_2} t + 2\varphi_2. \quad (7.14)$$

Из равенства (7.4) следует, что

$$2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} x = \frac{d\lambda}{\lambda^2} 2\pi \left(c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \right) t + 2\varphi_2.$$

Далее, учитывая равенство (7.8), имеем

$$\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) = \varphi_2. \quad (7.15)$$

Подставляя последнее выражение в (7.13) и учитывая (7.10), мы видим, что, когда фазы обеих синусоидальных волн одинаковы, функция $A_g(x, t)$ достигает своего максимального значения

$$A_g = 2A. \quad (7.16)$$

Этот же результат следует непосредственно из выражения (7.3).

Тем не менее, амплитуда волны $s(x, t)$ зависит также от значения фазы

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \varphi_1.$$

Например, если фаза равняется

$$(2n+1) \frac{\pi}{2},$$

то значение функции $s(x, t)$ равно нулю. В отличие от этого случая, при

$$\tau = \pi n$$

значения функций $s(x, t)$ и $A_g(x, t)$ могут отличаться только знаком.

Очевидно, что функция A_g достигает своего минимального значения $-2A$ в такой момент t , когда разность фаз синусоидальных волн равняется 2π .

Рассмотрим момент времени

$$t_1 = t + \Delta t,$$

где

$$\Delta t \ll t.$$

Поскольку рассматриваемые синусоиды имеют различные длины волн и фазовые скорости, их фазы

$$\tau_1(x, t_1) = \frac{2\pi}{\lambda_1}(x - c_1 t_1) - \alpha_1$$

и

$$\tau_2(x, t_1) = \frac{2\pi}{\lambda_2}(x - c_2 t_1) - \alpha_2$$

не равны друг другу даже в том случае, когда их разность очень мала.

Соответственно, условие (7.15) не удовлетворяется и поэтому

$$A_g < 2A.$$

С увеличением времени, разность фаз

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$$

также увеличивается, однако, как видно из неравенства (7.5), это изменение происходит очень медленно. Например, если $\Delta t = \lambda/c$, т.е. интервал времени практически равен периоду синусоидальных волн T , то

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\lambda_1} \left[x - c_1 \left(t + \frac{\lambda}{c} \right) - \alpha_1 \right] - \frac{2\pi}{\lambda_2} \left[x - c_2 \left(t + \frac{\lambda}{c} \right) - \alpha_2 \right]$$

или

$$\Delta\tau = \frac{2\pi\lambda}{c} \left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \frac{c_2}{\lambda_2} \right) = 2\pi \left(\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{dc}{c} \right) \ll 1,$$

поскольку в момент времени t фазы равны между собой.

Последнее означает, что при достаточно большом интервале времени, значительно превосходящем период T , функция A_g лишь незначительно отличается от $2A$. Другими словами, в этом случае суперпозиция двух синусоидальных волн (7.3) приводит к увеличению "амплитуды" A_g , и волна ω ведет себя как единичная синусоидальная волна с почти постоянной амплитудой, равной $2A$. В дальнейшем разность фаз $\Delta\tau$ увеличивается, и суперпозиция волн приводит к уменьшению значения функции A_g . В частности, если $\Delta\tau = \pi$, то амплитуда волны $s(x, t)$ равняется нулю, т.е. синусоидальные волны взаимно гасят друг друга. Очевидно, что существует такой интервал времени $t \gg T$, для которого функция A_g принимает достаточно малые значения.

Как следует из формулы (7.13), рассматриваемый процесс конструктивной и деструктивной интерференции носит периодический характер.

Период функции A_g определяется из равенства

$$\frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} (x - c_g t) - \frac{\pi d\lambda}{\lambda^2} [x - c_g (t + T_g)] = 2\pi.$$

Отсюда

$$T_g = \frac{2\lambda^2}{c_g d\lambda} \quad \text{и} \quad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g}. \quad (7.17)$$

Точно так же можно изучить поведение A_g как функции расстояния x . Итак, мы видим, что интерференция приводит к формированию волновых групп. Их поведение описывается функцией A_g , которая графически представляет собой огибающую волны $s(x, t)$.

Конечно, в пределах каждой волновой группы значения волновой функции $s(x, t)$ изменяются, однако период колебаний практически постоянный и равняется T (рис. 7.2, в).

Согласно формуле (7.10), длина волны группы определяется как

$$\lambda_g = \frac{2\lambda^2}{d\lambda} = \lambda \frac{2\lambda}{d\lambda} \gg \lambda. \quad (7.18)$$

Сравнивая равенства (7.17) и (7.18), получим

$$\lambda_g = c_g T_g, \quad (7.19)$$

т.е. c_g характеризует скорость, с которой произвольное значение группы (значение функции A_g) перемещается вдоль оси x . Поэтому c_g называется групповой скоростью.

Как упоминалось ранее, форма волны $s(x, t)$ изменяется с увеличением как координаты x , так и времени t (см. рис. 7.1, 7.2).

Отметим еще одно интересное свойство волновой группы. Если сравнить значения функции $s(x, t)$ для различных расстояний и времен, то можно найти такие интервалы x и t , для которых $s(x, t)$ принимает одни и те же значения. В соответствии с формулой (7.7), а также с учетом того, что

$$T_g > T,$$

эти интервалы определяются из равенств

$$x_2 - c_g t_2 = x_1 - c_g t_1 \quad \text{и} \quad x_2 - c t_2 = x_1 - c t_1 + \lambda$$

или

$$\Delta x = c_g \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta x = c \Delta t + \lambda.$$

Таким образом, интервал времени, для которого амплитуда волны принимает одинаковое значение в различных точках x_1 и x_2 , определяется как

$$\Delta t = \frac{\lambda}{|c_g - c|},$$

а расстояние между этими двумя точками

$$\Delta x = \frac{\lambda c_g}{|c_g - c|}. \quad (7.20)$$

Итак, мы определили групповую скорость c_g как скорость распространения произвольного значения функции A_g вдоль оси x . В частности, если фаза волны

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \Phi_1$$

равняется πn , то

$$|s(x, t)| = |A_g(x, t)|.$$

Естественно, что энергия волны аккумулируется в основном в тех точках, где функция $|s(x, t)|$ достигает своего максимального значения. Поэтому можно ожидать, что групповая скорость характеризует также скорость распространения энергии.

Проанализируем далее поведение групповой скорости, задаваемой формулой (7.8).

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

Очевидно, что если фазовая скорость увеличивается с увеличением длины волны, т.е. $dc/d\lambda > 0$, то групповая скорость меньше фазовой.

Если фазовая скорость не зависит от λ , то групповая и фазовая скорости равны друг другу:

$$c_g = c.$$

Наконец, если фазовая скорость уменьшается с увеличением длины волны, то

$$c_g > c.$$

Часто бывает удобным представить групповую скорость (7.8) в другой форме. Например, заменяя λ на $2\pi/k$, получим

$$\lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{1}{k} \frac{dc}{d(1/k)} = -k \frac{dc}{dk},$$

так как

$$d \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} dk.$$

Отсюда

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk} = \frac{\partial}{\partial k} (ck). \quad (7.21)$$

Учитывая, что

$$ck = c \frac{2\pi}{\lambda} = c \frac{2\pi}{cT} = \omega,$$

имеем

$$c_g = d\omega/dk, \quad (7.22)$$

и зависимость групповой скорости c_g от частоты определяется функцией $\omega = \omega(k)$. Гипотетический пример такой функции показан на рис. 7.3, а. По определению, наклон этой кривой характеризует групповую скорость $d\omega/dk$, а наклон радиус-вектора ω/k равняется фазовой скорости.

Приведенные ниже равенства описывают способ представления групповой скорости, получающейся, если в формуле (7.8) заменить длину волны λ на c/f . Это дает

$$c_g = c - \frac{c}{f} \frac{dc}{d(c/f)} = c - cf \frac{dc}{f dc - cd f} = c - cf \frac{1}{f - cd f/dc} = -\frac{c^2 df/dc}{f - cd f/dc}$$

или

$$\frac{1}{c_g} = \frac{f - cd f/dc}{-c^2 df/dc} = \frac{1}{c} - \frac{f}{c^2} \frac{dc}{df}. \quad (7.23)$$

Предположим, что в некоторой точке x известны кривая $s(x, t)$, а также фазовая скорость волны. Тогда период T и длина волны $\lambda = cT$ определяются

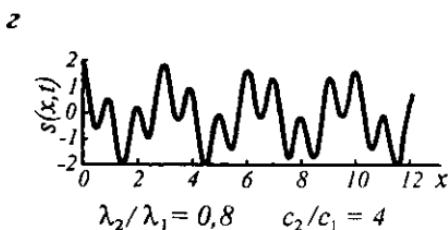
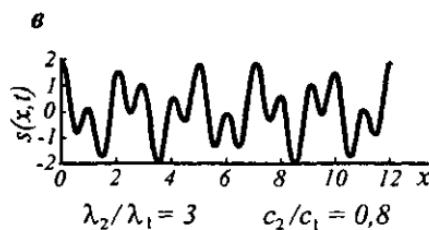
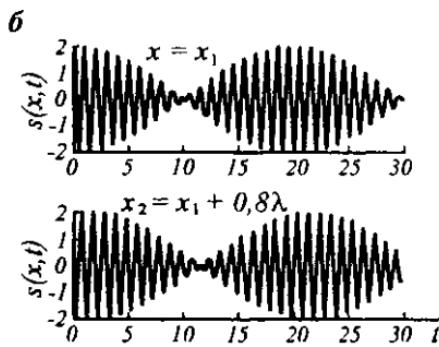
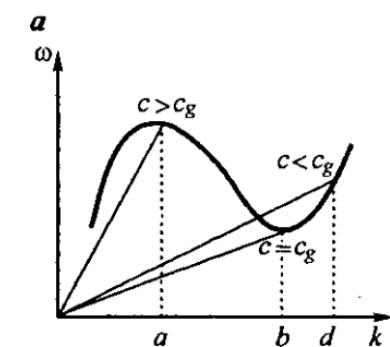


Рис. 7.3. Геометрическая иллюстрация фазовой и групповой скорости (а); иллюстрация формулы (7.24) (б); суперпозиции двух синусоидальных волн (в, г)

непосредственно из наблюдений. Кроме того, можно также определить период волновой группы. Для этого нужно измерить интервал времени между двумя максимумами огибающей волны, который и будет равняться T_g . Однако этой информации недостаточно для вычисления групповой скорости. То же самое относится и к случаю, когда в некоторый момент времени $t = t_0$ известна зависимость формы сигнала от расстояния. В то же время, если волна наблюдается на двух расстояниях x_1 и x_2 , то можно легко определить как фазовую, так и групповую скорости, а также другие параметры волновой группы и синусоидальных волн. Пусть, например,

$$c = \Delta x / \Delta t_1 \text{ и } c_g = \Delta x / \Delta t_2, \quad (7.24)$$

где

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ и } \lambda > \Delta x,$$

а Δt_1 и Δt_2 – это интервалы времени между, соответственно, одинаковыми фазами синусоидальной волны и одинаковыми значениями группы A_g (рис. 7.3, б). Если последнее условие, $\lambda > \Delta x$, выполнено, то в точках x_1 и x_2 наблюдается одна и та же фаза.

Мы предполагали, что амплитуды обеих синусоидальных волн одинаковы, а их длины волн и фазовые скорости мало отличаются друг от друга. Данные условия являются чрезвычайно важными для формирования волновой группы. Как следует из выражения (7.6), с увеличением разностей $\Delta \lambda$ и Δc волновая группа исчезает (рис. 7.3, в, г). Если же амплитуды синусоидальных волн A_1 и A_2 различаются, но $\lambda_1 \approx \lambda_2$ и $c_1 \approx c_2$, то суперпозицию таких волн можно представить как сумму волновой группы и синусоидальной волны с амплитудой $A_1 - A_2$. Последовательности похожих волновых групп наблюдаются во всех приводимых здесь примерах. Это происходит из-за того, что рассматривается суперпозиция только двух синусоидальных волн.

Пример 2: несколько синусоидальных волн

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда в среде присутствует конечное число синусоидальных волн:

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos[k_i(x - c_i t) - \alpha_i], \quad (7.25)$$

где разность между амплитудами A_i , а также фазовыми скоростями c_i и волновыми числами k_i мала.

Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_1$ фазы этих волн совпадают в некоторой точке $x = x_1$, т.е.

$$k_i(x_1 - c_i t_1) - \alpha_i = k_j(x_1 - c_j t_1) - \alpha_j. \quad (7.26)$$

Это означает, что суперпозиция этих волн является конструктивной. Другими словами, если мы снова заменим систему синусоидальных волн функцией

$$s(x, t) = A_g(x, t) \cos[k(x - ct) - \alpha],$$

то "амплитуда" A_g достигнет своего максимального значения, равного

$$A_g \sum_{i=1}^n A_i.$$

Предположим, что тот же эффект наблюдается на расстоянии $x_2 = x_1 + \Delta x$ в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$. Соответственно, фазы синусоидальных волн снова должны совпасть, т.е.

$$k_i(x_2 - c_i t_2) - \alpha_i = k_j(x_2 - c_j t_2) - \alpha_j \quad (7.27)$$

Из равенств (7.26) – (7.27) получим

$$k_i \Delta x - k_i c_i \Delta t = k_j \Delta x - k_j c_j \Delta t$$

или

$$(k_i - k_j) \Delta x = (k_i c_i - k_j c_j) \Delta t. \quad (7.28)$$

Поскольку

$$k_i - k_j = \Delta k \text{ и } k_i c_i - k_j c_j = \Delta(kc), \quad (7.29)$$

мы снова приходим к известному выражению для групповой скорости

$$c_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta(kc)}{\Delta k} \rightarrow \frac{dc}{dk}, \text{ если } \Delta k \rightarrow 0.$$

Таким образом, система, состоящая из n синусоидальных волн с близкими значениями k и c , образует волновую группу, которая описывается некоторой функцией $A_g(x, t, c_g)$ и распространяется со скоростью c_g .

Пример 3: нестационарные волны

Рассмотрим поведение бегущей волны, имеющей узкий частотный спектр. Учитывая, что в этом случае волновое число $k = \omega/c$ также будет изменяться очень мало:

$$k_0 - \epsilon < k < k_0 + \epsilon$$

и

$$\epsilon/k_0 \ll 1,$$

волну $s(x, t)$ можно представить как

$$s(x, t) = \operatorname{Re} S(x, t),$$

где

$$S(x, t) = \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k e^{i[k(x - ct) - \alpha_k]} dk. \quad (7.30)$$

Как и ранее, мы будем предполагать, что при изменении k амплитуда A_k и скорость $c(k)$ меняются очень медленно.

Разложение произведения kc , т.е. круговой частоты $\omega(k)$ в ряд Тейлора дает

$$kc = k_0 c_0 + \frac{\partial(kc)}{\partial k} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(kc)}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \dots,$$

где производные берутся при $k = k_0$ и $c = c(k_0)$.

Пренебрегая членами второго и более высоких порядков по $(k - k_0)$, экспоненциальный член в (7.30) можно записать как

$$e^{i(k(x-ct)-\alpha_k)} = e^{-ik_0 c_0} e^{ik_0 \frac{\partial(kc)}{\partial k}} e^{i(k(x-c_g t) - \frac{\partial(kc)}{\partial k} k_t)}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial(kc)}{\partial k} = k_0 \frac{\partial c}{\partial k} + c_0,$$

имеем

$$e^{ik_0 \frac{\partial(kc)}{\partial k}} = e^{ik_0^2 \frac{\partial c}{\partial k}} e^{-ik_0 c_0}.$$

Соответственно,

$$S(x, t) = e^{ik_0^2 \frac{\partial c}{\partial k}} \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k e^{i(k(x - c_g t) - \alpha_k)} dk, \quad (7.31)$$

где

$$c_g = \frac{\partial(kc)}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \text{ если } k = k_0,$$

является групповой скоростью.

Таким образом, волну можно представить как

$$s(x, t) = \cos\left(k_0^2 t \frac{\partial c}{\partial k}\right) \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k \cos[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk - \\ - \sin\left(k_0^2 t \frac{\partial c}{\partial k}\right) \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k \sin[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk.$$

Независимо от выбора переменных интегрирования, оба интеграла описывают синусоидальные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью c_g . Поэтому данные интегралы представляют собой нестационарные волны, сохраняющие свою форму вдоль оси x .

Вводя обозначения

$$f_1(x - c_g t) = \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k \cos[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk$$

и

$$f_2(x - c_g t) = \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A_k \sin[k(x - c_g t) - \alpha_k] dk,$$

получим

$$s(x, t) = f_1(x - c_g t) \cos[k_0(c_g - c_0)t] - f_2(x - c_g t) \sin[k_0(c_g - c_0)t], \quad (7.32)$$

так как

$$c_g - c_0 = k_0 \frac{dc}{dk}.$$

Следовательно, как и в предыдущем примере, суперпозиция синусоидальных волн приводит к формированию волновой группы, распространяющейся со скоростью c_g , при условии, что волновые числа и фазовые скорости этих волн мало отличаются друг от друга.

Из выражения (7.32) следует, что амплитуда волны в точках x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 имеет одно и то же значение

$$s(x_1, t_1) = s(x_2, t_2),$$

если

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{k_0 |c_g - c_0|}$$

и

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi c_g}{k_0 |c_g - c_0|}.$$

При выводе формулы (7.32) мы сохранили только первые два члена ряда Тейлора. Поэтому групповая скорость c_g не зависит от волнового числа и равняется

$$c_g = \frac{\partial(kc)}{\partial k} = c_g(k_0).$$

Согласно (7.8), это выражение справедливо, если групповая скорость является линейной функцией длины волны:

$$c = a + b\lambda.$$

В общем случае, когда фазовая скорость является произвольной функцией λ ,

приближение (7.32) будет достаточно точным при условии, что сумма членов ряда Тейлора

$$t \left(\frac{1}{2} \frac{dc}{dk} \epsilon^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 c}{dk^2} \epsilon^3 + \dots \right)$$

очень мала.

Это, в частности, означает, что, чем больше значение времени t , тем меньше должен быть диапазон изменения волнового числа k . Действительно, с увеличением времени, форма волны разделяется на две небольшие группы с более узким диапазоном k , и выражение (7.32) можно применить к каждой из этих групп. Конечно, такие же эффекты наблюдаются во втором примере, когда нестационарная волна формируется из конечного числа синусоидальных волн.

Здесь необходимо заметить следующее:

а) до сих пор мы рассматривали суперпозицию синусоидальных волн с очень близкими частотами и волновыми числами;

б) по этой причине суперпозиция таких волн приближенно описывается единственной волновой группой, скорость распространения которой равняется c_g ;

в) в следующем разделе мы рассмотрим более общий случай очень широкого диапазона изменения частот и волновых чисел;

г) суперпозиция таких волн приводит к форме волны, в которой практически невозможно различить отдельную группу с фиксированной скоростью;

д) однако и в этом случае понятие групповой скорости играет важную роль.

7.2. СУПЕРПОЗИЦИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

В предыдущем разделе мы рассмотрели распространение волн, образованных синусоидальными волнами с почти одинаковыми значениями волнового числа k и фазовой скорости c .

В отличие от предыдущего случая, здесь мы будем предполагать, что оба параметра могут изменяться произвольным образом. Однако перед тем как приступить к изучению таких волн, полезно еще раз обратиться к простейшему случаю двух синусоидальных волн, имеющих одинаковые амплитуды и близкие значения параметров k и c . Предположим снова, что волна $s(x, t)$ представляется в виде

$$s(x, t) = A_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]. \quad (7.33)$$

Здесь

$$k_1 = k_0 - \Delta k/2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2$$

и

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta \omega/2, \quad \omega_2 = \omega_0 + \Delta \omega/2.$$

Суммируя, получим

$$s(x, t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

или

$$s(x, t) = 2A \cos(k_0 x - \omega_0 t), \quad (7.34)$$

где

$$A = 2A_0 \cos \frac{\Delta k}{2} (x - c_g t) \quad (7.35)$$

является амплитудой волновой группы, а

$$c_g = \Delta \omega / \Delta k \quad (7.36)$$

определяет ее скорость.

Как мы уже знаем, если фазы синусоидальных волн равны друг другу:

$$k_1 x - \omega_1 t = k_2 x - \omega_2 t, \quad (7.37)$$

то амплитуда A имеет максимальное значение, равное $2A_0$. Действительно, из равенства (7.37) имеем

$$x \Delta k = t \Delta \omega$$

или

$$x = c_g t, \quad (7.38)$$

и подстановка этого выражения в формулу (7.35) дает

$$A = 2A_0.$$

Таким образом, максимальное значение групповой амплитуды наблюдается только при таких значениях расстояния и времени, когда фазы волн равны друг другу. Другими словами, несмотря на то, что волновые числа и фазы волн почти одинаковы, их фазы совпадают только на определенных расстояниях и в определенные моменты времени. В этом случае эффект конструктивной интерференции максимальен.

При увеличении разности фаз групповая амплитуда A уменьшается и, в конце концов, когда фазы различаются на π , синусоидальные волны взаимно гасят друг друга: $A = 0$.

Предположим, что амплитуда A равна некоторой постоянной C при $x = x_1$ и $t = t_1$. Тогда, согласно (7.35), то же значение амплитуды будет наблюдаться для другой пары значений: x_2 и t_2 , если будет выполнено следующее условие

$$x_1 - c_g t_1 = x_2 - c_g t_2.$$

Следовательно, имеется два соотношения, связывающих групповую скорость c_g , с одной стороны, и расстояние и время – с другой:

$$x = c_g t \text{ и } \Delta x = c_g \Delta t. \quad (7.39)$$

Первое из этих соотношений описывает, как распространяется максимум групповой амплитуды, а второе характеризует перенос произвольного значения A .

Как следует из выражения (7.34), равенство фаз функции $s(x, t)$ приводит к следующему соотношению:

$$c = \Delta x / \Delta t,$$

которое совпадает со вторым равенством (7.39).

Однако в одном случае Δx является расстоянием между точками с одинаковой амплитудой, а в другом – расстоянием между точками с одинаковой фазой.

Следует отметить, что выражение (7.38) часто используют для оценки групповой скорости произвольной волны.

Приступим теперь к обсуждению общего случая нестационарной волны, при рассмотрении которого естественно использовать интегралы Фурье.

Представим произвольную волну, распространяющуюся вдоль оси x , как сумму синусоидальных волн с различными волновыми числами k . Тогда произвольную функцию, описывающую волну (например, смещение) в точке x и в момент времени t можно представить как (см. приложение 7)

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, t) e^{-ikx} dk, \quad (7.40)$$

где

$$g(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (7.41)$$

В то же время в главе 3 было показано, что если волна ведет себя как синусоидальная функция координаты x , то она должна быть также синусоидальной функцией времени. В противном случае функция $s(x, t)$ не будет удовлетворять волновому уравнению.

Соответственно, для функции g имеем

$$g(k, t) = S_1 e^{i\omega t} + S_2 e^{-i\omega t}. \quad (7.42)$$

Подстановка последнего равенства в (7.40) дает

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t), \quad (7.43)$$

где

$$s_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(k) e^{-i(kx-\omega t)} dk \quad (7.44)$$

$$s_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(k) e^{-i(kx+\omega t)} dk.$$

Очевидно, что подынтегральные выражения, стоящие в первом и втором интеграле (7.44), описывают волны, бегущие в противоположных направлениях. В то же время функции $S_1(k)$ и $S_2(k)$ являются комплексными амплитудами этих волн, содержащими информацию об их амплитудах и начальных фазах. Следует заметить, что в общем случае частота ω является произвольной функцией волнового числа: $\omega = \omega(k)$.

Согласно определению (7.44), имеем

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x, t) e^{-ik(x-ct)} dx \quad (7.45)$$

и

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x, t) e^{-ik(x+ct)} dx.$$

Это, в частности, показывает, что разложение произвольной волны на синусоидальные волны с различными волновыми числами k требует рассмотрения поведения волн как для положительных, так и для отрицательных значений x .

Для иллюстрации физического смысла выражений (7.44) предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ источник вызывает смещение, описываемое функцией $f(x)$, т.е.

$$s(x, 0) = f(x).$$

Помимо этого, предположим, что скорость частиц в этот момент равняется нулю. Таким образом, вводятся следующие начальные условия:

$$s(x, 0) = f(x) \text{ и } \frac{ds(x, 0)}{dt} = 0. \quad (7.46)$$

Очевидно, что задание волны в некоторый момент времени $t = 0$ определяет ее поведение во все последующие моменты.

Снова применяя интеграл Фурье, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk \quad (7.47)$$

и

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx,$$

где функция $F(k)$ описывает амплитуду и фазу синусоидальных волн в момент времени $t = 0$.

Функцию $f(x)$ удобно представить в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x-ct)} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x+ct)} dk. \quad (7.48)$$

Последнее выражение описывает смещение $s(x, t)$ в момент времени $t = 0$ как суперпозицию волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

С увеличением времени амплитуда и начальная фаза каждой из синусоидальных волн остается постоянной, а полная фаза меняется из-за присутствия члена e^{-ikx} . Поэтому формула (7.48) характеризует волну в произвольный момент времени $t > 0$, и мы получаем

$$s(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x-ct)} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x+ct)} dk. \quad (7.49)$$

Легко показать, что функция, определяемая выражением (7.49), удовлетворяет начальным условиям (7.56). Действительно,

$$s(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk = f(x)$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ikc}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk - \frac{ikc}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk = 0.$$

Рассмотрим теперь специальный случай, когда смещение $f(x)$ в начальный момент времени является симметричной функцией от x :

$$f(x) = f(-x).$$

Тогда ее спектр можно записать как

$$F(k) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (7.50)$$

и он также является симметричной функцией, но только от волнового числа k .

Учитывая этот результат, выражение (7.49) можно представить в виде

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos k(x-ct) dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos k(x+ct) dk$$

или

$$s(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos kx \cos(kct) dk.$$

Подынтегральное выражение описывает стоячую волну, и это не удивительно, так как суперпозиция двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях и имеющих одинаковые амплитуды и волновые числа, всегда приводит к появлению стоячей волны.

Для изучения интерференции синусоидальных волн с различными волновыми числами, воспользуемся выражениями (7.51) в предположении, что функция $f(x, 0)$ является четной, а ее спектр $F(k)$ постоянен и равняется, например, единице. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение смещения $s(x, 0)$ описывается функцией

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & x \leq -\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 0 & x \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (7.52)$$

т.е. смещение имеет некоторое постоянное ненулевое значение на интервале

$$-\varepsilon < x < \varepsilon,$$

а вне этого интервала равняется нулю. Тогда из равенств (7.47) получаем

$$F(k) = 2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} e^{ikx} dx = \frac{1}{2i\varepsilon k} (e^{ik\varepsilon} - e^{-ik\varepsilon}) = \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon}.$$

Считая, что ширина импульса $f(x, 0)$ стремится к нулю, а его амплитуда неограниченно возрастает, в пределе получим дельта-функцию и, соответственно,

$$F(k) = 1.$$

Согласно (7.51), волну, вызванную такой силой, можно представить как

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x - ct) dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x + ct) dk,$$

где предполагается, что фазовая скорость c является однозначной действительной функцией волнового числа и $c > 0$.

Выражение (7.53) показывает, что смещение $s(x, t)$ является суммой двух похожих интегралов, описывающих волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Остановимся поэтому на первом интеграле:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x - ct) dk, \quad (7.54)$$

который описывает суперпозицию бесконечного числа синусоидальных волн единичной амплитуды со всеми возможными значениями волнового числа и, в общем случае, с различными фазовыми скоростями.

Прежде чем вычислять интеграл I , полезно сначала качественно рассмотреть интерференцию таких волн. Для этого воспользуемся выражением (7.53).

В момент времени $t = 0$ фазы волн одинаковы и равны нулю в точке начала координат $x = 0$. Следовательно, эти волны усиливают друг друга, образуя в окрестности источника дельта-функцию. Однако во всех других точках, где $x \neq 0$, разность фаз такова, что в силу интерференции эти волны полностью гасят друг друга. Соответственно, смещение всюду, за исключением точки $x = 0$, обращается в ноль.

Этот пример ясно показывает, что в данном случае результат суперпозиции синусоидальных волн определяется только их разностью фаз. Если фазовая скорость не зависит от волнового числа, дельта-функция (а также любая другая функция) распространяется вдоль оси z , не меняя своей формы. И согласно (7.53), она наблюдается во всех точках x , когда фазы всех синусоидальных волн равны нулю:

$$k(x - ct) = 0,$$

т.е. они совпадают друг с другом.

В те же моменты времени в других точках, включая точку $x = 0$, фазы различаются между собой и сумма интегралов в (7.53) становится равной нулю.

В общем случае, когда фазовая скорость является функцией волнового числа, поведение волн становится гораздо более сложным, в частности, форма волны меняется в зависимости от времени и расстояния. Это связано с тем, что синусоидальные волны обладают разными фазовыми скоростями и разность фаз между ними зависит от времени и расстояния, а также от волнового числа. Если в окрестности некоторой точки x в момент времени t имеются синусоидальные волны с близкими значениями k , то можно ожидать проявления конструктивной интерференции. Конечно, чем шире диапазон волновых чисел, для которых фаза волны остается практически постоянной, тем больше амплитуда данной группы.

И, наоборот, в местах, где фаза заметно изменяется, наблюдается деструктивная интерференция и амплитуда волны достаточно мала.

Чтобы изучить поведение волн более подробно, получим, прежде всего, соотношение, связывающее расстояние x и время t , с одной стороны, и волновое число синусоидальных волн, имеющих практически одинаковую фазу – с другой. Очевидно, что, если в пределах некоторого диапазона волновых чисел, фаза волны $\phi(k)$ практически не зависит от k , это можно выразить как

$$\frac{\partial \phi(k)}{\partial k} = 0. \quad (7.55)$$

Фаза, удовлетворяющая данному условию для некоторого значения волнового числа k_0 , называется стационарной.

Поскольку

$$\phi(k) = k(x - ct),$$

уравнение (7.55) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial k} [k(x - ct)] = x - \frac{\partial}{\partial k} (kc)t = 0 \quad (7.56)$$

или

$$x = t c_g(k_0). \quad (7.57)$$

Здесь c_g – групповая скорость, соответствующая стационарным значениям волнового числа k_0 .

Согласно (7.57), групповая скорость равняется просто отношению расстояния x ко времени t . Этот результат очень важен, поскольку он используется при выводе приближенных выражений для множества интегралов, включая те, которые описывают интерференцию синусоидальных волн. Помимо этого, как было отмечено ранее, данный результат позволяет оценить групповую скорость произвольной волны, наблюдавшейся в разные моменты времени на различных расстояниях.

Далее мы обратимся к первому из упомянутых приложений этой формулы и предположим, что функция $c_g(k)$ известна. Примеры, иллюстрирующие ее поведение, показаны на рис. 7.4, *a*, *б*, *в*.

Из соотношения (7.57) следует, что каждой паре x и t соответствует одно значение групповой скорости c_g . Зная значения функции $c_g(k)$, можно определить волновое число k_0 . Эта процедура показана на рис. 7.4, из которого видно, что целесообразно различать следующие три случая.

А. Каждому значению групповой скорости c_g соответствует только одно значение волнового числа k_0 (рис. 7.4, *а*, *б*).

Б. Существует несколько значений k_0 (рис. 7.4, *в*).

В. Предположим, что отношение x/t лежит за пределами диапазона зна-

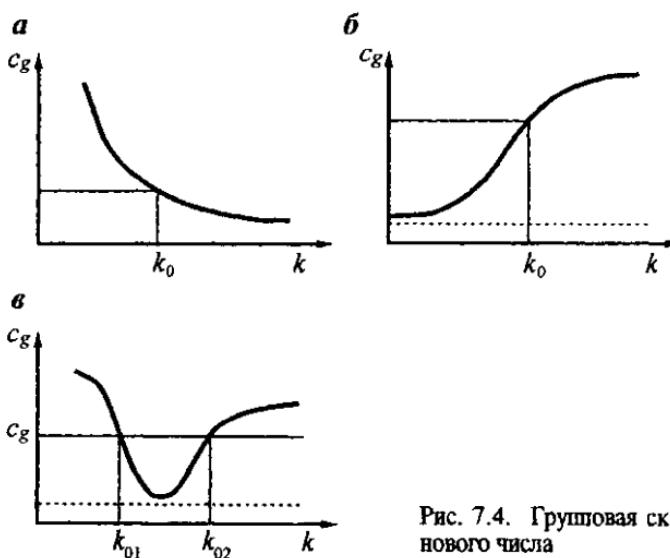


Рис. 7.4. Групповая скорость как функция волнового числа

чений функции $c_s(k)$. Это означает, что для данных значений x и t фазы синусоидальных волн не являются близкими.

Зафиксируем координату x и посмотрим, как меняется форма волны со временем. Из соотношения (7.57) следует, что с течением времени групповая скорость c_s и, следовательно, волновое число также изменяются. Таким образом, в каждый момент времени форма волны характеризуется некоторым значением волнового числа k_0 , и волновую функцию можно представить как

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0(t)t - k_0(t)x], \quad (7.58)$$

где

$$k_0(t) = \frac{\omega_0(t)}{c(\omega_0)}.$$

Стоящие в этом выражении величины называются мгновенной частотой и мгновенным волновым числом.

Существенно, что фазы синусоидальных волн с волновыми числами, близкими к k_0 , изменяются очень медленно и суперпозиция таких волн приближенно равняется $s(t)$.

Учитывая, что волновые числа указанной группы принадлежат относительно узкому диапазону

$$k_0 - \epsilon < k < k_0 + \epsilon, \quad (7.59)$$

следует предположить, что фазу $\phi(k)$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться в нем первыми тремя членами. В этом случае

$$\begin{aligned} k(x - ct) &= k_0(x - c_0 t) + (k - k_0) \frac{\partial}{\partial k} [k(x - ct)] + \\ &+ \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k(x - ct)] + \dots, \end{aligned} \quad (7.60)$$

где производные берутся в точке

$$k = k_0 \text{ и } c_0 = c(k_0).$$

Из равенства (7.56) следует, что второй член этого разложения обращается в ноль, и мы имеем

$$k(x - ct) = k_0(x - c_0 t) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [k(x - ct)]$$

или

$$k(x - ct) = k_0(x - c_0 t) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\partial c_s}{\partial k} t, \quad (7.61)$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial k} [k(x - ct)] = x - c_g t$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} [k(x - ct)] = -t \frac{\partial c_g}{\partial k},$$

где $\partial c_g / \partial k$ – производная групповой скорости при $k = k_0$.

Предполагая, что в силу высокочастотных осцилляций интегрирование за пределами интервала $k_0 - \epsilon < k < k_0 + \epsilon$ дает очень малый вклад, и, подставляя (7.61) в (7.54), получим

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} \cos \left[k_0(x - c_0 t) - \frac{t}{2} \frac{\partial c_g}{\partial k} (k - k_0)^2 \right] dk. \quad (7.62)$$

Здесь 2ϵ – ширина диапазона волновых чисел, для которых синусоидальные волны имеют практически одинаковую фазу.

Помимо этого, предположим, что время t достаточно велико, так что

$$\frac{\epsilon}{2} t \frac{\partial c_g}{\partial k} \gg 1. \quad (7.63)$$

Вводя новую переменную

$$m^2 = \frac{t}{2} \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)^2, \quad (7.64)$$

имеем

$$2m dm = t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0) dk.$$

Таким образом,

$$dk = \frac{2m dm}{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)}$$

или

$$dk = \frac{\sqrt{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)} dm}{\sqrt{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right| (k - k_0)}} = \sqrt{\frac{2}{t \left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} dm. \quad (7.65)$$

Отсюда

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[k_0(x - c_0 t) \mp m^2] dm. \quad (7.66)$$

В силу неравенства (7.63) верхний и нижний пределы интегрирования в (7.54) изменились. Другими словами, мы предполагаем, что вклад в интеграл значений функции за пределами интервала $k_0 - \epsilon < k < k_0 + \epsilon$ пренебрежимо мал.

Отрицательный либо положительный знак перед m^2 берется в соответствии с неравенствами $\frac{\partial c_g}{\partial k} > 0$ или $\frac{\partial c_g}{\partial k} < 0$.

Подынтегральное выражение в (7.56) можно представить как

$$\cos[k_0(x - c_0 t) \mp m^2] = \cos k_0(x - c_0 t) \cos m^2 \pm \sin k_0(x - c_0 t) \sin m^2.$$

Следовательно,

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \left[\cos k_0(x - c_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos m^2 dm \pm \sin k_0(x - c_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \sin m^2 dm \right].$$

Как мы уже знаем (см. главу 6), данные интегралы являются табличными и равны друг другу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos m^2 dm = \int_{-\infty}^{\infty} \sin m^2 dm = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом,

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} [\cos k_0(x - c_0 t) \pm \sin k_0(x - c_0 t)].$$

Поскольку

$$\cos k_0(x - c_0 t) \pm \sin k_0(x - c_0 t) = \sqrt{2} \cos \left[k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} \right],$$

последнее выражение дает

$$I \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{\partial c_g}{\partial k} \right|}} \cos \left[k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.67)$$

Мы нашли приближенное выражение для интеграла I в формуле (7.54), который описывает синусоидальную волну с волновым числом k_0 и фазовой скоростью c_0 , задаваемой формулой (7.58).

Амплитуда этой волны

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{dc_g}{dk} \right|}}$$

обратно пропорциональна времени и, как было предсказано ранее, производной групповой скорости по волновому числу.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Данный метод оценки доминирующей группы был разработан Кельвингом и называется методом стационарной фазы.

2. До этого аналогичный подход был предложен Стоксом.

3. Производная dc_g/dk в соотношении (7.67) вычисляется для значения волнового числа, равного k_0 . Это значение определяется из равенства (7.57) при условии, что зависимость $c_g(k)$ является известной.

Таким образом, различным значениям x и t соответствуют, в общем случае, разные значения k_0 и dc_g/dk .

4. Вполне возможно, что в некоторых стационарных точках, где $dc_g/dk = 0$, первая производная dc_g/dk также обращается в ноль. Примером такой точки может служить минимум кривой $c_g(k)$, показанной на рис. 7.4, в.

Можно представить себе такую зависимость фазовой скорости от волнового числа, при которой производная dc_g/dk всегда равняется нулю. Действительно, предположим, что

$$c = a + b/k,$$

где a и b – некоторые постоянные.

Тогда,

$$kc = ak + b, c_g = a \text{ и } \frac{dc_g}{dk} \equiv 0.$$

5. При выводе соотношения (7.67) предполагалось, что можно пренебречь членами ряда Тейлора, содержащими вторые производные $\partial^2 c_g / \partial k^2$ и производные более высокого порядка. Очевидно, что если эти члены равны нулю, то асимптотическое выражение для I становится точным. Например, это происходит в том случае, когда фазовую скорость с можно задать как

$$c = \frac{a_1}{k} + a_2 + a_3 k,$$

где a_1, a_2 и a_3 – некоторые постоянные коэффициенты.

6. Поскольку фазовая скорость синусоидальных волн меняется в зависимости от волнового числа, интервал x , в пределах которого наблюдается результирующая волна, растет с увеличением времени. Однако энергия волны остается постоянной. Поэтому амплитуда волны со временем уменьшается, что также следует из формулы (7.67).

Предположим, что расстояние x фиксировано, тогда производная $\frac{\partial c_g}{\partial k}$ определяется только временем. Соответственно, правая часть выражения (7.67) является только функцией времени. В частности, она равна нулю при

$$k_0(x - c_0 t) \mp \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n - 1).$$

Это означает, что амплитуды синусоидальных волн, волновые числа которых близки к значению k_0 , практически равны нулю.

7. Смещение $s(x, t)$, вызванное источником в виде дельта-функции, определяется двумя интегралами в формуле (7.53). Мы применили метод стационарной фазы к первому из них. Таким же образом можно оценить доминирующую группу для второго интеграла

$$\int_0^{\infty} \cos k(x + ct) dk.$$

Волновое число, соответствующее стационарной фазе, определяется из равенства

$$\frac{\partial}{\partial k} k(x + ct) = 0 \text{ или } x = -c_g t.$$

Поскольку мы предположили, что

$$t > 0 \text{ и } c_g > 0,$$

рассматриваемый интеграл дает доминирующую группу только для отрицательных значений x , и, следовательно, выражение (7.67) описывает главную часть функции $s(x, t)$ при $x > 0$.

Полезно также обсудить сходимость интеграла I , задаваемого формулой (7.54). С этой целью рассмотрим интеграл

$$L = \int_0^{\infty} \cos(\alpha k^p) dk, \quad (7.68)$$

где α – некоторое число, а $p > 1$.

Очевидно, что подынтегральное выражение является осциллирующей функцией, максимальное значение которой равняется единице, независимо от значения k . В то же время интервалы, на которых данная функция сохраняет знак, уменьшаются с ростом k . Чтобы это продемонстрировать, получим оценку ширины интервала Δk между двумя точками, для которых

$$|\cos(\alpha k^p)| = 1. \quad (7.69)$$

Полагая

$$\alpha k_n^p = \pi n \text{ и } \alpha k_{n+1}^p = \pi(n+1),$$

имеем

$$k_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \text{ и } k_{n+1} = \left[\frac{\pi(n+1)}{\alpha} \right]^{1/p}.$$

Здесь n – целое число.

Отсюда

$$\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/p} - 1 \right] = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1/p} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/p} - 1 \right].$$

Учитывая, что

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/p} \approx 1 + \frac{1}{pn},$$

получим

$$\Delta k_n \approx \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/p} \frac{1}{n^{(1-1/p)}}. \quad (7.70)$$

Следовательно, интервал, на котором функция $\cos(\alpha k^p)$ сохраняет свой знак, уменьшается с ростом k . Такое поведение Δk_n обеспечивает сходимость интеграла L . Действительно, данный интеграл можно представить в виде знако-переменного ряда

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_n, \quad (7.71)$$

где

$$S_n = \left| \int_{k_n}^{k_{n+1}} \cos(\alpha k^p) dk \right|.$$

Поскольку интеграл S_n уменьшается с ростом n , мы заключаем, что сумма членов этого ряда сходится к некоторому пределу. Более того, известно, что последний член S_N ряда

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n S_n$$

больше суммы отброшенных членов.

Все изложенное можно применить непосредственно к интегралу I . Например, если аргумент имеет вид

$$kx - \omega t = k|x - c(\omega)t| = k \left(x - \frac{k^p}{\alpha} t \right),$$

то его можно заменить на

$$-\frac{t}{a} k^{p+1},$$

при условии, что

$$k \gg (ax/t)^{1/p}.$$

Таким образом, интеграл I сходится, если $p > 0$. Существенно, что время t определяет ширину интервала Δk_n , в пределах которого знак подынтегрального выражения не меняется. В частности, влияние подынтегрального выражения в окрестности стационарной точки становится со временем сильнее. Это происходит в силу того, что вне этого интервала увеличивается частота осцилляций функции

$$\Phi = \cos(kx - \omega t).$$

Для иллюстрации применения метода стационарной фазы, рассмотрим два примера волн с различными зависимостями фазовой скорости от волнового числа.

Пример 1

Предположим, что

$$c(k) = a\sqrt{k}.$$

Тогда групповая скорость записывается как

$$c_g(k) = \frac{\partial}{\partial k} (a\sqrt{k^3}) = \frac{3}{2} a\sqrt{k} = \frac{3}{2} c,$$

а волновое число, соответствующее стационарной фазе, определяется из равенства

$$\frac{3}{2} a\sqrt{k} = \frac{x}{t}$$

или

$$k_0 = 4x^2/9a^2t^2. \quad (7.72)$$

Производная dc_g/dk является положительной и равняется

$$\frac{dc_g}{dk} = \frac{3}{4} \frac{a}{\sqrt{k}}.$$

В частности, в стационарной точке

$$\frac{dc_g}{dk} = \frac{9a^2 t}{8x}, \text{ если } k = k_0.$$

Таким образом, амплитуда A в выражении (7.67) есть

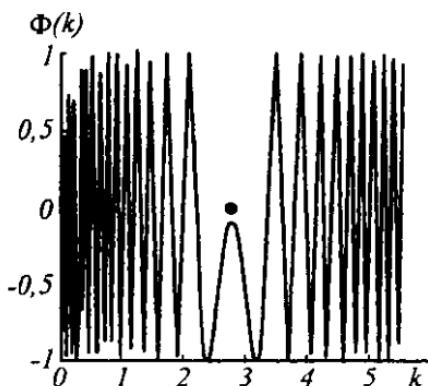
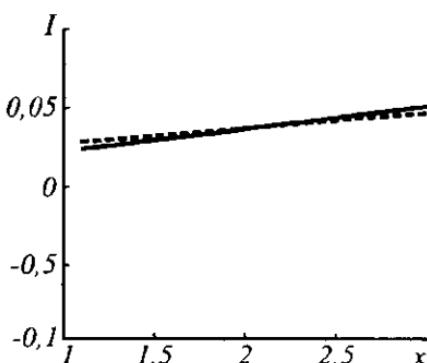
а**б**

Рис. 7.5. Поведение подынтегрального выражения $\Phi(k)$ в первом примере; точка на рисунке указывает положение стационарной точки k_0 (а); результаты вычисления с использованием формул (7.54) (сплошная линия) и (7.73) (пунктирная линия) для случая, когда $a = 1$ и $t = 1,5$ (б)

$$A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi 8x}{9a^2 t^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi} at}.$$

Для фазы волны имеем

$$\Phi(k_0) = k_0(x - c_0 t) - \frac{\pi}{4} = \frac{4x^2}{9a^2 t^2} \left(x - at \frac{2x}{3at} \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{4x^3}{27a^2 t^2} - \frac{\pi}{4}$$

и, соответственно,

$$I \approx \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi} at} \cos \left(\frac{4x^3}{27a^2 t^2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (7.73)$$

Эти простые выкладки проиллюстрированы рис. 7.5, а. Благодаря конструктивной интерференции синусоидальных волн с различными волновыми числами k , мы наблюдаем результирующую волну, образованную вокруг стационарной точки k_0 . Эта часть интервала интегрирования дает основной вклад в интеграл. Сравнение результатов численного интегрирования с выражением (7.73) приведено на рис. 7.5, б.

Пример 2

Пусть

$$c(k) = ak.$$

Тогда групповая скорость

$$c_g(k) = a \frac{\partial k^2}{\partial k} = 2ak = 2c, \quad (7.74)$$

а ее производная по k есть

$$\frac{\partial c_s}{\partial k} = 2a. \quad (7.75)$$

Следовательно, амплитуда A дается выражением

$$A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{2at}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}.$$

Поскольку

$$x = c_s t = 2ak_0 t,$$

имеем для фазы волны

$$\Phi(k_0) = \frac{x}{2at} \left(x - at \frac{x}{2at} \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{x^2}{4at} - \frac{\pi}{4}$$

и соответственно

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cos \left(\frac{x^2}{4at} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (7.76)$$

Из формулы (7.75) следует, что производные $\partial^m c_s / \partial k^m$ второго и более высокого порядка равны нулю. Таким образом, мы получили точное выражение для интеграла I . Другими словами, выражение (7.76) остается справедливым при любых расстояниях и для произвольного момента времени.

До сих пор метод стационарной фазы использовался для оценки интегралов, описывающих суперпозицию волн, амплитуда которых была одинакова и равнялась единице.

Общий случай

Применим теперь рассмотренный метод к случаю, когда величина подынтегрального выражения зависит от переменной интегрирования. В качестве примера рассмотрим волну, которая в каждой точке x является комбинацией синусоидальных волн различной частоты. Применяя интеграл Фурье, получим

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.77)$$

и

$$g(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, t) e^{i\omega t} dt.$$

Как и ранее, предположим, что источник находится в точке $x = 0$ и его зависимость от времени описывается следующим образом:

$$s(0, t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ f(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.78)$$

Снова используя интеграл Фурье, получим

$$s(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = f(t), \quad (7.79)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7.80)$$

Следует заметить, что, в отличие от предыдущего случая (7.47), в выражении (7.80) интеграл берется только по положительным значениям переменной. Очевидно, что волна однозначно определяется волновым уравнением и начальным условием (7.78).

Поскольку функция $g(x, t)$ в (7.77) является синусоидальной функцией x , выражение (7.79) можно представить как

$$s(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t \pm kx)} d\omega,$$

так как

$$x = 0.$$

Учитывая, что амплитуда и начальная фаза каждой из синусоидальных волн не меняются, а фаза ведет себя как $e^{\pm ikx}$, для расстояния x имеем

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t - kx)} d\omega, \text{ если } x > 0, \quad (7.81)$$

и

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(\omega t + kx)} d\omega, \text{ если } x < 0. \quad (7.82)$$

Мнимая часть интеграла в (7.81) равна нулю, и, следовательно, функцию $s(x, t)$ можно записать как

$$s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.83)$$

Здесь $F(\omega) = \mathcal{S}(\omega)$ – комплексная амплитуда, зависящая от ω , $k(\omega)$ – действительное волновое число и

$$h(\omega) = k(\omega) - \frac{\omega}{x}. \quad (7.84)$$

Подынтегральное выражение является произведением двух функций. Первая из них, $S(\omega)$, меняется с частотой, как правило, довольно медленно, в то время как экспоненциальный множитель при достаточно больших $xh(\omega)$ может изменяться очень быстро. Таким образом, в данном случае осциллирующий характер подынтегрального выражения определяется в основном вторым сомножителем.

Независимо от того, какой физический смысл придается функции $s(x, t)$, мы будем полагать, что подынтегральное выражение является синусоидальной волной частоты ω . Его амплитуда и начальная фаза обычно являются функциями ω . По определению, приведенный выше интеграл описывает суперпозицию таких волн, и очевидно, что на интервале частот, для которых фаза

$$\phi(\omega) = xh(\omega) \quad (7.85)$$

меняется лишь незначительно, сумма синусоид может иметь относительно большую амплитуду. Как мы уже знаем, в этом случае наблюдается конструктивная интерференция, и указанные волны образуют доминирующую группу.

В то же время вне этого диапазона фаза $\phi(\omega)$ может меняться очень быстро и в результате синусоидальные волны начнут гасить друг друга, т.е. их сумма станет очень маленькой. Следовательно, как и в предыдущем случае, интеграл в выражении (7.83) в основном определяется первым интервалом. Конечно, между этими диапазонами не существует четкой границы, поскольку в реальности всегда существует некая промежуточная зона.

Наш анализ снова показывает, что мы должны определить положение первого интервала и после этого выполнить по нему интегрирование. В реализации этих двух шагов и состоит метод стационарной фазы.

Поскольку на этом интервале фаза $\phi(\omega)$ изменяется мало, определим частоту ω_0 , характеризующую стационарную фазу, из уравнения

$$\frac{dh(\omega)}{d\omega} = 0. \quad (7.86)$$

Как мы знаем, точка ω_0 называется стационарной. Она соответствует максимуму или минимуму функции $h(\omega)$, а разность фаз

$$\Delta\phi = \phi(\omega) - \phi(\omega_0) = x[h(\omega) - h(\omega_0)]$$

в окрестности ω_0 существенно зависит от значения параметра x . Так, например, если этот параметр относительно мал, то даже достаточно большие отклонения от стационарной точки ω_0 могут приводить к малым изменениям фазы. И наоборот, когда параметр x достаточно большой, малая разность $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ может дать большое изменение фазы. Иными словами, ширина первого интервала в этом случае уменьшается. Таким образом, только при больших значениях x можно ожидать, что указанный интервал окажется достаточно узким, причем вне этого интервала фаза $\phi(\omega)$ будет меняться очень быстро. Эти два обстоятельства позволяют сильно упростить выраже-

ние (7.83). Прежде всего, мы заменим функцию $S(\omega)$ ее значением в стационарной точке:

$$S(\omega) = S(\omega_0), \quad (7.87)$$

так как в пределах указанного узкого интервала она меняется мало.

Затем, как и ранее, разложим функцию $h(\omega)$ в ряд Тейлора и ограничимся в этом разложении первыми тремя членами:

$$h(\omega) = h(\omega_0) + h'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{h''(\omega_0)}{2}(\omega - \omega_0)^2.$$

Поскольку

$$h'(\omega_0) = 0,$$

имеем

$$h(\omega) = h(\omega_0) + \frac{h''(\omega_0)}{2}(\omega - \omega_0)^2. \quad (7.88)$$

Подстановка последнего выражения в формулу (7.83) дает

$$s(x, t) = \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} e^{ixh(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ixh(\omega_0)}{2}(\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

По аналогии с интегралом по волновым числам, введем новую переменную

$$m^2 = \frac{x|h''(\omega_0)|}{2}(\omega - \omega_0)^2.$$

Следовательно,

$$m = \sqrt{\frac{x|h''(\omega_0)|}{2}}(\omega - \omega_0)$$

и

$$dm = \sqrt{\frac{x|h''(\omega_0)|}{2}} d\omega$$

или

$$d\omega = \sqrt{\frac{2}{x|h''(\omega_0)|}} dm.$$

Отсюда

$$s(x, t) \approx \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} \frac{\sqrt{2} e^{ixh(\omega_0)}}{\sqrt{x|h''(\omega_0)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm im^2} dm.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm im^2} dm = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 \pm i),$$

мы получаем

$$s(x, t) \approx \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} (1 \pm i) \sqrt{\frac{\pi}{x|h''(\omega_0)|}} e^{ixh(\omega_0)}$$

или

$$s(x, t) = \operatorname{Re} \frac{S(\omega_0)}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x|h''(\omega_0)|}} e^{i[xh(\omega_0) \pm \frac{\pi}{4}]} \quad (7.90)$$

По определению, мы должны взять только действительную часть этого равенства. Знак перед $\pi/4$ здесь соответствует знаку второй производной $h''(\omega_0)$ в выражении (7.89).

Таким образом, вместо точного равенства (7.83) мы приходим к приближенному выражению, точность которого увеличивается с ростом параметра x .

Из (7.84) – (7.86) следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \frac{\partial k}{\partial \omega} - \frac{t}{x} = 0, \text{ если } \omega = \omega_0.$$

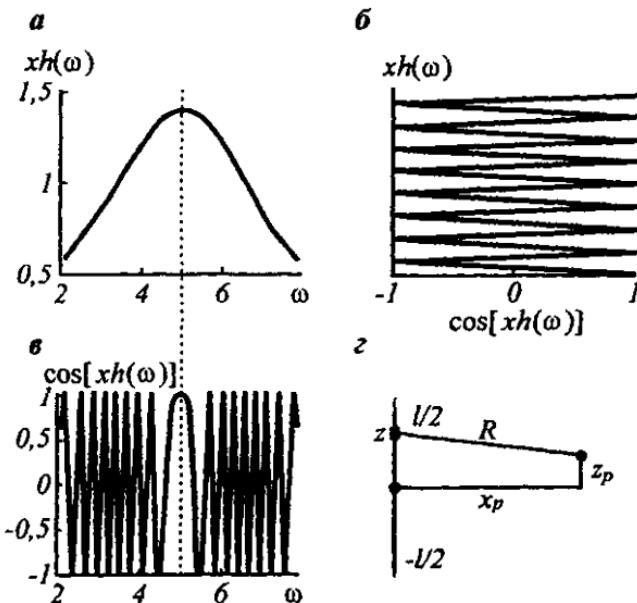


Рис. 7.6. Иллюстрация метода стационарной фазы (*a*, *b*, *c*); непрерывное распределение источников (*z*)

Следовательно, мы снова приходим к равенству

$$c_g(\omega_0) = x/t.$$

Таким образом, в терминах распространения волн можно сказать, что основная часть волны приходит в некоторую точку x в момент времени t с групповой скоростью c_g , а мгновенная частота при этом равняется ω_0 .

Продемонстрируем теперь основные свойства метода стационарной фазы графически. Рассмотрим для этого интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos[xh(\omega_0)] d\omega.$$

Поведение функций $xh(\omega_0)$ и $\cos xh(\omega_0)$ показано на рис. 7.6.

Как видно из приведенных на этом рисунке кривых, функция $\cos xh(\omega_0)$ меняется в окрестности стационарной точки довольно медленно, однако вдали от ω_0 небольшие изменения $\Delta\omega$ приводят к многочисленным осцилляциям этой функции, которые дают малый вклад в значение интеграла. Кроме того, из данных графиков ясно видно, что точность метода возрастает с увеличением параметра x .

В заключение рассмотрим еще один пример.

Метод стационарной фазы и дифракция

Рассмотрим еще раз случай, когда источники распределены непрерывно вдоль оси z (рис. 7.6, δ). Тогда комплексная амплитуда потенциала, порожденного всеми источниками, равняется

$$\mathcal{U}(p) = C \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{ikR}}{R} dz, \quad (7.91)$$

где l – длина линии источников, x_p и z_p – координаты точки наблюдения, и

$$R = \sqrt{x_p^2 + (z_p - z)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{z_p - z}{R}. \quad (7.92)$$

Мы предполагаем здесь, что длина волны мала, т.е. $k \gg 1$.

Таким образом, положение стационарной точки z_0 ($\partial R / \partial z = 0$) определяется из равенства

$$z_0 = z_p. \quad (7.93)$$

Это означает, что такие точки отсутствуют, если наблюдения ведутся за пределами интервала

$$-\frac{l}{2} \leq z_p \leq \frac{l}{2}. \quad (7.94)$$

Из равенств (7.92) следует, что вторая производная R в стационарной точке дается следующим выражением:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{1}{R} = \frac{1}{x_p}. \quad (7.95)$$

Поскольку параметр k большой, мы можем использовать формулу (7.90).

Тогда асимптотическое выражение для потенциала запишется как

$$\mathcal{U}(p) \approx C \left(\frac{2\pi}{kx_p} \right)^{1/2} \cos \left(kx_p + \frac{\pi}{4} \right), \text{ если } -\frac{l}{2} \leq z_p \leq \frac{l}{2}. \quad (7.96)$$

Данная формула описывает цилиндрическую волну, ограниченную плоскостями $z_p = \pm l/2$ и распространяющуюся в сторону от линии источников. В пределах рассматриваемого диапазона амплитуда \mathcal{U} не зависит от координаты z_p . Естественно, что интенсивность этой волны обратно пропорциональна горизонтальному расстоянию l_k .

Из равенства (7.93) следует, что основной вклад вносит источник, ближе всего расположенный к точке p . Другими словами, волна распространяется вдоль лучей, перпендикулярных оси z , а стационарная точка характеризует положение источника (рис. 7.7, а). Таким образом, метод стационарной фазы позволяет получить выражение для потенциала, которое соответствует приближению геометрической акустики, при условии, что $|z_p| \leq l/2$. В случае источника бесконечной протяженности цилиндрическая волна наблюдается во всем пространстве, причем амплитуда \mathcal{U} вдоль фазовой поверхности не меняется.

Для такого источника стационарные точки отсутствуют, если $|z_p| > l/2$. Это указывает на то, что в таких местах отсутствует конструктивная интерференция и, следовательно, волновое поле имеет небольшую амплитуду. В разделе 6.1 мы обсуждали также поведение результирующей волны в случае,

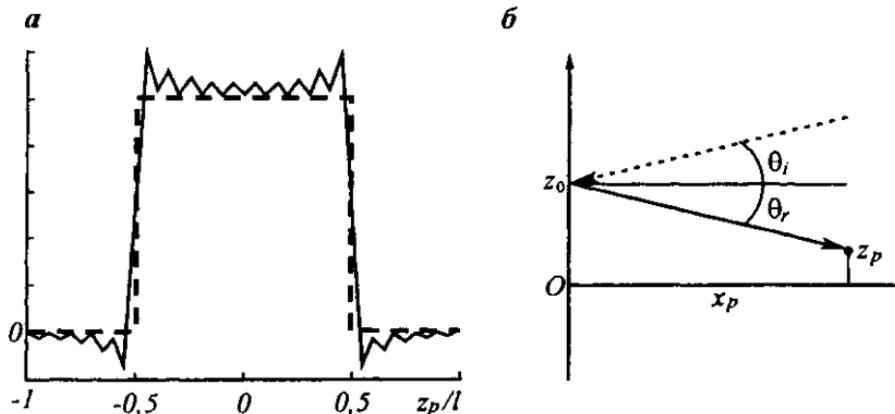


Рис. 7.7. Сравнение потенциала $\mathcal{U}(p)$, задаваемого формулой (7.91) (сплошная линия), с асимптотическим выражением (7.96) (пунктирная линия) для $x_p/l = 10^4$ и $kl = 2\pi \cdot 10^6$ (а); иллюстрация формулы (7.97) (б)

когда между источниками имеется сдвиг фаз. Предполагая, что действие таких источников вызвано плоской волной с углом падения θ_i , фазу элементарной отраженной волны можно записать как

$$\phi = k(R - z \sin \theta_i).$$

Следовательно, стационарная точка z_0 определяется из равенства

$$\frac{z_p - z_0}{R} - \sin \theta_i = 0 \text{ или } \sin \theta_i = \sin \theta_p. \quad (7.97)$$

Здесь первый член характеризует ориентацию фронта отраженной волны, если ее источник расположен в окрестности точки z_0 . Таким образом, мы снова приходим к закону Снеллиуса (рис. 7.7, б).

Рассмотрим теперь интеграл, описывающий дифракцию Фраунгофера:

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikz \sin \theta} dz.$$

Поскольку фаза элементарной волны зависит от расстояния линейно, мы имеем

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = -k \sin \theta. \quad (7.98)$$

Отсюда видно, что, если $\theta = 0$, то все точки являются стационарными.

И наоборот, при $\theta \neq 0$ такие точки отсутствуют. Следовательно, для того чтобы получить волновое поле при $\theta = 0$, необходимо вычислить интеграл вдоль линии источников:

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} dz = l \text{ и } \mathcal{U}(p) = \frac{Cl}{r} e^{ikr}.$$

Как было показано в разделе 6.1, последнее равенство описывает главный максимум дифракционной картины.

Поскольку при $\theta = 0$ стационарные точки распределены непрерывно на интервале интегрирования и все производные $\partial^n \phi / \partial z^n = 0$, метод стационарной фазы не применим в приближении Фраунгофера. В то же время понятие стационарной точки и в этом случае остается полезным.

Предположим снова, что источники действуют синхронно, однако, в отличие от предыдущего случая, они располагаются вдоль произвольной линии (рис. 7.8, а). Суперпозиция волн, вызванных такими источниками, описывается интегралом

$$I = \int_0^l e^{ikR(l)} dl, \quad (7.99)$$

где l – координата элементарного источника.

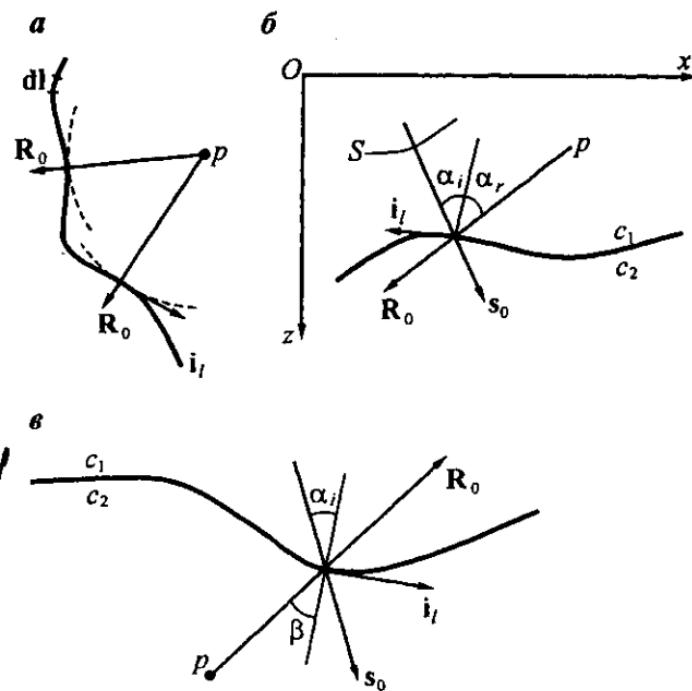


Рис. 7.8. Иллюстрация формулы (7.101) (a); закон отражения Снеллиуса и стационарная точка (b); закон преломления Снеллиуса и стационарная точка (c)

Чтобы определить положение тех источников, которые дают наибольший вклад в точке p , найдем стационарную точку подынтегрального выражения $e^{iR(l)}$, которая определяется из равенства

$$\frac{\partial R(l)}{\partial l} = 0 \quad (7.100)$$

или

$$i_l \cdot \operatorname{grad} R(l) = 0, \quad (7.101)$$

где $i_l(l)$ – единичный вектор, касательный к линии источников (приложение 2).

Поскольку

$$\operatorname{grad} R = R_0(l)$$

также является единичным вектором, направленным вдоль R , мы вместо равенства (7.101) имеем

$$R_0 \cdot i_l = 0 \text{ или } \cos(R_0, i_l) = 0. \quad (7.102)$$

Таким образом, источник, соответствующий стационарной точке, расположен там, где эти векторы перпендикулярны друг к другу. Очевидно, что в

этой точке линия источников касается круга радиуса R с центром в точке наблюдения p .

В результате решения уравнения (7.100) можно получить следующие данные:

- а) стационарная точка отсутствует;
- б) на линии l имеется только одна стационарная точка;
- в) существует несколько стационарных точек;
- г) имеется непрерывное распределение стационарных точек.

Мы уже рассматривали первые два случая применительно к источникам, расположенным вдоль прямой (см. рис. 7.6). Если же существует несколько стационарных точек, то суперпозиция волн, вызванных источниками в окрестности этих точек, может привести как к конструктивной, так и к деструктивной интерференции.

Предположим, что группа источников расположена на части окружности с центром в точке p . Конечно, в этом случае наблюдается конструктивная интерференция.

Заметим, что отсутствие стационарной точки также связано с тем, что в некоторых местах линии источника не определен касательный вектор i .

Стационарная точка и закон Снеллиуса

Пусть в среде со скоростью c_1 распространяется падающая волна (рис. 7.8, б). Тогда, как было показано в главе 6, комплексную амплитуду потенциала этой волны можно представить как

$$\mathcal{U}_i(\mathbf{r}) = \mathcal{A}_i(\mathbf{r}) e^{ik_1 S(\mathbf{r})}. \quad (7.103)$$

Здесь вектор \mathbf{r} характеризует положение некоторой точки, а $S(\mathbf{r})$ – эйконал, определяющий фазу волны.

Согласно (6.314),

$$\|\mathbf{grad} S(\mathbf{r})\| = 1,$$

и этот вектор нормален к фазовой поверхности.

Предположим для простоты, что параметры среды и волнового поля не зависят от координаты u (рис. 7.8, б). Естественно ожидать, что вторичные источники, возникающие на границе под действием падающей волны, приводят к появлению отраженной и преломленной волн. Предположим, что фаза каждого элементарного источника совпадает с фазой падающей волны (приближение Кирхгофа).

Рассмотрим сначала отраженную волну. Ее поведение в точке p (рис. 7.8, б) определяется интегралом

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(R(q,p)+S(q))} dl. \quad (7.104)$$

Здесь q – координата границы.

Стационарная точка находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} [R(q, p) + S(q)] = 0.$$

По аналогии с равенствами (7.102) имеем

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{i}_i + \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{i}_i = 0 \text{ или } \cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_i) = -\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_i),$$

где \mathbf{s}_0 – единичный вектор, перпендикулярный фазовой поверхности падающей волны.

Из рис. 7.8, б видно, что равенства (7.105) можно переписать как

$$\sin \alpha_i = \sin \alpha, \text{ или } \alpha_i = \alpha_r,$$

и мы приходим к закону отражения Снеллиуса.

Предположим далее, что точка наблюдения находится в среде, скорость в которой равняется c_2 (рис. 7.8, в).

Тогда вместо (7.104) получим

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_2 R + k_1 S)} dI, \quad (7.106)$$

и стационарная точка определяется из уравнения

$$\frac{\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_i)}{c_1} = -\frac{\cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_i)}{c_2}.$$

Поскольку

$$\cos(\mathbf{s}_0, \mathbf{i}_i) = \sin \alpha_i \text{ и } -\cos(\mathbf{R}_0, \mathbf{i}_i) = \sin \beta,$$

мы, таким образом, получаем закон преломления Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha_i}{c_1} = -\frac{\sin \beta}{c_2},$$

где α_i и β – угол падения и угол преломления (рис. 7.8, в). Используя описанный здесь подход, можно получить закон Снеллиуса для трехмерного случая.

Глава 8. ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Приступим теперь к изучению синусоидальных волн, частота которых стремится к бесконечности. Мы увидим, что такие волны распространяются через однородные участки среды вдоль прямых лучей, независимо от наличия неоднородности в каком-либо другом месте. Кроме того, будет продемонстрировано, что лучи определяют направления векторов Пойнтинга.

Как было показано ранее, в общем случае, когда длина волны является произвольной, скалярный потенциал U удовлетворяет уравнению Гельмгольца, содержащему частные производные второго порядка. В отличие от комплексной амплитуды \mathcal{U} , решение L уравнения эйконала, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, – это действительная функция действительного же аргумента. Поэтому решить уравнение эйконала обычно проще, чем уравнение Гельмгольца. Действительно, для многих моделей среды, включая горизонтально-слоистые модели и модели со сферической и цилиндрической симметрией, лучи очень часто можно задать аналитически.

Хотя в рассматриваемом здесь случае длины волн стремятся к нулю, могут найтись такие области, где все же будет наблюдаться дифракция и, следовательно, вместо уравнения эйконала придется решать уравнение Гельмгольца. В этом случае обычно необходимо использовать численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.

8.1. ЛУЧИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Как было показано в главе 6, комплексный потенциал \mathcal{U} задается в высокочастотной области выражением

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ik_0 L(\mathbf{r})}. \quad (8.1)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения r в системе координат с началом в точке O , а

$$k_0 = \omega/c_0$$

обозначает волновое число в некоторой заданной точке.

Позже мы обсудим, как найти неизвестный эйконал $L(\mathbf{r})$ и амплитуду $A(\mathbf{r})$. В формуле (8.1) предполагается, что волна в окрестности каждой точки \mathbf{r} является плоской. Это объясняет относительную простоту геометрической акустики.

Эйконал $L(\mathbf{r})$ зависит от координат точки, а также от отношения волновых чисел

$$n = \frac{k(r)}{k_0} = \frac{c_0}{c(r)}$$

и удовлетворяет уравнению эйконала

$$\operatorname{grad}^2 L = n^2 = (\nabla L)^2. \quad (8.2)$$

Согласно (8.1), эйконал L отличается от начальной фазы $k_0 L$ потенциала \mathcal{U} только множителем k_0 . Таким образом, его можно использовать наравне с фазой для описания геометрии фазовых поверхностей.

По определению, поверхность постоянной фазы дается выражением

$$L(r) = \text{const.}$$

Поскольку функция L задает скалярное поле, мы можем представить себе это поле в виде бесконечного множества поверхностей постоянного эйконала, каждая из которых совпадает с соответствующей поверхностью постоянной фазы. В любой точке такой поверхности выполняется условие

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (8.4)$$

где dq – элементарное смещение в касательной плоскости (рис. 8.1, а).

С другой стороны, производная $\partial L / \partial l$ по направлению произвольного единичного вектора i , связана с градиентом поля L следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = i \cdot \operatorname{grad} L. \quad (8.5)$$

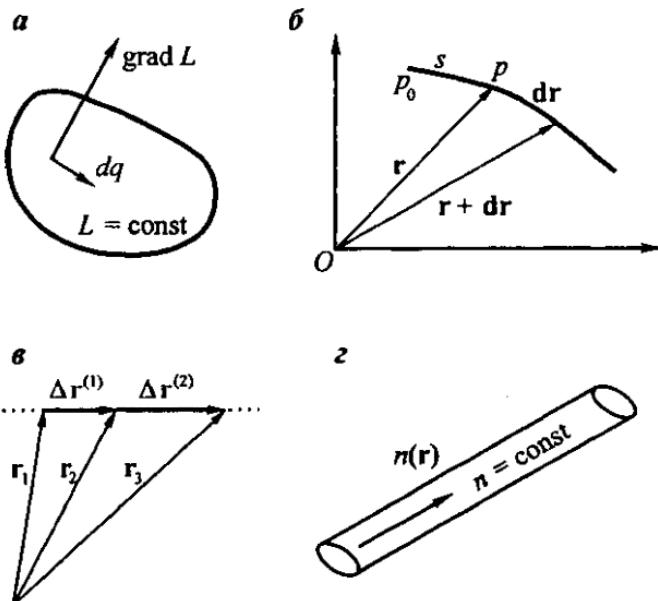


Рис. 8.1. Поверхность постоянного эйконала в направлении $\operatorname{grad} L$ (а); иллюстрация формулы (8.8) (б); иллюстрация формулы (8.20) (с); луч в однородной среде (д)

Здесь \mathbf{i}_l – единичный вектор вдоль кривой l .

Как следует из выражения (8.3), касательная плоскость в любой точке поверхности постоянной фазы (постоянного эйконала) задается как

$$\mathbf{i}_q \cdot \operatorname{grad} L = 0, \quad (8.6)$$

где вектор

$$\mathbf{N} = \operatorname{grad} L \quad (8.7)$$

является нормалью к этой поверхности. Равенство (8.7) демонстрирует одно из наиболее важных свойств градиента скалярного поля.

ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУЧА

Рассмотрим теперь лучи и определим их как линии, перпендикулярные поверхностям постоянной фазы. Эти линии описывают также скалярное поле L . Для того чтобы вывести уравнение для лучей, выразим вектор \mathbf{N} через две известные величины: радиус-вектор \mathbf{r} и элементарное перемещение ds вдоль луча (рис. 8.1, б). Как видно из этого рисунка, длина вектора $d\mathbf{r}$ стремится к ds при уменьшении расстояния между двумя точками на луче:

$$|d\mathbf{r}| \rightarrow ds, \text{ если } d\mathbf{r} \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}_0, \quad (8.8)$$

где \mathbf{s}_0 – касательный к лучу единичный вектор.

Поскольку векторы \mathbf{N} и \mathbf{s}_0 коллинеарны, справедливо выражение

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}_0 = \frac{\operatorname{grad} L}{|\operatorname{grad} L|}.$$

Принимая во внимание выражение (8.2), окончательно получим

$$n \mathbf{s}_0 = \operatorname{grad} L \text{ или } n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \operatorname{grad} L.$$

Дифференциальное уравнение (8.9) позволяет определить координаты любой точки луча по заданной функции L .

Предположим, например, что в однородной среде распространяется волна, вызванная элементарным точечным источником, расположенным в начале координат O . В этом случае

$$n = 1 \text{ и } L = r,$$

поскольку

$$\mathcal{U} = A \frac{e^{ikr}}{r},$$

и поверхности постоянной фазы являются сферами.

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0,$$

уравнение (8.9) перепишем в виде

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0.$$

Таким образом, направления лучей совпадают с направлениями радиус-векторов.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда параметр n зависит от расстояния r от источника, находящегося в начале координат ($r = 0$). В силу сферической симметрии,

$$\operatorname{grad} L = n \mathbf{r}_0 \text{ или } \frac{dL}{dr} = n(r),$$

так как

$$\operatorname{grad} L = \frac{dL}{dr} = \mathbf{r}_0.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$L(r) = \int_0^r n(r) dr + L(r_0), \quad (8.10)$$

и, как и в предыдущем примере,

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0.$$

ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУЧА

Поскольку функция L неизвестна, целесообразно исключить ее из уравнения (8.9) и найти связь между параметром n и единичным вектором \mathbf{s}_0 , задающим направление луча.

Продифференцируем для этого уравнение (8.9) по s . Получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{grad} L.$$

Поскольку градиент скалярного поля не зависит от системы координат, выберем простейшую, а именно прямоугольную декартову систему координат, и рассмотрим правую часть уравнения (8.11). По определению,

$$\frac{\partial}{\partial s} \nabla L = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (8.12)$$

В соответствии с выражениями (8.5) и (8.9)

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{s}_0 \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\nabla L}{n} \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Принимая во внимание, что

$$\nabla L \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \nabla L \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla L = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \nabla L \cdot \nabla L,$$

получим

$$\nabla L \cdot \nabla \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla L)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} n^2.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2n} \frac{\partial n^2}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Аналогично получаются остальные производные:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (8.12) дает

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{grad} L = \operatorname{grad} n. \quad (8.13)$$

Последнее уравнение можно получить также более простым способом. Действительно, по определению, градиент L совпадает по абсолютной величине с максимумом производной, который наблюдается в направлении нормали к поверхности постоянной фазы, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial s} = |\operatorname{grad} L| = n. \quad (8.14)$$

Беря градиент от обеих частей этого равенства, снова приходим к уравнению (8.13). Следует заметить, что уравнение (8.13) демонстрирует очень важное свойство эйконала, состоящее в том, что скорость его изменения вдоль луча равна n .

С учетом (8.9) и (8.13) получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \operatorname{grad} n \text{ или } \frac{\partial}{\partial s} (n s_0) = \operatorname{grad} n. \quad (8.15)$$

Уравнение (8.15) – это вторая форма дифференциального уравнения луча, которая не содержит неизвестной функции L , и из которой видно, что координаты точек луча определяются свойствами параметра n .

Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ как функцию расстояния s между двумя точками на луче. Первая точка является фиксированной, а координаты второй задаются радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

В декартовой прямоугольной системе координат уравнение (8.15) записывается в виде следующих трех уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial y}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (8.16)$$

Очевидно, что производные $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$ задают направляющие косинусы единичного вектора s_0 .

Решением системы уравнений (8.16) являются функции

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s), \quad (8.17)$$

задающие луч в параметрической форме.

По определению дифференциального уравнения, функции (8.17), так же как и $\text{grad } n$, рассматриваются всегда в окрестности некоторой общей для них точки. Так, например, если среда однородна в окрестности этой точки, то параметр n является константой, а уравнение (8.15) сводится к

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0. \quad (8.18)$$

Решение этого уравнения дается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} s + \mathbf{b}, \quad (8.19)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – некоторые постоянные векторы.

Очевидно, что размеры области, в пределах которой уравнение (8.19) остается справедливым, зависят от поведения параметра n . Если точка отсчета $s = 0$ принадлежит этой области, то луч проходит через точку $\mathbf{r} = \mathbf{b}$. Рассмотрим три точки с радиус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 (рис. 8.1, в) на луче, заданном выражением (8.19). Введем также разности этих векторов

$$\Delta \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a} \Delta s_1$$

и

$$(8.20)$$

$$\Delta \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a} \Delta s_2.$$

Здесь Δs_1 и Δs_2 – расстояния между точками. Очевидно, что оба вектора $\Delta \mathbf{r}^{(1)}$ и $\Delta \mathbf{r}^{(2)}$, имеющие общее начало, лежат на одной прямой, направление которой задается вектором \mathbf{a} . Поскольку точки на луче выбирались произвольным образом, мы снова приходим к заключению, что луч является прямой линней в пределах области с однородными свойствами среды. Заметим, что поперечный размер области вокруг луча, может быть сколь угодно мал, а параметр n может произвольным образом изменяться вне этой области (рис. 8.1, г).

КРИВИЗНА ЛУЧА

За исключением некоторых специальных случаев лучи в неоднородной среде являются кривыми. Для оценки отклонения луча от прямой используется понятие кривизны луча. Рассмотрим точку луча p_1 , и пусть касательная к лучу в этой точке составляет угол α_1 с вертикалью. Рассмотрим также в окрестности точки p_1 произвольную точку p_2 и обозначим расстояние между этими двумя точками через Δs , угол между касательной к лучу в точке p_2 и

вертикалью – через α_2 и разность между углами α_2 и α_1 – через $\Delta\alpha$: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Предположим, что расстояние Δs мало, и угол $\Delta\alpha$ – это угол, образованный двумя касательными к лучу в точках p_1 и p_2 (рис. 8.2, a). Тогда отношение

$$\Delta\alpha/\Delta s$$

называется средней кривизной луча на интервале Δs , а кривизна луча в точке задается величиной

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Очевидно, что чем больше величина K , тем больше отклонение луча от прямой.

Рассмотрим разность Δs_0 единичных векторов s_0 , заданных в точках p_1 и p_2 :

$$\Delta s_0 = s_0(p_2) - s_0(p_1).$$

Поскольку величина вектора Δs_0 выражается в виде (рис. 8.2, б)

$$|\Delta s_0| = |s_0| \operatorname{tg}(\Delta\alpha) = \operatorname{tg}(\Delta\alpha) = \Delta\alpha, \text{ если } \Delta\alpha \rightarrow 0,$$

мы можем ввести вектор кривизны K :

$$K = \frac{\partial s_0}{\partial s} = K v_0 = \frac{1}{R} v_0.$$

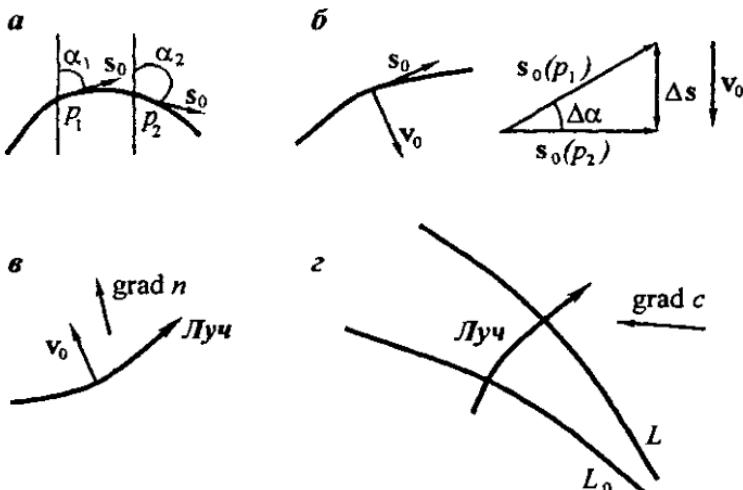


Рис. 8.2. Кривизна луча (a); ориентация векторов v_0 и s_0 (б); взаимное расположение векторов ∇n и v_0 (в); ориентация поверхности постоянного эйконала и вектора ∇c (г)

Как это видно из рис. 8.2, б, единичный вектор \mathbf{v}_0 ортогонален вектору \mathbf{s}_0 . Вектор \mathbf{v}_0 указывает направление изгиба луча, а величина R называется радиусом кривизны луча. В частности, при $R \rightarrow \infty$ изгиб стремится к нулю, и луч становится прямым. При уменьшении R кривизна луча, наоборот, увеличивается. Чтобы определить связь между кривизной луча и параметром n , продифференцируем левую часть уравнения (8.15). Это дает

$$n \frac{\partial \mathbf{s}_0}{\partial s} + \mathbf{s}_0 \frac{\partial n}{\partial s} = \operatorname{grad} n$$

или

$$n \mathbf{K} = \operatorname{grad} n - \mathbf{s}_0 \frac{\partial n}{\partial s}. \quad (8.21)$$

Умножая последнее выражение скалярно на вектор \mathbf{v}_0 , получим

$$n \mathbf{K} = \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} n,$$

поскольку

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0.$$

Таким образом,

$$K = \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\operatorname{grad} n}{n} = \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \log n \quad (8.22)$$

Очевидно, что радиус кривизны луча – величина положительная, так же, как и скалярное произведение векторов \mathbf{v}_0 и $\operatorname{grad} \log n$. Следовательно, угол между этими двумя векторами всегда меньше $\pi/2$.

Вектор градиента указывает направление максимального возрастания функции, и, таким образом, изгиб луча всегда происходит в сторону больших значений n (рис. 8.2, в). Этот важный результат будет еще не раз отмечаться в следующих разделах.

Учитывая, что

$$\frac{n(p_2)}{n(p_1)} = \frac{k(p_2)}{k(p_1)} = \frac{c(p_2)}{c(p_1)},$$

можно сказать, что луч обращен своей выпуклой частью в сторону области с большей скоростью. Это означает, что мгновенный центр кривизны луча располагается в тех местах, где скорость c меньше. Очевидно, что к этому же выводу можно прийти, исходя из принципа Гюйгенса. Действительно, предположим, что в некоторый момент времени $t = t_0$ волновой фронт описывается эйконалом L_0 , а скорость распространения $c(\mathbf{r})$ увеличивается в направлении, показанном на рис. 8.2, г. Тогда, проводя элементарные волновые фронты, замечаем, что их радиусы, равные $c \Delta t$, уменьшаются в направлении $-\nabla c$, а волновой фронт в момент времени $t + \Delta t$ определяется огибающей функции L . Таким образом, как мы уже знаем, луч изгибается в направлении областей с меньшей скоростью или, что эквивалентно, с большим значением параметра n (рис. 8.2, в).

ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА

Далее, основываясь на уравнении луча, мы опишем два важных свойства вектора $\mathbf{N} = ns_0$, определяемого выражением (8.7). Прежде всего, беря ротор от обеих частей уравнений (8.15), получим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial s} (ns_0) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} n$$

Правая часть этого выражения всегда равна нулю и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{rot} \mathbf{N} = 0$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = \mathbf{C}, \quad (8.23)$$

где \mathbf{C} – постоянный вектор, не зависящий от расстояния s .

Поскольку волновые поля отсутствуют на бесконечности, вектор \mathbf{C} можно считать нулевым и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = 0 \text{ или } \operatorname{rot}(ns_0) = 0, \quad (8.24)$$

т.е. мы имеем дело с полем источников (см. приложение 3).

Интегральная форма условий (8.24) следует из теоремы Стокса:

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

В силу равенства (см. рис. 8.1, б)

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$$

имеем

$$\oint_S ns_0 \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (8.25)$$

Таким образом, циркуляция вектора \mathbf{N} по произвольному пути (эта величина известна как интегральный инвариант Лагранжа) равняется нулю.

Это означает, что интеграл

$$\int_{p_1}^{p_2} ns_0 \cdot d\mathbf{r} \quad (8.26)$$

не зависит от пути интегрирования, т.е. для любого заданного поля ns_0 он определяется только положением начальной p_1 и конечной p_2 точки интервала пути.

ПРИНЦИП ФЕРМА

Используя приведенный выше результат, можно доказать справедливость принципа Ферма, играющего важную роль в геометрической акустике. По

анalogии с оптикой, определим акустическую длину между двумя точками как интеграл

$$\int \limits_{P_1}^{P_2} n dl.$$

Согласно принципу Ферма, акустическая длина

$$\int \limits_{P_1}^{P_2} n ds$$

вдоль луча ($dl = ds$), соединяющего две произвольные точки P_1 и P_2 , меньше акустической длины любой другой кривой, проходящей через эти точки.

Для того чтобы доказать это замечательное свойство лучей в произвольной акустической среде, сравним акустические длины луча C и некоторой другой кривой C_0 , проходящих через точки P_1 и P_2 (рис. 8.3, а). Существенное предположение, которое мы должны при этом сделать, заключается в том, что через каждую точку в окрестности луча C может проходить только один луч, т.е. окрестность луча C является регулярной. Ниже мы приведем пример, который показывает, что если это предположение нарушается, то акустическая длина луча не обязательно является минимальной.

Пусть L_1 и L_2 – две фазовые поверхности волны, расположенные вблизи друг от друга, а C_1 – луч, отличный от луча C . Из равенства (8.25) следует, что циркуляция вектора \mathbf{N} по пути $a_2 b_2 b_3 a_2$ равна нулю:

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_2} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_2 b_3} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = 0. \quad (8.27)$$

Поскольку луч всегда нормален к поверхности равного эйконала, среднее слагаемое исчезает и выражение (8.27) записывается как

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_2} + (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = 0. \quad (8.28)$$

Учитывая, что C_1 – луч, а направление обхода вдоль пути $b_3 a_2$ противоположно единичному вектору s_0 , получим

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = -(ns_0 \cdot dss_0)_{b_3 a_2} = -(nds)_{b_3 a_2}.$$

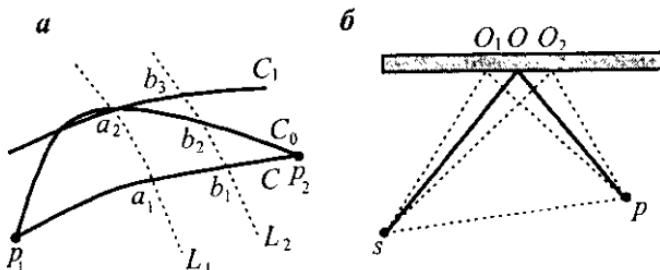


Рис. 8.3. Иллюстрация принципа Ферма (а, б)

Таким образом, равенство (8.28) переходит в

$$(ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{b_3 a_2} = (nds)_{b_3 a_2} = (nds)_{a_2 b_3}. \quad (8.29)$$

Скалярное произведение в этом выражении имеет максимальное значение, когда направления векторов s_0 и $d\mathbf{r}$ совпадают, т.е.

$$d\mathbf{r} = ds s_0.$$

Это означает, что

$$(nds)_{a_2 b_2} \geq (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_2}.$$

Равенство в этом выражении выполняется только в том случае, когда элемент пути $a_2 b_2$ является частью луча.

Из соотношений (8.29) следует, что

$$(nds)_{a_2 b_2} \geq (ns_0 \cdot d\mathbf{r})_{a_2 b_3} \text{ или } (nds)_{a_2 b_2} \geq (nds)_{a_2 b_1}, \quad (8.30)$$

поскольку C_1 также является лучом. Последние неравенства показывают, что акустическая длина элемента луча меньше акустической длины элемента некоторого другого пути C_0 .

Как следует из формулы (8.5),

$$dL = \mathbf{i}_l \cdot \operatorname{grad} L \, dl = d\mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} L \text{ или } dL = d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \, s_0.$$

Тогда для любого луча

$$dl = ds s_0 \text{ и } dL = n \, ds,$$

т.е.

$$(nds)_{a_2 b_3} = (nds)_{a_1 b_1}.$$

Поэтому неравенства (8.30) можно переписать как

$$(nds)_{a_1 b_1} \leq (nds)_{a_2 b_2} \quad (8.31)$$

и это условие выполняется для элементов луча C и кривой C_0 . Равенство в этом выражении не может выполняться сразу для всех элементов кривой C_0 , поскольку в этом случае она являлась бы лучом, что противоречит требованию регулярности.

Интегрируя неравенство (8.31), мы приходим к окончательному соотношению, описывающему принцип Ферма:

$$\int_C nds < \int_{C_0} nds \quad (8.32)$$

при условии, что окрестность луча C является регулярной. Таким образом, акустическая длина луча между двумя точками p_1 и p_2 меньше акустической длины любой другой кривой, соединяющей эти точки. Другими словами, значение интеграла

$$I = \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (8.33)$$

минимально вдоль луча. Это означает, что первая производная I по любому параметру, характеризующему малые отклонения от траектории луча, равняется нулю. Следовательно, разность

$$I(C) - I(C_0)$$

в общем случае пропорциональна квадрату отклонения в окрестности луча.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. Поскольку $n = c_0/c$, неравенство (8.32) можно записать в виде

$$\int \frac{ds}{c} < \int \frac{ds}{c_0}$$

или

$$\int \frac{dt}{c} < \int \frac{dt}{c_0} \quad (8.34)$$

Поэтому принцип Ферма известен также как принцип наименьшего времени.

2. Условие регулярности выполняется не всегда. Например, это условие нарушается, когда имеется несколько групп волн и лучи, соответствующие различным группам, пересекаются. В этих случаях луч отличается от других возможных траекторий стационарным (не обязательно минимальным) значением интеграла I . Рассмотрим пример, в котором через точку p проходит два луча: прямой и отраженный (рис. 8.3, б). Акустическая длина прямого луча sP составляет абсолютный минимум интеграла I , в то время как акустическая длина отраженного луча sOp дает относительный минимум среди всех возможных траекторий sOp или sO_2p в некоторой области вблизи sOp .

3. Еще один пример представлен на рис. 8.4. Рассмотрим действие принципа Ферма в модели, где источник расположен в начале координат, а скорость c меняется с глубиной z по закону $c(z) = c_0(1 + kz^2)$, $c_0 = 1$ км/с. Поскольку функция скорости симметрична относительно оси $z = 0$, прямая C на рис. 8.4, а, соединяющая точки $p_1 = [x_1, 0]$ и $p_2 = [x_2, 0]$, является лучом для любых точек x_1 и x_2 . В частности, если $p_1 = [0, 0]$ и $p_2 = [1, 0]$, то $t_C \equiv t_{01} = 1$.

Чтобы проверить, является ли значение $t_{01} = 1$ минимальным временем пробега, рассмотрим малые отклонения от прямого луча и вычислим времена пробега t вдоль кривой $z = 0,1 \sin \pi x$ для набора скоростных моделей, задаваемых параметром k . Рис. 8.4, б указывает на то, что в зависимости от k время t может быть как меньше, так и больше t_{01} . Наличие значений $t < t_{01}$ для относительно больших $k > 5$ доказывает то, что имеются такие траектории (кривая $z = 0,1 \sin \pi x$ является одной из них), вдоль которых время распространения волны меньше, чем вдоль прямой C . Хотя кажется, что это противоречит принципу Ферма о наименьшем времени распространения,

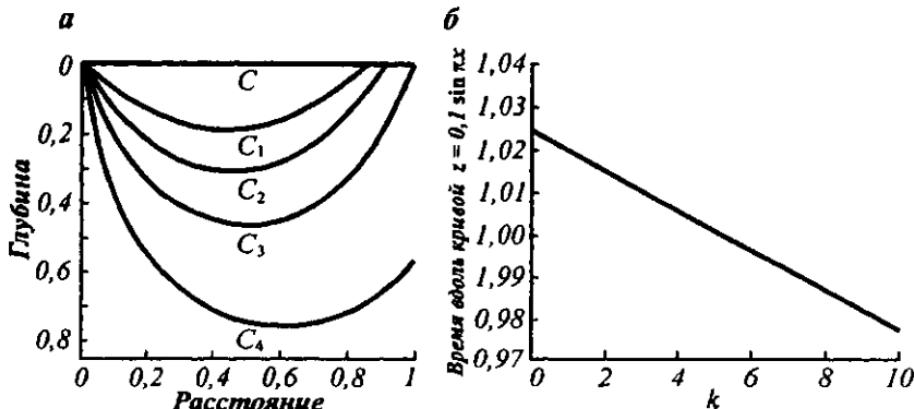


Рис. 8.4. Траектории лучей для $k = 0.7$ (a); зависимость времени пробега между точками $p_1[0, 0]$ и $p_2[1, 0]$, вычисленная вдоль дуги $z = 0,1 \sin \pi x$, от значения k (б)

существование таких траекторий связано с нарушением требования о регулярности лучей в некоторой окрестности C . На рис. 8.4 видно, что существуют такие “ныряющие” лучи C_1 , C_2 и C_3 , которые пересекают прямой луч C так, что через некоторые точки между $p_1 = [0, 0]$ и $p_2 = [1, 0]$ проходят, по крайней мере, два луча. Таким образом, можно заключить, что в действительности лучи могут соответствовать как минимуму, так и другим экстремумам (максимумам или седловым точкам) интеграла (8.33) в областях, где регулярность лучей нарушается.

4. Поскольку лучи характеризуются стационарными значениями акустической длины, для их нахождения обычно используют методы вариационного исчисления. Мы проиллюстрируем этот подход в дальнейшем, когда будем рассматривать лучи в присутствии плоской внутренней границы раздела.

ПОТОК ЭНЕРГИИ

Покажем теперь, что лучи определяют направление потока энергии. Как известно, избыточное давление P и скорость v связаны с потенциалом U следующим образом:

$$P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \text{ и } v = \text{grad } U,$$

где ρ – плотность.

По определению, компоненты вектора Пойнтинга определяются как

$$S_x = Pv_x, S_y = Pv_y, S_z = Pv_z. \quad (8.35)$$

Полагая, что потенциал U зависит от времени синусоидальным образом, из формулы (8.1) получим

$$U = A \cos(\omega t - k_0 L)$$

и соответственно

$$P = \rho \omega A \sin(\omega t - k_0 L).$$

Рассмотрим сначала среднее значение x -компоненты вектора Пойнтинга. Поскольку

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \cos(\omega t - k_0 L) + A k_0 \frac{\partial L}{\partial x} \sin(\omega t - k_0 L),$$

имеем

$$S_x = A \rho \omega \frac{\partial A}{\partial x} \sin(\omega t - k_0 L) \cos(\omega t - k_0 L) + A^2 k_0 \rho \omega \frac{\partial L}{\partial x} \sin^2(\omega t - k_0 L).$$

Среднее значение потока энергии

$$S_x^{av} = \frac{1}{T} \int_0^T S_x dt.$$

Здесь $T = 2\pi/\omega$.

С учетом

$$\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

и

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2},$$

соотношения (8.36) и (8.37) дают

$$S_x^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (8.38)$$

По аналогии получаем

$$S_y^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial y} \quad (8.39)$$

и

$$S_z^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (8.40)$$

Умножая каждое из равенств (8.38) – (8.40) на соответствующий единичный вектор и складывая получившиеся выражения, приходим к следующему равенству:

$$\mathbf{S}^{av} = \omega \frac{A^2 k_0 \rho}{2} \frac{\partial L}{\partial z} \operatorname{grad} L. \quad (8.41)$$

Таким образом, в соответствии с (8.9), направление среднего потока энергии совпадает с направлением луча.

Поскольку

$$|\operatorname{grad} L| = n,$$

величина вектора \mathbf{S}^{av} (интенсивность) равняется

$$|\mathbf{S}^{av}| = \omega \frac{k_0 \rho}{2} n A^2 = \frac{\omega k \rho}{2} A^2 \quad (8.42)$$

или

$$|\mathbf{S}^{av}| = \frac{P_0^2}{2 \rho c}, \quad (8.43)$$

где

$$P_0 = \omega \rho A \quad (8.44)$$

определяет величину давления.

8.2. ПОВЕДЕНИЕ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ, ГДЕ СКОРОСТЬ ЗАВИСИТ ОТ ОДНОЙ ДЕКАРТОВОЙ КООРДИНАТЫ

Предположим, что скорость c является непрерывной функцией, которая меняется только вдоль оси z . Согласно формулам (8.15) – (8.16), уравнение луча записывается как

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \operatorname{grad} n \quad (8.45)$$

или

$$n \frac{\partial x}{\partial s} = \operatorname{const}, \quad n \frac{\partial y}{\partial s} = \operatorname{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (8.46)$$

поскольку

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial y} = 0.$$

Покажем сначала, что все лучи лежат в вертикальной плоскости (рис. 8.5, а). Для доказательства введем вектор \mathbf{M} следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mathbf{k} \times n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \mathbf{k} \times n \mathbf{s}_0, \quad (8.47)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{s}_0 – единичные векторы в направлении оси z и луча соответственно.

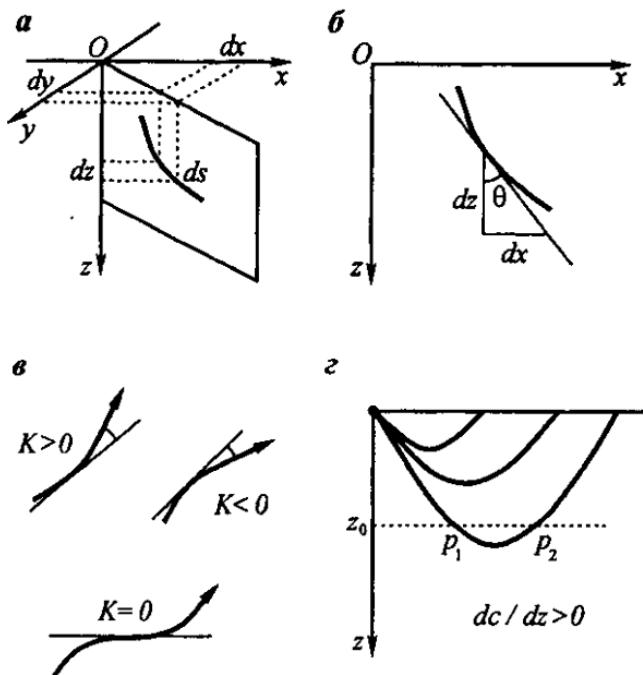


Рис. 8.5. Геометрия луча (a); иллюстрация формулы (8.52) (b); знак кривизны и изгиб луча (c); поведение лучей (d)

По определению, вектор \mathbf{M} в каждой точке луча перпендикулярен плоскости, образованной этими единичными векторами. Дифференцирование \mathbf{M} по s дает

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{k} \times \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial s} \times \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right). \quad (8.48)$$

Поскольку направление единичного вектора \mathbf{k} остается постоянным, первое слагаемое в правой части выражения (8.48) исчезает и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right).$$

Учитывая формулу (8.45), получим

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = \mathbf{k} \times \operatorname{grad} \mathbf{n} = \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \mathbf{k} = 0.$$

Таким образом, вектор \mathbf{M} вдоль луча не меняется:

$$\mathbf{M} = \text{const.}$$

Поскольку вектор \mathbf{M} параллелен плоскости xOy , все точки луча расположены в одной и той же вертикальной плоскости.

Это следует также из того, что согласно (8.46) отношение направляющих косинусов элемента луча ds относительно осей x и y остается постоянным:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial y}{\partial s}} = \text{const.} \quad (8.49)$$

ЗАКОН СНЕЛЛИУСА

Пусть источник расположен в начале координат O . Тогда распределение лучей обладает осевой симметрией относительно вертикальной оси z . Поэтому достаточно рассмотреть их поведение в одной из плоскостей, содержащих эту ось. Для простоты будем предполагать, что луч расположен в плоскости xOy (рис. 8.5, б). Уравнения (8.46) тогда запишутся как

$$n \frac{\partial x}{\partial s} = C \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (8.50)$$

где C – некоторая характеризующая луч константа.

Из рис. 8.5, б видно, что направляющими косинусами элемента ds являются

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sin \theta \text{ и } \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \theta. \quad (8.51)$$

Здесь θ – угол между осью z и направлением луча.

Таким образом, первое из соотношений (8.50) можно записать как

$$\sin \theta = \frac{C}{n} = \frac{C c(z)}{c_0} = p c(z) \text{ или } \frac{\sin \theta}{c(z)} = p, \quad (8.52)$$

где p – параметр луча, который часто называют медленностью.

Формула (8.52) описывает закон Снеллиуса в среде с непрерывным изменением скорости вдоль оси z . Согласно этому закону отношение синуса угла падения θ к скорости с остается в каждой точке луча постоянным. Однако это отношение может изменяться от одной лучевой траектории к другой.

Пусть скорость распространения и угол падения в окрестности источника равны соответственно c_0 и θ_0 . Тогда закон Снеллиуса (8.52) записывается как

$$\frac{\sin \theta}{c} = \frac{\sin \theta_0}{c_0}, \quad (8.53)$$

а лучевой параметр p равняется

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0} > 0. \quad (8.54)$$

Размерность этого параметра

$$|p| = c \cdot m^{-1},$$

а его величина меняется в диапазоне

$$0 \leq |p| \leq \frac{1}{c_0}.$$

Соотношение (8.52) или (8.53) представляет собой уравнение луча. Если известны параметр p и функция $c(z)$, то можно найти соответствующий им луч.

Выразим второе из соотношений (8.50) через функции θ и c . Дифференцирование левой части этого выражения дает

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (n \cos \theta) = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial n}{\partial s} = \frac{\partial n}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos^2 \theta \frac{\partial n}{\partial z},$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{n} \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (8.55)$$

Используя равенство

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c_0}{c} \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{\partial c}{\partial z},$$

из уравнения (8.55) получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{n} \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\sin \theta}{c} \frac{\partial c}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = p \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (8.56)$$

Уравнение луча в этом виде полезно также для понимания лучевой геометрии.

Как упоминалось ранее, угол падения – это угол между направлением луча и осью z , измеряемый против часовой стрелки. По определению, кривизна луча определяется как

$$K = \partial \theta / \partial s \quad (8.57)$$

и может быть положительной, отрицательной или равной нулю (рис. 8.5, θ).

Таким образом, равенство (8.56) можно переписать как

$$K = p \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (8.58)$$

Последнее выражение показывает, что кривизна луча прямо пропорциональна параметру p и производной от скорости. Ясно, что равенство (8.58) следует из более общего соотношения (8.22) между кривизной и градиентом скорости, полученного в предыдущем разделе.

Таким образом, мы пришли к двум разным формам уравнения луча, связывающим функции θ и $c(z)$:

$$\frac{\sin \theta}{c} = p \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = p \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Чтобы проиллюстрировать использование формул (8.52)–(8.58), рассмотрим, как ведут себя лучевые траектории при различных функциях скорости $c(z)$.

Случай 1: однородная среда

В этом простейшем случае

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

кривизна луча (8.58) всюду равняется нулю и, следовательно, все лучи являются прямыми.

Случай 2: скорость увеличивается с глубиной

Предположим теперь, что источник, как и ранее, расположен в начале координат, а скорость c почти линейно возрастает с глубиной; т.е.

$$\frac{\partial c}{\partial z} > 0.$$

Из формулы (8.58) следует, что кривизна луча всюду положительная, так что траектория луча стремится загнуться вверх. Иными словами, из уравнения луча ясно, что угол θ увеличивается с расстоянием z от источника. Следовательно, у каждого луча, за исключением того, который соответствует углу $\theta_0 = 0$, имеется такая точка, где $\theta = \pi/2$ и единичный вектор s_0 перпендикулярен оси z . При дальнейшем увеличении расстояния z угол θ становится больше $\pi/2$, и луч изгибается в сторону области с меньшей скоростью.

Из формулы (8.52) следует, что в точке поворота $\theta = \pi/2$ скорость ведет себя обратно пропорционально параметру луча p :

$$c(z) = \frac{1}{p} = \frac{c_0}{\sin \theta_0}.$$

Так как скорость распространения монотонно увеличивается с глубиной, координата z точки поворота луча уменьшается с ростом угла θ_0 (рис. 8.5, г).

У лучей в рассматриваемой среде существует еще одно интересное свойство, которое состоит в том, что они симметричны относительно вертикаль-

ной оси, проходящей через точку поворота. Действительно, представим себе горизонтальную линию $z = z_0$ (рис. 8.5, σ), пересекающую луч в точках p_1 и p_2 . Поскольку эти точки находятся на одинаковой глубине, кривизна луча (8.58) в них также одинакова. Помимо этого, из (8.52) имеем

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 – углы соответственно в точках p_1 и p_2 . Из последнего равенства следует, что

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Геометрия лучей и существование зон, где они взаимно пересекаются, существенно зависят от скорости увеличения функции $c(z)$ с глубиной.

Случай 3: скорость уменьшается с глубиной

Предположим, что с увеличением координаты z скорость падает, т.е. $dc/dz < 0$.

Поведение лучей в этом случае показано на рис. 8.6, a . Все лучи, за исключением горизонтального луча $\theta_0 = \pi/2$, стремятся с увеличением глубины стать параллельными осями z . Снова представим себе горизонтальную линию $z = z_0$. Из рис. 8.52 следует, что

$$\sin \theta(z) = pc(z).$$

Следовательно, функция $\theta(z)$ асимптотически стремится к значению $\theta = 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Соотношение

$$\frac{\sin \theta(z_1)}{c(z_1)} = \frac{\sin \theta(z_2)}{c(z_2)} = p$$

показывает, что

$$\theta(z_2) < \theta(z_1), \text{ если } z_2 > z_1,$$

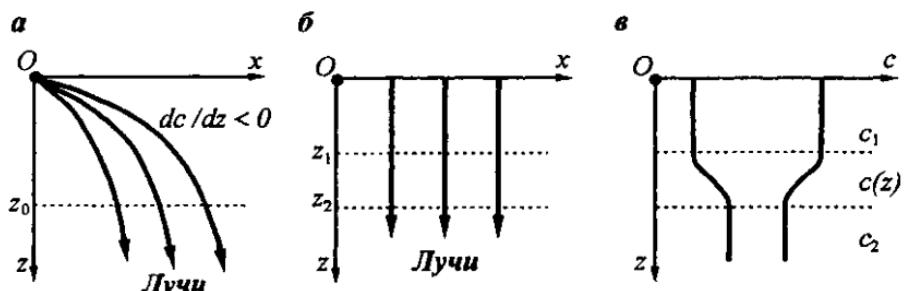


Рис. 8.6. Поведение лучей при $dc/dz < 0$ (a); нормальное падение плоских волн (b); зависимость скорости от глубины (c)

так как $c(z_2) < c(z_1)$. Последнее неравенство для угла θ подтверждает, что $\theta = 0$ является асимптотическим значением.

Случай 4: нормальное падение плоских волн

Рассмотрим вместо точечного источника распространяющуюся вертикально плоскую волну, падающую на плоскость $z = 0$. В этом случае соответствующие лучи характеризуются углом $\theta_0 = 0$ и поэтому, независимо от поведения функции $c(z)$, плоская волна распространяется в одном и том же направлении вдоль прямых вертикальных лучей (рис. 8.6, б). Этот вывод следует непосредственно из принципа Гюйгенса или из закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} = 0$$

или $\theta = 0$.

Однако в общем случае, когда скорость c зависит не только от вертикальной координаты z , фронт волны перестает быть плоским, его форма изменяется и, помимо этого, лучи могут пересекаться.

Случай 5: модель с переходной зоной ($c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$)

Рассмотрим более сложную модель среды, в которой существуют две области с различными скоростями (постоянными в пределах своей области). Пусть, кроме этого, в указанной среде существует переходный слой, где скорость меняется монотонно (рис. 8.6, в). Предположим также, что источник находится в начале координат в верхней среде, а функция $c(z)$ всюду непрерывна. Вначале рассмотрим случай, когда скорость в переходном слое относительно быстро возрастает, т.е. $c_2 > c_1$ и $dc/dz > 0$.

Очевидно, что луч с параметром $p = 0$ ($\theta_0 = 0$) – это прямая, направленная вдоль оси z . Однако для других лучей наблюдается совершенно другая картина. Поскольку в пределах переходного слоя производная dc/dz положительна, угол падения θ увеличивается с ростом z . Если параметр луча p относительно мал, его угол падения $\theta(z)$ не достигает значения $\pi/2$ даже на нижней границе слоя. Лучи этой первой группы проходят через слой и появляются в среде, имеющей скорость c_2 . Таким образом, рассматриваемые лучи состоят из трех частей: прямых линий поверх и ниже переходного слоя и искривленного участка внутри него (рис. 8.7, а).

Из формулы (8.53) следует, что

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}, \quad (8.59)$$

где θ_1 и θ_2 – углы падения в верхней и нижней части среды. Как будет показано в дальнейшем, это соотношение описывает закон Снеллиуса для преломленного луча на границе сред с различными скоростями.

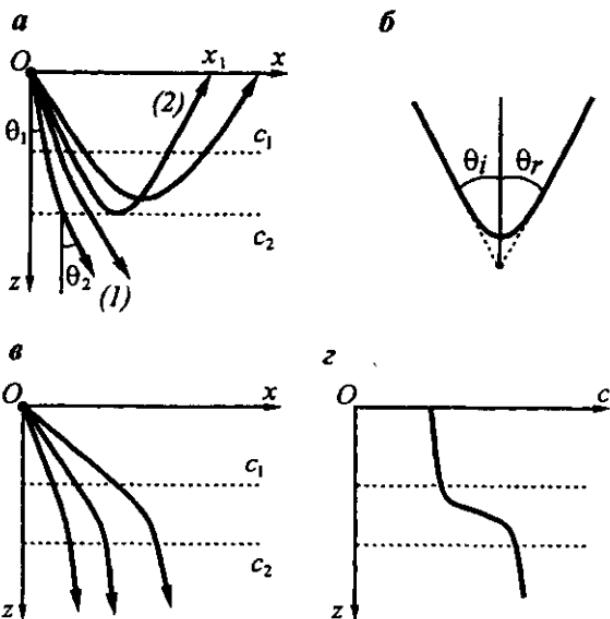


Рис. 8.7. Различные группы лучей (a); симметрия луча относительно точки поворота (б); поведение лучей (в); зависимость скорости от координаты z (г)

Пусть луч, приходящий в точку поворота на нижней границе слоя, характеризуется углом θ_0^c . Тогда в этой точке

$$\sin \theta_0^c = c_1 / c_2, \quad (8.60)$$

и луч возвращается в верхнюю среду. Дальнейшее увеличение угла падения ($\theta_0 > \theta_0^c$) приводит к уменьшению координаты z точки поворота. Асимптотически она достигает верхней границы промежуточного слоя. Соответственно, вторая группа лучей возвращается в верхнюю среду, где они становятся прямыми линиями (см. рис. 8.7, a). Очевидно, что траектории лучей симметричны относительно этой точки (рис. 8.7, б). Мы снова имеем

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \text{ или } \theta_2 = \pi - \theta_1. \quad (8.61)$$

Это равенство, аналогичное (8.59), также представляет собой закон Снеллиуса. В дальнейшем мы получим это соотношение из граничных условий.

Рассмотрим далее, как ведут себя лучи вдоль оси x . Лучи отсутствуют на следующем интервале (см. рис. 8.7, a):

$$0 \leq x < x_1. \quad (8.62)$$

Угол θ_0^c , под которым луч пересекает прямую $z = 0$ в точке x_1 , определяется из соотношения (8.59). Угол θ_0^c иногда называют критическим углом. При

больших значениях x наблюдаются лучи, которые приходят под углом θ_0 , равным углу падения.

Таким образом, критический угол θ_0^c позволяет разделить все семейство лучей на две группы: 1) лучи, которые проникают в нижнюю среду, и 2) лучи, которые имеют точку поворота в промежуточном слое.

Очевидно, что в противоположном случае, когда скорость $c(z)$ монотонно уменьшается в сторону нижней среды и $c_2 < c_1$, точки поворота отсутствуют (рис. 8.7, в). Соответственно угол преломления θ_2 в нижней среде меньше угла θ_0 в верхней области и согласно закону Снеллуса мы имеем

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_0 < \sin \theta_0.$$

Случай 6: модель с переходной зоной ($dc_1/dz > 0$ и $dc_2/dz > 0$)

Предположим что в верхней и нижней части среды скорость ведет себя почти линейно, но в промежуточной зоне производная dc_1/dz изменяется в большей степени (рис. 8.7, г). Как и в предыдущих случаях, будем полагать, что источник находится в начале координат. В такой среде удобно различать три группы лучей, показанных на рис. 8.8, а. Точка поворота первой группы лучей располагается выше промежуточного слоя, а ее координата x постепенно увеличивается с увеличением угла θ_0 . Пусть луч, точка поворота

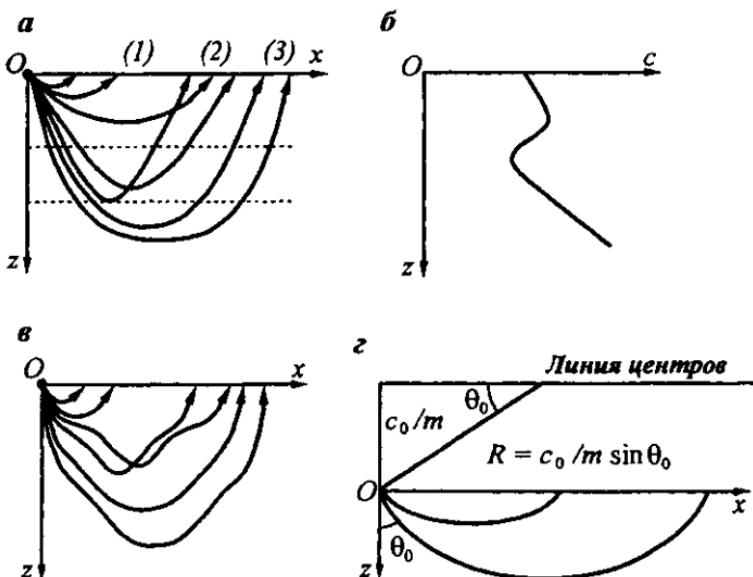


Рис. 8.8. Поведение лучей (а, в); зависимость скорости от координаты z (б); поведение лучей в среде с постоянным градиентом скорости (с)

которого расположена на нижней границе верхней области, характеризуется углом θ_0^* . Очевидно, что угол падения θ_0 первой группы подчиняется следующему условию:

$$\theta_0 \geq \theta_0^*.$$

Помимо этого, существует диапазон углов $\theta_0 < \theta_0^*$, для которого точка поворота лучей лежит внутри промежуточного слоя. Это происходит из-за того, что внутри слоя скорость меняется достаточно сильно. Такие лучи, образующие вторую группу, пересекаются с некоторыми из лучей первой группы в верхней среде. Лучи с относительно малыми значениями θ_0 образуют третью группу с точкой поворота, расположенной ниже промежуточного слоя.

Случай 7: низкоскоростная зона

Предположим, что при малых z скорость постепенно увеличивается с глубиной. Тогда существует диапазон глубин, где

$$\frac{dc}{dz} < 0.$$

После этого интервала скорость начинает увеличиваться даже быстрее, чем в верхней части среды (рис. 8.8, б).

Лучи с достаточно большими значениями θ_0 образуют первую группу. Как и в предыдущем случае, они расположены в верхней области, где скорость увеличивается с глубиной. Координата x точки поворота таких лучей обычно возрастает с увеличением θ_0 . Вторая группа лучей характеризуется меньшими значениями θ_0 . Когда какой-нибудь луч из этой группы достигает зоны, в которой скорость уменьшается, его угол преломления становится меньше и луч разворачивается вниз. Поэтому можно наблюдать сразу два явления: зону тени, в которой лучи отсутствуют, и пересечение лучей (рис. 8.8, б). Наконец, третья группа состоит из лучей с относительно небольшими значениями θ_0 , точки поворота которых находятся довольно глубоко.

УРАВНЕНИЕ ЛУЧА В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

После того, как мы качественно рассмотрели поведение лучей в различных средах, целесообразно привести описание траектории луча в параметрической форме:

$$x = x(z) \quad \text{и} \quad t = t(z), \quad (8.63)$$

где x – горизонтальная координата точки на луче; t время пробега от источника, расположенного в начале координат.

Из соотношений (8.51) имеем

$$dx = \sin \theta \, ds, \quad dz = \cos \theta \, ds.$$

Следовательно,

$$x = \int_0^z \sin \theta \, ds \text{ или } x = \int_0^z \operatorname{tg} \theta \, dz. \quad (8.64)$$

По определению,

$$t = \int_0^z \frac{ds}{c} \text{ или } t = \int_0^z \frac{dz}{c \cos \theta}. \quad (8.65)$$

С учетом того, что

$$\frac{\sin \theta}{c} = p \text{ и } \cos \theta = \sqrt{1 - p^2 c^2},$$

расстояние x и время t выражаются через скорость и параметр луча p как

$$x(z, p) = p \int_0^z \frac{c(z) dz}{\sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}$$

и

$$t(z, p) = \int_0^z \frac{dz}{c(z) \sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}. \quad (8.66)$$

Всюду далее мы будем предполагать, что у луча есть точка поворота и, следовательно, он возвращается к плоскости $z = 0$.

Учитывая симметрию лучей и принимая во внимание выражения (8.66), для точки на этой плоскости имеем

$$x(p) = 2p \int_0^{z_{\max}} \frac{cdz}{\sqrt{1 - p^2 c^2}} \quad (8.67)$$

и

$$t(p) = 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{c(z) \sqrt{1 - p^2 c^2}},$$

где z_{\max} обозначает координату z точки поворота, т.е. максимальную глубину проникновения луча.

Следует заметить, что параметр луча p можно представить, как минимум, двумя различными способами:

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \text{ и } p = \frac{1}{c(z_{\max})}. \quad (8.68)$$

Здесь $c(z_{\max})$ – скорость в точке поворота; ее значение является максимальным вдоль луча.

ЛИНЕЙНОЕ ВОЗРАСТАНИЕ СКОРОСТИ С ГЛУБИНОЙ

Чтобы показать, как используются параметрические уравнения луча, рассмотрим очень простой случай, когда скорость линейно возрастает с глубиной (рис. 8.8, г):

$$c(z) = c_0 + mz. \quad (8.69)$$

Очевидно, что для произвольной функции $c(z)$ всегда можно выбрать такие интервалы, где скорость меняется от z почти линейно.

Прежде всего, из равенства (8.56) следует, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = p \frac{dc}{dz} = mp. \quad (8.70)$$

Таким образом, кривизна каждого луча постоянна, и это означает, что траектория луча является дугой некоторой окружности. По определению, радиус кривизны дуги

$$R = \frac{1}{\partial \theta / \partial s} = \frac{1}{pm} = \frac{c_0}{m \sin \theta_0}, \quad (8.71)$$

т.е. радиус кривизны обратно пропорционален синусу угла выхода θ_0 .

Из рис. 8.8, г видно, что центры таких окружностей лежат на прямой, расположенной на расстоянии c_0/m от плоскости $z = 0$. Напомним, что мы рассматриваем случай, когда градиент скорости всюду является постоянным. Если же на некотором интервале z производная ds/dz имеет другое значение, то центры соответствующих дуг окружностей будут лежать на другой прямой. В частности, когда указанная производная становится отрицательной, т.е. скорость на некотором интервале глубин уменьшается, линия центров располагается под лучами.

Поскольку скорость линейно зависит от координаты z , легко получить параметрические уравнения луча в явном виде. Действительно, из закона Снеллиуса следует, что

$$\sin \theta = pc(z).$$

Дифференцируя это выражение по z , получим

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dz} = p \frac{dc}{dz} = pc'$$

или

$$dz = \frac{d\theta}{pc'} \cos \theta.$$

Подстановка последнего соотношения в формулу (8.64) дает

$$x(z) = \frac{1}{p} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{c'(z)} d\theta. \quad (8.72)$$

Аналогично этому

$$t(z) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{p c c'} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{c' \sin \theta}. \quad (8.73)$$

Поскольку

$$c' = m,$$

выражения (8.72) – (8.73) переписываются как

$$x = \frac{1}{pm} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = \frac{c_0}{m} \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin \theta_0} \quad (8.74)$$

и

$$t = \frac{1}{m} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{m} \ln \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \theta_0 / 2}.$$

В частности, если $\theta = \pi/2$ (точка поворота), то

$$x = \frac{c_0}{m} \operatorname{ctg} \theta_0 \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{m} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}.$$

Значения x и t в плоскости $z = 0$ определяются выражениями

$$x = \frac{2c_0}{m} \operatorname{ctg} \theta_0 \quad \text{и} \quad t = \frac{2}{m} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}. \quad (8.75)$$

Эти соотношения связывают между собой значения угла выхода θ_0 , с одной стороны, и координату x на прямой $z = 0$ и время прихода t – с другой.

Покажем, как в этом случае можно найти величины θ_0 , m и z_{\max} . Если известны x и t , то угол выхода θ_0 определяется из выражений (8.75):

$$\frac{x}{t} = c_0 \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}},$$

при условии, что скорость c_0 задана. После этого величина m вычисляется с помощью любого из соотношений (8.75) и скорость становится, таким образом, известной для произвольной глубины.

Поскольку параметр луча, приходящего в точку с координатами x и $z = 0$ определяется как

$$p = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

мы можем определить скорость в точке поворота:

$$c(z_{\max}) = 1/p.$$

Затем, используя формулу (8.69), можно определить максимальную глубину проникновения луча.

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Рассмотрим как ведет себя интенсивность потока энергии, переносимой вдоль луча. Так как источник расположен в начале координат и

$$\operatorname{grad} c = \frac{dc}{dz} \mathbf{k},$$

распределение интенсивности, а также сами лучи обладают осевой симметрией относительно оси z . Как известно, луч указывает направление вектора Пойнтинга. В соответствии с этим удобно представить себе образованную лучами систему элементарных трубок. Как отмечалось ранее, количество энергии, проходящей через поперечные сечения каждой из таких трубок, остается постоянным, поскольку поток энергии через боковые поверхности трубы отсутствует. Следовательно, величина вектора Пойнтинга обратно пропорциональна площади сечения элементарной трубы. Вблизи источника поток энергии имеет радиальное направление. Предположим, что излучение источника составляет N единиц в секунду в конусе, телесный угол которого равен единице. Рассмотрим элементарную трубку, образованную вокруг луча с углом выхода θ_0 (рис. 8.9, а). Телесный угол ω и угол выхода θ_0 связаны между собой соотношением

$$\omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

Выполнив операцию дифференцирования, получим

$$d\omega = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0.$$

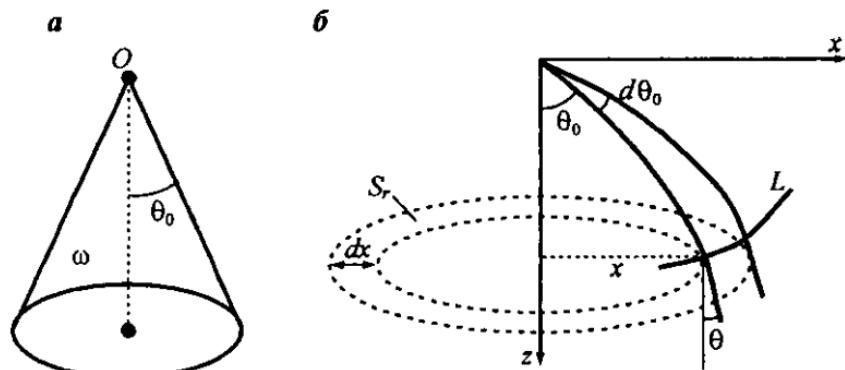


Рис. 8.9. Интенсивность потока энергии

Площадь сегмента кольца шириной dx , расположенного в горизонтальной плоскости (рис. 8.9, б), равняется

$$dS_r = 2\pi x dx.$$

Следовательно, площадь сечения трубы, расположенной на фазовой поверхности L ,

$$dS = dS_r \cos \theta 2\pi x dx \cos \theta.$$

Таким образом, интенсивность потока энергии в точке с углом θ определяется как

$$I = \frac{N d\omega}{dS} = \frac{\sin \theta_0 d\theta_0}{x \cos \theta dx} N.$$

Горизонтальное расстояние x от оси z до произвольной точки на луче можно рассматривать как функцию θ_0 и z . Таким образом, для каждой заданной глубины $z = \text{const}$ имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \theta_0} d\theta_0.$$

В действительности, для каждой плоскости $z = \text{const}$ можно записать

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{dx}{d\theta}.$$

Поэтому интенсивность I можно записать как

$$I = \frac{N \sin \theta_0}{x \frac{\partial x}{\partial \theta} \cos \theta}. \quad (8.76)$$

Последнее выражение заметно упрощается для случая, когда скорость линейно возрастает с глубиной. Вычислим сначала производную $\partial x / \partial \theta_0$. Из формулы (8.74) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[\sin \theta_0 \left(-\sin \theta_0 + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right) - (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta_0 \right] = \\ &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[-1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right]. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Дифференцирование равенства

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} = \frac{\sin \theta}{c}$$

дает

$$\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = \frac{c}{c_0} \cos \theta_0$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}.$$

Подстановка этого соотношения в формулу (8.77) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \left[-1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \frac{\sin \theta \cos \theta_0}{\sin \theta_0 \cos \theta} \right] = \\ &= \frac{c_0}{m \sin^2 \theta_0} \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{\cos \theta \sin \theta_0}.\end{aligned}$$

Таким образом, вместо выражения (8.76) мы получаем

$$I = N \frac{\sin^2 \theta_0}{x^2}. \quad (8.78)$$

Интенсивность уменьшается пропорционально квадрату горизонтального расстояния x . В частности, давление и скорость частиц обратно пропорциональны расстоянию x .

ГОДОГРАФЫ

Приступим теперь к обсуждению другой темы. Предположим, что вдоль оси x измеряется время прихода волны, т.е. известна функция

$$t = t(x). \quad (8.79)$$

Эта функция называется годографом волны, и наша цель состоит в том, чтобы изучить некоторые ее свойства. Очевидно, что если скорость почти линейно растет с глубиной, время прихода также монотонно увеличивается с расстоянием x (рис. 8.10, а). Легко определить наклон годографа. По определению, за интервал времени dt фазовая поверхность L перемещается вдоль луча на расстояние $c_0 dt$. В то же время смещение dx в направлении x равняется

$$dx = c_a dt, \quad (8.80)$$

где c_a – кажущаяся скорость волны вдоль оси x .

Следовательно, наклон кривой $t = t(x)$ обратно пропорционален c_a :

$$dt/dx = 1/c_a. \quad (8.81)$$

Из рис. 8.10, б видно, что

$$c_0 dt = c_a dt \sin \theta_0$$

или

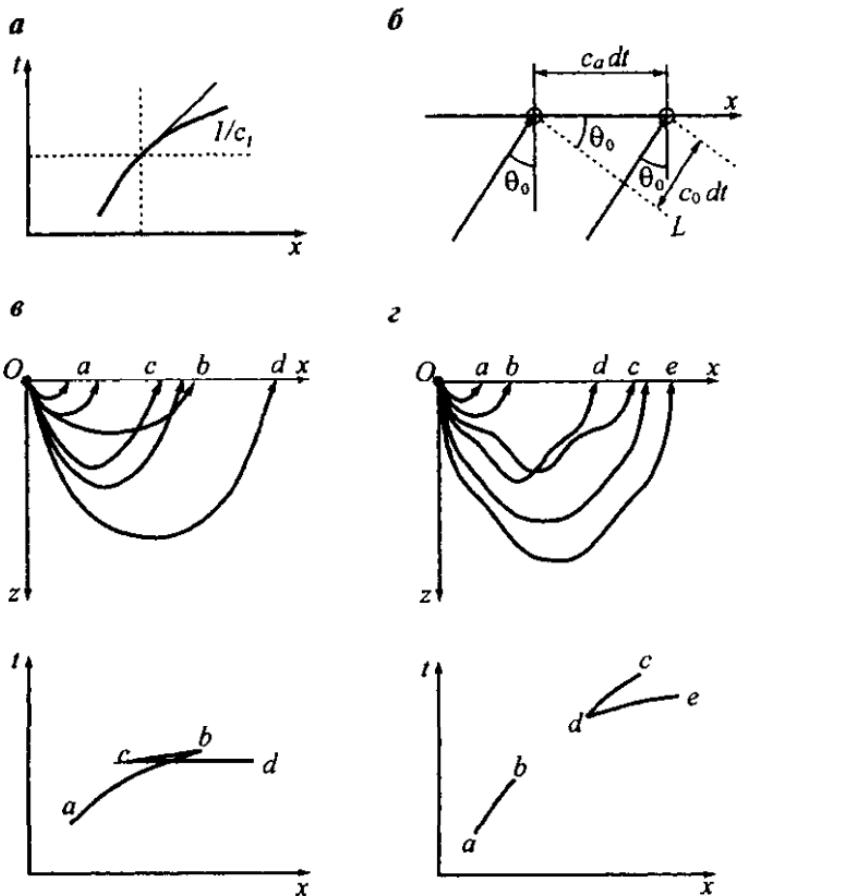


Рис. 8.10. Наклон годографа (а); иллюстрация формулы (8.82) (б); устроение годографа (с); поведение лучей в зоне тени (д)

$$c_a = c_0 / \sin \theta_0, \quad (8.82)$$

поскольку угол падения θ в точках, принадлежащих оси x , совпадает с углом выхода θ_0 .

Согласно (8.68) кажущаяся скорость равняется скорости в точке поворота луча, т.е.

$$c_a = c_t$$

или

$$dt/dx = 1/c_t. \quad (8.83)$$

Поскольку скорость увеличивается с глубиной, наклон годографа с ростом x уменьшается. Следует отметить, что равенство (8.83) позволяет оценить скорость на различных глубинах, которые, однако, остаются неизвестными.

Другими словами, мы не знаем координаты z точки, в которой вычисляем значение скорости.

Предположим, что в среде имеется промежуточная зона, в которой скорость возрастает относительно быстро. Как было показано ранее, в этом случае естественно рассмотреть три группы лучей, различающихся своим поведением. Годографы в этом случае имеют более сложную форму и подразделяются на три ветви (рис. 8.10, в). Одна из них, ab , соответствует лучам, расположенным в верхней среде. Координата x точки поворота этих лучей увеличивается с ростом угла θ_0 . Поэтому при увеличении x наклон кривой ab становится меньше. Это нормальная ветвь годографа, которая наблюдалась и в первом примере. Похожее поведение наблюдается у второй ветви, cd , характеризующей лучевые траектории, расположенные в нижней части среды. И, наконец, третья ветвь, cb , относится к лучам, точка поворота которых находится в промежуточной зоне, где скорость быстро возрастает с глубиной. Поэтому точки поворота лучей с относительно небольшими углами выхода θ_0 , расположены ближе к оси z . Соответственно наклон ветви cb увеличивается с ростом x . Таким образом, в этом случае мы наблюдаем утройство годографа.

Очевидно, что на интервале

$$0 < x < a$$

только лучи первой группы пересекают ось x . В каждую точку интервала

$$c < x < b$$

приходят лучи всех трех групп, хотя это и происходит, в общем случае, при различных временах t .

Наконец, если

$$b < x < d,$$

то ось x пересекают только лучи, имеющие точку поворота в нижней среде.

Ранее мы показали, что если скорость увеличивается с глубиной в нижней и верхней части среды, а в промежуточной зоне уменьшается, то возникает зона тени. В этом случае годограф имеет разрыв, и, кроме того, возникают две новых ветви годографа (рис. 8.10, г).

Интервал кривой ab вызван обычной лучевой картиной, наблюдавшейся в верхней части среды. Интервал bd является зоной тени. Его появление связано с уменьшением скорости в промежуточной зоне. Часть кривой de также демонстрирует нормальную лучевую картину, для которой наклон кривой уменьшается при увеличении расстояния x . Эта часть годографа описывает лучи, проходящие через более глубокие части среды. Помимо этого, имеется ветвь dc с другим наклоном, определяющимся наличием промежуточной зоны. Таким образом, мы видим, что в общем случае функция $t(x)$ является многозначной.

Как уже отмечалось, наклон годографа позволяет определить значения

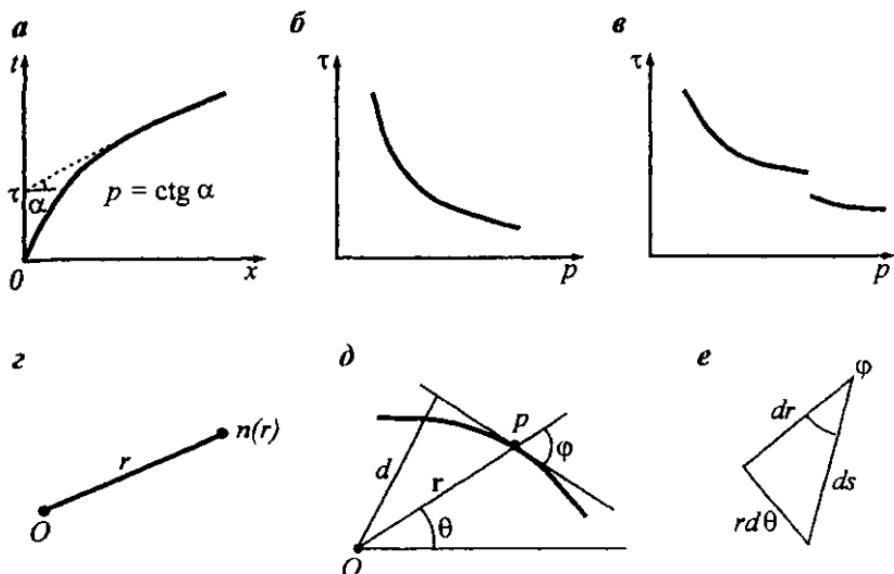


Рис. 8.11. Определение функции τ (a); τ как функция p , когда $ds/dz > 0$ (б); функция τ (p) в присутствии внутреннего низкоскоростного слоя (в); радиальное распределение скорости (г); иллюстрация формулы Буге (д); иллюстрация соотношения (8.89) (е)

скорости, а также параметр p луча, пришедшего в точку с координатой x . Наряду с этим существует функция $\tau(p)$:

$$\tau(p) = t - xp = \int_0^z \frac{\sqrt{1 - p^2 c^2(z)}}{c(z)} dz,$$

показанная на рис. 8.11, б, в. Эта функция иногда используется для определения скорости $c(z)$.

8.3. ПОВЕДЕНИЕ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ, ГДЕ СКОРОСТЬ ЗАВИСИТ ОТ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ r

Рассмотрим теперь пример, который интересен с точки зрения глобальной сейсмологии. Предположим, что параметр n зависит только от расстояния r от начала координат (рис. 8.11, г), т.е. в сферической системе координат

$$n = n(r). \quad (8.84)$$

Покажем, прежде всего, что все лучи лежат в одной плоскости. Введем для этого вектор

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times n \mathbf{s}_0,$$

перпендикулярный плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{r} и \mathbf{s}_0 .

Производная вектора \mathbf{M} по координате s вдоль луча определяется как

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r} \times \frac{d}{ds}(n\mathbf{s}_0). \quad (8.85)$$

Из формулы (8.15) следует, что

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r} \times \operatorname{grad} n.$$

Поскольку

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}_0 \text{ и } \operatorname{grad} n = \frac{\partial n}{\partial r} \mathbf{r}_0,$$

оба слагаемых в правой части (8.85) исчезают и, следовательно,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0) = 0,$$

т.е.

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0 = \text{const.} \quad (8.86)$$

Последнее равенство показывает, что вектор \mathbf{M} остается постоянным вдоль луча, т.е. каждый луч остается в одной и той же плоскости, независимо от положения источника относительно начала координат.

У лучей в рассматриваемой среде имеется еще одно интересное свойство. Согласно (8.86),

$$nr \sin \phi = \text{const}, \quad (8.87)$$

где ϕ – угол между радиус-вектором \mathbf{r} и направлением единичного вектора \mathbf{s}_0 (рис. 8.11, д).

Это равенство можно записать как

$$nd = \text{const.} \quad (8.88)$$

Последнее соотношение называется формулой Буге. Здесь d – расстояние от начала координат до касательной к произвольной точке p на луче. Этот результат показывает, что форма любого луча такова, что акустическое расстояние между началом координат и касательной к лучу остается постоянным. Поскольку луч лежит в плоскости, положение его точек естественно описывать двумя координатами, r и ϕ (рис. 8.11, б). Выразим угол ϕ через эти координаты. Из рис. 8.11, д видно, что

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (dr)^2$$

и

$$\sin \phi = \frac{r d\theta}{ds}.$$

Таким образом,

$$\sin \phi = \frac{r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + (dr^2/d\theta)^2}}. \quad (8.89)$$

Из формулы (8.87) следует, что

$$\frac{nr^2}{\sqrt{r^2(\theta) + (dr/d\theta)^2}} = C$$

или

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r} \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}, \quad (8.90)$$

где C – некоторая константа.

Интегрируя последнее выражение, мы приходим к уравнению луча в среде, где $n = n(r)$:

$$\theta = C \int \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}. \quad (8.91)$$

Каждый луч характеризуется некоторой константой C , и очевидно, что

$$nr > C.$$

Предположим, что источник и точка наблюдения расположены на сфере радиуса R_0 , а начало координат совпадает с центром этой сферы. Тогда наблюдаемое время пробега волны определяется из уравнений, аналогичных уравнению (8.67):

$$t = 2 \int_{R_{\min}}^{R_0} \frac{(R/c)^2}{\sqrt{(R/c)^2 - p^2}} \frac{dR}{R}$$

и

$$\Delta = 2p \int_{R_{\min}}^{R_0} \frac{dR}{R \sqrt{(R/c^2) - p^2}},$$

где

$$p = \frac{R \sin i(R)}{c(R)}$$

является параметром луча; i – угол между траекторией луча и радиальным направлением из начала координат; R_{\min} – радиальное расстояние до самой глубокой точки луча, и, наконец, Δ – угловое расстояние между источником и точкой наблюдения.

8.4. ЛУЧИ В БЛИЗИ ВНУТРЕННИХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА СРЕДЫ

Мы описали распространение лучей в средах, которые характеризовались непрерывными функциями скорости $c(z)$ и $c(r)$. В данном разделе мы обсудим, как проводить лучи, если среда состоит из однородных областей, разделенных внутренней границей, на которой скорость c терпит разрыв (рис. 8.12, *a*). Очевидно, что на такой границе уравнение эйконала не выполняется, поскольку в нем требуется, чтобы скорость c была непрерывной функцией. Следовательно, чтобы преодолеть эту трудность, необходимо использовать какие-то другие подходы.

В реальной ситуации между однородными частями среды могут существовать тонкие переходные зоны, в которых скорость быстро возрастает (рис. 8.12, *b*), оставаясь всюду непрерывной. Ранее было показано, что внутри таких зон падающий луч (*1*) может либо возвращаться в верхнюю среду (в этом случае у луча есть точка поворота), либо проникать в нижнюю среду (*2*), изменяя при этом свое направление (рис. 8.12, *b*). Из уравнения эйконала следует, что луч не может вести себя сразу двумя указанными способами в одной и той же точке. Этот вывод следует из предположения о том, что длина волны λ в пределах переходной зоны значительно меньше ее толщины h , т.е. $\lambda \ll h$, и, следовательно, вариации скорости на расстояниях порядка λ малы. Однако в сейсмологии используются волны такого частотного спектра, для которого длина волны обычно превышает h на несколько порядков:

$$\lambda \gg h.$$

В этом случае тонкий переходный слой ведет себя как поверхность разрыва скорости (рис. 8.12, *в*). В главе 3 мы рассмотрели распространение волны вдоль неоднородной пружины, когда скорость частиц была перпендикулярна границе. Было показано, что источники, возникающие на такой внутренней границе, приводят к появлению отраженных и проходящих волн. Мы будем использовать этот основополагающий факт в более общем случае, когда падающий луч произвольно ориентирован относительно поверхности S (рис. 8.12, *в*).

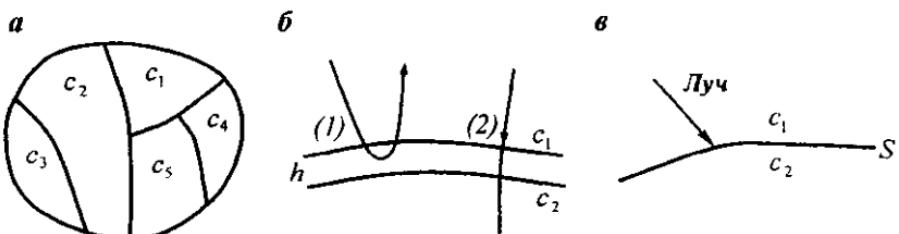


Рис. 8.12. Кусочно-однородная среда (*а*); поведение луча в присутствии тонкого слоя (*б*); граница раздела между средами с различными скоростями (*в*)

Поскольку среда выше и ниже поверхности S однородна, лучи являются прямыми, и наша цель состоит в том, чтобы определить направление отраженного и преломленного луча вблизи этой поверхности. Учитывая важность этой проблемы, мы используем несколько различных методов ее решения, но вначале предположим, что поверхность S является плоской.

ОТРАЖЕННЫЕ ЛУЧИ И ПРИНЦИП ФЕРМА

При изучении отражения лучей мы будем исходить из принципа Ферма, хотя этот принцип и следует из интеграла Лагранжа, который, в свою очередь, был получен из уравнения эйконала. Как известно, принцип Ферма гласит, что акустическая длина

$$N = \int_{p_1}^{p_2} n ds \quad (8.92)$$

между двумя точками p_1 и p_2 , расположенными на луче, минимальна, если путь интегрирования в (8.92) совпадает с самим лучом, а окрестность луча является регулярной.

Рассмотрим сначала отражение лучей от плоской поверхности (рис. 8.13, а). Предположим, что источник сферической волны находится в точке p_1 , а p_2 – точка наблюдения. Поскольку мы имеем дело с лучами, проходящими через одну и ту же среду ($n = \text{const}$), принцип Ферма в данном случае означает, что луч, соединяющий точки p_1 и p_2 , имеет минимальную длину. Конечно, луч d волны, распространяющейся от источника непосредственно к точке p_2 , удовлетворяет этому принципу, поскольку его длина минимальна (рис. 8.13, а). Однако наша цель состоит в том, чтобы определить луч, который приходит в точку p_2 , предварительно отразившись от поверхности S . Для такого луча можно нарисовать бесконечное число траекторий $p_1g_1p_2$, где точки g_1 принадлежат плоскости S (некоторые из таких точек показаны на рис. 8.13, а).

Согласно принципу Ферма, действительным лучом является та траектория из указанного множества, которая имеет минимальную длину. Чтобы найти этот луч, введем дополнительную точку p_2^* , являющуюся зеркальным отражением точки p_2 относительно плоскости S , и вычислим длину траекторий

$$p_1g_1p_2^*, p_1Op_2^* \text{ и } p_2g_2p_2^*, \quad (8.93)$$

показанных на рис. 8.13, б. Точка O специально выбрана на границе таким образом, чтобы траектория $p_1Op_2^*$ представляла собой прямую линию. По определению имеем

$$p_2a = p_2^*a$$

и, следовательно,

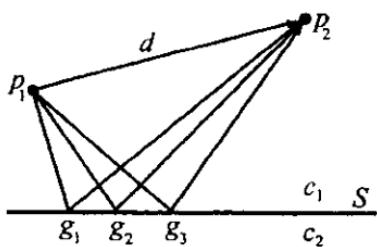
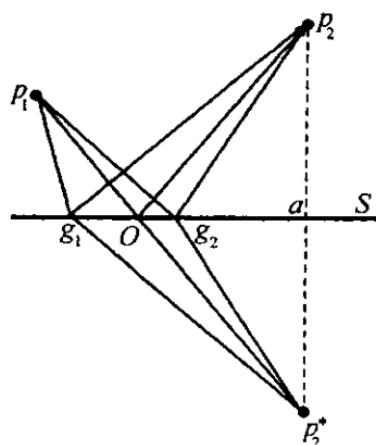
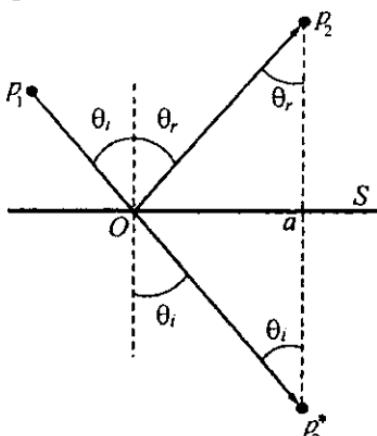
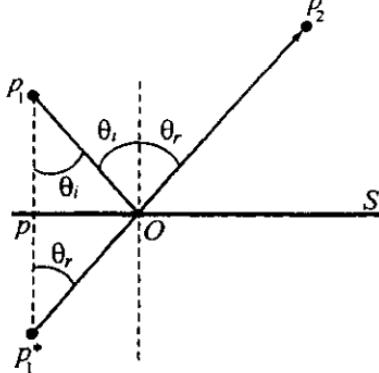
a**б****в****г**

Рис. 8.13. Прямые и отраженные лучи (а); иллюстрация формулы (8.94) (б); закон отражения Снеллиуса (в); фиктивный источник отраженного луча (г)

$$P_1g_1P_2^* = P_1g_1P_2, \quad P_1Op_2^* = P_1Op_2, \quad P_1g_2P_2^* = P_1g_2P_2. \quad (8.94)$$

Это означает, что вместо траекторий $P_1g_nP_2$ мы можем оценивать длину линий $P_1g_nP_2^*$. Известно, что каждая из сторон треугольника меньше суммы двух других. Например, рассматривая треугольник $P_1Op_2^*g_2P_1$, приходим к выводу, что

$$P_1Op_2^* < P_2^*g_2 + g_2P_1.$$

Таким образом, из равенств (8.94) следует, что

$$P_1g_nP_2 > P_1Op_2^* = P_1Op_2,$$

т.е. путь $p_1O p_2^*$ является кратчайшим и, следовательно, он описывает луч, падающий на плоскость, отражающийся от нее и затем приходящий в точку наблюдения p_2 . Как видно из рис. 8.13, б, точку отражения определить довольно просто. Для этого опустим перпендикуляр из точки наблюдения на границу раздела и отметим положение зеркального образа этой точки p_2^* . Затем положение точки O задается как пересечение прямой $p_1 p_2^*$ с плоскостью S . В наших построениях мы предполагаем, что падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости, и их взаимное расположение изображено на рис. 8.13, в. Введем теперь два угла θ_i и θ_r , которые составляют падающий и отраженный лучи с нормалью к границе раздела двух сред. Очевидно, что

$$Oa = Op_2 \sin \theta_r = O p_2^* \sin \theta_i.$$

Поскольку

$$Op_2 = O p_2^*,$$

мы получаем

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \text{, или } \theta_i = \theta_r. \quad (8.95)$$

Последнее соотношение описывает закон отражения Снеллиуса. Согласно этому закону, падающий и отраженный лучи составляют с нормалью к границе раздела один и тот же угол.

В частности, когда падающая волна распространяется вдоль нормали к плоскости S , падающий и отраженный лучи имеют противоположные направления: $\theta_i = \theta_r = 0$. С увеличением угла θ_i угол отражения θ_r становится больше и в конце концов достигает значения $\pi/2$.

Отражение волны происходит в каждой точке границы, и чтобы определить положение отраженного луча, удобно рассмотреть зеркальное отражение источника: p_1^* (рис. 8.13, г). Проводя прямую $p_1^* p_2$, мы получим отраженный луч Op_2 . Действительно, как видно из рис. 8.13, г, для углов выполняются следующие равенства:

$$\angle pp_1O = \theta_i, \quad \angle pp_1^*O = \theta_r,$$

и

$$pO = pp_1 \operatorname{tg} \theta_i = pp_1^* \operatorname{tg} \theta_r,$$

Поскольку

$$pp_1 = pp_1^*,$$

заключаем, что выполняется закон отражения Снеллиуса:

$$\theta_i = \theta_r.$$

Учитывая, что траектория $p_1^*O p_2$ является прямой, а расстояния $p_1 O p_2$ и $p_1^* O p_2$ равны друг другу, мы можем мысленно расположить источник в точке p_1^* и интерпретировать эту точку как фиктивный источник отраженной волны (рис. 8.14, a). Следовательно, фронт отраженной волны представляет собой часть сферической поверхности с центром в точке p_1^* .

Радиус этой сферы равняется

$$p_1^* p_2 = c_1 t, \quad (8.96)$$

где t – время распространения волны от источника к точке наблюдения вдоль луча $p_1 O p_2$, а само выражение (8.96) является уравнением волновой поверхности. Очевидно, что в силу осевой симметрии пересечением этой поверхности с плоскостью S является окружность радиуса pg (рис. 8.14, a).

Таким образом, в верхней среде имеется две сферические волны, а именно прямая волна с источником в точке p_1 и отраженная волна. Фазовые поверхности последней имеют общий центр в точке p_1^* , как если бы источник волны находился в этой точке. Конечно, обе волны распространяются с одинаковой скоростью c_1 . Поскольку всюду выше границы

$$p_1 p_2 < p_1^* p_2,$$

фронт прямой волны в любой момент времени расположен на большем расстоянии от источника, чем фронт отраженной волны. Однако в точках, принадлежащих плоскости S (рис. 8.14, a),

$$p_1 g = p_1^* g$$

и, следовательно, в каждый момент времени оба фронта имеют общую точку g , положение которой меняется во времени.

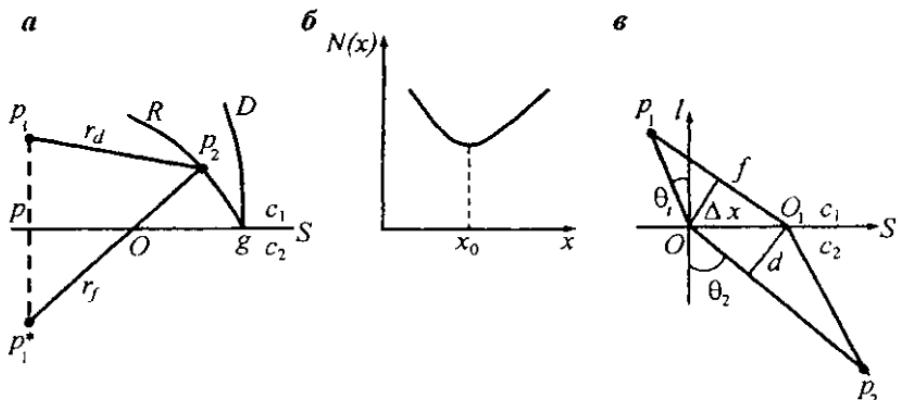


Рис. 8.14. Прямой и отраженный лучи (a); поведение функции $N(x)$ (б); иллюстрация формул (8.100) и (8.101) (в)

Для иллюстрации сказанного, предположим, что потенциал падающей волны является синусоидальной функцией времени:

$$U_i = \frac{A_i}{r_d} \sin \omega \left(t - \frac{r_d}{c_1} \right).$$

Тогда для отраженной волны имеем

$$U_r = \frac{A_r}{r_f} \sin \omega \left(t - \frac{r_f}{c_1} \right)$$

и фазы этих волн $\omega \frac{r_d}{c_1}$ и $\omega \frac{r_f}{c_1}$, определяемые длинами соответствующих лучей, в общем случае отличаются друг от друга.

Равенство углов (8.95) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_r}{c_1}, \quad (8.97)$$

что совпадает с законом Снеллиуса, выведенным из уравнения эйконала для случая, когда скорость c являлась непрерывной функцией в промежуточном слое (рис. 8.7, г). Однако это совпадение имеет место, если $c_2 > c_1$. Действительно, как было показано ранее, если внутри промежуточного слоя скорость падает ($c_2 < c_1$), то у луча отсутствует точка поворота. В отличие от этого, в случае границы раздела двух сред, на которой уравнение эйконала не действует, отраженная волна появляется, независимо от того, как соотносятся между собой скорости c_1 и c_2 .

ПРИНЦИП ФЕРМА И ПРЕЛОМЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

В этом разделе мы опишем преломление лучей на плоской границе раздела двух сред. Как и в случае отражения, можно представить себе бесконечное множество различных путей, соединяющих точки p_1 и p_2 . Однако только один из них является преломленным лучом, вдоль которого акустическая энергия распространяется и, пересекая границу раздела, достигает точки наблюдения. Согласно принципу Ферма акустическая длина N луча, задаваемая выражением (8.92), является минимальной среди всех путей, соединяющих точки p_1 и p_2 . Соответственно, функция $N(x)$, где x – координата точки на границе, имеет минимум. Этот минимум определяет точку, в которой падающий луч пересекает границу и далее направляется к точке p_2 . Чтобы определить положение данного луча, рассмотрим поведение функции $N(x)$ в окрестности указанного минимума (т.е. стационарного решения $x = x_0$). По определению, первая производная в этой точке равна нулю:

$$\frac{dN}{dx} = 0, \text{ если } x = x_0,$$

и, следовательно, ряд Тейлора в окрестности минимума имеет следующий вид (рис. 8.14, б):

$$N(x) \approx N(x_0) + \frac{\partial^2 N(x_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta^2 x}{2} + \dots, \quad (8.98)$$

где расстояние $\Delta x = x - x_0$ очень мало.

Пренебрегая вторым и последующими членами ряда Тейлора, можно сказать, что малые вариации x не приводят к изменению длины траекторий вблизи луча:

$$N(x) = \text{const}, \text{ если } x \approx x_0. \quad (8.99)$$

Учитывая этот факт, предположим, что путь p_1Op_2 является лучом, и сравним его акустическую длину с длиной пути $p_1O_1p_2$, расположенного в окрестности луча. Очевидно, что

$$p_1O_1 > p_1O.$$

Чтобы определить разность между этими путями, нарисуем окружность радиуса p_1O с центром в точке p_1 . Тогда

$$fO_1 = p_1O_1 - p_1O.$$

Поскольку дуга Of мала, ее можно заменить прямой линией, и в этом приближении мы получим треугольник OfO_1 , показанный на рис. 8.14, в. Поскольку стороны p_1O и Of перпендикулярны соответственно Of и OO_1 , мы заключаем, что угол O_1Of равен углу падения θ_1 , и, следовательно, разность длин fO_1 дается выражением

$$fO_1 = \Delta x \sin \theta_1. \quad (8.100)$$

Аналогичным образом мы видим, что длина преломленного луча Op_2 больше длины пути O_1p_2 на величину

$$Od = \Delta x \sin \theta_2, \quad (8.101)$$

где θ_2 – угол между преломленным лучом и нормалью к границе раздела.

Сравнение путей p_1Op_2 и $p_1O_1p_2$ показывает, что вариация Δx приводит к увеличению длины пути в первой среде и к уменьшению длины пути ниже границы. Поскольку полное изменение длины пути вблизи луча должно быть пренебрежимо малым, то, используя (8.100) – (8.101), мы получаем

$$n_1 fO_1 = n_2 Od$$

или

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (8.102)$$

где

$$n_1 = k_1/k_0, \quad n_2 = k_2/k_0.$$

В нашем случае

$$n_1 = 1 \text{ и } n_2 = k_2/k_1 = c_1/c_2$$

и уравнение (8.102) запишется как

$$\frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}. \quad (8.103)$$

Данное выражение описывает закон преломления Снеллиуса, который позволяет определить ориентацию преломленного луча.

Подход, использованный при выводе равенства (8.103) можно применить также для закона Снеллиуса в случае отражения. Рассматривая преломленные лучи, удобно различать следующие два случая:

- 1) $c_2 < c_1$ и 2) $c_2 > c_1$.

Случай 1: $c_2 < c_1$

Из соотношения (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i < \sin \theta_i, \quad (8.104)$$

и угол θ_2 между преломленным лучом и нормалью к границе раздела меньше угла падения θ_i :

$$\theta_2 < \theta_i \quad (8.105)$$

всюду, за исключением случая, когда $\theta_i = 0$, и соответственно

$$\theta_2 = 0,$$

т.е. когда падающий и преломленный лучи перпендикулярны границе раздела (рис. 8.15, а).

Очевидно, что с увеличением θ_i угол преломления также увеличивается и в пределе стремится к величине

$$\theta_2^{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i \right) < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку угол θ_2 в разных точках границы имеет различные значения, естественно задаться следующим вопросом. Имеют ли продолжения преломленных лучей в верхнюю часть среды общую точку пересечения? В силу осевой симметрии, если такая точка O существует, она должна располагаться на той же прямой OO_1 , на которой находится источник p_1 .

Как видно из рис. 8.15, б, горизонтальное смещение x можно определить двумя разными способами:

$$x = d \operatorname{tg} \theta_i \text{ и } x = L \operatorname{tg} \theta_2,$$

где L – расстояние между границей и точкой пересечения преломленного луча с нормалью.

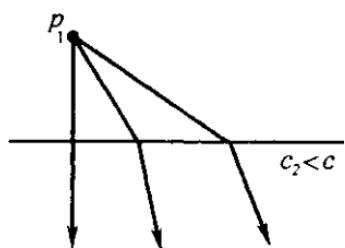
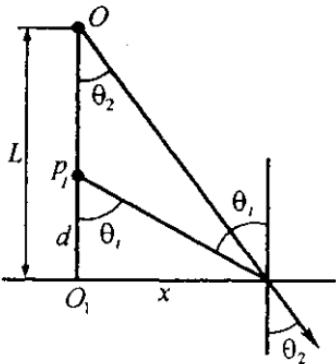
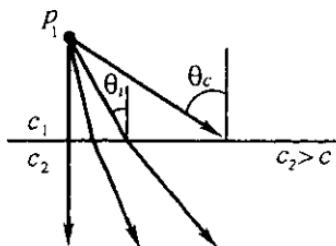
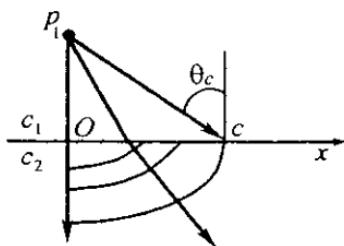
а**б****в****г**

Рис. 8.15. Поведение преломленных лучей ($c_2 < c_1$) (а, б); критический угол θ_c (в); различные интервалы на границе раздела (г)

Последнее выражение даёт

$$d \operatorname{tg} \theta_i = L \operatorname{tg} \theta_2,$$

или, используя закон Снеллиуса, получим

$$L = \frac{c_2}{c_1} d \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_i} = \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_i}{1 - \sin^2 \theta_i}} d.$$

Приведенное отношение меняется при изменении угла θ_i и соответственно преломленные лучи пересекаются в разных точках. Это показывает, что, в отличие от отраженных лучей, фазовые поверхности (поверхности равного эйконала) преломленных лучей не являются сферическими.

Случай 2: $c_2 > c_1$

В отличие от предыдущего примера ($c_2 < c_1$), угол преломления в данном случае больше угла падения (рис. 8.15, в). Действительно, из (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i \geq \sin \theta_i \quad (8.106)$$

или

$$\theta_2 > \theta_i,$$

где равенство выполняется только при нормальном падении луча: $\theta_i = 0$.

Как и в предыдущем случае, продолжения преломленных лучей в верхнюю часть среды пересекают перпендикуляр к плоскости S в различных точках, расположенных на интервале Op_1 .

Таким образом, в обоих случаях:

$$c_1 > c_2 \text{ и } c_2 > c_1$$

фазовые поверхности преломленной волны не являются сферическими.

В соответствии с законом Снеллиуса существует такое значение угла падения θ_i , для которого

$$\sin \theta_2 = 1,$$

и это значение определяется как

$$\frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{1}{c_2} \text{ или } \sin \theta_i = \frac{c_2}{c_1} < 1. \quad (8.107)$$

Как было отмечено ранее, угол θ_i^c , удовлетворяющий приведенному равенству, называется критическим углом. По определению, как только угол падения достигает значения θ_i^c , преломленный луч становится касательным (рис. 8.15, г).

Предположим, что угол θ_i больше угла θ_i^c :

$$\theta_i > \theta_i^c. \quad (8.108)$$

Из соотношения (8.103) следует, что

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i > 1. \quad (8.109)$$

Поскольку данное неравенство невозможно для реальных значений угла θ_2 , мы должны заключить, что преломленные волны не возникают в точках, где $\theta_i > \theta_i^c$, при условии, что длина волны стремится к нулю.

Таким образом, на границе раздела естественно выделить три различных области. Одна из них находится внутри окружности радиуса Oc (рис. 8.15, г):

$$x < Oc.$$

Преломленные волны, возникающие в пределах этой области, образуют с нормалью к границе угол, меньший, чем $\pi/2$. Соответствующие фазовые поверхности показаны на рис. 8.15, г.

Вторая группа преломленных волн представлена точками окружности радиуса Oc , где $\theta_i = \theta_c^r$. В таких точках преломленные лучи являются касательными к границе раздела, образующей в этом случае прямой угол с фазовой поверхностью (рис. 8.15, г).

Наконец, во всех остальных точках

$$x > Oc$$

преломление отсутствует.

Здесь следует сделать несколько замечаний.

1. В среде, где скорость в пределах промежуточного слоя быстро возрастает (рис. 8.7, в), точка поворота луча определяется тем же условием, что и точка c (рис. 8.15, г).

2. Отсутствие преломленных лучей за точкой c ($c > Oc$) обусловлено приближенным характером геометрической акустики. Точное решение граничной задачи показывает, что волны возникают и там, где угол θ , больше угла θ_c^r . Однако они, как правило, экспоненциально затухают в направлении, перпендикулярном границе раздела, и исчезают при $\omega \rightarrow \infty$.

3. Закон преломления Снеллиуса (8.103) и уравнение луча в среде с непрерывным изменением скорости c в некоторой степени похожи друг на друга. Это особенно заметно, когда мы сравниваем поведение преломленных лучей в присутствии тонкого слоя (см. рис. 8.7, в) и при наличии границы (рис. 8.15, в) при условии, что $c_2 > c_1$. В обоих случаях существуют области преломленных лучей во второй среде, а также точка поворота или точка, соответствующая критическому углу, где

$$\sin \theta_i = c_1/c_2,$$

и, наконец, точки промежуточного слоя и границы раздела, в которых преломленные лучи отсутствуют.

4. При изучении поведения лучей на плоской границе раздела двух сред мы вывели законы отражения и преломления

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_r}{c_2}. \quad (8.110)$$

Согласно этим законам в каждой точке границы раздела при $\theta < \theta_c$ одновременно возникают отраженный и преломленный луч. В этом состоит фундаментальное отличие от случая, в котором скорость является непрерывной функцией.

ЛУЧИ ГОЛОВНЫХ ВОЛН

Теперь мы снова обратим наше внимание на лучи, расположенные в верхней среде, предполагая при этом, что $c_1 < c_2$. Как мы знаем, в точку наблюдения приходят два луча, а именно прямой и отраженный. Прямой луч относится к множеству путей, соединяющих точки p_1 и p_2 , и среди всех таких

путей он имеет минимальную длину. Отраженный луч характеризуется минимальной длиной среди всех тех траекторий, направление которых изменяется на границе раздела. Оба этих луча находятся в первой среде, т.е. всюду вдоль этих лучей волны распространяются со скоростью c_1 . Оказывается, существует еще один, третий путь распространения акустической энергии от источника к точке наблюдения P_2 (рис. 8.16, *a*). Ранее мы показали, что, когда угол падения θ_i становится равным критическому углу θ_c , преломленный луч направлен параллельно границе раздела. Это позволяет предположить, что движение частиц среды в указанном направлении порождает волну в верхней среде. Путь этой волны состоит из трех прямолинейных участков, а именно из отрезков P_1O_1 и O_2P_2 , на которых скорость распространения равняется c_1 , и промежуточного участка O_1O_2 , расположенного в нижней среде, где скорость равняется c_2 .

Конечно, мы можем вообразить бесконечное множество таких траекторий, однако согласно принципу Ферма волна будет распространяться вдоль того пути, акустическая длина которого минимальна.

Прежде чем мы приступим к определению положения этого луча, следует заметить, что падающие лучи, пересекающие границу раздела в точках на интервале OO_1 (рис. 8.16, *a*), приводят к появлению преломленных лучей, направленных в сторону от плоскости S . Эти лучи не могут прийти в точку наблюдения P_2 . Следовательно, при рассмотрении всех возможных лучей для этого нового типа волн, положение точки O_1 , в которой $\theta_i = \theta_c$, и ориентация сегмента O_1O_2 , должны сохраняться неизменными, а положение точки O_2 может меняться. Покажем теперь, что путь $P_1O_1O_2P_2$ является лучом (рис. 8.16, *б*), если угол между элементом O_2P_2 и нормалью к границе раздела

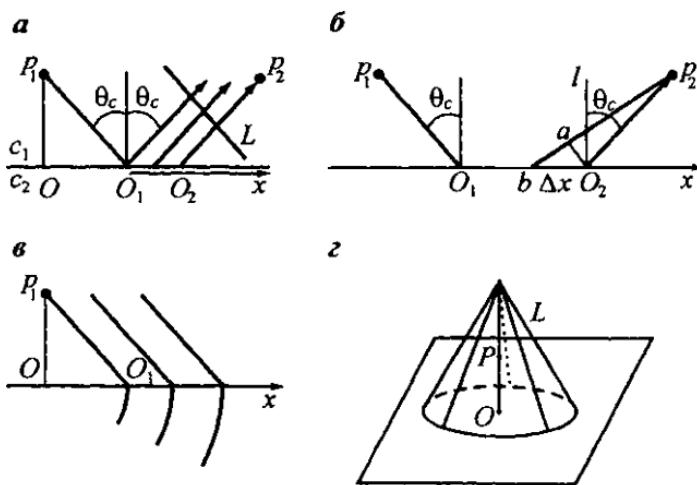


Рис. 8.16. Лучи и фронты головной волны (*а*); анализ функции ΔN (*б*); фронты головных волн (*в*, *г*)

равен критическому углу. Действительно, предположим, что акустическая длина пути $p_1O_1O_2p_2$ минимальна и равняется

$$N = c_1 \left(\frac{p_1O_1}{c_1} + \frac{O_1O_2}{c_2} + \frac{O_2p_2}{c_1} \right)$$

и сравним ее с акустической длиной пути $p_1O_1bp_2$

$$N_1 = c_1 \left(\frac{p_1O_1}{c_1} + \frac{O_1b}{c_2} + \frac{bp_2}{c_1} \right),$$

при условии, что точка b расположена на малом расстоянии Δx от точки O_2 (рис. 8.16, б).

Разность акустических длин этих путей

$$\Delta N = N - N_1 = c_1 \left(\frac{bO_2}{c_2} + \frac{O_2p_2}{c_1} - \frac{bp_2}{c_1} \right).$$

Как было показано для случая преломленных волн, разность ΔN должна обращаться в ноль, если пренебречь членами, пропорциональными $(\Delta x)^2$, и более высокого порядка. Для доказательства этого факта проведем через точку O_2 окружность с центром в точке p_2 и рассмотрим треугольник baO_2 . Поскольку углы p_2O_2b и aO_2b образованы взаимно перпендикулярными сторонами, мы имеем

$$\angle aO_2b = \theta_c.$$

Следовательно,

$$ab = \Delta x \sin \theta_c = \Delta x \frac{c_1}{c_2}.$$

Учитывая, что разность ΔN можно представить как

$$\Delta N = c_1 \left(\frac{\Delta x}{c_2} - \frac{ab}{c_1} \right),$$

получим

$$\Delta N = c_1 \left(\frac{\Delta x}{c_2} - \frac{\Delta x}{c_2} \right) = 0.$$

Это означает, что путь $p_1O_1O_2p_2$ является лучом, вдоль которого реализуется путь рассматриваемого третьего типа. Соответствующие этому лучу волны называются головными.

Наши выкладки показывают, что, как только горизонтальное расстояние от начала координат O превышает расстояние OO_1 ($x > OO_1$), в каждой точке границы лучи головной волны образуют одинаковый угол θ_c с нормалью и, следовательно, все эти лучи являются параллельными. Такие лучи не

возникают в точках интервала OO_1 , причем данный интервал уменьшается по мере того, как источник приближается к границе раздела. Следует заметить, что в точке O_1 (рис. 8.16, а) обе волны, отраженная и головная, распространяются вдоль одного и того же луча, поскольку $\theta_i = \theta_c$. Согласно геометрии лучей, мы должны заключить, что точки одинаковой фазы лежат на прямой L , перпендикулярной лучам (рис. 8.16, а). Это указывает на то, что фазовые поверхности головной волны являются конусами, вершины которых расположены вдоль прямой Op_1 (рис. 8.16, г).

Из рис. 8.16, в видно, что фазовые поверхности соответствующей преломленной волны в нижней среде перпендикулярны границе вблизи нее, при условии, что $x > OO_1$.

АКУСТИЧЕСКИЕ ДЛИНЫ ПРЕЛОМЛЕННОЙ И ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ

Сравним теперь акустические длины отраженного и головного лучей, соединяющих точки p_1 и p_2 (рис. 8.17, а):

$$N_r = \left(\frac{p_1 P}{c_1} + \frac{p_2 P}{c_1} \right) c_1 \text{ и } N_h = \left(\frac{p_1 O_1}{c_1} + \frac{O_1 O_2}{c_2} + \frac{O_2 p_2}{c_1} \right) c_1. \quad (8.111)$$

Рассмотрим сначала разность длин вдоль этих лучей от источника до точки p . Из рис. 8.17, а следует, что

$$\Delta N_1 = \left(\frac{p_1 P}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{O_1 P}{c_2} \right) c_1$$

или

$$\Delta N_1 = \left(\frac{p_1 P}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{Op - OO_1}{c_2} \right) c_1 = \left(\frac{p_1 P}{c_1} - \frac{p_1 O_1}{c_1} - \frac{p_1 P \sin \theta_i - p_1 O_1 \sin \theta_c}{c_2} \right) c_1 = \\ = p_1 P \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - p_1 O_1 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) \quad (8.112)$$

или

$$\Delta N_1 = p_1 P \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - p_1 O_1 \cos^2 \theta_c, \quad (8.113)$$

поскольку

$$\sin \theta_c = c_1/c_2.$$

Учитывая, что

$$Op_1 = p_1 O_1 \cos \theta_c = p_1 P \cos \theta_i,$$

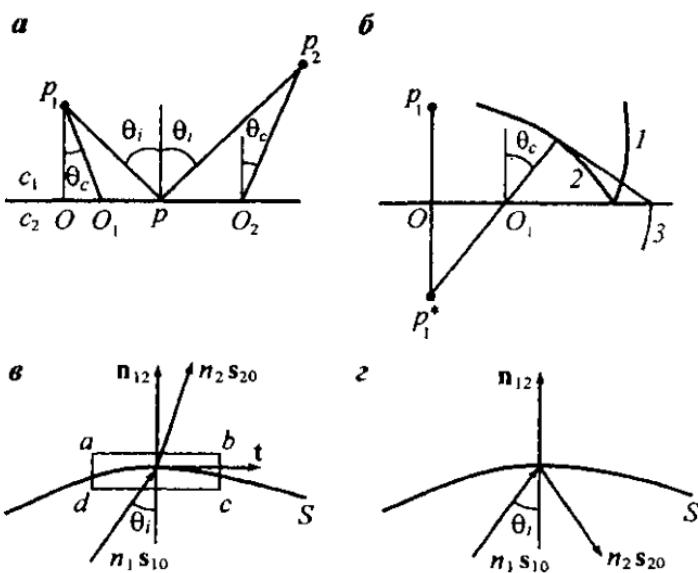


Рис. 8.17. Иллюстрация формулы (8.111) (a); фронты прямой, отраженной и головной волн (б); законы Снелльса (в, г).
Волны: 1 – прямая, 2 – отраженная, 3 – головная

получаем

$$\Delta N_1 = p_1 p \left[\left(1 - \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_i \right) - \cos \theta_i \cos \theta_c \right]$$

или

$$\Delta N_1 = [1 - \sin \theta_c \sin \theta_i - \cos \theta_i \cos \theta_c] p_1 p = [1 - \cos(\theta_i + \theta_c)] p_1 p.$$

Таким образом,

$$\Delta N_1 > 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{p_1 p_2}{c_1} > \frac{p_1 O_2}{c_2} + \frac{O_2 p_2}{c_1}$$

и

$$\Delta N_2 > 0.$$

Таким образом, в общем случае головная волна приходит в точку наблюдения раньше, чем отраженная. Исключение составляет лишь случай, когда обе волны приходят одновременно. Это происходит в точках, лежащих на луче, начало которого расположено на расстоянии OO_1 от начала координат. Взаимное расположение фронтов прямой, отраженной и головной волн показа-

но на рис. 8.17, б ($c_1 < c_2$). На этом рисунке ясно видно, что фазовая поверхность головной волны находится между границей и поверхностью конуса с вершиной в точке p_1^* и углом θ_c .

В дальнейшем мы покажем, что амплитуда головных волн, а также отраженных и преломленных волн, не остается постоянной вдоль их фазовых поверхностей, а акустическая энергия может переноситься также в направлении, перпендикулярном лучам. Это говорит о влиянии дифракции на поведение этих волн. Более того, оказывается, что головная волна исчезает, когда длина волны стремится к нулю.

Как мы уже видели из рис. 8.17, б, скорость распространения прямой и отраженной волн вдоль границы меньше скорости преломленной волны ($c_1 < c_2$), и преломленная волна порождает головную.

Мы описали поведение волн вблизи границы раздела двух сред, основываясь на принципе Ферма. Это было сделано, невзирая на тот факт, что указанный принцип основывается на уравнении эйконала, которое не выполняется на границе. Чтобы преодолеть эту проблему, границу можно заменить тонким слоем, в котором скорость является непрерывной функцией. При выводе закона Снеллиуса и изучении геометрии головных волн мы сравнивали акустические длины различных путей, расположенных очень близко друг к другу. Поэтому, возможно, оправдана замена поверхности раздела тонким слоем.

ЗАКОНЫ СНЕЛЛИУСА И ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА

Учитывая, что принцип Ферма является следствием из интеграла Лагранжа:

$$\oint n \cdot s_0 d\Gamma = 0, \quad (8.114)$$

где Γ – радиус-вектор, s_0 – единичный вектор вдоль луча, естественно попытаться получить закон Снеллиуса непосредственно из приведенного равенства. Как и ранее, предположим, что отраженная и преломленная волны существуют, а нашей целью является определение ориентации соответствующих им лучей относительно границы произвольной формы. Рассмотрим сначала отражение волны, и будем интерпретировать падающую и отраженную волны как одну волну, которая изменяет свою ориентацию на границе.

Применяя равенство (8.114) к замкнутому пути $abcd$ (рис. 8.17, б), получим

$$\int_{ab} n s_0 \cdot d\Gamma + \int_{cd} n s_0 \cdot d\Gamma = 0, \quad (8.115)$$

поскольку интегралами по бесконечно малым интервалам bc и da можно пренебречь.

Последнее соотношение можно переписать как

$$\oint n s_0 \cdot d\mathbf{r} = \oint n(n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

или

$$(n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (8.116)$$

поскольку величина $d\mathbf{r}$ чрезвычайно мала.

Здесь s_{10} и s_{20} – единичные векторы луча по обе стороны от границы раздела, а $d\mathbf{r}$ – элементарный вектор, тангенциальный поверхности S , направление которого совпадает с направлением единичного вектора \mathbf{t} (рис. 8.16, в).

Из равенства (8.116) следует, что вектор

$$\mathbf{M} = n_2 s_{20} - n_1 s_{10}$$

ортогонален поверхности раздела, т.е.

$$\mathbf{n}_{12} \times (n_2 s_{20} - n_1 s_{10}) = 0. \quad (8.117)$$

Здесь \mathbf{n}_{12} – единичный вектор нормали к поверхности раздела.

Формула (8.117) означает, что луч ориентирован таким образом, что тангенциальная компонента вектора $n s_0$ является непрерывной функцией при переходе через границу (рис. 8.17, в).

Из равенства (8.117) имеем

$$n_2 (\mathbf{n}_{12} \times s_{20}) = n_1 (\mathbf{n}_{12} \times s_{10}), \quad (8.118)$$

т.е. падающая и отраженная части луча лежат в одной плоскости.

Так как

$$|\mathbf{n}_{12}| = 1, |s_{10}| = |s_{20}| = 1,$$

соотношение (8.118) приводит к следующему выражению:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1, \quad (8.119)$$

где θ_1 и θ_2 – углы, образованные падающим и отраженным лучом с нормалью \mathbf{n}_{12} .

Таким образом, мы снова получили закон преломления Снеллиуса.

Полагая $n_2 = n_1$ в равенстве (8.116) и используя рис. 8.17, г, мы видим, что отраженный луч лежит в плоскости падения и

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \text{ или } \theta_r = \pi - \theta_i, \quad (8.120)$$

и мы приходим к закону отражения Снеллиуса.

Выражения (8.118)–(8.120) показывают, что законы Снеллиуса справедливы не только для плоской границы, но и для поверхностей произвольной формы при условии, что длина волны достаточно мала. В реальной ситуации это означает, что радиус кривизны фазовой поверхности падающей волны и радиус кривизны поверхности раздела гораздо больше, чем длина волны.

Мы изучили поведение отраженных и преломленных лучей на поверхнос-

ти раздела двух сред, основываясь, по существу, на уравнении эйконала. Однако, как уже отмечалось ранее, указанное уравнение выполняется только в регулярных точках, где скорость является непрерывной функцией. Поэтому для вывода соотношений (8.118) – (8.120) мы выберем другой подход.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И ЗАКОНЫ СНЕЛЛИУСА

В начале этой главы мы предположили, что длина волны достаточно мала и комплексная амплитуда потенциала описывается уравнением

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik_0 L(\mathbf{r})}. \quad (8.121)$$

Изучение волн в однородной среде показало, что такое представление потенциала просто означает, что в пределах относительно небольшой области волна ведет себя как плоская. Другими словами, небольшая часть фронта волны приближенно заменяется плоскостью, и лучи становятся параллельными друг другу. В регулярных точках мы из уравнения эйконала получили закон Снеллиуса. По аналогии, представляется естественным вывести законы отражения и преломления волн на границе, исходя из граничных условий и полагая, что волна является плоской.

В главе 4 было показано, что нормальная компонента скорости частиц и давление являются на границе непрерывными функциями:

$$v_{1z} = v_{2z} \text{ и } P_1 = P_2. \quad (8.122)$$

В соответствии с соотношениями

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} U \text{ и } P = -\rho \frac{\partial U}{\partial t},$$

вместо (8.122) мы получаем для комплексной амплитуды потенциала следующие условия:

$$\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial z} \text{ и } \rho_1 \mathcal{U}_1 = \rho_2 \mathcal{U}_2, \text{ если } z = 0, \quad (8.123)$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности верхней и нижней частей среды, а начало системы координат расположено на границе раздела (рис. 8.18, a). Рассмотрим сначала падающую волну, фронт которой перпендикулярен плоскости XOZ и распространяется в направлении единичного вектора \mathbf{s}_{01} .

Комплексная амплитуда падающей волны записывается в виде

$$\mathcal{U}_i = A e^{ik_i d}, \quad (8.124)$$

где $k_i = \omega/c_i$ – волновое число; d – расстояние между волновым фронтом и некоторой заданной плоскостью.

Как видно из рис. 8.18, a, вектор \mathbf{s}_{0i} определяется как

$$\mathbf{s}_{0i} = \mathbf{i} \sin \theta_i + \mathbf{k} \cos \theta_i, \quad (8.125)$$

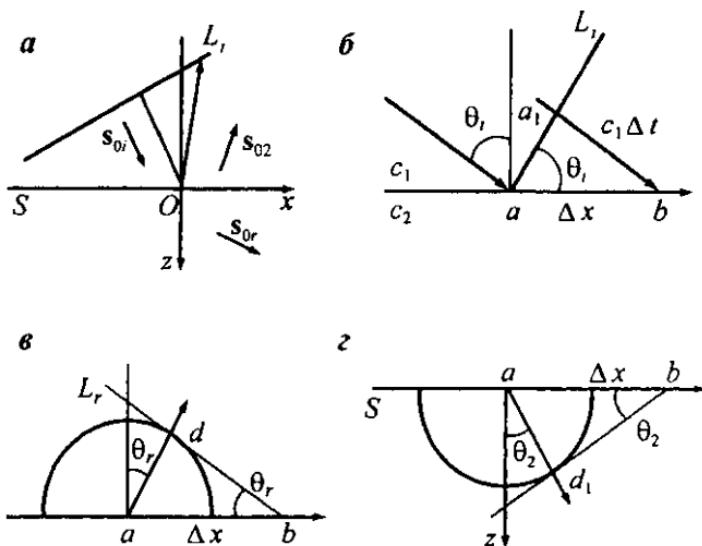


Рис. 8.18. Ориентация падающей, отраженной и преломленной волн (a); закон отражения Снеллиуса и принцип Гюйгенса (б, в); закон преломления Снеллиуса и принцип Гюйгенса (г)

а расстояние

$$d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{0i} = x \sin \theta_i + z \cos \theta_i. \quad (8.126)$$

Таким образом, вместо (8.124) имеем

$$\mathcal{U}_i = A e^{ik_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}. \quad (8.127)$$

Согласно нашим предположениям, обе волны, отраженная и преломленная, являются плоскими.

По аналогии с (8.124) комплексная амплитуда потенциала для этих волн записывается как

$$\mathcal{U}_r = B e^{ik_1 d_1} \text{ и } \mathcal{U}_2 = C e^{ik_2 d_2}. \quad (8.128)$$

Здесь

$$d_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{0r} \text{ и } d_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{02},$$

а \mathbf{s}_{0r} и \mathbf{s}_{02} – единичные векторы вдоль лучей этих волн, которые определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{s}_{0r} = \mathbf{i} \sin \theta_r - \mathbf{k} \cos \theta_r,$$

и

$$\mathbf{s}_{02} = \mathbf{i} \sin \theta_2 + \mathbf{k} \cos \theta_2. \quad (8.130)$$

Таким образом,

$$d_1 = x \sin \theta_r - z \cos \theta_r$$

и

$$d_2 = x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2. \quad (8.131)$$

Подстановка последних двух выражений в (8.128) дает

$$\mathcal{U}_r = B e^{ik_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

и

$$\mathcal{U}_2 = C e^{ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}. \quad (8.132)$$

Используя теперь граничные условия (8.123) на границе раздела $z = 0$, мы получим следующую систему из двух уравнений для четырех неизвестных, а именно для амплитуд B и C отраженной и преломленной волн, а также углов θ_r и θ_2 :

$$\rho_1 (A e^{ik_1 x \sin \theta_1} + B e^{ik_1 x \sin \theta_r}) = \rho_2 C e^{ik_2 x \sin \theta_2}$$

и

$$k_1 (\cos \theta_r A e^{ik_1 x \sin \theta_1} - \cos \theta_r B e^{ik_1 x \sin \theta_r}) = k_2 \cos \theta_2 C e^{ik_2 x \sin \theta_2}. \quad (8.133)$$

Поскольку эти уравнения выполняются в любой точке плоскости $z = 0$, они не зависят от координат x и y . Следовательно, экспоненты должны равняться друг другу:

$$k_1 \sin \theta_r = k_1 \sin \theta_2 = k_2 \sin \theta_2$$

или

$$\frac{\sin \theta_r}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_2}{c_1}.$$

Таким образом, мы снова получили законы Снеллиуса. Неизвестные коэффициенты B и C будут определены, когда мы приступим к изучению плоских волн в слоистых средах.

ЗАКОН СНЕЛЛИУСА И ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Покажем теперь, что законы Снеллиуса следуют непосредственно из принципа Гюйгенса при условии, что волна и граница раздела двух сред являются плоскими (рис. 8.18, б). Предположим, что L_i – фазовая поверхность (поверхность равного эйконала) падающей волны, и пусть в некоторый момент t эта поверхность достигает точки a границы раздела. За интервал времени Δt волна достигает точки b , и длина сегмента

$$a_1 b = c_1 \Delta t = \Delta x \sin \theta_i. \quad (8.134)$$

Согласно принципу Гюйгенса каждую точку границы раздела можно рассматривать как источник сферической волны, распространяющейся в верхней и нижней среде со скоростями c_1 и c_2 соответственно. Например, когда падающая волна приходит в точку b , радиус фазовой поверхности вторичной волны, возникающей в точке a в момент времени t , равняется ad (рис. 8.18, в).

Проводя через точку b прямую, касательную к этой поверхности, мы определим положение фазовой поверхности L , отраженной волны. Из рис. 8.18, в видно, что

$$\angle adb = \frac{\pi}{2} \text{ и } \angle dba = \theta_r.$$

Таким образом,

$$ad = \Delta x \sin \theta_r = c_1 \Delta t$$

или

$$ad = a_1 b = \Delta x \sin \theta_i = \Delta x \sin \theta_r,$$

и мы снова приходим к закону отражения Снеллиуса.

Аналогичным образом можно найти положение фазовой поверхности преломленной волны (рис. 8.18, г).

Очевидно, что

$$ad_1 = c_2 \Delta t = \Delta x \sin \theta_2, \quad (8.135)$$

и, используя (8.134), мы получаем следующий закон преломления:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_i} = \frac{c_2}{c_1} \text{ или } \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_i}{c_1}.$$

Итак, мы получили законы Снеллиуса, исходя из принципа Гюйгенса и предполагая, что падающая волна и граница раздела являются плоскими.

Учитывая, что указанный принцип выполняется при любых частотах, мы можем предположить, что закон Снеллиуса корректно описывает поведение плоской волны в горизонтально слоистой среде, независимо от длины волны, для всех углов падения θ_i , не превышающих критического угла: $\theta_i \leq \theta_c$.

8.5. ПОЛЯ ВРЕМЕН ПРИХОДА ВОЛНЫ

Время прихода волны в точку наблюдения – один из важнейших параметров, измеряемых в сейсмологии. Введем понятие поля времен прихода волны, считая при этом, что ее длина λ достаточно мала. Как уже отмечалось, поля эйконала и времени являются двумя эквивалентными способами описания поведения волн при $\lambda \rightarrow 0$.

Предположим, что нестационарная волна распространяется в среде со скоростью c , и изучим, как меняется положение фронта этой волны. Таким же образом можно рассматривать любую другую фазовую поверхность данной волны. Поскольку фронт волны приходит в заданную точку среды в некоторый момент времени t , это время естественно рассматривать как функцию координат точки. В частности, в прямоугольной декартовой системе координат имеем

$$t = t(x, y, z). \quad (8.136)$$

По определению, данная функция представляет собой скалярное поле и характеризует время прихода фронта волны, либо любой другой фазовой поверхности в точку наблюдения с координатами (x, y, z) .

Чтобы изучить поведение этого скалярного поля, т.е. понять, как оно изменяется в различных направлениях, мы, как обычно, будем использовать градиент скалярной функции (см. приложение 2):

$$\mathbf{M} = \operatorname{grad} t, \quad (8.137)$$

описывающий величину и направление максимального увеличения поля t .

В общем случае криволинейной ортогональной системы координат градиент скалярного поля записывается как

$$\operatorname{grad} t = \frac{1}{h_1} \frac{\partial t}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial t}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial t}{\partial x_3} \mathbf{i}_3, \quad (8.138)$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – единичные векторы в направлении координатных осей, а h_1, h_2, h_3 – соответствующие метрические коэффициенты.

Отсюда в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат имеем

$$\operatorname{grad} t = \frac{\partial t}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (8.139)$$

$$\operatorname{grad} t = \frac{\partial t}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (8.140)$$

$$\operatorname{grad} t = \frac{\partial t}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial t}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi. \quad (8.141)$$

Очевидно, что замена системы координат приводит к изменению компонент градиента, однако его величина и направление не меняются, поскольку они зависят только от самого скалярного поля.

Производная поля времени по направлению связана с градиентом следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \mathbf{l}_0 \cdot \operatorname{grad} t = \operatorname{grad}_l t$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial l} = M \cos(M, l_0), \quad (8.142)$$

где l_0 – единичный вектор вдоль прямой l .

Из равенства (8.142) следуют два важных свойства, состоящие в том, что производная $\partial t / \partial l$ максимальна в направлении градиента, поскольку $\cos(M, l_0) = 1$, в то время как в перпендикулярном направлении поле не меняется. Чтобы наглядно представить себе поле времени, удобно ввести понятие поверхности одинаковых значений времени прихода. Такие поверхности называются изохронами, и их физический смысл совершенно очевиден. В действительности они показывают положение фазовых поверхностей в различные моменты времени. Таким образом, зная положение изохрон в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , можно наблюдать поведение фронта волны. Примеры изохрон представлены на рис. 8.19, а, б, в. В общем случае эти поверхности могут иметь достаточно сложную форму и даже пересекать друг друга или самих себя.

Рассмотрим две изохроны для близких моментов времени t_1 и t_2 (рис. 8.19, г), и предположим, что время t между ними является линейной функцией. Тогда изменение времени прихода

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

в направлении нормали n , а также в произвольном направлении l_0 можно записать как

$$\Delta t = \frac{\partial t}{\partial n} \Delta n \quad \text{и} \quad \Delta t = \frac{\partial t}{\partial l} \Delta l, \quad (8.143)$$

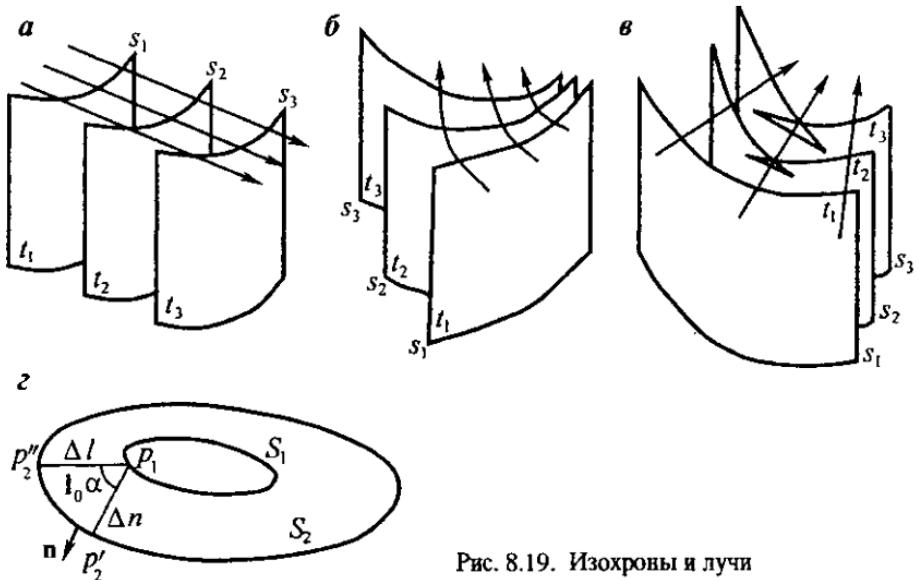


Рис. 8.19. Изохроны и лучи

откуда следует, что

$$\frac{\partial t}{\partial n} \Delta n = \frac{\partial t}{\partial l} \Delta l.$$

Поскольку

$$\Delta n = \Delta l \cos \alpha,$$

мы получаем

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial n} \cos \alpha, \quad (8.144)$$

где α – угол между нормалью n и направлением смещения Δl .

Из приведенного выше равенства следует, что максимальная скорость изменения времени прихода наблюдается вдоль направления, перпендикулярного к изохроне n , следовательно, по определению градиента мы имеем

$$\operatorname{grad} t = \nabla t = |\operatorname{grad} t| n. \quad (8.145)$$

Соответственно, линии, нормальные к изохронам, характеризуют направления, вдоль которых время прихода увеличивается быстрее, чем вдоль соседних путей. Поскольку форма изохрон совпадает с формой фазовых поверхностей (или поверхностей равного эйконала), можно сказать, что указанные линии совпадают с лучами, вдоль которых в среде распространяется акустическая энергия, и, следовательно, вектор

$$M = \operatorname{grad} t$$

по отношению к ним является тангенциальным. Как мы уже знаем, в однородной среде лучи являются прямыми. Присутствие неоднородности обычно приводит к тому, что лучи искривляются и могут даже пересекать друг друга. Очевидно, что поле времени прихода можно легко определить, если известно семейство лучей R и время распространения волны вдоль них. Действительно, проводя поверхности, нормальные к каждому из лучей, мы получим множество изохрон, параметр которых t определяется из пересечения с лучами R . Таким образом, как изохроны, так и лучи равным образом определяют поле времен прихода.

Выведем уравнение этого поля, используя эквивалентность, существующую между изохронами и фазовыми поверхностями. Пусть в момент времени $t = t_1$ фронт волны совпадает с изохроной S_1 . Для того чтобы определить его положение в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$, воспользуемся принципом Гюйгенса. Тогда каждую точку поверхности S_1 можно рассматривать в качестве центра элементарной сферической поверхности радиуса Δt , равного

$$\Delta n = c \Delta t. \quad (8.146)$$

Огибающая этих элементарных волн представляет собой изохрону S_2 при $t = t_2$.

По определению, градиент t направлен вдоль нормали \mathbf{n} и, следовательно,

$$\operatorname{grad} t = \frac{\partial t}{\partial n} \mathbf{n} = \frac{1}{c} \mathbf{n}, \quad (8.147)$$

поскольку в окрестности каждой точки p изохроны

$$c(p) = \partial n / \partial t.$$

В ортогональной криволинейной системе координат (8.147) получим

$$\sqrt{\left(\frac{\partial t}{h_1 \partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_2 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_3 \partial x_3}\right)^2} = \frac{1}{c(p)}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{h_1 \partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_2 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{h_3 \partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{c^2(p)}. \quad (8.148)$$

Последняя формула называется уравнением поля времени прихода волны, которое совпадает с уравнением эйконала, если t и c^2 заменить на L и $(c_0/c)^2$ соответственно. В частности, в декартовой системе координат уравнение (8.148) записывается как

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2(p)}. \quad (8.149)$$

Заметим, что формулу (8.148) можно записать также в следующем виде:

$$(\nabla t)^2 = \frac{1}{c^2(p)}, \quad (8.150)$$

так как

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{i}_3.$$

Отсюда видно, что поле времен прихода описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое имеет бесконечное множество решений. Действительно, для любого заданного распределения скорости $c(p)$ можно представить себе неограниченное число распространяющихся в такой среде волн, ноля времени прихода которых удовлетворяют уравнению (8.148). Поэтому для того, чтобы найти неизвестную функцию $t = t(x, y, z)$, необходимо знать начальные и граничные условия.

Таким образом, процедура нахождения поля времен прихода в объеме V , окруженном поверхностью S , состоит из следующих трех шагов.

1. Решение уравнения (8.148).

2. Выбор среди всех решений уравнения (8.148) функции, удовлетворяющей граничным условиям. Последнее обычно означает, что на границе S известна функция

$$t(x, y, z) = \phi(x, y, z). \quad (8.151)$$

3. Выбор среди всех решений, удовлетворяющих уравнению (8.148) и условиям (8.151), того, которое подчиняется начальным условиям в каждой точке объема V .

В сейсмологии последнее требование обычно означает, что в начальный момент времени поле времен прихода имеет всюду нулевые значения.

Здесь следует отметить следующее:

а) объем V может быть окружен несколькими поверхностями S , на которых должны быть известны функции $\phi(x, y, z)$ (8.151). Так, например, одна из таких поверхностей окружает первичный источник и расположена в его окрестности;

б) на границах раздела внутри объема V , где скорость $c(p)$ претерпевает разрыв, функция $t(x, y, z)$ является непрерывной, а геометрия лучей подчиняется закону Снеллиуса;

в) решение граничной задачи определяет функцию

$$t(x, y, z) = C, \quad (8.152)$$

где C – некоторая постоянная, характеризующая конкретную изохрону;

г) построение изохрон можно выполнить, используя также принцип Гюйгенса.

Существует несколько способов описания лучей. Например, лучи можно построить, рисуя линии, нормальные к изохронам, либо рассматривая уравнение, которое определяет время пробега волны вдоль некоторого произвольного пути L :

$$t = \int_a^b \frac{ds}{c(p)}. \quad (8.153)$$

Здесь ds – смещение вдоль пути в окрестности точки p , а пределы интегрирования a и b являются конечными точками одного и того же луча.

В соответствии с принципом Ферма, мы должны определить такой путь, вдоль которого время t минимальное (или стационарное, если окрестность луча не является регулярной). Это означает, что малые вариации пути вблизи луча не приводят к изменению времени прихода, т.е.

$$t(L + \Delta l) = t(L)$$

или

$$\Delta t = 0. \quad (8.154)$$

Конечно, последнее равенство выполняется только при условии, что вариации, пропорциональные Δl и более высокого порядка, пренебрежимо малы. Данную задачу можно решить методами вариационного исчисления, основанными на использовании уравнения Эйлера.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Здесь описываются некоторые алгебраические операции над скалярными и векторными функциями, использующиеся в данной работе.

1. В общем случае скаляр T и вектор M являются функциями точки p :

$$T = T(p) \text{ и } M = M(p). \quad (1)$$

Скаляр T определяется абсолютной величиной $|T|$ и знаком, а вектор M характеризуется модулем (длиной) M и направлением i_m :

$$M(p) = M(p)i_m. \quad (2)$$

Здесь $M(p)$ – положительная величина, i_m – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором M :

$$|i_m| = 1. \quad (3)$$

По определению, у скалярной величины нет направления, а вектор не является ни положительным, ни отрицательным. Точка p , в которой изучается поведение этих функций, обычно называется точкой наблюдения. Положение этой точки в пространстве задается радиус-вектором L_{op} или тремя координатами x_1, x_2 и x_3 .

В обоих случаях требуется задать начало системы координат в некоторой точке O , положение которой известно. Тогда радиус-вектор L_{op} можно записать как

$$L_{op} = L_{op} i, \quad (4)$$

где L_{op} – расстояние от начала координат до точки наблюдения; i – единичный вектор, направленный по радиусу от начала координат к точке наблюдения (рис. 1, а).

Итак, в качестве аргументов функций $T(p)$ и $M(p)$ можно выбрать либо радиус-вектор, либо три координаты этой точки:

$$T(L_{op}) \text{ или } T(x_1, x_2, x_3)$$

и

$$M(L_{op}) \text{ или } M(x_1, x_2, x_3). \quad (5)$$

Далее мы будем также использовать криволинейную систему координат, образованную тремя взаимно ортогональными семействами координатных линий l_1, l_2 и l_3 , направления которых задаются единичными векторами (рис. 1, б).

Для того чтобы определить положение точки наблюдения, необходимо вычислить ее координаты x_1, x_2 и x_3 вдоль координатных линий.

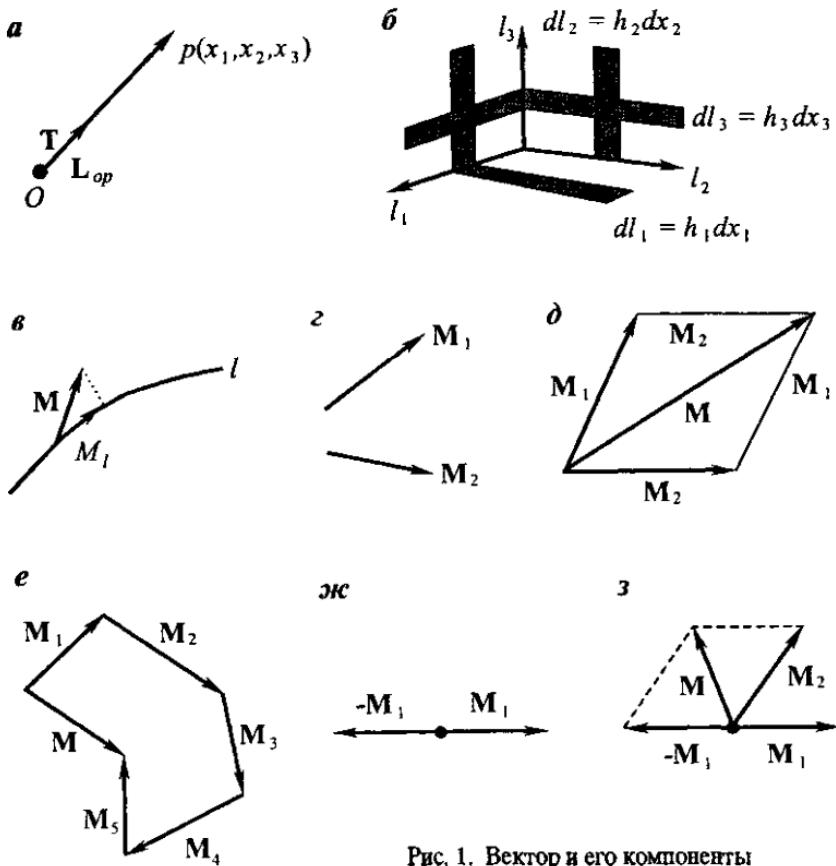


Рис. 1. Вектор и его компоненты

2. Введем скалярную и векторную компоненту вектора \mathbf{M} вдоль некоторого направления l следующим образом (рис. 1, в):

$$M_l = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_l) \text{ и } \mathbf{M}_l = M_l \mathbf{i}_l. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{i}_l – единичный вектор вдоль кривой l , а $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$ – угол между векторами \mathbf{M} и \mathbf{i}_l . Заметим, что скалярная компонента M_l положительна, если этот угол острый, и отрицательна, если угол становится тупым.

Вектор \mathbf{M} часто описывают, используя его скалярные и векторные компоненты вдоль координатных линий l_1 , l_2 и l_3 :

$$M_l = M \cos (\mathbf{M}, \mathbf{i}_l), \quad \mathbf{M}_l = M_l \mathbf{i}_l \quad (7)$$

и $l = (1, 2, 3)$.

Здесь $(\mathbf{M}, \mathbf{i}_l)$ – угол между вектором \mathbf{M} и единичным вектором \mathbf{i}_l , задающим направление соответствующей координатной линии.

3. Суммирование векторов производится по правилу параллелограмма и, конечно, оно отличается от суммирования скаляров. Пусть имеется два век-

тора M_1 и M_2 (рис. 1, 2). Составим из них параллелограмм, показанный на рис. 1, д. По определению, сумма векторов также является вектором:

$$M = M_1 + M_2.$$

Модуль этого вектора равняется длине диагонали параллелограмма, и он направлен к концу второго вектора. Очевидно, что последовательное использование этого правила позволяет найти сумму произвольного числа векторов. Эта процедура показана на рис. 1, е.

Для того чтобы найти разность векторов M_1 и M_2 , необходимо учесть, что векторы

$$M_3 = -M_1 \text{ и } M_1$$

имеют одинаковую длину и противоположны по направлению (рис. 1, ж). Снова используя правило параллелограмма, получим

$$M = M_2 + M_1 = M_2 - M_1, \quad (9)$$

и разность двух векторов также направлена вдоль диагонали (рис. 1, з).

Следует заметить, что если направления векторов совпадают или являются противоположными, то для них операции суммирования и вычитания производятся так же, как и для скаляров.

4. Теперь, используя правило параллелограмма, вектор M можно представить через его векторные и скалярные компоненты вдоль координатных линий. Действительно, как видно из рис. 2, а,

$$M = M_1 + M_2, \quad (10)$$

где M_1 и M_2 – векторные компоненты.

Обобщение на трехмерный случай очевидно (рис. 2, б):

$$M = M_3 + M_{12}.$$

Здесь

$$M_{12} = M_1 + M_2,$$

и, следовательно,

$$M = M_1 + M_2 + M_3, \quad (11)$$

или

$$M = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3. \quad (12)$$

Поскольку векторные компоненты образуют прямоугольник, длина вектора определяется выражением

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.$$

В то же время, если известны длина и направляющие косинусы вектора M , то его скалярная компонента определяется формулой (6).

Из соотношений (2), (6) и (11) получим

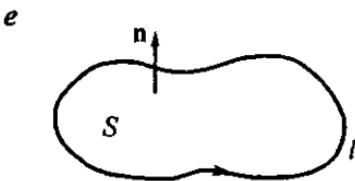
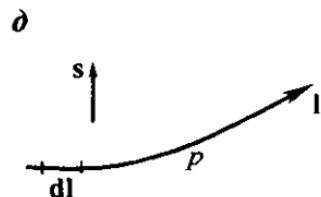
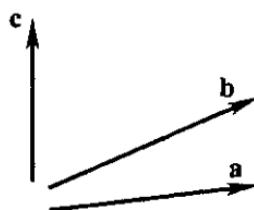
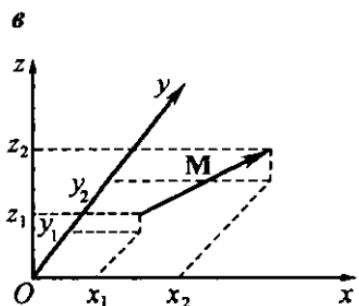
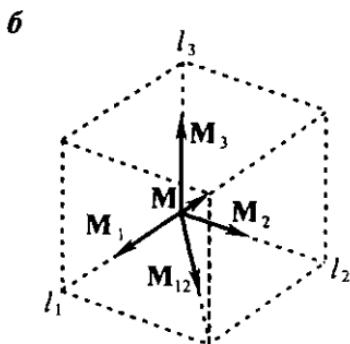
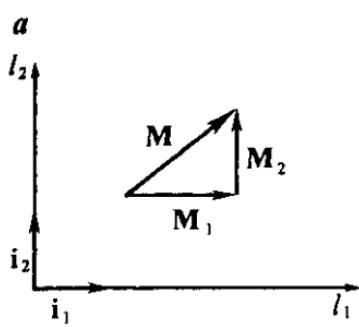


Рис. 2. Скалярные и векторные компоненты. Векторное произведение. Взаимная ориентация кривых и поверхностей

$$M \mathbf{i}_m = M \cos \alpha \mathbf{i}_1 + M \cos \beta \mathbf{i}_2 + M \cos \gamma \mathbf{i}_3$$

или

$$\mathbf{i}_m = \cos \alpha \mathbf{i}_1 + \cos \beta \mathbf{i}_2 + \cos \gamma \mathbf{i}_3, \quad (14)$$

т.е. направляющие косинусы $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ являются проекциями единичного вектора \mathbf{i}_m на координатные оси. Из равенства (13) следует, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (15)$$

Пусть координатами начала и конца вектора \mathbf{M} являются

x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 .

Тогда, как это видно из рис. 2, в, скалярные компоненты равны разности соответствующих координат:

$$M_1 = x_2 - x_1, \quad M_2 = y_2 - y_1, \quad M_3 = z_2 - z_1. \quad (16)$$

Следовательно, направляющие косинусы и длина вектора M определяются как

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{M}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{M}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{M} \quad (17)$$

и

$$M = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Мы имеем два разных представления вектора:

$$\mathbf{M} = M \mathbf{i}_m \text{ и } \mathbf{M} = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3.$$

Последняя форма представления является более удобной для суммирования и вычитания векторов. В частности,

$$\mathbf{M} \pm \mathbf{N} = (M_1 \pm N_1) \mathbf{i}_1 + (M_2 \pm N_2) \mathbf{i}_2 + (M_3 \pm N_3) \mathbf{i}_3. \quad (18)$$

5. В отличие от скаляров, для векторов существует две операции умножения: скалярное и векторное произведение, а операция деления отсутствует.

Скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$$

и

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3$$

(19)

определяется как

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

(20)

где (\mathbf{a}, \mathbf{b}) – угол между этими векторами.

Таким образом, данное произведение является скаляром, а его знак определяется углом (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . В частности, если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

Поскольку мы рассматриваем только ортогональные системы координат, то

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = 0$$

и

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_3 = 1.$$

(21)

Скалярное произведение также очень просто выражается через компоненты

векторов. Перемножая векторные компоненты из правой части формулы (19), получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (22)$$

Это вторая форма представления скалярного произведения.

Равенство (20) позволяет определить угол между двумя векторами. Используя соотношения (14) и (22), имеем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \mathbf{i}_a \cdot \mathbf{i}_b = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

или

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos \alpha_a \cos \alpha_b + \cos \beta_a \cos \beta_b + \cos \gamma_a \cos \gamma_b. \quad (23)$$

Рассмотрим вместо произвольного вектора \mathbf{b} единичный вектор \mathbf{i}_l . Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_l = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}_l) = a_l, \quad (24)$$

где a_l – проекция вектора \mathbf{a} на кривую l . Другими словами, чтобы найти проекцию вектора на некоторое направление, мы должны взять скалярное произведение этого вектора и единичного вектора в заданном направлении. Если направления этих векторов совпадают, то $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ и скалярное произведение сводится к произведению длин этих векторов.

Рассмотрим теперь второй тип умножения. Векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (25)$$

является вектором, перпендикулярным к каждому из них. Его длина равняется площади параллелограмма, образованного этими векторами:

$$c = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (26)$$

Направление векторного произведения \mathbf{c} определяется из условия, согласно которому векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} должны образовывать правую тройку (см. рис. 2, 2).

Следовательно

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (27)$$

Согласно формуле (26) векторное произведение двух параллельных векторов равняется нулю, а его максимальное значение достигается, когда векторы перпендикулярны друг другу. Так, например, для единичных векторов ортогональной системы координат

$$\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$$

и

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0.$$

Перемножая векторные компоненты из формулы (19) и используя равенства (28), приходим к другому выражению для векторного произведения:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Его можно записать как

$$\mathbf{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i}_3. \quad (30)$$

6. Рассмотрим теперь еще две операции над векторами. Смешанное произведение трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} является скалярной величиной, равной объему параллелепипеда, образованного этими тремя векторами:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (31)$$

или

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Двойное векторное произведение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c}

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

является более сложной операцией, однако его можно представить в виде разности двух векторов:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (33)$$

Данное равенство бывает очень полезным для упрощения алгебраических преобразований.

Из определения смешанного произведения следует, что

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}. \quad (34)$$

7. Известные правила дифференцирования скалярных функций можно применять и для непрерывных векторных функций. Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \Phi \mathbf{a} &= \Phi \frac{d\mathbf{a}}{dx} + \mathbf{a} \frac{d\Phi}{dx}, \\ \frac{d}{dx} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dx}, \\ \frac{d}{dx} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dx} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dx}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь Φ – скалярная функция, а и \mathbf{b} – векторные функции, переменная x

является их аргументом. В частности, x может быть координатой точки наблюдения.

Аналогичные соотношения можно написать и для более сложных комбинаций векторных и скалярных функций. В общем случае как длина, так и направление вектора являются функциями координат точки наблюдения. В соответствии с формулой (2), производная векторной функции $\mathbf{M}(p)$ по аргументу x записывается как

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \mathbf{i}_m + M \cdot \frac{d\mathbf{i}_m}{dx}. \quad (36)$$

В частности, производная векторной компоненты вдоль координатной линии определяется следующим выражением:

$$\frac{d\mathbf{M}_k}{dx_k} = \frac{dM_k}{dx_k} \cdot \mathbf{i}_k + M_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dx_k}, \quad (37)$$

где \mathbf{i}_k – единичный вектор вдоль линии l_k , x_k – соответствующая координата.

В криволинейной системе координат направления единичного вектора \mathbf{i}_k , как правило, являются функциями положения точки наблюдения и, следовательно, в этом случае второе слагаемое в формуле (37) не равно нулю.

8. Введем понятие ориентированного элементарного смещения $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{l} = dl \mathbf{i}_l = dl_1 \mathbf{i}_1 + dl_2 \mathbf{i}_2 + dl_3 \mathbf{i}_3 = dl_1 \mathbf{i}_1 + dl_2 \mathbf{i}_2 + dl_3 \mathbf{i}_3. \quad (38)$$

Здесь dl обозначает модуль вектора $d\mathbf{l}$, равный длине этого сегмента, а dl_k и $dl_k = dl \mathbf{i}_k$ являются соответственно скалярной и векторной компонентами вектора $d\mathbf{l}$ вдоль координатной линии. Ориентация кривой l в пространстве определяется выбором ее положительного направления, т.е. вектором $d\mathbf{l}$. Аналогичным образом, ориентированный элемент поверхности $d\mathbf{S}$ можно представить как

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n} = dS_1 \mathbf{i}_1 + dS_2 \mathbf{i}_2 + dS_3 \mathbf{i}_3 = dS_1 \mathbf{i}_1 + dS_2 \mathbf{i}_2 + dS_3 \mathbf{i}_3. \quad (39)$$

Здесь dS обозначает длину вектора $d\mathbf{S}$, равную площади поверхности элемента, \mathbf{n} – единичную нормаль к этой поверхности, а

$$dS_k = dS \cos(d\mathbf{S}, \mathbf{i}_k), \quad d\mathbf{S}_k = dS_k \mathbf{i}_k \quad (40)$$

являются скалярной и векторной проекцией $d\mathbf{S}$ на поверхность, перпендикулярную к координатной линии l_k . Ориентация поверхности $d\mathbf{S}$ определяется ее нормалью \mathbf{n} . Мы будем различать переднюю и заднюю стороны этой поверхности и введем соглашение, согласно которому нормаль всегда направлена от задней стороны к передней.

Для того чтобы охарактеризовать взаимную ориентацию векторов, мы будем использовать только правило правой руки, которое можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть положение точки наблюдения меняется вдоль некоторой кривой l в положительном направлении $d\mathbf{l}$ (рис. 2, δ). Будем говорить, что вектор $d\mathbf{l}$ образует правостороннюю систему с произ-

вольным вектором s , если для наблюдателя, находящегося в конце вектора s , движение точки p происходит против часовой стрелки. Например, можно рассмотреть поверхность S с нормалью n , ограниченную контуром l (рис. 2, *e*). В соответствии с правилом правой руки, направление dl должно быть выбрано таким образом, чтобы оно указывало на вращение вокруг вектора n против часовой стрелки. В общем случае три вектора a , b и c образуют правостороннюю систему, если их направления соответствуют правилу правой руки (рис. 2, *г*). В частности, в правосторонней системе координат единичные векторы подчиняются соотношениям (28).

9. Рассмотрим кратко основные свойства криволинейной ортогональной системы координат. Как отмечалось ранее, три взаимно перпендикулярные линии l_1 , l_2 и l_3 , заданные в каждой точке пространства, образуют три семейства координатных линий. Вдоль каждой такой линии изменяется только одна координата, а две остальных остаются постоянными. Например, координаты x_2 и x_3 не меняются вдоль координатной линии l_1 . Положение точки можно характеризовать также тремя семействами координатных поверхностей S_1 , S_2 и S_3 , ориентация которых такова, что координатная линия l_k перпендикулярна поверхности S_k в каждой точке. На каждой координатной поверхности остается неизменной только одна координата. Указанные три семейства поверхностей перпендикулярны друг другу, так же, как и три семейства координатных линий. Из рис. 1, *б* видно, что элементы координатных поверхностей dS_k , ограниченных координатными линиями, определяются векторами

$$dS_1 = dl_2 dl_3 \mathbf{i}_1, \quad dS_2 = dl_1 dl_3 \mathbf{i}_2, \quad dS_3 = dl_1 dl_2 \mathbf{i}_3. \quad (41)$$

Соответственно элементарный объем, ограниченный координатными поверхностями, записывается как

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3. \quad (42)$$

Введем теперь метрические коэффициенты, устанавливающие связь между длиной элементарного сегмента координатной линии dl_k и изменением соответствующей координаты dl_k , т.е.

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3. \quad (43)$$

Здесь h_1 , h_2 и h_3 – метрические коэффициенты системы координат, являющиеся обычно функциями, зависящими от точки. Аналитические выражения для метрических коэффициентов выводятся, как правило, из анализа геометрии координатных линий.

Рассмотрим простейшие системы координат.

Прямоугольная декартова система координат

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Все координатные линии являются прямыми, а координатные поверхности – плоскостями.

Отсюда

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz,$$

$$dS_1 = dy \ dz, \quad dS_2 = dx \ dz, \quad dS_3 = dx \ dy,$$

$$dV = dx \ dy \ dz.$$

Цилиндрическая система координат

$$x_1 = r, \quad x_2 = \phi, \quad x_3 = z.$$

Координатные линии l_1 и l_3 являются прямыми, а l_2 – окружностью. Координатная поверхность $r = \text{const}$ является цилиндром, $\phi = \text{const}$ – полуплоскостью, $z = \text{const}$ – горизонтальной плоскостью.

Таким образом,

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r \ d\phi, \quad dl_3 = dz,$$

$$dS_1 = r \ d\phi \ dz, \quad dS_2 = dr \ dz, \quad dS_3 = r \ dr \ d\phi,$$

$$dV = r \ dr \ d\phi \ dz.$$

Сферическая система координат

Координатная линия l_1 является прямой, а l_2 и l_3 – соответственно полуокружностью и окружностью. Координатная поверхность $R = \text{const}$ является сферой, $\theta = \text{const}$ – боковой поверхностью конуса с вершиной в начале координат, а $\phi = \text{const}$ – полуплоскостью.

Следовательно,

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R \sin \theta,$$

$$dl_1 = dR, \quad dl_2 = R \ d\theta, \quad dl_3 = R \sin \theta \ d\phi,$$

$$dS_1 = R^2 \sin \theta \ d\theta \ d\phi, \quad dS_2 = R \sin \theta \ dR \ d\phi, \quad dS_3 = R \ dR \ d\theta,$$

$$dV = R^2 \sin \theta \ dR \ d\theta \ d\phi.$$

10. Полезно ввести еще одно понятие – телесного угла. С этой целью проведем прямые из точки наблюдения к точкам, принадлежащим границе поверхности S (рис. 3, а). Эти прямые образуют конус, телесный угол которого $\omega(p)$ характеризует угол, под которым поверхность S видна из точки p . Этот угол может быть положительным, отрицательным или равняться пулю. Он определяется как

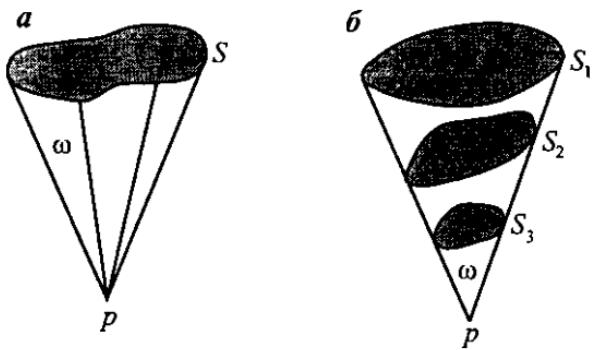
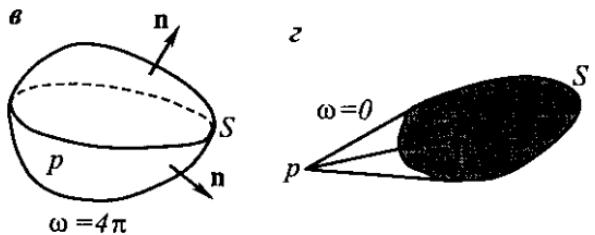


Рис. 3. Примеры телесных углов



$$\omega(p) = \int_S \frac{dS \cdot \mathbf{L}_{pq}}{L_{pq}^3}, \quad (47)$$

где L_{pq} – расстояние от точки p до произвольной точки на поверхности S (рис. 3, а); $dS = dS \mathbf{n}$.

Существенно, что все поверхности, ограниченные данным конусом, видны под одним и тем же углом $\omega(p)$, при условии, что мы наблюдаем из точки p либо переднюю, либо заднюю стороны этих поверхностей (рис. 3, б). В противном случае телесные углы будут различаться знаком. Если предположить, что одна из поверхностей, ограниченных данным конусом, является сферой S_{ph} с радиусом L_{pq} , то выражение (47) упростится следующим образом:

$$\omega(p) = \pm \frac{S_{ph}}{L_{pq}^2}. \quad (48)$$

В этом широко используемом выражении вычисление телесного угла сводится к определению соответствующей сферической поверхности.

Пусть некоторый объем V окружен произвольной замкнутой поверхностью S (рис. 3, в, г). Тогда из равенства (48) следует, что телесный угол, под которым видна поверхность S , равняется

$$\omega(p) = \begin{cases} \pm 4, & p \text{ внутри } V, \\ 0, & p \text{ вне } V. \end{cases} \quad (49)$$

Этот важный результат часто используется при изучении различных полей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1. Определим скалярное поле как функцию, зависящую от точки p :

$$T = T(p). \quad (1)$$

Другими словами, будем считать, что за исключением координат точки p , все остальные факторы являются константами.

В общем случае предполагается, что данное поле является однозначной функцией. В основном мы будем изучать поведение этой функции в окрестности ее регулярных точек, где поле ведет себя непрерывным образом. Однако иногда мы будем рассматривать сингулярные точки, линии и поверхности, где поле терпит разрыв.

2. Классическими примерами скалярных полей являются давление, высота над уровнем моря, температура, время прихода волн и плотность горных пород. Помимо перечисленных полей, имеющих ясный физический смысл, к данному типу относятся также поля, которые вводятся для упрощения изучения более сложных векторных полей. Примерами таких вспомогательных полей являются потенциалы гравитационного и электрического поля, а также акустический потенциал.

3. Исследуем теперь поведение скалярного поля $T(p)$ в окрестности его регулярной точки p . Для этого выберем некоторое направление l (рис. 1, *a*) и посмотрим, как вдоль этой кривой меняется рассматриваемое поле. Это изменение характеризуется производной $T(p)$ по длине дуги, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta l}. \quad (2)$$

Здесь ΔT обозначает разность значений функции T :

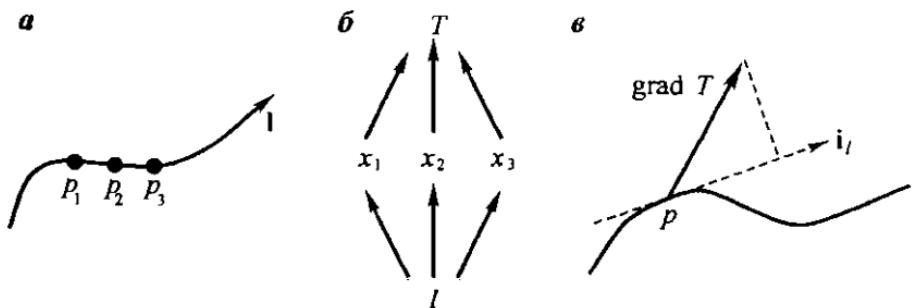


Рис. 1. Градиент и производная по направлению

$$\Delta T = T(p_2) - T(p_1),$$

а Δl – расстояние между точками p_1 и p_2 .

Из определения (2) следует, что производная $\partial T / \partial l$ характеризует величину относительного изменения поля T вдоль кривой l . Эта величина равна приращению ΔT , деленному на соответствующий интервал Δl .

В общем случае производная $\partial T / \partial l$ меняется при изменении направления кривой l , проходящей через точку p , т.е. в окрестности любой точки наблюдения существует бесконечное число производных.

4. Все эти производные можно выразить через одну единственную векторную функцию, описывающую данное поле. Для того чтобы решить эту задачу, воспользуемся тем, что изменению длины дуги l соответствует изменение координат точки x_1 , x_2 и x_3 . Связь поля $T(p)$ с координатами точки p и длиной дуги l показана на рис. 1, б. Используя цепное правило для производной, получим

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial l}, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial x_1}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial l_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial l} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial l_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial l} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial l_3}{\partial l},$$

так как метрические коэффициенты практически не меняются в пределах малых интервалов вдоль координатных линий l_1 , l_2 , l_3 .

Равенство (3) записывается теперь как

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial l_3}{\partial l} \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial l} + \frac{\partial T}{\partial l_3} \frac{\partial l_3}{\partial l}. \quad (5)$$

Здесь ∂l_1 , ∂l_2 и ∂l_3 – скалярные компоненты вектора dl вдоль координатных линий:

$$\frac{\partial l_1}{\partial l} = \cos(l_1, l), \quad \frac{\partial l_2}{\partial l} = \cos(l_2, l), \quad \frac{\partial l_3}{\partial l} = \cos(l_3, l).$$

Следовательно, правую часть формулы (5) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \mathbf{i}_l \cdot \operatorname{grad} T. \quad (6)$$

Здесь

$$\mathbf{i}_l = \cos(l_1, l) \mathbf{i}_1 + \cos(l_2, l) \mathbf{i}_2 + \cos(l_3, l) \mathbf{i}_3$$

является единичным вектором, характеризующим направление кривой l в точке p , по которому берется производная.

5. Вектор

$$\operatorname{grad} T = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{i}_3$$

или

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial l_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial T}{\partial l_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial T}{\partial l_3} \mathbf{i}_3 \quad (7)$$

называется градиентом скалярного поля T , согласно формуле (6), любую производную по направлению скалярного поля $\partial T / \partial l$ можно представить через градиент. Из этого равенства также следует, что $\operatorname{grad} T$ указывает направление максимального увеличения поля. Величина $|\operatorname{grad} T|$ равняется максимальной производной $\partial T / \partial l$ в окрестности точки наблюдения (рис. 1, в). Это означает, что градиент характеризует только поведение поля. Следовательно, он не зависит от всех других факторов и, в частности, от системы координат. Другими словами, вектор

$$\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$$

инвариантен относительно замены координат. Смысл градиента виден из формулы (6), которая показывает, что вместо того, чтобы брать производную $\partial T / \partial l$ по длине дуги кривой l , достаточно просто спроектировать $\operatorname{grad} T$ на это направление. Чтобы подчеркнуть этот факт, запишем формулу (6) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \operatorname{grad} T. \quad (8)$$

Таким образом, производная скалярного поля по произвольному направлению l является проекцией градиента на это направление (рис. 1, в).

6. В качестве иллюстрации приведем выражения для $\operatorname{grad} T$ в различных системах координат.

Прямоугольная декартова система координат

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (9)$$

Сферическая система координат

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi.$$

7. Градиент скалярного поля часто бывает удобно записать в следующем виде:

$$\operatorname{grad} T = \nabla T. \quad (10)$$

Здесь ∇ – оператор, имеющий различные выражения в разных системах координат. Так, например, в прямоугольной системе координат

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

8. Во многих случаях приходится иметь дело с такими полями $T(\psi)$, аргумент ψ которых сам является функцией координат. В этом случае можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Следовательно, как следует из первого соотношения (7),

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial \psi} \operatorname{grad} \psi. \quad (12)$$

Например, если поле является функцией расстояния между двумя точками:

$$\psi = L_{qp},$$

то

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial L_{qp}} \nabla L_{qp}. \quad (13)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

ВВЕДЕНИЕ

Наша цель состоит в том, чтобы описать некоторые фундаментальные математические понятия, которые используются при изучении векторных полей различной природы. Гравитационные, электрические, магнитные и электромагнитные поля являются классическими примерами векторных полей, описывающих определенные физические явления. Смещение, скорость и ускорение частиц среды, связанные с распространением акустических или упругих волн, также являются векторными полями. Каждое из указанных полей вызвано некоторым генератором, список которых приведен в табл. 1. В этой таблице δ_m и δ_e – объемные плотности соответственно массы и заряда; j_c и ϵ $\partial E/\partial t$ – плотности тока проводимости и тока смещения; $\partial B/\partial t$ – скорость изменения магнитного поля во времени. Наконец, P_o – это давление, вызванное деформацией среды.

Из табл. 1 видно, что существует два типа генераторов векторного поля. Генераторы, относящиеся к первому типу, описываются скалярными функциями, такими как масса, заряд или давление, и называются источниками. Второй тип – это вихри. К этому типу генераторов относятся j_c , $\epsilon \partial E/\partial t$ и $\partial B/\partial t$, и распределение таких генераторов описывается векторными функциями.

Очевидно, что некоторые поля могут вызываться только источниками, а другие – только вихрями. Наконец, существуют поля, появление которых связано с наличием источников обоих типов.

С физической точки зрения очевидно, что поведение поля определяется распределением генераторов. Поэтому естественно установить связь между каждым таким генератором и соответствующим ему полем. Такой подход используется при построении теории векторных полей. Поскольку существует два типа генераторов, мы выведем соответствующие этим типам два фундаментальных уравнения, играющих роль связующих “мостов” между векторным полем $M(a)$ и его генераторами. Такой же подход будет использоваться

Таблица 1

Поле	Генераторы
Гравитационное g	Массы δ_m
Электрическое E	Заряды δ_e
Магнитное B	Токи проводимости и молекулярные токи
Электромагнитное E, B	Скорость изменения магнитного поля $\partial B/\partial t$ и токи смещения $\epsilon \partial E/\partial t$
Смещения частиц s , связанные с акустическими волнами	Давление P_o

при изучении вспомогательных векторных полей, которые вводятся, чтобы упростить анализ реальных векторных полей.

В принципе, можно было бы поступить и другим образом. Действительно, поскольку векторное поле $\mathbf{M}(a)$ можно представить в виде

$$\mathbf{M}(p) = M_1(p)\mathbf{i}_1 + M_2(p)\mathbf{i}_2 + M_3(p)\mathbf{i}_3,$$

изучение этого векторного поля можно свести к изучению трех скалярных полей $M_1(p)$, $M_2(p)$ и $M_3(p)$. Однако такой подход полезен только в том случае, когда требуется задать поведение векторного поля в зависимости от точки наблюдения.

1. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ

Чтобы вывести соотношение, связывающее векторное поле с его источниками, удобно ввести понятие векторной линии (линии тока). По определению, каждый элемент $d\mathbf{l}^m$ векторной линии параллелен самому полю \mathbf{M} , т.е.

$$\cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}^m) = 1. \quad (1)$$

Другими словами, в каждой точке поле \mathbf{M} тангенциально линии векторного поля (рис. 1, a), т.е. элемент $d\mathbf{l}^m$ и вектор \mathbf{M} имеют одни и те же направляющие косинусы.

Поэтому мы можем записать

$$\frac{\partial l_1}{M_1} = \frac{\partial l_2}{M_2} = \frac{\partial l_3}{M_3}. \quad (2)$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, задающее линии векторного поля.

Здесь

$$d\mathbf{l} = dl_1\mathbf{i}_1 + dl_2\mathbf{i}_2 + dl_3\mathbf{i}_3.$$

Поскольку линии векторного поля указывают направление поля в каждой точке, они наглядно демонстрируют геометрию векторного поля. Эти линии можно также использовать для иллюстрации поведения модуля M как функции точки наблюдения p . С этой целью рассмотрим элемент поверхности dS^m , расположенный в плоскости, перпендикулярной линиям векторного поля.

Предположим, что число линий dN , пересекающих эту поверхность, прямо пропорционально модулю векторного поля

$$dN = \alpha M dS^m, \quad (3)$$

где α – некоторая постоянная, не зависящая от координат точки.

Плотность линий векторного поля равняется

$$\frac{dN}{dS^m} = \alpha M,$$

т.е. она увеличивается в тех местах, где поле более сильное, и наоборот.

Важно различать два типа векторных линий, а именно: открытые и замкнутые (рис. 1, *a*). Первый тип имеет концевые точки g_m^+ и g_m^- , а у второго такие точки отсутствуют.

Указанные точки являются геометрической моделью источников векторного поля (см. рис. 1, *z*, *d*, *e*).

2. ЧИСЛО ВЕКТОРНЫХ ЛИНИЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЬ

По аналогии с действительными и комплексными числами можно ввести такое правило, которое позволит сосчитать количество векторных линий, пересекающих произвольную поверхность S (рис. 1, *ж*, *з*). Если линия пересекает поверхность S и угол между dI^m и dS^m не превышает $\pi/2$, то осуществляется положительный переход через эту поверхность. По определению, в этом случае линии идут от задней к передней стороне поверхности. И наобо-

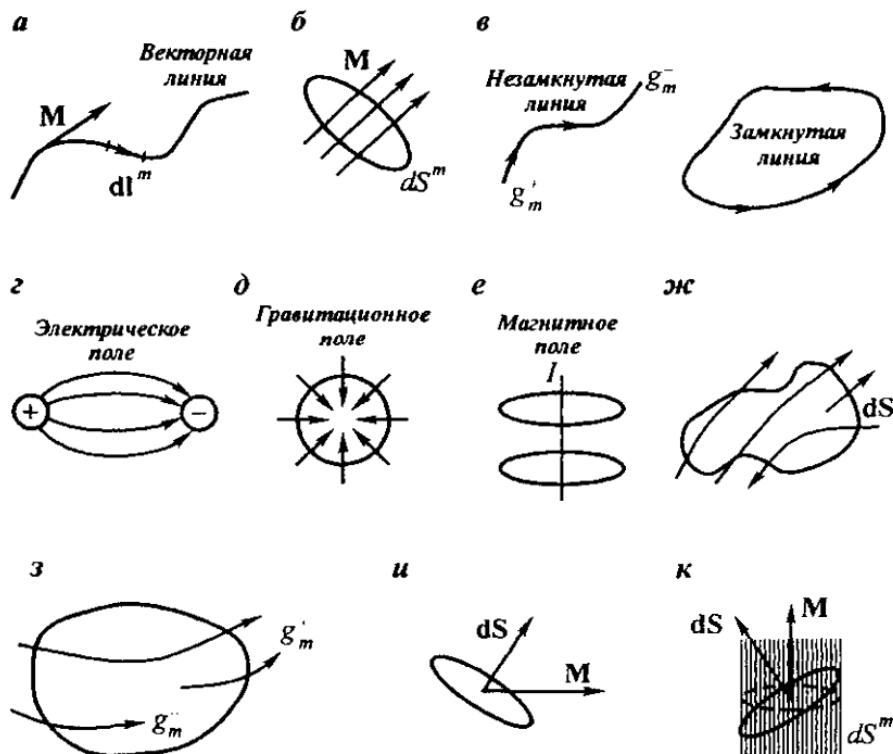


Рис. 1. Векторные линии (линии тока)

рот, если угол между $d\mathbf{l}'$ и $d\mathbf{S}$ больше, чем $\pi/2$, то переход является отрицательным. Таким образом, полное число линий векторного поля, пересекающих поверхность, определяется в общем случае разностью между количеством векторных линий, дающих положительный и отрицательный вклад.

Рассмотрим теперь частный случай замкнутой поверхности, изображенной на рис. 1, з. В каждой точке поверхности нормаль $\mathbf{n}(d\mathbf{l} = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})$ направлена в сторону от объема V , окруженного поверхностью S . Если векторная линия не заканчивается внутри объема V , ее вклад равен нулю. Действительно, когда данная линия пересекает поверхность от ее передней стороны к задней, то пересечение является отрицательным. После этого та же самая линия снова пересекает данную поверхность, но в обратной последовательности, проходя сначала заднюю, а затем переднюю стороны. В этом случае пересечение является положительным. Соответственно, полное число векторных линий равно нулю. Отсюда можно сделать вывод о том, что число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность, определяется числом концевых точек, заключенных внутри объема. Так, например, линия, имеющая внутри объема точку g_m^+ или g_m^- , дает соответственно положительный или отрицательный вклад.

Таким образом, число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность, равняется

$$N = g_m^+ - g_m^- \quad (4)$$

Здесь g_m^+ и g_m^- – полное число положительных и отрицательных точек внутри объема.

3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Введем теперь одно из основных понятий векторного анализа, а именно поток. Потоком dF векторного поля $\mathbf{M}(p)$ через элементарную площадку $d\mathbf{S}(p)$ (рис. 1, з) называется скалярное произведение

$$dF = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5)$$

Поскольку

$$dF = M dS \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{S}), \quad (6)$$

поток может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В последнем случае поле \mathbf{M} будет тангенциальным к площадке $d\mathbf{S}$.

Произвольную поверхность можно представить как сумму элементарных поверхностей. Тогда поток поля \mathbf{M} через поверхность S равняется

$$F = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

И, наконец, поток через замкнутую поверхность S определяется как

$$F = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8)$$

Далее мы увидим, что последнее определение играет очень важную роль при изучении распределения источников. Для того чтобы оценить поток, выразим его через число векторных линий. Рассмотрим сначала элемент dS'' (рис. 1, б). Учитывая, что векторы $d\mathbf{S}''$ и \mathbf{M} параллельны друг другу, поток векторного поля запишем как

$$dF = M dS''.$$

Отсюда, в соответствии с равенством (3), получим

$$dF = \frac{1}{\alpha} dN. \quad (9)$$

Таким образом, в данном простейшем случае поток dF равняется, с точностью до константы, числу векторных линий, пересекающих поверхность dS'' , и, конечно, этот поток положителен. Рассмотрим снова элементарную поверхность dS , произвольно ориентированную относительно поля \mathbf{M} . Из рис. 1, и видно, что ее проекция dS'' на плоскость, перпендикулярную полю \mathbf{M} , есть

$$dS'' = dS \cos(\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}).$$

Поскольку число векторных линий, пересекающих поверхности dS и dS'' , одинаково, приходим к равенству

$$dN = \alpha M dS'' = \alpha M dS \cos(\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S})$$

или

$$dN = \alpha \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \alpha dF. \quad (10)$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, поток векторного поля с точностью до константы $1/\alpha$ равняется числу векторных линий, пересекающих данный элемент:

$$dF = \frac{dN}{\alpha}. \quad (11)$$

Как мы уже знаем, обе величины dF и dN могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Обобщение на случай произвольной поверхности S очевидно:

$$F = \int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} N, \quad (12)$$

где N – полное число векторных линий, пересекающих поверхность S .

4. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть теперь поверхность S является замкнутой. В соответствии с формулой (12) поток векторного поля через эту поверхность

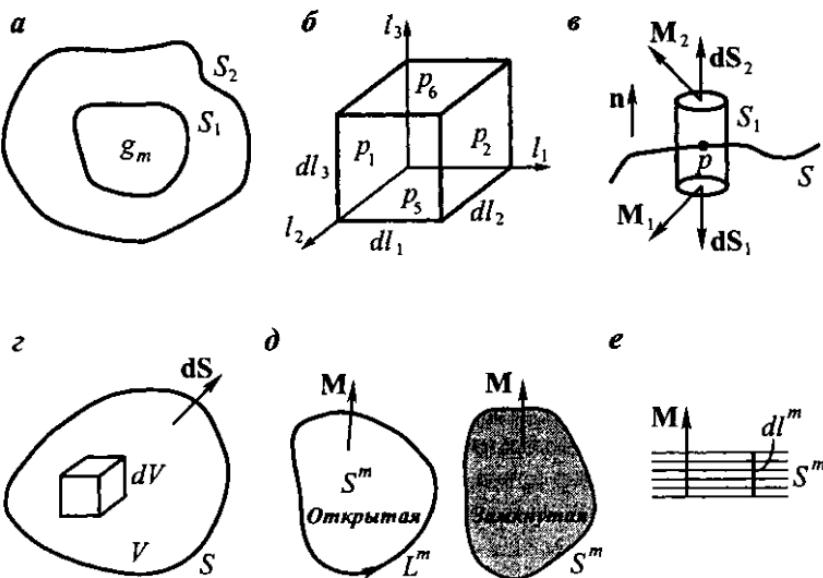


Рис. 2. Поток через замкнутую поверхность. Дивергенция. Нормальные поверхности

$$F = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} N. \quad (13)$$

Здесь N – число векторных линий, пересекающих замкнутую поверхность S .

С учетом равенства (4) последнее выражение можно записать как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha} g'', \quad (14)$$

где

$$g'' = g_+ - g_-. \quad (15)$$

Таким образом, поток векторного поля через замкнутую поверхность определяется полным числом концевых точек внутри выделенного объема. Равенство (14) является одной из основных формул теории поля, поскольку оно устанавливает связь между полем \mathbf{M} и концевыми точками векторных линий, т.е. его источниками. Конечно, поразительный результат, описываемый этим выражением, было довольно трудно предсказать заранее. Действительно, изменение поверхности S_1 приводит к изменению величины и направления поля \mathbf{M} на S_1 , а также к изменению области интегрирования. Можно было бы ожидать, что поток F через новую поверхность S_2 будет отличаться от того, который был для поверхности S_1 (рис. 2, a). Однако в действительности, если эти поверхности окружают одинаковое число концевых точек, то оба потока равны друг другу:

$$\oint_{S_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

Следует также заметить, что поток

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

не зависит от тех концевых точек линий векторного поля, которые располагаются вне объема V .

Итак, мы показали, что концевые точки являются геометрическими моделями реальных источников. Рассмотрим в качестве иллюстрации гравитационное, электрическое и магнитное поля. Из физических законов, управляющих поведением этих полей, следует, что

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma m, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Здесь A_g и γ – константы, e и m – полный заряд и масса внутри объема, ограниченного поверхностью S .

Смысль формулы (14) особенно ясен в случае магнитного поля \mathbf{B} . Существует бесконечное количество магнитных полей различной величины и направления, однако во всех случаях поток поля \mathbf{B} через замкнутую поверхность равен нулю. Физический смысл этого результата состоит в том, что у данного поля нет источников (магнитных зарядов).

Мы будем ассоциировать концевые точки с источниками даже тогда, когда станем рассматривать вспомогательные поля, хотя в этом случае источники, конечно, являются фиктивными. Таким образом, формулу (14) можно записать как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad (16)$$

где k_1 – некоторая постоянная; Q – количество источников в объеме V , ограниченном поверхностью S .

5. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Из формулы (14) следует, что поток

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$$

определяет разность между положительными и отрицательными источниками:

$$Q = Q_+ - Q_-. \quad (17)$$

Тем не менее, он не характеризует их распределение внутри объема. Чтобы преодолеть этот недостаток, рассмотрим такой малый объем ΔV , в котором источники (положительные либо отрицательные) распределены равномерно.

Плотность источников в таком объеме можно определить следующим образом:

$$\frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = k_1 \frac{Q}{\Delta V} = k_1 \delta(p). \quad (18)$$

Здесь функция $\delta(p)$ равняется плотности источников, а отношение

$$\frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \operatorname{div} \mathbf{M} \quad (19)$$

называется дивергенцией векторного поля.

Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta(p), \quad (20)$$

т.е. дивергенция поля \mathbf{M} в точке p определяет плотность источников в окрестности этой точки.

Так, например,

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi \gamma \delta_m, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta_e}{\epsilon_0}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (21)$$

где δ_m и δ_e – соответственно объемная плотность и плотность зарядов.

В частности, если источники в окрестности некоторой точки отсутствуют, то

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0.$$

6. ВЫРАЖЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ

Как следует из определения (19), для того, чтобы вычислить $\operatorname{div} \mathbf{M}$, необходимо выполнить интегрирование по поверхности S . Это довольно громоздкая процедура, и мы попытаемся заменить ее более простой операцией дифференцирования.

С этой целью рассмотрим элементарный объем

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3, \quad (22)$$

образованный элементами координатных поверхностей (см. рис. 2, б). Поскольку данный объем ограничен координатными поверхностями, поверхностный интеграл по каждой из сторон dS можно представить в виде скалярного произведения

$$\mathbf{M}(p_n) \cdot d\mathbf{S},$$

где p_n – средняя точка указанной поверхности.

Тогда поток запишется как

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{S}_1(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{S}_1(p_1) + \mathbf{M}(p_4) \cdot d\mathbf{S}_2(p_4) + \\ + \mathbf{M}(p_3) \cdot d\mathbf{S}_2(p_3) + \mathbf{M}(p_6) \cdot d\mathbf{S}_3(p_6) + \mathbf{M}(p_5) \cdot d\mathbf{S}_3(p_5). \quad (23)$$

Поскольку единичные векторы каждой из сторон направлены в сторону от объема, мы имеем

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = M_1(p_2) dS_1(p_2) + M_1(p_1) dS_1(p_1) + M_2(p_4) dS_2(p_4) - \\ - M_2(p_3) dS_2(p_3) + M_3(p_6) dS_3(p_6) - M_3(p_5) dS_3(p_5). \quad (24)$$

Учитывая, что расстояние dl между противоположными сторонами мало, предположим, что поток между ними изменяется линейно. Тогда вместо выражения (24) получим

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial(M_1 dS_1)}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial(M_2 dS_2)}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial(M_3 dS_3)}{\partial l_3} dl_3. \quad (25)$$

Равенство (19) запишется в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2 dl_3} \left[\frac{\partial}{\partial l_1} (M_1 dS_1) dl_1 + \frac{\partial}{\partial l_2} (M_2 dS_2) dl_2 + \frac{\partial}{\partial l_3} (M_3 dS_3) dl_3 \right] \quad (26)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 M_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 M_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 M_3)}{\partial x_3} \right], \quad (27)$$

так как

$$dl_1 = h_1 dx_1, \quad dl_2 = h_2 dx_2, \quad dl_3 = h_3 dx_3.$$

Таким образом, мы заменили операцию интегрирования дифференцированием, и выражение (27) описывает дивергенцию векторного поля в произвольной регулярной точке, где существуют производные вдоль координатных линий. В качестве примера приведем выражения для дивергенции векторного поля в различных системах координат.

Декартова прямоугольная система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (28)$$

Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rM_r)}{\partial x} + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial M_z}{\partial z} \right]. \quad (29)$$

Сферическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (R^2 \sin \theta M_R)}{\partial R} + \frac{\partial (R \sin \theta M_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (RM_\phi)}{\partial \phi} \right]. \quad (30)$$

По определению, дивергенция характеризует плотность источников, и, следовательно, при замене координат ее значение не изменится. Иными словами, $\operatorname{div} \mathbf{M}$, так же, как и $\operatorname{grad} T$, является инвариантом.

7. ПОВЕРХНОСТНЫЙ АНАЛОГ $\operatorname{div} \mathbf{M}$

Выражение (27) дивергенции векторного поля через производные справедливо только в регулярных точках, где поле \mathbf{M} непрерывно. Однако это условие выполняется не всегда, и поле \mathbf{M} может иметь особенности.

Пусть источники распределены по поверхности S с плотностью $\Sigma(p)$ (рис. 2, в).

Применяя формулу (16) к элементарному цилинду, получим

$$\mathbf{M}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 \Sigma(p) dS. \quad (31)$$

Здесь

$$d\mathbf{S}_2 = dS \mathbf{n}, \quad d\mathbf{S}_1 = -dS \mathbf{n}, \quad \mathbf{M}_2 \text{ и } \mathbf{M}_1$$

обозначают поле на противоположных сторонах цилиндра с боковой поверхностью S_1 .

С уменьшением высоты цилиндра поверхностный интеграл в формуле (31) исчезает, и мы получаем

$$M_{2n}(p) - M_{1n}(p) = k_1 \Sigma(p), \quad (32)$$

т.е. разность нормальных компонент поля определяется плотностью источников в данной точке.

В частности, в тех местах, где плотность равна нулю, нормальная компонента M_n является непрерывной функцией.

Таким образом, мы получили соотношения трех типов между полем \mathbf{M} и его источниками:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta \quad \text{и} \quad M_{2n} - M_{1n} = k_1 \Sigma. \quad (33)$$

8. ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

Предположим, что внутри объема V , окруженного поверхностью S , поле \mathbf{M} является непрерывным (рис. 2, г). По определению, число источников в элементарном объеме dV определяется как

$$\operatorname{div} \mathbf{M} dV = k_1 \delta dV.$$

Следовательно, интегрирование по объему дает

$$\oint_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV = k_1 Q.$$

С другой стороны,

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q,$$

и, соответственно,

$$\oint_V \operatorname{div} \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (34)$$

Последнее выражение – это известная формула Гаусса – Остроградского, которая имеет множество приложений и, в частности, играет основополагающую роль при решении обратных задач. Это связано с тем, что соотношение (34) устанавливает связь между значениями поля на поверхности S , которые часто известны, и полем внутри объема.

9. НОРМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ S'' ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ \mathbf{M}

Найдем теперь связь между полем \mathbf{M} и вторым типом генераторов – вихрями. Для этого удобно ввести понятие нормальной поверхности S'' (рис. 2, δ), в каждой точке которой поле направлено вдоль единичного вектора нормали \mathbf{n} , т.е. от задней стороны к передней.

Как и в случае векторных линий, мы будем различать два типа нормальных поверхностей: открытые и замкнутые (рис. 2, δ). Первый тип поверхностей ограничен краевой линией L'' – ориентированной кривой, направление которой выбирается таким образом, чтобы поле \mathbf{M} подчинялось правилу правой руки. Очевидно, что нормальные поверхности позволяют наглядно представить векторное поле \mathbf{M} . Более того, с их помощью можно охарактеризовать поведение его модуля M . С этой целью рассмотрим нормальные поверхности, проведенные через элемент dl'' . Число этих поверхностей пропорционально полю \mathbf{M} :

$$dN = \beta M dl'', \quad (35)$$

как это показано на рис. 2, e .

Здесь следует сделать два замечания:

а) подобно тому, как концевые точки векторных линий показывали распределение источников, краевые линии L'' нормальных поверхностей представляют собой геометрическую модель вихрей;

б) несмотря на то, что нормальные поверхности S'' можно ввести только для определенного класса векторных полей, их, тем не менее, очень удобно использовать.

10. ЧИСЛО НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ОРИЕНТИРОВАННУЮ КРИВУЮ

Введем, как и в случае векторных линий, правило, позволяющее вычислять число нормальных поверхностей, пересекающих произвольный элемент кривой dl . Это правило очень простое. Если угол между dl и M не превышает $\pi/2$, то пересечение считается положительным. В противном случае, когда этот угол больше, чем $\pi/2$, пересечение является отрицательным (рис. 3, a). Если ориентированная кривая l имеет конечную длину, то полное число нормальных поверхностей, пересекающих данную кривую (рис. 3, б), равняется разности положительных и отрицательных пересечений. Рассмотрим наиболее важный случай, когда кривая l замкнута. Предположим сначала, что краевые линии L'' не пересекают поверхность, ограниченную кривой l (рис. 3, в). В этом случае число пересечений N нормальных поверхностей также равняется нулю. Действительно, каждая из нормальных поверхностей S'' имеет два пересечения с кривой l , одно из которых является положительным, а другое – отрицательным. Таким образом, полное число пересечений N равняется нулю. Другой случай показан на рис. 3, г. Две нормальные поверхности пересекают кривую l , однако их пересечения имеют противоположные знаки, так что полное число пересечений N по-прежнему равно нулю. Из рисунка также видно, что две краевые линии L'' пересекают поверхность S в противоположных направлениях. Следовательно, число таких линий, пересекающих поверхность S , ограниченную кривой l , также равно нулю. Очевидно, что в общем случае, показанном на рис. 3, д, полное число пересечений нормальных поверхностей с замкнутой кривой равняется

$$N = L''_+ - L''_-. \quad (36)$$

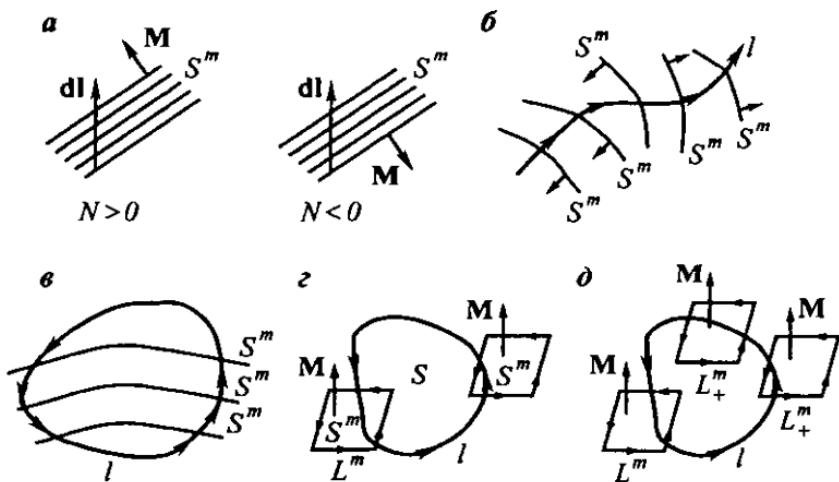


Рис. 3. Нормальные поверхности и их краевые линии

Здесь L_+ и L_- – полное число положительных и отрицательных пересечений краевых линий нормальных поверхностей с поверхностью S .

11. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Введем еще одно фундаментальное понятие векторного анализа, а именно циркуляцию векторного поля. Рассмотрим сначала скалярное произведение

$$dV = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}). \quad (37)$$

По определению, dV может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Поскольку кривую l можно представить в виде суперпозиции элементарных перемещений, имеем

$$V = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (38)$$

В частности, для замкнутой кривой это выражение дает

$$V = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (39)$$

Для того чтобы понять смысл последнего интеграла, мы свяжем функцию V с числом пересечений пути l нормальными поверхностями. С этой целью рассмотрим несколько случаев. Прежде всего, из формул (35) и (37) для элемента дуги dl^m получим

$$dN = \beta dV$$

или

$$dV = \frac{dN}{\beta}, \quad (40)$$

где dN и dV – положительные, поскольку направления векторов $d\mathbf{l}$ и \mathbf{M} совпадают (рис. 4, a).

Предположим теперь, что ориентация элемента $d\mathbf{l}$ относительно поля \mathbf{M} является произвольной. Поскольку его проекция dl^m на направление поля \mathbf{M} пересекает одинаковое число dN нормальных поверхностей, мы имеем

$$dN = \beta \mathbf{M} \cdot dl^m = \beta \mathbf{M} \cdot dl \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}),$$

т.е.

$$dN = \beta \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \beta dV$$

или

$$dV = \frac{dN}{\beta}. \quad (41)$$

В отличие от предыдущего случая (см. рис. 4, а), здесь dV может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Поскольку произвольную кривую l можно представить в виде суммы элементарных перемещений dl , полное число пересечений равняется

$$N = \beta \int_A^B M \cdot dl \text{ или } V = \frac{N}{\beta}. \quad (42)$$

Таким образом, во всех перечисленных выше случаях функция V выражается через положительные и отрицательные пересечения нормальных поверхностей S'' . Если кривая – замкнутая, что для нас является наиболее важным случаем, то в соответствии с формулой (36) мы имеем

$$\oint M \cdot dl = \frac{1}{\beta} (L''_+ - L''_-) = \frac{L''}{\beta}. \quad (43)$$

Таким образом, мы приходим к основополагающему результату, состоящему в том, что циркуляция векторного поля

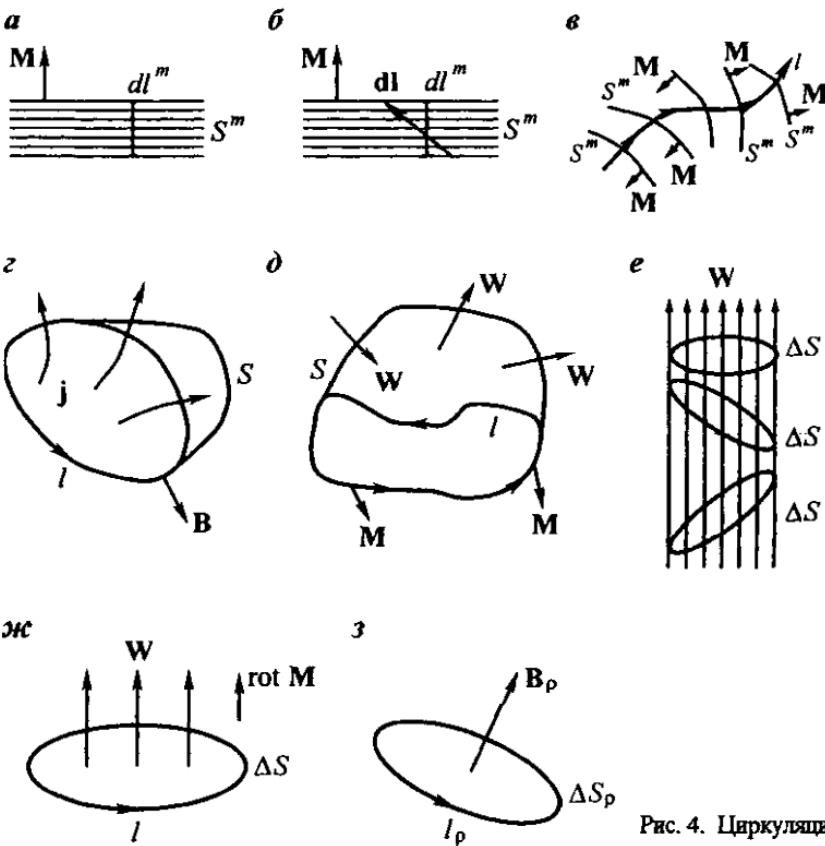


Рис. 4. Циркуляция и ротор

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

характеризует число тех краевых линий нормальных поверхностей, которые пересекают поверхность, ограниченную контуром интегрирования l . Как уже отмечалось ранее, линии обрыва L'' являются геометрической моделью вихрей, и именно поэтому формула (43) имеет такое важное значение. Например, из законов физики известно, что циркуляция гравитационного и электрического полей равна нулю:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ и } \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Такое поведение легко объяснимо, поскольку единственными генераторами этих полей являются массы и заряды.

С другой стороны, в случае магнитного поля \mathbf{B} , порожденного токами проводимости, мы имеем

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (44)$$

где I – ток через произвольную поверхность S , ограниченную кривой l (рис. 4, 2).

По определению, ток является потоком вектора плотности тока \mathbf{j} :

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

и, соответственно,

$$I = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (45)$$

Существенно, что векторные линии поля \mathbf{j} , а также краевые линии L'' являются замкнутыми, и это поле характеризует распределение вихрей. Другой пример ненулевой циркуляции – это электромагнитная индукция. Из закона Фарадея следует, что

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (46)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (47)$$

а $\partial \mathbf{B} / \partial t$ – вектор плотности вихрей, порождающих электрический ток.

Таким образом, в обоих примерах циркуляция определяется потоком вектора плотности вихрей. Сравнение выражения (43) с формулами (45) и (47) позволяет переписать последнее равенство в следующем виде:

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}. \quad (48)$$

Здесь k_2 – постоянная, W – плотность вихрей поля \mathbf{M} (рис. 4, δ).

Соотношение (48) связывает поле \mathbf{M} и его генераторы – вихри. Оно представляет собой второе фундаментальное соотношение теории поля.

12. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Циркуляция имеет те же недостатки, что и поток через замкнутую поверхность, а именно, она не описывает в общем случае распределение вихрей. Чтобы найти вектор плотности вихрей \mathbf{W} , рассмотрим малую замкнутую кривую l , лежащую в некоторой плоскости, и предположим, что распределение этого вектора на поверхности ΔS , ограниченной контуром l , является равномерным. Как видно из рис. 4, e , поток вектора \mathbf{W} и, следовательно, циркуляция

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

существенно зависят от ориентации поверхности ΔS . Пусть ΔS находится в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{W} (рис. 4, $\mathfrak{ж}$). Тогда из формулы (48) следует, что

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 W \Delta S$$

или

$$\frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = k_2 W. \quad (49)$$

Вектор

$$\text{rot } \mathbf{M} = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{n} = k_2 W \quad (50)$$

называется ротором векторного поля \mathbf{M} , и

$$\mathbf{W} = W \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, перпендикулярный поверхности ΔS .

По определению, модуль $\text{rot } \mathbf{M}$ равняется, с точностью до константы, плотности вихрей W , а его направление совпадает с направлением вихря. Следует заметить, что направления векторов $d\mathbf{l}$ и \mathbf{W} подчиняются правилу правой руки. В тех точках, где вихри отсутствуют,

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0. \quad (51)$$

В частности, последнее равенство выполняется везде в случае электрического

и гравитационного полей, а также в случае поля смещения частиц, связанного с акустическими волнами в однородной среде.

13. ВЫРАЖЕНИЕ РОТОРА ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ

Как и в случае дивергенции, интегрирование в формуле (50) удобно заменить дифференцированием. С этой целью введем вектор \mathbf{C} таким образом, чтобы его компонента вдоль любого направления ρ (рис. 4, з) определялась как

$$C_\rho = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_\rho}. \quad (52)$$

Из равенства (48) следует, что каждая из компонент вектора \mathbf{C} прямо пропорциональна потоку вихрей через соответствующую элементарную поверхность. Следовательно, максимальное значение указанной компоненты наблюдается, когда направление ρ совпадает с направлением вихрей, т.е.

$$\mathbf{C}_\rho = \frac{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{n}. \quad (53)$$

Другими словами, выражения (50) и (52) описывают один и тот же вектор, и это дает нам возможность найти компоненты $\text{rot } \mathbf{M}$ вдоль координатных линий (рис. 5, а). Рассмотрим сначала кривую, лежащую в координатной плоскости S_1 . Выполняя интегрирование, получим

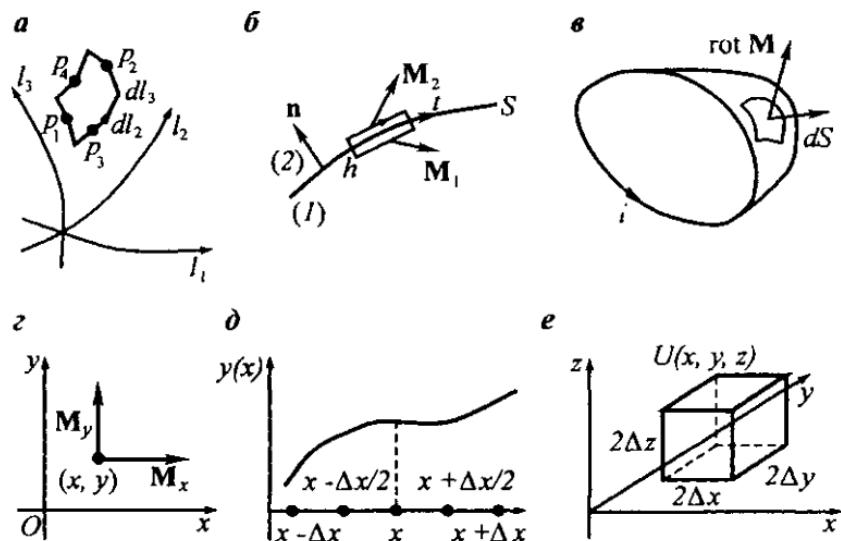


Рис. 5. Лапласиан и ротор

$$\begin{aligned}
 \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{M}(p_2) \cdot d\mathbf{l}_3(p_2) + \mathbf{M}(p_1) \cdot d\mathbf{l}_3(p_1) + \mathbf{M}(p_4) \cdot d\mathbf{l}_2(p_4) + \\
 &+ \mathbf{M}(p_3) \cdot d\mathbf{l}_2(p_3) = M_3(p_2) dl_3(p_2) - M_3(p_1) dl_3(p_1) - M_2(p_4) dl_2(p_4) + \\
 &+ M_2(p_3) dl_2(p_3). \tag{54}
 \end{aligned}$$

Поскольку длины dl_2 и dl_3 малы, можно предположить, что компоненты поля и перемещения меняются линейно. Тогда соотношение (54) переписывается как

$$\oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3$$

или

$$\text{rot}_1 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_2 dl_3} \left[\frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_3} dl_3 \right]. \tag{55}$$

Аналогично, интегрирование вдоль элементарных замкнутых кривых, лежащих в координатных плоскостях S_2 и S_3 дает

$$\text{rot}_2 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_3} \left[\frac{\partial(M_1 dl_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(M_3 dl_3)}{\partial l_1} dl_1 \right] \tag{56}$$

и

$$\text{rot}_3 \mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2} \left[\frac{\partial(M_2 dl_2)}{\partial l_1} dl_1 - \frac{\partial(M_1 dl_1)}{\partial l_2} dl_2 \right]. \tag{57}$$

Легко проверить, что последние три равенства эквивалентны следующему выражению:

$$\text{rot} \mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix}, \tag{58}$$

которое характеризует распределение вихрей в регулярных точках волнового поля, где его компоненты являются непрерывными функциями.

Ниже приводятся выражения компонент $\text{rot} \mathbf{M}$ в простейших системах координат.

Декартова прямоугольная система координат

$$\text{rot}_x \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},$$

$$\text{rot}_y \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad (59)$$

$$\text{rot}_z \mathbf{M} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

Цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \mathbf{M} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial z} \right], \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{M} &= \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}, \\ \text{rot}_z \mathbf{M} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Сферическая система координат

$$\begin{aligned} \text{rot}_R \mathbf{M} &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (R \sin \theta M_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (R M_\theta)}{\partial \varphi} \right], \\ \text{rot}_\theta \mathbf{M} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial M_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial (R \sin \theta M_\varphi)}{\partial R} \right], \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{M} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial (r M_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial M_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Ротор векторного поля описывает распределение вихрей и так же, как $\text{grad } T$ и $\text{div } \mathbf{M}$, инвариантен к замене координат.

14. ПОВЕРХНОСТНЫЙ АНАЛОГ $\text{rot } \mathbf{M}$

Как мы знаем, соотношение (58) можно использовать только в регулярных точках. Найдем теперь соотношение между полем \mathbf{M} и вихрями \mathbf{W}_s , распределенными на поверхности S . Применяя формулу (48) к кривой l , лежащей в плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{W}_s (рис. 5, б), получим

$$\mathbf{M}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \mathbf{M}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = k_2 W_s dl$$

или

$$M_{2r} - M_{1r} = k_2 W_s, \quad (62)$$

поскольку

$$dl_2 = -dl_1$$

и расстояние h между двумя сторонами поверхности стремится к нулю.

Здесь M_1 и M_2 – тангенциальные компоненты поля на разных сторонах поверхности.

Соотношение (62) можно записать как

$$n \times (M_2 - M_1) = k_2 W_s, \quad (63)$$

откуда видно, что разность тангенциальных компонент определяет плотность и направление вихрей на поверхности. Например, в случае поверхностных токов i

$$n \times (B_2 - B_1) = \mu_0 i.$$

Таким образом, мы получили три вида соотношений, связывающих поле M и его источники – вихри:

$$\oint_l M \cdot dl = k_2 \oint_s W \cdot dS, \text{ rot } M = k_2 W,$$

и

$$n \times (M_2 - M_1) = k_2 W_s.$$

15. ФОРМУЛА СТОКСА

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую l и поверхность S , ограниченную этой кривой (рис. 5, в).

Из формулы (50) следует, что скалярное произведение

$$\text{rot } M \cdot dS$$

задает поток вектора плотности вихрей W через элементарную площадку dS . С точностью до постоянной k_2 поток через поверхность S определяется как

$$\oint_l \text{rot } M \cdot dl = \int_s \text{rot } M \cdot dS.$$

С другой стороны, этот же поток можно выразить через циркуляцию (см. формулу 48) поля. Отсюда получим

$$\oint_l M \cdot dl = \int_s \text{rot } M \cdot dS. \quad (65)$$

Это соотношение представляет собой известную формулу Стокса, связывающую значения поля M вдоль замкнутой кривой l с его значениями на поверхности S . Формулу Гаусса – Остроградского и формулу Стокса можно рассматривать как соотношения, связывающие поле и его генераторы: источники и вихри.

В качестве иллюстрации формулы Стокса рассмотрим поле \mathbf{M} на плоскости XOY (рис. 5, 2), где

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}, \quad dS = dx dy$$

и

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}.$$

Предполагая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0,$$

мы вместо равенства (65) получим

$$\oint_l (M_x dx + M_y dy) = \int_S \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial z} \right) dS. \quad (66)$$

В дальнейшем используем это соотношение для того, чтобы продемонстрировать некоторые замечательные свойства комплексной переменной.

16. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Согласно формулам (33) и (64), существует два основополагающих соотношения, связывающих поле \mathbf{M} и его генераторы:

$$\oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = k_1 Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta, \quad M_{2n} - M_{1n} = k_1 \Sigma$$

и

$$\oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = k_2 \oint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = k_2 \mathbf{W}_S.$$

Если поле известно, то данные соотношения можно использовать для нахождения генераторов этого поля. И наоборот, если поле неизвестно, то соотношения (67) представляют собой систему уравнений, в результате решения которой это поле можно будет найти.

Например, в регулярных точках

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta. \quad (68)$$

Следующие примеры физических полей являются конкретными примерами данной системы.

Гравитационное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{g} = -4 \pi \gamma \delta.$$

Электрическое поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta}{\epsilon_0}.$$

Магнитное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Электромагнитное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\delta}{\epsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Эти примеры ясно показывают, что существует следующие три типа векторных полей:

а) поле источников, для которых

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = 0, \operatorname{div} \mathbf{M} = k_1 \delta. \quad (69)$$

Это поле порождается только источниками;

б) вихревое поле:

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = k_2 \mathbf{W}, \operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \quad (70)$$

По определению, это поле не имеет источников;

в) поле \mathbf{M} , порожденное генераторами обоих типов. Такое поле подчиняется уравнениям (68).

Покажем теперь, что произвольное поле \mathbf{M} можно представить в виде суммы трех полей. Действительно, можно записать

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3, \quad (71)$$

где поля \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 удовлетворяют соответственно уравнениям (69) и (70), а поле \mathbf{M}_3 вообще не имеет генераторов, т.е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = 0, \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = 0.$$

Поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{M}_1 + \operatorname{div} \mathbf{M}_2 + \operatorname{div} \mathbf{M}_3 = \operatorname{div} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3)$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{M}_2 + \operatorname{rot} \mathbf{M}_3 = \operatorname{rot} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3),$$

поле \mathbf{M} является решением уравнения (68). Равенство (71) составляет сущность теоремы Гельмгольца, играющей важную роль при изучении различ-

ных векторных полей. Следует заметить, что в общем случае поля \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 и \mathbf{M}_3 связаны друг с другом.

17. СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ

Система уравнений (68) состоит из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и, в принципе, позволяет найти три компоненты векторного поля и его генераторы. Конечно, решить такую систему очень сложно. Чтобы упростить эту задачу, введем понятие потенциала. Рассмотрим сначала поле источников, которое подчиняется равенствам (69). Из первого уравнения этой системы следует, что

$$\mathbf{M} = \operatorname{grad} U$$

или (72)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{i}_3,$$

где U – произвольная функция, имеющая первую производную. Из определения (58) видно, что всегда выполняется следующее равенство:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$$

или

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Кроме того, вместо формулы (72) можно записать

$$\mathbf{M} = -\operatorname{grad} U. \quad (74)$$

Таким образом, мы показали, что произвольное поле источников \mathbf{M} можно представить через скалярную функцию U . Этот результат имеет очень большое практическое значение, поскольку скалярное поле всегда легче изучать, чем векторное. Функцию U обычно называют скалярным потенциалом векторного поля \mathbf{M} . Поскольку существует бесконечное число функций U , характеризующих одно и то же векторное поле \mathbf{M} (эти функции могут отличаться друг от друга, например, некоторой постоянной), скалярный потенциал вряд ли имеет какой-то физический смысл.

Для того чтобы описать поведение потенциала, подставим равенство (72) во второе уравнение (69). Это дает следующий результат:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = k_1 \delta$$

или

$$\nabla^2 U = \Delta U = k_1 \delta. \quad (75)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (75) называется лапласианом потенциала U . С учетом соотношений (27) и (72) имеем

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] = k_1 \delta. \quad (76)$$

Таким образом, вместо системы уравнений (69) мы получили дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно потенциала U . Поскольку лапласиан характеризует плотность источников, он инвариантен относительно замены координат.

Рассмотрим далее вихревое поле, описываемое системой уравнений (70). Из второго уравнения этой системы:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$$

следует, что

$$\mathbf{M} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (77)$$

Используя соотношения (27) и (58) легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0. \quad (78)$$

Как и в случае скалярного потенциала, существует бесконечное число векторных функций \mathbf{A} , описывающих одно и то же поле \mathbf{M} . Например, такие функции могут отличаться друг от друга только градиентом некоторой функции: $\operatorname{grad} \phi$. Чтобы получить уравнение для векторного потенциала \mathbf{A} , подставим выражение (77) в первое из уравнений (70). Это дает

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = k_2 \mathbf{W}. \quad (79)$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

которое можно проверить, проанализировав каждую из компонент в левой и правой части.

Тогда вместо равенства (79) мы приходим к выражению

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = k_2 \mathbf{W}. \quad (80)$$

Поскольку существует бесконечное количество функций \mathbf{A} , описывающих одно и то же поле \mathbf{M} , выберем среди них ту, которая удовлетворяет равенству

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (81)$$

Уравнение (80) тогда заметно упрощается, и мы получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -k_2 \mathbf{W}. \quad (82)$$

Таким образом, мы выразили поля источников и вихрей через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{M}_1 = \operatorname{grad} U \text{ и } \mathbf{M}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

В общем случае векторное поле (71), вызванное источниками и вихрями, можно представить как

$$\mathbf{M} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (83)$$

Это равенство представляет собой другую форму теоремы Гельмгольца. Что касается поля \mathbf{M}_3 из формулы (71), то его можно выразить как через скалярный, так и через векторный потенциал. Таким образом, информация об этом поле уже содержится в выражении (83).

18. ЛАПЛАСИАН И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Мы видели, что скалярный потенциал, описывающий поля источников, удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U = \Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = k_1 \delta.$$

Хотя с физической точки зрения очевидно, что лапласиан определяет плотность источников, полезно также обсудить его математический смысл. Для этого обратимся к уравнению (76) и запишем его в декартовой системе координат.

Полагая $h_1 = h_2 = h_3$, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = k_1 \delta. \quad (84)$$

Рассмотрим сначала функцию $y(x)$ и выразим ее первую и вторую производные через значения самой функции. Как видно из рис. 5, δ , первую производную можно записать как

$$y'\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x} [y(x + \Delta x) - y(x)],$$

и

$$y'\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{\Delta x} [y(x) - y(x - \Delta x)].$$

Следовательно, вторая производная в точке x определяется выражением

$$y''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)]$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [y^{av}(x) - y(x)], \quad (85)$$

где

$$y^{av}(x) = \frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)}{2}$$

является средним значением функции в окрестности точки x .

Пусть

$$\partial^2 y / \partial x^2 = 0.$$

Это означает, что функция $y(x)$ в окрестности точки x ведет себя линейным образом. Линейные функции представляют собой простейший класс функций $y(x)$. Соответственно, вторую производную $\partial^2 y / \partial x^2$ можно трактовать как меру отклонения функции от ее линейного поведения в окрестности некоторой точки.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (84). Из рис. 5, *e* следует, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [U(x + \Delta x, y, z) + U(x - \Delta x, y, z) - 2U(p)],$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [U(x, y + \Delta y, z) + U(x, y - \Delta y, z) - 2U(p)],$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{(\Delta z)^2} [U(x, y, z + \Delta z) + U(x, y, z - \Delta z) - 2U(p)].$$

Полагая

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = h,$$

получим

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^3 U_i - 6U(p) \right]$$

или

$$\nabla^2 U = \frac{6}{h^2} [U^{av}(p) - U(p)]. \quad (86)$$

Здесь точка p является центром куба, U_i – значения потенциала на разных сторонах данного объема, а $U^{av}(p)$ – среднее значение потенциала.

Таким образом, если потенциал в точке p удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0,$$

то его значение в этой точке совпадает со средним:

$$U^{av}(p) = U(p). \quad (87)$$

Функции, подчиняющиеся этому условию, называются гармоническими. По существу они представляют собой обобщение линейных функций на двух- и трехмерный случай. Таким образом, значение лапласиана $\nabla^2 U$ характеризует отклонение потенциала от гармонической функции.

19. Согласно равенствам (75) операцию

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U$$

можно записать как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U.$$

Здесь ∇ – оператор, имеющий следующий вид:

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{i}_3.$$

Соответственно,

$$\operatorname{grad} U = \nabla U, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{M},$$

(89)

$$\text{тот } \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta.$$

20. Получим еще два полезных соотношения, используя формулу Гаусса – Остроградского:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{M} dV = \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (90)$$

Полагая

$$\mathbf{M} = \nabla U,$$

получим первую формулу Грина:

$$\int_V \nabla^2 U dV = \oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (91)$$

Предположим, что

$$\mathbf{M} = \phi \nabla U - U \nabla \phi.$$

Подстановка этого выражения в равенство (90) дает вторую формулу Грина

$$\int_V (\phi \nabla^2 U - U \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS, \quad (92)$$

так как

$$\nabla(\phi \nabla U - U \nabla \phi) = \phi \nabla^2 U + \nabla \phi \cdot \nabla U - U \nabla^2 \phi - \nabla U \cdot \nabla \phi = \phi \nabla^2 U - U \nabla^2 \phi.$$

21. В заключение приведем несколько полезных формул для в производных от различных произведений:

$$\nabla(\phi_1\phi_2) = \phi_1\nabla\phi_2 + \phi_2\nabla\phi_1,$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi,$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla \phi \times \mathbf{a}),$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ВВЕДЕНИЕ

В течение долгого времени использовались только положительные и отрицательные действительные числа, которые подразделяются на целые и дробные. Последние, в свою очередь, могут быть рациональными и иррациональными. Все эти числа характеризуются абсолютной величиной и знаком, и их можно представить как точки на прямой, например, на оси x (рис. 1). При этом расстояние от нуля до некоторой точки равняется абсолютной величине соответствующего числа.

Затем появились математические задачи, в которых потребовалось ввести другие, не действительные числа. По определению действительного числа x его квадрат всегда является числом положительным: $x^2 > 0$. Следовательно, алгебраическое уравнение

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

не может иметь действительных корней, поскольку

$$x^2 = -1. \quad (2)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, ввели новое число, которое называется мнимой единицей i . Как следует из уравнения (2),

$$x = \sqrt{-1} = i. \quad (3)$$

Основное свойство этого числа состоит в том, что его квадрат равен минус единице:

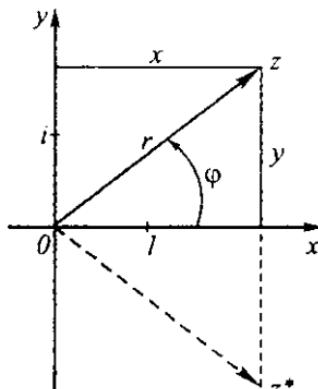


Рис. 1. Комплексная плоскость

$$i^2 = -1. \quad (4)$$

Соответственно,

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i$$

и т.д.

Естественным обобщением этого числа является произведение действительного числа u на мнимую единицу i , дающее чисто мнимое число

$$u \cdot i, \quad (5)$$

которое удобно наносить вдоль оси u (см. рис. 1).

Четыре простейшие операции над мнимыми числами, а именно суммирование, вычитание, умножение и деление выполняются точно так же, как и с действительными числами, но с учетом равенства (4).

1. КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО И ЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА

Следующий шаг – это введение комплексного числа, которое является суммой двух чисел, действительного и мнимого:

$$z = x + iy. \quad (6)$$

Здесь x и y называются действительной и мнимой частью комплексного числа и записываются как

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (7)$$

Они изменяются в следующих пределах:

$$-\infty < x < \infty \quad \text{и} \quad -\infty < y < \infty.$$

Равенство (6) задает комплексное число в алгебраической форме. Число z удобно изображать как точку на плоскости, показанной на рис. 1. Эту плоскость обычно называют комплексной плоскостью.

Рассмотрим теперь основные операции над комплексными числами, представленными в алгебраической форме. Суммирование и вычитание двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

выполняется следующим образом:

$$z_3 = z_2 \pm z_1 = (x_2 \pm x_1) + i(y_2 \pm y_1), \quad (8)$$

т.е. указанные операции производятся отдельно для действительных и мнимых частей.

Операция умножения записывается как

$$z_3 = z_2 z_1 = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = x_2 x_1 + i^2 y_2 y_1 + i(x_2 y_1 + y_2 x_1),$$

или $z_3 = x_3 + iy_3$,

где

$$x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad y_3 = x_2 y_1 + x_1 y_2. \quad (9)$$

Прежде чем рассмотреть частное двух комплексных чисел, полезно ввести число

$$z^* = x - iy, \quad (10)$$

комплексно сопряженное числу

$$z = x + iy.$$

Таким образом, действительные части чисел z и z^* совпадают, а мнимые части различаются знаком. Взаимное расположение z и z^* показано на рис. 1. Из равенств (9) следует, что произведение z и z^* является действительным числом. Действительно, перемножая эти числа, получим

$$zz^* = x^2 + y^2. \quad (11)$$

Последнее равенство позволяет нам определить операцию деления двух комплексных чисел:

$$z_3 = z_2/z_1.$$

Это отношение можно представить как

$$z_3 = \frac{z_2 z_1^*}{z_1 z_1^*}$$

или

$$z_3 = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Следовательно,

$$x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (12)$$

Заметим, что два комплексных числа равны

$$z_1 = z_2,$$

если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Однако в отличие от действительных чисел, неравенства

$$z_2 > z_1 \text{ или } z_2 < z_1$$

не имеют никакого смысла.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Для того чтобы определить степень и корень из комплексного числа, представим его в другой форме. Из рис. 1 видно, что положение числа на комплексной плоскости можно определить параметрами r и ϕ . Здесь r явля-

ется расстоянием от начала координат до точки и называется модулем комплексного числа. Второй параметр, ϕ , называется аргументом комплексного числа, и это угол между действительной осью x и радиусом r . Оба параметра изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq r < \infty \text{ и } 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (13)$$

Предполагается, что модуль r – всегда число положительное. Если точка, описывающая комплексное число, движется против часовой стрелки, ее аргумент увеличивается. В частности, аргументы всех положительных мнимых чисел равны $\pi/2$, а для отрицательных мнимых чисел $\phi = \pi$.

Из приведенного на рис. 1 треугольника следует, что

$$x = r \cos \phi \text{ и } y = r \sin \phi. \quad (14)$$

Соответственно, формулу (6) можно переписать как

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (15)$$

Последнее выражение задает тригонометрическую форму комплексного числа. Очевидно, что равенства (14) устанавливают связь между алгебраической и тригонометрической формами. Операции суммирования и вычитания для обеих форм выполняются одинаковым образом.

Рассмотрим теперь как записывается произведение комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2).$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} z_3 = z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_2 \sin \phi_1) + \\ &+ i(\sin \phi_2 \cos \phi_1 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] \end{aligned}$$

или

$$z_3 = r_1 r_2 [\cos(\phi_2 + \phi_1) + i \sin(\phi_2 + \phi_1)], \quad (16)$$

так как

$$\sin(\phi_2 \pm \phi_1) = \sin \phi_2 \cos \phi_1 \pm \sin \phi_1 \cos \phi_2$$

и

$$\cos(\phi_2 \pm \phi_1) = \cos \phi_2 \cos \phi_1 \mp \sin \phi_2 \sin \phi_1.$$

Таким образом, в соответствии с (16)

$$r_3 = r_1 r_2 \text{ и } \Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (17)$$

Следовательно, тригонометрическая форма очень удобна для выполнения операции умножения. Аналогично, произведение нескольких комплексных чисел запишется как

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где

$$r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n \text{ и } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n. \quad (18)$$

Деление двух комплексных чисел приводит к следующему выражению:

$$z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}$$

или

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1),$$

так как

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) = 1.$$

Поэтому мы получаем

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

или

$$z_3 = \frac{r_2}{r_1} \text{ и } \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (19)$$

откуда видны преимущества данной формы комплексного числа.

Рассмотрим теперь степень комплексного числа

$$W = z^n. \quad (20)$$

Здесь

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и

$$W = R(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Из выражений (18) следует, что

$$R = r^n \text{ и } \theta = n \varphi. \quad (21)$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить степень комплексного числа, нужно найти степень его модуля r^n , а аргумент φ умножить на n .

В частности, если $r = 1$, равенство (20) записывается как

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi. \quad (22)$$

Последнее соотношение – это хорошо известная формула Муавра, которая позволяет заметно упростить вычисление произведения комплексных чисел, а также применяется для многих других целей. Полагая, например, $n = 2$, получим

$$\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi,$$

$$\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi.$$

Определим теперь операцию взятия корня из комплексного числа:

$$W = z^{\frac{1}{n}}. \quad (23)$$

Здесь n – целое число, и

$$W = R(\cos \theta + i \sin \theta), z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

По определению, вместо выражения (23) можно записать

$$W^n = z,$$

$$R^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Используя формулу Муавра, получим

$$R^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r[(\cos(\phi + 2\pi k) + i \sin(\phi + 2\pi k)]. \quad (24)$$

Аргумент ϕ в правой части этого выражения заменен на $\phi + 2\pi k$. Это можно сделать, поскольку k является целым числом.

Из равенства двух комплексных величин следует, что

$$R^n = r \text{ или } R = r^{\frac{1}{n}} \quad (25)$$

и

$$\theta_n = \frac{\phi + 2\pi k}{n},$$

где

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Следовательно, равенства (25) позволяют вычислить n корней комплексного числа. Следует заметить, что, полагая $k = n$, мы снова получаем корень, соответствующий $k = 0$.

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Для того чтобы получить третью форму комплексного числа, воспользуемся разложением в ряд Тейлора функций

$$\sin x, \cos x, e^z,$$

где x – действительное, а z – комплексное число.

Как известно, указанные разложения имеют следующий вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad (26)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Полагая $z = ix$, последнее разложение можно записать как

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} + \dots$$

или

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right). \quad (27)$$

Сравнение формул (26) и (27) показывает, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (28)$$

Это замечательное соотношение, полученное Эйлером, имеет многочисленные приложения. Из него следует, например, что

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad (29)$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1 \text{ или } e^{i2\pi n} = 1, \quad (30)$$

где n – целое число.

Из выражений (15) и (28) мы приходим к экспоненциальной форме комплексного числа

$$z = r e^{i\phi}. \quad (31)$$

Эта форма представления удобна для выполнения операций умножения и деления, а также для возведения комплексных чисел в степень и для нахождения их корней. Кроме того, из выражения (31) мы имеем

$$\ln z = \ln r + i\phi. \quad (32)$$

Таким образом, действительная часть $\ln z$ равняется логарифму модуля z , а мнимая часть совпадает с аргументом (фазой) ϕ этого числа.

Другое важное применение экспоненциальной формы комплексных чисел связано с представлением синусоидальных функций. Рассмотрим в качестве иллюстрации функцию времени

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (33)$$

где A – амплитуда, ϕ – начальная фаза. Оба этих параметра не зависят от времени, но могут быть функциями от точки наблюдения.

Согласно определению (28),

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Следовательно,

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

или

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}, \quad (34)$$

так как A – действительное число.

Формулу (34) можно также записать как

$$s(t) = A \operatorname{Re} e^{i\varphi} e^{i\omega t}. \quad (35)$$

Вводя обозначение

$$\mathcal{A} = A e^{-i\varphi}, \quad (36)$$

мы вместо (34) получим следующее выражение:

$$s(t) = \operatorname{Re} \mathcal{A} e^{i\omega t}, \quad (37)$$

где функция \mathcal{A} называется комплексной амплитудой. Она содержит информацию об амплитуде и начальной фазе синусоидальной функции. Представление (37) бывает очень полезным при решении дифференциальных уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим уравнения, которые можно представить в следующем виде:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f_1(t). \quad (1)$$

Здесь a_n – некоторые действительные постоянные коэффициенты, t – аргумент, например время наблюдения.

Уравнение (1) обычно описывает поведение линейной системы, схематически показанной на рис. 1 в виде прямоугольника. Соответственно, функцию $f_1(t)$ можно интерпретировать как входное воздействие на систему, а функцию $x(t)$ – как реакцию системы на это воздействие, т.е. выход. Следует заметить, что реальные системы, такие как упругая или акустическая среда, а также механические и электрические устройства довольно часто ведут себя как линейные системы.

Из уравнения (1) следуют два важных свойства линейных систем. По определению, функция $x(t)$ является решением этого уравнения. Далее, очевидно, что если в уравнении (1) функцию $f_1(t)$ заменить на $mf_1(t)$, где m есть некоторый постоянный коэффициент, то решением этого уравнения будет $mx(t)$. Другими словами, если вход в систему увеличить в m раз, то во столько же раз увеличится и выход. Предположим, что существуют функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x_1(t) = f_1(t)$$

и

$$a_n \frac{d^n x_2(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x_2(t) = f_2(t).$$

Суммируя эти уравнения и учитывая, что

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + \frac{d^n x_2(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} (x_1 + x_2),$$

получим



Рис. 1. Модель линейной системы

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad (2)$$

где

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (3)$$

Очевидно, что этот результат можно обобщить на произвольное число функций $f_i(t)$. Это означает, что выход системы, вызванный суммой входов $f_i(t)$, является суммой соответствующих выходов, т.е. если

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t),$$

то

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t). \quad (4)$$

Как отмечалось ранее, этот результат является очень важным свойством линейных систем. Прежде чем использовать выражение (4), рассмотрим однородное уравнение.

2. Полагая в (1) $f(t) = 0$, получим

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) обычно описывает реакцию линейной системы (например, смещение масс или ток в электрической цепи) после окончания действия функции $f(t)$.

Решение этого уравнения можно найти методом проб и ошибок. Предположим сначала, что функция $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = A e^{rt}, \quad (6)$$

где A и r не зависят от аргумента t .

Подставляя формулу (6) в (5), получим

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения мы получили алгебраическое уравнение того же порядка n . Конечно, решение уравнения (5) можно искать и в несколько другой форме:

$$x(t) = B e^{-rt},$$

однако конечный результат от этого не изменится.

Уравнение (7) называется характеристическим и имеет n корней:

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n,$$

каждый из которых может быть действительным, мнимым или комплексным.

Для каждого корня r_i функция

$$A_i e^{r_i t}$$

удовлетворяет уравнению (5). Снова применяя принцип суперпозиции (4), получим полное решение однородного уравнения в виде

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t}. \quad (8)$$

Очевидно, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (5), независимо от того, какие значения принимают коэффициенты A_i , т.е. данное уравнение для каждого набора корней r_i имеет бесконечное число решений. Иными словами, неизвестные коэффициенты A_i невозможно определить, имея только однородное дифференциальное уравнение. Для того чтобы их вычислить, необходимо задать начальные условия, т.е. указать значения функции $x(t)$ и ее производных в некоторый момент времени t :

$$x(t) = \varphi_0, \quad x'(t) = \varphi_1, \quad x''(t) = \varphi_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t) = \varphi_{n-1}. \quad (9)$$

Примеры решения уравнения (5) приводятся в главе 2.

3. Обсудим далее решение неоднородного уравнения и рассмотрим три возможных случая, а именно, когда $f(t)$ является синусоидальной, периодической или почти произвольной функцией.

Покажем, прежде всего, что решение уравнения (1) можно представить в виде следующей суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t). \quad (10)$$

Здесь $x_0(t)$ – произвольное решение однородного уравнения (5), $x_1(t)$ – некоторое частное решение уравнения (1).

Действительно, подстановка равенства (10) в уравнение (1) дает

$$\begin{aligned} & \left[a_n \frac{d^n x_0(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_0(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_0(t) \right] + \\ & + \left[a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_1(t) \right] = f(t). \end{aligned} \quad (11)$$

По определению, выражение в первых скобках равняется нулю, а выражение во вторых скобках – функции $f(t)$. Таким образом, функция $x(t)$, задаваемая равенством (10), является также решением неоднородного уравнения (1). Решение $x_0(t)$ уравнения (5) было приведено ранее. Определим теперь второе слагаемое в правой части выражения (10) – частное решение $x_1(t)$. Полагая

$$f(t) = C \cos(\omega t + \phi), \quad (12)$$

перепишем (1) в виде

$$a_n \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_1(t) = C \cos(\omega t + \phi). \quad (13)$$

Помимо этого, рассмотрим также похожее уравнение

$$a_n \frac{d^n y_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y_1(t) = C \sin(\omega t + \phi). \quad (14)$$

Умножая его на i , а затем складывая оба уравнения, получим

$$a_n \frac{d^n z_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} z_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 z_1(t) = C e^{-i(\omega t + \phi)} = \mathcal{C} e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Здесь

$$\mathcal{C} = C e^{-i\phi}$$

является комплексной величиной, и

$$z_1(t) = x_1(t) - iy_1(t). \quad (16)$$

Существенно, что

$$x_1(t) = \operatorname{Re} z_1(t). \quad (17)$$

Поскольку в правой части уравнения (15) вместо синусоидальной функции стоит

$$\mathcal{C} e^{-i\omega t},$$

его решение заметно упрощается.

Это связано с тем, что

$$\frac{d}{dt} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}, \quad \frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega t} = (-i\omega)^2 e^{-i\omega t}$$

и в общем случае

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-i\omega t} = (-i\omega)^n \omega^n e^{-i\omega t}.$$

Благодаря этому поиск функции z_i становится чрезвычайно простой задачей.

Предположим, что

$$z_1(t) = \mathcal{B} e^{-i\omega t}. \quad (18)$$

Подстановка этого выражения в формулу (15) дает

$$\mathcal{B} [(-i\omega)^n a_n + (-i\omega)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0] = \mathcal{C}$$

и

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{C}}{(-i\omega)^n a_n + (-i\omega)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0}. \quad (19)$$

Таким образом, переход от равенства (13) к соотношению (15) приводит к значительному упрощению. Действительно, вместо дифференциального уравнения мы получили простейшее алгебраическое уравнение относительно неизвестного \mathcal{B} .

Формулу (19) можно переписать в виде

$$\mathcal{Z} = B e^{-\beta}, \quad (20)$$

где B и β – соответственно амплитуда и аргумент комплексного числа \mathcal{Z} .

Как следует из выражения (18), частное решение уравнения (15) дается формулой

$$z_1(t) = B e^{-\beta} e^{-i\omega t}$$

или

$$z_1(t) = B e^{-(\omega t + \beta)}. \quad (21)$$

Наконец, воспользовавшись равенством (17), получим частное решение исходного уравнения (13) в виде

$$x_1(t) = B \cos(\omega t + \beta). \quad (22)$$

Величины B и β , определяемые формулой (19), являются соответственно амплитудой и фазой частного решения. Сравнивая равенства (12) и (22), приходим к выводу о том, что если входом в систему является синусоидальная функция, то частным решением будет также синусоидальная функция, имеющая ту же частоту, но другие амплитуду и фазу. Таким образом, мы показали, что использование формулы Эйлера заметно упрощает решение уравнения (13). Такой подход обычно называется операционным методом.

4. Согласно формуле (10) полное решение (выход линейной системы) является суммой двух слагаемых: одно из них можно назвать свободными колебаниями, и оно представляет собой решение $x_0(t)$ однородного уравнения; другое является частным решением $x_1(t)$, характеризующим вынужденные колебания системы.

Таким образом, имеем

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t} + B \cos(\omega t + \beta). \quad (23)$$

Здесь величины r_n являются корнями характеристического уравнения. Чтобы определить неизвестные коэффициенты A_i , необходимо использовать (так же, как и в случае однородного уравнения) начальные условия, сформулированные для полного решения $x(t)$. Из выражения (23) видно, что вход линейной системы всегда приводит к возникновению свободных и вынужденных колебаний. Поскольку реальные системы всегда являются диссипативными, свободные колебания $x_0(t)$ со временем затухают, и в конце концов остаются только вынужденные колебания. В этом смысле можно сказать, что если входом в систему была синусоидальная функция, то выходом будет также синусоидальная функция той же частоты, при условии, что свободные колебания к этому моменту времени полностью исчезли. Это – одно из наиболее важных свойств линейных систем. Однако необходимо отметить, что в начальный период времени, когда еще присутствуют свободные колебания, полный выход $x(t)$ может существенно отличаться от синусоидальной функции.

5. Мы описали операционный метод, позволяющий найти решение обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда входом является синусоидальная функция. Оказывается, что аналогичный подход можно использовать при решении линейного дифференциального уравнения с частными производными при условии, что его решение описывается синусоидальной функцией.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (24)$$

где α – постоянный коэффициент, U – синусоидальная функция времени:

$$U = A \cos(\omega t + \phi). \quad (25)$$

В общем случае амплитуда A и фаза ϕ зависят также от координат точки наблюдения x , y и z . Поскольку функция U является произведением двух сомножителей

$$A(x, y, z, t) \text{ и } \cos[\omega t + \phi(x, y, z)]$$

и каждый из них зависит от координат, подстановка этих сомножителей в формулу (24) не приводит ни к какому упрощению. В то же время использование комплексных переменных, в частности формулы Эйлера, становится очень эффективным. Чтобы воспользоваться этим, перепишем еще раз уравнение (24) в виде

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (26)$$

Здесь

$$V = A \sin(\omega t + \phi). \quad (27)$$

Далее, умножая выражение (26) на $-i$ и складывая получившееся равенство с уравнением (24), находим

$$\nabla^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (28)$$

где

$$Z(x, y, z, t) = U(x, y, z, t) + iV(x, y, z, t) \quad (29)$$

или

$$Z(x, y, z, t) = \mathbf{Z}(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (30)$$

и

$$\mathbf{Z}(x, y, z) = A e^{-i\phi}. \quad (31)$$

Следует отметить, что решение уравнение (15) также представляется в виде произведения двух функций, одна из которых, \mathbf{Z} , является функцией только координат, а другая, $e^{-i\omega t}$, зависит только от времени.

Подстановка выражения (30) в уравнение (28) дает

$$\nabla^2 \mathbf{Z} + k^2 \mathbf{Z} = 0. \quad (32)$$

Здесь

$$k^2 = i \alpha \omega.$$

Таким образом, вместо уравнения диффузии (28) мы пришли к уравнению Гельмгольца (32) относительно комплексной амплитуды \mathbf{Z} . Поскольку уравнение (32) не содержит времени, найти его решение относительно просто. Как следует из формулы (31), зная \mathbf{Z} , затем можно найти амплитуду и фазу функции U , задаваемой выражением (25). Аналогичный подход можно использовать и при решении волнового уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Синусоидальные функции

$$A \sin x \text{ и } B \cos x \quad (1)$$

являются простейшими примерами периодических функций, причем их производные и первообразные – также периодические функции. Конечно, существует бесконечное множество других периодических функций, удовлетворяющих соотношению

$$f(x + l) = f(x), \quad (2)$$

где l обозначает период.

Примеры таких функций приведены на рис. 1.

2. В начале 19-го века Фурье показал, что почти любую периодическую функцию можно представить в виде следующей суммы:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega_1 x, \quad (3)$$

которая называется рядом Фурье.

Здесь n – целое число, a_n и b_n – постоянные коэффициенты, не зависящие от аргумента x , и

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{l}. \quad (4)$$

Перепишем выражение (3) в виде

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \omega_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n x, \quad (5)$$

где

$$\omega_n = n \omega_1 \text{ или } \omega_n = \frac{2\pi}{l_n}, \quad l_n = \frac{l}{n}. \quad (6)$$

По определению, ω_n и l_n – соответственно частота и период члена ряда с номером n .

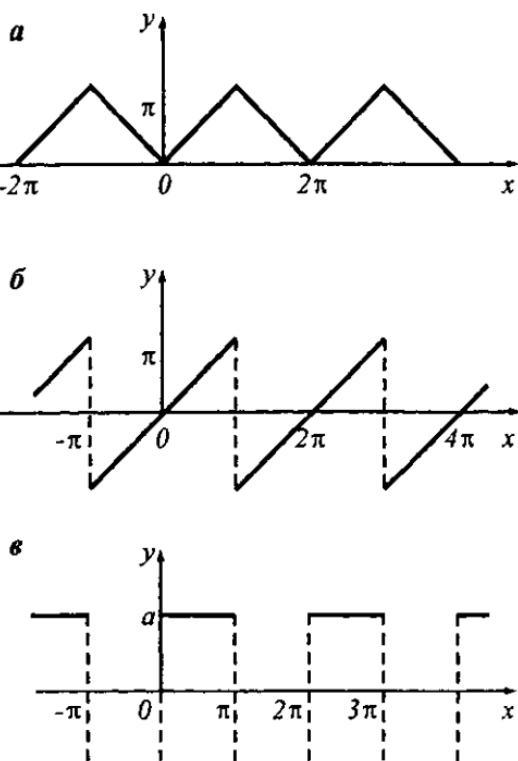
В частности, величины $l_1 = l$ и $\omega_1 = \omega$ первых членов

$$a_1 \sin \omega_1 x \text{ и } b_1 \sin \omega_1 x$$

характеризуют период и частоту самой функции $f(x)$.

Согласно формуле (3) функция $f(x)$ представляется в виде суммы трех

Рис. 1. Периодические функции



членов. Первый член b_0 является постоянной. Второй член представляет собой бесконечную сумму синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды и частоты:

$$a_1 \sin \omega_1 x + a_2 \sin 2\omega_1 x + a_3 \sin 3\omega_1 x + \dots$$

Существенно, что первое слагаемое этой суммы и функция $f(x)$ имеют одинаковые частоты. Однако с ростом n увеличивается и частота ω_n , задаваемая формулой (6).

Следует заметить, что разность последовательных частот равняется ω_1 :

$$\omega_n - \omega_{n-1} = n \omega_1 - (n-1) \omega_1 = \omega_1 \text{ или}$$

$$\Delta \omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{l}. \quad (7)$$

Третий член в выражении (5) также представляет собой бесконечную сумму:

$$a_1 \cos \omega_1 x + a_2 \cos 2\omega_1 x + a_3 \cos 3\omega_1 x + \dots$$

Фазовый сдвиг между членами с номером n в первой и второй сумме равняется $\pi/2$. Члены этих сумм называются гармониками n -го порядка; в частности b_0 является гармоникой нулевого порядка.

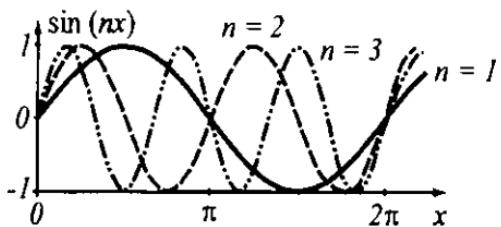
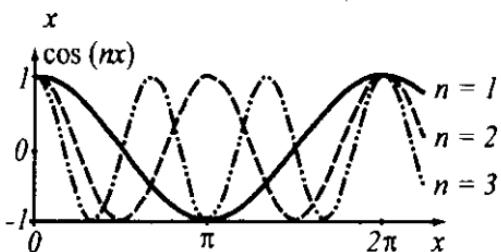


Рис. 2. Функции $\sin nx$ и $\cos nx$ для $n = 1, 2, 3$



Поведение первых членов ряда, имеющих нулевые амплитуды, показано на рис. 2.

3. Очевидно, что равенство (5) выполняется только при определенных значениях коэффициентов a_n и b_n , и наша задача состоит в том, чтобы их найти. Процедура поиска этих коэффициентов состоит из трех шагов. Начнем с того, что определим b_0 . Умножая левую и правую части формулы (5) на dx и интегрируя в пределах от $-l/2$ до $l/2$, получим

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx = b_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin n\omega_1 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos n\omega_1 x dx. \quad (8)$$

Поскольку

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin(n\omega_1 x) dx = -\frac{\cos(n\omega_1 x)}{n\omega_1} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = -\frac{1}{n\omega_1} \left[\cos\left(n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) - \cos\left(-n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) \right] = 0$$

и

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin(n\omega_1 x) dx = \frac{\sin(n\omega_1 x)}{n\omega_1} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{n\omega_1} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) - \sin\left(-n \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2}\right) \right] = 0,$$

формула (8) принимает вид

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx = l b_0 \quad (9)$$

или

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx. \quad (10)$$

Таким образом, константа b_0 определяется площадью под кривой $f(x)$ на интервале, равном периоду l .

Чтобы найти коэффициенты a_n , умножим обе части формулы (5) на $\sin(m\omega_1 x)$ и снова проинтегрируем в пределах интервала l . В результате получим

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin(m\omega_1 x) dx = b_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin(m\omega_1 x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n, \quad (11)$$

где

$$M_n = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_1 x) dx$$

и

$$N_n = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos(n\omega_1 x) \sin(m\omega_1 x) dx.$$

Здесь $m \geq 1$ – любое целое число.

Используем далее равенства

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

и

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u,$$

а также

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

и

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Из них следует, что

$$\begin{aligned}\sin u \sin v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)], \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)], \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)].\end{aligned}\tag{14}$$

Полагая

$$u = n \omega_1 x \text{ и } v = m \omega_1 x,$$

получим

$$M_n = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(n-m)\omega_1 x] dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(n+m)\omega_1 x] dx \right]. \tag{15}$$

Последнее выражение равняется нулю при $n \neq m$, поскольку разность $n - m$ и сумма $n + m$ являются целыми числами.

При $n = m$ имеем

$$M_n = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2m\omega_1 x) dx \right]$$

или $M_n = 1/2$.

Таким образом,

$$M_n = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{1}{2} & n = m. \end{cases} \tag{16}$$

Соответственно, первая сумма в правой части выражения (15) преобразуется к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n M_n = \frac{1}{2} a_m. \tag{17}$$

Из последнего равенства (14) видно, что все интегралы N_n исчезают:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n N_n = 0. \tag{18}$$

Учитывая, что первый член

$$b_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(m\omega_1 x) dx$$

также равняется нулю, окончательно получим

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin(m\omega_1 x) dx = a_m \frac{l}{2}.$$

или, заменяя m на n ,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx. \quad (19)$$

Теперь, умножая обе части формулы (5) на $\cos(n\omega_1 x)$ и выполняя операции, аналогичные предыдущим, получим

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx. \quad (20)$$

Таким образом, мы показали, что ряд, стоящий в правой части выражения (5), совпадает с периодической функцией $f(x)$, если его коэффициенты b_0 , a_n и b_n связаны с функцией $f(x)$ следующим образом:

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \quad (21)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx.$$

Как отмечалось ранее, l является периодом функции $f(x)$, а $\omega_1 = 2\pi/l$ – ее частотой.

Прежде чем обсуждать свойства рядов Фурье, заметим следующее:

- а) ряды Фурье представляют функцию на интервале, равном ее периоду l ;
- б) выражения (21) для коэффициентов были получены в предположении, что начало координат $x = 0$ совпадает с серединой этого интервала. Например, если поместить точку $x = 0$ в начало этого интервала, то замена переменной

$$y = x + \frac{l}{2}$$

даст

$$\begin{aligned}b_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \\a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \\b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(n\omega_1 x) dx.\end{aligned}\tag{22}$$

4. Имеется два случая, при которых ряды Фурье имеют значительно более простой вид. Рассмотрим сначала случай, когда $f(x)$ является четной функцией:

$$f(x) = f(-x),\tag{23}$$

Поскольку произведения

$$f(x) \sin(n\omega_1 x) \text{ и } f(x) \cos(n\omega_1 x)$$

являются соответственно нечетной и четной функциями по отношению к середине интервала $x = 0$, коэффициенты a_n должны равняться нулю:

$$a_n = 0$$

и ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_1 x),\tag{24}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx\tag{25}$$

и

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos(n\omega_1 x) dx.\tag{26}$$

И наоборот, если функция $f(x)$ нечетная:

$$f(x) = -f(-x),$$

то подынтегральное выражение

$$f(x) \cos(n\omega_1 x)$$

также является нечетной функцией и, следовательно,

$$b_n = 0,$$

включая член b_0 .

Соответственно, вместо формулы (5) имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_1 x) \quad (27)$$

и

$$a_n = \frac{4}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega_1 x) dx, \quad (28)$$

поскольку подынтегральное выражение является четной функцией.

Ряды Фурье для функций, представленных на рис. 1, имеют следующий вид:

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right),$$

$$y = 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

и

$$y = \frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

5. Полезно также представить ряды Фурье в несколько другой форме. Как следует из выражения (5),

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega_1 x) + b_n \cos(n\omega_1 x)]. \quad (29)$$

Полагая в этом выражении

$$a_n = A_n \sin \phi_n \quad \text{и} \quad b_n = A_n \cos \phi_n, \quad (30)$$

получим

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 x - \phi_n). \quad (31)$$

Из последней формулы видно, что периодическая функция описывается в общем случае постоянным слагаемым b_0 и бесконечной суммой синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды и начальные фазы. В то

же время, частоты ω_n этих функций задаются выражениями (6). Наборы чисел $A(\omega_n)$ и $\phi(\omega_n)$ обычно называются амплитудным и фазовым спектром периодической функции $f(x)$ (рис. 3, а, б). Поскольку разность последовательных частот равняется конечному ненулевому значению ω_1 , такие спектры называются дискретными. Очевидно, что с увеличением периода l , разница между частотами ω_n и ω_{n-1} стремится к нулю. Можно ожидать, что в пределе $l \rightarrow \infty$ спектр становится непрерывным.

6. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на интервале

$$-l/2 < x < l/2$$

следующим условиям Дирихле:

а) $f(x)$ является однозначной, конечной функцией, имеющей конечное число разрывов;

б) $f(x)$ имеет конечное число максимумов и минимумов.

Тогда из теории рядов Фурье следует, что во всех точках непрерывности ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, а в точке разрыва x_0 – к значению

$$\frac{f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)}{2}. \quad (32)$$

Здесь ε – бесконечно малая величина. Данное среднее значение двух предельных ординат естественно рассматривать в качестве значения функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Некоторые из приведенных выше примеров иллюстрируют это интересное поведение рядов Фурье.

Заметим, что функции x^{-1} и $\sin x^{-1}$ не удовлетворяют условиям Дирихле на интервале, содержащем точку $x = 0$.

7. Чтобы продемонстрировать сходимость рядов Фурье, рассмотрим функцию

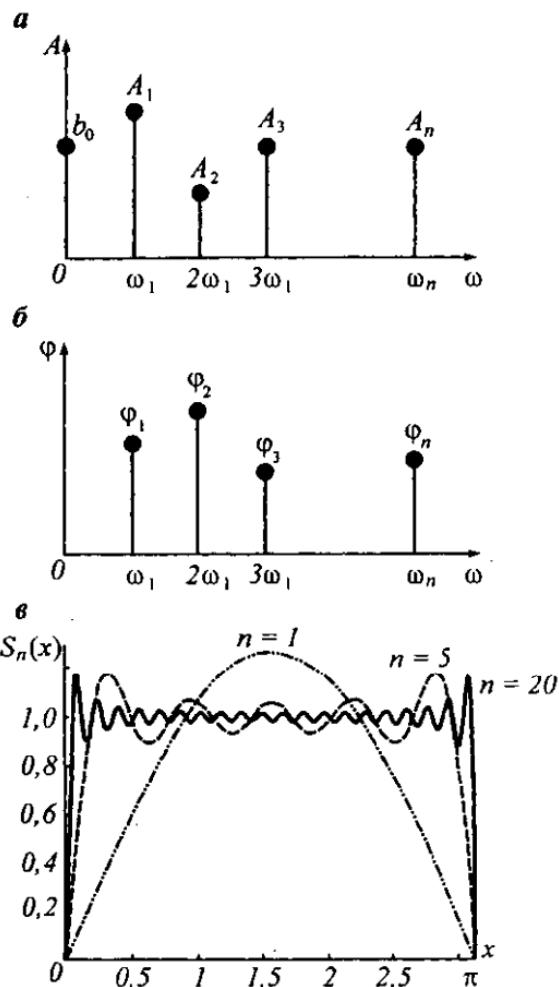
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0, \\ +1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots \right]. \quad (33)$$

Отсюда видно, что, несмотря на то, что функция $f(x)$ принимает постоянные значения в пределах каждого полунериода, на котором каждый из членов ряда (33) является синусоидальной функцией, сумма s_n достаточно быстро сходится к $f(x)$ на интервале $0 < x < \pi$ (рис. 3). Тем не менее, сходимость становится более медленной по мере приближения к точке разрыва, например $x = 0$, что приводит к необходимости учитывать все больше членов ряда. Как видно из рис. 3, в, с увеличением числа n растет также количество максимумов суммы s_n , и первый максимум приближается к точке $x = 0$. Отсюда следует, что в пределе $n \rightarrow \infty$ значение этого максимума стремится к (1.18), а предельная ордината функции $f(x)$ равна единице. Это явление было от-

Рис. 3. Спектр периодической функции. Эффект Гиббса



крыто Гиббсом. Таким образом, представлять функции их рядами Фурье вблизи точек разрыва не удобно.

8. Ранее мы нашли частное решение $s_1(x)$ линейного дифференциального уравнения для случая, когда входом является синусоидальная функция

$$f(x) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (34)$$

В этом случае

$$s_1(x) = C \cos(\omega t + \tau). \quad (35)$$

Предположим теперь, что входом является периодическая функция $f(x)$ с периодом l и частотой $\omega_1 = 2\pi/l$.

Тогда частное решение $s_1(x)$ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$a_n \frac{d^n s_1(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_1(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 s_1(x) = f(x). \quad (36)$$

Используя разложение в ряд Фурье, получим

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 x - \Phi_n). \quad (37)$$

Применяя принцип суперпозиции, получим, что частное решенис можно записать в виде ряда Фурье

$$s_1(x) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 x - \tau_n), \quad (38)$$

члены которого можно легко найти.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как было показано ранее, периодическую функцию

$$f(x) = f(x + l),$$

удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить в виде ряда Фурье

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega_1 x, \quad (1)$$

где

$$\omega_n = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{l}, \quad (2)$$

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin n\omega_1 x dx \quad (4)$$

и

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos n\omega_1 x dx.$$

С увеличением периода разность частот

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_1 = \frac{2\pi}{l} \quad (5)$$

стремится к нулю, и, соответственно, в пределе $l \rightarrow \infty$ спектр функции $f(x)$ становится непрерывным. В то же время функция $f(x)$ перестает быть периодической. Чтобы осуществить переход к предельному случаю, ряды Фурье необходимо соответствующим образом модифицировать.

2. Учитывая формулу Эйлера

$$e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi,$$

вместо выражения (1) запишем

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega_1 x} - e^{-in\omega_1 x}}{2i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\omega_1 x} + e^{-in\omega_1 x}}{2} = \\ = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - ia_n}{2} e^{in\omega_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n + ia_n}{2} e^{-in\omega_1 x} \quad (6)$$

или

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{in\omega_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x}. \quad (7)$$

Здесь

$$c_n = \frac{b_n + ia_n}{2} \quad \text{и} \quad c_n^* = \frac{b_n - ia_n}{2}. \quad (8)$$

Как следует из выражений (4),

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{in\omega_1 x} dx$$

и

$$c_n^* = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx. \quad (9)$$

Здесь n – положительное целое число, $n = 1, 2, 3, \dots$

Сравнение равенств (9) показывает, что

$$c_n^* = c_{-n}. \quad (10)$$

Ряд (7) можно записать в двух различных формах, а именно:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x}$$

или

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\omega_1 x} \quad (11)$$

при условии, что в обеих суммах отброшен член с $n = 0$.

Из выражений (3) и (9) следует, что

$$b_0 = c_0 = c_0^*, \quad (12)$$

и, следовательно, равенства (11) можно переписать как

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x} \quad (13)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{in\omega_1 x}, \quad (14)$$

и эти суммы уже содержат член с $n = 0$. Следует заметить, что каждая из представленных выше сумм совпадает с рядом Фурье (1), поскольку мнимые части сумм равны нулю.

Покажем теперь, как эти достаточно сложные выражения можно эффективно использовать для получения рядов Фурье в предельном случае, когда период l стремится к бесконечности.

Рассмотрим прежде всего выражения (9) и (13):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_1 x}$$

и

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx.$$

Из них следует, что

$$f(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) e^{in\omega_1 x} dx \right] e^{-in\omega_1 x}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) e^{i\omega_n x} dx \right] e^{-i\omega_n x} \Delta\omega, \quad (15)$$

так как

$$l = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \Delta\omega.$$

В пределе, при $l \rightarrow \infty$ поведение функции $f(x)$ перестает быть периодическим и становится произвольным. Поскольку разность соседних частот стремится

к нулю, $\Delta\omega \rightarrow 0$, сумму в правой части равенства (15) можно заменить интегралом по всем частотам:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega, \quad (16)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (17)$$

Последние два выражения представляют собой преобразование Фурье функции $f(x)$, а функция $F(\omega)$ называется спектром функции $f(x)$ или ее комплексной амплитудой. Таким образом, в отличие от периодических функций, произвольная функция $f(x)$ описывается синусоидальными гармониками всех возможных частот. Иными словами, такие функции характеризуются непрерывным спектром. Функцию $f(x)$ можно представить в несколько другом виде.

Используя выражения (9) и (14), получим

$$f(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right] e^{i\omega_n x}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right] e^{i\omega_n x} \Delta\omega.$$

Рассматривая предельный случай, приходим к другой паре преобразований Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (18)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Безусловно, обе формы преобразования Фурье являются эквивалентными, и в дальнейшем мы будем использовать первую из них, задаваемую выражениями (16) и (17).

3. По определению, спектр $F(\omega)$ является комплексной функцией, которую можно записать как

$$F(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega) \quad (19)$$

или

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}. \quad (20)$$

Подставляя последнее выражение в преобразование Фурье (16), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{-i(\omega x - \varphi)} d\omega. \quad (21)$$

Это означает, что произвольную функцию можно представить в виде бесконечной суммы синусоидальных колебаний

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi} |F(\omega)| e^{-i(\omega x - \varphi)}, \quad (22)$$

имеющих бесконечно малые амплитуды и разные частоты и фазы.

Рассмотрим некоторые важные свойства этого спектра. Прежде всего, из равенств (17) следует, что спектры $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ равны друг другу:

$$F_1(\omega) = F_2(\omega), \quad (23)$$

если равны соответствующие функции

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Из выражений (17) и (19) имеем

$$\operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

или

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad (24)$$

и

$$\operatorname{Im} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx. \quad (25)$$

Следовательно, действительная и мнимая части спектра являются соответственно четной и нечетной функциями частоты:

$$\operatorname{Re} F(\omega) = \operatorname{Re} F(-\omega)$$

и

$$\operatorname{Im} F(\omega) = -\operatorname{Im} F(-\omega). \quad (26)$$

4. Перепишем выражение (16) в другой форме. Используя формулу Эйлера, получим

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F)(\cos \omega x - i \sin \omega x) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x + \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega + \\
 &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im} F(\omega) \cos \omega x - \operatorname{Re} F(\omega) \sin \omega x] d\omega. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что подынтегральное выражение во втором слагаемом является нечетной функцией, формулу (27) можно упростить следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x + \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega. \tag{28}$$

Поскольку $f(x)$ – действительная функция, естественно, что мнимая часть выражения (27) обращается в ноль.

Предположим, что функция $f(x)$ ведет себя следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ f(x) & x \geq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Далее, полагая, что x в выражении (28) является отрицательным, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos(-\omega x) + \operatorname{Im} F(\omega) \sin(-\omega x)] d\omega$$

или

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x - \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x] d\omega. \tag{30}$$

Здесь x положительно.

Суммирование выражений (28) и (29) дает

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x d\omega$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

поскольку подынтегральное выражение является четной функцией частоты ω .

Таким же образом из выражений (28) и (30) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \quad (32)$$

Последние два равенства называют соответственно косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Они позволяют вычислить значения произвольной функции $f(x)$, задаваемой выражением (29), по одной только действительной, либо мнимой части спектра. Интегрирование осуществляется только по положительным частотам. Заметим, что из формул (31) и (32) следует, что

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re} F(\omega) \cos \omega x \, d\omega = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} F(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \quad (33)$$

Последнее выражение показывает, что мнимая и действительная части спектра связаны друг с другом. Иными словами, функции

$\operatorname{Re} F(\omega)$ и $\operatorname{Im} F(\omega)$

не являются независимыми.

5. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих поведение спектра $F(\omega)$.

Пример 1

Рассмотрим следующую функцию $f(x)$:

$$f(x) = f_0 \begin{cases} 0 & x < 0, \\ e^{-\alpha x} & x \geq 0. \end{cases} \quad (34)$$

Ее поведение показано на рис. 1, a. Как следует из формулы (18),

$$F(\omega) = f_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i\omega x} dx = \frac{f_0}{\alpha - i\omega}$$

или

$$F(\omega) = f_0 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + i f_0 \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (35)$$

Очевидно, что действительная и мнимая части спектра являются соответственно четной и нечетной функциями. Таким образом, амплитудный и фазовый спектры есть

$$|F(\omega)| = \frac{f_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \Phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\alpha}. \quad (36)$$

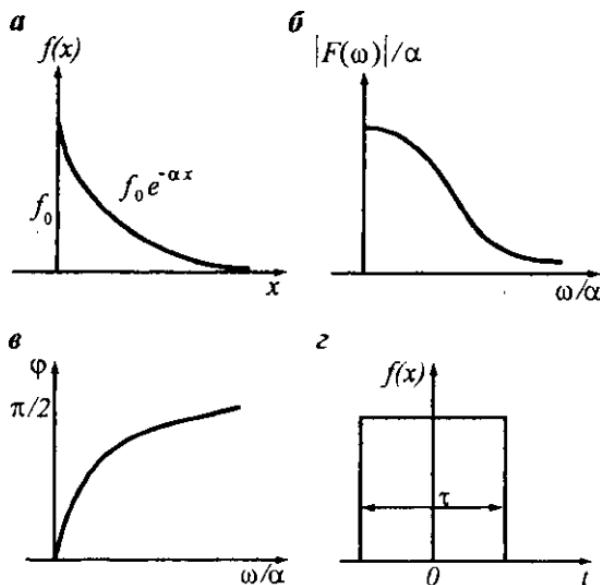


Рис. 1. Функции и спектры

Их поведение существенным образом зависит от параметра α (рис. 1 б, в). В предельном случае ступенчатой функции, $\alpha = 0$, имеем

$$|F(\omega)| = \frac{f_0}{\omega} \quad \text{и} \quad \Phi = \frac{\pi}{2}. \quad (37)$$

В частности, отсюда видно, что в спектре доминируют низкие частоты.

Пример 2

В этом примере рассмотрим функцию, описывающуюся прямоугольным импульсом (рис. 1, г):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau}{2}, \\ f_0 & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

Спектр этой функции дается выражением

$$F(\omega) = f_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} dt = \frac{f_0}{i\omega} e^{i\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

или

$$F(\omega) = f_0 \tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}, \quad (39)$$

где $f_0 \tau$ – площадь импульса.

В этом случае спектр функции является действительным, т.е. все синусоидальные гармоники имеют нулевую фазу. Поведение амплитуды определяется отношением

$$\frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}.$$

6. Ранее мы описали решение линейного дифференциального уравнения для случаев, когда правая часть $f(x)$ являлась либо синусоидальной, либо периодической функцией.

Рассмотрим теперь случай функции $f(x)$ с практически произвольной зависимостью от x . Спектр этой функции известен и задается формулой (17).

Частное решение $s_1(x)$ уравнения

$$a_n \frac{d^n s_1(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_1(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 s_1(x) = f(x) \quad (41)$$

можно также представить как

$$s_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (42)$$

В этом выражении функция $s_1(x)$ и ее спектр $S_1(\omega)$ неизвестны.

Подстановка соотношений (16) и (42) в равенство (41) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a_n(-i\omega)^n + a_{n-1}(-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0] S_1(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (43)$$

Поскольку равенство функций означает, что равны также и их спектры, получаем

$$S_1(\omega) = \frac{F(\omega)}{a_n(-i\omega)^n + a_{n-1}(-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (44)$$

Зная спектр $S_1(\omega)$ частного решения и применяя первое из преобразований Фурье (16), мы можем определить функцию $s_1(x)$.

7. Следующее применение преобразования Фурье связано с решением дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\nabla^2 U - \alpha \frac{\partial U}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (45)$$

Здесь U – функция времени и координат точки наблюдения, α и β – не-

которые постоянные. Например, полагая либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$, мы приходим соответственно к волновому уравнению или к уравнению диффузии.

Чтобы упростить решение уравнения (45), используем интеграл Фурье

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(x, y, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (46)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (45) дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 \mathcal{U} + i\omega \alpha \mathcal{U} + \beta \omega^2 \mathcal{U}] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

или

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} = 0, \quad (47)$$

где

$$k^2 = i \omega \alpha + \beta \omega^2. \quad (48)$$

Уравнение (47) является уравнением Гельмгольца относительно комплексной амплитуды $\mathcal{U}(x, y, z, \omega)$, и оно, конечно, проще уравнения (45), поскольку функция \mathcal{U} не зависит от времени. Найдя функцию \mathcal{U} и используя далее интеграл Фурье, мы можем получить решение уравнения (45).

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Предположим, что скалярный потенциал падающей волны меняется во времени как функция, показанная на рис. 1. Очевидно, что эту функцию можно представить в виде суммы ступенчатых функций с амплитудой $\Delta\phi(\tau)$, где τ – момент времени, в который происходит возбуждение волны. Предположим также, что потенциал вторичной волны, вызванной единичной ступенчатой функцией, известен и описывается функцией $A(t - \tau)$. Очевидно, что источник в виде ступенчатой функции с амплитудой $\Delta\phi(\tau)$ возбуждает волну, потенциал которой равен

$$\Delta\phi(\tau) A(t - \tau).$$

Суммируя действие всех ступенчатых функций в различные моменты времени, находим, что вторичный потенциал равняется

$$\phi_s(t) = \phi(0)A(t) + \sum_{\tau=0}^{t=t} \Delta\phi(\tau)A(t - \tau) = \phi(0)A(t) + \sum_{\tau=0}^{t=t} \frac{\partial\phi(\tau)}{\partial\tau} A(t - \tau)\Delta\tau.$$

Как видно из рис. 1, приближенное выражение

$$\Delta\phi(\tau) = \frac{\partial\phi(\tau)}{\partial\tau} \Delta\tau$$

становится все более точным по мере уменьшения интервала $\Delta\tau$.

В предельном случае, когда $\Delta\tau$ стремится к нулю, мы получаем интеграл свертки

$$\phi_s(t) = \phi(0)A(t) + \int_0^t \frac{\partial\phi(\tau)}{\partial\tau} A(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

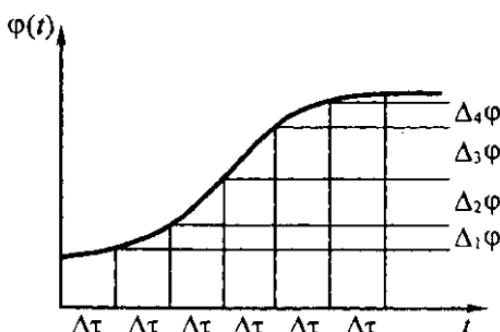


Рис. 1. Представление функции через интеграл Дюамеля

который называется интегралом Дюамеля. Он позволяет для произвольной падающей волны найти вторичную волну, при условии, что функция $A(t - \tau)$ известна. Интегрируя по частям правую часть формулы (1), получим

$$\Phi_S(t) = \phi(t)A(0) + \int_0^t \phi(\tau) \frac{\partial A(t - \tau)}{\partial \tau} \Delta \tau. \quad (2)$$

Этот интеграл называют второй формой интеграла Дюамеля. Точно такое же представление можно использовать в тех линейных системах, для которых известен отклик ступенчатой функции.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акустическая длина 382, 409
Акустический потенциал 170, 445
Бесселя
 уравнение 198
 функции 198, 263
Ближняя зона волнового поля 169, 180, 215
Бойля – Мариотта закон 125
Буге формула 406
Векторная линия 452
Волновая группа 332, 342
Волновое уравнение 65, 66, 122, 129, 170, 193, 246, 298, 348, 363
Волновое число 104, 162, 217, 329, 343
Волновой фронт 63, 195
Волны
 акустические 110, 136, 245
 головные 216, 420
 дилатации 110, 169, 181
 нестационарные 157, 192, 235, 332
 отраженные 69, 87, 369, 409
 плоские 86, 166, 181, 204, 205
 поперечные 99, 158
 преломленные 69, 371, 413
 продольные 99, 110
 проходящие 69, 87, 409
 растяжения 63
 Рэлея см. Рэлея волны
 сжатия 63
 синусоидальные 64, 104
 Стонли см. Стонли волны
 стоячие 108, 200, 332
 сферические 169, 276
 упругие 138, 245, 449
 цилиндрические 169, 192
 Р 110
Вторичные источники 231, 277, 371
Галилея принцип 16
Ганкеля функции 200, 202
Гаусса – Остроградского
 теорема 236, 237
 формула 458
Гельмгольца
 теорема 470
 уравнение 136, 157, 198, 235, 238, 373
 формула 154, 235, 240
Гельмгольца – Кирхгофа формулы 235, 274, 298
Геометрическая акустика 308, 330, 373
Годограф 402
Градиент скалярного поля 376, 445
Границные условия 66, 106, 129, 149, 171, 241, 246, 394, 427
Гука закон 32, 61, 71, 96, 99, 119, 130
Грина
 формулы 237, 475
 функция 237, 244, 252

Гюйгенса – Френеля принципы 283, 393, 427

Дальняя зона волнового поля 181

Дюамеля интеграл 73, 513

Даламбера

метод 67

формула 300

Дивергенция векторного поля 128, 236, 455

Дилатация 128, 174

Длина волны 105, 123, 163, 190, 214, 247, 262, 28

Дираха дельта-функция 23

Дифракция воли 216, 367, 373

Дифракционная картина 258, 262

Длина пробега

атома 111

молекул 123

Жесткость 95

пружины 32, 61

струны 99

Закон сохранения

импульса 29

массы 128

энергии 20, 144, 154

Затухание 37, 49, 99, 151

критическое 40

Зоммерфельда условия 244

Импульс

начальный 39

силы 16, 59

центра масс 28

частицы 16

Интенсивность волны 218, 259, 368

Интерференция

волн 215, 216, 256, 332

конструктивная 109, 221, 256, 338

деструктивная 109, 221, 256, 338

Источник

линейный 155, 194

элементарный 169, 194, 219

Кирхгофа

граничные условия 248, 266

приближение 371

теория 235, 245, 255

формула 154, 274

Колебания

свободные 32, 34

сниусоидальные 35, 50

вынужденные 32

Количество движения 16, 20, 126

Комплексная амплитуда 136

потенциала 136

смещения 57, 136

Координатные линии 442, 446

Коэффициент

жесткости пружины 32, 61

трения 41

Кривизна луча 378

Кулона – Мора закон 37, 50

Лагранжа интеграл 381, 409, 423

Лапласа уравнение 160, 474

Лапласа интеграл 270

Лапласиан 133, 320, 472, 473
Логарифмический декремент затухания 43
Луч
 отраженный 384, 409
 преломленный 394, 409, 413
Метод стационарной фазы 346
Модуль всестороннего сжатия 169
Начальные условия 23, 36, 153, 170, 186, 298, 349, 487
Начальная фаза колебаний 35
Ньютона законы 13, 32, 49, 65, 73, 91, 103, 120, 129, 280
Нормальные моды 105, 109
Нормальные поверхности векторного поля 459
Однородное полупространство 158
Первичный источник 144, 162, 215, 433
Период колебаний 36, 97, 186, 338
Плотность потока энергии 144
Поле
 векторное 18, 136, 236, 449
 волновое 74, 135, 170, 174, 215, 369
 времен прихода волны 428
 гравитационное 19, 32, 129, 136, 241
 источников 136, 381
 магнитное 136
 скалярное 375, 429, 445
 электрическое 19, 136, 241
Пойнтинга вектор 110, 140, 144, 147, 400
Положение равновесия 42
Поларизация
 линейная 24
 эллиптическая 24
Поток энергии 110, 140, 144
Поток векторного поля 452
Принцип суперпозиции 45, 73, 194, 223
Промежуточная зона волнового поля 169, 180
Пуассона
 дифракция 316
 формула 298, 307
Работа 16, 20
Резонанс 47
Регулярная точка 18, 128, 149, 171, 425, 445
Ротор векторного поля 18, 131, 381, 464
Рэлея волны 25, 110
Свободная граница 89
Свободная поверхность 159
Сдвиг фаз 36, 217, 231, 369
Сила 14
 внешняя 22, 34, 79
 внутренняя 100
 гравитации 158
 консервативная 20
 сопротивления 37
 трения 39, 49
 упругая 32, 37, 79
Скалярный потенциал 134, 170, 235, 284, 373
Скалярное поле 374, 429, 445
Скорость
 волны 60
 групповая 71, 332
 фазовая 71, 125, 192, 332
 частиц 13

Снеллиуса законы 231, 369, 371, 389, 423

Стационарная точка 357, 361

Стокса

теорема 381

формула 468

Стоячие волны 25, 110

Суперпозиция

синусоидальных волн 65, 107

синусоидальных гармоник 98

сферических волн 194, 216

элементарных волн 203, 215

Теорема

взаимности 249

единственности 110, 149

Тейлора ряд 118, 344, 414, 482

Точка поворота луча 418

Удельные потери 44

Уравнение

волновое 59, 122, 129, 193, 301

луча 377, 398

переноса 321

характеристическое 38, 486

эйконала 323

Фаза волны 104, 217

Ферма принцип 381

Фраунгофера

приближение 234, 253

дифракция 255

Френеля

дифракция 225, 255, 266, 271

зоны 288

интегралы 269

постулат 288

приближение 223, 253

Френеля – Кирхгофа дифракция 251

Фурье

интеграл 54, 204, 271, 348, 503

преобразование 275

ряд 98, 136, 492

Циркуляция векторного поля 461

Частота

внешней силы 46

естественная 35

круговая 104, 162, 186

свободных колебаний 45

собственная 110

угловая 23

Частотный отклик 51

Эйконал 320, 371, 373

Эйлера формула 41, 191, 483, 489

Элементарный объем 28, 111, 191, 280, 442, 4

Элементарная масса 13, 73

Энергия

кинетическая 19, 20, 34, 60, 140

потенциальная 16, 20, 34, 60, 140

полная 29

механическая 20, 34

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аки К., Ричардс П. Количествоенная сейсмология. – М.: Мир, 1983.
2. Альпин Л. М., Даев Д.С., Коринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. – М.: Недра, 1985.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970.
4. Бреходовских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973.
5. Буллен К. Введение в теоретическую сейсмологию. – М.: Мир, 1966.
6. Гурвич И.С., Боганик Г.Н. Сейсмическая разведка. – М.: Недра, 1980.
7. Зоммерфельд А. Оптика. – М.: ИЛ, 1953.
8. Кауфман А.А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. – М.: Недра, 1997.
9. Кольский Х. Волны напряжения в твердых телах. – М.: ИЛ, 1955.
10. Ландау Л.Д., Лишинец Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
11. Тимошенко С.П., Янг Д., Уивер Х. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985.
12. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976.
13. Angot A. Compliments de Mathematiques. – Paris, 1957.
14. Baker B. and Compson E. The mathematical theory of Huygens principle. – Oxford: Clarendon Press, 1950.
15. Butkov E. Mathematical Physics. – Addison-Wesley Publishing Co., 1968.
16. Dix H. Seismic Prospecting for Oil. – Harper Brothers, 1952.
17. Dobrin M., Savit C. Introduction to Geophysical Prospecting. – McGraw-Hill Book Co., 1988.
18. Ewing W., Jardetzky W., Press F. Elastic waves in layered media. – McGraw-Hill Book Co., 1957.
19. Graff K. Wave motion in elastic solids. – Dover Publications, Inc., 1975.
20. Grant F. and West G. Interpretation Theory in Applied Geophysics. – McGraw-Hill Book Co., 1965.
21. Havelock T. The propagation of disturbances in dispersive media. – Cambridge University Press, 1914.
22. Kaufman A. Geophysical Field Theory and Methods, Part A. – Academic Press, Inc., 1992.
23. Lamb H. Hydrodynamics. – Dover Publications, Inc., 1963.
24. Morse P. and Ingard K. Theoretical Acoustics. – McGraw-Hill Book Co., 1968.
25. Officer C. Introduction to the Theory of Sound Transmission. – McGraw-Hill Book Co., 1958.
26. Slater J. Mechanics. – McGraw-Hill Book Co., 1947.
27. Towne D. Wave Phenomena. – Dover Publications, Inc., 1967.
28. White J. Seismic Waves. – McGraw-Hill Book Co., 1965.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Кауфман Александр Аркадьевич
Ледышкин Анатолий Львович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
Часть 3. АКУСТИЧЕСКИЕ И УПРУГИЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ
В ГЕОФИЗИКЕ

Заведующий редакцией *Т.К. Рубинская*
Редактор издательства *А.И. Вороновская*
Переплёт художника *Н.П. Новиковой*
Художественный редактор *Н.П. Новикова*
Художник-график *Н.А. Вороновский*
Технический редактор *Л.Н. Фомина*
Корректор *Т.Ю. Шамонова*
Оператор *Ю.А. Титова*
Компьютерная верстка *Е.Б. Рагузина*

Изд. лиц. № 171678 от 03.06.98. Подписано в печать с репродуцированного оригинал-макета 26.11.2001. Формат 60×90 $\frac{1}{16}$. Гарнитура "Таймс". Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,5. Уч.-изд. л. 38,0. Тираж 1000 экз. Заказ 1673/952. Набор выполнен на компьютерной технике.

ООО "Недра-Бизнесцентр". 125047, Москва, пл. Тверская застава, 3
Смоленская областная типография им. Смирнова
214000, г. Смоленск, просп. им. Ю. Гагарина, 2